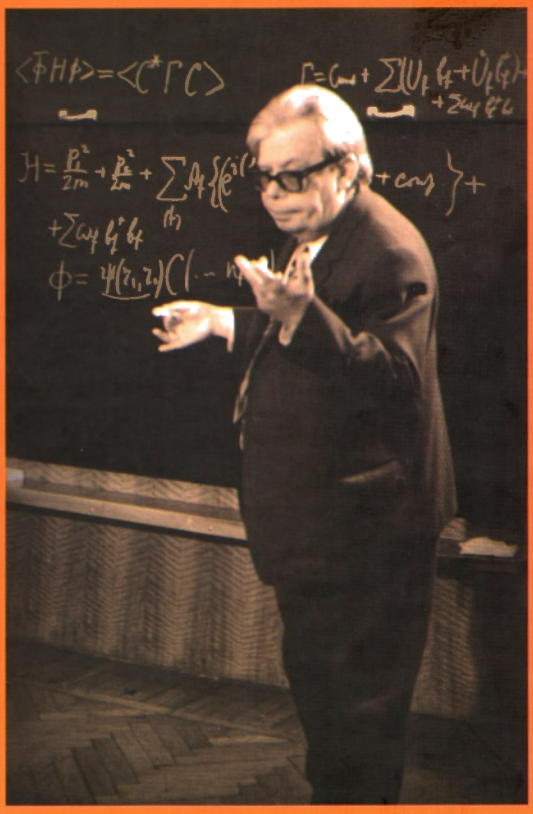
Н.Н.Боголюбов

ИЗБРАННЫЕ УНИВЕРСИТЕТСКИЕ ЛЕКЦИИ



Издательство
Московского университета

Let us denote

$$M = \max_j |n_j| ; \quad N = 8M .$$

Then, we can number the natural sequence of N numbers: 0,1,...N-1 so that the derived sequence

$$\alpha_1, \ldots$$

has the property.

Any integer q satis

$$|n| <$$

$$2\pi R\left(n \frac{\alpha_k}{N}\right) < 1$$

in which q is any posi

$$1 - \frac{N^2}{m^2(q}$$

can be represented as a

$$n = n_p + n$$

of numbers of the syste

---

x) ...

We also have:

$$I_\lambda = \bar{p} - \int \varphi^*(x)\bar{p}\varphi(x)dx - \sum_{(f)} \frac{1}{V} \mathcal{U}_f^2 \frac{\bar{f}}{(\omega_f - \bar{f}\bar{\lambda})^2} \left| \int e^{-ifx} \varphi^*(x)\varphi(x)dx \right|^2 - \quad (7)$$

$$= \bar{p} - \int \varphi^*(x)\bar{p}\varphi(x)dx - \sum_{(f)} \frac{2}{V} \frac{\bar{f}(\bar{f}\bar{\lambda})\omega_f}{(\omega_f^2 - (\bar{f}\bar{\lambda})^2)^2} \left| \int e^{-ifx} \varphi^*(x)\varphi(x)dx \right|^2 .$$

Minimizing Λ_λ with respect to φ we get the equation:

$$\left\{ \frac{p^2}{2m} - \bar{\lambda}p^2 - \frac{2}{V}\sum_{(f)} \frac{\mathcal{U}_f^2 \omega_f}{\omega_f^2 - (\bar{f}\bar{\lambda})^2} e^{ifx} \int e^{-ifx} \varphi^*(x)\varphi(x)dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{V}\sum_{(f)} \frac{\mathcal{U}_f^2 \omega_f}{\omega_f^2 - (\bar{f}\bar{\lambda})^2} \left| \int e^{-ifx} \varphi^* \ldots \right. \right\} \varphi(x) = E_\lambda \varphi(x) . \quad (8)$$

...unction $\theta(x)$ by putting:

(9)

$$\ldots)dx + \bar{\lambda}\bar{p} \quad (10$$

$$\ldots \bar{p})\theta(x) \quad (11)$$

$$\ldots x)dx|^2 , \quad (12)$$

$$\ldots x)\theta(x)dx + \quad (13)$$

1955 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. VII, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Глубокоуважаемому М. А. Леонтовичу на память от авторов
Н. Боголюбов
Зубарев

19 11/VII 55

Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле

Н. Н. Боголюбов и Д. Н. Зубарев

§ 1. Введение

Задача об исследовании движения заряженных частиц в неоднородном электрическом и магнитном поле представляет интерес для целого ряда областей теоретической и прикладной физики.

Например, в космиче... ...ектродинамике возникает задача об исследовании траекторий ко... Эта же задача возникает ... боров, применяемых в ра...

Точное интегрирован... в неоднородном электри... в большинстве случаев ... тодами. Однако и это н... В частности, трудности ... мыми в том случае, если ... шое количество оборот... в этом случае возможно ... который позволяет обой...

Допустим, что маг... ского радиуса.

где $R_L = \frac{w}{\omega_H}$ — радиус

$\omega_H = \frac{eH}{mc}$ — лармор...

w — скорос... ному ...

Тогда заряженная ... вой линии, вращаясь ... и «дрейфует» в напр... Воспользовавшись эти... усредненные уравнен... окружности.

Выполнению усло...

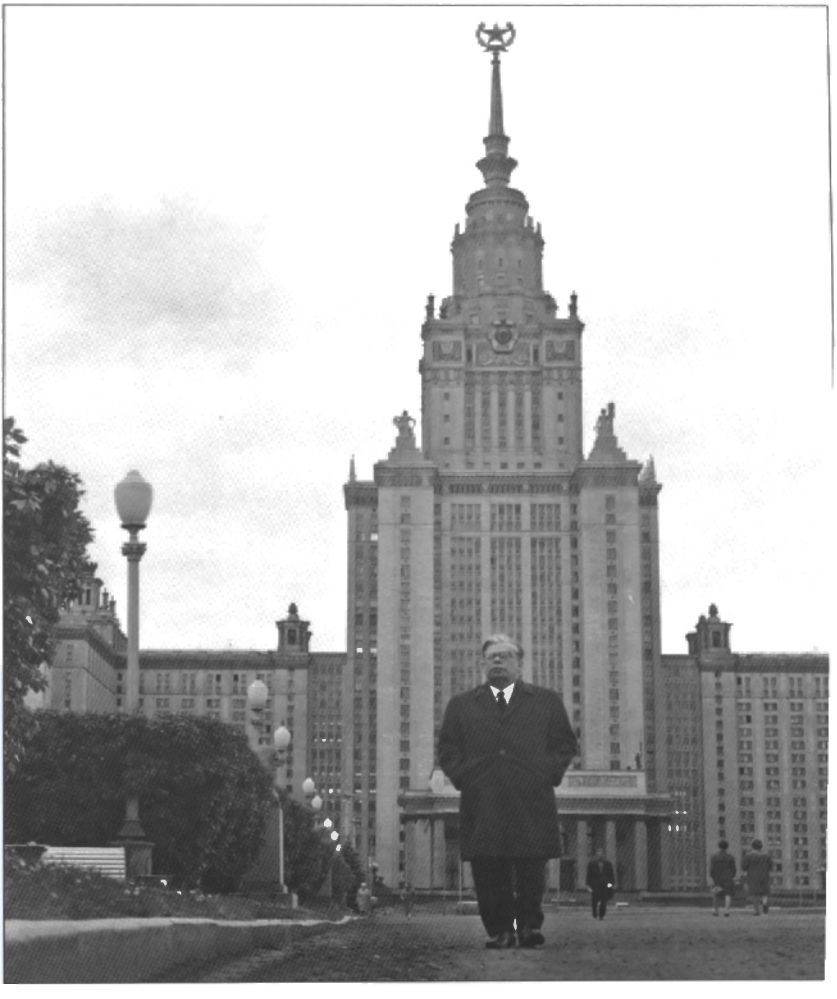
Для препринта

На моем препринте прошу сделать надпись *)

*) To be printed in the Proceedings of the International Congress on Many Bodies Problems. Utrecht. (Ивнесь 1960) June 1960

~~[illegible]~~

This is the text of the report made by the auth... ~~N. Bogolubov~~ at the International Congress on Many Bodies Problems. Utrecht (Buwons 1960.) June 13, 1960.



Н. Боголюбов

К столетию со дня рождения
Н.Н. Боголюбова

N.N. Bogoliubov

SELECTED UNIVERSITY LECTURES

Moscow University Press

2009

Н.Н. Боголюбов

ИЗБРАННЫЕ УНИВЕРСИТЕТСКИЕ ЛЕКЦИИ

Издательство Московского университета

2009

УДК 51
ББК 22
Б74

Издание осуществлено при финансовой поддержке МГУ имени М. В. Ломоносова

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Боголюбов Н.Н.

Избранные университетские лекции / Николай Николаевич Боголюбов; [редактор-составитель А. Д. Суханов]. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. — 776 с.

ISBN 978-5-211-05692-3

Книга представляет собой специально подготовленное для студентов и преподавателей МГУ издание избранных университетских лекций Н.Н.Боголюбова, дополненное несколькими его знаменитыми докладами, большинство из которых было прочитано или опубликовано в МГУ.

Материалы издания скомпонованы в три части:

I. Математические проблемы нелинейной и статистической механики; II. Общие проблемы теории конденсированной материи; III. Новые методы квантовой теории многих тел и квантовой теории поля.

Содержащиеся в них лекции и доклады рассчитаны на широкую аудиторию студентов, аспирантов, научных сотрудников и преподавателей — математиков, механиков и физиков. В Приложениях для справок приведены также основные даты жизни и деятельности Н.Н.Боголюбова и перечень его научных работ, включенных в выпущенное в 2005—2009 гг. издательством «Наука» наиболее полное Собрание его научных трудов в 12 томах (серия «Классики науки»).

Для студентов, аспирантов, научных работников и преподавателей, специализирующихся в области теоретической и математической физики, а также истории механики и физики.

Bogoliubov N. N.

Selected University Lectures / Nikolai Nikolaevich Bogoliubov; [ed.-in-chief A. D. Sukhanov]. — M.: Moscow University Press, 2009. — 776 p.

ISBN 978-5-211-05692-3

The book is an edition of the selected university lectures of N. N. Bogoliubov added with his several well-known reports, the majority from which has been read or published in the Moscow State University. It is specially prepared for students and teachers of the Moscow State University.

Materials of the edition are grouped in three parts:

I. Mathematical problems of nonlinear and statistical mechanics. II. The general problems of the condensed matter theory; III. New methods of the quantum theory of many bodies and the quantum field theory. In Appendices for inquiries the basic dates of the N. N. Bogoliubov's life and activity, and the list of his scientific works published in the Collection of his scientific papers [N.N.Bogoliubov. Collection of Scientific Papers; in 12 Vol. (ed.-in-chief A. D. Sukhanov); Russian Academy of Sciences. Moscow: Nauka, 2005–2009. — (Classics of Science)] are included also.

Lectures and reports containing in this book are addressed to a wide audience of students, post-graduate students, researchers and teachers — mathematicians, mechanics and physicists specializing in area of the theoretical and mathematical physics, and also in mechanics and physics history.

ISBN 978-5-211-05692-3

© Московский государственный университет, 2009
© Издательство Московского университета, 2009
© Суханов А.Д., составление, 2009

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ БОГОЛЮБОВ

В августе 2009 года исполняется 100 лет со дня рождения Николая Николаевича Боголюбова — великого ученого, одного из создателей современной теоретической и математической физики. Полвека его научная и педагогическая деятельность была связана с Московским университетом, где он создал всемирно известную научную школу в области теоретической и математической физики.

Чтобы дать более полное представление об уникальности его творческой личности, уместно вспомнить некоторые эпизоды его биографии.

Его детские годы прошли на Украине. Во время Гражданской войны семья переехала из Киева в село на Полтавщине, где он и пошел в школу. Как вспоминал его брат, по всем предметам будущий академик учился блестяще, и только по арифметике получал в лучшем случае четверку. Учитель не раз говорил ему: «Из тебя, Коля, математика не выйдет!» Но это пророчество, к счастью, не сбылось.

Математикой он начал заниматься самостоятельно по тем редким книгам, которые можно было найти дома. При этом многие формулы, например всю тригонометрию, он вывел сам. Именно тогда сформировалась его привычка к самостоятельной работе и впервые проявились незаурядные трудолюбие, работоспособность и решимость преодолеть любые трудности.

Аттестат об окончании семи классов сельской школы был единственным документом об образовании, который Боголюбов получил за всю свою жизнь. Следующим документом стал диплом доктора математики!

Упорный труд позволил рано раскрыться его неординарным способностям: к тринадцати годам знания Боголюбова по математике и физике соответствовали почти полному университетскому курсу. В это время он приезжает в Киев и становится полноправным участником научных семинаров в Киевском университете. И вскоре академик Н. М. Крылов приглашает его к себе на кафедру математической физики.

В 1924 году Боголюбов — ему тогда было 15 лет — написал свою первую научную работу и вскоре стал известен как автор оригинального построения новой тогда теории почти периодических функций. За его новаторскую работу, посвященную прямым методам вариационного исчисления для нерегулярных функционалов, Академия наук Болоньи в 1930 году присудила ему премию, а общее собрание физико-математического отделения Украинской академии наук присвоило ученую степень доктора математики.

В это время Н. Н. Боголюбов и его учитель академик Н. М. Крылов создают новую область математической физики, названную ими нелинейной механикой. Они разработали новые методы асимптотического интегрирования нелинейных уравнений, описывающих колебательные процессы. О важности этих работ красноречиво свидетельствует то, что за ними очень внимательно следили в США, где их сразу переводили и переиздавали. Доходило до того,

что ряд статей Боголюбова, опубликованных на украинском языке, переводился на английский раньше, чем появлялся их русский перевод.

В послевоенные годы Николай Николаевич заинтересовался сначала классической, а затем и квантовой статистической механикой и решил ряд важнейших проблем в этой области. В частности, он сформулировал основы квантовой теории конденсированного состояния материи и объяснил природу экспериментально наблюдаемых явлений сверхтекучести жидкого гелия и сверхпроводимости металлов при низких температурах, математически строго доказав, что в этих системах возникает новое состояние, в котором трение отсутствует.

Н. Н. Боголюбов — автор важнейшей общефизической идеи спонтанного нарушения симметрии, которая в наши дни заняла центральное место в физике конденсированного состояния материи, теории элементарных частиц и в моделях эволюции Вселенной.

В 50-е годы Н. Н. Боголюбов обратился к принципиальным проблемам квантовой теории поля. Он сформулировал математически строгую аксиоматику этой теории и разработал методы, позволяющие в рамках квантовой теории поля вычислять физические характеристики процессов взаимодействия элементарных частиц. Интересно, что практически одновременно Н. Н. Боголюбов получает основополагающие результаты в самых разных разделах этой теории.

Так, в эти годы (совместно со своим учеником О. С. Парасюком) он создает последовательную теорию перенормировок в квантовой теории поля. Совместно со своим учеником Д. В. Ширковым Н. Н. Боголюбов предлагает и развивает метод ренормализационной группы, который впоследствии получит широкое применение в различных областях теоретической физики. А еще он доказывает дисперсионные соотношения для процессов пион-нуклонного рассеяния, что открыло возможность теоретического изучения процессов сильных взаимодействий элементарных частиц.

В середине 60-х годов, когда особенно актуальными стали проблемы структуры элементарных частиц и была предложена кварковая модель адронов, Н. Н. Боголюбов (совместно со своими учениками Б. В. Струминским и А. Н. Тавхелидзе) показал, что кварки должны обладать новой фундаментальной характеристикой — трехзначным квантовым числом, которое затем получило название «цвет». Эта концепция легла в основу современной теории сильных взаимодействий — так называемой квантовой хромодинамики.

Как отмечал один из его ближайших сотрудников, А. А. Логунов, главная черта научного стиля Н. Н. Боголюбова состояла в умении оценить ключевые проблемы и одновременно их принципиальную разрешимость, а затем, не останавливаясь ни перед какими трудностями, получить решение поставленной задачи. Для этого ему иногда даже приходилось создавать новый математический аппарат. Так, создание теории перенормировок потребовало серьезного развития теории обобщенных функций, а доказательство дисперсионных соотношений сопровождалось доказательством так называемой теоремы «об острие клина», открывшей новую главу в теории функций многих комплексных переменных.

Иногда Н. Н. Боголюбов возвращался к своим старым работам и с учетом новых результатов, полученных в этой области, решал новые задачи.

Так, например, в начале 60-х он построил теорию возмущений устойчивых квазипериодических решений неконсервативных систем дифференциальных уравнений, траектории которых образуют обмотку аналитического тора. Для этого Н. Н. Боголюбов объединил свой метод интегральных многообразий из работы 1945 года с итерационным методом, разработанным к тому времени А. Н. Колмогоровым для гамильтоновых систем. В результате им был создан метод «ускоренной сходимости» в нелинейной механике. Это позволило значительно расширить область применения исходного метода интегральных многообразий и решить задачу о существовании квазипериодических решений для общего случая многомерных тороидальных многообразий.

Николай Николаевич Боголюбов обладал необычайно высоким научным авторитетом. Об этом свидетельствуют высказывания многих крупнейших ученых мира, а также его многочисленные советские и иностранные награды и почетные звания. В 1957 году Московский университет отметил его работы по теории сверхпроводимости Ломоносовской премией I степени. В 1958 году ему была присуждена Ленинская премия «за разработку новых методов в квантовой теории поля и статистической физике, приведших, в частности, к обоснованию теорий сверхтекучести и сверхпроводимости». Н. Н. Боголюбов — трижды лауреат Государственной премии СССР, дважды Герой Социалистического Труда.

В 1943 году Н. Н. Боголюбов стал профессором кафедры теоретической физики физического факультета МГУ. С 1953 года он — заведующий кафедрой теоретической физики. В 1966 году Н. Н. Боголюбов создал на физическом факультете МГУ кафедру квантовой статистики, заведующим которой он работал до конца жизни.

Помимо преподавания в Московском университете Н. Н. Боголюбов вел огромную научно-организационную работу. Около 25 лет он был директором Объединенного института ядерных исследований в Дубне, долгие годы — академиком-секретарем Отделения математики Академии наук СССР. В течение ряда лет одновременно работал и директором Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР.

Так, были созданы условия, при которых преподаватели, аспиранты и студенты университета участвовали в исследованиях, проводимых в этих институтах, а сотрудники научно-исследовательских институтов читали спецкурсы в университете, и все вместе, независимо от места работы, участвовали в одних и тех же научных семинарах и конференциях. Это стало хорошим примером подлинной интеграции науки и образования.

Боголюбов представлял собой идеальный тип учителя. Всегда полный идей, готовый не только поставить перед учеником интересную и актуальную задачу, но и помочь ему пройти нелегкий путь ее решения. Человек, увлеченный наукой и всегда готовый к нелегкому труду познания, он, как магнит, притягивал талантливую молодежь и своим примером воспитывал настоящих ученых.

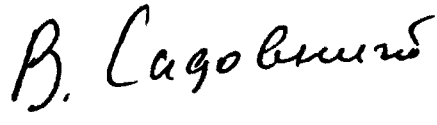
История науки знает разные типы ученых. Есть те, кто, понимая значимость полученных ими результатов, перспективность и эффективность найденных методов, мало заботится о том, чтобы научить этим методам других. Н. Н. Боголюбов был полной противоположностью. Получив интересный результат, высказав плодотворную идею, создав новый математический аппарат,

он сразу делал это достоянием своих коллег и учеников: читал об этом лекции, писал книги.

Каждый цикл его лекций становился настоящим событием научной жизни и приводил к бурному всплеску исследований его коллег и учеников. Из этих лекций родились и его знаменитые монографии по нелинейной механике, статистической механике, квантовой теории поля и теории элементарных частиц.

К столетнему юбилею Николая Николаевича в академической серии «Классики науки» было издано 12-томное собрание его трудов. Московский университет, стремясь приблизить его важнейшие идеи к молодым читателям, публикует «Избранные университетские лекции Н. Н. Боголюбова». Их изучение позволит современным студентам, аспирантам и преподавателям не только познакомиться с фундаментальными научными идеями великого ученого, но и увидеть сам процесс его научного творчества, приводящего к выдающимся результатам.

Ректор Московского университета
академик



В. А. Садовничий

Часть первая

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ФОККЕРА–ПЛАНКА (ПРИМЕНЕНИЕ К КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ)*

Совместно с Н. М. Крыловым

В обычном методе вывода уравнений Фоккера–Планка предполагается *a priori* существование вероятностей переходов из одного состояния рассматриваемой динамической системы в другое.

Однако, как нам кажется, можно идти другим путем, и в этой статье, так же как и в тех, которые будут опубликованы после нее, эти уравнения получены как уравнения первого приближения исходя из схемы теории возмущений, в которой гипотеза о существовании вероятностей переходов не используется.

При таком порядке идей мы получаем приближенные уравнения, которые можно использовать как в классической, так и в квантовой механике. Рассматривая их как уравнения классической механики, мы приходим к уравнениям типа уравнений Фоккера–Планка, коэффициенты которых явно выражены с помощью гамильтониана возмущения, в то время как применение методов квантовой механики приводит к таким уравнениям, из которых в отдельных случаях следуют выражения, присущие коэффициентам вероятностей квантовых переходов.

В методе, который здесь излагается, спектральные свойства возмущения имеют существенное значение, и мы надеемся осветить этот важный вопрос в следующих статьях более полно и точно, так как способы, использованные в этой статье, являются лишь приближенными.

Эти рассуждения, как нам кажется, открывают путь для пересмотра основ теории стохастических систем и делают возможным получение соответствующих уравнений как приближенных уравнений в схеме классической механики.

---

* Про рівняння Фоккера–Планка, що виводяться в теорії пертурбацій методом, основаним на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана (Об уравнениях Фоккера–Планка, получаемых в теории возмущений методом, основанным на спектральных свойствах гамильтониана возмущения) // Записки кафедри математичної фізики Інституту будівельної механіки АН УРСР. 1939. Т. 4. С. 5–80; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 58.

§ 1. Рассмотрим механическую систему S с N степенями свободы, которая подвергается очень малому возмущению. Предположим, что уравнения невозмущенного движения могут быть точно проинтегрированы путем разделения переменных, что бывает, например, в том случае, когда собственная энергия системы S имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{n,m}\alpha_{n,m}x'_n x'_m + \frac{1}{2}\sum_{n,m}\beta_{n,m}x_n x_m,$$

где x_n, x'_n — соответственно обобщенные координаты и скорости, а $\alpha_{n,m}$, $\beta_{n,m}$ — постоянные коэффициенты, не зависящие ни от координат, ни от скоростей.

Для большей конкретности предположим, что мы имеем дело именно с таким случаем и что квадратичные формы

$$\frac{1}{2}\sum_{n,m}\alpha_{n,m}x'_n x'_m, \quad \frac{1}{2}\sum_{n,m}\beta_{n,m}x_n x_m$$

положительно определены, так что при отсутствии возмущений состояние равновесия $x_i = 0$ является устойчивым. Тогда путем введения нормальных координат q_n и сопряженных канонических импульсов p_n можно выразить невозмущенную энергию как сумму энергий, которые относятся к различным нормальным колебаниям:

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\{p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2\}, \tag{1}$$

где ω_n обозначает собственную частоту n-го нормального колебания.

Теперь рассмотрим случаи, в которых энергия возмущений может быть представлена в виде

$$f(t)V(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N), \tag{2}$$

где V — полином по q_1, ..., q_N, p_1, ..., p_N и где возмущающая сила $f(t)$ может быть представлена как сумма гармонических составляющих:

$$f(t) = \sum_{\nu} a_\nu \cos(\nu t + \theta_\nu), \tag{3}$$

причем a_ν, θ_ν — постоянные.

Предположим, что соседние частоты ν стремятся друг к другу и что в пределе суммы $\sum\limits_{0\leqslant\nu\leqslant\omega} a_\nu^2$ можно заменить интегралами $\int\limits_0^\omega I(\nu)\,d\nu$.

Таким образом, мы рассматриваем случай непрерывного спектра, и функция $I(\nu)$ является спектральной интенсивностью возмущающей силы. Относительно фаз θ_ν предполагаем, что они неопределенны и могут принимать произвольные значения между 0 и 2π независимо друг от друга. Точнее, мы предполагаем, что фазы различных гармонических составляющих возмущающей силы являются независимыми в смысле теории вероятностей и что все их значения между 0 и 2π равновероятны.

В соответствии с этими предположениями вероятность того, что величины θ_ν принимают произвольные значения в области, определенной неравенствами

$$\theta'_\nu < \theta_\nu < \theta'_\nu + d\theta'_\nu,$$

должна равняться $\Psi \prod_\nu d\theta'_\nu$, где постоянный множитель Ψ определяется из соотношения

$$\Psi \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \prod_\nu d\theta_\nu = 1. \tag{4}$$

Оно следует из факта, что вероятность того, что величины θ_ν принимают произвольные значения между 0 и 2π, равна единице. Возмущение (2), удовлетворяющее всем упомянутым выше условиям, осуществляется, например, если рассматриваемую систему подвергнуть влиянию линейно-поляризованного, некогерентного излучения с конечной шириной спектра. Действительно, если в этом случае размеры системы очень малы по сравнению с длинами волн всех гармонических составляющих излучения и если влияние его магнитного поля можно не принимать во внимание, то, как хорошо известно, энергией возмущения является

$$E(t)P, \quad P = P(q_1, \dots, q_N),$$

где $E(t)$ — электрическое поле излучения, P — ортогональная проекция электрического момента системы на постоянное направление электрического поля излучения.

Следовательно, энергия возмущения действительно принимает вид (2) и предположения относительно амплитуд a_ν и фаз θ_ν удовлетворяются, поскольку излучение некогерентно и имеет, согласно нашим допущениям, конечную ширину спектра.

Заметим между прочим, что в данном случае спектральная интенсивность $I(\nu)$ пропорциональна энергии, проходящей через единицу поверхности за единицу времени и соответствующей единичному интервалу частот, соседних с ν.

Необходимо отметить, что рассуждения, положенные в основу этой работы, легко могут быть распространены также на значительно более общие формы энергии возмущения, однако условия относительно непрерывности спектра представляются существенными.

§ 2. Учитывая, что исходные гипотезы четко определены, рассмотрим уравнение возмущенного движения в таком виде:

$$\frac{dp_n}{dt} = -\omega_n^2 q_n - f(t)\frac{\partial V}{\partial q_n}, \quad \frac{dq_n}{dt} = p_n + f(t)\frac{\partial V}{\partial p_n} \quad (n = 1, \dots, N). \tag{5}$$

Эти уравнения позволяют вычислить значения величин $q_1, \dots, q_N$, $p_1, \dots, p_N$ по их начальным значениям, если фазы θ_ν, входящие в эти уравнения (посредством функций $f(t)$), известны. Однако, согласно принятым предположениям, фазы θ_ν являются статистическими величинами, значения которых неизвестны. С другой стороны, вообще говоря, даже начальные значения $q_1, \dots, q_N$, $p_1, \dots, p_N$ нам точно неизвестны.

Следовательно, приходится использовать статистическое описание движений рассматриваемой системы. Для этого вводим плотность вероятности

$$D = D(t, q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N, \ldots, \theta_\nu, \ldots),$$

т. е. такую величину, что выражение

$$D(t, q'_1, \ldots, q'_N, p'_1, \ldots, p'_N, \ldots, \theta'_\nu, \ldots)\, dq'_1 \ldots dq'_N\, dp'_1 \ldots dp'_N \prod_\nu d\theta'_\nu$$

представляет собой вероятность того, что переменные

$$q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N, \ldots, \theta_\nu, \ldots$$

принимают значения, которые удовлетворяли бы соответственно неравенствам

$$q'_k < q_k < q'_k + dq'_k,$$
$$p'_k < p_k < p'_k + dp'_k,$$
$$\theta'_\nu < \theta_\nu < \theta'_\nu + d\theta'_\nu.$$

Прежде всего, получим уравнение, которое позволяло бы определять плотность вероятности D по ее начальному значению. Для этого представим жидкость, заполняющую пространство Φ точек ξ с координатами $q_1, \ldots, q_N$, $p_1, \ldots, p_N$ таким образом, что масса этой жидкости, заключенной в объеме V пространства Φ, равна вероятности того, что точка ξ занимает произвольное положение в V, и таким образом, что каждая бесконечно малая часть жидкости движется согласно уравнениям (5).

Замечая теперь, что плотность этой жидкости равна плотности вероятности D, на основании хорошо известного уравнения сохранения массы получим

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{r=1}^{N} \left\{ \frac{\partial \left(D \frac{dq_r}{dt} \right)}{\partial q_r} + \frac{\partial \left(D \frac{dp_r}{dt} \right)}{\partial p_r} \right\} + \sum_\nu \frac{\partial \left(D \frac{d\theta_\nu}{dt} \right)}{\partial \theta_\nu} = 0.$$

Отсюда на основании уравнений движения (5) следует

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{r=1}^{N} \left\{ \frac{\partial \left(D \frac{\partial H}{\partial p_r} \right)}{\partial q_r} - \frac{\partial \left(D \frac{\partial H}{\partial q_r} \right)}{\partial p_r} \right\} = 0,$$

откуда, вводя скобки Пуассона

$$[u, v] = \sum_{r=1}^{N} \left\{ \frac{\partial u}{\partial q_r} \frac{\partial v}{\partial p_r} - \frac{\partial u}{\partial p_r} \frac{\partial v}{\partial q_r} \right\},$$

получим

$$\frac{\partial D}{\partial t} = [H, D],$$

т. е.

$$\frac{\partial D}{\partial t} = [H_0, D] + f(t)[V, D]. \tag{6}$$

Таким образом, мы получили уравнение, которое позволяет вычислить распределение вероятностей возможных значений величин $q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N, \theta_\nu, \ldots$ исходя из начального распределения.

Предположим теперь, что в начальный момент $t=0$ значения канонических переменных $q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N$ не зависят от значений фаз θ_ν, так что вероятность того, что величины q, p, θ_ν принимают произвольные значения, удовлетворяющие неравенствам

$$q_r' < q_r < q_r'',$$
$$p_r' < p_r < p_r'',$$
$$\theta_\nu' < \theta_\nu < \theta_\nu'',$$

равна произведению вероятности того, что θ_ν удовлетворяют неравенству

$$\theta_\nu' < \theta_\nu < \theta_\nu'',$$

и вероятности того, что q, p удовлетворяют неравенствам

$$q_r' < q_r < q_r'', \quad p_r' < p_r < p_r''.$$

Тогда в начальный момент

$$D_0 = \Psi \rho_0, \tag{7}$$

где $\rho_0 = \rho_0(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)$ — плотность вероятности, характеризующая распределение вероятностей возможных значений канонических переменных в момент $t=0$.

Рассмотрим теперь выражение

$$\rho_t = \rho(t, q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N) =$$
$$= \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} D(t, q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots p_N, \ldots, \theta_\nu, \ldots) \prod_\nu d\theta_\nu, \tag{8}$$

которое сводится к ρ_0 при $t=0$. Это выражение, очевидно, представляет собой плотность вероятности того, что канонические переменные независимо от возможных значений фаз θ_ν принимают значения $q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N$ в момент t.

Поскольку уравнения движения (5) благодаря членам возмущения содержат фазы θ_ν, распределения вероятностей значений канонических переменных и значений фаз при $t>0$ не являются уже независимыми, каковыми они были бы при возмущении, равном нулю, и, следовательно, формула $D = \Psi \rho_t$ является неточной. Но, принимая во внимание, что возмущение очень мало́, мы используем формулу

$$D = \Psi \rho_t \tag{9}$$

в качестве формулы первого приближения и попытаемся улучшить ее при помощи обычного метода последовательных приближений.

Введем сначала вместо q, p новые канонические переменные «действие–угол» J, φ, полагая

$$p_k = \sqrt{2J_k\omega_k}\, \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad q_k = \sqrt{\frac{2J_k}{\omega_k}}\, \sin(\omega_k t + \varphi_k).$$

Тогда уравнения (5) принимают вид

$$\frac{dJ_k}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_k}, \quad \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial J_k}, \tag{10}$$

где

$$\Gamma = f(t)V\left\{\sqrt{\frac{2J_1}{\omega_1}}\sin(\omega_1 t + \varphi_1), \ldots, \sqrt{2J_1\omega_1}\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \ldots\right\}. \tag{10'}$$

Новые переменные можно считать «медленно изменяющимися переменными», поскольку они становятся постоянными при отсутствии возмущения.

Заметим, с другой стороны, что $V(q_1, \ldots, p_1, \ldots)$ является полиномом по (q, p). Следовательно, гамильтониан Γ можно представить в виде

$$\Gamma = f(t)\sum_{n_1,\ldots,n_N} \mathfrak{U}_{n_1,\ldots,n_N}(J_1, \ldots, J_N)e^{i(n_1\omega_1+\ldots+n_N\omega_N)t}e^{i(n_1\varphi_1+\ldots+n_N\varphi_N)}, \tag{11}$$

где сумма содержит лишь конечное число членов и функции

$$\mathfrak{U}_{n_1,\ldots,n_N}(J_1, \ldots, J_N)$$

являются полиномами по $\sqrt{J_1}$, ..., $\sqrt{J_N}$.

Для краткости вместо (11) запишем

$$\Gamma = f(t)\sum_n \mathfrak{U}_{(n)}(J)e^{\{i(\omega n)t+(n\varphi)\}}. \tag{12}$$

Запишем теперь уравнение (6) для плотности вероятности в новых координатах. На основании (10)

$$\frac{\partial D}{\partial t} = [\Gamma, D], \tag{13}$$

откуда, учитывая (7), получим

$$D_t = \rho_0\Psi + \int_0^t [\Gamma_t, D_t]\,dt. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь класс динамических переменных, зависящих лишь от переменных действия, т. е. функции вида

$$E(J_1, \ldots, J_N).$$

В таком случае мы говорим, что динамическая система S находится во вполне определенном состоянии (J), если переменные действия принимают произвольные вполне определенные значения. Тогда можно утверждать, что рассматриваемые динамические переменные принимают вполне определенные значения каждый раз, когда состояние (J) известно.

Заметим, что для отыскания средних значений таких динамических переменных достаточно знать функцию

$$\sigma_t = \sigma_t(t, J_1, \ldots, J_N) = \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \rho_t\,d\varphi_1, \ldots, d\varphi_N, \tag{15}$$

так как, очевидно,

$$\int \overset{(J)}{\cdots} \int \int_0^{2\pi} \overset{(\varphi)}{\cdots} \int_0^{2\pi} \overset{(\theta_\nu)}{\cdots} \int_0^{2\pi} F(J_1, \ldots, J_N) D_t \, dJ_1 \ldots dJ_N \, d\varphi_1 \ldots d\varphi_N \prod_\nu d\theta_\nu =$$

$$= \int \overset{(J)}{\cdots} \int \int_0^{2\pi} \overset{(\varphi)}{\cdots} \int_0^{2\pi} F(J_1, \ldots, J_N) \rho_t \, dJ_1 \ldots dJ_N \, d\varphi_1 \ldots d\varphi_N =$$

$$= \int \overset{(J)}{\cdots} \int F(J_1, \ldots, J_N) \sigma_t \, dJ_1 \ldots dJ_N.$$

Функция σ_t представляет собой плотность вероятности, которая характеризует распределение вероятностей различных состояний (J). Из уравнений (8) и (15) видно, что плотность вероятности σ_t можно определить, если сначала исходя из уравнения (14) найти функцию D и затем проинтегрировать ее от 0 до 2π по переменным φ_1, ..., φ_N и θ_ν.

Учитывая чрезвычайную сложность этого метода, укажем здесь приближенный способ получения уравнения, который позволяет непосредственно отыскивать функцию σ по ее начальному значению, не прибегая к предварительному определению D.

Возьмем интервал времени Δt такой, чтобы в интервале $(t, t+\Delta t)$ переменные J, φ изменялись очень мало и, таким образом, в этом интервале функция ρ_t оставалась почти постоянной. Очевидно, интервал Δt можно брать тем больше, чем меньше возмущение.

Рассмотрим последовательность равноудаленных моментов времени

$$t_k = k \, \Delta t \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

и заметим, что на основании (14)

$$D_{t_{k+1}} - D_{t_k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\Gamma_t, D_t] \, dt. \tag{16}$$

Но, согласно (15) и (8),

$$\sigma_t = \overline{D_t}^{(\varphi, \theta_\nu)} \Psi^{-1} (2\pi)^M, \quad \rho_t = \overline{D_t}^{(\theta_n u)} \Psi^{-1}, \tag{17}$$

где символы $\overline{A}^{(\theta_\nu)}$, $\overline{A}^{(\varphi, \theta_\nu)}$ обозначают средние значения A, взятые соответственно по переменным θ_ν и φ, θ_ν:

$$\frac{\int_0^{2\pi} \overset{(\theta_\nu)}{\cdots} \int_0^{2\pi} A \prod_\nu d\theta_\nu}{\int_0^{2\pi} \overset{(\theta_\nu)}{\cdots} \int_0^{2\pi} \prod_\nu d\theta_\nu}, \qquad \frac{\int_0^{2\pi} \overset{(\varphi)}{\cdots} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{(\theta_\nu)}{\cdots} \int_0^{2\pi} A \, d\varphi_1 \ldots d\varphi_N \prod_\nu d\theta_\nu}{\int_0^{2\pi} \overset{(\varphi)}{\cdots} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{(\theta_\nu)}{\cdots} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \ldots d\varphi_N \prod_\nu d\theta_\nu}.$$

Следовательно, из (16) получим

$$\sigma_{t_{k+1}} - \sigma_{t_k} = (2\pi)^N \Psi^{-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{[\Gamma_t, D_t]}^{(\varphi,\theta_\nu)}\, dt. \tag{18}$$

С другой стороны, интегрируя (14) по θ_ν и учитывая (17), а также только что введенные выражения, получим

$$\rho_t = \rho_0 + \Psi^{-1} \int_0^t \overline{[\Gamma_\tau, D_\tau]}^{(\theta_\nu)}\, d\tau.$$

Итак,

$$D_t = \rho_t \Psi + \left\{ \int_0^t [\Gamma_\tau, D_\tau]\, d\tau - \int_0^t \overline{[\Gamma_\tau, D_\tau]}^{(\theta_\nu)}\, d\tau \right\}. \tag{19}$$

Из соотношения (19) видно, что в первом приближении, если не принимать во внимание члены возмущения первого порядка,

$$D_t = \rho_t \Psi,$$

что мы уже отмечали выше. Подставляя эту формулу в правую часть (19), получим второе приближение

$$D_t = \rho_t \Psi + \left\{ \Psi \int_0^t [\Gamma_\tau, \rho_\tau]\, d\tau - \Psi \int_0^t \overline{[\Gamma_\tau, \rho_\tau]}^{(\theta_\nu)}\, d\tau \right\}, \tag{20}$$

где не принимаются во внимание члены возмущения второго порядка малости.

Следовательно, если подставить (20) в правую часть (18), можно получить формулу для приращения σ_t, вычисленную до членов третьего порядка малости.

Прежде всего, заметим, что

$$\overline{[\Gamma_\tau, \rho_\tau]}^{(\theta_\nu)} = [\overline{\Gamma_\tau}^{(\theta_n u)}, \rho_\tau]$$

и

$$\overline{\Gamma_\tau}^{(\theta_n u)} = \overline{V f_\tau}^{(\theta_\nu)} = 0. \tag{21}$$

Следовательно, соотношение (20) эквивалентно соотношению

$$D_t = \rho_t \Psi + \Psi \int_0^t [\Gamma_\tau, \rho_\tau]\, d\tau,$$

которое вместе с (18) дает

$$\sigma_{t_{k+1}} - \sigma_{t_k} = (2\pi)^N \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{[\Gamma_t, \rho_t]}^{(\varphi,\theta_\nu)}\, dt + \overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \int_0^t [\Gamma_\tau, \rho_\tau]\, d\tau\right] dt}^{(\varphi,\theta_\nu)} \right\},$$

откуда на основании (21) следует

$$\sigma_{t_{k+1}} - \sigma_{t_k} = (2\pi)^N \overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \int_0^t [\Gamma_\tau, \rho_\tau]\, d\tau\right] dt}^{(\varphi,\theta_\nu)},$$

т. е.

$$\Delta\sigma_{t_k} = (2\pi)^N \left\{ \sum_{q=0}^{k-1} \overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \int_{t_q}^{t_{q+1}} [\Gamma_\tau, \rho_\tau]\, d\tau\right] dt}^{(\varphi,\theta_\nu)} + \overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \int_{t_k}^{t} [\Gamma_\tau, \rho_\tau]\, d\tau\right] dt}^{(\varphi,\theta_\nu)} \right\}. \tag{22}$$

Но ρ_t остается практически постоянным в интервалах (t_q, t_{q+1}), так что мы можем в интервале (t_q, t_{q+1}) вместо ρ_t подставить в (22) ρ_{t_q}. Тогда приближенно получим

$$\Delta\sigma_{t_k} = (2\pi)^N \left\{ \sum_{q=0}^{k-1} \overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \int_{t_q}^{t_{q+1}} [\Gamma_\tau, \rho_{t_q}]\, d\tau\right] dt}^{(\varphi,\theta_\nu)} + \overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \int_{t_k}^{t} [\Gamma_\tau, \rho_{t_k}]\, d\tau\right] dt}^{(\varphi,\theta_\nu)} \right\}. \tag{23}$$

Заметим, с другой стороны, что

$$\sum_{q=0}^{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \int_{t_q}^{t_{q+1}} [\Gamma_\tau, \rho_{t_q}]\, d\tau\right] dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \sum_{q=0}^{k-1} \int_{t_q}^{t_{q+1}} [\Gamma_\tau, \rho_{t_q}]\, d\tau\right] dt =$$

$$= \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Gamma_t\, dt, \sum_{q=0}^{k-1} \left[\int_{t_q}^{t_{q+1}} [\Gamma_\tau\, d\tau, \rho_{t_q}]\right]\right] \tag{24}$$

и

$$\sum_{q=0}^{k-1} \left[\int_{t_q}^{t_{q+1}} \Gamma_\tau\, d\tau, \rho_{t_q}\right] = \left[\int_0^{tk} \Gamma_\tau\, d\tau, \rho_0\right] + \sum_{q=0}^{k-2} \left[\int_{t_{q+1}}^{tk} \Gamma_\tau\, d\tau, \rho_{t_{q+1}} - \rho_{t_q}\right]. \tag{25}$$

Подставляя (24) и (25) в (23), после деления результата на Δt получаем

$$\frac{\Delta\sigma_{t_k}}{\Delta t} = (2\pi)^N \left\{ \overline{\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Gamma_t\, dt, \left[\int_0^{t_k} \Gamma_\tau\, d\tau, \rho_0\right]\right]}^{(\varphi,\theta_\nu)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{k-2} \overline{\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Gamma_t\, dt, \left[\int_{t_{q+1}}^{t_k} \Gamma_t\, dt, \frac{\Delta\rho_{t_q}}{\Delta t}\right]\right]}^{(\varphi,\theta_\nu)} \Delta t + \overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \int_{t_k}^{t} [\Gamma_\tau, \rho_{t_k}]\, d\tau\right] dt}^{(\varphi,\theta_\nu)} \right\}. \tag{26}$$

Но, согласно определению скобок, Пуассона имеем тождественно

$$[U,V]=\sum_n\left\{\frac{\partial}{\partial J_n}\left(\frac{\partial U}{\partial\varphi_n}V\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\left(\frac{\partial U}{\partial J_n}V\right)\right\}.$$

Следовательно, учитывая периодичность по угловым переменным, получаем

$$\overline{[U,V]}^{(\varphi)}=\sum_n\frac{\partial}{\partial J_n}\overline{\left(\frac{\partial U}{\partial\varphi_n}V\right)}^{(\varphi)}.$$

Таким образом,

$$\overline{[U,[V,W]]}^{(\varphi)}=\sum_{n,m}\frac{\partial}{\partial J_n}\overline{\left\{\frac{\partial U}{\partial\varphi_n}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi_m}\frac{\partial W}{\partial J_m}-\frac{\partial V}{\partial J_m}\frac{\partial W}{\partial\varphi_m}\right)\right\}}^{(\varphi)}.$$

Далее из (26) получим

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\sigma_{t_k}}{\Delta t}=(2\pi)^N\sum_{n,m}\frac{\partial}{\partial J_n}\Bigg\{&\overline{\frac{\partial\rho_0}{\partial J_m}\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_0^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_m}\,dt\right)}^{(\varphi,\theta_n)}-\\&-\overline{\frac{\partial\rho_0}{\partial\varphi_m}\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_0^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_m}\,dt\right)}^{(\varphi,\theta_\nu)}\Bigg\}+\\&+\sum_{q=0}^{k-2}\overline{\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_{q+1}}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_m}\,dt\right\}}^{(\varphi,\theta_\nu)}\frac{\partial}{\partial J_m}\frac{\Delta\rho_{t_q}}{\Delta t}\,\Delta t-\\&-\sum_{q=0}^{k-2}\overline{\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_m}\,dt\right\}}^{(\varphi,\theta_\nu)}\frac{\partial}{\partial\varphi_m}\frac{\Delta\rho_{t_q}}{\Delta t}\,\Delta t+\\&+\frac{\partial\rho_{t_k}}{\partial J_m}\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\overline{\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial\varphi_m}\,d\tau\right)}^{(\varphi,\theta_\nu)}dt\right\}-\\&-\frac{\partial\rho_{t_k}}{\partial\varphi_m}\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\overline{\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\left(\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial J_m}\,d\tau\right)}^{(\varphi,\theta_\nu)}dt\right\}.\end{aligned}\tag{27}$$

Вычислим теперь выражения, которые содержат гамильтониан Γ_t и фигурируют в этом уравнении как коэффициенты при производных ρ.

Сначала на основании (12) имеем

$$\frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_m}\,dt}^{(\theta_\nu)}=\sum_{(r),(s)}\mathfrak{U}_{(r)}\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}r_n s_m\times$$

$$\times\frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\,dt\int_{t_q}^{t_k}f(t)e^{-i(s\omega)t}\,dt}^{(\theta_\nu)},\quad(28)$$

где $\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}$ является сопряженным к $\mathfrak{U}_{(s)}$. Точно так же из (12) следует

$$\frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_m}\,dt}^{(\theta_\nu)}=\sum_{(r),(s)}ir_n\mathfrak{U}_{(r)}\frac{\partial\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}}{\partial J_m}\frac{1}{\Delta t}e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}\times$$

$$\times\overline{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\,dt\int_{t_q}^{t_k}f(t)e^{-i(s\omega)t}\,dt}^{(\theta_\nu)}.\quad(29)$$

Аналогично находим

$$\frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial\varphi_m}\,d\tau\right)dt}=$$

$$=\sum_{(r),(s)}\mathfrak{U}_{(r)}\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}r_n s_m e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\left\{\int_{t_k}^{t}f(t)e^{-i(s\omega)t}\,dt\right\}dt}^{(\theta_\nu)},\quad(30)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_m}\,dt\right)dt}=$$

$$=\sum_{(r),(s)}ir_n\mathfrak{U}_{(r)}\frac{\partial\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}}{\partial J_m}e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\left\{\int_{t_k}^{t}f(t)e^{-i(s\omega)t}\,dt\right\}dt}^{(\theta_\nu)}.$$

Рассмотрим теперь выражения вида

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i\lambda t}\,dt\int_{t_q}^{t_k}f(t)e^{-i\mu t}\,dt}^{(\theta_\nu)},$$

где

$$\lambda = (r\omega), \quad \mu = (s\omega), \quad t_k > t_q,$$

и заметим, что на основании (3)

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\,dt \int_{t_q}^{t_k} f(t)\mathrm{e}^{-i\mu t}\,dt}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2} a_{\nu_1} a_{\nu_2} \overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} \cos(\nu_1 t + \theta_{\nu_1})\mathrm{e}^{i\lambda t}\,dt \int_{t_q}^{t_k} \cos(\nu_2 t + \theta_{\nu_2})\mathrm{e}^{-i\mu t}\,dt}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu} a_\nu^2 \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} dt \int_{t_q}^{t_k} d\tau\, \cos\nu(t-\tau)\mathrm{e}^{i\lambda t}\mathrm{e}^{-i\mu\tau}. \quad (31)$$

Но, согласно сделанным выше предположениям, возмущающая сила $f(t)$ имеет непрерывный спектр, и поэтому можно заменить суммы $\sum\limits_{0<\nu<\infty} a_\nu^2$ интегралами $\int\limits_0^\infty I(\nu)\,d\nu$.

Следовательно, можно заменить (31) следующим соотношением:

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\,dt \int_{t_q}^{t_k} f(t)\mathrm{e}^{-i\mu t}\,dt}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty I(\nu)\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} dt \int_{t_q}^{t_k} d\tau\, \cos\nu(t-\tau)\mathrm{e}^{i\lambda t}\mathrm{e}^{-i\mu\tau}\right\} d\tau,$$

откуда, полагая по определению

$$I(-\nu) = I(\nu),$$

получим

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\,dt \int_{t_q}^{t_k} f(t)\mathrm{e}^{-i\mu t}\,dt}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} dt \int_{t_q}^{t_k} d\tau\, \mathrm{e}^{i\nu(t-\tau)}\mathrm{e}^{i\lambda t}\mathrm{e}^{-i\mu\tau}\right\} d\nu.$$

Произведем теперь замену переменных, полагая

$$t - t_k = x,$$

$$t - \tau = y,$$

$$t_k - t_q = T.$$

После этого получаем

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)e^{i\lambda t}\,dt \int_{t_q}^{t_k} f(t)e^{-i\mu t}\,dt}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \frac{e^{i(\lambda-\mu)t_k}}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} e^{i(\lambda-\mu)x}\left[\int_x^{x+T} e^{i\nu y}e^{i\mu y}\,dy\right]dx\right\}d\nu =$$

$$= \frac{1}{4}e^{i(\lambda-\mu)t_k}\int_0^{\Delta t} e^{i(\lambda-\mu)x}\left\{\int_x^{x+T}\delta(y)e^{i\mu y}\,dy\right\}dx, \quad (32)$$

где

$$\delta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)e^{i\nu y}\,d\nu.$$

Рассмотрим теперь выражения

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)e^{i\lambda t}\left(\int_{t_k}^{t} f(\tau)e^{-i\mu\tau}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)},$$

где по-прежнему $\lambda = (r\omega)$, $\mu = (s\omega)$, и заметим, что на основании (3)

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)e^{i\lambda t}\left(\int_{t_k}^{t} f(\tau)e^{-i\mu\tau}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2} a_{\nu_1}a_{\nu_2}\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} e^{i\lambda t}\cos(\nu_1 t+\theta_{\nu_1})\left\{\int_{t_k}^{t} e^{-i\mu\tau}\cos(\nu_2\tau+\theta_{\nu_2})\,d\tau\right\}dt}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\nu a_\nu^2\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} dt\int_{t_k}^{t} d\tau\,\cos\nu(t-\tau)e^{i\lambda t}e^{-i\mu\tau}.$$

Отсюда, как и раньше, видно, что

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\left(\int_{t_k}^{t} f(\tau)\mathrm{e}^{-i\mu\tau}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} dt\int_{t_k}^{t} d\tau\,\cos\nu(t-\tau)\mathrm{e}^{i\lambda t}\mathrm{e}^{-i\mu t}\right\}d\nu =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} dt\int_{t_k}^{t} d\tau\,\mathrm{e}^{i\nu(t-\tau)}\mathrm{e}^{i\lambda t}\mathrm{e}^{-i\mu t}\right\}d\nu.$$

Далее посредством такой же замены переменных находим

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\left(\int_{t_k}^{t} f(\tau)\mathrm{e}^{-i\mu\tau}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{i(\lambda-\mu)t_k}}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{0}^{\Delta t}\mathrm{e}^{i(\lambda-\mu)x}\left[\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{i\nu y}\mathrm{e}^{i\mu y}\,dy\right]dx\right\}d\nu =$$

$$= \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{i(\lambda-\mu)t_k}\frac{1}{\Delta t}\int_{0}^{\Delta t}\mathrm{e}^{i(\lambda-\mu)x}\left[\int_{0}^{y}\delta(y)\mathrm{e}^{i\mu y}\,dy\right]dx. \quad (33)$$

Теперь рассмотрим интеграл $\int_0^x \delta(y)\mathrm{e}^{i\mu y}\,dy$ исходя из предположения, например, о том, что спектральная интенсивность $I(\nu)$ является функцией ограниченной вариации, так что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|dI(\nu)|$ конечен.

Заметим сначала, что, согласно определению функции $\delta(y)$,

$$\int_0^x \delta(y)\mathrm{e}^{i\mu y}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left\{\int_0^x \mathrm{e}^{i(\nu+\mu)y}\,dy\right\}d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\frac{\mathrm{e}^{i(\nu+\mu)x}-1}{i(\nu+\mu)}\,d\nu =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu-\mu)\frac{\mathrm{e}^{i\nu x}-1}{i\nu}\,d\nu,$$

откуда, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^x \delta(y)\mathrm{e}^{i\mu y}\,dy = I_\infty\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\nu x}-1}{i\nu}\,d\nu - \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{y}\frac{\mathrm{e}^{i\nu x}-1}{i\nu}\,d\nu\right\}dI(\nu-\mu). \quad (34)$$

С другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\nu x}-1}{i\nu}\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\nu}-1}{i\nu}\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\nu}{\nu}\,d\nu = \pi, \quad x>0, \tag{35}$$

и

$$\int_{-\infty}^{y} \frac{e^{i\nu x}-1}{i\nu}\,d\nu = \int_{-\infty}^{yx} \frac{e^{i\nu}-1}{i\nu}\,d\nu.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{y} \frac{e^{i\nu x}-1}{i\nu}\,d\nu = 0, \quad \text{если} \quad \nu<0,$$

и

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{\nu} \frac{e^{i\nu x}-1}{i\nu}\,d\nu = \pi, \quad \text{если} \quad \nu>0.$$

Таким образом, из (34) и (35) получим

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} \delta(y)e^{i\mu y}\,dy = I_\infty\pi - \int_0^\infty \pi\,dI(\nu-\mu) = I_\infty\pi - \pi(I_\infty - I(-\mu)) \tag{36}$$

и в соответствии с этим

$$\int_0^\infty \delta(y)e^{i\mu y}\,dy = I(\mu)\pi.$$

Из формулы (36) следует, что равномерно относительно $T>0$ интеграл

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x}^{x+T} \delta(y)e^{i\mu y}\,dy \to 0.$$

Следовательно, равномерно относительно $T>0$ интеграл

$$\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} e^{i(\lambda-\mu)x}\left\{\int_x^{x+T}\delta(y)e^{i\mu y}\,dy\right\}dx \to 0, \quad \Delta t\to\infty,$$

и отсюда на основании (32) делаем вывод, что равномерно относительно t_k и t_q величина

$$\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)e^{i\lambda t}\,dt \int_{t_q}^{t_k} f(t)e^{-i\mu t}\,dt \to 0}, \quad \Delta t\to\infty. \tag{37}$$

С другой стороны, из формулы (36) вытекает также, что

$$\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} e^{i(\lambda-\mu)x}\left[\int_0^x \delta(y)e^{i\mu y}\,dy\right]dx \to 0, \qquad \Delta t\to\infty, \quad \lambda\neq\mu,$$

$$\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} e^{i(\lambda-\mu)x}\left[\int_0^x \delta(y)e^{i\mu y}\,dy\right]x \to \pi I(\mu), \qquad \Delta t\to\infty, \quad \lambda=\mu.$$

Благодаря (33) убеждаемся, что равномерно относительно t_k

$$\begin{gathered}
\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)e^{i\lambda t}\left(\int_{t_k}^{t} f(\tau)e^{-i\mu\tau}\,d\tau\right)dt \to 0}, \qquad \Delta t\to\infty, \quad \lambda\neq\mu,\\
\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)e^{i\lambda t}\left(\int_{t_k}^{t} f(\tau)e^{-i\mu\tau}\,d\tau\right)dt \to \frac{1}{4}\pi I(\mu)}, \quad \Delta t\to\infty, \quad \lambda=\mu.
\end{gathered} \tag{38}$$

Предположим теперь, что частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ невозмущенной системы линейно независимы. Тогда из равенства

$$(r\omega)=(s\omega)$$

вытекает

$$r=s.$$

Следовательно, на основании (37) и (38), учитывая также (28)–(30), можно заключить, что равномерно относительно t_k, t_q при $\Delta t\to\infty$ имеем

$$\begin{gathered}
\lim \overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_m}\,dt}=0,\\
\lim \overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_m}\,dt}=0,\\
\lim \overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial\varphi_m}\,d\tau\right)dt}=\frac{\pi}{4}\sum_{(s)}|\mathfrak{U}_{(s)}|^2 s_n s_m I\{(s\omega)\},\\
\lim \overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial J_m}\,d\tau\right)dt}=\frac{\pi}{4}\sum_{(s)} i s_n\mathfrak{U}_{(s)}\frac{\partial\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}}{\partial J_m}I\{(s\omega)\},
\end{gathered} \tag{39}$$

так как фигурирующие в (28)–(30) выражения содержат лишь конечное число членов.

Заметим теперь, что для справедливости уравнения (27) величина Δt должна быть подобрана так, чтобы переменные J, φ оставались практически постоянными в течение интервала Δt. Значит, Δt можно брать тем больше, чем меньше возмущение.

Мы предполагаем, что возмущение настолько мало, что для возможных значений Δt выражения (28)–(30) очень близки к их предельным значениям (39). Следовательно, заменим в уравнении (27) эти выражения их предельными значениями. После этого уравнение значительно упрощается и принимает вид

$$\frac{\Delta\sigma_{t_k}}{\Delta t} = (2\pi)^N \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_n} \overline{\left\{ A_{n,m} \frac{\partial \rho_{t_k}}{\partial J_m} + B_{n,m} \frac{\partial \rho_{t_k}}{\partial \varphi_m} \right\}}^{(\varphi)}, \tag{40}$$

где с целью сокращения введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{\pi}{4} \sum_{(s)} s_n s_m |\mathfrak{U}_{(s)}|^2 I\{(s\omega)\}, \\ B_{n,m} &= \frac{\pi}{4} \sum_{(s)} i s_n \mathfrak{U}_{(s)} \frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_{(s)}}{\partial J_m} I\{(s\omega)\}. \end{aligned} \tag{41}$$

Теперь, учитывая, что $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ не зависят от переменных φ, записываем:

$$\overline{A_{n,m} \frac{\partial \rho_{t_k}}{\partial J_m} + B_{n,m} \frac{\partial \rho_{t_k}}{\partial \varphi_m}}^{(\varphi)} = A_{n,m} \overline{\frac{\partial \rho_{t_k}}{\partial J_m}}^{(\varphi)} + B_{n,m} \overline{\frac{\partial \rho_{t_k}}{\partial \varphi_m}}^{(\varphi)} = A_{n,m} \overline{\frac{\partial \rho_{t_k}}{\partial J_m}}^{(\varphi)}.$$

Исходя из (40) и учитывая (17), убеждаемся в том, что

$$\frac{\Delta\sigma_{t_k}}{\Delta t} = \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_n} \left\{ A_{n,m} \frac{\partial \sigma_{t_k}}{\partial J_m} \right\},$$

или, что то же самое,

$$\sigma_{t_k} = \sigma_0 + \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_n} \left\{ A_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_m} \sum_{q=0}^{k-1} \sigma_{t_q} \Delta t \right\}. \tag{42}$$

Но в течение интервала Δt функция σ_t остается практически постоянной. Вот почему мы заменяем в (42) σ_{t_k} функцией σ_t и суммы $\sum_{q=0}^{k-1} \sigma_{t_q} \Delta t$ интегралами $\int_0^t \sigma_t \, dt$, получая таким образом приближенное уравнение следующего вида:

$$\sigma_t = \sigma_0 + \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_n} \left\{ A_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_m} \int_0^t \sigma_t \, dt \right\},$$

т. е.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_n} \left\{ A_{n,m} \frac{\partial \sigma}{\partial J_m} \right\}. \tag{43}$$

Итак, мы получили приближенное уравнение, позволяющее отыскивать распределение вероятностей различных состояний (J) исходя из начального распределения.

Заметим, что квадратичная форма $\sum_{n,m} A_{n,m}x_nx_m$ является положительной в силу того, что на основании (41)

$$\sum_{n,m} A_{n,m}x_nx_m = \frac{\pi}{4}\sum_{(s)} |\mathfrak{U}_{(s)}|^2 I\{(s\omega)\}\left[\sum_n s_nx_n\right]^2 \geqslant 0. \tag{44}$$

§ 3. Пусть $P(t, J_1, \ldots, J_n, J'_1, \ldots, J'_N)$ — функция Грина для уравнения (43), т. е. такая функция, что выражение

$$\sigma(\underset{t>t_0>0}{t}, J_1, \ldots, J_N) = \int \ldots \int \sigma(t_0, J'_1, \ldots, J'_N) \times$$

$$\times P(t-t_0, J'_1, \ldots, J'_N, J_1, \ldots, J_N)\, dJ'_1 \ldots dJ'_N \tag{45}$$

является решением этого уравнения, переходящим в $\sigma(t_0, J_1, \ldots, J_N)$ при $t = t_0$. Очевидно, эта функция Грина $P(t, J, J')$ может быть интерпретирована как плотность вероятности того, что система, находящаяся в данный момент времени во вполне определенном состоянии (J), переходит по истечении времени t в состояние (J').

Действительно, если взять $\sigma(t_0, J') = \delta(J - J_0)$, где $\delta(J)$ — функция Дирака[1], иначе говоря, если предположить, что в момент t_0 рассматриваемая система находится в состоянии (J_0), то из (45) можно заключить, что по истечении времени $t_1 - t_0$ начиная с данного момента плотность вероятности того, что система находится в состоянии (J), имеет вид

$$\int \ldots \int_{(J')} \delta(J' - J_0) P(t - t_0, J', J)\, dJ'_1 \ldots dJ'_N = P(t - t_0, J_0, J).$$

Заметим также, что, поскольку оператор

$$\sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_n} A_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_m},$$

фигурирующий в уравнении (43), является самосопряженным, функция Грина симметрична:

$$P(t, J, J') = P(t, J', J).$$

Следовательно, плотности вероятностей переходов

$$J \to J', \quad J' \to J$$

равны, так что эти переходы равновероятны.

Заметим, наконец, что уравнение вида (43), определяющее эволюцию распределения вероятностей состояний (J), можно было бы непосредственно

[1] То есть такая несобственная функция, что $\delta(J) = 0$, $J \neq 0$, причем интеграл $\int \ldots \int \delta(J)\, dJ_1 \ldots dJ_N$ равен единице.

получить, если бы мы предположили á priori, как это делается в методе Фоккера–Планка, что состояния (J) изменяются во времени согласно статистическому закону, который характеризуется плотностью вероятности переходов $P(t, J, J')$, а также[1] что $P(t, J, J')$ — симметрическая функция по J, J'.

Действительно, в этом случае произведение

$$\sigma(t_0, J')\, dJ'_1 \dots dJ'_N P(\tau, J', J)\, dJ_1 \dots dJ_N$$

представляет собой вероятность того, что состояние рассматриваемой системы в момент времени t_0 заключено в бесконечно малой области (dJ') вблизи (J'), а в момент $(t_0 + \tau)$ — в бесконечно малой области (dJ) вблизи (J). Следовательно,

$$\sigma(t+\tau, J) = \int\limits_{(J')} \dots \int \sigma(t, J') P(\tau, J', J)\, dJ'_1 \dots dJ'_N. \tag{46}$$

Пусть Δt — интервал времени такого порядка величины, что можно положить

$$\Delta\sigma = \sigma_{t+\Delta t} - \sigma_t = \frac{\partial \sigma_t}{\partial t}\, \Delta t.$$

Тогда на основании (16) получаем

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial t}\, \Delta t = \int\limits_{(J')} \dots \int \sigma(t, J') P(\Delta t, J', J)\, dJ'_1 \dots dJ'_N - \\ - \int\limits_{(J')} \dots \int \sigma(t, J) P(\Delta t, J, J')\, dJ'_1 \dots dJ'_N, \tag{47}$$

так как тождественно

$$\int\limits_{(J')} \dots \int P(\Delta t, J, J')\, dJ'_1 \dots dJ'_N = 1.$$

Введем новые переменные

$$\Delta J = J' - J$$

и положим

$$P(\Delta t, J, J + \Delta J) = \Phi(\Delta t, J, \Delta J).$$

Тогда из (47) следует, что

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial t}\, \Delta t = \int\limits_{(\Delta J)} \dots \int \sigma(t, J - \Delta J) \Phi(\Delta t, J - \Delta J, \Delta J)\, d\Delta J - \\ - \int\limits_{(\Delta J)} \dots \int \sigma(t, J) \Phi(\Delta t, J, \Delta J)\, d\Delta J, \tag{48}$$

где $d\Delta J = d\Delta J_1 \dots d\Delta J_N$.

[1] Для большей наглядности рассуждений представим здесь нестрогий вывод уравнений Фоккера–Планка, который обычно используют в физической литературе. Строгий вывод, основанный на соответствующих аксиомах стохастических систем, при определенных ограничительных условиях был разработан А. Н. Колмогоровым.

Рассмотрим разложение, ограничиваясь членами второго порядка:

$$\sigma(t, J-\Delta J)\Phi(\Delta t, J-\Delta J, \Delta J) = \sigma(t, J)\Phi(\Delta t, J, \Delta J) - \\ - \sum_n \Delta J_n \frac{\partial}{\partial J_n}\{\sigma(t, J)\Phi(\Delta t, J, \Delta J)\} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{n,m} \Delta J_n\, \Delta J_m \frac{\partial^2}{\partial J_n\, \partial J_m}\{\sigma(t, J)\Phi(\Delta t, J, \Delta J)\}.$$

Подставляя его в (48), получим

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial t}\Delta t = -\sum_n \frac{\partial}{\partial J_n}\{\overline{\Delta J_n}\sigma_t\} + \frac{1}{2}\sum_{n,m}\frac{\partial^2}{\partial J_n\, \partial J_m}\{\overline{\Delta J_n\, \Delta J_m}\sigma_t\}, \tag{49}$$

где

$$\overline{\Delta J_n} = \int_{(\Delta J)}\dots\int \Delta J_n \Phi(\Delta t, J, \Delta J)\, d\Delta J = \\ = \int_{(J)}\dots\int (J'_n - J_n) P(\Delta t, J, J')\, dJ'_1 \dots dJ'_N, \tag{50}$$

$$\overline{\Delta J_n\, \Delta J_m} = \int_{(\Delta J)}\dots\int \Delta J_n\, \Delta J_m \Phi(\Delta t, J, \Delta J)\, d\Delta J = \\ = \int_{(J')}\dots\int (J'_n - J_n)(J'_m - J_m) P(\Delta t, J, J')\, dJ'_1 \dots dJ'_n.$$

Заметим, с другой стороны, что в силу симметрии $P(\Delta t, J', J)$ из уравнения (47) следует, что

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial t}\Delta t = \int_{(J')}\dots\int \sigma(t, J') P(\Delta t, J, J')\, dJ'_1 \dots dJ'_N - \\ - \int_{(J')}\dots\int \sigma(t, J) P(\Delta t, J, J')\, dJ'_1 \dots dJ'_N = \\ = \int_{(\Delta J')}\dots\int \{\sigma(t, J+\Delta J) - \sigma(t, J)\}\Phi(\Delta t, J, \Delta J)\, d\Delta J.$$

Подставляя разложение, ограниченное членами второго порядка

$$\sigma(t, J+\Delta J) = \sigma(t, J) + \sum_n \Delta J_n \frac{\partial \sigma}{\partial J_n} + \frac{1}{2}\sum_{n,m}\Delta J_n\, \Delta J_m \frac{\partial^2 \sigma}{\partial J_n\, \partial J_m},$$

получим

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial t}\Delta t = \sum_n \overline{\Delta J_n}\frac{\partial \sigma_t}{\partial J_n} + \frac{1}{2}\sum_{n,m}\overline{\Delta J_n\, \Delta J_m}\frac{\partial^2 \sigma_t}{\partial J_n\, \partial J_m}. \tag{51}$$

Сопоставляя (49) и (51), убеждаемся, что

$$\sum_n \overline{\Delta J_n} \frac{\partial \sigma}{\partial J_n} + \frac{1}{2} \sum_{n,m} \overline{\Delta J_n \, \Delta J_m} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial J_n \, \partial J_m} =$$

$$= -\sum_n \frac{\partial}{\partial J_n} \{\overline{\Delta J_n} \sigma\} + \frac{1}{2} \sum_{n,m} \frac{\partial^2}{\partial J_n \, \partial J_m} \{\overline{\Delta J_n \, \Delta J_m} \sigma\}.$$

Но в определенный момент времени функция σ произвольна, следовательно, мы должны получить

$$\overline{\Delta J_n} = \frac{1}{2} \sum_m \frac{\partial}{\partial J_n} \{\overline{\Delta J_n \, \Delta J_m}\}.$$

Таким образом, уравнение (49)–(51) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial t} = \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_n} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta J_n \, \Delta J_m}}{\Delta t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial J_m} \right\}, \tag{52}$$

идентичном виду уравнения (43), полученного нами в качестве приближенного на основании определенных способов приближения уравнений классической механики. Совпадение будет полным, если выбрать вероятность переходов так, что

$$\frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta J_n \, \Delta J_m}}{\Delta t} = A_{n,m}. \tag{53}$$

Таким образом, можно ввести статистический закон для вероятностей переходов состояний (J), который приводит к уравнению эволюции распределения вероятности этих состояний, полученному нами выше на основании динамических уравнений и при учете малости возмущения.

Следовательно, с точки зрения вычислений в принятом приближении распределения вероятностей состояний (J) все происходит так, как будто бы рассматриваемое малое возмущение является причиной вероятностных переходов, которые характеризуются плотностью вероятности $P(t, J, J')$, симметричной относительно J, J'. Эти результаты, установленные в рамках классической механики, вскрывают очевидные аналогии с хорошо известными результатами квантовой механики, где малое возмущение может рассматриваться как причина вероятностных переходов между различными невозмущенными состояниями, причем эти вероятности симметричны относительно начального и конечного состояний.

Существенное различие, по нашему мнению, состоит в том, что в квантовой механике главным образом рассматривают состояния, которые описываются совокупностью (m) дискретных величин $(m_1, \ldots, m_N)$, в то время как здесь мы рассматриваем состояния (J), описываемые совокупностью величин непрерывных $(J_1, \ldots, J_N)$. Именно поэтому уравнения эволюции распределения вероятностей, получаемые в квантовой механике, принадлежат не к уравнениям типа Фоккера–Планка, а к уравнениям типа уравнений радиоактивного распада, т. е. имеют вид

$$\frac{dP_n}{dt} = \sum_{(m)} A_{n,m}(P_m - P_n),$$

где P_n — вероятность того, что система находится в состоянии (n); $A_{n,m}$ — вероятность перехода $(n) \to (m)$, отнесенная к единице времени.

Мы не будем больше проводить здесь такие аналогии, учитывая, что этот вопрос рассматривается отдельно, в следующем параграфе.

Возвращаясь к уравнению (43), рассмотрим выражение

$$S = \int\limits_{(J)} \ldots \int \sigma \ln \frac{1}{\sigma}\, dJ_1 \ldots dJ_n,$$

аналогичное энтропии Больцмана, и отметим, что

$$\frac{dS}{dt} = \int\limits_{(J)} \ldots \int \frac{\partial \sigma}{\partial t} \ln \frac{1}{\sigma}\, dJ_1 \ldots dJ_n - \int\limits_{(J)} \ldots \int \frac{\partial \sigma}{\partial t}\, dJ_1 \ldots dJ_N.$$

Но, учитывая, что

$$\int\limits_{(J)} \ldots \int \sigma\, dJ_1 \ldots dJ_N = 1,$$

получим

$$\int \ldots \int \frac{\partial \sigma}{\partial t}\, dJ_1 \ldots dJ_N = 0,$$

следовательно,

$$\frac{dS}{dt} = -\int \ldots \int \frac{\partial \sigma}{\partial t} \ln \sigma\, dJ_1 \ldots dJ_N.$$

Отсюда на основании (43) находим

$$\frac{dS}{dt} = -\sum_{n,m} \int \ldots \int \frac{\partial}{\partial J_n} \left\{ A_{n,m} \frac{\partial \sigma}{\partial J_m} \right\} \ln \sigma\, dJ_1 \ldots dJ_N.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{n,m} \int \ldots \int \frac{1}{\sigma} A_{n,m} \frac{\partial \sigma}{\partial J_n} \frac{\partial \sigma}{\partial J_m}\, dJ_1 \ldots dJ_N.$$

С другой стороны, квадратичная форма $\sum\limits_{n,m} A_{n,m} x_n x_m$ положительна. Следовательно,

$$\frac{dS}{dt} \geqslant 0.$$

Таким образом, энтропия S_t не может уменьшаться с возрастанием времени t.

Точнее, энтропия возрастает:

$$\frac{dS}{dt} > 0,$$

если только это не случай стационарного распределения, иначе говоря, если σ не удовлетворяет уравнению

$$\sum_{(m)} A_{n,m} \frac{\partial \sigma}{\partial J_m} = 0 \qquad (n = 1, \ldots N).$$

Может показаться соблазнительным утверждение, что существует определенная необратимость в эволюции распределения вероятностей состояний (1), необратимость тем более удивительная, что мы избрали отправным пунктом уравнения классической механики, которые могут быть обратимыми. Но в действительности эта эволюция вполне обратима. В самом деле, в наших предыдущих рассуждениях мы полагали $\Delta t > 0$, и вследствие этого уравнение (43) справедливо только при $t > 0$. Однако если мы дословно повторим все рассуждения, выбирая при этом $\Delta t < 0$, то получим при $t < 0$ уравнение

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_n}\left\{A_{n,m}\frac{\partial \sigma}{\partial J_m}\right\}.$$

Следовательно, уравнение для σ является симметричным относительно замены $t \to -t$, и, таким образом, мы имеем здесь полную обратимость. Однако необходимо заметить, что рассматриваемое уравнение является симметричным относительно замены $t \to -t$ и перестает быть таковым относительно замены $t \to t_0 - t$. Значит, нельзя обращать направление времени исходя из произвольного момента, кроме начального $t_0 = 0$, которому принадлежит, таким образом, привилегированное положение.

Может возникнуть вопрос: что является причиной этого особенного положения момента $t_0 = 0$, если, кажется, любой иной момент времени можно было бы считать начальным? Ответ на этот вопрос получить очень легко.

Действительно, мы выбрали начальное распределение вероятностей значений $q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N, \ldots, \theta_\nu, \ldots$ с таким расчетом, чтобы плотность

$$D(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_N, \ldots, \theta_\nu, \ldots)$$

не зависела от θ_ν в момент $t = 0$. Этот выбор сводится к предположению, что для отыскания начального распределения вероятностей в этот момент измеряют величины, описывающие динамическое состояние нашей системы, а именно $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_N$, и что эти измерения не зависят от состояния возмущений, т. е. от фаз θ_ν. Но, поскольку уравнения движения зависят от фаз θ_ν, плотность D_t тоже не может не зависеть от θ_ν ни в какой иной момент времени, кроме $t = 0$.

Таким образом, привилегированное положение момента времени $t = 0$ следует из данных самого вопроса: это единственный момент, когда D_t является постоянной относительно фаз возмущения.

§ 4. Рассмотрим в качестве иллюстрации случай, когда система S сводится к одному только гармоническому осциллятору с одной степенью свободы и энергия возмущения имеет вид

$$\lambda f(t) q, \tag{54}$$

где λ — постоянный множитель. Такой случай мы имеем, когда упомянутый осциллятор представляет собой диполь, испытывающий влияние излучения рассмотренного выше типа (см. § 1), т. е. когда $f = E$, $P = \lambda q$.

На основании (10′)

$$\Gamma = \lambda f(t)\sqrt{\frac{2J}{\omega}}\,\sin(\omega t + \varphi).$$

Представляя этот гамильтониан в виде (11), получим

$$\mathfrak{U}_n = 0, \quad n \neq \pm 1,$$

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{\lambda}{2i}\sqrt{\frac{2J}{\omega}}, \quad \mathfrak{U}_{-1} = -\frac{\lambda}{2i}\sqrt{\frac{2J}{\omega}}.$$

Учитывая (41), выводим из (43) следующее уравнение:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial J}\left(A\frac{\partial \sigma}{\partial J}\right),$$

где

$$A = \frac{\pi}{4}\{|\mathfrak{U}_1|^2 I(\omega) + |\mathfrak{U}_{-1}|^2 I(-\omega)\} = \frac{\pi}{4}\lambda^2 \frac{J}{\omega} I(\omega),$$

и, таким образом,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\pi}{4}\lambda^2 \frac{I(\omega)}{\omega}\frac{\partial}{\partial J}\left(J\frac{\partial \sigma}{\partial J}\right).$$

Взяв теперь в качестве независимой переменной собственную энергию осциллятора

$$E = \omega J,$$

получим, наконец, уравнение

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\pi}{4}\lambda^2 I(\omega)\frac{\partial}{\partial E}\left(E\frac{\partial \sigma}{\partial E}\right), \tag{55}$$

справедливое при $t > 0$ и при $E \geqslant 0$. Из этого уравнения прежде всего можно видеть, что влияние возмущения входит в него только через функцию $I(\omega)$ — спектральную интенсивность возмущающей силы, соответствующую частоте ω.

Таким образом, убеждаемся, что в принятом приближении эволюция распределения вероятностей энергий (E) может зависеть только от таких составляющих возмущения, частоты которых близки к собственной частоте осциллятора. К тому же это заключение почти очевидно, так как, поскольку возмущение очень мало, влиянием его составляющих нельзя пренебречь только в том случае, когда их эффект увеличивается благодаря явлению резонанса.

Теперь используем уравнение (55) для вычисления средних[1] значений различных степеней энергии:

$$\overline{E^m} = \int_0^\infty E^m \sigma_t \, dE,$$

рассматриваемых как функции времени.

Имеем

$$\frac{d\overline{E^m}}{dt} = \frac{\pi}{4} \lambda^2 I(\omega) \int_0^\infty E^m \frac{\partial}{\partial E} \left(E \frac{\partial \sigma}{\partial E} \right) dE,$$

откуда после двукратного интегрирования по частям получаем

$$\frac{d\overline{E^m}}{dt} = \frac{\pi}{4} \lambda^2 I(\omega) \int_0^\infty \sigma \frac{\partial}{\partial E} \left(E \frac{\partial E^m}{\partial E} \right) dE,$$

т. е.

$$\frac{d\overline{E^m}}{dt} = \frac{\pi}{4} \lambda^2 m^2 I(\omega) \overline{E^{(m-1)}}. \tag{56}$$

В частности, при $m = 1$

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = \frac{\pi}{4} \lambda^2 I(\omega),$$

откуда

$$\overline{E} = \overline{E}_0 + \frac{\pi}{4} \lambda^2 t I(\omega),$$

где $\overline{E_0}$ — начальное значение $\overline{E}$.

Следовательно, средняя энергия возрастает пропорционально времени.

Из рекуррентных формул (56) получим последовательно

$$\frac{d\overline{E^2}}{dt} = \pi \lambda^2 I(\omega) \left\{ \overline{E}_0 + \frac{\pi}{4} \lambda^2 I(\omega) t \right\},$$

и, таким образом,

$$\overline{E^2} = \overline{E_0^2} + \pi \lambda^2 I(\omega) \overline{E}_0 t + \left(\frac{\pi}{2} \lambda^2 \right)^2 2 I^2(\omega) t^2.$$

Наконец, приходим к следующей формуле:

$$\overline{E^m} = \overline{E_0^m} + \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{m!}{(m-n)!} \right]^2 \frac{\left(\frac{\pi}{4} \lambda^2 I(\omega) t \right)^n}{n!} \overline{E_0^{(m-n)}}. \tag{57}$$

Если начальное распределение вероятностей известно, то эта формула дает возможность находить средние значения всех положительных целых степеней

[1] Здесь σ выбирается с таким расчетом, чтобы удовлетворялось равенство

$$\int_0^\infty \sigma \, dE = 1.$$

Таким образом, $\sigma_t(E') \, dE'$ выражает вероятность того, что энергия осциллятора заключена между E' и $E' + dE'$ в момент t.

энергии и тем самым средние значения произвольной непрерывной функции энергии.

Пусть $f(E)$ — функция энергии. Очевидно,

$$\frac{d\overline{f(E)}}{dt} = \int_0^\infty \frac{\partial\sigma}{\partial t} f(E)\,dE = \frac{\pi}{4}\lambda^2 I(\omega)\int_0^\infty f(E)\frac{\partial\left(E\dfrac{\partial\sigma}{\partial E}\right)}{\partial E}\,dE,$$

откуда путем интегрирования по частям получим

$$\frac{d\overline{f(E)}}{dt} = \frac{\pi}{4}\lambda^2 I(\omega)\int_0^\infty \sigma\frac{d\left(E\dfrac{df}{dE}\right)}{dE}\,dE. \tag{58}$$

Предположим, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\left(E\dfrac{df}{dE}\right)}{dE} + kf = 0. \tag{59}$$

Тогда из (58) получаем

$$\frac{df(E)}{dt} = -k\frac{\pi}{4}\lambda^2 I(\omega)\overline{f(E)},$$

откуда следует

$$\overline{f_t(E)} = \overline{f_0(E)}\mathrm{e}^{-k(\pi/4)\lambda^2 I(\omega)t}. \tag{60}$$

Заметим теперь, что уравнение (59) имеет решение

$$f = J_0(2\sqrt{kE}),$$

где J_0 — функция Бесселя. Следовательно, из (60) получаем

$$\overline{[J_0(2\sqrt{kE})]_t} = \overline{[J_0(2\sqrt{kE})]_0}\mathrm{e}^{-k(\pi/4)\lambda^2 I(\omega)t} \tag{61}$$

при произвольной положительной постоянной k.

Предположим теперь, что $f(E)$ — произвольная функция, и используем интеграл Фурье–Бесселя

$$F(x) = \int_0^\infty J_0(zx)z\left\{\int_0^\infty F(x')J_0(zx')x'\,dx'\right\}dz.$$

Полагая в нем

$$x = \sqrt{2E}, \quad x' = \sqrt{2E'}, \quad z = \sqrt{2k},$$
$$F(x) = f\left(\frac{1}{2}x^2\right),$$

получаем

$$J(E) = \int_0^\infty J_0(2\sqrt{kE})\left\{\int_0^\infty f(E')J_0(2\sqrt{kE'})\right\}dk,$$

на основании чего заключаем, что

$$\overline{f}_t(E) = \int_0^\infty [\overline{J_0(2\sqrt{kE})}]_t \left\{ \int_0^\infty f(E') J_0(2\sqrt{kE'})\, dE' \right\} dk.$$

Отсюда, учитывая (61), получаем

$$\overline{f}_t(E) = \int_0^\infty e^{-k(\pi/4)\lambda^2 I(\omega) t} [\overline{J_0(2\sqrt{kE})}]_0 \left\{ \int_0^\infty f(E') J_0(2\sqrt{kE'})\, dE' \right\} dk. \qquad (62)$$

Таким образом, мы получили соотношение, позволяющее вычислять средние значения различных функций энергии исходя из начального распределения вероятности.

Полученное соотношение дает также возможность выразить плотность σ_t как функцию ее начальных значений. Для этого заметим, что, согласно определению,

$$\overline{f_t(E)} = \int_0^\infty f(E)\sigma_t(E)\, dE,$$

$$[\overline{J_0(2\sqrt{kE})}]_0 = \int_0^\infty J_0(2\sqrt{kE})\sigma_0(E)\, dE.$$

Таким образом, из (62) получаем

$$\int_0^\infty f(E)\sigma_t(E)\, dE =$$

$$= \int_0^\infty e^{-k\alpha t} \left\{ \int_0^\infty J_0(2\sqrt{kE})\sigma_0(E)\, dE \right\} \left\{ \int_0^\infty f(E') J_0(2\sqrt{kE'})\, dE' \right\} dk,$$

где для краткости введено обозначение

$$\alpha = \frac{\pi}{4}\lambda^2 I(\omega).$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty f(E) \left\{ \sigma_t(E) - \int_0^\infty J_0(2\sqrt{kE}) \left[\int_0^\infty J_0(2\sqrt{kE'})\sigma_0(E')\, dE' \right] e^{-k\alpha t}\, dk \right\} dE = 0,$$

откуда в силу того, что $f(E)$ произвольна, следует

$$\sigma_t(E) = \int_0^\infty J_0(2\sqrt{kE}) e^{-k\alpha t} \left\{ \int_0^\infty J_0(2\sqrt{kE'})\sigma_0(E')\, dE' \right\} dk. \qquad (63)$$

Но, как хорошо известно,

$$J_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Таким образом, производя очевидную замену переменных, получаем

$$\int_0^\infty e^{-k\alpha t}J_0(2\sqrt{kE}\,)J_0(2\sqrt{kE'}\,)\,dk=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^\infty e^{-k\alpha t}e^{2i\sqrt{k}\,(\sqrt{E}\,\cos\varphi+\sqrt{E'}\,\cos\varphi')}\,dk\right\}d\varphi\,d\varphi'=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}2\left\{\int_0^\infty e^{-z^2\alpha t}e^{2iz(\sqrt{E}\,\cos\varphi+\sqrt{E'}\,\cos\varphi')}z\,dz\right\}d\varphi\,d\varphi'=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2\alpha t}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^\infty e^{-\xi^2}e^{2i\xi((\sqrt{E}\,\cos\varphi+\sqrt{E'}\,\cos\varphi')/\sqrt{\alpha t}\,)}\xi\,d\xi\right\}d\varphi\,d\varphi'$$

и, следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-k\alpha t}J_0(2\sqrt{kE}\,)J_0(2\sqrt{kE'}\,)\,dk=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2\alpha t}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^\infty e^{-\xi^2}\cos\left[2\xi\left(\frac{\sqrt{E}\,\cos\varphi+\sqrt{E'}\,\cos\varphi'}{\sqrt{\alpha t}}\right)\right]\xi\,d\xi\right\}d\varphi\,d\varphi'.$$

Обозначим для краткости

$$\frac{1}{2}-ae^{-a^2}\int_0^a e^{a^2}\,da=\Phi(a). \tag{64}$$

Тогда

$$\int_0^\infty e^{-k\alpha t}J_0(2\sqrt{kE}\,)J_0(2\sqrt{kE'}\,)\,dk=\frac{1}{2\pi^2\alpha t}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\left\{\frac{\sqrt{E}\,\cos\varphi+\sqrt{E'}\,\cos\varphi'}{\sqrt{\alpha t}}\right\}d\varphi\,d\varphi$$

и, вводя это соотношение в (63), получаем наконец

$$\sigma_t(E)=\int_0^\infty \sigma_0(E')P(t,E,E')\,dE', \tag{65}$$

где

$$P(t, E, E') = \frac{1}{2\pi^2 \alpha t} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi\left\{\frac{\sqrt{E}\cos\varphi + \sqrt{E'}\cos\varphi'}{\sqrt{\alpha t}}\right\} d\varphi\, d\varphi'. \qquad (66)$$

Таким образом, малое возмущение вида (54) можно рассматривать как причину статистических изменений собственной энергии осциллятора, подобных тем, которые испытывает скорость частицы при броуновском движении. Закон этих статистических изменений энергии в данном случае характеризуется плотностью вероятности переходов $P(t, E, E')$, выражением которой является формула (66).

§ 5. Выше мы рассматривали проблемы возмущений исходя из уравнений классической механики. Рассмотрим теперь эти проблемы с точки зрения квантовой механики. Для этого сначала изложим обычный способ вычисления вероятностей переходов, а затем, после критического обсуждения этого способа, попытаемся разработать специальный способ, полностью аналогичный методу, примененному в предыдущих параграфах. Будем пользоваться терминологией и символикой П. Дирака, введенной им в его фундаментальной работе «The Principles of Quantum Mechanics» (2nd ed. Oxford, 1935).

Пусть H_0 — гамильтониан невозмущенной динамической системы, не зависящей от времени, а H_1 — гамильтониан, возникающий благодаря возмущению.

Пусть α — такая полная система наблюдаемых, в которой H является функцией α:

$$H_0 = H_0(\alpha).$$

Предположим, что собственные значения α образуют дискретную последовательность.

Таким образом, в случае, рассматриваемом в этой работе, а именно в случае, когда гамильтониан H_0 имеет вид

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\{p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2\},$$

можно было бы взять в качестве α-системы наблюдаемые «действия» $J_1, \ldots, J_N$, определяемые соотношениями[1]

$$p_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{2}}\{J_n^{1/2} e^{iw_n} + e^{-iw_n} J_n^{1/2}\},$$

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}\{-iJ_n^{1/2} e^{iw_n} + ie^{-iw_n} J_n^{1/2}\},$$

собственные значения которых образуют последовательность $k\hbar$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

[1] В этих соотношениях наблюдаемые J_n, w_n являются соответственно квантовыми аналогами переменных действия и циклических переменных классической механики.

Теперь заметим, что, согласно основным принципам квантовой механики, изменение состояния Ψ рассматриваемой динамической системы во времени подчиняется уравнению

$$i\hbar\frac{d\Psi}{dt} = H\Psi, \tag{67}$$

где H — полный гамильтониан:

$$H = H_0 + H_1.$$

Для того чтобы определить состояние Ψ, используем наблюдаемые α и обозначим представителя Ψ через $(\alpha'|)$. Теперь из (67) получим

$$i\hbar\frac{d}{dt}(\alpha'|) = \sum_{\alpha''}(\alpha'|H|\alpha'')(\alpha''|). \tag{68}$$

С другой стороны,

$$(\alpha'|H|\alpha'') = (\alpha'|H_0|\alpha'') + (\alpha'|H_1|\alpha'') = H_0(\alpha')\delta_{\alpha',\alpha''} + (\alpha'|H_1|\alpha''),$$

где $\delta_{\alpha',\alpha''}$ — символ Кронекера.

Следовательно, из (68) вытекает, что

$$i\hbar\frac{d}{dt}(\alpha'|) = H_0(\alpha')(\alpha'|) + \sum_{\alpha''}(\alpha'|H_1|\alpha'')(\alpha''|),$$

откуда, вводя обозначения

$$\begin{aligned}&(\alpha'|) = \mathrm{e}^{-i\{(H_0(\alpha'))/\hbar\}}C_t(\alpha'),\\ &(\alpha'|H_1|\alpha'')\mathrm{e}^{(i/\hbar)\{H_0(\alpha')-H_0(\alpha'')\}t} = V_t(\alpha',\alpha''),\end{aligned} \tag{69}$$

получаем

$$i\hbar\frac{dC_t(\alpha')}{dt} = \sum_{\alpha''}V_t(\alpha',\alpha'')C_t(\alpha''). \tag{70}$$

Это уравнение будет использовано при вычислении квадратов модулей $C_t(\alpha'0)$. Величины $|C_t(\alpha')|^2$ имеют очень простой физический смысл.

Действительно, согласно основным принципам квантовой механики, выражение[1]

$$P_t(\alpha') = |(\alpha'|)|^2 = |C_t(\alpha')|^2$$

представляет вероятность того, что наблюдаемые α принимают значения α' в момент времени t. Отметим теперь, что в силу уравнения (70) величины $C_t(\alpha')$ являются постоянными, если возмущение равно нулю. Следовательно, в данном случае малого возмущения их можно рассматривать как медленно изменяющиеся и в первом приближении положить

$$C_t(\alpha') = C_0(\alpha'),$$

а затем применить метод последовательных приближений.

Теперь мы имеем ряд

$$C_t(\alpha') = C_0(\alpha') + C_t^{(1)}(\alpha') + C_t^{(2)}(\alpha') + \ldots, \tag{71}$$

[1] Естественно, предполагаем, что представитель $(\alpha'|)$ нормирован.

где

$$C_t^{(1)}(\alpha') = -\frac{i}{\hbar}\sum_{\alpha''} C_0(\alpha'')\int_0^t V_t(\alpha', \alpha'')\,dt,$$
$$C_t^{(2)}(\alpha') = -\frac{i}{\hbar}\sum_{\alpha''}\int_0^t V_t(\alpha', \alpha'')C_t^{(1)}(\alpha'')\,dt. \tag{72}$$

Используем этот ряд при вычислении вероятности $P_{\Delta t}(\alpha')$, пренебрегая членами третьего порядка малости относительно возмущения. Получаем

$$P_{\Delta t}(\alpha') = |C_0(\alpha')|^2 + \{C_0(\alpha')\overline{C_{\Delta t}^{(1)}(\alpha')} + \overline{C_0(\alpha')}C_{\Delta t}^{(1)}(\alpha')\} +$$
$$+ \{C_0(\alpha')\overline{C_{\Delta t}^{(2)}(\alpha')} + |C_{\Delta t}^{(1)}(\alpha')|^2 + \overline{C_0(\alpha')}C_{\Delta t}^{(2)}(\alpha')\} + \ldots,$$

где в общем случае $\overline{\beta}$ обозначает сопряженную с любой β величину. Учитывая (72), заключаем, что

$$P_{\Delta t}(\alpha') = P_0(\alpha') +$$
$$+ \frac{i}{\hbar}\sum_{\alpha''}\left\{C_0(\alpha')\overline{C_0(\alpha'')}\int_0^{\Delta t}\overline{V_t(\alpha', \alpha'')}\,dt - \overline{C_0(\alpha')}C_0(\alpha'')\int_0^{\Delta t} V_t(\alpha', \alpha'')\,dt\right\} +$$
$$+ \frac{i}{\hbar^2}\sum_{\alpha'', \alpha'''}\left\{-C_0(\alpha')\overline{C_0(\alpha''')}\int_0^{\Delta t}\overline{V_t(\alpha', \alpha'')}\left(\int_0^t \overline{V_t(\alpha'', \alpha''')}\,dt\right)dt +\right.$$
$$+ C_0(\alpha'')C_0(\alpha''')\int_0^{\Delta t} V_t(\alpha', \alpha'')\,dt\int_0^{\Delta t}\overline{V_t(\alpha', \alpha''')}\,dt -$$
$$\left. - \overline{C_0(\alpha')}C_0(\alpha''')\int_0^{\Delta t} V_t(\alpha', \alpha'')\left(\int_0^t V_t(\alpha'', \alpha''')\,dt\right)dt\right\}. \tag{73}$$

Предположим теперь, что в начальный момент величины $C_0(\alpha')$ нам неизвестны, а дано только $P_0(\alpha') = |C_0(\alpha')|^2$. Иначе говоря, допустим, что в начальный момент мы знаем только вероятности того, что в этот момент наблюдаемые α принимают значения α'. Тогда фазы $\varphi(\alpha')$ величины $C_0(\alpha')$ в комплексном представлении

$$C_0(\alpha') = \sqrt{P_0(\alpha')}\,e^{i\varphi(\alpha')}$$

неизвестны. На основании этого в квантовой механике делают вывод[1], что при вычислении вероятности того, что наблюдаемые α принимают значения α' в момент Δt, необходимо в выражении (73) произвести усреднение по этим фазам. Следовательно, неизвестными фазами (которые иногда рассматривают

[1] См., например: *Dirac P.* The Principles of Quantum Mechanics. 2nd ed. Oxford, 1935.

как лишенные физического смысла) оперируют так, как будто они являются равновероятными независимыми статистическими переменными.

Производя, таким образом, усреднение в (73) и отмечая, что средние значения $\overline{C_0(\alpha')C_0(\alpha'')}$ равны нулю каждый раз, когда $\alpha' \neq \alpha''$, заключаем, что

$$P_{\Delta t}(\alpha') = P_0(\alpha') + \frac{1}{\hbar^2}\sum_{\alpha''} P_0(\alpha'')\left|\int_0^{\Delta t} V_t(\alpha', \alpha'')\,dt\right|^2 -$$

$$- \frac{1}{\hbar^2}\sum_{\alpha''} P_0(\alpha')\left\{\int_0^{\Delta t} \overline{V_t(\alpha', \alpha'')}\left(\int_0^t \overline{V_t(\alpha'', \alpha')}\,dt\right)dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\Delta t} V_t(\alpha', \alpha'')\left(\int_0^t V_t(\alpha'', \alpha')\,dt\right)dt\right\}.$$

Учитывая, что

$$V_t(\alpha'', \alpha') = \overline{V_t(\alpha', \alpha'')}, \quad \overline{V_t(\alpha'', \alpha')} = V_t(\alpha', \alpha''),$$

получим

$$\overline{V_t(\alpha', \alpha'')}\int_0^t \overline{V_t(\alpha'', \alpha')}\,dt + V_t(\alpha', \alpha'')\int_0^t V_t(\alpha'', \alpha')\,dt = \frac{d}{dt}\left|\int_0^t V_t(\alpha', \alpha'')\,dt\right|^2$$

и, таким образом,

$$P_{\Delta t}(\alpha') = P_0(\alpha') + \frac{1}{\hbar^2}\sum_{\alpha''}\{P_0(\alpha'') - P_0(\alpha')\}\left|\int_0^{\Delta t} V_t(\alpha', \alpha'')\,dt\right|^2.$$

Если теперь гамильтониан возмущения зависит от системы статистических величин β (как, например, гамильтониан, рассмотренный в § 1), необходимо в этой формуле взять среднее по β, получая, таким образом,

$$P_{\Delta t}(\alpha') = P_0(\alpha') + \frac{1}{\hbar^2}\sum_{\alpha''}\{P_0(\alpha'') - P_0(\alpha')\}\overline{\left|\int_0^{\Delta t} V_t(\alpha', \alpha'')\,dt\right|^2}^{(\beta)}. \qquad (74)$$

Если предполагается, что в начальный момент значения наблюдаемых α известны и равны, например, α_0'', иначе говоря, если предполагается, что

$$P_0(\alpha') = 0 \quad \text{при} \quad \alpha' \neq \alpha_0'',$$
$$P_0(\alpha') = 1 \quad \text{при} \quad \alpha' = \alpha_0'',$$

то из формулы (74) имеем

$$P_{\Delta t}(\alpha') = \frac{1}{\hbar^2}\overline{\left|\int_0^{\Delta t} V_t(\alpha', \alpha_0'')\,dt\right|^2}^{(\beta)}.$$

Следовательно, выражение

$$\frac{1}{\hbar^2}\overline{\left|\int_0^{\Delta t} V_t(\alpha', \alpha'')\,dt\right|^2}^{(\beta)} = \frac{1}{\hbar^2}\overline{\left|\int_0^{\Delta t} (\alpha'|H_1|\alpha'')e^{(i/\hbar)\{H_0(\alpha')-H_0(\alpha'')\}}\,dt\right|^2}^{(\beta)},$$

фигурирующее в формуле (74), описывает вероятность того, что наблюдаемые α, равные α'' в момент $t=0$, принимают значения α' после того, как пройдет время Δt. Можно было бы также сказать, что это выражение описывает вероятность перехода рассматриваемой динамической системы из состояния α'' в состояние α' в течение интервала времени Δt. Эта вероятность перехода симметрична относительно α' и α''.

Рассмотрим теперь в качестве примера случаи, в которых гамильтониан возмущения имеет вид

$$H_1 = f(t)V, \tag{75}$$

где V — наблюдаемая, явно не зависящая от времени, и $f(t)$ — функция типа рассмотренных в предыдущих параграфах.

В этом случае

$$\frac{1}{\hbar^2}\overline{\left|\int_0^{\Delta t} V_t(\alpha', \alpha'')\,dt\right|^2}^{(\beta)} = \frac{1}{\hbar^2}|(\alpha'|V|\alpha'')|^2\overline{\left|\int_0^{\Delta t} f(t)e^{i\nu_{\alpha'\alpha''}t}\,dt\right|^2}^{(\theta_\nu)},$$

где

$$\nu_{\alpha'\alpha''} = \frac{H_0(\alpha') - H_0(\alpha'')}{\hbar}.$$

Рассуждая так же, как и в § 2, убеждаемся, что

$$\overline{\left|\int_0^{\Delta t} f(t)e^{i\nu_{\alpha'\alpha''}t}\,dt\right|^2}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu \overline{\int_0^{\Delta t} e^{i\nu_{\alpha'\alpha''}t}\cos(\nu t+\theta_\nu)\,dt \int_0^{\Delta t} e^{-i\nu_{\alpha'\alpha''}t}\cos(\mu t+\theta_\mu)\,dt}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \sum_\nu a_\nu^2 \overline{\left|\int_0^{\Delta t} e^{i\nu_{\alpha'\alpha''}t}\cos(\nu t+\theta_\nu)\,dt\right|^2}^{(\theta_\nu)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_\nu a_\nu^2\left\{\left|\int_0^{\Delta t} e^{i(\nu_{\alpha'\alpha''}+\nu)t}\,dt\right|^2 + \left|\int_0^{\Delta t} e^{i(\nu_{\alpha'\alpha''}-\nu)t}\,dt\right|^2\right\},$$

откуда следует

$$\left|\int_0^{\Delta t} f(t)\mathrm{e}^{i\nu_{\alpha'\alpha''}t}\,dt\right|^2 = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left|\int_0^{\Delta t}\mathrm{e}^{i(\nu_{\alpha'\alpha''}-\nu)t}\,dt\right|^2 d\nu =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\frac{1-\cos(\nu_{\alpha'\alpha''}-\nu)\,\Delta t}{(\nu_{\alpha'\alpha''}-\nu)^2}\,d\nu.$$

Таким образом,

$$\overline{\frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^{\Delta t} V_t(\alpha',\alpha'')\,dt\right|^2}^{(\beta)} = \frac{|(\alpha'|V|\alpha'')|^2}{2\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\frac{1-\cos(\nu_{\alpha'\alpha''}-\nu)\,\Delta t}{(\nu_{\alpha'\alpha''}-\nu)^2}\,d\nu. \tag{76}$$

Но при достаточно больших значениях Δt интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\frac{1-\cos(\nu_{\alpha'\alpha''}-\nu)\,\Delta t}{(\nu_{\alpha'\alpha''}-\nu)^2}\,d\nu \tag{77}$$

почти пропорционален Δt, так как

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{\substack{-\infty\\ \Delta t\to\infty}} I(\nu)\frac{1-\cos(\nu_{\alpha'\alpha''}-\nu)\,\Delta t}{(\nu_{\alpha'\alpha''}-\nu)^2}\,d\nu \to \pi I(\nu_{\alpha'\alpha''}).$$

Следовательно, вероятность перехода (76) также явно пропорциональна Δt (при достаточно больших значениях Δt) и приблизительно равна

$$\frac{\pi}{2}\frac{|(\alpha'|V|\alpha'')|^2}{\hbar^2} I(\nu_{\alpha'\alpha''})\,\Delta t.$$

Таким образом, видим, что существует вполне определенный коэффициент вероятности рассматриваемого перехода $\alpha''\to\alpha'$, т.е. его вероятность, отнесенная к единице времени. Этот коэффициент здесь

$$A_{\alpha'\alpha''} = \frac{\pi}{2}\frac{|(\alpha'|V|\alpha'')|^2}{\hbar^2} I(\nu_{\alpha'\alpha''}). \tag{78}$$

Следовательно, формула (74) при достаточно больших значениях Δt дает

$$P_{\Delta t}(\alpha') = P_0(\alpha') + \sum_{\alpha''}\{P_0(\alpha'') - P_0(\alpha')\}A_{\alpha'\alpha''}\,\Delta t. \tag{79}$$

Соотношение (79) справедливо только при условии, что Δt имеет адекватный порядок величины: с одной стороны, Δt должно быть достаточно большим, чтобы частное от деления интеграла (77) на Δt было близко к его предельному значению $\pi I(\nu_{\alpha'\alpha''})$, и, с другой стороны, Δt должно быть таким, чтобы в течение этого интервала времени состояние системы изменялось очень мало и, таким образом, величины $C_t(\alpha')$ были почти постоянными.

Эти два взаимно противоречивых условия относительно порядка Δt становятся совместимыми, если возмущение достаточно мало́.

Формула (79) выражает закон изменения распределения вероятностей состояний (α'), происходящего с момента 0 до момента Δt. Предполагая определенную гомогенность закона изменения этого распределения во времени, что дает возможность заменить в (79) моменты 0 и Δt соответственно моментами t и $t+\Delta t$, получаем

$$\frac{P_{t+\Delta t}(\alpha') - P_t(\alpha')}{\Delta t} = \sum_{\alpha''} \{P_t(\alpha'') - P_t(\alpha')\} A_{\alpha'\alpha''},$$

и отсюда, учитывая, что величины P_t остаются почти постоянными в течение интервала времени порядка Δt, приходим к приближенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{dP_t(\alpha')}{dt} = \sum_{\alpha''} \{P_t(\alpha'') - P_t(\alpha')\} A_{\alpha'\alpha''}. \tag{80}$$

Естественно, что в квантовой механике уравнения этого типа применяются не только в отдельном случае возмущения вида (75), но и во всех случаях, где есть коэффициент вероятности перехода, т. е. во всех случаях, где при Δt определенного порядка величины выражение

$$\frac{(\beta)}{\left| \int_0^{\Delta t} V_t(\alpha', \alpha'')\, dt \right|^2}$$

возрастает пропорционально Δt.

Сделаем теперь несколько критических замечаний относительно этого общепринятого в квантовой механике метода получения уравнений вида (80).

Прежде всего, по нашему мнению, неясно, почему неизвестные фазы $\varphi(\alpha')$ могут рассматриваться как независимые статистические переменные.

С другой стороны, если даже принять эту гипотезу для определенного момента времени, скажем для момента $t=0$, то ее никак нельзя принять для любого другого момента, так как, согласно уравнениям (70), $C_t(\alpha')$ являются вполне определенными функциями $C_0(\alpha')$ и, таким образом, фазы C_t являются вполне определенными функциями их начальных значений.

Поскольку нельзя предполагать, что фазы C_t являются независимыми статистическими переменными одновременно в начальный момент и в момент $t \neq 0$, очевидно, момент $t=0$, согласно упомянутой гипотезе, становится здесь моментом исключительным, привилегированным. Следовательно, нельзя предполагать, по крайней мере без предварительного специального исследования, что в соотношении (79) мы имеем право заменять моменты 0 и Δt моментами t и $t+\Delta t$.

Гомогенность закона изменения распределения вероятностей состояний α' можно, таким образом, ставить под сомнение.

Отметим, наконец, что окончательные уравнения (80) вскрывают глубокие аналогии с уравнением (43) типа Фоккера–Планка.

Действительно, известно, что уравнения этого типа можно рассматривать как обобщение уравнений вида (80) в случае состояний, образующих непрерывную совокупность. Однако метод, о котором идет речь, не вскрывает очевидной аналогии с методом, используемым в классической механике, так как он основывается на применении волновой функции Ψ и коэффициентов $C_t(\alpha')$, не имеющих непосредственных прототипов в классической схеме.

Исходя из этих рассуждений, опишем новый метод, полностью аналогичный методу, который мы использовали в предыдущих параграфах, метод, построенный на том факте, что в квантовой механике можно определить статистический оператор U, имеющий много общего с плотностью вероятности классической механики.

Статистический оператор — «квантовая плотность», — введенный Дж. фон Нейманом[1], можно определить путем следующих рассуждений.

Предположим, что наша динамическая система, согласно определенному вероятностному закону, может в данный момент времени находиться в ряде возможных состояний.

Пусть $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ являются этими состояниями, а $w_1, w_2, \ldots, w_m$ — их соответствующими вероятностями. Тогда определяем U как оператор, собственными значениями которого являются w_m, а соответствующими собственными функциями — Ψ_m. Следовательно, если представителем состояния Ψ_m в принятой системе наблюдаемых α является (α'/m), то представителем квантовой плотности в этой же системе является[2]

$$(\alpha'|U|\alpha'') = \sum_m w_m \left(\frac{\alpha'}{m}\right)\left(\frac{m}{\alpha''}\right). \tag{81}$$

Пусть теперь F — произвольная наблюдаемая. Согласно основным принципам квантовой механики среднее значение (математическое ожидание, если угодно) F в состоянии Ψ_m

$$\overline{F}_m = \sum_{\alpha',\alpha''} \left(\frac{m}{\alpha'}\right)(\alpha'|F|\alpha'')\left(\frac{\alpha''}{m}\right).$$

Следовательно, если динамическая система находится в состояниях Ψ_m с соответствующими вероятностями w_m, математическое ожидание наблюдаемой F определяется формулой

$$\sum_m w_m \overline{F}_m = \sum_m w_m \left\{ \sum_{\alpha',\alpha''} \left(\frac{m}{\alpha'}\right)(\alpha'|F|\alpha'')\left(\frac{\alpha''}{m}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{\alpha'} \left\{ \sum_{\alpha'} (\alpha'|F|\alpha'')(\alpha''|U|\alpha') \right\},$$

т. е.

$$\sum_m w_m \overline{F}_m = \sum_{\alpha'} (\alpha'|FU|\alpha') = \mathrm{Sp}(FU).$$

[1] *Neumann J. von.* Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Springer, 1932.

[2] Ibidem.

Таким образом, математическое ожидание наблюдаемой F для распределения вероятностей, описанного квантовой плотностью U, равно следу (Spur) произведения FU.

В классической механике при вычислении математического ожидания динамической переменной F в случае распределения описанной плотностью D необходимо умножить F на D и провести интегрирование. Здесь интегрирование заменяется усреднением по диагонали.

Теперь выведем уравнение, описывающее изменение U во времени.

Дифференцируя соотношение (81), получим

$$i\hbar\frac{d(\alpha'|U|\alpha'')}{dt}=\sum_m\left\{i\hbar\frac{d\left(\frac{\alpha'}{m}\right)}{dt}w_m\left(\frac{m}{\alpha''}\right)+\left(\frac{\alpha'}{m}\right)w_m i\hbar\frac{d\left(\frac{m}{\alpha''}\right)}{dt}\right\},\qquad(82)$$

так как величины w_m, очевидно, остаются постоянными. Но состояния Ψ_m изменяются согласно уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{d\Psi_m}{dt}=H\Psi_m,$$

где H — полный гамильтониан системы. Следовательно,

$$i\hbar\frac{d\left(\frac{\alpha'}{m}\right)}{dt}=\sum_{\alpha'''}(\alpha'|H|\alpha''')\left(\frac{\alpha'''}{m}\right),$$

$$-i\hbar\frac{d\left(\frac{m}{\alpha''}\right)}{dt}=\sum_{\alpha'''}\left(\frac{m}{\alpha'''}\right)(\alpha'''|H|\alpha'').$$

Таким образом, из (82) вытекает

$$i\hbar\frac{d(\alpha'|U|\alpha'')}{dt}=\sum_{\alpha'''}(\alpha'|H|\alpha''')\left\{\sum_m\left(\frac{\alpha'''}{m}\right)w_m\left(\frac{m}{\alpha''}\right)\right\}-$$

$$-\sum_{\alpha'''}\left\{\sum_m\left(\frac{\alpha'}{m}\right)w_m\left(\frac{m}{\alpha'''}\right)\right\}(\alpha'''|H|\alpha'')=(\alpha'|HU=UH|\alpha''),$$

откуда символически

$$i\hbar\frac{dU}{dt}=HU-UH,$$

т. е., если применить квантовые скобки Пуассона,

$$\frac{dU}{dt}=[H,U].\qquad(83)$$

Как видим, уравнение (83) полностью аналогично уравнению для классической плотности D.

Учитывая эти предварительные рассуждения, попытаемся использовать идеи, изложенные в первой части данной работы.

Предположим сначала, что гамильтониан H зависит от системы постоянных величин β, возможные значения которых распределены согласно неко-

торому вероятностному закону. Это условие выполняется, например, когда гамильтониан возмущения имеет вид (75); в этом случае в качестве β можно было бы принять систему фаз θ_ν.

Предположим далее, что в начальный момент времени $t=0$ были проведены измерения рассматриваемой динамической системы, в результате которых стали точно известны ее возможные состояния $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ и соответствующие вероятности $w_1, \ldots, w_m$ в этот момент. Следовательно, квантовая плотность в этот момент является вполне определенной и, таким образом, не может зависеть от неизвестных величин β. На основании этого можем записать:

$$U_0 = \overline{U_0}^{(\beta)}. \tag{84}$$

Но поскольку полный гамильтониан H зависит от статистических переменных β, заключаем, что квантовая плотность U также должна зависеть от этих величин в любой момент $t>0$.

Возьмем теперь наблюдаемую F, не зависящую от β, и рассмотрим выражение

$$\mathrm{Sp}(FU),$$

которое является функцией $f(\beta)$ статистических переменных β.

Согласно приведенным выше рассуждениям выражение $f(\beta')$ представляет собой математическое ожидание наблюдаемой F, вычисленное при условии, что величины β принимают определенные значения β'. Следовательно, математическое ожидание этой наблюдаемой, т. е. математическое ожидание F, при оценке которого мы исходим из того, что возможные значения β распределены согласно определенному вероятностному закону, равно

$$\overline{f(\beta)}^{(\beta)},$$

т. е.

$$\mathrm{Sp}(\overline{FU}^{(\beta)}) = \mathrm{Sp}(F\,\overline{U}^{(\beta)}),$$

так как F не зависит от β.

Теперь рассмотрим класс наблюдаемых F, которые принимают вполне определенные значения, если известны значения α. Наблюдаемые из этого класса можно рассматривать, таким образом, как функции $F(\alpha)$ наблюдаемых (α).

Очевидно,

$$(\alpha'|F(\alpha)|\alpha'') = F(\alpha')\delta_{\alpha'\alpha''}.$$

Следовательно, математическое ожидание наблюдаемой $F(\alpha)$ из рассматриваемого класса равно

$$\sum_{\alpha'} F(\alpha')\overline{(\alpha'|U|\alpha')}^{(\beta)}. \tag{85}$$

Отсюда мы делаем заключение, что при вычислении математических ожиданий таких наблюдаемых достаточно определить средние значения

$$P(\alpha') = \overline{(\alpha'|U|\alpha')}^{(\beta)} \tag{86}$$

диагональных элементов представления квантовой плотности U в системе α. Как следует из (85), величины $P(\alpha')$ можно рассматривать как вероятности того, что наблюдаемые α принимают определенные значения α'.

Рассмотрим теперь способ получения приближенного уравнения, которое позволяет вычислить эти величины по их начальным значениям без предварительного определения квантовой плотности U.

Для большей простоты ограничимся рассмотрением случая, в котором гамильтониан возмущения имеет вид (75), причем $f(t)$ — функция, уже рассмотренная ранее. В качестве переменных β берем фазы θ_ν гармонических составляющих этой функции. Тогда, используя (83) и (85), получаем

$$\frac{dU}{dt} = [H_0, U] + f(t)[V, U], \tag{87}$$

$$U_0 = \overline{U_0}^{(\theta_\nu)}. \tag{88}$$

Теперь вводим новую плотность D:

$$D = \mathrm{e}^{(-H_0/i\hbar)t} U \mathrm{e}^{(H_0/i\hbar)t},$$

и, таким образом, получаем

$$U = \mathrm{e}^{(H_0/i\hbar)t} D \mathrm{e}^{-(H_0/i\hbar)t}. \tag{89}$$

Отсюда следует

$$(\alpha'|U|\alpha'') = (\alpha'|D|\alpha'')\mathrm{e}^{-i\nu_{\alpha'\alpha''}t},$$

где

$$\nu_{\alpha'\alpha''} = \frac{H_0(\alpha') - H_0(\alpha'')}{\hbar}$$

и, таким образом,

$$P(\alpha') = (\alpha'|\overline{D}^{(\theta_\nu)}|\alpha'). \tag{90}$$

Подставляя выражение (89) в уравнение (87), получаем

$$i\hbar \mathrm{e}^{(h_0/i\hbar)t} \frac{dD}{dt} \mathrm{e}^{-(H_0/i\hbar)t} =$$

$$= f(t)\{V\mathrm{e}^{(H_0/i\hbar)t} D\mathrm{e}^{-(H_0/i\hbar)t} - \mathrm{e}^{(H_0/i\hbar)t} D\mathrm{e}^{-(H_0/i\hbar)t} V\}. \tag{91}$$

Введем обозначения:

$$V_t = \mathrm{e}^{-(H_0/i\hbar)t} V \mathrm{e}^{(H_0/i\hbar)t} \tag{92}$$

и

$$\Gamma_t = f(t) V_t. \tag{93}$$

Тогда уравнение (91) дает

$$i\hbar \frac{dD}{dt} = \Gamma_t D - D\Gamma_t,$$

т. е.

$$\frac{dD}{dt} = [\Gamma_t, D]. \tag{94}$$

Можно заметить, что это уравнение является квантовым аналогом уравнения (13) (см. § 2). Точно так же формулы (93), (92) являются квантовыми аналогами (10′).

Заметим, с другой стороны, что из (88), (89) вытекает

$$D_0 = \overline{D_0}^{(\theta_\nu)}.$$

Следовательно, учитывая (94), получим

$$D_t = \rho_0 + \int_0^t [\Gamma_t, D_t]\, dt, \tag{95}$$

где

$$\rho_t = \overline{D_t}^{(\theta_\nu)}. \tag{96}$$

Усредняя по θ_ν обе части уравнения (95), получаем

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t \overline{[\Gamma_t, D_t]}^{(\theta_\nu)}\, dt. \tag{97}$$

Выберем теперь интервал времени Δt с таким расчетом, чтобы в интервале $(t, t+\Delta t)$ функция ρ_t была практически постоянной. Необходимо заметить, как мы уже делали это выше, что значение Δt можно брать тем больше, чем меньше возмущение.

Рассмотрим последовательность равноудаленных моментов

$$t_k = k\,\Delta t \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Из (97) находим

$$\rho_{t_{k+1}} = \rho_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{[\Gamma_t, D_t]}^{(\theta_\nu)}\, dt. \tag{98}$$

С другой стороны, из (95) и (97) следует

$$D_t = \rho_t + \left\{ \int_0^t [\Gamma_t, D_t]\, dt - \int_0^t \overline{[\Gamma_t, D_t]}^{(\theta_\nu)}\, dt \right\}. \tag{99}$$

Из соотношения (99) следует, что в первом приближении, если пренебречь членами возмущения первого порядка малости,

$$D_t = \rho_t.$$

Подставляя эту формулу в правую часть (99), получаем второе приближение:

$$D_t = \rho_t + \left\{ \int_0^t [\Gamma_t, \rho_t]\, dt - \int_0^t \overline{[\Gamma_t, \rho_t]}^{(\theta_\nu)}\, dt \right\},$$

где мы пренебрегли только членами возмущения второго порядка малости. Но

$$\overline{[\Gamma_t, \rho_t]}^{(\theta_\nu)} = \overline{f(t)}^{(\theta_\nu)}[V_t, \rho_t] = 0.$$

Следовательно, второе приближение для D_t имеет вид

$$D_t = \rho_t + \int_0^t [\Gamma_t, \rho_t]\, dt.$$

Подставляя это выражение в правую часть (98), находим формулу для приращения ρ_t, вычисленную до членов третьего порядка малости:

$$\Delta\rho_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{[\Gamma_t, \rho_t]}^{(\theta_\nu)}\, dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{\left[\Gamma_t, \int_0^t [\Gamma_\tau, \rho_\tau]\, d\tau\right]}^{(\theta_\nu)}\, dt,$$

откуда

$$\Delta\rho_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{\left[\Gamma_t, \int_0^t [\Gamma_\tau, \rho_\tau]\, d\tau\right]}^{(\theta_\nu)}\, dt.$$

Следовательно,

$$\Delta\rho_{t_k} = \sum_{q=0}^{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{\left[\Gamma_t, \int_{t_q}^{t_{q+1}} [\Gamma_\tau, \rho_\tau]\, d\tau\right]}^{(\theta_\nu)}\, dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{\left[\Gamma_t, \int_{t_k}^{t} [\Gamma_\tau, \rho_\tau]\, d\tau\right]}^{(\theta_\nu)}\, dt.$$

Однако ρ_t остается практически постоянной в интервале $(t_q, t_q + \Delta t)$, и мы можем подставить здесь ρ_{t_q} вместо ρ_t в интервале $(t_q, t_q + \Delta t)$. Приближенно получаем

$$\Delta\rho_{t_k} = \sum_{q=0}^{k-1} \overline{\Gamma_t, \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\int_{t_q}^{t_{q+1}} [\Gamma_\tau, \rho_{t_q}]\, d\tau\right] dt}^{(\theta_\nu)} + \overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \int_{t_k}^{t} [\Gamma_\tau, \rho_{t_k}]\, d\tau\right] dt}^{(\theta_\nu)}.$$

Заметим, с другой стороны, что

$$\sum_{q=0}^{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \int_{t_q}^{t_{q+1}} [\Gamma_\tau, \rho_{t_k}]\, d\tau\right] dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_t, \sum_{q=0}^{k-1} \int_{t_q}^{t_{q+1}} [\Gamma_\tau, \rho_{t_q}]\, d\tau\right] dt =$$

$$= \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Gamma_t\, dt, \sum_{q=0}^{k-1} \left[\int_{t_q}^{t_{q+1}} \Gamma_\tau\, d\tau, \rho_{t_q}\right]\right]$$

и

$$\sum_{q=0}^{k-1}\left[\int_{t_q}^{t_{q+1}}\Gamma_\tau\,d\tau,\rho_{t_q}\right]=\left[\int_0^{t_k}\Gamma_\tau\,d\tau,\rho_0\right]+\sum_{q=0}^{k-2}\left[\int_{t_{q+1}}^{t_k}\Gamma_\tau\,d\tau,\Delta\rho_{t_q}\right].$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta\rho_{t_k}}{\Delta t}=\overline{\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Gamma_t\,dt,\left[\int_0^{t_k}\Gamma_\tau\,d\tau,\rho_0\right]\right]}^{(\theta_\nu)}+$$

$$+\sum_{q=0}^{k-2}\overline{\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Gamma_t\,dt,\left[\int_{t_{q+1}}^{t_k}\Gamma_\tau\,d\tau,\frac{\Delta\rho_{t_q}}{\Delta t}\right]\right]}^{(\theta_\nu)}\Delta t+\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\Gamma_t,\int_{t_k}^{t}[\Gamma_\tau,\rho_{t_k}]\,d\tau\right]dt}^{(\theta_\nu)}. \tag{100}$$

Заметим между прочим, что это приближенное уравнение равным образом справедливо как в рамках квантовой, так и в рамках классической механики.

Чтобы перейти здесь к классической механике, достаточно рассматривать ρ как плотность вероятности, отнесенную к переменным $J_1, \ldots, J_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_N$, и заменить квантовые скобки Пуассона классическими скобками, подставляя вместо Γ_t, например, выражение (11).

Уравнение (26) в § 2 является не чем иным, как уравнением (100), усредненным по фазам φ. Если бы было необходимо получить уравнения типа Фоккера–Планка не для

$$\sigma=\overline{\rho}^{(\varphi)},$$

а непосредственно для ρ, то можно было бы применить к уравнению (100) те же способы, что и при получении уравнения (26). Тогда даже можно было бы освободиться от ограничительного условия относительно частот $\omega_1, \ldots, \omega_N$, которое мы наложили, чтобы иметь возможность вывести уравнение (43) для σ.

Прежде чем рассматривать уравнение (100) как уравнение квантовой механики, возвратимся еще раз к классической механике и проведем вычисления для вывода уравнения типа Фоккера–Планка относительно плотности ρ.

Заметим сначала, что

$$[U,V]=\sum_n\left\{\frac{\partial}{\partial J_n}\left(\frac{\partial U}{\partial\varphi_n}V\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\left(\frac{\partial U}{\partial J_n}V\right)\right\}$$

и, таким образом,

$$[U,[V,W]]=\sum_{n,m}\frac{\partial}{\partial J_n}\left\{\frac{\partial U}{\partial\varphi_n}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi_m}\frac{\partial W}{\partial J_m}-\frac{\partial V}{\partial J_m}\frac{\partial W}{\partial\varphi_m}\right)\right\}-$$

$$-\sum_{n,m}\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\left\{\frac{\partial U}{\partial J_n}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi_m}\frac{\partial W}{\partial J_m}-\frac{\partial V}{\partial J_m}\frac{\partial W}{\partial\varphi_m}\right)\right\}. \tag{101}$$

Поэтому, чтобы окончательно раскрыть уравнение (100), нам необходимо вычислить следующие выражения:

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_m}\,dt}^{(\theta_\nu)},\qquad \overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_m}\,dt}^{(\theta_\nu)},$$

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_m}\,dt}^{(\theta_\nu)},\qquad \overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_m}\,dt}^{(\theta_\nu)},$$

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\left\{\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial\varphi_m}\,d\tau\right\}dt}^{(\theta_\nu)},\qquad (102)$$

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\left\{\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial J_m}\,d\tau\right\}dt}^{(\theta_\nu)},\qquad \overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_n}\left\{\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial\varphi_m}\,d\tau\right\}dt}^{(\theta_\nu)},$$

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_n}\left\{\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial J_m}\,d\tau\right\}dt}^{(\theta_\nu)}.$$

Подставив в эти выражения формулу (12), получаем, как и в предыдущем параграфе,

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_m}\,dt}^{(\theta_\nu)}=$$

$$=\sum_{(r),(s)}r_n s_m\mathfrak{A}_{(r)}\overline{\mathfrak{A}}_{(s)}e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}\overline{\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\,dt\int_{t_q}^{t_k}f(t)e^{-i(s\omega)t}\,dt\right\}}^{(\theta_\nu)},$$

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_m}\,dt}^{(\theta_\nu)}=$$

$$=\sum_{(r),(s)}ir_n\mathfrak{A}_{(r)}\frac{\partial\overline{\mathfrak{A}}_{(s)}}{\partial J_m}e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}\overline{\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\,dt\int_{t_q}^{t_k}f(t)e^{-i(s\omega)t}\,dt\right\}}^{(\theta_\nu)},$$

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_m}\,dt}^{(\theta_\nu)}=$$

$$=\sum_{(r),(s)}-is_m\frac{\partial\mathfrak{U}_{(r)}}{\partial J_n}\,\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}\,e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}\overline{\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\,dt\int_{t_q}^{t_k}f(t)e^{-i(s\omega)t}\,dt\right\}}^{(\theta_\nu)},$$

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_m}\,dt}^{(\theta_\nu)}=$$

$$=\sum_{(r),(s)}\frac{\partial\mathfrak{U}_{(r)}}{\partial J_n}\,\frac{\partial\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}}{\partial J_m}\,e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}\overline{\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\,dt\int_{t_q}^{t_k}f(t)e^{-i(s\omega)t}\,dt\right\}}^{(\theta_\nu)}.$$

Но на основании (37)

$$\lim\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\,dt\int_{t_q}^{t_k}f(t)e^{-i(s\omega)t}\,dt\right\}=0$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned}
&\lim\frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_m}\,dt}^{(\theta_\nu)}=0,\\
&\lim\frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_m}\,dt}^{(\theta_\nu)}=0,\\
&\lim\frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_m}\,dt}^{(\theta_\nu)}=0,\\
&\lim\frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_n}\,dt\int_{t_q}^{t_k}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_m}\,dt}^{(\theta_\nu)}=0.
\end{aligned}\tag{103}$$

С другой стороны,

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial\varphi_m}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)}=\sum_{(r),(s)}r_n s_m\mathfrak{U}_{(r)}\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}\times$$

$$\times\left\{\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\left(\int_{t_k}^{t}f(\tau)e^{-i(s\omega)\tau}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)}\right\},$$

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial\varphi_n}\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial J_m}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)}=$$

$$=\sum_{(r),(s)}ir_n\mathfrak{U}_{(r)}\frac{\partial\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}}{\partial J_m}e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}\left\{\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\left(\int_{t_k}^{t}f(\tau)e^{-i(s\omega)\tau}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)}\right\},$$

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_n}\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial\varphi_m}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)}=\sum_{(r),(s)}-is_m\frac{\partial\mathfrak{U}_{(r)}}{\partial J_n}\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}\times$$

$$\times\left\{\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\left(\int_{t_k}^{t}f(\tau)e^{-i(s\omega)\tau}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)}\right\},$$

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\partial\Gamma_t}{\partial J_n}\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\Gamma_\tau}{\partial J_m}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)}=$$

$$=\sum_{(r),(s)}\frac{\partial\mathfrak{U}_{(r)}}{\partial J_n}\frac{\partial\overline{\mathfrak{U}}_{(s)}}{\partial J_m}e^{i\langle(r-s)\varphi\rangle}\left\{\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\left(\int_{t_k}^{t}f(\tau)e^{-i(s\omega)\tau}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)}\right\}.$$

Однако на основании (38)

$$\lim\left\{\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\left(\int_{t_k}^{t}f(\tau)e^{-i(s\omega)\tau}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)}\right\}=0,\qquad(r\omega)\neq(s\omega),$$

$$\lim\left\{\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}f(t)e^{i(r\omega)t}\left(\int_{t_k}^{t}f(\tau)e^{-i(s\omega)\tau}\,d\tau\right)dt}^{(\theta_\nu)}\right\}=\frac{1}{4}\pi I(r\omega),\quad(r\omega)=(s\omega).$$

Таким образом, убеждаемся в том, что

$$\overline{\lim \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial \Gamma_t}{\partial \varphi_n}\left(\int_{t_k}^{t} \frac{\partial \Gamma_\tau}{\partial \varphi_m}\,d\tau\right) dt}^{(\theta_\nu)} = \sum_{\langle (r-s)\omega\rangle=0} r_n s_m \frac{\pi}{4} I(r\omega)\mathfrak{U}_{(r)}\overline{\mathfrak{U}}_{(s)} e^{i\langle (r-s)\varphi\rangle},$$

$$\overline{\lim \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial \Gamma_t}{\partial \varphi_n}\left(\int_{t_k}^{t} \frac{\partial \Gamma_\tau}{\partial J_m}\,d\tau\right) dt}^{(\theta_\nu)} = \sum_{\langle (r-s)\omega\rangle=0} i r_n \frac{\pi}{4} I(r\omega)\mathfrak{U}_{(r)}\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_{(s)}}{\partial J_m} e^{i\langle (r-s)\varphi\rangle},$$

$$\overline{\lim \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial \Gamma_t}{\partial J_n}\left(\int_{t_k}^{t} \frac{\partial \Gamma_\tau}{\partial \varphi_m}\,d\tau\right) dt}^{(\theta_\nu)} = \sum_{\langle (r-s)\omega\rangle=0} -i s_m \frac{\pi}{4} I(r\omega)\frac{\partial \mathfrak{U}_{(r)}}{\partial J_n}\overline{\mathfrak{U}}_{(s)} e^{i\langle (r-s)\varphi\rangle}, \tag{104}$$

$$\overline{\lim \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial \Gamma_t}{\partial J_n}\left(\int_{t_k}^{t} \frac{\partial \Gamma_\tau}{\partial J_m}\,d\tau\right) dt}^{(\theta_\nu)} = \sum_{\langle (r-s)\omega\rangle=0} \frac{\pi}{4} I(r\omega)\frac{\partial \mathfrak{U}_{(r)}}{\partial J_n}\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_{(s)}}{J_m} e^{i\langle (r-s)\varphi\rangle}.$$

Возвратимся теперь к уравнению (100) и примем во внимание тождество (101). Заменив в нем величины (102) их предельными значениями (103), (104), получим

$$\frac{\Delta \rho_{t_k}}{\Delta t} = \sum_{n,m}\frac{\partial}{\partial J_n}\left\{A_{n,m}\frac{\partial \rho_{t_k}}{\partial J_m} - B_{n,m}\frac{\partial \rho_{t_k}}{\partial \varphi_m}\right\} + \sum_{n,m}\frac{\partial}{\partial \varphi_n}\left\{C_{n,m}\frac{\partial \rho_{t_k}}{\partial \varphi_m} - D_{n,m}\frac{\partial \rho_{t_k}}{\partial J_m}\right\}, \tag{105}$$

где для краткости введены обозначения

$$A_{n,m} = \sum_{\langle (r-s)\omega\rangle=0} r_n s_m \frac{\pi}{4} I(r\omega)\mathfrak{U}_{(r)}\overline{\mathfrak{U}}_{(s)} e^{i\langle (r-s)\varphi\rangle},$$

$$B_{n,m} = \sum_{\langle (r-s)\omega\rangle=0} i r_n \frac{\pi}{4} I(r\omega)\mathfrak{U}_{(r)}\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_{(s)}}{\partial J_m} e^{i\langle (r-s)\varphi\rangle},$$

$$C_{n,m} = \sum_{\langle (r-s)\omega\rangle=0} \frac{\pi}{4} I(r\omega)\frac{\partial \mathfrak{U}_{(r)}}{\partial J_n}\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_{(s)}}{\partial J_m} e^{i\langle (r-s)\varphi\rangle}, \tag{106}$$

$$D_{n,m} = -\sum_{\langle (r-s)\omega\rangle=0} i s_m \frac{\pi}{4} I(r\omega)\frac{\partial \mathfrak{U}_{(r)}}{\partial J_n}\overline{\mathfrak{U}}_{(s)} e^{i\langle (r-s)\varphi\rangle}.$$

Отсюда, рассуждая так же, как и в первой части работы, приходим к приближенному уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_n} \left\{ A_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial J_m} - B_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_m} \right\} + \\ + \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \left\{ C_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_m} - B_{m,n} \frac{\partial \rho}{\partial J_m} \right\}, \quad (107)$$

которое, очевидно, принадлежит к типу уравнений Фоккера–Планка.

Мы написали здесь $B_{m,n}$ вместо $D_{n,m}$, так как на основании (106) тождественно

$$D_{n,m} = B_{m,n}.$$

Заметим, что это же уравнение (107) можно получить непосредственно, если, согласно методу Фоккера–Планка, предположить, что вследствие малого возмущения переменные (J, φ) испытывают статистические вариации, подчиняющиеся определенному вероятностному закону, который характеризуется плотностью вероятности $P_t(J, \varphi, J', \varphi')$ переходов

$$(J, \varphi) \to (J', \varphi'),$$

симметричной относительно состояний (J, φ) и (J', φ'), к тому же такой, что средние квадратичные отклонения

$$\overline{\Delta J_n \, \Delta J_m} = \int P_{\Delta t}(J, \varphi, J', \varphi')(J'_n - J_n)(J'_m - J_m)\, dJ'\, d\varphi',$$

$$\overline{\Delta J_n \, \Delta \varphi_m} = \int P_{\Delta t}(J, \varphi, J', \varphi')(J'_n - J_n)(\varphi'_m - \varphi_m)\, dJ'\, d\varphi',$$

$$\overline{\Delta \varphi_n \, \Delta \varphi_m} = \int P_{\Delta t}(J, \varphi, J', \varphi')(\varphi'_n - \varphi_n)(\varphi'_m - \varphi_m)\, dJ'\, d\varphi'$$

при Δt порядка адекватной величины возрастают почти пропорционально Δt, причем коэффициенты пропорциональности равны соответственно $2A_{n,m}$, $2B_{n,m}$, $2C_{n,m}$.

Заметим, наконец, что если мы предположим здесь, как это делалось выше, что вырождение отсутствует, иначе говоря, что из требования

$$\{(r - s)\omega\} = 0$$

следует $r = s$, то мы убедимся в том, что выражения $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$ не зависят от угловых переменных φ. Следовательно, если в данном случае мы возьмем в уравнении (107) среднее по этим переменным, то придем к уравнению

$$\frac{\overline{\partial \rho}^{(\varphi)}}{\partial t} = \sum_{m,n} \frac{\partial}{\partial J_n} \overline{\left\{ A_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial J_n} - B_{m,n} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_m} \right\}}^{(\varphi)} = \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_n} \left(A_{n,m} \frac{\overline{\partial \rho}^{(\varphi)}}{\partial J_n} \right),$$

т. е. как раз к уравнению (43) (см. § 2).

После этих замечаний возвратимся снова к уравнению (100), рассматривая его как квантовое уравнение.

Раскрывая квантовые скобки Пуассона, получим

$$[U, V] = \frac{UV - VU}{i\hbar} \tag{108}$$

и, таким образом,

$$[U, [V, W]] = \frac{UWV + VWU - UVW - WVU}{\hbar^2}.$$

Следовательно, чтобы получить из уравнения (100) явное выражение для

$$\frac{\Delta(\alpha'|\rho_{t_k}|\alpha'')}{\Delta t},$$

нам необходимо вычислить выражения

$$\begin{gathered}
\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\left(\alpha'\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Gamma_t\,dt\right|\alpha'''\right)\left(\alpha''''\left|\int_{t_q}^{t_k}\Gamma_\tau\,d\tau\right|\alpha''\right)},\\
\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\left(\alpha'\left|\int_{t_q}^{t_k}\Gamma_\tau\,d\tau\right|\alpha'''\right)\left(\alpha''''\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Gamma_t\,dt\right|\alpha''\right)},\\
\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\left(\alpha'\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Gamma_t\,dt\right|\alpha'''\right)\left(\alpha'''\left|\int_{t_q}^{t_k}\Gamma_t\,dt\right|\alpha''''\right)},\\
\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\left(\alpha'''\left|\int_{t_q}^{t_k}\Gamma_t\,dt\right|\alpha''''\right)\left(\alpha''''\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Gamma_t\,dt\right|\alpha''\right)}
\end{gathered} \tag{109}$$

и

$$\begin{gathered}
\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(\alpha'|\Gamma_t|\alpha''')\left(\alpha''''\left|\int_{t_k}^{t}\Gamma_\tau\,d\tau\right|\alpha''\right)dt},\\
\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\alpha'\left|\int_{t_k}^{t}\Gamma_\tau\,d\tau\right|\alpha'''\right)(\alpha''''|\Gamma_t|\alpha'')\,dt},\\
\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(\alpha'|\Gamma_t|\alpha''')\left(\alpha'''\left|\int_{t_k}^{t}\Gamma_\tau\,d\tau\right|\alpha''''\right)dt},\\
\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\alpha\left|\int_{t_k}^{t}\Gamma_\tau\,d\tau\right|\alpha'''\right)(\alpha''''|\Gamma_t|\alpha'')\,dt}.
\end{gathered} \tag{110}$$

При вычислении этих выражений принимаем во внимание, что на основании (92) и (93)

$$\Gamma_t = f(t)\mathrm{e}^{-(H_0/i\hbar)t} V \mathrm{e}^{(H_0/i\hbar)t}$$

и, таким образом,

$$(\alpha'|\Gamma_t|\alpha'') = f(t)\mathrm{e}^{i/\hbar\{H_0(\alpha')-H_0(\alpha'')\}t}(\alpha'|V|\alpha''), \tag{111}$$

$$\left(\alpha'\left|\int \Gamma_t\, dt\right|\alpha''\right) = (\alpha'|V|\alpha'')\int f(t)\mathrm{e}^{i/\hbar\{H_0(\alpha')-H_0(\alpha'')\}t}\, dt, \tag{112}$$

поскольку V не зависит явно от времени.

Следовательно, обозначая для краткости

$$\frac{H_0(\alpha') - H_0(\alpha'')}{\hbar} = \nu(\alpha', \alpha''), \tag{113}$$

получаем

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\left(\alpha'\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Gamma_t\, dt\right|\alpha'''\right)\left(\alpha''''\left|\int_{t_q}^{t_k} \Gamma_\tau\, d\tau\right|\alpha''\right)}^{(\theta_\nu)} = (\alpha'|V|\alpha''')(\alpha''''|V|\alpha'') \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)\mathrm{e}^{i\nu(\alpha',\alpha''')t}\int_{t_q}^{t_k} f(t)\mathrm{e}^{i\nu(\alpha'''',\alpha'')t}\, dt\right\}. \tag{114}$$

Но на основании соотношения (37)

$$\overline{\lim\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} f(t)\mathrm{e}^{i\nu(\alpha',\alpha''')t}\, dt\int_{t_q}^{t_k} f(t)\mathrm{e}^{i\nu(\alpha'''',\alpha'')t}\, dt\right\}}^{(\theta_\nu)} = 0,$$

откуда, учитывая (114), получим

$$\overline{\lim\frac{1}{\Delta t}\left(\alpha'\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Gamma_t\, dt\right|\alpha'''\right)\left(\alpha''''\left|\int_{t_q}^{t_k} \Gamma_\tau\, d\tau\right|\alpha''\right)}^{(\theta_\nu)} = 0, \tag{115}$$

а отсюда, меняя индексы α, — также

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim\frac{1}{\Delta t}\left(\alpha'\left|\int_{t_q}^{t_k} \Gamma_\tau\, d\tau\right|\alpha'''\right)\left(\alpha'''\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Gamma_t\, dt\right|\alpha''\right)}^{(\theta_\nu)} = 0,\\
&\overline{\lim\frac{1}{\Delta t}\left(\alpha'\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Gamma_t\, dt\right|\alpha'''\right)\left(\alpha'''\left|\int_{t_q}^{t_k} \Gamma_\tau\, d\tau\right|\alpha''''\right)}^{(\theta_\nu)} = 0,
\end{aligned} \tag{116a}$$

$$\overset{(\theta_\nu)}{\lim}\frac{1}{\Delta t}\left(\alpha'''\left|\int_{t_q}^{t_k}\Gamma_t\,dt\right|\alpha''''\right)\left(\alpha''''\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Gamma_t\,dt\right|\alpha''\right)=0. \tag{116б}$$

С другой стороны, согласно (111), (112)

$$\overset{(\theta_\nu)}{\frac{1}{\Delta t}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(\alpha'|\Gamma_t|\alpha''')\left(\alpha''''\left|\int_{t_k}^{t}\Gamma_\tau\,d\tau\right|\alpha''\right)dt=(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha''''|V|\alpha'')\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t}f(t)e^{i\nu(\alpha',\alpha''')t}\left(\int_{t_k}^{t}f(\tau)e^{i\nu(\alpha'''',\alpha'')\tau}\,d\tau\right)dt\right\}. \tag{117}$$

Заметим также, что из уравнения (38) следует

$$\overset{(\theta_\nu)}{\lim}\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}f(t)e^{i\nu(\alpha',\alpha''')t}\left(\int_{t_k}^{t}f(\tau)e^{i\nu(\alpha'''',\alpha'')\tau}\,d\tau\right)dt\right\}=0,$$

$$\nu(\alpha',\alpha''')+\nu(\alpha'''',\alpha'')\neq 0,$$

$$\overset{(\theta_\nu)}{\lim}\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}f(t)e^{i\nu(\alpha',\alpha''')t}\left(\int_{t_k}^{t}f(\tau)e^{i\nu(\alpha'''',\alpha'')\tau}\,d\tau\right)dt\right\}=\frac{\pi}{4}I\{\nu(\alpha',\alpha''')\},$$

$$\nu(\alpha',\alpha''')+\nu(\alpha'''',\alpha'')=0.$$

Таким образом, из (117) получаем

$$\lim\frac{1}{\Delta t}(\alpha'|\Gamma_t|\alpha''')\left(\alpha''''\left|\int_{t_k}^{t}\Gamma_\tau\,d\tau\right|\alpha''\right)dt=$$

$$=\begin{cases}0, & \nu(\alpha',\alpha''')+\nu(\alpha'''',\alpha'')\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{4}I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha''''|V|\alpha''), & \nu(\alpha',\alpha''')+\nu(\alpha'''',\alpha'')=0.\end{cases} \tag{118}$$

Отсюда, меняя индексы α, находим

$$\overset{(\theta_\nu)}{\lim}\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\alpha'\left|\int_{t_k}^{t}\Gamma_\tau\,d\tau\right|\alpha'''\right)(\alpha''''|\Gamma_t|\alpha'')\,dt=$$

$$=\begin{cases}0, & \nu(\alpha',\alpha''')+\nu(\alpha'''',\alpha'')\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{4}I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha''''|V|\alpha''), & \nu(\alpha',\alpha''')+\nu(\alpha'''',\alpha'')=0,\end{cases} \tag{119a}$$

$$\lim \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\alpha'|\Gamma_t|\alpha''') \overline{\left(\alpha''' \left| \int_{t_k}^{t} \Gamma_\tau \, d\tau \right| \alpha''''\right)}^{(\theta_\nu)} dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \nu(\alpha', \alpha''') + \nu(\alpha''', \alpha'''') \neq 0, \\ \frac{\pi}{4} I\{\nu(\alpha', \alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha''''), & \nu(\alpha', \alpha''') + \nu(\alpha''', \alpha'''') = 0, \end{cases} \tag{119б}$$

$$\lim \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{\left(\alpha''' \left| \int_{t_k}^{t} \Gamma_\tau \, d\tau \right| \alpha''''\right)}^{(\theta_\nu)} (\alpha''''|\Gamma_t|\alpha'') \, dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \nu(\alpha''', \alpha'''') + \nu(\alpha'''', \alpha'') \neq 0, \\ \frac{\pi}{4} I\{\nu(\alpha'', \alpha'''')\}(\alpha'''|V|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha''), & \nu(\alpha''', \alpha'''') + \nu(\alpha'''', \alpha'') = 0. \end{cases}$$

Заметим, что для справедливости уравнения (100) величину Δt необходимо взять с таким расчетом, чтобы наблюдаемые α оставались практически неизменными в интервале Δt и, таким образом, чтобы квантовую плотность ρ можно было считать постоянной на этом же интервале.

Как мы уже отмечали, величину Δt можно брать тем большей, чем меньше возмущение. Предполагаем здесь, как и раньше, что для допустимых значений Δt выражения (109), (110) очень близки к их предельным значениям (115), (116), (118), (119). Следовательно, заменяем в выражении

$$\frac{\Delta(\alpha'|\rho_{t_k}|\alpha'')}{\Delta t},$$

полученном из уравнения (100), величины (109), (110) их предельными значениями, принимая во внимание тождество (108) и правила умножения матриц. Получаем

$$\frac{\Delta(\alpha'|\rho_{t_k}|\alpha'')}{\Delta t} =$$

$$= \sum_{\nu(\alpha', \alpha''') + \nu(\alpha'''', \alpha'') = 0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha', \alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|\rho_{t_k}|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha'') +$$

$$+ \sum_{\nu(\alpha', \alpha''') + \nu(\alpha'''', \alpha'') = 0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha', \alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|\rho_{t_k}|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha'') -$$

$$- \sum_{\nu(\alpha', \alpha''') + \nu(\alpha''', \alpha'''') = 0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha', \alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha'''')(\alpha''''|\rho_{t_k}|\alpha'') -$$

$$- \sum_{\nu(\alpha'''', \alpha'') + \nu(\alpha''', \alpha'''') = 0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha'', \alpha''')\}(\alpha'|\rho_{t_k}|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha''),$$

т. е.

$$\frac{\Delta(\alpha'|\rho_{t_k}|\alpha'')}{\Delta t} =$$

$$= \sum_{\nu(\alpha',\alpha''')+\nu(\alpha'''',\alpha'')=0} \frac{\pi}{2\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|\rho_{t_k}|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha'') -$$

$$- \sum_{\nu(\alpha',\alpha'''')=0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha'''')(\alpha''''|\rho_{t_k}|\alpha'') -$$

$$- \sum_{\nu(\alpha'',\alpha''')=0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha'',\alpha'''')\}(\alpha'|\rho_{t_k}|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha'').$$

Отсюда видно, что

$$(\alpha'|\rho_{t_k}|\alpha'') = (\alpha'|\rho_0|\alpha'') - \sum_{\nu(\alpha',\alpha'''')=0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha'''') \times$$

$$\times \left(\alpha'''' \left| \sum_{q=0}^{k-1} \rho_{t_q} \Delta t \right| \alpha''\right) - \sum_{\nu(\alpha'',\alpha''')=0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha'',\alpha'''')\} \left(\alpha' \left| \sum_{q=0}^{k-1} \rho_{t_q} \Delta t \right| \alpha'''\right) \times$$

$$\times (\alpha'''|V|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha'') + \sum_{\nu(\alpha',\alpha''')+\nu(\alpha'''',\alpha'')=0} \frac{\pi}{2\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\} \times$$

$$\times (\alpha'|V|\alpha''') \left(\alpha''' \left| \sum_{q=0}^{k-1} \rho_{t_q} \Delta t \right| \alpha''''\right) (\alpha''''|V|\alpha''). \quad (120)$$

Но в интервале порядка Δt квантовая плотность остается почти постоянной. На основании этого заменяем в (120) ρ_{t_k} функцией ρ_t, а суммы $\sum_{q=0}^{k-1} \rho_{t_q} \Delta t$ — интегралами $\int_0^t \rho_t\, dt$, получая, таким образом, приближенное уравнение вида

$$(\alpha'|\rho_t|\alpha'') = (\alpha'|\rho_0|\alpha'') - \sum_{\nu(\alpha',\alpha'''')=0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha'''') \times$$

$$\times \left(\alpha'''' \left| \int_0^t \rho_t\, dt \right| \alpha''\right) - \sum_{\nu(\alpha'',\alpha''')=0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha'',\alpha'''')\} \left(\alpha' \left| \int_0^t \rho_t\, dt \right| \alpha'''\right) \times$$

$$\times (\alpha'''|V|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha'') + \sum_{\nu(\alpha',\alpha''')+\nu(\alpha'''',\alpha'')=0} \frac{\pi}{2\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\} \times$$

$$\times (\alpha'|V|\alpha''') \left(\alpha''' \left| \int_0^t \rho_t\, dt \right| \alpha''''\right) (\alpha''''|V|\alpha''),$$

т. е.

$$\frac{d(\alpha'|\rho|\alpha'')}{dt} = \sum_{\nu(\alpha',\alpha''')+\nu(\alpha'''',\alpha'')=0} \frac{\pi}{2\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|\rho|\alpha'''') \times$$

$$\times (\alpha''''|V|\alpha'') - \sum_{\nu(\alpha',\alpha'''')=0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha'''')(\alpha''''|\rho|\alpha'') -$$

$$- \sum_{\nu(\alpha'',\alpha''')=0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha'',\alpha'''')\}(\alpha'|\rho|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha''). \quad (121)$$

Итак, мы пришли к приближенному дифференциальному уравнению (121), которое позволяет определить квантовую плотность ρ по ее начальному значению. Это уравнение, очевидно, является квантовым аналогом уравнения (107).

Теперь получим уравнение для $P_t(\alpha')$, аналогичное (43).

На основании (90), (92) и (95)

$$P_t(\alpha') = (\alpha'|\rho_t|\alpha'). \quad (122)$$

Полагаем в (121) $\alpha'' = \alpha'$ и получаем

$$\frac{d(\alpha'|\rho|\alpha')}{dt} = \sum_{\nu(\alpha''',\alpha'''')=0} \frac{\pi}{2\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|\rho|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha') -$$

$$- \sum_{\nu(\alpha',\alpha'''')=0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha'''')(\alpha''''|\rho|\alpha') -$$

$$- \sum_{\nu(\alpha',\alpha''')=0} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha'''')\}(\alpha'|\rho|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha'). \quad (123)$$

Предположим теперь, как и раньше, что в проблеме, касающейся невозмущенной системы, вырождение отсутствует. Иначе говоря, рассмотрим случаи отсутствия резонанса в невозмущенной динамической системе.

Следовательно, мы предполагаем, что все собственные значения энергии $H_0(\rho')$ различны и, таким образом, из уравнения

$$H_0(\alpha') - H_0(\alpha'') = 0$$

или, что то же самое, из уравнения

$$\nu(\alpha',\alpha'') = 0$$

следует

$$\alpha' = \alpha''.$$

В этих случаях из уравнения (123) находим

$$\frac{d(\alpha'|\rho|\alpha')}{dt} = \sum_{\alpha'''} \frac{\pi}{2\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|\rho|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha') -$$

$$- \sum_{\alpha'''} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha''')\}(\alpha'|V|\alpha''')(\alpha'''|V|\alpha')(\alpha'|\rho|\alpha') -$$

$$- \sum_{\alpha''''} \frac{\pi}{4\hbar^2} I\{\nu(\alpha',\alpha'''')\}(\alpha'|\rho|\alpha')(\alpha'|V|\alpha'''')(\alpha''''|V|\alpha')$$

и отсюда, учитывая (122), получаем окончательно

$$\frac{dP_t(\alpha')}{dt} = \sum_{\alpha''} A_{\alpha'\alpha''}\{P_t(\alpha'') - P_t(\alpha')\}, \tag{80'}$$

где

$$A_{\alpha'\alpha''} = \frac{\pi}{2\hbar^2}\,|(\alpha'|V|\alpha'')|^2 I\{\nu(\alpha', \alpha'')\}. \tag{78'}$$

Таким образом, для непосредственного вычисления вероятности $P_t(\alpha')$ мы пришли к приближенным уравнениям такого же типа, как и уравнения (80), получающиеся с помощью обычного метода квантовой теории возмущений.

Как мы видим, можно видоизменить форму метода квантовой теории возмущений, ни в чем не изменяя его результатов, и таким путем сделать его вполне аналогичным методу, который применяется в рамках классической механики.

При таком же порядке идей можно показать, что уравнение (80) вырождается в уравнение (43), если $\hbar \to 0$. Для большей ясности проведем вычисления на простом примере осциллятора с собственным гамильтонианом $(p^2 + \omega^2 q^2)/2$ в случае, когда энергия возмущения имеет вид $\lambda f(t) q$, причем λ — постоянный множитель. В этом примере возьмем в качестве α квантовую переменную действия J, собственные значения которой равны $n\hbar$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Заметим теперь, что

$$q = (2\omega)^{-1/2}\{-iJ^{1/2}e^{iw} + ie^{-iw}J^{1/2}\},$$

$$(n\hbar|e^{iw}|m\hbar) = \begin{cases} 0, & n \neq m+1, \\ 1, & n = m+1, \end{cases}$$

$$(n\hbar|\bar{e}^{iw}|m\hbar) = \begin{cases} 0, & m \neq n+1, \\ 1, & m = n+1. \end{cases}$$

Получаем

$$|(n\hbar|q|m\hbar)|^2 = 0, \qquad |n-m| > 1,$$

$$|(n\hbar|q|m\hbar)|^2 = \frac{n\hbar}{2\omega}, \qquad n = m+1,$$

$$|(n\hbar|q|m\hbar)|^2 = \frac{m\hbar}{2\omega}, \qquad m = n+1.$$

Следовательно,

$$A_{n\hbar, m\hbar} = \begin{cases} 0, & |n-m| > 1, \\ \dfrac{\pi\lambda^2}{4\omega\hbar^2} I(\omega) n\hbar, & n = m+1, \\ \dfrac{\pi\lambda^2}{4\omega\hbar^2} I(\omega) m\hbar, & m = n+1. \end{cases}$$

Тогда из уравнения (80) следует

$$\frac{dP(n\hbar)}{dt} = \frac{\pi}{4\omega} I(\omega)\lambda^2 \frac{(n+1)\hbar[P\{(n+1)\hbar\} - P\{n\hbar\}] + n\hbar[P\{(n-1)\hbar\} - P(n\hbar)]}{\hbar^2},$$

т. е.

$$\frac{dP(n\hbar)}{dt} = \frac{\pi}{4\omega^2} I(\omega)\lambda^2 \times$$
$$\times \frac{(n+1)\hbar \dfrac{P\{(n+1)\hbar\} - P\{n\hbar\}}{\hbar} - n\hbar \dfrac{P\{n\hbar\} - P\{(n-1)\hbar\}}{\hbar}}{\hbar}. \quad (124)$$

Введем обозначения

$$n\hbar = J_n, \quad \Delta J_n = \hbar,$$

и заметим, что уравнение (124) можно брать в виде

$$\frac{dP(J_n)}{dt} = \frac{\pi}{4\omega} I(\omega)\lambda^2 \frac{\Delta\left\{J_n \dfrac{\Delta P(J_{n-1})}{\Delta J_{n-1}}\right\}}{\Delta J_n}.$$

Здесь $P(J_n)$ выражает вероятность того, что наблюдаемая J принимает значение J_n.

Вводим плотность вероятности

$$\frac{P(J_n)}{\Delta J_n} = \sigma(J_n).$$

Видим, что эта плотность нормирована,

$$\sum_{0 \leqslant J_n < \infty} \sigma(J_n)\,\Delta J = 1,$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\sigma(J_n)}{dt} = \frac{\pi}{4\omega} I(\omega)\lambda^2 \frac{\Delta\left\{J_n \dfrac{\Delta\sigma(J_{n-1})}{\Delta J_{n-1}}\right\}}{\Delta J_n}.$$

Переходя здесь к пределу при

$$\hbar = \Delta J_n \to 0, \quad n\hbar \to J,$$

получаем уравнение (55)

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\pi}{4\omega} I(\omega)\lambda^2 \frac{\partial}{\partial J}\left(J\frac{\partial\sigma}{\partial J}\right)$$

и соотношение нормировки

$$\int_0^\infty \sigma(J)\,dJ = 1.$$

Итак, на простом примере мы показали, каким образом квантовые уравнения (80) вырождаются в классические уравнения (43) при $\hbar \to 0$.

Сделаем теперь следующее замечание. В теории возмущений квантовой механики существует две различные группы методов. В одной из этих групп, которую обычно применяют в случаях, когда гамильтониан возмущения явно от времени не зависит, возмущение рассматривается как причина изменения состояний невозмущенной системы. Во второй группе применяются неизменяющиеся состояния невозмущенной системы и возмущение рассматривается

как причина вероятностных переходов между этими состояниями. Эти методы используются в тех случаях, когда можно определить коэффициенты вероятностей переходов.

Как хорошо известно, методам первой группы соответствуют в рамках классической механики методы типа методов Линштедта, Болина и т. д., развитые специально для решения задач небесной механики и старой квантовой теории. В этих методах возмущение рассматривается как фактор, обусловливающий преобразование переменных действия невозмущенной системы. Переменные (J, w) невозмущенной системы представляют функциями новых канонических переменных (J', w'), и, таким образом, в случаях, когда невозмущенный гамильтониан не зависит явно от времени, получают квазипериодическое описание возмущенных движений.

Однако, насколько нам известно, до сих пор в рамках классической механики не существовало методов, аналогичных квантовым методам второй группы. Правда, в статистической физике часто применяют метод Фоккера–Планка, но делают это полностью независимо от всей теории возмущений. Как мы уже отмечали, в этом методе предполагается á priori существование вероятностей переходов и коэффициенты, которые фигурируют в полученных уравнениях, определяются при помощи этих вероятностей. Поскольку последние большей частью неизвестны, коэффициенты находят путем введения определенных статистических гипотез. В связи с этим иногда считают, что для применения этого метода необходимо отказаться от детерминированной схемы классической механики и исходить совершенно из иных аксиом, которые касаются так называемых стохастических систем.

Мы продемонстрировали в общих чертах метод, который, как нам кажется, соответствует квантовым методам второй группы. Чтобы полнее подчеркнуть это соответствие, мы разработали также видоизмененную форму этих методов, построенную на применении квантовой плотности, которая приводит к непосредственному приближенному уравнению (100), справедливому в равной мере как в классических, так и в квантовых теориях. Окончательные приближенные уравнения находим, раскрывая уравнение (100) и придавая скобкам Пуассона либо классическое, либо квантовое содержание.

Таким образом, рассматривая проблему малого возмущения в рамках классической механики, мы пришли к уравнениям типа уравнений Фоккера–Планка, коэффициенты которых определяются явно с помощью гамильтониана возмущений. Правда, этот метод был применен нами лишь в отдельном случае, в котором гамильтониан возмущения имеет вид произведения функции $f(t)$ переменной t и динамической переменной V, не зависящей явно от времени. Но это ограничительное условие ни в какой мере не является необходимым для справедливости изложенного выше метода.

Действительно, рассмотрим в общем случае гамильтониан возмущения Γ_t, зависящий от определенных постоянных параметров β, значения которых распределены согласно закону вероятностей.

Заметим, что при выводе уравнения (100) использована гипотеза о специальной форме энергии возмущения только для того, чтобы получить соотношение

$$\overline{\Gamma}^{\beta} = 0.$$

Если же мы повторим дословно эти рассуждения в общем случае, о котором идет речь теперь, то получим приближенное уравнение вида

$$\frac{\Delta\rho_{t_k}}{\Delta t} = \overline{\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Gamma_t^*\,dt, \left[\int_0^{t_k} \Gamma_\tau^*\,d\tau, \rho_0\right]\right]}^{(\beta)} +$$

$$+ \sum_{q=0}^{k-2} \overline{\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Gamma_t^*\,dt, \left[\int_{t_{q+1}}^{t_k} \Gamma_\tau^*\,d\tau, \frac{\Delta\rho_{t_q}}{\Delta t}\right]\right]}^{(\beta)} \Delta t + \left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{\Gamma_t}^{(\beta)}\,dt, \rho_{t_k}\right] +$$

$$+ \overline{\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\Gamma_\tau^*, \int_{t_k}^{t} [\Gamma_\tau^*, \rho_{t_k}]\,d\tau\right] dt\right]}^{(\beta)}, \quad (125)$$

где

$$\Gamma_t^* = \Gamma_t - \overline{\Gamma_t}^{(\beta)},$$

также равным образом справедливое в рамках как классической, так и квантовой механики. Здесь, как и раньше, величина Δt должна быть такого порядка, чтобы плотность ρ_t можно было рассматривать практически постоянной в интервале Δt.

Рассмотрим теперь этот вопрос с точки зрения классической механики. Чтобы иметь возможность продолжать рассуждения нашего метода, которые приводят к окончательному уравнению типа Фоккера–Планка, достаточно предположить, что при значениях Δt адекватного порядка величины выражениями

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial\Gamma_t^*}{\partial\varphi_n}\,dt \int_{t_q}^{t_k} \frac{\partial\Gamma_t^*}{\partial\varphi_m}\,dt}^{(\beta)}, \quad \overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial\Gamma_t^*}{\partial\varphi_n}\,dt \int_{t_q}^{t_k} \frac{\partial\Gamma_t^*}{\partial J_m}\,dt}^{(\beta)},$$

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial\Gamma_t^*}{\partial J_n}\,dt \int_{t_q}^{t_k} \frac{\partial\Gamma_t^*}{\partial\varphi_m}\,dt}^{(\beta)}, \quad \overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial\Gamma_t^*}{\partial J_n}\,dt \int_{t_q}^{t_k} \frac{\partial\Gamma_t^*}{\partial J_m}\,dt}^{(\beta)} \quad (126)$$

можно пренебречь, а выражения

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{\Gamma_t}^{(\beta)}\,dt, \quad \overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial\Gamma_t^*}{\partial\varphi_n}\left\{\int_{t_k}^{t} \frac{\partial\Gamma_\tau^*}{\partial\varphi_m}\,d\tau\right\} dt}^{(\beta)}, \quad \overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial\Gamma_t^*}{\partial\varphi_n}\left\{\int_{t_k}^{t} \frac{\partial\Gamma_\tau^*}{\partial J_m}\,d\tau\right\} dt}^{(\beta)}, \quad (127a)$$

и

$$\overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial \Gamma_t^*}{\partial J_n}\left\{\int_{t_k}^{t} \frac{\partial \Gamma_\tau^*}{\partial \varphi_m}\,d\tau\right\}dt}^{(\beta)}, \qquad \overline{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial \Gamma_t^*}{\partial J_n}\left\{\int_{t_k}^{t} \frac{\partial \Gamma_\tau^*}{\partial J_m}\,d\tau\right\}dt}^{(\beta)} \tag{127б}$$

приблизительно пропорциональны Δt.

Действительно, применяя в этом случае рассуждения рассматриваемого метода, приходим к окончательным приближенным уравнениям следующего вида:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = [\overline{\Gamma}, \rho] + \sum_{n,m}\left\{\frac{\partial}{\partial J_n}\left\{A_{n,m}\frac{\partial \rho}{\partial J_m} + B_{n,m}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi_m}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi_n}\left\{C_{n,m}\frac{\partial \rho}{\partial J_m} + D_{n,m}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi_m}\right\}\right\}, \tag{128}$$

где введены обозначения

$$\overline{\Gamma} = \lim \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{\Gamma_t}^{(\beta)}\,dt,$$

$$A_{n,m} = \lim \frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} \frac{\partial \Gamma_t^*}{\partial \varphi_n}\left\{\int_{t_k}^{t} \frac{\partial \Gamma_\tau^*}{\partial \varphi_m}\,d\tau\right\}dt}^{(\beta)},$$

$$B_{n,m} = -\lim \frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} \frac{\partial \Gamma_t^*}{\partial \varphi_n}\left\{\int_{t_k}^{t} \frac{\partial \Gamma_\tau^*}{\partial J_m}\,d\tau\right\}dt}^{(\beta)}, \tag{129}$$

$$C_{n,m} = -\lim \frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} \frac{\partial \Gamma_t^*}{\partial J_n}\left\{\int_{t_k}^{t} \frac{\partial \Gamma_\tau^*}{\partial \varphi_m}\,d\tau\right\}dt}^{(\beta)},$$

$$D_{n,m} = \lim \frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} \frac{\partial \Gamma_t^*}{\partial J_n}\left\{\int_{t_k}^{t} \frac{\partial \Gamma_\tau^*}{\partial J_m}\,d\tau\right\}dt}^{(\beta)}.$$

Заметим теперь, что принятые условия будут выполнены, если рассматриваемый гамильтониан возмущения

$$\Gamma_t = \Gamma(t, J, w, \beta), \quad w = \omega t + \varphi,$$

будет таким, что для величины Δt определенного порядка выражениями

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} \Gamma^*(t, J', \omega t + \varphi', \beta)\,dt \int_{t-T}^{t} \Gamma^*(t, J'', \omega t + \varphi'', \beta)\,dt}^{(\beta)} \tag{130}$$

(точно так же, как и их производными по J', φ', J'', φ'') можно пренебречь, а выражения

$$\int_t^{t+\Delta t} \overline{\Gamma_t}^{(\beta)}\, dt, \quad \overline{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Gamma^*(t, J', \omega t + \varphi', \beta)\left\{\int_{t_0}^{t} \Gamma^*(\tau, J'', \omega\tau + \varphi'', \beta)\, d\tau\right\} dt}^{(\beta)} \tag{131}$$

(точно так же, как и их производные) почти пропорциональны Δt. Здесь J', w', J'', w'' — произвольные значения переменных. В этом случае очевидно, что

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \Phi''_{\varphi_n,\varphi'_m}(\varphi, \varphi', J, J'), \quad & C_{n,m} &= -\Phi''_{J_n,\varphi'_m}(\varphi, \varphi', J, J'), \\ B_{n,m} &= -\Phi''_{\varphi_n,J'_m}(\varphi, \varphi', J, J'), & D_{n,m} &= \Phi''_{J_n,J'_m}(\varphi, \varphi', J, J'), \end{aligned} \tag{132}$$

где

$$\Phi(\varphi, \varphi', J, J') =$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta t} \overline{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Gamma^*(t, J, \omega t + \varphi, \beta)\left\{\int_{t_0}^{t} \Gamma^*(\tau, J', \omega\tau + \varphi', \beta)\, d\tau\right\} dt}^{(\beta)}. \tag{133}$$

Покажем теперь, что условия, наложенные на выражения (130), (131), будут в свою очередь выполняться, если принять следующие гипотезы:

1. Величины β являются фазами θ_ν, независимыми и равновозможными.

2. Гамильтониан возмущения Γ_t имеет вид

$$\Gamma_t = G(J, w) + \sum_{\nu>0} \{A_\nu(J, w) e^{i(\nu t+\theta_\nu)} + A^*_\nu(J, w) e^{-i(\nu t+\theta_\nu)}\}. \tag{134}$$

3. Спектр возмущения непрерывный, так что частоты ν очень близки одна к другой и можно записать

$$\sum_{0<\nu\leqslant\mu} A_\nu(J', w') A^*_\nu(J'', w'') = \int_0^\mu I(\nu, w', w'', J', J'')\, d\nu.$$

4. Выражение[1]

$$\delta(z, w', w'', J', J'') = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu, w', w'', J', J'') e^{i\nu z}\, d\nu,$$

где

$$I(-\nu, w', w'', J', J'') = I^*(\nu, w', w'', J', J''),$$

точно так же, как и его частные производные, абсолютно интегрируемо в интервале $0 \leqslant z \leqslant \infty$ равномерно относительно w', w''.

[1] Это условие можно было бы легко преобразовать в условие, которое касалось бы непосредственно спектральной функции I.

Действительно, приняв эти гипотезы, имеем

$$\Gamma^*(t, J, w, \beta) = \sum_\nu \{A_\nu(J, w)e^{i(\nu t+\theta_\nu)} + A_\nu^*(J, w)e^{-i(\nu t+\theta_\nu)}\}. \tag{135}$$

Следовательно, согласно формуле (135), получаем

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\Gamma^*(t, J', \omega t+\varphi', \beta)\,dt \int_{t_0-T}^{t_0}\Gamma^*(t, J'', \omega t+\varphi'', \beta)\,dt}^{(\beta)} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0-T}^{t_0}\left\{\sum_{\nu>0} A_\nu(J', \omega t+\varphi')A_\nu^*(J'', \omega\tau+\varphi'')e^{i\nu(t-\tau)} + \right.$$

$$\left. + A_\nu^*(J', \omega t+\varphi')A_\nu(J'', \omega\tau+\varphi'')e^{-i\nu(t-\tau)}\right\} dt\,d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0-T}^{t_0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu, \omega t+\varphi', \omega\tau+\varphi'', J', J'')e^{i\nu(t-\tau)}\,d\nu\right\} dt\,d\tau. \tag{136}$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\Gamma^*(t, J', \omega t+\varphi', \beta)\,dt \int_{t_0-T}^{t_0}\Gamma^*(t, J'', \omega t+\varphi'', \beta)\,dt}^{(\beta)} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left\{\int_{t_0-T}^{t_0}\delta(t-\tau, \omega t+\varphi', \omega\tau+\varphi'', J', J'')\,d\tau\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left\{\int_0^{x+T}\delta(y, \omega x+\omega t_0+\varphi', \omega x-\omega y+\omega t_0+\varphi'', J', J'')\,dy\right\} dx. \tag{137}$$

Аналогичным путем находим также

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\Gamma^*(t, J', \omega t+\varphi', \beta)\left\{\int_{t_0}^{t}\Gamma^*(\tau, J'', \omega\tau+\varphi'', \beta)\,d\tau\right\} dt}^{(\beta)} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left\{\int_0^{x}\delta(y, \omega x+\omega t_0+\varphi', \omega x-\omega y+\omega t_0+\varphi'', J', J'')\,dy\right\} dx. \tag{138}$$

Теперь из формулы (137) получаем

$$\overline{\left|\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\Gamma^*(t,J',\omega t+\varphi',\beta)\,dt\int_{t_0-T}^{t_0}\Gamma^*(t,J'',\omega t+\varphi'',\beta)\,dt\right|}^{(\beta)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left\{\int_x^\infty|\delta(y,\omega x+\omega t_0+\varphi',\omega x-\omega y+\omega t_0+\varphi'',J',J'')|\,dy\right\}dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left\{\int_x^\infty\sup_{w,w'}|\delta(y,w',w'',J',J'')|\,dy\right\}dx\to 0,\quad\Delta t\to\infty. \tag{139}$$

Точно так же на основании формулы (138) убеждаемся в том, что

$$\lim_{\Delta t\to\infty}\left|\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\Gamma^*(t,J',\omega t+\varphi',\beta)\left\{\int_{t_0}^{t}\Gamma^*(\tau,J'',\omega\tau+\varphi'',\beta)\,d\tau\right\}dt}^{(\beta)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left\{\int_0^\infty\delta(y,\omega x+\omega t_0+\varphi',\omega x-\omega y+\omega t_0+\varphi'',J',J'')\,dy\right\}dx\right|=0.$$

Заметим, с другой стороны, что функция $\Gamma(t,J,w,\beta)$ является периодической по w с периодами 2π в силу того, что переменные $w_1,\ldots,w_N$ являются угловыми. Следовательно, функция $\delta(z,w',w'',J',J'')$ имеет также периоды 2π по w', w''.

Таким образом, убеждаемся в том, что выражение

$$\int_0^\infty\delta(y,\omega x+\varphi,\omega x-\omega y+\varphi'',J'')\,dy \tag{140}$$

является квазипериодической функцией x с основными частотами $\omega_1,\ldots,\omega_N$. Следовательно, существует среднее значение

$$\lim\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left\{\int_0^\infty\delta(y,\omega x+\varphi',\omega x-\omega y+\varphi'',J',J'')\,dy\right\}dx=$$

$$=\lim\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left\{\int_0^\infty\delta(y,\omega x+\varphi',\omega x-\omega y+\varphi'',J',J'')\,dy\right\}dx=$$

$$\lim\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left\{\int_0^\infty\delta(y,\omega x+\omega t_0+\varphi',\omega x-\omega y+\omega t_0+\varphi'',J',J'')\,dy\right\}dx. \tag{141}$$

Тогда соотношение (138) дает

$$\overline{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\Gamma^*(t,J',\omega t+\varphi',\beta)\left\{\int_{t_0}^{t}\Gamma^*(\tau,J'',\omega\tau+\varphi'',\beta)\,d\tau\right\}dt}^{(\beta)}\to$$

$$\to\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left\{\int_0^{\infty}\delta(y,\omega x+\varphi',\omega x-\omega y+\varphi'',J',J'')\,dy\right\}dx=$$

$$=\Phi(\varphi,\varphi'',J',J''). \quad (142)$$

С другой стороны,

$$\overline{\Gamma}_t^{(\beta)}=G(J,\omega t+\varphi) \quad (143)$$

и вследствие этого

$$\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t_0+\Delta t}\overline{\Gamma}_t^{(\beta)}\,dt\to\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}G(J,\omega t+\varphi)\,dt=\overline{\Gamma}. \quad (144)$$

Таким образом, удовлетворяются условия относительно выражений (130), (131). Следовательно, приближенные уравнения (128) справедливы, если только возмущение достаточно мало́.

В отдельном случае, когда нет вырождения в невозмущенной системе, основные частоты функций (140), (143) — $\omega_1, \ldots, \omega_N$ — линейно независимы. Следовательно, в этом случае

$$\Phi(\varphi',\varphi'',J',J'')=\int_0^{\infty}\overline{\delta(y,\Psi+\varphi',\Psi-\omega y+\varphi'',J',J'')\,dy}^{(\Psi)}=F(\varphi'-\varphi'',J',J''),$$

где

$$F(\varphi,J',J'')=\int_0^{\infty}\overline{\delta(y,\Psi+\varphi,\Psi-\omega y,J',J'')\,dy}^{(\Psi)}$$

и

$$\overline{\Gamma}=\overline{G(J,\Psi)}^{(\Psi)}.$$

Отсюда, учитывая (132), можем видеть, что величины $\overline{\Gamma}$, $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$, $D_{n,m}$ не зависят от угловых переменных φ. Следовательно, если взять среднее по этим переменным в уравнении (128), то получим

$$\frac{\overline{\partial\rho}^{(\varphi)}}{\partial t}=\overline{[\Gamma,\rho]}^{(\varphi)}+\sum_{n,m}\frac{\partial}{\partial J_n}\left\{A_{n,m}\frac{\overline{\partial\rho}^{(\varphi)}}{\partial J_m}\right\}.$$

Однако

$$[\overline{\Gamma},\rho]=\sum_m\left(\frac{\partial\overline{\Gamma}}{\partial\varphi_m}\frac{\partial\rho}{\partial J_m}-\frac{\partial\overline{\Gamma}}{\partial J_m}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_m}\right)=-\sum_m\frac{\partial\overline{\Gamma}}{\partial J_m}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_m}$$

и вследствие этого

$$\overline{[\Gamma, \rho]}^{(\varphi)} = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае мы приходим к приближенному уравнению вида (43)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial J_n} \left\{ A_{n,m} \frac{\partial \sigma}{\partial J_n} \right\}, \quad \sigma = \overline{\rho}^{(\varphi)}.$$

Теперь возвратимся к уравнению (128) и покажем, что даже в общем случае, когда оно выполняется, можно установить теорему, аналогичную теореме Больцмана. Для этого рассмотрим выражение для энтропии

$$S = \int \dots \int \rho \ln \frac{1}{\rho} \, dJ \, d\varphi, \quad dJ = dJ_1 \dots dJ_N, \quad d\varphi = d\varphi_1 \dots d\varphi_N,$$

и заметим, что

$$\frac{dS}{dt} = -\int \dots \int \frac{d\rho}{dt} \ln \frac{1}{\rho} \, dJ \, d\varphi = -\int \dots \int [\overline{\Gamma}, \rho] \ln \rho \, dJ \, d\varphi -$$

$$- \sum_{n,m} \int \dots \int \ln \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial J_n} \left(A_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial J_m} + B_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_m} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \left(C_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial J_m} + D_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_m} \right) \right\} dJ \, d\varphi,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\frac{dS}{dt} = \int \dots \int \left\{ \sum_{n,m} \left[A_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial J_n} \frac{\partial \rho}{\partial J_m} + B_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial J_n} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_m} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + C_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_n} \frac{\partial \rho}{\partial J_m} + D_{n,m} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_n} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_m} \right] \right\} \frac{dJ \, d\varphi}{\rho}.$$

Но из (129) тождественно следует

$$\sum_{n,m} [A_{n,m} x_n x_m + B_{n,m} x_n y_m + C_{n,m} y_n x_m + D_{n,m} y_n y_m] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim \frac{1}{\Delta t} \overline{\left[\int_0^{\Delta t} \left\{ \sum_n \left(x_n \frac{\partial \Gamma_t^*}{\partial \varphi_n} - y_n \frac{\partial \Gamma_t^*}{\partial J_n} \right) \right\} dt \right]^2}^{(\beta)}.$$

Следовательно,

$$\frac{dS}{dt} \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь уравнение (125) с точки зрения квантовой механики.

Предположим, что для значений Δt адекватного порядка величины выражениями

$$\frac{1}{\Delta t}\overline{\left(\alpha'\left|\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\Gamma_t^*\,dt\right|\alpha''\right)^{(\beta)}\left(\alpha'''\left|\int_{t_q}^{t_k}\Gamma_t^*\,dt\right|\alpha''''\right)} \tag{145}$$

можно пренебречь, а выражения

$$\begin{gathered}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}\overline{(\alpha'|\Gamma_t|\alpha'')\,dt}^{(\beta)},\\ \frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_k}^{t_k+\Delta t}(\alpha'|\Gamma_t^*|\alpha'')\left(\alpha'''\left|\int_{t_k}^{t}\Gamma_\tau^*\,d\tau\right|\alpha''''\right)dt}^{(\beta)}\end{gathered} \tag{146}$$

почти пропорциональны Δt. Тогда, применяя к уравнению (125) приемы излагаемого метода, приходим к окончательному приближенному уравнению вида

$$\begin{aligned}\frac{d(\alpha'|\rho|\alpha'')}{dt} &= \frac{1}{i\hbar}\sum_{\alpha'''}\{H(\alpha',\alpha''')(\alpha'''|\rho|\alpha'') - (\alpha'|\rho|\alpha''')H(\alpha''',\alpha'')\} +\\ &+\frac{1}{\hbar^2}\sum_{\alpha''',\alpha''''}\{E(\alpha',\alpha''',\alpha'''',\alpha'')(\alpha'''|\rho|\alpha'''') + E(\alpha'''',\alpha'',\alpha',\alpha''')(\alpha'''|\rho|\alpha'''')\} -\\ &-\frac{1}{\hbar^2}\sum_{\alpha''',\alpha''''}\{E(\alpha',\alpha''',\alpha''',\alpha'''')(\alpha''''|\rho|\alpha'') +\\ &+E(\alpha'''',\alpha'',\alpha''',\alpha'''')(\alpha'|\rho|\alpha''')\},\end{aligned} \tag{147}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}H(\alpha',\alpha'') &= \lim\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}\overline{(\alpha'|\Gamma_t^*|\alpha'')\,dt}^{(\beta)},\\ E(\alpha',\alpha'',\alpha''',\alpha'''') &= \lim\frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(\alpha'|\Gamma_t^*|\alpha'')\left(\alpha'''\left|\int_{t_0}^{t}\Gamma_\tau^*\,d\tau\right|\alpha''''\right)dt}^{(\beta)}.\end{aligned} \tag{148}$$

Таким путем получаем квантовое уравнение, аналогичное уравнению (128) типа уравнений Фоккера–Планка.

В отдельном случае, когда

$$\begin{aligned}&H(\alpha',\alpha'') = 0, && \alpha' \neq \alpha'',\\ &E(\alpha',\alpha'',\alpha''',\alpha') = 0, && \alpha'' \neq \alpha''',\\ &E(\alpha'''',\alpha',\alpha',\alpha''') = 0, && \alpha''' \neq \alpha'''',\end{aligned} \tag{149}$$

из уравнения (147) можно вывести обычное уравнение для

$$P(\alpha') = (\alpha'|\rho|\alpha').$$

Действительно, полагая в (147) $\alpha'' = \alpha'$, находим, согласно (149),

$$\frac{dP(\alpha')}{dt} = \frac{1}{\hbar^2}\sum_{\alpha'''}\{E(\alpha', \alpha''', \alpha''', \alpha') + E(\alpha''', \alpha', \alpha', \alpha''')\}P(\alpha''') -$$

$$- \frac{1}{\hbar^2}\sum_{\alpha'''}\{E(\alpha', \alpha''', \alpha''', \alpha') + E(\alpha''', \alpha', \alpha', \alpha''')\}P(\alpha'). \quad (150)$$

Но, учитывая формулу (148), получаем

$$E(\alpha', \alpha''', \alpha''', \alpha') + E(\alpha''', \alpha', \alpha', \alpha''') =$$

$$= \lim \frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left\{(\alpha'|\Gamma_t^*|\alpha''')\int_{t_0}^{t}(\alpha'''|\Gamma_\tau^*|\alpha')\,d\tau + (\alpha'''|\Gamma_t^*|\alpha')\int_{t_0}^{t}(\alpha'|\Gamma_\tau^*|\alpha''')\,d\tau\right\}dt}^{(\beta)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim \frac{1}{\Delta t}\overline{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{d}{dt}\left|\int_{t_0}^{t}(\alpha'|\Gamma_t^*|\alpha''')\,dt\right|^2 dt}^{(\beta)}$$

и, таким образом,

$$\frac{E(\alpha', \alpha''', \alpha''', \alpha') + E(\alpha''', \alpha', \alpha', \alpha''')}{\hbar^2} = A_{\alpha', \alpha'''},$$

где

$$A_{\alpha', \alpha'''} = \frac{1}{2\hbar^2}\lim \frac{1}{\Delta t}\overline{\left|\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(\alpha'|\Gamma_t|\alpha'')\,dt\right|^2}^{(\beta)}.$$

Следовательно, учитывая (150), приходим к уравнениям типа (80):

$$\frac{dP(\alpha')}{dt} = \sum_{\alpha'''} A_{\alpha', \alpha'''}\{P(\alpha''') - P(\alpha')\}.$$

Итак, видим, что разработанный нами метод можно применять не только к случаям, в которых энергия возмущения представлена в виде произведения $f(t)V$, но и ко многим более общим случаям.

Выше мы не принимали во внимание члены возмущения третьего порядка малости, однако наши методы можно было бы без какой-либо трудности применять также при вычислении высших приближений.

Заметим, наконец, что нами рассмотрены случаи, в которых гамильтониан возмущения зависит явно от времени и от системы величин β, распределенных согласно закону вероятностей. Такие случаи встречаются, когда мы рассматриваем невозмущенную систему S, слабо связанную с внешней системой Σ (например, с полем излучения), и когда пренебрегаем реакцией S на Σ. Тогда

параметры β являются постоянными интегрирования, определяющими движения системы Σ. Условия относительно непрерывности спектра в разложении гамильтониана возмущений, естественно, выполняются. Такой Σ является система с очень большим числом степеней свободы и к тому же такая, что ее собственные частоты очень близки одна к другой.

Если влиянием S на Σ нельзя пренебречь по сравнению с влиянием Σ на S, то необходимо рассмотреть проблему исходя из гамильтониана

$$H_S + H_\Sigma + H_{S\Sigma},$$

не зависящего явно от времени. Здесь H_S, H_Σ — соответственно гамильтонианы систем S, Σ, а $H_{S\Sigma}$ — гамильтониан взаимодействия. Вполне понятно, что это взаимодействие должно быть достаточно малым. Невозмущенная система характеризуется гамильтонианом $H_S + H_\Sigma$, возмущение — гамильтонианом взаимодействия.

Как хорошо известно, обычный метод квантовой механики можно применять непосредственно к этим случаям. Точно так же метод, разработанный нами, может быть обобщен на исследование возмущения, возникающего вследствие взаимодействия. Этот вопрос мы надеемся рассмотреть в следующих работах.

Заметим, наконец, что в нашем методе важная роль отводится длительности времени Δt. Когда изучаются динамические системы, рассматривающиеся в течение интервалов, малых относительно Δt, движения близки к квазипериодическим, поскольку в течение таких интервалов переменные действия (J) остаются постоянными, а циклические переменные (w) возрастают пропорционально времени. Наоборот, когда изучаются эти же системы в течение интервалов, больших по сравнению с Δt (так что в принятых единицах Δt является бесконечно малой), движения носят стохастический характер и их можно описывать уравнениями Фоккера–Планка. Нетрудно видеть, что порядок величины этой фактической длительности Δt можно легко найти с помощью приведенных выше формул.

В заключение заметим, что полученные в данной работе приближения достигнуты путем рассуждений, естественно, не вполне строгих, но такой же упрек можно сделать в отношении обычных рассуждений теории возмущений в квантовой механике. Однако теорию, развитую нами для получения наших приближений, можно было бы использовать, применяя более строгие рассуждения и, возможно, накладывая более ограничительные условия на гамильтониан возмущений.

2.

О НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ*

Предисловие

Один из основных методов, используемых в нелинейной механике для получения приближенных решений, состоит в приведении дифференциальных уравнений колебательного процесса к особой форме, в которой производные неизвестных функций по времени оказываются пропорциональными некоторому малому параметру, и в применении к этой форме процесса усреднения. Рассмотрение проблем математического обоснования такого процесса и составляет предмет первой, наибольшей по объему главы настоящей монографии. Здесь в § 3 доказывается теорема, устанавливающая при условиях значительно более общих, чем те, которые обычно налагались в предыдущих работах, что для достаточно малых значений параметра разность между соответствующими решениями точных и усредненных уравнений может быть сделана сколь угодно малой на сколь угодно большом, но все же конечном интервале.

В последующих параграфах рассматриваются значительно более сложные проблемы, относящиеся к установлению соответствия таких свойств точных и приближенных решений, которые зависят от их поведения на бесконечном интервале. Так, например, во многих важных для нелинейной механики случаях усредненные уравнения допускают инвариантные многообразия тороидального типа. Мы рассматриваем здесь вопрос о том, будут ли лежать в достаточно малой окрестности этих многообразий интегральные многообразия для точных уравнений, и исследуем их свойства устойчивости. Оказывается, что посредством особых замен переменных точные уравнения могут быть приведены к форме, в которой правые части отличаются от правых частей усредненных уравнений членами высших порядков малости.

Благодаря этому возникающие в данном круге вопросов проблемы обладают определенной аналогией с проблемами существования периодических решений в локальной теории Пуанкаре. Однако, тогда как в этой теории вопрос сводится к исследованию разрешимости системы обыкновенных уравнений с конечным числом неизвестных, содержащей малый параметр, и вопрос этот исследуется с помощью теоремы о неявных функциях, в нашей теории мы имеем дело с функциональными уравнениями, определяющими функции, характеризующие искомые интегральные многообразия. Заметим, что построение хотя бы локальной теории существования интегральных многообразий, обобщающей локальную теорию Пуанкаре, может представлять также и самостоятельный интерес независимо от проблем обоснования прин-

* Киев: Изд-во АН УССР, 1945; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Л. Суханов. М.: Наука, т. IV, 2006, с. 9.

ципа усреднения. В самом деле, качественное исследование решений значительно упрощается, если эти решения лежат на многообразии меньшего числа измерений, чем первоначальное фазовое пространство, особенно если данное многообразие оказывается одномерным или двумерным.

В заключение в § 14 гл. I на частном примере дифференциального уравнения второго порядка показывается, каким образом полученные в нашей теории локальные методы могут быть применены к исследованию структуры решений во всем фазовом пространстве.

В гл. III, IV разработанные нами способы получения асимптотических оценок прилагаются к изучению влияния случайной силы на гармонический вибратор и к изучению системы весьма большого числа связанных гармонических вибраторов. Эти задачи выбраны нами в качестве примеров, на которых вполне строгим методом удается проследить возникновение марковского стохастического процесса в динамической системе и удается обосновать, хотя бы в простейших случаях, законность статистической теории возмущений, которая была изложена нами в другой работе[1]. Необходимая для нашего исследования специальная форма закона больших чисел приведена в гл. II.

Глава I

ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ

§ 1. Метод теории возмущений в нелинейной механике применяется для исследования таких колебательных процессов, для которых соответствующие дифференциальные уравнения содержат малый параметр, и притом так, что при его нулевом значении эти уравнения интегрируются точно.

Вид рассматриваемых дифференциальных уравнений и сам характер вхождения в них малого параметра, даже если ограничиться случаями колебательных систем, имеющих практическое значение, могут быть чрезвычайно разнообразными.

Однако во многих случаях с помощью простых замен переменных дифференциальные уравнения колебаний могут быть приведены к одной стандартной форме вида

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{I.1}$$

где ε — малый параметр.

Рассмотрим, например, систему с n степенями свободы, для которой кинетическая и потенциальная энергия могут быть представлены в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{rs}q'_r q'_s; \quad V = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} c_{rs}q_r q_s, \tag{I.2}$$

где $q_1, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты; a_{rs}, c_{rs} — постоянные.

[1] См. *Боголюбов Н. Н.* Статистическая теория возмущения // Уч. зап. МГУ. 1945. Вып. 77. Физика. Кн. 3. С. 74–100; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 330.

Предполагается, что квадратичные формы T и V положительно определенные. Как известно, в этом случае посредством линейного преобразования

$$q_r = \sum_{s=1}^{n} \varphi_{rs} x_s, \quad \varphi_{rs} = \text{const}, \tag{I.3}$$

можно ввести нормальные координаты $x_1, \ldots, x_n$, для которых

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} x_r'^2, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \omega_r^2 x_r^2$$

и уравнения Лагранжа дают для невозмущенного движения

$$x_r'' + \omega_r^2 x_r = 0.$$

Пусть теперь на нашу систему действует малое возмущение, которое можно описать с помощью введения обобщенных сил типа

$$\varepsilon Q_r = \varepsilon \left\{ Q_r^0(q, q') + \sum_{\alpha} \left[Q_r^{\alpha}(q, q') \cos \Omega_{\alpha} t + Q_r^{\alpha}(q, q') \sin \Omega_{\alpha} t \right] \right\}, \tag{I.4}$$

где Ω_{α} — частоты возмущающих сил, ε — малый параметр.

Перейдем к нормальным координатам с помощью тех же линейных преобразований (I.3). Получим

$$x_r'' + \omega^2 x_r = \varepsilon X_r(t, x, x'), \tag{I.5}$$

где обобщенные силы εX_r определяются из условия эквивалентности работ

$$\sum_{r=1}^{n} \varepsilon X_r \delta x_r = \sum_{s=1}^{n} \varepsilon Q_s \delta q_s, \quad \delta q_s = \sum_{r=1}^{n} \varphi_{sr} \delta x_r, \tag{I.6}$$

которое дает

$$X_r = \sum_{s=1}^{n} Q_s \frac{\partial q_s}{\partial x_r} = \sum_{s=1}^{n} Q_s \varphi_{sr}.$$

Уравнения (I.5) могут быть приведены к виду (I.1) различными заменами переменных. Одной из наиболее удобных для оперирования является замена переменных вида

$$x_r = z_r e^{i\omega_r t} + z_{-r} e^{-i\omega_r t}, \tag{I.7}$$

$$x_r' = i\omega_r z_r e^{i\omega_r t} - i\omega_r z_{-r} e^{-i\omega_r t}, \tag{I.8}$$

в которой z_r и z_{-r} — комплексно-сопряженные неизвестные функции времени. Дифференцируя (I.7) и сравнивая с (I.8), имеем

$$z_r' e^{i\omega_r t} + z_{-r}' e^{-i\omega_r t} = 0. \tag{I.9}$$

Дифференцируя (I.8) и подставляя в (I.5), получаем

$$i\omega_r z_r' e^{i\omega_r t} - i\omega_r z_{-r}' e^{-i\omega_r t} = \varepsilon X_r. \tag{I.10}$$

Положим по определению, для упрощения записи,

$$-\omega_{-r} = \omega_r, \quad X_{-r} = X_r. \tag{I.11}$$

Тогда из (I.9) и (I.10) можем записать уравнения типа (I.1):

$$z'_g = \varepsilon Z_g(t, z), \quad g = \pm 1, \ldots, \pm n, \tag{I.12}$$

в которых

$$Z_g = \frac{e^{-i\omega_g t}}{2i\omega} X_g. \tag{I.13}$$

Итак, посредством преобразования

$$q_r = \sum_g \varphi_{rg} z_g e^{i\omega_g t}, \quad q'_r = \sum_g \varphi_{rg} i\omega_g z_g e^{i\omega_g t}, \quad \varphi_{r,-s} = \varphi_{r,s}, \tag{I.14}$$

дифференциальные уравнения колебаний рассматриваемой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-V)}{\partial q'_r} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_r} = \sum_s \{a_{rs} q''_s + c_{rs} q_s\} = \varepsilon Q_r \tag{I.15}$$

приводятся к уравнениям (I.12), принадлежащим к типу (I.1).

Заметим между прочим, что в силу (I.6), (I.13), (I.14) имеем тождество

$$\sum_r Q_r \delta q_r = \sum_r X_r \delta x_r = 2i \sum_g \omega_g Z_g \delta z_{-g},$$

в котором вариации δq, δx, δz связаны теми же линейными соотношениями, что и q, x, z.

Поэтому если мы условимся ввести в рассмотрение дифференциальную форму виртуальной работы возмущения

$$\varepsilon \delta W = \sum_r \varepsilon Q_r \delta q_r \tag{I.16}$$

и обозначим символом

$$\frac{\delta W}{\delta z_g}$$

коэффициент при δz_g в выражении этой формы (не являющейся вообще точным дифференциалом), то мы можем представить уравнения (I.12) в следующем «квазиканоническом» виде:

$$\frac{dz_g}{dt} = \frac{\varepsilon}{2i\omega_g} \frac{\delta W}{\delta z_{-g}}, \tag{I.17}$$

особенно удобном для различных преобразований неизвестных.

В качестве второго примера возьмем динамическую систему, находящуюся под воздействием сил высокой частоты, движение которой характеризуется уравнениями вида

$$q''_r = F_r(\omega t, q, q'), \quad r = 1, \ldots, n, \tag{I.18}$$

где $F_r(\tau, q, q')$ — периодическая или почти периодическая функция τ; ω — «большой» параметр, определяющий порядок величины частот приложенных сил.

Для приведения уравнения (I.18) к форме уравнений (I.1) введем новую независимую переменную τ, неизвестные y и малый параметр ε:

$$\tau = \omega t, \quad y_r = q'_r, \quad \varepsilon = \frac{1}{\omega}. \tag{I.19}$$

Тогда очевидно, что из (I.18) можно получить уравнения типа (I.1):

$$\frac{dq_r}{d\tau} = \varepsilon y_r, \quad \frac{dy_r}{d\tau} = \varepsilon F_r(\tau, q, y). \tag{I.20}$$

Мы рассмотрели здесь лишь два общих примера приведения уравнений к форме (I.1), которыми пока и ограничимся, заметив, что число их могло бы быть значительно увеличено.

§ 2. Итак, будем исследовать дифференциальные уравнения (I.1), причем для упрощения записи формул условимся рассматривать совокупности n величин $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(X_1, \ldots, X_n)$ как точки n-мерного евклидова пространства и обозначать их соответственно через x и X. Тогда, например, наши основные уравнения (I.1) запишутся в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x). \tag{I.1'}$$

Заметим далее, что в случаях, часто встречающихся в приложениях, когда $X(t, x)$ представляется суммой явно не зависящего от t члена и синусоидальных колебательных членов:

$$X(t, x) = X_0(x) + \sum_{\nu} X_\nu(x) e^{i\nu t} \tag{I.21}$$

(где ν — вещественные постоянные, отличные от нуля), форма уравнений первого приближения может быть найдена или, лучше сказать, угадана с помощью совершенно интуитивных соображений.

Именно, так как первая производная dx/dt пропорциональна малому параметру, то естественно считать x медленно изменяющейся переменной. Представим x как суперпозицию плавно изменяющегося члена ξ и суммы малых вибрационных членов и ввиду малости этих последних в первом приближении положим $x = \xi$. Тогда имеем приближенно

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) = \varepsilon X(t, \xi) = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon \sum_{\nu} X_\nu(\xi) e^{i\nu t},$$

т. е.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(\xi) + \text{малые колебательные члены}.$$

Считая, что эти синусоидальные колебательные члены вызывают лишь малые вибрации x около ξ и не оказывают влияния на систематическое изменение ξ, приходим к уравнениям первого приближения в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi). \tag{I.22}$$

Нетрудно заметить, что выражение $X_0(x)$ представляет собой усредненное по явно содержащемуся времени выражение $X(t, x)$:

$$X_0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt. \tag{I.23}$$

Таким образом, мы видим, что уравнения первого приближения (I.22) могут быть получены из точных уравнений (I.1') путем усреднения их по явно

содержащемуся времени. Этот формальный процесс, состоящий в замене точных уравнений усредненными, называется иногда *принципом усреднения*.

Как мы далее убедимся, для его обоснования не требуется, чтобы функция $X(t,x)$ могла быть представлена суммой (I.21), здесь имеет значение лишь существование среднего выражения (I.23).

Следует заметить, что в той или иной форме принцип усреднения уже давно применялся для получения приближенных решений.

Так, еще в методе «секулярных возмущений», разработанном основоположниками небесной механики, применялся, по существу, тот же процесс усреднения. Весьма важное значение принцип усреднения получил в нелинейной механике, где он используется для получения практически пригодных схем расчета нелинейных колебательных систем. Проблемой обоснования этого формального приема стали заниматься лишь сравнительно недавно. Укажем здесь на работы П. Фату[1], Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси[2], Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова[3], где были рассмотрены различные частные случаи, в основном те, в которых $X(t,x)$ периодично[1,2] по отношению к t, а также некоторые случаи почти периодичности[3] этой функции.

Заметим, что проблему обоснования принципа усреднения можно поставить в двух аспектах.

Во-первых, рассматривая решение $x=x(t)$ точных уравнений и решение $\xi=\xi(t)$ усредненных уравнений, совпадающие в начальный момент времени $t=0$, можно искать условия, при которых для достаточно малого ε разность $x(t)-\xi(t)$ может быть сделана сколь угодно малой на сколь угодно большом, но все же конечном интервале времени.

Во-вторых, можно поставить математически значительно более сложную задачу установления соответствия между такими свойствами точных и приближенных решений, которые зависят от их поведения на бесконечном интервале.

В настоящей работе мы будем исследовать оба этих аспекта проблемы обоснования принципа усреднения, причем начнем с первой задачи как значительно более простой.

§ 3. Мы приступим сейчас к доказательству теоремы, устанавливающей, что при весьма общих условиях разность $x(t)-\xi(t)$ может быть сделана сколь угодно малой для достаточно малого ε на сколь угодно большом интервале $0<t<T$. Переменная $\xi(t)$ зависит от t через произведение εt. Поэтому, чтобы в течение указанного интервала времени переменная ξ могла успеть значительно отойти от своего начального значения, т. е. чтобы этот интервал оказался достаточно длительным с точки зрения изменения ξ, в качестве T следует брать величину порядка L/ε, где L может быть сделано сколь угодно большим при достаточно малом ε.

Сформулируем поэтому утверждение о малости ошибки $x(t)-\xi(t)$ первого приближения следующим образом.

---

[1] Bulletin de la Soci'et'e Math'em. de France. 1928. V. LVI.

[2] ЖЭТФ. 1934. Т. 4. С. 117.

[3] Введение в нелинейную механику. Киев, 1937; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. II, 2005, с. 302.

Теорема I. *Пусть функция $X(t, x)$ удовлетворяет условиям:*

а) для некоторой области D можно указать такие положительные постоянные M и λ, что для всех вещественных значений $t \geqslant 0$ и для любых точек x, x', x'' из этой области удовлетворяются неравенства

$$|X(t, x)| \leqslant M, \quad |X(t, x') - X(t, x'')| \leqslant \lambda |x' - x''|; \tag{I.24}$$

б) равномерно по отношению к x в области D существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt = X_0(x). \tag{I.23}$$

Тогда любым сколь угодно малым положительным ϱ, η и сколь угодно большому L можно поставить в соответствие такое положительное ε_0, что если $\xi = \xi(t)$ есть решение уравнения (I.22)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi),$$

определенное в интервале $0 < t < \infty$ и лежащее в области D вместе со своей ϱ-окрестностью[1], *то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $0 < t < L/\varepsilon$ справедливо неравенство*

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta, \tag{I.25}$$

в котором $x = x(t)$ представляет собой решение уравнения (I.1′)

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x),$$

совпадающее с $\xi(t)$ при $t = 0$.

Примечание I. Если область D ограничена (лежит в ограниченной части рассматриваемого евклидова пространства), то в условии *б* можно исключить требование равномерности и сформулировать *б* как условие существования предела (I.23) в каждой точке этой области.

В самом деле, ввиду условия *а* функции

$$F_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt$$

удовлетворяют неравенству

$$|F_T(x') - F_T(x'')| \leqslant \lambda |x' - x''|,$$

и, таким образом, последовательность этих функций при $T \to \infty$ является равностепенно-непрерывной. Но так как область D, будучи ограниченной, компактна, то всякая равностепенно-непрерывная последовательность, сходящаяся в каждой точке D, оказывается вместе с тем и равномерно сходящейся.

[1] Мы будем называть ϱ-окрестностью некоторого множества A множество всех точек, расстояние от которых до A меньше ϱ.

Примечание II. Так как для всякой почти периодической функции $f(t)$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

то мы видим, что в случае ограниченности области D условие *б* удовлетворяется, если выражение $X(t,x)$ для каждого x из D оказывается почти периодической функцией переменной t.

Доказательство. Фиксируем некоторое положительное число a и построим функцию

$$\Delta_a(x)=A_a\left\{1-\frac{|x|^2}{a^2}\right\}^2,\quad |x|\leqslant a,\quad \Delta_a(x)=0,\quad |x|>a, \tag{I.26}$$

где положительная постоянная A_a определяется соотношением

$$\int_{E_n}\Delta_a(x)\,dx=1, \tag{I.27}$$

интегрирование выполняется по всему рассматриваемому пространству E_n и dx обозначает инфинитезимальный элемент обычного n-мерного евклидова объема.

Очевидно, введенная функция $\Delta_a(x)$ ограничена вместе со своими частными производными до второго порядка включительно. Так как эта функция и ее производные тождественно равны нулю для $|x|>a$, нетрудно убедиться, что интеграл

$$I_a=\int_{E_n}\left|\frac{\partial\Delta_a(x)}{\partial x}\right|dx \tag{I.28}$$

оказывается конечным для всякого положительного a.

Заметив это, рассмотрим функцию

$$u(t,z)=\int_D\Delta_a(x-x')\left\{\int_0^t[X(t,x')-X_0(x')]\,dt\right\}dx'. \tag{I.29}$$

В силу условия *б* мы можем построить такую монотонно убывающую функцию $f(t)$, стремящуюся к нулю при $t\to\infty$, что везде в D

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t[X(t,x)-X_0(x)]\,dt\right|\leqslant f(t). \tag{I.30}$$

Поэтому

$$|u(t,x)|\leqslant tf(t)\int_D\Delta_a(x-x')\,dx'\leqslant tf(t)\int_{E_n}\Delta_a(x-x')\,dx'=tf(t)\int_{E_n}\Delta_a(x')\,dx',$$

т. е.

$$|u(t,x)|\leqslant tf(t). \tag{I.31}$$

Имеем далее

$$\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right| \leqslant tf(t)\int\limits_D \left|\frac{\partial \Delta_a(x-x')}{\partial x}\right| dx' \leqslant tf(t)\int\limits_{E_n} \left|\frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial x}\right| dx,$$

или ввиду (I.28),

$$\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right| \leqslant I_a t f(t). \tag{I.32}$$

С другой стороны, благодаря условию a

$$|X_0(x)| \leqslant M, \quad |X_0(x') - X_0(x'')| \leqslant \lambda |x' - x''|, \quad x, x', x'' \in D, \tag{I.33}$$

и потому

$$|X(t,x') - X_0(x') - X(t,x) + X_0(x)| \leqslant 2\lambda |x' - x|, \quad x, x' \in D. \tag{I.34}$$

Заметим теперь, что вследствие (I.29)

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \int\limits_D \{X(t,x') - X_0(x')\}\Delta_a(x-x')\,dx',$$

откуда на основании (I.34) убеждаемся, что в области D справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \{X(t,x) - X_0(x)\}\int\limits_D \Delta_a(x-x')\,dx'\right| \leqslant 2\lambda a. \tag{I.35}$$

Но по определению функции $\Delta_a(x)$ для любой точки x, a-окрестность которой принадлежит D, имеем

$$\int\limits_D \Delta_a(x-x')\,dx' = \int\limits_{|x-x'|<a} \Delta_a(x-x')\,dx' = 1,$$

и, таким образом, соотношение (I.35) для таких точек дает

$$\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - X(t,x) + X_0(x)\right| \leqslant 2\lambda a. \tag{I.36}$$

Фиксируем теперь число a так, чтобы

$$a < \varrho; \quad a < \frac{\eta^*}{8\lambda L e^{L\lambda}}, \quad \text{где } \eta^* = \min(\eta, \varrho), \tag{I.37}$$

и введем функции

$$F(\varepsilon) = \sup_{|\tau| \leqslant L}\left|\tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right|, \quad \Phi(t) = \frac{1}{t^2}\int\limits_0^t tf(t)\,dt.$$

Имеем, очевидно,

$$F(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0; \quad \Phi(t) \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Мы можем поэтому найти столь малое положительное ε_0, чтобы для всякого положительного ε, не превосходящего ε_0, удовлетворялись неравенства

$$F(\varepsilon) < a, \quad F(\varepsilon) < \frac{\eta^*}{2}, \quad \Phi\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\eta^*}{4L^2 e^{L\lambda}(\lambda + I_a M)}. \tag{I.38}$$

Произведя такой выбор, рассмотрим выражение

$$\overline{x} = \overline{x(t)} = \xi(t) + \varepsilon u(t, \xi(t)), \tag{I.39}$$

где $\xi(t)$ есть решение уравнения (I.22), принадлежащее со своей ϱ-окрестностью к области D. Благодаря условиям (I.31), (I.37), (I.38) имеем

$$|\varepsilon u(t, \xi)| \leqslant \varepsilon t f(t) \leqslant F(\varepsilon) < a < \varrho \tag{I.40}$$

в интервале

$$0 < t < \frac{L}{\varepsilon}, \tag{I.41}$$

и потому в этом интервале $\overline{x(t)} \in D$.

Имеем далее

$$\frac{d\overline{x}}{dt} - \varepsilon X(t, \overline{x}) = R, \tag{I.42}$$

где

$$R = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi} - \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon u) =$$

$$= \varepsilon \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - X(t, \xi) + X_0(\xi) \right\} + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon \{X(t, \xi) - X(t, \xi + \varepsilon u)\}.$$

Отсюда вследствие неравенств (I.31)–(I.33), (I.36) получаем

$$|R| \leqslant 2\lambda a \varepsilon + I_a M \varepsilon^2 t f(t) + \lambda \varepsilon^2 t f(t)$$

и, таким образом, в рассматриваемом интервале (I.41) находим

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} R(\tau)\, d\tau \leqslant e^{L\lambda} \int_0^{L/\varepsilon} |R(t)|\, dt < \left\{ 2\lambda a L + (I_a M + \lambda) L^2 \Phi\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \right\} e^{\lambda L},$$

или ввиду условий (I.37), (I.38)

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)|\, d\tau < \left(\frac{\eta^*}{4} + \frac{\eta^*}{4} \right) = \frac{\eta^*}{2},$$

так что

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)|\, d\tau < \frac{\eta}{2}, \quad \int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)|\, d\tau < \frac{\rho}{2}. \tag{I.43}$$

Пусть теперь $x = x(t)$ представляет собой решение уравнения (I.1′), для которого $x(0) = \xi(0)$.

Тогда в интервале

$$0 < t < t^*, \quad t^* \leqslant \frac{L}{\varepsilon}, \tag{I.44}$$

в котором $x(t) \in D$, можем записать

$$|X(t,x) - X(t,\overline{x})| \leqslant \lambda |x - \overline{x}|,$$

откуда благодаря (I.42) замечаем, что

$$\left|\frac{d(x-\overline{x})}{dt}\right| \leqslant \lambda\varepsilon|x-\overline{x}| + |R(t)|,$$

и, так как разность $x - \overline{x}$ обращается в нуль при $t = 0$, имеем

$$|x - \overline{x}| \leqslant \int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)|\, d\tau.$$

Поэтому на основании (I.43) видим, что в интервале (I.44) выполняются неравенства

$$|x - \overline{x}| < \frac{\eta}{2}, \quad |x - \overline{x}| < \frac{\rho}{2},$$

из которых вследствие (I.39), (I.40) убеждаемся, что

$$|x - \xi| < \frac{\eta}{2} + F(\varepsilon) < \eta, \quad |x - \xi| < \frac{\rho}{2} + F(\varepsilon) < \varrho. \tag{I.45}$$

Покажем теперь, что число t^* может быть выбрано равным L/ε.

В самом деле, если этого сделать нельзя, то неравенство

$$|x - \xi| < \varrho \tag{I.46}$$

не может выполняться везде в интервале $(0, L/\varepsilon)$, так как в последнем случае мы имели бы $x(t) \in D$ для всякого t из $(0, L/\varepsilon)$. Но так как неравенство (I.46) заведомо выполняется для достаточно малых t, то из соображений непрерывности ясно, что существует такое t_1, что в интервале $(0, t_1)$ это неравенство выполняется и, кроме того,

$$|x(t_1) - \xi(t_1)| > \varrho - \delta, \tag{I.47}$$

где в качестве δ может быть взято любое сколь угодно малое число. Выберем

$$\delta = \frac{1}{2}\left\{\frac{\rho}{2} - F(\varepsilon)\right\} \tag{I.48}$$

и положим $t^* = t_1$, что возможно, так как на сегменте $[0, t_1]$ точка $x(t)$ принадлежит к области D.

Но тогда в силу (I.45)

$$|x(t_1) - \xi(t_1)| < \frac{\rho}{2} + F(\varepsilon) = \varrho - 2\delta < \varrho - \delta,$$

что противоречит (I.47).

Итак, мы можем положить $t^* = L/\varepsilon$, и неравенства (I.45) оказываются справедливыми в интервале $0 < t < L/\varepsilon$, что и завершает доказательство нашей теоремы.

* * *

В заключение заметим, что полученный результат можно было бы обобщить также и на те случаи, когда уравнение (I.1′) рассматривается в бесконечномерном пространстве, что представило бы известный интерес для

обоснования принципа усреднения применительно к уравнениям в частных производных и к различным типам функциональных уравнений.

Одним из наиболее простых здесь будет случай, когда (I.1′) рассматривается в линейном нормированном пространстве, где можно использовать без существенных изменений тот же прием, который был применен в приведенном выше доказательстве. Только, чтобы избежать трудностей, связанных с введением меры объема в функциональное пространство, целесообразно будет принять за $\overline{x}$ вместо (I.39) выражение вида

$$\overline{x}(t) = \xi(t) + \varepsilon \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} F\{t, \xi(t)\}\, dt, \tag{I.49}$$

где

$$F(t, x) = \int_{0}^{t} \{X(t, x) - X_0(x)\}\, dt$$

и где Δt соответствующим образом подбирается, как ранее было подобрано a. С выражением (I.49) наши рассуждения повторяются почти дословно, и, таким образом, нетрудно доказать теорему обоснования принципа усреднения для уравнений в линейном нормированном пространстве.

§ 4. Перейдем теперь ко второй задаче, которую мы поставили в § 2 в связи с проблемой обоснования принципа усреднения. Эту задачу мы будем сейчас рассматривать для следующих трех случаев, представляющих особый интерес для нелинейной механики.

1. Уравнение первого приближения (I.22) имеет «квазистатическое», т. е. не зависящее от времени, решение $\xi = \xi_0 = \text{const}$. Этот случай, очевидно, имеет место, если усредненная функция $X_0(x)$ обращается в нуль при $x = \xi$.

2. Уравнение (I.22) обладает периодическим решением.

3. Можно ввести угловые переменные $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ и переменные $a = (a_1, \ldots, a_p)$ таким образом, чтобы уравнения (I.1) представились в форме

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon \Phi(t, \theta, a), \qquad \frac{da}{dt} = \varepsilon A(t, \theta, a) \tag{I.50}$$

и чтобы соответствующие уравнения первого приближения имели вид

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon \Phi(a), \tag{I.51}$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a). \tag{I.52}$$

При этом предполагается, что уравнения (I.52) имеют квазистатическое решение $a = a_0$.

Мы специально рассмотрим также частный вариант случая 3, когда в уравнения (I.50) время t входит лишь через комбинации $\theta_1 + \nu_1 t, \ldots, \theta_r + \nu_r t$, в которых $\nu_1, \ldots, \nu_r$ — некоторые положительные постоянные:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon \Phi(\theta + \nu t, a), \\ \frac{da}{dt} &= \varepsilon A(\theta + \nu t, a). \end{aligned} \tag{I.53}$$

Прежде чем приступить к формулировкам соответствующих теорем, укажем предварительно ряд общих примеров этих случаев.

Возьмем динамическую систему, находящуюся под действием сил высокой частоты, описываемую уравнением (I.18), которое, как мы показали, приводится к виду (I.20).

Усредняя эти последние уравнения, имеем для первого приближения

$$\frac{dq_r}{d\tau} = \varepsilon y_r, \quad \frac{dy_r}{d\tau} = \varepsilon F_r(q, y), \tag{I.54}$$

где

$$F_r(q, y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_r(\tau, q, y)\, d\tau,$$

или, возвращаясь к переменным, входящим в (I.18), с помощью преобразования (I.19) получаем

$$\frac{d^r q_r}{dt^r} = F_r\left(q, \frac{dq}{dt}\right), \quad y_r = \frac{dq_r}{dt}, \quad r = 1, \ldots, n. \tag{I.55}$$

Таким образом, уравнения первого приближения соответствуют системе, находящейся под действием сил, не зависящих явно от времени.

Равновесное состояние

$$q_r = q_r^0, \quad y_r = 0 \tag{I.56}$$

будет поэтому возможным, когда для выполнения (I.56) обращаются в нуль усредненные силы:

$$F_r(q_1^0, \ldots, q_n^0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad r = 1, \ldots, n.$$

В этом случае (I.56) представляет собой квазистатическое решение уравнений (I.54).

Рассмотрим частный случай системы с одной степенью свободы: $n = 1$. Допустим, что нам удалось показать, как это можно сделать с помощью энергетических соображений, что все решения уравнения (I.55) ограничены и не уходят на бесконечность.

Тогда на основании известных исследований Пуанкаре можно утверждать, что при весьма общих условиях регулярности, наложенных на функцию $F(q, q')$, всякое решение уравнения (I.55) или само по себе является равновесным или периодическим, или приближается к таковым при $t \to \infty$. Следовательно, мы имеем здесь наши случаи 1, 2.

Возьмем теперь колебательную систему, близкую к линейной, описываемую уравнениями (I.25), которые, как мы видели, приводятся к форме (I.17).

Поэтому уравнения первого приближения будут иметь вид

$$\frac{dz_g}{dt} = \frac{\varepsilon}{2i\omega_g} \frac{\overline{\delta W}}{\delta z_{-g}}, \quad g = \pm 1, \ldots, \pm n, \tag{I.57}$$

где $\varepsilon\overline{\delta W}$ представляет собой усредненное выражение дифференциальной формы виртуальной работы $\varepsilon \delta W$.

Заметим, что невозмущенная система, характеризующаяся уравнениями (I.15) при $\varepsilon = 0$, очевидно, может совершать моногармоническое колебание

$$q_r = \varphi_{r,1}(u \sin \omega_1 t + v \cos \omega_1 t), \quad q_r' = \omega_1 \varphi_{r,1}(u \cos \omega_1 t - v \sin \omega_1 t), \qquad \text{(I.58)}$$

соответствующее нормальному тону с частотой ω_1.

Подставим (I.58) в выражения (I.4) приложенных возмущающих сил и, считая u, v постоянными, разложим εQ_r на суммы гармонических колебаний. Частоты этих гармоник представятся величинами вида $m\omega_1$, $m\omega_1 + \Omega_\alpha$, где m — целые числа. Обозначим через $\varepsilon \delta W_1$ виртуальную работу, которую совершают возмущающие силы в режиме нормального колебания (I.58) на виртуальных перемещениях

$$\delta q_r = \sum_g \varphi_{r,g} e^{i\omega_g t} \delta z_g.$$

Нетрудно заметить, что при разложении $\varepsilon \delta W_1$ на сумму гармонических колебаний мы получим частоты вида

$$m\omega_1 \pm \omega_k, \quad m\omega_1 \pm \omega_k + \Omega_\alpha, \quad k = 1, \ldots, n, \qquad \text{(I.59)}$$

причем при данном k они появляются в разложении коэффициента формы $\varepsilon \delta W_1$ у $\delta z_{\pm k}$. Предположим, что все частоты (I.59) для $k = 2, \ldots, n$ отличны от нуля, каковы бы ни были возможные значения u, v.

Тогда после усреднения соответствующие члены обращаются в нуль, благодаря чему для произвольных u, v

$$\overline{\frac{\delta W_1}{\delta z_{-g}}} = 0, \quad g \neq \pm 1. \qquad \text{(I.60)}$$

Но, полагая

$$\frac{u}{2i} + \frac{v}{2} = z_1, \quad -\frac{u}{2i} + \frac{v}{2} = z_{-1}, \qquad \text{(I.61)}$$

можем заметить, что δW_1 равна форме δW, в которой положено

$$z_g = 0, \quad g = \pm 2, \ldots, \pm n. \qquad \text{(I.62)}$$

Таким образом, вследствие (I.60) мы убеждаемся, что в рассматриваемом случае уравнения первого приближения (I.57) имеют частные решения, для которых справедливо (I.62). Для этих частных решений переменные z_1, z_{-1} определяются уравнениями

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{2i\omega_1} \overline{\frac{\delta W_1}{\delta z_{-1}}}, \quad \frac{dz_{-1}}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2i\omega_1} \overline{\frac{\delta W_1}{\delta z_1}}.$$

Вводя вместо комплексно-сопряженных неизвестных z_1, z_{-1} вещественные неизвестные u, v, с помощью формул преобразования (I.61) эти уравнения можно представить в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega_1} \overline{\frac{\delta W_1}{\delta v}}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_1} \overline{\frac{\delta W_1}{\delta u}}.$$

Таким образом, функции u, v удовлетворяют системе двух уравнений первого порядка, не зависящих явно от времени. Поэтому если эти уравнения подчинены некоторым весьма общим условиям регулярности и не имеют реше-

ний, уходящих на бесконечность, то из теории Пуанкаре будет вытекать существование квазистатических или периодических решений уравнений первого приближения (I.57). Мы рассматривали сейчас специальные случаи, когда уравнения (I.57) имеют решения, физически соответствующие возбуждению одного нормального вибратора с частотой ω_1. Обратим еще внимание на другой тип возможных решений, соответствующих нашему случаю 3.

Введем вместо комплексных переменных z_g вещественные переменные a_k, φ_k с помощью соотношений

$$z_k = \frac{a_k e^{i\varphi_k}}{2i}, \quad z_{-k} = -\frac{a_k e^{-i\varphi_k}}{2i}. \tag{I.63}$$

Тогда уравнения (I.17) преобразуются к форме

$$\frac{da_k}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega_k a_k}\frac{\delta W}{\delta \varphi_k}, \quad \frac{d\varphi_k}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_k a_k}\frac{\delta W}{\delta a_k}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{I.64}$$

также принадлежащей к типу (I.1′).

Поэтому уравнения первого приближения могут быть записаны в виде

$$\frac{da_k}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega_k a_k}\frac{\overline{\delta W}}{\delta \varphi_k}, \quad \frac{d\varphi_k}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_k a_k}\frac{\overline{\delta W}}{\delta a_k}. \tag{I.65}$$

Заметим, что здесь

$$\delta W = \sum_r \varepsilon Q_r \delta q_r, \quad \delta q_r = \sum_s \varphi_{rs}\{\delta a_s \sin(\omega_s t + \varphi_s) + a_s \delta\varphi_s \cos(\omega_s t + \varphi_s)\},$$

причем в выражения (I.4) для возмущающих сил на основании (I.14), (I.63) надлежит подставить для координат и скоростей следующие суммы:

$$q_r = \sum_s \varphi_{rs} a_s \sin(\omega_s t + \varphi_s), \quad q_r' = \sum_s \varphi_{rs} a_s \omega_s \cos(\omega_s t + \varphi_s).$$

Мы видим, что δW является периодической функцией фазовых углов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ с периодом 2π, причем каждая фаза φ_k входит в комбинации $\omega_k t + \varphi_k$. Разлагая функцию δW в формальный ряд Фурье, получаем для нее представление типа

$$\sum_m \exp\{i\{(m\omega)t + (m\varphi)\}\}\delta W_m + \sum_{m,\alpha} \exp\{i\{[(m\omega) + \Omega_\alpha]t + (m\varphi)\}\}\delta W_{m,\alpha}, \tag{I.66}$$

где

$$m = (m_1, \ldots, m_n), \quad (m\omega) = m_1\omega_1 + \ldots + m_n\omega_n, \quad (m\varphi) = m_1\varphi_1 + \ldots + m_n\varphi_n,$$

причем суммирование распространяется по целым положительным, нулевым и отрицательным значениям m_k. Далее, здесь коэффициенты форм δW_m, $\delta W_{m,\alpha}$ при вариациях δa, $\delta\varphi$ не зависят от t, φ, являясь функциями переменных a. Сделаем сейчас допущение, соответствующее нерезонансному случаю нелинейной механики, о том, что для m, α, входящих в суммы (I.66), не выполняется, кроме тривиального, ни одно соотношение вида

$$m_1\omega_1 + \ldots + m_n\omega_n = 0, \quad m_1\omega_1 + \ldots + m_n\omega_n + \Omega_\alpha = 0.$$

Тогда после усреднения все члены в (I.66) выпадают, кроме члена δW_0 при $m_1 = 0, \ldots, m_n = 0$. Мы видим поэтому, что коэффициенты при вариациях в усредненной форме $\overline{\delta W} = \delta W_0$ зависят только от переменных $a_1, \ldots, a_n$:

$$\frac{\overline{\delta W}}{\delta a_k} = g(a_1, \ldots, a_n), \qquad \frac{\overline{\delta W}}{\delta \varphi_k} = f(a_1, \ldots, a_n),$$

и, таким образом, уравнения (I.65) будут иметь вид, соответствующий нашему случаю 3.

Пусть теперь возмущающие силы не зависят явно от времени, так что вместо (I.4) можем записать

$$Q_r = Q_r(q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n'). \tag{I.67}$$

Тогда, поскольку в форму δW время t войдет явно лишь через комбинации $\omega_1 t + \varphi_1, \ldots, \omega_n t + \varphi_n$, можем заметить, что точные уравнения (I.65) в этом частном случае будут того же типа, что и наши уравнения (I.53).

На этом мы закончим краткий обзор тех общих примеров, имеющих практическое значение в нелинейной механике, которые могли бы послужить иллюстрацией для случаев 1, 2, 3, и приступим к установлению теорем о структуре точных решений в окрестности вышеупомянутых специальных стационарных решений.

§ 5. Сформулируем сейчас ряд теорем и затем установим для них одно общее доказательство.

Теорема II. *Пусть выполняются следующие условия:*

а) уравнение

$$\frac{d\xi}{d\tau} = X_0(\xi)$$

имеет постоянное решение $\xi = \xi_0$;

б) вещественные части всех n *характеристических показателей, соответствующих этому решению, отличны от нуля;*

в) можно найти такую ϱ*-окрестность* D_ϱ *точки* ξ_0, *что функция* $X(t, x)$ *и ее частные производные первого порядка по* x_k *будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к* x *в области*

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_\varrho;$$

г) в каждой точке D_ϱ

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t, x)\, dt \to X_0(x)$$

равномерно по отношению к t *в интервале* $(-\infty, \infty)$.

Тогда можно указать такие положительные ε_0, σ_0, σ_1 (*причем* $\sigma_0 \leqslant \sigma_1 < \varrho$), *что для каждого положительного* ε, *меньшего* ε_0, *уравнение* (I.1′) *имеет одно-единственное решение* $x = x^*(t)$, *определенное на всем интервале* $(-\infty, \infty)$, *для которого*

$$|x^*(t) - \xi_0| < \sigma_0, \quad -\infty < t < \infty. \tag{I.68}$$

Это решение при любом ε, таком, что $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, обладает следующими свойствами.

1. Можно найти такую функцию $\delta(\varepsilon)$, стремящуюся к нулю вместе с ε, что

$$|x^*(t) - \xi_0| \leqslant \delta(\varepsilon). \tag{I.69}$$

2. Если $\{\tau_m\}$ есть последовательность вещественных чисел, для которой

$$X(t+\tau_m, x) - X(t, x) \to 0, \quad m \to \infty, \tag{I.70}$$

равномерно по отношению к (t, x) $(-\infty < t < \infty,\ x \in D_\varrho)$, то тогда равномерно по отношению к t имеем

$$x^*(t+\tau_m) - x^*(t) \to 0, \quad m \to \infty. \tag{I.71}$$

3. Пусть $x = x(t)$ представляет собой любое решение уравнения (I.1′), удовлетворяющее при некотором t_0 неравенству вида

$$|x(t_0) - \xi_0| < \sigma_0.$$

Тогда, если вещественные части всех характеристических показателей отрицательны, расстояние $|x(t) - x^*(t)|$ экспоненциально стремится[1] к нулю при $t \to \infty$.

Если вещественные части всех характеристических показателей положительны, можно найти такое $t_1 > t_0$, что

$$|x(t_1) - \xi_0| > \sigma_1. \tag{I.72}$$

Если s вещественных частей рассматриваемых показателей отрицательны, а остальные $n - s$ положительны, в области D_{σ_0} существует s-мерное многообразие $\mathfrak{M}_{t_0}$, такое, что из соотношения $x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0}$ вытекает экспоненциальное стремление к нулю (при $t \to \infty$) расстояния $|x^*(t) - x(t)|$, а из соотношения $x(t_0) \overline{\in} \mathfrak{M}_{t_0}$ вытекает справедливость неравенства (I.72).

Следствие I. Из свойства 2 решения $x^*(t)$ следует, что если в дополнение к условиям теоремы II можно указать такое положительное T, что тождественно

$$X(t+T, x) = X(t, x)$$

во всей области определения функции X, то это решение оказывается периодическим с периодом T. Кроме того, в этом случае условие ε можно заменить условием

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(t, x)\, dt = X_0(x).$$

Введем теперь одно определение, которым в дальнейшем нам придется воспользоваться. Пусть дана функция $F(t, u)$, определенная для всех вещественных t и для всех u из некоторого множества E. Мы будем говорить, что $F(t, u)$ есть почти периодическая функция t равномерно по отношению к u, если каждому положительному η можно поставить в соответствие такое положительное $l(\eta)$, что в любом интервале длиной $l(\eta)$ лежит по крайней

[1] Мы будем говорить, что некоторая функция $\rho(t)$ экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$, если можно указать такие положительные C, γ, что для $t > t_0$ имеет место неравенство $|\rho(t)| \leqslant Ce^{-\gamma(t-t_0)}$.

мере одно число τ, для которого имеет место неравенство

$$|F(t+\tau, u) - F(t, u)| \leqslant \eta$$

при произвольных t, u.

Как видно, это определение эквивалентно обычному определению почти периодичности, если только $F(t, u)$ рассматривать как абстрактную функцию t, когда каждому t_0 ставится в соответствие функция $F(t_0, u)$, определенная на E. Отсюда с помощью обычной теории абстрактных почти периодических функций нетрудно убедиться, что если $F(t, u)$ есть почти периодическая функция равномерно по отношению к u, то для нее существует счетное множество вещественных чисел $\{\omega_k\}$ — так называемый частотный базис, — такое, что если $\{\tau_m\}$ есть последовательность вещественных чисел, для которой при каждом k

$$e^{i\omega_k \tau_m} \to 1, \quad m \to \infty,$$

то равномерно по отношению к (t, u) будем иметь

$$|F(t+\tau_m, u) - F(t, u)| \to 0, \quad m \to \infty.$$

Наоборот, если для некоторой функции $F(t, u)$ можно указать счетное множество $\{\omega_k\}$, обладающее этим свойством, то $F(t, u)$ оказывается почти периодической функцией t равномерно по отношению к u.

Заметим еще, что для такой функции всегда существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F(t, u)\, dt,$$

причем сходимость к пределу будет равномерной по отношению к (t, u).

Пусть теперь E будет компактным множеством некоторого метрического пространства и пусть $F(t, u)$ удовлетворяет на этом множестве условию Липшица по отношению к u:

$$|F(t, u') - F(t, u'')| \leqslant \lambda \varrho(u', u''), \quad -\infty < t < \infty, \quad u', u'' \in E, \tag{I.73}$$

где λ — положительная постоянная и $\varrho(u', u'')$ обозначает расстояние между точками u', u''.

Тогда можно показать, что если для каждого u из E функция $F(t, u)$ является почти периодической функцией переменной t, то свойство почти периодичности будет иметь место равномерно по отношению к u.

В самом деле, поскольку E есть компактное множество метрического пространства, можно найти в E счетное множество точек $\{u_q\}$, повсюду плотное на E. Но так как по условию при данном q $F(t, u_q)$ есть почти периодическая функция t, то мы можем построить для нее частотный базис $\{\omega_{qk}\}$. Наше утверждение будет доказано, когда мы установим, что для последовательности $\{\tau_m\}$, для которой

$$e^{i\omega_{qk}\tau_m} \to 1$$

(при любой паре q, k), имеет место соотношение

$$|F(t+\tau_m, u) - F(t, u)| \to 0$$

равномерно по отношению к (t, u).

Возьмем поэтому такую последовательность $\{\tau_m\}$ и примем во внимание, что по определению частотного базиса мы получим при каждом q

$$|F(t+\tau_m, u_q) - F(t, u_q)| \to 0 \tag{I.74}$$

равномерно по отношению к t. Заметим, что благодаря компактности E любому положительному ε мы можем поставить в соответствие такое целое N, что множество $(u_1, \ldots, u_N)$ образует конечную ε-сеть на E.

Найдя N, мы видим, что в силу свойства (I.74) существует такое $m(\varepsilon)$, что для $m \geqslant m(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|F(t+\tau_m, u_q) - F(t, u_q)| \leqslant \varepsilon, \quad -\infty < t < \infty, \quad q = 1, \ldots, N.$$

Рассмотрим теперь произвольную точку u множества E и заметим, что по самому определению ε-сети среди чисел $1, \ldots, N$ существует число q, для которого

$$\varrho(u, u_q) \leqslant \varepsilon.$$

Но тогда ввиду условия (I.73)

$$|F(t+\tau_m, u) - F(t+\tau_m, u_q)| \leqslant \lambda\varepsilon, \quad |F(t, u) - F(t, u_q)| \leqslant \lambda\varepsilon,$$

и мы имеем неравенство

$$\begin{aligned} |F(t+\tau_m, u) - F(t, u)| \leqslant |F(t+\tau_m, u) - F(t+\tau_m, u_q)| + \\ + |F(t+\tau_m, u_q) - F(t, u_q)| + |F(t, u_q) - F(t, u)| \leqslant (1+2\lambda)\varepsilon, \\ m \geqslant m(\varepsilon), \end{aligned}$$

доказывающее сделанное утверждение.

Благодаря этому свойству мы можем теперь сформулировать такое следствие теоремы II.

Следствие II. Свойство 2 решения $x^*(t)$ показывает, что если в дополнение к условиям теоремы II выражение $X(t, x)$ будет почти периодической функцией t при каждом x из области D, то это решение будет само почти периодическим. Кроме того, в этом случае условие ε может быть заменено условием

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt = X_0(x).$$

Введем еще несколько определений.

Пусть каждому t из интервала $(-\infty, \infty)$ можно поставить в соответствие некоторое множество S_t точек x, которое можно представить аналитически в параметрической форме уравнениями вида

$$x = f(t, u_1, \ldots, u_s), \tag{I.75}$$

где $f(t, u_1, \ldots, u_s)$ удовлетворяет условиям Липшица по отношению к параметрам $u_1, \ldots, u_s$ во всей области их изменения.

Мы будем говорить тогда, что S_t есть интегральное многообразие для уравнения (I.1′), если для всякого решения $x = x(t)$ этого уравнения из соотношения $x(t) \in S_t$, справедливого в какой-то один момент времени $t = t_0$, вытекает его справедливость для любого вещественного t.

Условимся называть представление (I.75) интегрального многообразия S_t периодическим с периодом T (T — некоторая положительная постоянная), если тождественно

$$f(t+T, u_1, \ldots, u_s) = f(t, u_1, \ldots, u_s)$$

для всех возможных $t, u_1, \ldots, u_s$.

Условимся далее называть это представление почти периодическим, если $f(t, u_1, \ldots, u_s)$ является почти периодической функцией t равномерно по отношению к $(u_1, \ldots, u_s)$.

Сформулируем теперь еще две теоремы.

Теорема III. *Пусть выполняются следующие условия*:

а) уравнение

$$\frac{d\xi}{d\tau} = X(\xi) \tag{I.76}$$

имеет периодическое решение

$$\xi = \xi(\omega\tau), \quad \xi(\varphi + 2\pi) = \xi(\varphi); \tag{I.77}$$

б) вещественные части всех $n-1$ *характеристических показателей, соответствующих периодическому решению* (I.77) *уравнения* (I.76), *отличны от нуля*;

в) можно найти такую ϱ*-окрестность* D_ϱ *орбиты этого периодического решения, что функция* $X(t, x)$ *и ее частные производные первого порядка по* x_k *будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к* x *в области*

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_\varrho;$$

г) в каждой точке D_ϱ *равномерно по отношению к* t *имеем*

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} X(t, x)\, dt \to X_0(x) \quad \textit{при } T \to \infty.$$

Тогда можно указать такие положительные $\varepsilon_0, \sigma_0, \sigma_1$ (*причем* $\sigma_0 < \sigma_1 < \varrho$), *что для каждого положительного* ε, *меньшего* ε_0, *уравнение* (I.1) *имеет одно-единственное интегральное многообразие* S_t, *лежащее для всех вещественных* t *в области* D_{σ_0}.

Указанное интегральное многообразие при любом ε, таком, что $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, обладает следующими свойствами.

1. S_t допускает параметрическое представление вида

$$x = f(t, \theta), \tag{I.78}$$

где $f(t, \theta)$ определено для всех вещественных t, θ и обладает периодом 2π по отношению к угловому параметру θ. При этом можно найти такие функции $\delta(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$, стремящиеся к нулю вместе с ε, что

$$|f(t, \theta) - \xi(\theta)| \leqslant \delta(\varepsilon), \quad |f(t, \theta') - f(t, \theta'')| \leqslant \eta(\varepsilon)|\theta' - \theta''| \tag{I.79}$$

для любых вещественных $t, \theta, \theta', \theta''$.

Можно, далее, построить функцию $F(t, \theta)$, определенную для всех вещественных t, θ, обладающую периодом 2π по отношению к θ и удовлетворяющую неравенствам

$$|F(t,\theta)| \leqslant \delta^*(\varepsilon), \quad |F(t,\theta') - F(t,\theta'')| \leqslant \eta^*(\varepsilon)|\theta' - \theta''|, \tag{I.80}$$

в которых $\delta^*(\varepsilon)$, $\eta^*(\varepsilon)$ стремятся к нулю вместе с ε таким образом, что всякое решение уравнения (I.1′), принадлежащее к многообразию S_t, представимо в виде

$$x = f(t, \theta(t)), \tag{I.81}$$

где $\theta = \theta(t)$ есть некоторое решение уравнения

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon\omega + \varepsilon F(t,\theta), \tag{I.82}$$

и, наоборот, выражение (I.81), в котором $\theta(t)$ есть решение уравнения (I.82), всегда является решением (I.1′), принадлежащим к многообразию S_t.

2. Если $\{\tau_m\}$ есть последовательность вещественных чисел, для которой

$$X(t + \tau_m, x) - X(t, x) \to 0, \quad m \to \infty,$$

равномерно по отношению к (t, x) $(-\infty < t < \infty, x \in D_\varrho)$, то тогда равномерно по отношению к (t, θ) имеем

$$f(t + \tau_m, \theta) - f(t, \theta) \to 0, \quad F(t + \tau_m, \theta) - F(t, \theta) \to 0.$$

3. Пусть $x = x(t)$ представляет любое решение уравнения (I.1′), удовлетворяющее при некотором t_0 соотношению вида

$$x(t_0) \in D_{\sigma_0}.$$

Тогда, если вещественные части всех $n - 1$ вышеупомянутых характеристических показателей отрицательны, расстояние $\varrho\{x(t), S_t\}$ от точки $x(t)$ до множества S_t экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$.

Если все эти вещественные части положительны, можно найти такое $t_1 > t_0$, что

$$x(t_1) \overline{\in} D_{\sigma_1}. \tag{I.83}$$

Если s рассматриваемых вещественных частей отрицательны, а остальные $n - 1 - s$ положительны, в области D_{σ_0} существует $(1 + s)$-мерное многообразие $\mathfrak{M}_{t_0}$, такое, что из соотношения $x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0}$ вытекает экспоненциальное стремление к нулю расстояния $\varrho\{x(t), S_t\}$ (при $t \to \infty$), а из соотношения $x(t_0) \overline{\in} \mathfrak{M}_{t_0}$ вытекает справедливость соотношения (I.83).

* * *

Для упрощения формулировки теоремы IV, представляющей собой аналог теорем II, III для случая 3 из § 4, введем ряд сокращающих обозначений и определений.

Так, условимся обозначать через a совокупность $(a_1, \ldots, a_p)$ p вещественных переменных, через θ — совокупность $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ r вещественных переменных. Для точек $\{a\}$, $\{\theta\}$ будем использовать обычные евклидовы нормы $|\ldots|$. Обозначим множество всех θ через Ω. Если U есть некоторое множество

точек a, тогда через ΩU условимся обозначать множество точек (θ, a), для которых

$$\theta \in \Omega, \quad a \in U.$$

Мы будем рассматривать функции $\Phi(a)$, $\Phi(\theta, a)$, $\Phi(t, \theta, a)$, «значениями» которых при фиксированных аргументах являются совокупности r чисел, и функции $A(a)$, $A(\theta, a)$, $A(t, \theta, a)$, «значениями» которых являются совокупности p чисел.

Предполагается, что эти функции определены для всех вещественных t и для всех (θ, a) из множества ΩU_ϱ, где U_ϱ есть некоторая область точек a, о которой будет упомянуто ниже в тексте теоремы IV.

Кроме того, предполагается, что переменные θ_k — «координаты» θ — являются угловыми в том смысле, что $\Phi(\theta, a)$, $\Phi(t, \theta, a)$, $A(\theta, a)$, $A(t, \theta, a)$ обладают по отношению к ним периодом 2π.

Перейдем теперь к формулировке нашей теоремы.

Теорема IV. *Пусть выполняются следующие условия:*

а) уравнение

$$\frac{da}{d\tau} = A(a) \tag{I.84}$$

имеет постоянное решение $a = a_0$;

б) вещественные части всех p характеристических показателей, соответствующих этому решению для уравнения (I.84), *отличны от нуля;*

в) можно указать такую ϱ-окрестность U_ϱ точки a_0, что в области

$$-\infty < t < \infty, \quad \theta \in \Omega, \quad a \in U_\varrho$$

функции

$$A(t, \theta, a), \quad \Phi(t, \theta, a)$$

и их частные производные первого порядка по (θ, a) будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к (θ, a);

г) в каждой точке области ΩU_ϱ равномерно по отношению к t

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} A(t, \theta, a)\, dt \to A(a), \quad \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \Phi(t, \theta, a)\, dt \to \Phi(a), \quad T \to \infty.$$

Тогда можно указать такие положительные ε_0, σ_0, σ_1 (причем $\sigma_0 < \sigma_1 < \varrho$), что для каждого положительного ε, меньшего ε_0, уравнения (I.50)

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon\Phi(t, \theta, a), \quad \frac{da}{dt} = \varepsilon A(t, \theta, a)$$

имеют одно-единственное интегральное многообразие S_t, лежащее для всех вещественных t в области ΩU_{σ_0}.

Указанное интегральное многообразие при любом ε, таком, что $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, обладает следующими свойствами.

1. Многообразие S_t представляется уравнениями вида

$$a = f_a(t, \Psi), \quad \theta = \Psi + f_\theta(t, \Psi), \tag{I.85}$$

где f_a, f_θ со значениями соответственно из U_{σ_0}, Ω определены для всех вещественных t и для всех Ψ из Ω и обладают периодом 2π по отношению к координатам Ψ.

Можно найти такие функции $\delta(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$, стремящиеся к нулю вместе с ε, что

$$\begin{aligned} &|f_a(t,\Psi)-a_0|\leqslant\delta(\varepsilon),\quad |f_a(t,\Psi')-f_a(t,\Psi'')|\leqslant\eta(\varepsilon)|\Psi'-\Psi''|,\\ &|f_\theta(t,\Psi)|\leqslant\delta(\varepsilon),\quad |f_\theta(t,\Psi')-f_\theta(t,\Psi'')|\leqslant\eta(\varepsilon)|\Psi'-\Psi''| \end{aligned} \tag{I.86}$$

для

$$-\infty<t<\infty,\quad \Psi,\Psi',\Psi''\in\Omega.$$

Можно далее построить функцию $F(t,\Psi)$ со значениями из Ω, определенную в области $(-\infty<t<\infty,\ \Psi\in\Omega)$, обладающую периодом 2π по отношению к координатам Ψ и удовлетворяющую неравенствам типа (I.86)

$$|F(t,\Psi)|\leqslant\delta(\varepsilon),\quad |F(t,\Psi')-F(t,\Psi'')|\leqslant\eta(\varepsilon)|\Psi'-\Psi''|$$

таким образом, чтобы для решений уравнений (I.50), лежащих на интегральном многообразии S_t, переменные Ψ удовлетворяли уравнению вида

$$\frac{d\Psi}{dt}=\varepsilon\omega+\varepsilon F(t,\Psi),$$

в котором

$$\omega=\Phi(a_0).$$

Если уравнения (I.50) имеют вид (I.53), т. е. если

$$\Phi(t,\theta,a)=\Phi(\theta+\nu t,a),\quad A(t,\theta,a)=A(\theta+\nu t,a), \tag{I.87}$$

где $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_r)$ и $\nu_1,\dots,\nu_r$ — постоянные, то f_a, f_θ, F можно представить в форме

$$f_a(t,\theta)=f_a(\theta+\nu t),\quad f_\theta(t,\theta)=f_\theta(\theta+\nu t),\quad F(t,\theta)=F(\theta+\nu t). \tag{I.88}$$

2. Если $\{\tau_m\}$ есть последовательность вещественных чисел, для которой

$$A(t+\tau_m,\theta,a)-A(t,\theta,a)\to 0,\quad \Phi(t+\tau_m,\theta,a)-\Phi(t,\theta,a)\to 0$$

равномерно по отношению к (t,θ,a), то тогда равномерно к (t,θ)

$$\begin{gathered} f_a(t+\tau_m,\theta)-f_a(t,\theta)\to 0,\quad f_\theta(t+\tau_m,\theta)-f_\theta(t,\theta)\to 0,\\ F(t+\tau_m,\theta)-F(t,\theta)\to 0. \end{gathered}$$

3. Пусть $a=a(t)$, $\theta=\theta(t)$ представляют любое решение уравнений (I.50), удовлетворяющее при некотором t_0 соотношению вида $a(t_0)\in U_{\sigma_0}$.

Тогда, если вещественные части всех p характеристических показателей отрицательны, расстояние d_t от точки $\{\theta(t),a(t)\}$ до множества S_t экспоненциально стремится к нулю при $t\to\infty$.

Если же все эти вещественные части положительны, можно найти такое $t_1>t_0$, что

$$a(t_1)\overline{\in}U_{\sigma_1}. \tag{I.89}$$

Если s рассматриваемых вещественных частей отрицательны, а остальные $p-s$ положительны, в области ΩU_{σ_0} существует $(r+s)$-мерное многообразие $\mathfrak{M}_{t_0}$, такое, что из соотношения $\{\theta(t_0),a(t_0)\}\in\mathfrak{M}_{t_0}$ вытекает экспоненциальное стремление к нулю (при $t\to\infty$) расстояния d_t, а из соотношения $\{\theta(t_0),a(t_0)\}\overline{\in}\mathfrak{M}_{t_0}$ вытекает справедливость соотношения (I.89).

* * *

Ввиду ранее упомянутых свойств почти периодичности мы можем сделать к теоремам III, IV такие же замечания, как и к теореме II.

Следствие I. Если функции $X(t,x)$, $A(t,\theta,a)$, $B(t,\theta,a)$ обладают по отношению к t периодом T (T — некоторая постоянная), то представления (I.78), (I.85) интегральных многообразий S_t оказываются периодическими с периодом T. Функция $F(t,\theta)$ также будет обладать по отношению к t периодом T.

В рассматриваемом случае периодичности условия ε теорем III и IV могут быть заменены соответственно условиями

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)\,dt = X_0(x) \quad \text{для теоремы III,}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T A(t,\theta,a)\,dt = A(a), \quad \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(t,\theta,a)\,dt = \Phi(a) \quad \text{для теоремы IV.}$$

Следствие II. Если функции $X(t,x)$, $A(t,\theta,a)$, $\Phi(t,\theta,a)$ являются почти периодическими функциями t для каждой точки области D_ϱ или соответственно области ΩU_ϱ, то представления (I.78), (I.85) интегральных многообразий являются почти периодическими. Функция $F(t,\theta)$ также будет почти периодической.

В рассматриваемом случае условия ε теорем III и IV могут быть заменены соответственно условиями

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)\,dt = X_0(x) \quad \text{для теоремы III,}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(t,\theta,a)\,dt = A(a), \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Phi(t,\theta,a)\,dt = \Phi(a) \quad \text{для теоремы IV.}$$

Закончив несколько пространные формулировки теорем II, III, IV, представляющие, по существу, резюме большей части нашего исследования, перейдем теперь к их доказательству.

§ 6. Доказательство теорем II, III и IV. Заметим прежде всего, что теорема II есть частный случай теоремы IV, когда в последней положено $r=0$, $p=n$.

Нам остается, следовательно, доказать теоремы III, IV. Покажем, что в свою очередь обе эти теоремы являются частными случаями одного более общего утверждения, для чего преобразуем наши основные дифференциальные уравнения (I.1′), (I.50) соответственно для теорем III, IV к одной общей форме.

Начнем с дифференциального уравнения (I.1′) для теоремы III и заметим, что в силу условия a этой теоремы уравнения (I.76) имеют периодическое решение (I.77) с некоторым периодом $2\pi/\omega$. Составим соответствующие

уравнения в вариациях[1]:

$$\frac{d\delta\xi}{d\tau} = X'_{0x}\{\xi(\omega\tau)\}\delta\xi, \tag{I.90}$$

представляющие собой систему однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, и обратим внимание на то, что, согласно условию *б* теоремы III, вещественные части всех $n-1$ характеристических показателей для системы уравнений (I.90) отличны от нуля (n-й характеристический показатель здесь всегда равен нулю).

Так как по определению (I.77) функции $\xi(\varphi)$ имеем тождественно

$$\omega\xi'(\varphi) = X_0\{\xi(\varphi)\}, \tag{I.91}$$

то, дифференцируя это соотношение по φ, можно убедиться, что при произвольной постоянной δu_0 выражение

$$\delta\xi = \xi'_\varphi(\omega\tau)\delta u_0$$

является решением уравнения в вариациях (I.90).

Принимая во внимание теоремы Флоке–Ляпунова о свойствах линейных дифференциальных однородных уравнений с периодическими коэффициентами, мы видим теперь, что посредством преобразования типа

$$\delta\xi_k = \xi'_k(\omega\tau)\delta u_0 + \sum_{q=1}^{n-1} A_{kq}(\omega\tau)\delta u_q, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{I.92}$$

в котором $A_{kq}(\varphi)$ — периодические функции φ с периодом 2π, обладающие непрерывными первыми производными, уравнения (I.90) могут быть приведены к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\delta u_0}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\delta u_k}{d\tau} = \sum_{q=1}^{n-1} H_{kq}\delta u_q, \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{I.93}$$

такой, что корни уравнения

$$\det\|pI_{kq} - H_{kq}\| = 0, \quad I_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q, \\ 0, & k \neq q, \end{cases} \tag{I.94}$$

являются характеристическими показателями для системы уравнений (I.90). В преобразовании (I.92) определитель

$$\begin{vmatrix} \xi'_1(\varphi), \ldots, \xi'_n(\varphi) \\ A_{11}(\varphi), \ldots, A_{n,1}(\varphi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1,n-1}(\varphi), \ldots, A_{n,n-1}(\varphi) \end{vmatrix} \tag{I.95}$$

отличен от нуля для всех φ, и так как он является непрерывной периодической функцией φ, то можно найти положительную постоянную, которая была бы меньше модуля этого определителя при всех φ.

[1] Следует иметь в виду, что на основании условий *в*, *г* теоремы III функция $X_0(x)$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные первого порядка в области D_ϱ.

Удобно опять возвратиться к принятой нами системе матрично-векторных обозначений. Введем для этого матрицу $A(\varphi)=\|A_{kq}(\varphi)\|$ из n строк и $n-1$ столбцов, квадратную матрицу $(n-1)$-го порядка $H=\|H_{kq}\|$ и вектор δu с компонентами $\delta u_1,\dots,\delta u_{n-1}$.

Тогда преобразование (I.92) и уравнения (I.93) представятся соответственно в виде

$$\delta\xi=\xi'(\omega\tau)\delta u_0+A(\omega\tau)\delta u, \tag{I.96}$$

$$\frac{d\delta u_0}{d\tau}=0,\quad \frac{d\delta u}{d\tau}=H\delta u. \tag{I.97}$$

Подставив (I.96) в уравнение (I.90), получим на основании (I.97) следующее тождество:

$$\frac{\partial A(\varphi)}{\partial\varphi}\omega+A(\varphi)H=X'_{0x}\{\xi(\varphi)\}. \tag{I.98}$$

Установив это тождество, возвратимся к нашим уравнениям (I.1′) и запишем их в виде

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X_0(x)+\varepsilon Z(t,x), \tag{I.99}$$

где

$$Z(t,x)=X(t,x)-X_0(x). \tag{I.100}$$

Введем сюда новые переменные φ, $b=(b_1,\dots,b_{n-1})$ посредством формул

$$x=\xi(\varphi)+A(\varphi)b. \tag{I.101}$$

Подставив (I.101) в (I.99), имеем

$$\begin{aligned}\xi'(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}A'(\varphi)b+A(\varphi)\frac{db}{dt}=\\ =\varepsilon X_0\{\xi+Ab\}+\varepsilon Z\{t,\xi+Ab\}=\varepsilon X_0\{\xi\}+\varepsilon X'_{0x}\{\xi\}Ab+\\ +\varepsilon[X_0\{\xi+Ab\}-X_0\{\xi\}-X'_{0x}\{\xi\}Ab]+\varepsilon Z\{t,\xi+Ab\},\end{aligned}$$

откуда вследствие (I.91), (I.98) получаем

$$\begin{aligned}\{\xi'(\varphi)+A'(\varphi)b\}\left(\frac{d\varphi}{dt}-\varepsilon\omega\right)+A(\varphi)\left\{\frac{db}{dt}-\varepsilon Hb\right\}=\\ =\varepsilon\left[X_0\{\xi+Ab\}-X_0\{\xi\}-X'_{0x}\{\xi\}Ab\right]+\varepsilon Z\{t,\xi+Ab\}.\end{aligned} \tag{I.102}$$

Это соотношение, рассматриваемое как система линейных неоднородных уравнений с n неизвестными,

$$\frac{d\varphi}{dt}-\varepsilon\omega,\quad \left\{\frac{db}{dt}-\varepsilon Hb\right\}_1,\dots,\left\{\frac{db}{dt}-\varepsilon Hb\right\}_{n-1}, \tag{I.103}$$

обладает разрешающим определителем, который совпадает с определителем (I.95) при $b=0$.

Решая (I.102) относительно (I.103), находим

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}&=\varepsilon\omega+\varepsilon W(t,\varphi,b),\\ \frac{db}{dt}&=\varepsilon Hb+\varepsilon B(t,\varphi,b),\end{aligned} \tag{I.104}$$

где

$$\begin{aligned} W(t,\varphi,b) &= K(\varphi,b)[X_0\{\xi(\varphi)+A(\varphi)b\} - X_0\{\xi(\varphi)\} - \\ &\quad - X'_{0x}\{\xi(\varphi)\}A(\varphi)b] + L(\varphi,b)Z\{t,\xi(\varphi)+A(\varphi)b\}, \\ B(t,\varphi,b) &= M(\varphi,b)[X_0\{\xi(\varphi)+A(\varphi)b\} - X_0\{\xi(\varphi)\} - \\ &\quad - X'_{0x}\{\xi(\varphi)\}A(\varphi)b] + N(\varphi,b)Z\{t,\xi(\varphi)+A(\varphi)b\}. \end{aligned} \tag{I.105}$$

Здесь K, L, M, N — рациональные функции b, регулярные при $b=0$. Их коэффициенты при степенях b являются непрерывными периодическими функциями φ с периодом 2π и обладают непрерывными первыми производными по φ. Положим для сокращения

$$W(\varphi,b) = K(\varphi,b)[X_0\{\xi(\varphi)+A(\varphi)b\} - X_0\{\xi(\varphi)\} - X'_{0x}\{\xi(\varphi)\}A(\varphi)b], \tag{I.106}$$

$$B(\varphi,b) = M(\varphi,b)[X_0\{\xi(\varphi)+A(\varphi)b\} - X_0\{\xi(\varphi)\} - X'_{0x}\{\xi(\varphi)\}A(\varphi)b].$$

Пусть далее, подобно обозначениям в тексте теоремы IV, символ ΩU_{ϱ_0} обозначает область точек (φ,b), для которых $|b|<\varrho_0$.

Нетрудно видеть, что можно найти такое положительное число ϱ_0, чтобы в области ΩU_{ϱ}

$$|A(\varphi)b| < \varrho$$

и чтобы в этой области функции $K(\varphi,b)$, $L(\varphi,b)$, $M(\varphi,b)$, $N(\varphi,b)$ были ограничены и непрерывны вместе со всеми частными производными первого порядка. Но тогда из условий *в*, *г* и формул (I.104), (I.105) вытекает, что функции

$$W(t,\varphi,b), \quad B(t,\varphi,b)$$

и их частные производные первого порядка по (φ,b) будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к (φ,b) в области

$$-\infty < t < \infty, \quad (\varphi,b) \in \Omega U_{\varrho_0}. \tag{I.107}$$

Кроме того, имеем в любой точке этой области равномерно по отношению к t

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} W(t,\varphi,b)\,dt \to W(\varphi,b), \quad \frac{1}{T}\int_t^{t+T} B(t,\varphi,b)\,dt \to B(\varphi,b). \tag{I.108}$$

Но, как видно из (I.106), функции $W(\varphi,b)$, $B(\varphi,b)$ при $b=0$ обращаются в нуль:

$$W(\varphi,0)=0, \quad B(\varphi,0)=0 \tag{I.109}$$

вместе со своими частными производными первого порядка.

Таким образом, взяв произвольное положительное $\sigma<\varrho_0$, приходим к неравенствам, справедливым в области ΩU_σ:

$$\begin{aligned} |W(\varphi',b') - W(\varphi'',b'')| &\leqslant \eta(\sigma)\{|\varphi'-\varphi''| + |b'-b''|\}, \\ |B(\varphi',b') - B(\varphi'',b'')| &\leqslant \eta(\sigma)\{|\varphi'-\varphi''| + |b'-b''|\}, \end{aligned} \tag{I.110}$$

в которых $\eta(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to 0$.

Ясно, наконец, что функции $W(t,\varphi,b)$, $W(\varphi,b)$, $B(t,\varphi,b)$, $B(\varphi,b)$ являются периодическими с периодом 2π по отношению к φ.

Итак, посредством замены переменных (I.101) уравнения (I.1′) при условиях теоремы III могут быть приведены к виду уравнений (I.104), в которых ω — некоторое положительное число; H — постоянная матрица с характеристическими значениями (корнями уравнения (I.94)), имеющими все отличные от нуля вещественные части, а функции W, B обладают вышеперечисленными свойствами.

Покажем теперь, что уравнения (I.50) при условиях теоремы IV приводятся к аналогичной форме.

Возьмем, в самом деле, эти последние уравнения и введем новые переменные φ, b посредством формул

$$b = a - a_0, \quad \varphi = \theta - Sb, \quad S = \Phi'(a_0)\{A'_a(a_0)\}^{-1}. \tag{I.111}$$

Здесь следует лишь иметь в виду, что, в отличие от предыдущего случая, φ представляет не одну переменную, а их совокупность: $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$.

Запишем уравнения (I.50) в виде

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a) + \varepsilon A^*(t,\theta,a), \quad \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon\Phi(a) + \varepsilon\Phi^*(t,\theta,a), \tag{I.112}$$

где

$$A^*(t,\theta,a) = A(t,\theta,a) - A(a), \quad \Phi^*(t,\theta,a) = \Phi(t,\theta,a) - \Phi(a), \tag{I.113}$$

и воспользуемся формулами (I.111). Получим

$$\begin{aligned}
&\frac{db}{dt} = \varepsilon A(a_0+b) + \varepsilon A^*\{t, \varphi + Sb, a_0 + b\},\\
&\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\Phi(a_0+b) - \varepsilon SA(a_0+b) + \varepsilon\Phi^*\{t,\varphi+Sb,a_0+b\} -\\
&\qquad\qquad - \varepsilon SA^*\{t,\varphi+Sb,a_0+b\}.
\end{aligned} \tag{I.114}$$

Положим для сокращения

$$\begin{aligned}
&A'_a(a_0) = H, \quad \Phi(a_0) = \omega,\\
&A(a_0+b) - A'_a(a_0)b = A(a_0+b) - A(a_0) - A'_a(a_0)b = B(b),\\
&\Phi(a_0+b) - \Phi(a_0) - SA(a_0+b) =\\
&\qquad = \Phi(a_0+b) - \Phi(a_0) - SA'(a_0)b - SB(b) =\\
&\qquad = \Phi(a_0+b) - \Phi(a_0) - \Phi'(a_0)b - SB(b) = W(b),\\
&B(b) + A^*\{t,\varphi+Sb,a_0+b\} = B(t,\varphi,b),\\
&W(b) + \Phi^*\{t,\varphi+Sb,a_0+b\} - SA^*\{t,\varphi+Sb,a_0+b\} = W(t,\varphi,b).
\end{aligned} \tag{I.115}$$

Тогда уравнения (I.114) могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\omega + \varepsilon W(t,\varphi,b),\\
&\frac{db}{dt} = \varepsilon Hb + \varepsilon B(t,\varphi,b).
\end{aligned} \tag{I.116}$$

Пусть опять U_ϱ обозначает область точек $b=(b_1,\dots,b_p)$, для которых $|b|<\varrho$; Ω — пространство всех $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_r)$; ΩU_ϱ — область точек (φ,b), для которой $b\in U_\varrho$. Мы можем сказать тогда на основании (I.113), (I.115) и условий теоремы IV, что функции $W(t,\varphi,b)$, $B(t,\varphi,b)$ определены в области

$$-\infty<t<\infty,\quad (\varphi,b)\in\Omega U_\varrho \tag{I.107'}$$

и обладают по отношению к координатам φ периодом 2π.

Ясно также, что эти функции и их частные производные первого порядка по (φ,b) будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к (φ,b) в области (I.107'). Кроме того, в каждой точке

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} W(t,\varphi,b)\,dt\to W(b),\quad \frac{1}{T}\int_t^{t+T} B(t,\varphi,b)\,dt\to B(b),\quad T\to\infty, \tag{I.117}$$

равномерно по отношению к t.

Но, как видно из (I.115), функции $W(b)$, $B(b)$ при $b=0$ обращаются в нуль:

$$W(0)=0,\quad B(0)=0 \tag{I.118}$$

вместе со своими частными производными первого порядка. Поэтому, взяв произвольное положительное $\sigma<\varrho$, имеем в области U_σ

$$|W(b')-W(b'')|\leqslant\eta(\sigma)|b'-b''|,\quad |B(b')-B(b'')|\leqslant\eta(\sigma)|b'-b''|, \tag{I.119}$$

где

$$\eta(\sigma)\to 0\quad\text{при }\sigma\to 0.$$

Заметим, наконец, что в уравнениях (I.116) ω представляет набор r постоянных: $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_r)$; H есть p-мерная матрица с характеристическими значениями, все вещественные части которых отличны от нуля.

Итак, уравнения (I.1') в случае теоремы III и уравнения (I.50) в случае теоремы IV соответственно посредством замены переменных (I.101), (I.111) могут быть приведены к одной общей форме (I.116), в которой возможны любые значения размерностей r, $p=0,1,2,\dots$.

Поэтому на основании вышеупомянутых свойств выражений ω, H, W, B мы видим, что наши теоремы будут доказаны, как только будет установлена справедливость следующей леммы.

Лемма I. *Пусть в уравнениях* (I.116)

а) $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_r)$, *где* $\omega_1,\dots,\omega_r$ — *постоянные*;

б) H — *p-мерная постоянная матрица, все характеристические значения которой имеют вещественные части, отличные от нуля*;

в) функции $W(t,\varphi,b)$, $B(t,\varphi,b)$ *обладают по отношению к координатам* φ *периодом* 2π. *Они определены в области* (I.107'); *при некотором положительном* ϱ *и в этой области они вместе с их частными производными первого порядка по* (φ,b) *будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к* (φ,b);

г) в каждой точке области ΩU_ϱ *выполняются предельные соотношения* (I.108) *равномерно по отношению к* t;

д) при любом положительном $\sigma < \varrho$ *в области* ΩU_σ *выполняются неравенства* (I.110);

е) везде на Ω *имеют место соотношения* (I.109).

Тогда можно указать такие положительные ε_0, σ_0, σ_1 *(причем* $\sigma_0 < \sigma_1 < \varrho$*), что для каждого положительного* ε*, меньшего* ε_0*, уравнения* (I.116) *имеют в области* ΩU_{σ_0} *одно-единственное интегральное многообразие* S_t*. Это интегральное многообразие обладает всеми свойствами*[1] *1, 2, 3, сформулированными в тексте теоремы* IV.

Таким образом, чтобы завершить доказательство наших теорем II, III, IV, нам остается доказать лемму I, к чему мы сейчас и приступим.

§ 7. Доказательство леммы I. Рассмотрим некоторую функцию $f(t, x)$, определенную для всех вещественных t и для всех x из множества E. Допустим, что E есть компактное множество некоторого метрического пространства и что в каждой точке E равномерно по отношению к t имеем

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t,x)\,dt \to 0, \quad T \to \infty. \tag{I.120}$$

Кроме того, предположим, что можно указать такие положительные постоянные M, λ, что для всех вещественных t и для всех x, x', x'' из E имеют место неравенства

$$|f(t,x)| \leqslant M, \quad |f(t,x') - f(t,x'')| \leqslant \lambda\varrho(x', x''), \tag{I.121}$$

в которых $\varrho(x', x'')$ обозначает расстояние между точками x', x''. Нетрудно заметить, что из принятых условий вытекает, что соотношение (I.120) имеет место равномерно не только по отношению к t, но и по отношению к (t, x). Поэтому можно построить такую функцию $\varepsilon(T)$, стремящуюся к нулю при $T \to \infty$, что

$$\left|\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t,x)\,dt\right| \leqslant \varepsilon(T), \quad -\infty < t < \infty, \quad x \in E. \tag{I.122}$$

Возьмем теперь произвольное положительное η и построим функцию

$$f_\eta(t,x) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\eta(t-\tau)} f(\tau, x)\,d\tau. \tag{I.123}$$

Имеем

$$f_\eta(t,x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta z} f(t-z,x)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta n T} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-z,x)\mathrm{e}^{-\eta(z-nT)}\,dz$$

[1] Мы подразумеваем здесь их тривиальные аналоги для уравнений (I.116). Так, например, в соответствующих формулировках (θ, a) следует заменить на (φ, b); функции Φ, A — на W, B; характеристические показатели — на характеристические значения матрицы H и т. п.

и поэтому на основании (I.121) получаем

$$|f_\eta(t,x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-z,x)\,dz \right| +$$

$$+ M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \int_{nT}^{(n+1)T} (1 - e^{-\eta(z-nT)})\,dz \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \left| \int_{nT-z}^{nT-z+T} f(t,x)\,dt \right| + MT,$$

или ввиду (I.122)

$$|f_\eta(t,x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \varepsilon(T)T + MT = \frac{T\varepsilon(T)}{1 - e^{-\eta T}} + MT. \tag{I.124}$$

До сих пор величина T была произвольной. Возьмем теперь T как функцию η, определяемую уравнением

$$1 - e^{-\eta T} = \varepsilon(T).$$

Так как $\varepsilon(T) \to 0$ при $T \to \infty$, то нетрудно видеть, что для T_η, определяемой этим уравнением, выполняется соотношение $\eta T_\eta \to 0$ при $\eta \to 0$.

Положим

$$(M+1)\eta T_\eta = \zeta(\eta).$$

Тогда из (I.123), (I.124) можно убедиться в том, что для рассматриваемой функции $f(t,x)$ имеет место неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{t} e^{-\eta(t-\tau)} f(\tau,x)\,d\tau \right| \leqslant \frac{\zeta(\eta)}{\eta}, \quad -\infty < t < \infty, \quad x \in E, \tag{I.125}$$

в котором

$$\zeta(\eta) \to 0 \quad \text{при } \eta \to 0. \tag{I.126}$$

Применим теперь полученный результат для случая функций

$$W^*(t,\varphi,b) = W(t,\varphi,b) - W(\varphi,b), \quad B^*(t,\varphi,b) = B(t,\varphi,b) - B(\varphi,b), \tag{I.127}$$

приняв за множество E область ΩU_ϱ.

Поскольку эти функции периодические с периодом 2π по отношению к φ, можно, очевидно, представлять Ω как r-мерный тор, и тогда $E = \Omega U_\varrho$ будет компактной областью в метрическом пространстве, являющемся топологическим произведением Ω и p-мерного евклидова пространства.

Заметим далее, что условия *в*, *г* леммы I обеспечивают выполнение функциями (I.127) условий (I.120), (I.121). Поэтому можно построить функцию $\zeta(\eta)$ со свойством (I.126) таким образом, чтобы для произвольного положительного η

$$|W_\eta^*(t,\varphi,b)| \leqslant \frac{\zeta(\eta)}{\eta}, \quad |B_\eta^*(t,\varphi,b)| \leqslant \frac{\zeta(\eta)}{\eta}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (\varphi,b) \in \Omega U_\varrho, \tag{I.128}$$

где

$$W_\eta^*(t,\varphi,b)=\int\limits_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\eta(t-\tau)}W^*(\tau,\varphi,b)\,d\tau,$$
$$B_\eta^*(t,\varphi,b)=\int\limits_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\eta(t-\tau)}B^*(\tau,\varphi,b)\,d\tau. \tag{I.129}$$

Введем теперь по аналогии с определением (I.26) из доказательства теоремы I функцию

$$\Delta_a(b)=\begin{cases}A_a\left\{1-\dfrac{|b|^2}{a^2}\right\}^2, & |b|\leqslant a,\\ 0, & |b|>a,\end{cases} \tag{I.130}$$

где a — некоторое данное достаточно малое число; A_a определяется условием нормирования

$$\int\limits_{U_\varrho}\Delta_a(b)\,db=1,\quad db=db_1\ldots db_p. \tag{I.131}$$

Построим еще функцию $\delta_a(\Psi)$ одной вещественной переменной, задав ее на интервале $(-\pi,\pi)$ с помощью соотношений

$$\delta_a(\Psi)=\Phi_a\left\{1-\frac{\Psi^2}{a^2}\right\}^2,\quad |\Psi|\leqslant a,$$
$$\delta_a(\Psi)=0,\qquad |\Psi|>a, \tag{I.132}$$
$$\Phi_a\int\limits_{-a}^{a}\left\{1-\frac{\Psi^2}{a^2}\right\}^2 d\Psi=1,\quad a<\pi,$$

и распространив область ее определения на всю вещественную ось с помощью условия периодичности с периодом 2π.

Положим по определению

$$\delta_a(\varphi)=\prod_{k=1}^{r}\delta_a(\varphi_k) \tag{I.133}$$

и заметим, что в силу (I.132)

$$\int\limits_{\Omega}\delta_a(\varphi)\,d\varphi=1, \tag{I.134}$$

где $d\varphi=d\varphi_1\ldots d\varphi_r$, причем интегрирование по Ω определяется как интегрирование по каждой из координат φ_k от 0 до 2π.

Введя эти функции, построим выражения

$$u(t,\varphi,b)=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\varrho}\delta_a(\varphi-\varphi')\Delta_a(b-b')W_\eta^*(t,\varphi',b')\,d\varphi'\,db',$$
$$v(t,\varphi,b)=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\varrho}\delta_a(\varphi-\varphi')\Delta_a(b-b')B_\eta^*(t,\varphi',b')\,d\varphi'\,db', \tag{I.135}$$

очевидно обладающие по отношению к координатам φ периодом 2π.

Заметим, что по своему построению функция

$$\delta_a(\varphi-\varphi')\Delta_a(b-b') \tag{I.136}$$

обладает частными производными по (φ,b) до второго порядка включительно, причем как сама функция (I.136), так и все ее частные производные до второго порядка включительно ограничены и по норме не превосходят некоторой величины $G(a)$, вообще стремящейся к бесконечности при $a\to 0$. Отсюда на основании (I.128) можем заключить, что функции (I.135) и все их частные производные по (φ,b) до второго порядка включительно ограничены по норме на множестве[1] $R\Omega U_\varrho$ величиной $G(a)(\zeta(\eta)/\eta)$.

До сих пор a и η были произвольны. Возьмем теперь в качестве a и η некоторые функции a_ε, η_ε параметра ε таким образом, что

$$a_\varepsilon\to 0,\quad \eta_\varepsilon\to 0,\quad \varepsilon G(a_\varepsilon)\frac{\zeta(\eta_\varepsilon)}{\eta_\varepsilon}\to 0,\quad G(a_\varepsilon)\zeta(\eta_\varepsilon)\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0. \tag{I.137}$$

Фиксируем некоторое положительное $\varrho_0<\varrho$ и возьмем ε^* столь малым, чтобы для $0<\varepsilon<\varepsilon^*$ мы имели $\varrho_0+a<\varrho$. Тогда по определению (I.130), (I.131) функции $\Delta(b)$ видим, что

$$\int\limits_{U_\varrho}\Delta_a(b-b')\,db'=1,\quad b\in U_\varrho,\quad 0<\varepsilon<\varepsilon^*. \tag{I.138}$$

Заметим теперь, что из (I.129), (I.138) имеем тождественно

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\eta u=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\varrho}\delta_a(\varphi-\varphi')\Delta_a(b-b')W^*(t,\varphi',b')\,d\varphi'\,db'.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\eta u-W^*(t,\varphi,b)=$$
$$=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\varrho}\delta_a(\varphi-\varphi')\Delta_a(b-b')\{W^*(t,\varphi',b')-W^*(t,\varphi,b)\}\,d\varphi'\,db' \tag{I.139}$$

для

$$(t,\varphi,b)\in R\Omega U_{\varrho_0},\quad 0<\varepsilon<\varepsilon^*,$$

[1] Для сокращения мы здесь вещественную ось $(-\infty,\infty)$ обозначаем через R, так что $R\Omega U_\varrho$ обозначает множество точек (t,φ,b), для которых $-\infty<t<\infty$, $\varphi\in\Omega$, $b\in U_\varrho$.

поскольку ввиду (I.138) и периодичности функции $\delta_a(\varphi)$

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\varrho} \delta_a(\varphi-\varphi')\Delta_a(b-b')\,d\varphi'\,db' = \int\limits_{\Omega} \delta_a(\varphi-\varphi')\,d\varphi' = \int\limits_{\Omega} \delta_a(\varphi')\,d\varphi' = 1.$$

С другой стороны, на основании условий *в*, *г* убеждаемся, что можно указать такое положительное λ, чтобы выполнялось неравенство

$$|W^*(t,\varphi',b') - W^*(t,\varphi,b)| \leqslant \lambda\{|\varphi'-\varphi| + |b'-b|\},$$
$$(t,\varphi,b),(t,\varphi',b') \in R\Omega U_\varrho.$$

Далее, благодаря периодичности по отношению к φ интегрирование по φ'_k можно брать по любому интервалу длиной 2π, и потому, в частности, в качестве интервала интегрирования для φ'_k можем взять интервал $\varphi_k - \pi$, $\varphi_k + \pi$. При таком выборе разность координат $\varphi - \varphi'$ будет изменяться от $-\pi$ до π и, следовательно, $\delta_a(\varphi-\varphi')$ будет отлична от нуля только тогда, когда

$$|\varphi_k - \varphi'_k| \leqslant a, \quad k = 1,\ldots,r,$$

т. е. когда

$$|\varphi - \varphi'| < \sqrt{r}\,a.$$

Поэтому на множестве $R\Omega U_{\varrho_0}$ для $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ имеем неравенство

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u - W^*(t,\varphi,b)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(1+\sqrt{r})a \int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\varrho} \delta_a(\varphi-\varphi')\Delta_a(b-b')\,d\varphi'\,db' = \lambda(1+\sqrt{r})a. \quad \text{(I.140)}$$

Рассмотрим теперь частные производные

$$\frac{\partial}{\partial b_k}\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u - W^*(t,\varphi,b)\right\}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_s}\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u - W^*(t,\varphi,b)\right\} \qquad \text{(I.141)}$$

и заметим, с помощью интегрирования по частям в (I.139), что их можно представить соответственно в виде

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\varrho} \delta_a(\varphi-\varphi')\Delta_a(b-b')\left\{\frac{\partial W^*(t,\varphi',b')}{\partial b'_k} - \frac{\partial W^*(t,\varphi,b)}{\partial b_k}\right\} d\varphi'\,db',$$

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\varrho} \delta_a(\varphi-\varphi')\Delta_a(b-b')\left\{\frac{\partial W^*(t,\varphi',b')}{\partial \varphi'_s} - \frac{\partial W^*(t,\varphi,b)}{\partial \varphi_s}\right\} d\varphi'\,db'.$$

Но условия *в*, *г* нашей леммы показывают, что можно найти монотонно убывающую функцию $\xi(\varepsilon)$, стремящуюся к нулю при $\varepsilon \to 0$ таким образом, что

$$\left|\frac{\partial W^*(t,\varphi',b')}{\partial b'_k} - \frac{\partial W^*(t,\varphi,b)}{\partial b_k}\right| \leqslant \xi\{|\varphi'-\varphi| + |b'-b|\},$$

$$\left|\frac{\partial W^*(t,\varphi',b')}{\partial \varphi'_s} - \frac{\partial W^*(t,\varphi,b)}{\partial \varphi_s}\right| \leqslant \xi\{|\varphi'-\varphi| + |b'-b|\},$$

и потому, рассуждая, как было показано выше, убеждаемся, что по норме производные (I.141) на множестве $R\Omega U_{\varrho_0}$ будут меньше $\xi\{(1+\sqrt{r})a\}$ для $0<\varepsilon<\varepsilon^*$.

Так как при $\varepsilon\to 0$ имеем $a\to 0$, то мы видим, что функция (I.139) и ее частные производные по a, φ на множестве $R\Omega U_{\varrho_0}$ по норме будут меньше некоторой величины $\mu(\varepsilon)$, стремящейся к нулю вместе с ε.

Совершенно аналогично убеждаемся, что тем же свойством будет обладать и функция

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\eta v-B^*(t,\varphi,b).$$

С другой стороны, функции ηu, ηv и их частные производные по $(\varphi,\ b)$ ограничены по норме на множестве $R\Omega U_{\varrho_0}$ величиной $G(a)\eta$, стремящейся к нулю (см. (I.137)) при $\varepsilon\to 0$.

Итак, функции

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-W^*(t,\varphi,b)&=\frac{\partial u}{\partial t}-W(t,\varphi,b)+W(\varphi,b),\\ \frac{\partial v}{\partial t}-B^*(t,\varphi,b)&=\frac{\partial v}{\partial t}-B(t,\varphi,b)+B(\varphi,b)\end{aligned}\tag{I.142}$$

и их частные производные первого порядка по $(\varphi,\ b)$ ограничены по норме на множестве $R\Omega U_{\varrho_0}$ величиной $\alpha(\varepsilon)$, стремящейся к нулю вместе с ε.

Заметив это, возвратимся к основным для данной леммы уравнениям (I.116) и совершим замену переменных, полагая

$$\varphi=g+\varepsilon u(t,g,h),\quad b=h+\varepsilon v(t,g,h).\tag{I.143}$$

Дифференцируя (I.143) и подставляя в (I.116), получаем

$$\begin{aligned}&\frac{dg}{dt}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial h}\frac{dh}{dt}=-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon\omega+\varepsilon W\{t,g+\varepsilon u,h+\varepsilon v\},\\ &\frac{dh}{dt}+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial h}\frac{dh}{dt}=-\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t}+\varepsilon Hh+\varepsilon^2Hv+\varepsilon B\{t,g+\varepsilon u,h+\varepsilon v\},\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&\frac{dg}{dt}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial h}\frac{dh}{dt}=-\varepsilon\left\{\frac{\partial u}{\partial t}-W(t,g,h)+W(g,h)\right\}+\\ &\quad+\varepsilon\{W\{t,g+\varepsilon u,\ h+\varepsilon v\}-W(t,g,h)\}+\varepsilon W(g,h)+\varepsilon\omega,\\ &\frac{dh}{dt}+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial h}\frac{dh}{dt}=-\varepsilon\left\{\frac{\partial v}{\partial t}-B(t,g,h)+B(g,h)\right\}+\\ &\quad+\varepsilon^2Hv+\varepsilon\{B\{t,g+\varepsilon u,\ h+\varepsilon v\}-B(t,g,h)\}+\varepsilon B(g,h)+\varepsilon Hh.\end{aligned}\tag{I.144}$$

Возьмем теперь столь малое $\varepsilon_1<\varepsilon^*$, чтобы для всякого положительного ε, не превосходящего ε_1, было справедливо неравенство

$$\varepsilon\frac{\zeta(\eta)}{\eta}<\varrho-\varrho_1.$$

Тогда так как ввиду (I.128)

$$|\varepsilon v|\leqslant\varepsilon\frac{\zeta(\eta)}{\eta},$$

то при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $(t, g, h) \in R\Omega U_{\varrho_1}$ будем иметь

$$h + \varepsilon v \in U_{\varrho}.$$

Отсюда, принимая во внимание условие *в* леммы I, убеждаемся, что функции

$$W(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - W(t, g, h), \quad B(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - B(t, g, h)$$

и их частные производные первого порядка по (g, h) ограничены по норме на множестве $R\Omega U_{\varrho_0}$ некоторой функцией, стремящейся к нулю вместе с ε. Поэтому ввиду ранее упомянутых свойств функций (I.142) выражения

$$\begin{aligned} L_1(t, g, h, \varepsilon) &= W(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - W(t, g, h) - \\ &\quad - \frac{du}{dt} + W(t, g, h) - W(g, h), \\ L_2(t, g, h, \varepsilon) &= B(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - B(t, g, h) - \\ &\quad - \frac{\partial v}{\partial t} + B(t, g, h) - B(g, h) + \varepsilon H v \end{aligned} \tag{I.145}$$

и их частные производные первого порядка по (g, h) ограничены по норме на множестве $R\Omega U_{\varrho_0}$ некоторой функцией ε, стремящейся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Заметив это, представим уравнения (I.144) в форме, разрешенной относительно производных dg/dt, dh/dt, для чего рассмотрим матрицу, обратную матрице

$$\begin{vmatrix} 1_r + \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial g}, & \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial h} \\ \varepsilon \dfrac{\partial v}{\partial g}, & 1_p + \varepsilon \dfrac{\partial v}{\partial h} \end{vmatrix}, \tag{I.146}$$

где 1_r, 1_p представляют соответственно квадратные единичные матрицы r-го и p-го порядков. Так как в соответствии с ранее сказанным

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial g}, \quad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial h}, \quad \varepsilon \frac{\partial v}{\partial g}, \quad \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h}$$

и их частные производные первого порядка по (g, h) ограничены по норме на множестве $R\Omega U_{\varrho_0}$ функциями ε, стремящимися к нулю при $\varepsilon \to 0$, то можно указать такое положительное $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$, что для любого положительного $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ матрица, обратная матрице (I.146), существует везде на $R\Omega U_{\varrho_0}$ и может быть представлена в виде

$$\begin{vmatrix} 1_r + \mathfrak{A}_{11}, & \mathfrak{A}_{12} \\ \mathfrak{A}_{21}, & 1_p + \mathfrak{A}_{22} \end{vmatrix},$$

где

$$\mathfrak{A}_{11}(t, g, h, \varepsilon), \quad \mathfrak{A}_{12}(t, g, h, \varepsilon), \quad \mathfrak{A}_{21}(t, g, h, \varepsilon), \quad \mathfrak{A}_{22}(t, g, h, \varepsilon) \tag{I.147}$$

и их частные производные первого порядка по (g, h) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ равномерно на множестве $R\Omega U_{\varrho_0}$.

Имеем теперь из (I.144)

$$\frac{dg}{dt} = \varepsilon\omega + \varepsilon\Pi(t, g, h, \varepsilon), \quad \frac{dh}{dt} = \varepsilon H h + \varepsilon\Gamma(t, g, h, \varepsilon), \tag{I.148}$$

где

$$\Pi(t,g,h,\varepsilon)=W(g,h)+\mathfrak{A}_{11}(t,g,h,\varepsilon)\{\omega+W(g,h)+L_1(t,g,h,\varepsilon)\}+$$
$$+\mathfrak{A}_{12}(t,g,h,\varepsilon)\{Hh+B(g,h)+L_2(t,g,h,\varepsilon)\}+L_1(t,g,h,\varepsilon),$$
$$\Gamma(t,g,h,\varepsilon)=B(g,h)+L_2(t,g,h,\varepsilon)+ \tag{I.149}$$
$$+\mathfrak{A}_{21}(t,g,h,\varepsilon)\{\omega+W(g,h)+L_1(t,g,h,\varepsilon)\}+$$
$$+\mathfrak{A}_{22}(t,g,h,\varepsilon)\{Hh+B(g,h)+L_2(t,g,h,\varepsilon)\}.$$

Как видно из (I.149), функции Π и Γ определены для каждого положительного $\varepsilon<\varepsilon_0$ на множестве $R\Omega U_{\varrho_0}$, причем равномерно на этом множестве функции

$$\Pi(t,g,h,\varepsilon)-W(g,h),\quad \Gamma(t,g,h,\varepsilon)-B(g,h)$$

и их частные производные по $(g,\ h)$ стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$.

Принимая во внимание условия ∂, e доказываемой леммы, отсюда заключаем, что можно указать такие функции $M(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon,\sigma)$

$$M(\varepsilon)\to 0\quad\text{при }\varepsilon\to 0,\quad \lambda(\varepsilon,\sigma)\to 0\quad\text{при }\varepsilon\to 0,\quad \sigma\to 0,$$

что имеют место неравенства

$$|\Pi(t,g,0,\varepsilon)|\leqslant M(\varepsilon),\quad |\Gamma(t,g,0,\varepsilon)|\leqslant M(\varepsilon),$$
$$\varepsilon<\varepsilon_0,\quad t\in R,\quad g\in\Omega,$$
$$|\Pi(t,g',h',\varepsilon)-\Pi(t,g'',h'',\varepsilon)|\leqslant\lambda(\varepsilon,\sigma)\{|g'-g''|+|h'-h''|\},$$
$$|\Gamma(t,g',h',\varepsilon)-\Gamma(t,g'',h'',\varepsilon)|\leqslant\lambda(\varepsilon,\sigma)\{|g'-g''|+|h'-h''|\},$$
$$(t,g',h'),\ (t,g'',h'')\in R\Omega U_\sigma,\quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0,$$

в которых σ — произвольное положительное число, меньшее ϱ_0.

Ясно далее, что функции Π и Γ обладают по отношению к координатам g периодом 2π. Ясно также, что если $\{\tau_m\}$ есть такая последовательность из R, для которой равномерно на множестве $R\Omega U_\varrho$

$$|W(t+\tau_m,\varphi,b)-W(t,\varphi,b)|\to 0,\quad |B(t+\tau_m,\varphi,b)-B(t,\varphi,b)|\to 0,$$
$$m\to\infty,$$

то для этой последовательности равномерно на множестве $R\Omega U_{\varrho_0}$ будем иметь

$$|\Pi(t+\tau_m,g,h,\varepsilon)-\Pi(t,g,h,\varepsilon)|\to 0,$$
$$|\Gamma(t+\tau_m,g,h,\varepsilon)-\Gamma(t,g,h,\varepsilon)|\to 0$$

при каждом ε, таком, что $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

Наконец, если функции W, B будут иметь вид

$$W(t,\varphi,b)=F_1(\varphi+\nu t,b),\quad B(t,\varphi,b)=F_2(\varphi+\nu t,b), \tag{I.150}$$

получим также

$$\Pi(t,g,h,\varepsilon)=\Pi(g+\nu t,h,\varepsilon),\quad \Gamma(t,g,h,\varepsilon)=\Gamma(g+\nu t,h,\varepsilon).$$

Вводя новую независимую переменную

$$\varepsilon t=\tau, \tag{I.151}$$

можем записать уравнения (I.148) в форме

$$\frac{dg}{d\tau} = \omega + \Pi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right), \quad \frac{dh}{d\tau} = Hh + \Gamma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right). \tag{I.152}$$

В частном же случае (I.150), полагая

$$g + \nu t = \vartheta, \tag{I.153}$$

имеем уравнения, правые части которых не содержат явно независимой переменной:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{\nu}{\varepsilon} + \omega + \Pi(\vartheta, h, \varepsilon), \quad \frac{dh}{d\tau} = Hh + \Gamma(\vartheta, h, \varepsilon). \tag{I.154}$$

§ 8. Рассмотрим теперь независимо от проведенных рассуждений уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon), \end{aligned} \tag{I.155}$$

где $g = (g_1, \ldots, g_r)$, $G = (G_1, \ldots, G_r)$, $P = (P_1, \ldots, P_r)$ — точки r-мерного евклидова пространства E_r; $h = (h_1, \ldots, h_p)$, $Q = (Q_1, \ldots, Q_p)$ — точки E_p; H — p-мерная матрица; ε — положительный параметр; t — вещественная переменная.

Условимся обозначать вещественную ось переменной t через R, пространство точек g — через Φ, область точек h, для которых $|h| < \varrho$, — через U_ϱ.

Предположим, что можно указать такие положительные числа ε^*, ϱ, что будут выполнены следующие условия:

а) функция $G(\varepsilon)$ определена для $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$;

б) функции $P(t, g, h, \varepsilon)$, $Q(t, g, h, \varepsilon)$ определены в области

$$t \in R, \quad g \in \Phi, \quad h \in U_\varrho, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon^*;$$

в) для $t \in R$, $g \in \Phi$, $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ имеют место неравенства

$$|P(t, g, 0, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon), \quad |Q(t, g, 0, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon),$$

где $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;

г) для любого положительного $\sigma < \varrho$ в области

$$t \in R, \quad g' \in \Phi, \quad g'' \in \Phi, \quad h' \in U_\sigma, \quad h'' \in U_\sigma, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon^*$$

имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |P(t, g', h', \varepsilon) - P(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma)\{|g' - g''| + |h' - h''|\}, \\ |Q(t, g', h', \varepsilon) - Q(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma)\{|g' - g''| + |h' - h''|\}, \end{aligned}$$

в которых $\lambda(\varepsilon, \sigma) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$;

д) все вещественные части корней $z_1, \ldots, z_p$ уравнения

$$\det(z\Delta 1_p - H) = 0$$

отличны от нуля.

Как видно, уравнения (I.152) и, в частном случае (I.150), уравнения (I.154), к которым приводятся основные уравнения (I.116) леммы I посред-

ством замен переменных (I.143), (I.151), (I.153), принадлежат к типу выбранных уравнений (I.155) со свойствами *а–д*. Кроме этих свойств, правые части уравнений (I.152), (I.154) обладают дополнительным свойством — периодичностью с периодом 2π по отношению к $g(\vartheta)$; правые части уравнений (I.154), кроме того, не содержат независимой переменной. Нетрудно убедиться поэтому, что лемма I будет доказана, как только будет установлена справедливость следующего утверждения, которое для удобства доказательства мы разделим на три леммы и одно примечание.

Лемма II. *Если для системы* (I.155) *выполняются условия а–д, то можно указать такое положительное* ε_0, *что для каждого положительного* ε, *меньшего* ε_0, *эта система имеет интегральное многообразие, представимое соотношением вида*

$$h = f(t, g, \varepsilon), \tag{I.156}$$

в котором $f(t, g, \varepsilon)$ *как функция* (t, g) *определена на множестве* $R\Phi$ *и удовлетворяет неравенствам*

$$|f(t, g, \varepsilon)| \leqslant D(\varepsilon) < \varrho, \quad |f(t, g', \varepsilon) - f(t, g'', \varepsilon)| \leqslant \Delta(\varepsilon)|g' - g''|, \tag{I.157}$$

причем

$$D(\varepsilon) \to 0, \quad \Delta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Если, кроме того, функции $P(t, g, h, \varepsilon)$, $Q(t, g, h, \varepsilon)$ *периодичны по отношению к некоторым из координат* g_k *с периодом* 2π, *то функция* $f(t, g, \varepsilon)$ *также обладает периодом* 2π *по этим координатам.*

Лемма III. *Если в дополнение к условиям а–д предыдущей леммы существует последовательность вещественных чисел* $\{\tau_m\}$, *такая, что для некоторого* $\varepsilon < \varepsilon^*$ *равномерно на множестве* $R\Phi U_\varrho$

$$|P(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)| \to 0,$$
$$|Q(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - Q(t, g, h, \varepsilon)| \to 0, \quad m \to \infty,$$

то тогда для этого ε *равномерно на множестве* $R\Phi$ *будем иметь*

$$|f(t + \tau_m, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \to 0, \quad m \to \infty.$$

Лемма IV. *При выполнении условий леммы* II *можно указать такие положительные постоянные* ε_1, γ, C, σ_0, σ_1 (*причем* $\sigma_0 < \sigma_1 < \varrho$), *что если* s *характеристических чисел матрицы* H *имеют отрицательные вещественные части, а остальные* $p - s$ — *положительные, то для каждого* $\varepsilon < \varepsilon_1$, *любого вещественного* t_0 *и любого* g_0 *из* Φ *в окрестности* U_{σ_0} *существует* s*-мерное многообразие* $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ *точек* $\{h\}$ *со следующими свойствами*:

1) *если*[1] *для* $t = t_0$

$$h_t \in U_{\sigma_0}, \quad h_t \overline{\in} \mathfrak{M}(t, g_t, \varepsilon),$$

то тогда для некоторого $\bar{t} > t_0$

$$h_{\bar{t}} \overline{\in} U_{\sigma_1};$$

[1] Здесь, как обычно, $g = g_t$, $h = h_t$ обозначает решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (I.155).

2) *если для* $t = t_0$

$$h_t \in \mathfrak{M}(t, g_t, \varepsilon),$$

то для всех $t \geqslant t_0$

$$h_t - f(t, g_t, \varepsilon) \leqslant Ce^{-\gamma(t-t_0)}|h_0 - f(t_0, g_0, \varepsilon)|,$$

где (g_0, h_0) *представляют* (g_t, h_t) *при* $t = t_0$;

3) *если все характеристические числа матрицы* H *имеют положительные вещественные части* $(s = 0)$, *то многообразие* $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ *вырождается в точку*

$$h = f(t_0, g_0, \varepsilon);$$

4) *если, наоборот, вещественные части всех характеристических чисел матрицы* H *отрицательны* $(s = p)$, *то многообразие* $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ *совпадает со всей окрестностью* U_{σ_0}.

Примечание. Из леммы IV следует, что в окрестности ΦU_{σ_0} может находиться только одно-единственное интегральное многообразие для системы (I.155), а именно многообразие (I.156).

В самом деле, это утверждение очевидно в случае $s = 0$. Случай $s = p$ переходит в первый, если в уравнениях заменить t на $-t$.

Остается рассмотреть случай $0 < s < p$. Пусть в окрестности ΦU_{σ_0} лежит некоторое интегральное многообразие S_t:

$$S_t \in \Phi U_{\sigma_0}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Тогда из леммы IV следует, что если $(g_0, h_0) \in S_t$, то должно быть

$$h_0 \in \mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon).$$

Возьмем теперь произвольное малое положительное η, подберем положительное z, удовлетворяющее неравенству

$$2\sigma_0 Ce^{-\gamma z} < \eta,$$

возьмем произвольное вещественное t_1 и положим $t_0 = t_1 - z$. Тогда

$$2\sigma_0 Ce^{-\gamma(t_1-t_0)} < \eta.$$

Пусть, с другой стороны, (g, h) будет произвольной точкой многообразия S_t. Заметим, что по определению интегрального многообразия решение (g_t, h_t) системы (I.155), которое принимает значение (g, h) при $t = t_1$, лежит на S_t при любом t. Имеем, в частности, $(g_{t_0}, h_{t_0}) \in S_{t_0}$, и потому

$$h_{t_0} \in \mathfrak{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon).$$

Но тогда, по лемме IV,

$$|h - f(t_1, g, \varepsilon)| = |h_{t_1} - f(t_1, g_{t_1}, \varepsilon)| \leqslant$$
$$\leqslant Ce^{-\gamma(t_1-t_0)}|h_{t_0} - f(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)| < 2\sigma_0 Ce^{-\gamma(t_1-t_0)} < \eta,$$

откуда вследствие произвольности η

$$h = f(t_1, g, \varepsilon). \tag{I.158}$$

Таким образом, из соотношения $(g, h) \in S_{t_1}$ следует (I.158), что и доказывает сделанное утверждение.

§ 9. Доказательство леммы II. Рассмотрим матрицу H и представим ее в виде

$$H = U \begin{vmatrix} H_+, & 0 \\ 0, & H_- \end{vmatrix} U^{-1}, \tag{I.159}$$

где U — матрица, имеющая обратную U^{-1}; 0 — нуль-матрицы; H_+, H_- — такие матрицы, что корнями их характеристических уравнений являются корни уравнения из условия ∂ соответственно с положительными вещественными частями (для H_+) и отрицательными вещественными частями (для H_-). Тогда очевидно, что матрица $J(t)$, определяемая соотношениями

$$\begin{aligned} J(t) &= -U \begin{vmatrix} e^{-H_+ t}, & 0 \\ 0, & 0 \end{vmatrix} U^{-1} \quad \text{для } t > 0, \\ J(t) &= U \begin{vmatrix} 0, & 0 \\ 0, & e^{-H_- t} \end{vmatrix} U^{-1} \quad \text{для } t < 0, \end{aligned} \tag{I.160}$$

удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\frac{dJ}{dt} = -HJ = -JH \tag{I.161}$$

при $t \neq 0$ и условию разрыва

$$J(-0) - J(+0) = E \tag{I.162}$$

при $t = 0$.

Так как, далее, элементы матрицы $e^{-H_+ t}$ являются в общем случае суммами произведений полиномов по t на комплексные экспоненты $e^{(\mu + i\nu)t}$ с отрицательными μ, а элементы матрицы $e^{-H_- t}$ — аналогичными комбинациями полиномов по t и экспонент с положительными μ, то нетрудно видеть, что мы всегда можем найти такие положительные постоянные α, K, что будет справедливо неравенство

$$|J(t)| \leqslant K e^{-\alpha |t|} \tag{I.163}$$

на всей вещественной оси.

Заметив это, фиксируем положительные числа D, Δ ($\Delta < \varrho$) и рассмотрим класс $C(D, \Delta)$ функций $F(t, g)$ со значениями из E_p, определенных на $R\Phi$, удовлетворяющих неравенствам

$$|F(t, g)| \leqslant D, \quad |F(t, g') - F(t, g'')| \leqslant \Delta |g' - g''| \tag{I.164}$$

и обладающих периодом 2π по отношению к тем из координат g_k, по отношению к которым $P(t, g, h, \varepsilon)$, $Q(t, g, h, \varepsilon)$ являются периодическими с периодом 2π (в дальнейшем для сокращения условимся называть эти g_k угловыми координатами). Выберем для некоторой функции $F(t, g)$ из класса $C(D, \Delta)$ уравнение вида

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g, F(t, g), \varepsilon). \tag{I.165}$$

В силу условий *в*, *г* везде на множестве $R\Phi$ имеем

$$\begin{aligned} &|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D) D, \\ &|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon) - P(t, g'', F(t, g''), \varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) |g' - g''|. \end{aligned} \tag{I.166}$$

Поэтому, задавая произвольные начальные условия

$$g = g^0 \quad \text{при } t = t_0,$$

мы можем построить решение уравнения (I.165) для любого t. Обозначим его символически в виде

$$g_t = T^F_{z,t_0}(g^0), \quad \text{где } z = t - t_0. \tag{I.167}$$

Разумеется, вообще говоря, (I.167) зависит и от ε как параметра. Однако так как в течение всего доказательства ε рассматривается как фиксированное достаточно малое число, то, чтобы излишне не усложнять записи формул, зависимость от ε здесь не указывается. Аналогично будем поступать и в дальнейшем без специальных оговорок.

Нетрудно видеть, что, поскольку правая часть уравнения (I.165) периодична с периодом 2π по отношению к угловым координатам g_k, то при замене в $T^F_{z,t_0}(g^0)$ переменной g^0_k на $g^0_k + 2\pi$ соответствующая координата $\{T^F_{z,t_0}(g^0)\}_k$ получит приращение 2π, а остальные $\{T^F_{z,t_0}(g^0)\}_i$, $i \neq k$, останутся неизменными.

Пусть теперь F и F^* — функции из класса $C(D, \Delta)$. Положим

$$g_t = T^F_{z,t_0}(g^0), \quad g^*_t = T^{F^*}_{z,t_0}(g^*).$$

На основании (I.165) и (I.166) имеем

$$\left|\frac{d(g^*_t - g_t)}{dt}\right| = |P(t, g^*_t, F^*(t, g^*_t), \varepsilon) - P(t, g_t, F(t, g_t), \varepsilon)| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(\varepsilon, D)\|F^* - F\| + \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|g^*_t - g_t|, \tag{I.168}$$

где вообще

$$\|f\| = \sup_{t,g} |f(t, g)|.$$

Но, с другой стороны,

$$g^*_t - g_t = g^* - g^0 \quad \text{при } t = t_0.$$

Поэтому из (I.168) убеждаемся, что

$$|T^{F^*}_{z,t_0}(g^*) - T^F_{z,t_0}(g^0)| = |g^*_t - g_t| \leqslant |g^* - g^0| \exp\{\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|\} +$$
$$+ \frac{\|F^* - F\|}{1 + \Delta}\{\exp\{\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|\} - 1\}. \tag{I.169}$$

С учетом сделанных предварительных замечаний рассмотрим преобразование S, преобразующее функцию F из $C(D, \Delta)$ в функцию

$$S_{t,g}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q\{t + z,\ T^F_{z,t}(g),\ F[t + z,\ T^F_{z,t}(g)],\ \varepsilon\}\, dz. \tag{I.170}$$

В силу вышеуказанных свойств периодичности $T^F_{z,t}(g)$ по отношению к угловым переменным мы можем заключить, что преобразованная функция $S_{t,g}(F)$ также обладает периодом 2π по отношению к g_k.

Составим оценки для

$$|S_{t,g}(F)|, \quad |S_{t,g^*}(F^*) - S_{t,g^0}(F)|.$$

Имеем, вследствие условий *в*, *г* (I.164):

$$|Q\{t+z,\ T^F_{z,t}(g),\ F[t+z,\ T^F_{z,t}(g)],\ \varepsilon\}| \leqslant |Q\{t+z,\ T^F_{z,t}(g),\ 0,\ \varepsilon\}| +$$
$$+ |Q\{t+z,\ T^F_{z,t}(g),\ F[t+z,\ T^F_{z,t}(g)],\ \varepsilon\} - Q\{t+z,\ T^F_{z,t}(g),\ 0,\ \varepsilon\}| \leqslant$$
$$\leqslant M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D,$$

и потому на основании (I.163) из (I.170) получаем

$$|S_{t,g}(F)| \leqslant \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D\}K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|z|}\, dz = \frac{2K}{\alpha}\{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D\}. \tag{I.171}$$

Совершенно аналогично

$$|S_{t,g^*}(F^*) - S_{t,g^0}(F)| \leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|z|}\lambda(\varepsilon, D)\{|T^{F^*}_{z,t}(g^*) - T^F_{z,t}(g^0)| +$$
$$+ F^*[t+z, T^{F^*}_{z,t}(g^*)] - F[t+z, T^F_{z,t}(g^0)]|\}\, dz \leqslant$$
$$\leqslant K\lambda(\varepsilon, D)\|F^* - F\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|z|}\, dz +$$
$$+ K\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|z|}|T^{F^*}_{z,t}(g^*) - T^F_{z,t}(g^0)|\, dz,$$

откуда вследствие (I.169) вытекает

$$|S_{t,g^*}(F^*) - S_{t,g^0}(F)| \leqslant \{|g^* - g^0|(1+\Delta) + \|F^* - F\|\} \times$$
$$\times \lambda(\varepsilon, D)K \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\{-\alpha|z| + \lambda(1+\Delta)|z|\}. \tag{I.172}$$

До сих пор величины D и Δ были произвольными. Подберем теперь их в функции параметра $D = D(\varepsilon)$, $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ таким образом, чтобы $D(\varepsilon) \to 0$, $\Delta(\varepsilon) \to 0$ (при $\varepsilon \to 0$) и чтобы для всех ε, меньших некоторого ε_0, выполнялись неравенства

$$\frac{2K}{\alpha}\{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D\} < D, \quad \frac{4K}{\alpha}\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta) < \Delta,$$
$$(1+\Delta)\lambda(\varepsilon, D) < \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{8\lambda(\varepsilon, D)K}{\alpha} < 1. \tag{I.173}$$

Такой выбор $D = D(\varepsilon)$, $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ всегда возможен, поскольку $M(\varepsilon) \to 0$, $\lambda(\varepsilon, D) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $D \to 0$. Для выбранных величин D, Δ из (I.171), (I.172)

получаем

$$|S_{t,g}(F)| < D(\varepsilon),$$
$$|S_{t,g^*}(F^*) - S_{t,g^0}(F)| \leqslant \Delta(\varepsilon)|g^* - g^0| + \frac{1}{2}\|F^* - F\|, \tag{I.174}$$

и в частности

$$|S_{t,g^*}(F) - S_{t,g^0}(F)| \leqslant \Delta(\varepsilon)|g^* - g^0|. \tag{I.175}$$

Итак, при $\varepsilon < \varepsilon_0$ преобразование S отображает класс функций $C\{D(\varepsilon), \Delta(\varepsilon)\}$ сам на себя. Поскольку, кроме того, из (I.174) имеем неравенство

$$\|SF^* - SF\| \leqslant \frac{1}{2}\|F^* - F\|, \tag{I.176}$$

то на основании хорошо известного результата, иногда называемого в функциональном анализе принципом Каччиополи–Банаха, мы видим сразу, что уравнение

$$F = SF \tag{I.177}$$

в классе функций $C(D, \Delta)$ обладает одним-единственным решением.

Обозначая его через $F = f(t, g, \varepsilon)$, мы видим, что по самому определению класса $C\{D(\varepsilon), \Delta(\varepsilon)\}$ эта функция удовлетворяет требованиям нашей леммы, и, таким образом, для завершения доказательства нам остается показать, что соотношения

$$h = f(t, g, \varepsilon) \tag{I.178}$$

определяют интегральное многообразие для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (I.155).

Раскрывая (I.177), имеем

$$f(t, g, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z)Q\{t + z,\ T^f_{z,t}(g),\ f[t + z, T^f_{z,t}(g)],\ \varepsilon\}\, dz.$$

Заменим здесь g на $T^f_{t-t_0,t_0}(g)$ и заметим, что тождественно

$$T^f_{z,t_0} T^f_{t-t_0,t_0} = T^f_{z+t-t_0,t_0}.$$

Тогда, вводя вместо z в качестве переменной интегрирования $\tau = z + t$ и полагая

$$f\{t,\ T^f_{t-t_0,t_0}(g),\ \varepsilon\} = h_t, \quad T^f_{t-t_0,t_0}(g) = g_t,$$

получаем

$$h_t = \int_{-\infty}^{\infty} J(\tau - t)Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} J(\tau - t)Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau + \int_{t}^{\infty} J(\tau - t)Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau.$$

Отсюда, принимая во внимание свойства (I.161), (I.162) функции $J(z)$, видим, что многообразие h_t дифференцируемо по t и что

$$\frac{dh_t}{dt} = Hh_t + Q(t, g_t, h_t, \varepsilon).$$

С другой стороны, по определению оператора $T^f_{t-t_0,t_0}$, имеем

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon).$$

Таким образом,

$$g_t = T^f_{t-t_0,t_0}(g), \quad h_t = f(t, g_t, \varepsilon)$$

представляет собой решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, сводящееся при $t = t_0$ к g, $f(t_0, g, \varepsilon)$. Мы видим, таким образом, что многообразие (I.178) является интегральным для этой системы, что и завершает доказательство.

§ 10. Доказательство леммы III. Возьмем некоторую функцию $F(t, g)$ из класса $C(D, \Delta)$, где, как при доказательстве предыдущей леммы, $D = D(\varepsilon)$, $\Delta = \Delta(\varepsilon)$. Рассмотрим выражения

$$y_z = T^F_{z,t}(g), \quad y'_z = T^F_{z,t+\tau}(g)$$

и заметим, что

$$\frac{\partial y_z}{\partial z} = G(\varepsilon) + P\{z + t,\ y_z,\ F[z + t, y_z],\ \varepsilon\},$$
$$\frac{\partial y^\tau_z}{\partial z} = G(\varepsilon) + P\{z + t + \tau,\ y^\tau_z,\ F[z + t + \tau, y^\tau_z],\ \varepsilon\}, \tag{I.179}$$

$$y_z = g, \quad y^\tau_z = g \quad \text{при } z = 0. \tag{I.180}$$

Условимся обозначать

$$\|P_\tau - P\| = \sup_{t,g,h} |P(t + \tau, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)|, \quad t \in R, \quad g \in \Phi, \quad h \in U_\varrho,$$

$$\|F_\tau - F\| = \sup_{t,g} |F(t + \tau, g) - F(t, g)|, \quad t \in R, \quad g \in \Phi.$$

Тогда из (I.179) после вычитания и обычного мажорационного процесса получим

$$\left|\frac{\partial(y^\tau_z - y_z)}{\partial z}\right| \leqslant \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|y^\tau_z - y_z| + \lambda(\varepsilon, D)\|F_\tau - F\| + \|P_\tau - P\|.$$

Отсюда ввиду того что $|y^\tau_z - y_z| = 0$ при $z = 0$ имеем

$$|y^\tau_z - y_z| \leqslant \frac{\|P_\tau - P\| + \lambda(\varepsilon, D)\|F_\tau - F\|}{(1 + \Delta)\lambda(\varepsilon, D)}\{\exp[\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|] - 1\}. \tag{I.181}$$

С другой стороны, по определению преобразования S,

$$S_{t+\tau,g}(F) - S_{t,g}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z)\{Q[t + z + \tau,\ y^\tau_z,\ F(z + t + \tau, y^\tau_z),\ \varepsilon] -$$
$$- Q[t + z, y_z, F(z + t, y_z), \varepsilon]\}\, dz,$$

и потому

$$|S_{t+\tau,g}(F) - S_{t,g}(F)| \leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|z|}\{\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta)|y_z^\tau - y_z| + \\ + \|Q_\tau - Q\| + \lambda(\varepsilon, D)\|F_\tau - F\|\}\, dz.$$

Таким образом, принимая во внимание неравенства (I.173), (I.181), получаем

$$|S_{t+\tau,g}(F) - S_{t,g}(F)| \leqslant \frac{4K}{\alpha}\{\|P_\tau - P\| + \lambda(\varepsilon, D)\|F_\tau - F\|\} + \frac{2K\|Q_\tau - Q\|}{\alpha},$$

или сокращенно

$$\|(SF)_\tau - SF\| \leqslant \frac{1}{2}\|F_\tau - F\| + \frac{2K}{\alpha}\{\|Q_\tau - Q\| + 2\|P_\tau - P\|\}. \tag{I.182}$$

Возьмем теперь последовательно

$$F_0 = 0, \quad F_1 = SF_0, \ldots, F_{n+1} = SF_n, \ldots .$$

Но благодаря неравенству (I.169) имеем

$$\|F_{n+1} - F_n\| = \|SF_n - SF_{n-1}\| \leqslant \frac{1}{2}\|F_n - F_{n-1}\|,$$

так что

$$\|F_{n+m} - F_n\| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\|F_1\|,$$

и соответственно последовательность $\{F_N\}$ равномерно сходится к f:

$$\|F_N - f\| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\|F_1\| \to 0 \quad \text{при } N \to 0. \tag{I.183}$$

Положим для сокращения

$$\sigma_\tau = \frac{2K}{\alpha}\{\|Q_\tau - Q\| + 2\|P_\tau - P\|\}. \tag{I.184}$$

Тогда из (I.182) получим последовательно

$$\|(F_1)_\tau - F_1\| \leqslant \sigma_\tau, \quad \|(F_2)_\tau - F_2\| \leqslant \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sigma_\tau,$$

$$\|(F_3)_\tau - F_3\| \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\sigma_\tau, \ldots .$$

Вообще

$$\|(F_N)_\tau - F_N\| \leqslant 2\sigma_\tau,$$

откуда, переходя к пределу при $N \to \infty$, убеждаемся на основании (I.183), что

$$\|(f)_\tau - f\| \leqslant 2\sigma_\tau,$$

или, раскрывая и принимая во внимание (I.184), видим, что везде на $R\Phi$ для любого τ имеет место неравенство

$$|f(t+\tau, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \leqslant \frac{4K}{\alpha}\{\|Q_\tau - Q\| + 2\|P_\tau - P\|\}.$$

Пусть теперь $\{\tau_m\}$ будет последовательностью из R, такой, что для некоторого $\varepsilon < \varepsilon_0$ равномерно на $R\Phi$

$$|Q(t+\tau_m, g, h, \varepsilon) - Q(t, g, h, \varepsilon)| \to 0, \quad |P(t+\tau_m, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)| \to 0.$$

Тогда для этого ε

$$\|Q_{\tau_m} - Q\| \to 0, \quad \|P_{\tau_m} - P\| \to 0 \quad \text{при } m \to \infty,$$

и мы видим, что равномерно на $R\Phi$ выполняется соотношение

$$|f(t+\tau_m, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \to 0 \quad \text{при } m \to \infty,$$

доказывающее лемму III.

§ 11. Доказательство леммы IV. Рассмотрим интегродифференциальную систему

$$\begin{gathered} h_t = \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau + J(t_0 - t)A, \quad t_0 < t, \\ \frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon), \quad t_0 < t, \\ g_t = g_0, \quad t = t_0, \end{gathered} \tag{I.185}$$

где A — некоторый произвольный фиксированный вектор из E_p.

Используя для исследования этой системы способы получения оценок, неоднократно применявшиеся выше, нетрудно установить следующий результат.

Можно указать такие положительные $\varepsilon_1, \sigma_0, \sigma_1$, удовлетворяющие условиям

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_0, \quad D(\varepsilon_1) < \sigma_0, \quad \sigma_0 < \sigma_1 < \varrho, \tag{I.186}$$

что для любого значения параметра ε и любого вектора A из E_p, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_1, \quad |A| < \sigma_0,$$

а) система (I.185) имеет одно-единственное решение (g_t, h_t), для которого $h_t \subset U_{\sigma_1}$ при всех $t \geqslant t_0$;

б) для этого решения

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon), \tag{I.187}$$

где $\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon)$ — непрерывная функция своих аргументов, удовлетворяющих неравенству Липшица вида

$$\begin{aligned} |\Psi(t_0, t, g', A', \varepsilon) - \Psi(t_0, t, g'', A'', \varepsilon)| &\leqslant \nu(\varepsilon, \sigma_0)|g' - g''| + \\ &+ \mu(\varepsilon, \sigma_0) \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}(t - t_0)\right\} |A' - A''|, \quad t \geqslant t_0, \end{aligned} \tag{I.188}$$

где $\nu(\varepsilon, \sigma_0)$ и $\mu(\varepsilon, \sigma_0)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, $\sigma_0 \to 0$.

Кроме того, на основании (I.161) мы видим, что решения интегродифференциальной системы являются вместе с тем и решениями дифференциальных уравнений (I.155).

С другой стороны, пусть (g_t, h_t) есть любое решение уравнений (I.155), для которого $h_0 \in U_{\sigma_0}$ и $h_t \in U_{\sigma_1}$ для всех $t > t_0$. Условимся для сокращения называть такие решения решениями типа S. Имеем

$$\int_t^\infty J(\tau - t)\frac{dh_\tau}{d\tau}\,d\tau = \int_t^\infty J(\tau - t)Hh_\tau\,d\tau + \int_t^\infty J(\tau - t)Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\,d\tau, \quad \text{(I.189)}$$

$$\int_{t_0}^t J(\tau - t)\frac{dh_\tau}{d\tau}\,d\tau = \int_{t_0}^t J(\tau - t)Hh_\tau\,d\tau + \int_{t_0}^t J(\tau - t)Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\,d\tau. \quad \text{(I.190)}$$

Но, интегрируя по частям и принимая во внимание (I.161), получаем

$$\int_t^\infty J(\tau - t)\frac{dh_\tau}{d\tau}\,d\tau = -J(+0)h_t - \int_t^\infty \frac{dJ(\tau - t)}{d\tau}h_\tau\,d\tau =$$

$$= -J(+0)h_t + \int_t^\infty J(\tau - t)Hh_\tau\,d\tau,$$

$$\int_{t_0}^t J(\tau - t)\frac{dh_\tau}{d\tau}\,d\tau = J(-0)h_t - J(t_0 - t)h_0 + \int_{t_0}^t J(\tau - t)Hh_\tau\,d\tau.$$

Итак, складывая (I.189), (I.190) и замечая, что $J(-0)h_t - J(+0)h_t = h_t$, убеждаемся, что

$$h_t = \int_{t_0}^\infty J(\tau - t)Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\,d\tau + J(t_0 - t)h_0.$$

Следовательно, всякое решение системы (I.155) типа S является решением интегродифференциальной системы (I.185) при $A = h_0$, и потому мы можем для него написать

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon), \quad |A| < \sigma_0. \quad \text{(I.191)}$$

Далее, в силу теоремы IV и неравенств (I.157), (I.186) все решения, лежащие на интегральном многообразии

$$h = f(t, g, \varepsilon),$$

принадлежат к типу S, так что для каждого из них можно указать соответствующее A. Поэтому ввиду (I.188) имеем

$$|f(t, g, \varepsilon) - \Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon)| \leqslant \mu(\varepsilon, \sigma_0)\exp\left\{-\frac{\alpha}{2}(t - t_0)\right\}|A' - A|, \quad t \geqslant t_0,$$

и, в частности, для любого решения типа S, заменив здесь произвольное g на g_t, получим

$$|f(t, g_t, \varepsilon) - h_t| \leqslant \mu(\varepsilon, \sigma_0)\exp\left\{-\frac{\alpha}{2}(t - t_0)\right\}|f(t_0, g_0, \varepsilon) - h_0|. \quad \text{(I.192)}$$

Рассмотрим теперь множество точек $\{h\}$ из U_{σ_0}, для которых

$$h = \Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \quad |A| < \sigma_0,$$

соответствующее данным, фиксированным t_0, g_0, ε, и обозначим его через $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$.

Тогда ввиду того что для всякого решения типа S выполняется соотношение (I.191), положив в нем $t = t_0$, убеждаемся, что h_0 должно принадлежать $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$. Следовательно, если для $t = t_0$ мы имеем

$$h_t \in U_{\sigma_0}, \quad h_t \overline{\in} \mathfrak{M}(t, g_t, \varepsilon),$$

то соответствующее этим начальным условиям решение (g_t, h_t) не может принадлежать к типу S, так что h_t не может оставаться в окрестности U_{σ_0} для всех $t > t_0$.

Далее, мы уже отмечали, что решение интегродифференциальной системы (I.185), обладающее свойствами *а*, *б*, существование которого установлено выше, является в то же время решением дифференциальных уравнений (I.155). Благодаря свойству *б* имеем

$$h_0 = \Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \tag{I.193}$$

и так как решение уравнений (I.155) всецело определяется начальными условиями, то мы видим, что если (g_t, h_t) есть какое-то решение уравнений (I.155), для которого справедливо (I.193), то оно является также решением интегродифференциальной системы (I.185) и обладает свойствами *а*, *б*.

Мы можем, таким образом, утверждать, что если для некоторого решения уравнений (I.155) при $t = t_0$

$$h_t \in \mathfrak{M}(t, g_t, \varepsilon),$$

то тогда оно принадлежит к типу S, и поэтому для него выполняется неравенство (I.192). Установив сейчас требуемые свойства 1, 2 многообразия $\mathfrak{M}(t, g_t, \varepsilon)$, докажем еще свойства 3, 4, завершив тем самым доказательство леммы IV.

Пусть, в самом деле, $s = 0$. Тогда по определению (I.160)

$$J(t) = -\mathrm{e}^{-Ht}, \quad t > 0, \quad J(t) = 0, \quad t < 0,$$

вследствие чего интегральное уравнение из (I.185) принимает вид

$$h_t = -\int_t^\infty \mathrm{e}^{H(t-\tau)} Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau, \quad t > t_0,$$

в котором не фигурирует произвольный вектор A. Отсюда ясно, что $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ вырождается в одну точку, и, так как всегда $f(t_0, g_0, \varepsilon) \in \mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$, мы видим, что в данном случае $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ состоит из одной точки, являющейся $f(t_0, g_0, \varepsilon)$.

Пусть теперь, наоборот, $s = p$. Тогда по определению (I.160)

$$J(t) = 0, \quad t > 0, \quad J(t) = \mathrm{e}^{-Ht}, \quad t < 0,$$

и интегральное уравнение из системы (I.185) будет иметь вид

$$h_t = \int_{t_0}^{t} e^{H(t-\tau)} Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau + e^{H(t-t_0)} A, \quad t > t_0, \tag{I.194}$$

откуда, в частности, следует, что $A = h_0$.

Нетрудно убедиться, что уравнение (I.194) является тождеством для любого решения дифференциальных уравнений (I.155) при любом h_0. Таким образом, в данном случае

$$\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon) = U_{\sigma_0}.$$

Пусть, наконец, и s, и $p - s$ отличны от нуля. В этом случае член $J(t_0 - t)A$, через который в интегродифференциальную систему (I.185) входит вектор A, может быть представлен в форме

$$U \left| \begin{matrix} 0, & 0 \\ 0, & e^{H_-(t-t_0)} \end{matrix} \right| U^{-1} A = U \left| \begin{matrix} 0, & 0 \\ 0, & e^{H_-(t-t_0)} \end{matrix} \right| U^{-1} a,$$

где

$$a = U \left| \begin{matrix} 0, & 0 \\ 0, & I_s \end{matrix} \right| U^{-1} A \tag{I.195}$$

и I_s есть s-мерная единичная матрица.

Отсюда можно заключить, что тождественно

$$\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon) = \Psi(t_0, t, g, a, \varepsilon).$$

С другой стороны, при произвольном A вектор a, определяемый равенством (I.195), имеет всего s независимых компонент $a_1, \ldots, a_s$, вследствие чего уравнения

$$h = \Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon),$$

характеризующие многообразие $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$, могут быть представлены в виде

$$h = h(a_1, \ldots, a_s),$$

где $h(a_1, \ldots, a_s)$ — функции s параметров, удовлетворяющие (благодаря (I.188)) условиям Липшица и зависящие от t_0, g_0, ε.

Итак, $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ есть s-мерное многообразие. Это и завершает доказательство леммы IV.

§ 12. Установив теоремы II, III, IV, рассмотрим ряд приложений этих теорем и методов[1], разработанных нами для их доказательства, указав попутно на некоторые возможные обобщения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (I.1′)

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x)$$

и допустим, что для некоторого множества E точек x функция $X(t, x)$ и ее частные производные первого порядка по координатам x на множестве E ограничены и равномерно непрерывны по отношению к x.

[1] Следует заметить, что эти методы позволяют получить значительно более сильные утверждения, чем те, которые были сформулированы в тексте указанных теорем.

Допустим также, что для каждой точки x из E функция $X(t, x)$ будет почти периодической функцией t.

Воспользовавшись принципом усреднения, составим соответствующее уравнение первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \quad X_0(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt$$

и рассмотрим случай, когда это уравнение имеет квазистатическое решение $\xi = \xi_0$, принадлежащее вместе с некоторой своей ϱ-окрестностью к множеству E.

Для исследования свойств устойчивости квазистатического решения построим для него обычным путем уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = \varepsilon H \delta x, \quad H = X'_{0\xi}(\xi_0).$$

Как известно, если вещественные части всех характеристических чисел матрицы H, входящей в эти уравнения, отрицательны, то ввиду положительности параметра ε изучаемое квазистатическое решение будет устойчивым в том смысле, что всякое другое решение уравнений первого приближения, исходящее из начальных значений, достаточно близких к ξ_0, экспоненциально стремится при $t \to \infty$ к ξ_0.

Рассмотрим соответствующие свойства решения точных уравнений (I.1′).

На основании теоремы II и ее следствия II мы можем утверждать, что в данном случае уравнения (I.1′) имеют устойчивое почти периодическое решение $x = x^*(t)$ для достаточно малых значений параметра ε $(\varepsilon < \varepsilon_0)$.

При этом можно указать положительное $\sigma < \varrho$ таким образом, что всякое другое решение $x(t)$ уравнений (I.1′), для которого в начальный момент $t = t_0$ точка $x(t_0)$ лежит в σ-окрестности точки ξ_0, экспоненциально стремится при $t \to \infty$ к почти периодическому решению $x^*(t)$.

Далее, в полном соответствии с интуитивными соображениями, приведенными в §2, оказывается, что точное решение $x^*(t)$ может быть аппроксимировано равномерно на всей вещественной оси квазистатическим решением уравнений первого приближения, и мы имеем асимптотическую оценку погрешности

$$|x^*(t) - \xi_0| \leqslant \delta(\varepsilon), \tag{I.69}$$

где $\delta(\varepsilon)$ стремится к нулю вместе с ε.

Пусть теперь вещественная часть хотя бы одного характеристического числа матрицы H положительна. Тогда квазистатическое решение для уравнений первого приближения является неустойчивым, и мы можем найти такое положительное $\sigma < \varrho$, что всякое другое решение этих уравнений, исходящее из точки, принадлежащей к σ-окрестности ξ_0 и не лежащей на особом многообразии (с числом измерений, меньшим числа измерений самой окрестности), выйдет с течением времени из этой окрестности.

В отношении же свойств решений точных уравнений мы можем сделать на основании теоремы II и ее следствия II следующие заключения.

Пусть в дополнение к принятым условиям вещественные части всех характеристических чисел матрицы H отличны от нуля.

Тогда для достаточно малых ε ($\varepsilon < \varepsilon_0$) уравнение (I.1′) имеет в окрестности ε почти периодическое решение $x^*(t)$, для которого выполняется соотношение (I.69). Это почти периодическое решение будет теперь обладать свойством неустойчивости того же типа, что и решение уравнений первого приближения.

Если, однако, указанное дополнительное условие не выполнено и некоторые вещественные части равны нулю, то мы не можем применить непосредственно теорему II и доказать существование почти периодического решения. Тем не менее и в этом случае можно воспользоваться изложенным выше методом и получить результат о неустойчивости окрестности точки ξ_0 для точных решений, который можно сформулировать, например, следующим образом. Можно указать такое положительное $\sigma < \varrho$, что всякое решение уравнений (I.1′) для $\varepsilon < \varepsilon_0$, исходящее из точки, принадлежащей к σ-окрестности ξ_0, но не лежащей на некотором особом многообразии (с числом измерений, меньшим числа измерений окрестности), выйдет с течением времени из этой окрестности.

Итак, нами не установлено соответствие в свойствах устойчивости приближенных и точных решений лишь в случае, когда вещественные части всех характеристических чисел матрицы H равны нулю. Этот весьма важный и математически интересный случай может быть иногда исследован с помощью перехода к уравнениям высших приближений, которые были выведены в монографии Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова «Введение в нелинейную механику»[1].

Скажем сейчас несколько слов по поводу возможных исследований в таком направлении.

Пусть в уравнении (I.1′) правая часть представляется рядом вида

$$X(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_\nu(x). \tag{I.196}$$

Тогда, чтобы образовать m-е приближение, рассмотрим выражение

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \ldots + \varepsilon^m F_m(t, \xi), \tag{I.197}$$

в котором функции $F_k(t, \xi)$ представляются рядами вида

$$F_k(t, \xi) = \sum_{\mu \neq 0} e^{i\mu t} F_{k,\mu}(\xi), \tag{I.197′}$$

а переменная ξ является решением уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi) + \ldots + \varepsilon^m P_m(\xi). \tag{I.198}$$

Подставляя выражение (I.197) в уравнение (I.1′) и приравнивая коэффициенты с одинаковыми степенями ε до m-го порядка включительно, подберем $F_1, \ldots, F_m$, $P_1, \ldots, P_m$ так, чтобы выражение (I.197) удовлетворяло уравнению (I.1′) с точностью до величин порядка малости ε^{m+1}.

[1] См. примечание 3 на с. 82.

Получим при этом

$$P_1(\xi) = X_0(\xi), \quad P_2(\xi) = \underset{t}{M}\left\{\left(I_t X \frac{\partial}{\partial \xi}\right) X\right\}, \ldots;$$
$$F_1 = I_t X, \quad F_2 = I_t\left(I_t X \frac{\partial}{\partial \xi}\right) X - \frac{\partial I_t^2 X}{\partial \xi} X_0, \ldots . \tag{I.199}$$

Здесь $\underset{t}{M}$ и I_t представляют операторы, определенные для функций вида

$$\Phi(t, \xi) = \Phi_0(\xi) + \sum_{\omega \neq 0} e^{i\omega t} \Phi_\omega(\xi),$$

посредством соотношений

$$\underset{t}{M}(\Phi) = \Phi_0, \quad I_t \Phi = \sum_{\omega \neq 0} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \Phi_\omega(\xi).$$

Если теперь, определив $F_1, \ldots, F_m$; $P_1, \ldots, P_m$, мы будем рассматривать формулу (I.197) как формулу замены переменных, преобразующую неизвестную x к новой неизвестной ξ, то эта последняя определится уравнением вида

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi) + \ldots + \varepsilon^m P_m(\xi) + \varepsilon^{m+1} P_{m+1}(\xi) + \ldots, \tag{I.200}$$

в котором множитель ε^{m+1} обозначает члены $(m+1)$-го порядка малости. Отбрасывая их в точных преобразованных уравнениях (I.200), получим уравнения m-го приближения (I.198).

Следует заметить, что изложенный способ преобразования уравнения (I.1′) к виду (I.200) является пока чисто формальным. Для установления его фактической приложимости необходимо в каждом отдельном случае исследовать равномерную сходимость формальных рядов, представляющих функции $F_1, \ldots, F_m$, и установить существование и ограниченность соответствующих частных производных.

Вопрос этот в некоторых случаях может решаться сравнительно просто. Так, например, если ряд (I.196) оказывается конечной суммой, а входящие в него функции $X_\nu(x)$ будут полиномами относительно координат x, то формальные ряды (I.197) также будут конечными суммами и их коэффициенты $F_{k,\mu}(\xi)$ и выражения $P_k(\xi)$ будут являться полиномами в координатах ξ.

Пусть так или иначе законность преобразования (I.197) установлена. Тогда появляется возможность замены в рассуждениях §6–10 уравнений первого приближения уравнениями m-го приближения (I.198). В этих рассуждениях при рассмотрении квазистатического решения уравнений (I.198)

$$\xi = \xi_0^{(m)}(\varepsilon)$$

роль матрицы $\varepsilon H = \varepsilon X'_{0\xi}(\xi_0) = \varepsilon P'_{1\xi}(\xi_0)$ будет играть, очевидно, матрица

$$\sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n P'_{n\xi}(\xi_0^{(m)}).$$

Все характеристические значения для достаточно малых ε могут оказаться с неравными нулю вещественными частями даже и в тех случаях, когда

вещественные части всех характеристических значений матрицы H равны нулю.

Заметим, кроме того, что преобразованием (I.197) целесообразно воспользоваться также и в ранее рассмотренном случае неравенства нулю вещественных частей всех характеристических значений H, но для другой задачи, а именно для задачи об улучшении асимптотической оценки (I.69) почти периодического решения $x^*(t)$.

Таким путем было бы нетрудно получить, например, оценки вида

$$|x^*(t) - \xi_0 - \varepsilon\xi_1(t) - \ldots - \varepsilon^{m-1}\xi_{m-1}(t)| \leqslant C_m\varepsilon^m, \quad -\infty < t < \infty,$$

где ξ_0 — квазистатическое решение уравнений первого приближения; $\xi_1(t), \ldots, \xi_{m-1}(t)$ — почти периодические функции t; C_m — постоянные.

Перейдем теперь к рассмотрению приложений теоремы III и рассуждений, использованных для ее доказательства.

Пусть опять в уравнении (I.1′) для некоторого множества E точек x функция $X(t, x)$ и ее частные производные первого порядка по координатам x на множестве E ограничены и равномерно непрерывны по отношению к x.

Допустим также, что для каждой точки x из E функция $X(t, x)$ будет почти периодической функцией t.

Рассмотрим случай, когда уравнение первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \tag{I.201}$$

имеет периодическое решение

$$\xi = \xi(\varepsilon\omega t), \quad \xi(\varphi + 2\pi) = \xi(\varphi), \tag{I.202}$$

орбита которого вместе с некоторой своей ϱ-окрестностью принадлежит к множеству E. Заметим, что так как в уравнении (I.201) правая часть не зависит явно от времени, то при сделанном допущении о существовании решения (I.202) очевидно, что это уравнение имеет семейство решений

$$\xi = \xi(\varepsilon\omega t + \Psi), \tag{I.203}$$

зависящее от одной произвольной постоянной Ψ и соответствующее той же орбите, что и (I.202). Чтобы исследовать устойчивость рассматриваемых периодических решений для уравнения (I.201), построим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = \varepsilon F(\varepsilon\omega t)\delta x, \quad F(\varphi) = X'_{0\xi}\{\xi(\varphi)\}, \tag{I.204}$$

представляющие однородную линейную систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Предположим, что вещественные части $n - 1$ характеристических показателей для этой системы отрицательны. Тогда, как известно, исследуемая периодическая орбита

$$\xi = \xi(\varphi) \tag{I.205}$$

для уравнений первого приближения будет устойчивой: траектория всякого другого решения этих уравнений, исходящая из точки, достаточно близкой к орбите (I.205), будет к ней приближаться при $t \to \infty$.

Заметим также, что рассматриваемая орбита является интегральным многообразием для уравнения (I.201). Индивидуальные решения, лежащие на этом многообразии, соответствуют частным решениям уравнения

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon\omega. \tag{I.206}$$

Укажем теперь на подобные свойства решений точного уравнения (I.1′). Так, на основании теоремы III и ее следствия II мы можем утверждать, что в рассматриваемом случае уравнение (I.1′) для достаточно малых значений параметра обладает устойчивым интегральным многообразием, допускающим представление (I.78)

$$x = f(t,\theta), \quad f(t,\theta+2\pi) = f(t,\theta),$$

в котором функция $f(t,\theta)$ почти периодична по отношению к t.

Далее, мы можем указать положительное $\sigma < \varrho$ таким образом, что всякое другое решение $x(t)$ уравнения (I.1′), для которого в начальный момент $t = t_0$ точка $x(t)$ лежит в σ-окрестности орбиты (I.205), будет приближаться к интегральному многообразию (I.78) при $t \to \infty$.

Теорема III показывает также, что это интегральное многообразие при всех вещественных t лежит в $\delta(\varepsilon)$-окрестности многообразия (I.78), так что

$$|f(t,\theta) - \xi(\theta)| \leqslant \delta(\varepsilon), \quad -\infty < t < \infty, \tag{I.79}$$

причем $\delta(\varepsilon)$ стремится к нулю вместе с ε.

Наконец, для решений уравнения (I.1′), лежащих на многообразии S_t, переменная θ в формуле (I.78) удовлетворяет уравнению (I.82)

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon\omega + \varepsilon F(t,\theta),$$

в котором

$$|F(t,\theta)| \leqslant \delta^*(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, для решений $x^*(t)$ уравнения (I.1′), лежащих на рассматриваемом интегральном многообразии, имеем асимптотическую оценку вида

$$|x^*(t) - \xi\{\theta(t)\}| \leqslant \delta(\varepsilon), \quad -\infty < t < \infty,$$

в которой

$$|\theta'(t) - \varepsilon\omega| \leqslant \varepsilon\delta^*(\varepsilon), \quad -\infty < t < \infty.$$

С помощью применения преобразования (I.197) эти оценки можно было бы значительно улучшить, получив, например,

$$|x^*(t) - \xi\{\theta(t)\} - \varepsilon\xi_1\{t,\theta(t)\} - \ldots - \varepsilon^{m-1}\xi_{m-1}\{t,\theta(t)\}| \leqslant C_m\varepsilon^m,$$

$$C_m = \text{const},$$

$$|\theta'(t) - \varepsilon\omega - \ldots - \varepsilon^m\omega_{m-1}| \leqslant D_m\varepsilon^{m+1}, \quad D_m = \text{const},$$

где $\xi_k\{t,\theta\}$ — периодические функции θ с периодом 2π, почти периодические относительно t; $\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots$ — постоянные.

Мы исследовали сейчас случай, когда все $n-1$ характеристических показателей для системы (I.204) имели отрицательные вещественные части. По поводу остальных возможностей можно повторить в основном те же замечания, которые были сделаны выше применительно к рассмотрению квазистатических решений.

§ 13. Заметим, наконец, что теоремы III, IV устанавливают для точных уравнений существование интегральных многообразий, лежащих в окрестности интегральных многообразий для уравнений первого приближения. Из них непосредственно не вытекает указаний о структуре индивидуальных решений на данном интегральном многообразии. Однако задача исследования структуры таких решений вообще значительно упрощается тем, что число измерений рассматриваемого интегрального многообразия меньше числа измерений фазового пространства для изучаемых уравнений.

Рассмотрим некоторые примеры. Так, пусть в теореме III функция $X(t,x)$ будет периодической по отношению к t с некоторым периодом, например с периодом 2π. Кроме того, пусть, в дополнение к условиям этой теоремы, функция $X(t,x)$ обладает частными производными второго порядка по отношению к координатам x, которые будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к x в области RD_ϱ. Тогда в уравнении (I.82), определяющем решения, лежащие на интегральном многообразии, функция $F(t,\theta)$ по следствию I из теоремы III будет обладать по отношению к t и θ периодом 2π.

Далее, с помощью рассуждений, использованных в §6–10, нетрудно убедиться, что функция $F(t,\theta)$ имеет частную производную второго порядка по отношению к переменной θ:

$$|F''_{\theta^2}(t,\theta)| \leqslant \text{const}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (I.82) принадлежит к классу уравнений, изученных А. Пуанкаре в работе «Sur les courbes d'efinies par une 'equation diff'erentielle» и А. Данжуа в заметке «Sur les characteristiques 'a la surface du tore». Используя результаты этих основополагающих работ, мы убеждаемся в существовании «вращательного числа» $\nu(\varepsilon)$, определяющего структуру решений рассматриваемого семейства. Если для некоторого ε вращательное число иррациональное, то семейство решений уравнения (I.1′), лежащих на интегральном многообразии S_t, состоит из кратно-периодических решений с двумя основными частотами: 1 и $\nu(\varepsilon)$. Имеем

$$x(t) = u\{t, \nu(\varepsilon)t + \Psi\}, \tag{I.207}$$

где $u(t,\theta)$ — непрерывная периодическая функция (t,θ) с периодом 2π, Ψ — произвольная постоянная.

В случае же, когда для данного ε вращательное число $\nu(\varepsilon)$ оказывается рациональным, среди решений из рассматриваемого семейства всегда имеются решения вида (I.207), в которых постоянная Ψ может принимать значения из некоторого замкнутого множества углов. Всякое другое решение из нашего семейства при $t \to \infty$ асимптотически приближается к одному из решений такого вида.

Рассмотрим в заключение пример на приложение теоремы IV.

Пусть в указанной теореме $r = 2$, выполняются соотношения (I.87) и функции $\Phi(\theta,a)$, $A(\theta,a)$ обладают по отношению ко всем своим аргументам частными производными второго порядка, ограниченными и непрерывными в области ΩU_ϱ.

Тогда, по теореме IV, интегральное многообразие определяется уравнениями

$$a = f_a(\Psi + \nu t), \quad \theta = \Psi + f_\theta(\Psi + \nu t),$$

причем для решений, лежащих на этом многообразии,

$$\frac{d\Psi}{dt} = \varepsilon\omega + \varepsilon F(\Psi + \nu t).$$

Принимая во внимание, что $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$, имеем систему двух уравнений

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = \varepsilon\omega_1 + \varepsilon F_1(\Psi_1 + \nu_1 t,\ \Psi_2 + \nu_2 t),$$
$$\frac{d\Psi_2}{dt} = \varepsilon\omega_2 + \varepsilon F_2(\Psi_1 + \nu_1 t,\ \Psi_2 + \nu_2 t)$$

или, вводя новые неизвестные

$$\Psi_1 + \nu_1 t = \vartheta_1, \quad \Psi_2 + \nu_2 t = \vartheta_2,$$

можем написать

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_1}{dt} &= \nu_1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon F_1(\vartheta_1, \vartheta_2), \\ \frac{d\vartheta_2}{dt} &= \nu_2 + \varepsilon\omega_2 + \varepsilon F_2(\vartheta_1, \vartheta_2). \end{aligned} \tag{I.208}$$

Заметим, что в уравнениях (I.208) $F_1(\vartheta_1, \vartheta_2)$, $F_2(\vartheta_1, \vartheta_2)$ — периодические функции с периодом 2π, обладающие ограниченными частными производными второго порядка.

Поэтому, взяв в этих уравнениях величину ϑ_1 в качестве независимой переменной, мы приходим к уравнению

$$\frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1} = \frac{\nu_2 + \varepsilon\omega_2 + \varepsilon F_2(\vartheta_1, \vartheta_2)}{\nu_1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon F_1(\vartheta_1, \vartheta_2)},$$

принадлежащему к вышеупомянутому типу, изученному А. Пуанкаре и А. Данжуа. Таким образом, в данном случае мы опять можем установить существование некоторого вращательного числа, характеризующего поведение решений на рассматриваемом интегральном многообразии.

§ 14. До сих пор мы рассматривали вопрос о структуре точных решений лишь в окрестности некоторых специальных интегральных многообразий для уравнений первого приближения. Покажем сейчас на одном частном примере, как можно воспользоваться изложенным выше методом для исследования свойств решений во всем фазовом пространстве.

Рассмотрим уравнение

$$x'' + \omega^2 x + \varepsilon f(x, x') = \varepsilon F(\alpha t, x), \tag{I.209}$$

содержащее малый положительный параметр ε. Пусть в этом уравнении α — некоторая положительная постоянная, для которой отношение α/ω является рациональным; $f(x, x')$ — аналитическая функция (x, x'), регулярная в окрестности любой точки (x, x') вещественной плоскости; $F(\theta, x)$ — периодическая функция θ с периодом 2π, аналитическая по отношению к (θ, x) и регулярная в окрестности любых значений своих аргументов.

Предположим также, что везде

$$f'_{x'}(x, x') > 0. \tag{I.210}$$

Допустим, наконец, что можно указать не зависящую от ε постоянную M, такую, что при каждом достаточно малом значении ε всякое решение уравнения (I.209) для достаточно больших t удовлетворяет неравенствам

$$|x(t)| \leqslant M, \quad |x'(t)| \leqslant M. \tag{I.211}$$

Это последнее условие нетрудно переписать и получить ряд явных неравенств, наложенных на функции $f(x, x')$, $F(\theta, x)$, которые обеспечили бы его выполнение.

Если мы будем рассматривать (I.209) как уравнение некоторого вибратора, находящегося под действием силы затухания εf и возмущающей силы εF, зависящей от времени и от перемещения, то тогда с физической точки зрения условие (I.210) представляет собой условие возрастания силы затухания с увеличением скорости. Последнее же условие (I.211) соответствует тому случаю, когда при достаточно больших амплитудах колебаний энергия, рассеивающаяся за счет затухания, превышает возможный приток энергии от действия возмущающей силы.

Не останавливаясь здесь на дальнейшем уточнении принятого условия, докажем теорему.

Теорема V. *Можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого положительного значения параметра ε, меньшего ε_0, всякое решение уравнения* (I.209) *или само является периодическим, или стремится к периодическому при неограниченном возрастании t.*

Для доказательства прежде всего преобразуем наше уравнение (I.209) к новым неизвестным u, v с помощью преобразования, использованного в § 4:

$$x = u \sin \omega t + v \cos \omega t, \quad x' = \omega u \cos \omega t - \omega v \sin \omega t. \tag{I.212}$$

Получим

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon U(t, u, v), \quad \frac{dv}{dt} = \varepsilon V(t, u, v), \tag{I.213}$$

где для сокращения положено

$$U = (F - f)\frac{\cos \omega t}{\omega}, \quad V = -(F - f)\frac{\sin \omega t}{\omega}, \tag{I.214}$$

причем в аргументах F, f величины x, x' следует выразить через u, v с помощью формул (I.212). Заметим, что на основании принятого условия о рациональности отношения α/ω функции U, V будут обладать по переменной t некоторым периодом τ. Мы видим далее, что эти функции будут аналитическими и регулярными в окрестности любых значений их аргументов.

Заметим, наконец, что существуют такие положительные $\bar{\varepsilon}$, C, что при каждом $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ всякое решение $u(t)$, $v(t)$ уравнений (I.213) будет удовлетворять неравенству

$$u^2(t) + v^2(t) \leqslant C^2 \tag{I.215}$$

для достаточно больших t.

Рассмотрим теперь соответствующие уравнения первого приближения. Имеем

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon U(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = \varepsilon V(u, v), \tag{I.216}$$

где

$$U(u,v)=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau U(t,u,v)\,dt,\quad V(u,v)=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau V(t,u,v)\,dt.$$

Введем функцию

$$\Phi(\alpha t,x)=\int_0^x F(\alpha t,x)\,\partial x.$$

Тогда с помощью формул (I.214) убеждаемся, что

$$U(t,u,v)=\frac{1}{\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial v}-f\frac{\cos\omega t}{\omega},\quad V(t,u,v)=-\frac{1}{\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial u}+f\frac{\sin\omega t}{\omega},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}U(u,v)&=\frac{1}{\omega}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial v}-\frac{1}{\omega\tau}\int_0^\tau f\cos\omega t\,dt,\\ V(u,v)&=-\frac{1}{\omega}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial u}+\frac{1}{\omega\tau}\int_0^\tau f\sin\omega t\,dt,\end{aligned}\tag{I.217}$$

где

$$\overline{\Phi}=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\Phi\,dt=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\Phi(\alpha t,u\sin\omega t+v\cos\omega t)\,dt.$$

Нетрудно видеть также, что благодаря наложенным условиям выражения $U(u,v)$, $V(u,v)$ будут аналитическими функциями (u,v) и регулярными в окрестности любой точки вещественной плоскости (u,v).

Рассмотрим функцию

$$U'_u(u,v)+V'_v(u,v)$$

и заметим, что на основании (I.217) можем написать

$$U'_u(u,v)+V'_v(u,v)=\frac{1}{\omega\tau}\int_0^\tau\left\{\frac{\partial f}{\partial v}\sin\omega t-\frac{\partial f}{\partial u}\cos\omega t\right\}dt,$$

и потому

$$\begin{aligned}U'_u(u,v)+V'_v(u,v)=&-\frac{1}{\omega\tau}\int_0^\tau(f'_x\sin\omega t+f'_{x'}\omega\cos\omega t)\cos\omega t\,dt+\\&+\frac{1}{\omega\tau}\int_0^\tau(f'_x\cos\omega t-f'_{x'}\omega\sin\omega t)\sin\omega t\,dt=-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f'_{x'}\,dt.\end{aligned}$$

Таким образом, в силу условия (I.210) убеждаемся, что на всей плоскости

$$U'_u(u,v)+V'_v(u,v)<0.\tag{I.218}$$

Исходя из этого покажем, что уравнения (I.216) не имеют замкнутого цикла. В самом деле, если бы такой цикл существовал, мы имели бы для любого его инфинитезимального элемента в согласии с (I.216)

$$U(u, v)\,dv - V(u, v)\,du = 0$$

и потому, интегрируя по его замкнутому контуру, получили бы

$$\int_C \{U(u, v)\,dv - V(u, v)\,du\} = 0.$$

Но, преобразуя этот интеграл по теореме Стокса, найдем, что он должен быть равен двойному интегралу

$$\iint \{U'_u(u, v) + V'_v(u, v)\}\,du\,dv,$$

отличному от нуля вследствие неравенства (I.218).

Итак, замкнутый цикл для уравнений (I.216) невозможен.

Рассмотрим теперь квазистатические решения (точки равновесия) этих уравнений.

Пусть (u_0, v_0) будет такой точкой. Найдем для нее соответствующие характеристические показатели, для чего рассмотрим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p - U'_u(u_0, v_0), & -U'_v(u_0, v_0) \\ -V'_u(u_0, v_0), & p - V'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0,$$

раскрывая которое получим

$$p^2 - \{U'_u(u_0, v_0) + V'_v(u_0, v_0)\}p + U'_u(u_0, v_0)V'_v(u_0, v_0) - \\ - U'_v(u_0, v_0)V'_u(u_0, v_0) = 0.$$

Обозначим корни этого уравнения соответственно через p_1, p_2.

Тогда ввиду (I.218) можем написать

$$p_1 + p_2 < 0,$$

и, таким образом, для рассматриваемых корней могут представиться лишь следующие случаи:

1) оба корня имеют отрицательные вещественные части;

2) оба корня вещественны, причем один положителен, а другой отрицателен;

3) один корень равен нулю, а другой отрицателен.

Принимая во внимание эти свойства корней p_1, p_2, а также учитывая отсутствие замкнутых циклов, мы можем убедиться на основании хорошо известной теории Пуанкаре, что всякое решение уравнений (I.216), которое с возрастанием t не удаляется в бесконечность, стремится к одной из точек равновесия при $t \to \infty$. При этом если некоторое решение $u(t)$, $v(t)$ уравнений (I.216) лежит в ограниченной части плоскости:

$$u^2(t) + v^2(t) \leqslant \text{const}, \quad -\infty < t < \infty,$$

для всех вещественных t, то такое решение должно быть квазистатическим:

$$u(t) = u_0, \quad v(t) = v_0.$$

Заметим, наконец, что ввиду аналитичности функций $U(u, v)$, $V(u, v)$ в ограниченной части плоскости может лежать конечное число точек равновесия.

Условимся теперь обозначать точки на плоскости (u, v) буквой P, снабжая ее иногда различными индексами. Пусть P_t будет решением уравнений (I.216), проходящим через точку P при $t = 0$. Выражение P_t является, очевидно, некоторой функцией переменной εt и точки P:

$$P_t = T_{\varepsilon t}(P), \tag{I.219}$$

причем на основании обычных теорем существования решений дифференциальных уравнений можно указать такое положительное число L, что

$$|T_{\varepsilon t}(P)| \leqslant 2C$$

для всех значений аргументов, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varepsilon t| \leqslant L, \quad |P| \leqslant C. \tag{I.220}$$

Пусть $\overline{K}$ обозначает верхнюю грань выражения

$$\sqrt{U^2(u, v) + V^2(u, v)}$$

для $|P| \leqslant 2C$. Мы видим тогда, что

$$|T_{\varepsilon t'}(P) - T_{\varepsilon t}(P)| \leqslant \overline{K}\varepsilon |t' - t| \quad \text{для } |t\varepsilon| \leqslant L,\ |t'\varepsilon| \leqslant L,\ |P| \leqslant C. \tag{I.221}$$

Нетрудно убедиться также, что можно указать такую положительную постоянную λ, что

$$|T_{\varepsilon t}(P') - T_{\varepsilon t}(P)| \leqslant \lambda |P' - P| \quad \text{для } |\varepsilon t| \leqslant L,\ |P| \leqslant C,\ |P'| \leqslant C. \tag{I.222}$$

Далее, поскольку правые части уравнений (I.216) не зависят явно от времени, операция $T_{\varepsilon t}$ будет обладать групповым свойством

$$T_{\varepsilon t}\{T_{\varepsilon t'}(P)\} = T_{\varepsilon(t+t')}(P). \tag{I.223}$$

Заметив это, рассмотрим решение P_t точных уравнений (I.213), проходящее при $t = 0$ через точку P. Выражение P_t будет сейчас, очевидно, некоторой функцией (t, P), зависящей от параметра ε:

$$P_t = T_t(P, \varepsilon). \tag{I.224}$$

Так как правые части рассматриваемых уравнений (I.213) явно зависят от времени, то преобразования (I.224) не обладают уже групповым свойством типа (I.223). Однако, ввиду того что выражения $U(t, u, v)$, $V(t, u, v)$ являются периодическими функциями t с периодом τ, имеем более частное групповое свойство

$$T_{n\tau}\{T_{m\tau}(P, \varepsilon), \varepsilon\} = T_{(n+m)\tau}(P, \varepsilon), \tag{I.225}$$

справедливое для целых n, m.

Напомним теперь, что вследствие принятого условия для каждого $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ можно найти такое $t = t(\varepsilon, P)$, что

$$|T_t(P, \varepsilon)| \leqslant C \quad \text{для } t \geqslant t(\varepsilon, P). \tag{I.226}$$

Обозначим через K верхнюю грань выражения

$$\sqrt{U^2(t, u, v) + V^2(t, u, v)}$$

для $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $|P| \leqslant C$. Тогда вследствие (I.213) и (I.226) можно записать

$$|T_{t'}(P, \varepsilon) - T_{t''}(P, \varepsilon)| \leqslant K\varepsilon|t' - t''| \quad \text{для } t' \geqslant t(\varepsilon, P), \quad t'' \geqslant t(\varepsilon, P). \tag{I.227}$$

Наконец, с помощью рассуждений из доказательства теоремы I нетрудно установить существование положительного $\varepsilon^* < \bar{\varepsilon}$ и функции $\delta(\varepsilon)$, стремящейся к нулю вместе с ε, таких, что

$$|T_t(P, \varepsilon) - T_{\varepsilon t}(P)| \leqslant \delta(\varepsilon) \quad \text{для } |\varepsilon t| \leqslant L, \quad |P| \leqslant C, \quad \varepsilon < \varepsilon^*. \tag{I.228}$$

Обратив внимание на эти свойства, возьмем некоторое $\varepsilon < \varepsilon^*$ и рассмотрим множество A_ε всех предельных точек последовательностей

$$\{T_{m\tau}(P, \varepsilon)\}, \quad m \to \infty,$$

при любых P. Иначе говоря, некоторая точка P' тогда и только тогда принадлежит к A_ε, когда можно указать такую точку P и такую стремящуюся к бесконечности последовательность целых чисел $\{m\}$, что

$$T_{m\tau}(P, \varepsilon) \to P'.$$

По свойству (I.226) множество A_ε лежит в ограниченной части плоскости, причем

$$|P| \leqslant C \quad \text{для } P \in A_\varepsilon. \tag{I.229}$$

Далее, исходя из соотношения (I.225), мы можем заключить, что множество A_ε инвариантно по отношению к преобразованиям (I.224) при $t = m\tau$, так что если $P \in A_\varepsilon$, то и $T_{m\tau}(P, \varepsilon) \in A_\varepsilon$ при любом целом (положительном или отрицательном) m.

Рассмотрим теперь множество A всех предельных точек для множеств A_ε при $\varepsilon \to 0$. Иначе говоря, некоторая точка P будет принадлежать к множеству A тогда и только тогда, когда можно указать такую последовательность значений параметра $\{\varepsilon\}$ и такую последовательность точек $\{P_\varepsilon\}$, принадлежащих соответственно к A_ε, чтобы P_ε сходились к P.

Благодаря (I.229)

$$|P| \leqslant C, \quad \text{если } P \in A, \tag{I.230}$$

причем по самому определению множества A

$$d(\varepsilon) = \sup_{P \in A_\varepsilon} \varrho(P, A) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{I.231}$$

где $\varrho(P, A)$ обозначает расстояние от точки P до множества A.

Покажем сейчас, что множество A является инвариантным по отношению к группе преобразований $T_{\varepsilon t}$ так, что из соотношения

$$P \in A \tag{I.232}$$

должно вытекать

$$T_{\varepsilon t}(P) \in A, \quad -\infty < t < \infty. \tag{I.233}$$

Итак, выберем точку P, удовлетворяющую (I.232), и постараемся доказать соотношение (I.233). По определению множества A мы можем найти такие последовательности $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{P_\nu\}$, что

$$\varepsilon_\nu \to 0, \quad P_\nu \in A_{\varepsilon_\nu}, \quad |P_\nu - P| \leqslant \frac{1}{\nu}, \quad \nu \to \infty. \tag{I.234}$$

Но ввиду инвариантности множества A_ε по отношению к преобразованиям (I.224) при $t = m\tau$ имеем

$$T_{m\tau}(P_\nu, \varepsilon_\nu) \in A_{\varepsilon_\nu}. \tag{I.235}$$

С другой стороны, благодаря условиям (I.228), (I.229), (I.234)

$$|T_{m\tau}(P_\nu, \varepsilon_\nu) - T_{\varepsilon_\nu m\tau}(P_\nu)| \leqslant \delta(\varepsilon_\nu) \quad \text{для } |\varepsilon_\nu m\tau| \leqslant L.$$

Далее, из (I.222), (I.234) можно заключить, что

$$|T_{\varepsilon_\nu m\tau}(P_\nu) - T_{\varepsilon_\nu m\tau}(P)| \leqslant \frac{\lambda}{\nu} \quad \text{для } |\varepsilon_\nu m\tau| \leqslant L,$$

и потому

$$|T_{m\tau}(P_\nu, \varepsilon_\nu) - T_{\varepsilon_\nu m\tau}(P_\nu)| \leqslant \delta(\varepsilon_\nu) + \frac{\lambda}{\nu} \quad \text{для } |\varepsilon_\nu m\tau| \leqslant L. \tag{I.236}$$

Фиксируем теперь некоторое вещественное z, такое, что $|z| \leqslant L$, и подберем целое m, удовлетворяющее неравенству

$$|z - \varepsilon_\nu m\tau| \leqslant \varepsilon_\nu \tau, \quad |\varepsilon_\nu m\tau| \leqslant L.$$

Тогда из (I.221) получим

$$|T_{\varepsilon_\nu m\tau}(P) - T_z(P)| \leqslant \overline{K}\varepsilon_\nu \tau,$$

откуда вследствие (I.236)

$$|T_{m\tau}(P_\nu, \varepsilon_\nu) - T_z(P)| \leqslant \delta(\varepsilon_\nu) + \frac{\lambda}{\nu} + \overline{K}\varepsilon_\nu \tau \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Но отсюда благодаря (I.235) следует, что

$$T_z(P) \in A,$$

и, таким образом, множество A оказывается инвариантным по отношению к преобразованиям T_z при $|z| \leqslant L$. Так как преобразования T_z обладают групповым свойством (I.223), то из него следует инвариантность A по отношению к преобразованиям T_z с любым вещественным z. Поэтому всякая точка множества A принадлежит к нему вместе со всей траекторией P_t $(-\infty < t < \infty)$ проходящего через нее решения уравнений (I.216). Поскольку на основании (I.230) для этого решения будем иметь

$$|P_t| \leqslant C, \quad -\infty < t < \infty,$$

множество A оказывается состоящим из точек равновесия. Принимая во внимание то, что это множество лежит в ограниченной плоскости, убеждаемся, что A является конечным множеством точек равновесия для системы (I.216).

Пусть теперь P — произвольная фиксированная точка рассматриваемой плоскости. По самому определению множества A_ε имеем

$$\varrho\{T_{m\tau}(P,\varepsilon),\ A_\varepsilon\} = \eta_m(\varepsilon, P) \to 0, \quad m \to \infty,$$

при фиксированном ε. Отсюда вследствие (I.231) получим

$$\varrho\{T_{m\tau}(P,\varepsilon),\ A\} \leqslant \eta_m(\varepsilon, P) + d(\varepsilon). \tag{I.237}$$

Каждому вещественному t поставим в соответствие такое целое $m(t)$, что

$$[m(t)-1]\tau < t \leqslant m(t)\tau.$$

Тогда для t, удовлетворяющих неравенству

$$t \geqslant t(\varepsilon, P), \tag{I.238}$$

благодаря (I.227) будем иметь

$$|T_t(P,\varepsilon) - T_{m(t)\tau}(P,\varepsilon)| \leqslant K\varepsilon\tau,$$

что совместно с (I.237) дает

$$\varrho\{T_t(P,\varepsilon),\ A\} \leqslant \eta_{m(t)}(\varepsilon, P) + d(\varepsilon) + K\varepsilon\tau. \tag{I.239}$$

Выберем положительное $\varepsilon' < \varepsilon^*$ таким образом, чтобы при $\varepsilon \leqslant \varepsilon'$ величина $\zeta(\varepsilon) = 2d(\varepsilon) + 2K\varepsilon\tau$ была меньше половины наименьшего расстояния между точками множества A. Тогда $\zeta(\varepsilon)$-окрестности точек A будут взаимно изолированы для любого $\varepsilon < \varepsilon'$.

Найдем далее при данных (ε, P) величину $t_0(\varepsilon, P) \geqslant t(\varepsilon, P)$, удовлетворяющую неравенству

$$\eta_{m(t_0)}(\varepsilon, P) < d(\varepsilon) + K\varepsilon\tau.$$

Из (I.239) получим

$$\varrho\{T_t(P,\varepsilon),\ A\} < \zeta(\varepsilon) \quad \text{для } t \geqslant t_0(\varepsilon, P),$$

и, следовательно, для достаточно больших t точка $T_t(P,\varepsilon)$ может находиться только в $\zeta(\varepsilon)$-окрестностях точек A. Так как эти последние изолированы, а $T_t(P,\varepsilon)$ — непрерывная функция t, то мы видим, что для достаточно больших t рассматриваемая точка $T_t(P,\varepsilon)$ может лежать только в одной из указанных окрестностей.

Итак, для каждого значения параметра ε, меньшего ε', всякое решение точных уравнений (I.213), начиная с некоторого значения t, попадет в $\zeta(\varepsilon)$-окрестность одной из точек равновесия, принадлежащих множеству A, и будет продолжать оставаться в этой окрестности для всех больших значений t.

Выберем одну такую точку равновесия для уравнений (I.216) и предположим, что для нее имеет место случай 1 или 2 настоящего параграфа.

Заметим, что тогда из теоремы II и ее следствия I вытекает, что для данной точки равновесия мы можем указать такое положительное $\widetilde{\varepsilon}$, что для каждого $\varepsilon < \widetilde{\varepsilon}$ всякое решение уравнений (I.213), начиная с некоторого значения t, постоянно находится в $\zeta(\varepsilon)$-окрестности этой точки, или является периодическим, или стремится к периодическому решению при $t \to \infty$.

Пусть нам удалось доказать аналогичное утверждение также и для такой точки равновесия, для которой имеет место случай 3. Тогда, очевидно,

благодаря конечности множества A мы можем указать на основании вышесказанного такое положительное ε_0, что для всякого $\varepsilon < \varepsilon_0$ любое решение уравнений (I.213), а следовательно и (I.209), или оказывается периодическим, или стремится к периодическому решению при $t \to \infty$.

Итак, наша теорема будет полностью доказана, как только мы сможем доказать следующее утверждение.

Пусть (u_0, v_0) будет точкой равновесия для уравнений (I.213), для которой

$$p_1 < 0, \quad p_2 = 0. \tag{I.240}$$

Пусть далее $\zeta(\varepsilon)$ стремится к нулю вместе с ε. Тогда можно найти положительное ε_0 таким образом, что всякое решение уравнений (I.213), которое для достаточно больших t постоянно находится в $\zeta(\varepsilon)$-окрестности точки (u_0, v_0), или будет периодическим, или будет стремиться к периодическому при $t \to \infty$, если только данное значение $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Это утверждение мы сейчас и будем доказывать. Возьмем правые части уравнений (I.213) и рассмотрим их разложения Фурье

$$U(t, u, v) = U(u, v) + \sum_{n \neq 0} U_n(u, v)\, \mathrm{e}^{in\nu t},$$
$$V(t, u, v) = V(u, v) + \sum_{n \neq 0} V_n(u, v)\, \mathrm{e}^{in\nu t},$$

в которых

$$\nu = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Совершим в этих уравнениях замену переменных, полагая

$$u = \overline{u} + \varepsilon f(t, \overline{u}, \overline{v}), \quad v = \overline{v} + \varepsilon F(t, \overline{u}, \overline{v}), \tag{I.241}$$

где

$$f(t, u, v) = \sum_{n \neq 0} U_n(u, v) \frac{\mathrm{e}^{in\nu t} - 1}{in\nu},$$
$$F(t, u, v) = \sum_{n \neq 0} V_n(u, v) \frac{\mathrm{e}^{in\nu t} - 1}{in\nu}. \tag{I.242}$$

Из формул (I.242) нетрудно усмотреть, что f, F являются аналитическими функциями (t, u, v), регулярными в окрестности любых вещественных значений этих аргументов, и что, кроме того, f, F обладают по отношению к t периодом τ.

Подставляя (I.241) в (I.213), после простых преобразований приходим к уравнениям вида

$$\frac{d\overline{u}}{dt} = \varepsilon U(\overline{u}, \overline{v}) + \varepsilon^2 R_1(t, \overline{u}, \overline{v}, \varepsilon),$$
$$\frac{d\overline{v}}{dt} = \varepsilon V(\overline{u}, \overline{v}) + \varepsilon^2 R_2(t, \overline{u}, \overline{v}, \varepsilon). \tag{I.243}$$

Здесь функции R_1, R_2 вместе со своими частными производными любого порядка по всем аргументам $(t, \overline{u}, \overline{v}, \varepsilon)$ будут ограничены в области

$$-\infty < t < \infty, \quad |\overline{u} - u_0| < r, \quad |\overline{v} - v_0| < r, \quad 0 < \varepsilon < \delta,$$

где r, δ — некоторые положительные числа.

Введем далее новые переменные ξ, η посредством формул

$$\overline{u} = u_0 + \xi\omega(\varepsilon), \quad \overline{v} = v_0 + \eta\omega(\varepsilon), \quad \omega(\varepsilon) = \sup\left\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\zeta(\varepsilon)}\right\}. \tag{I.244}$$

Тогда из (I.243) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \varepsilon U'_u(u_0, v_0)\xi + \varepsilon U'_v(u_0, v_0)\eta + \varepsilon S_1(t, \xi, \eta, \varepsilon), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \varepsilon V'_u(u_0, v_0)\xi + \varepsilon V'_v(u_0, v_0)\eta + \varepsilon S_2(t, \xi, \eta, \varepsilon), \end{aligned} \tag{I.245}$$

где

$$\begin{aligned} S_1 = \frac{1}{\omega(\varepsilon)}\{&U[u_0 + \xi\omega(\varepsilon),\ v_0 + \eta\omega(\varepsilon)] - U(u_0, v_0) - \\ &- U'_u(u_0, v_0)\xi\omega(\varepsilon) - U'_v(u_0, v_0)\eta\omega(\varepsilon)\} + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\omega(\varepsilon)} R_1\{t, u_0 + \xi\omega(\varepsilon),\ v_0 + \eta\omega(\varepsilon),\ \varepsilon\}, \\ S_2 = \frac{1}{\omega(\varepsilon)}\{&V[u_0 + \xi\omega(\varepsilon),\ v_0 + \eta\omega(\varepsilon)] - V(u_0, v_0) - \\ &- V'_u(u_0, v_0)\xi\omega(\varepsilon) - V'_v(u_0, v_0)\eta\omega(\varepsilon)\} + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\omega(\varepsilon)} R_2\{t, u_0 + \xi\omega(\varepsilon),\ v_0 + \eta\omega(\varepsilon),\ \varepsilon\}. \end{aligned} \tag{I.246}$$

Но в соответствии с (I.240) одно характеристическое значение матрицы

$$\begin{vmatrix} U'_u(u_0, v_0), & U'_v(u_0, v_0) \\ V'_u(u_0, v_0), & V'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \tag{I.247}$$

отрицательно, а другое равно нулю. Существует поэтому линейное преобразование, приводящее матрицу (I.247) к виду

$$\begin{vmatrix} 0, & 0 \\ 0, & p_1 \end{vmatrix}.$$

Совершим посредством такого преобразования замену переменных

$$\xi = A_{11}g + A_{12}h, \quad \eta = A_{21}g + A_{22}h. \tag{I.248}$$

Тогда из уравнений (I.245) получим для новых неизвестных уравнения

$$\frac{dg}{dt} = \varepsilon Z_1(t, g, h, \varepsilon), \quad \frac{dh}{dt} = \varepsilon p_1 h + \varepsilon Z_2(t, g, h, \varepsilon). \tag{I.249}$$

Из (I.246) нетрудно заметить, что для некоторых положительных r^*, δ^* можем написать неравенства вида

$$\begin{aligned} &|Z_1(t,g,h,\varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon), \quad |Z_2(t,g,h,\varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon), \\ &|Z_1(t,g',h',\varepsilon) - Z_1(t,g,h,\varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon)\{|g'-g| + |h'-h|\}, \\ &|Z_2(t,g',h',\varepsilon) - Z_2(t,g,h,\varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon)\{|g'-g| + |h'-h|\} \end{aligned} \tag{I.250}$$

при всех аргументах, удовлетворяющих неравенствам

$$-\infty < t < \infty, \quad |g| \leqslant r^*, \quad |g'| \leqslant r^*, \quad |h| \leqslant r^*, \quad |h'| \leqslant r^*, \quad \varepsilon \leqslant \delta^*. \tag{I.251}$$

Здесь

$$M(\varepsilon) \to 0, \quad \lambda(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Легко убедиться также, что функции Z_1, Z_2 обладают по отношению к t периодом τ.

Итак, посредством последовательных преобразований (I.241), (I.242), (I.248) уравнения (I.213) приводятся к виду уравнений (I.249), правые части которых удовлетворяют вышеперечисленным условиям.

Поэтому наше утверждение, которое мы сформулировали применительно к уравнениям (I.213), будет доказано, как только соответствующее утверждение будет установлено для уравнений (I.249).

Таким образом, нам остается доказать, что функции $\eta(\varepsilon)$, стремящейся к нулю вместе с ε, мы можем поставить в соответствие положительное ε_0, для которого при каждом значении $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ любое решение $g(t)$, $h(t)$ уравнений (I.249), удовлетворяющее для достаточно больших t неравенствам вида

$$|g(t)| \leqslant \eta(\varepsilon), \quad |h(t)| \leqslant \eta(\varepsilon), \tag{I.252}$$

должно оказаться или периодическим решением, или решением, стремящимся к периодическому при $t \to \infty$.

Для доказательства введем в рассмотрение функции $P(t,g,h,\varepsilon)$, $Q(t,g,h,\varepsilon)$, которые обладают следующими свойствами.

Функции P, Q определены для

$$-\infty < t < \infty, \quad -\infty < g < \infty, \quad |h| \leqslant r^*, \quad \varepsilon < \delta^*$$

и обладают по отношению к t периодом τ.

Для значений g, меньших r^* по абсолютной величине, P, Q совпадают соответственно с Z_1, Z_2:

$$P = Z_1, \quad Q = Z_2, \quad |g| < r^*. \tag{I.253}$$

Далее, функции P, Q удовлетворяют неравенствам вида (I.250) при всех вещественных (t, g, g'), если только

$$|h| \leqslant r^*, \quad |h'| \leqslant r^*, \quad \varepsilon \leqslant \delta^*.$$

Совершенно очевидно, что такие функции P, Q нетрудно построить самыми разнообразными способами.

Возьмем теперь систему уравнений

$$\frac{dg}{dt} = \varepsilon P(t,g,h,\varepsilon), \quad \frac{dh}{dt} = \varepsilon p_1 h + \varepsilon Q(t,g,h,\varepsilon). \tag{I.254}$$

На основании (I.253) мы видим, что всякое решение $g(t)$, $h(t)$ этих уравнений, для которого

$$|g(t)| \leqslant r^*,$$

будет также удовлетворять уравнениям (I.249), и наоборот. Но так как для достаточно малых ε имеем $\eta(\varepsilon) < r^*$, то, очевидно, для доказательства сформулированного выше утверждения для уравнений (I.249) достаточно доказать это утверждение для уравнений (I.254).

Нетрудно заметить, однако, что уравнения (I.254) входят в класс уравнений, к которым применимы наши леммы II, III, IV. Поэтому можно найти такое положительное ε_0, что при каждом $\varepsilon < \varepsilon_0$ уравнения (I.254) имеют интегральное многообразие

$$h = f(t, g), \tag{I.255}$$

где $f(t, g)$ — периодическая функция t с периодом τ, удовлетворяющая неравенствам

$$|f(t, g)| \leqslant \Delta(\varepsilon), \quad |f(t, g') - f(t, g'')| \leqslant \delta(\varepsilon)|g' - g''|$$

для всех вещественных t, g, g', g'', причем

$$\Delta(\varepsilon) \to 0, \quad \delta(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Если $g(t)$, $h(t)$ есть решение уравнений (I.254), такое, что

$$|h(t)| \leqslant \eta(\varepsilon), \quad t \geqslant t_0, \tag{I.256}$$

то

$$|h(t) - f(t, g(t))| \leqslant C\, \mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha(t-t_0)}|h(t_0) - f(t_0, g(t_0))|, \quad t \geqslant t_0, \tag{I.257}$$

где C и α — положительные постоянные, не зависящие от t_0 и ε.

Но отсюда вытекает, что для всякого решения $g(t)$, $h(t)$ со свойством (I.256) справедливо неравенство

$$\left|\frac{dg(t)}{dt} - \varepsilon P\{t, g(t), f(t, g(t)), \varepsilon\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant K\, \mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha(t-t_0)}|h(t_0) - f(t_0, g(t_0))|, \quad t \geqslant t_0, \quad K = \text{const}. \tag{I.258}$$

Применяя здесь рассуждения, обычно используемые в теории Пуанкаре для уравнений вида $d\varrho/dt = F(t, \varrho)$ с функцией $F(t, \varrho)$, периодической по отношению к t, нетрудно убедиться, что всякая функция $g(t)$, удовлетворяющая неравенству (I.258) и неравенству

$$|g(t)| \leqslant \eta(\varepsilon), \quad t \geqslant t_0,$$

или является периодическим решением уравнения

$$\frac{dg(t)}{dt} = \varepsilon P\{t, g(t), f(t, g(t)), \varepsilon\},$$

или стремится к таковому при $t \to \infty$.

Это и завершает доказательство нашей теоремы.

Глава II

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ДЛЯ СУММ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФАЗ

§ 1. Рассмотрим случайные величины вида

$$x_r = \sum_{n=1}^{N} (a_{n,r} \cos \varphi_n + b_{n,r} \sin \varphi_n), \quad r = 1, \ldots, m, \tag{II.1}$$

где φ_n — независимые случайные фазы, равнораспределенные по окружности; $a_{n,r}$, $b_{n,r}$ — данные вещественные числа, зависящие от N. Пусть при $N \to \infty$ (m фиксировано) математические ожидания

$$E(x_r x_s) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (a_{n,r} a_{n,s} + b_{n,r} b_{n,s})$$

стремятся к пределам

$$E(x_r x_s) \to A_{rs}, \tag{II.2}$$

таким, что квадратичная форма с коэффициентами A_{rs} является положительно определенной.

Пусть, кроме того,

$$\sum_{n=1}^{N} (a_{n,r}^4 + b_{n,r}^4) \to 0, \quad r = 1, \ldots, m. \tag{II.3}$$

Теорема. *Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_m)$, определенную для всех вещественных значений переменных $x_1, \ldots, x_m$, удовлетворяющую неравенству*

$$|f(x_1, \ldots, x_m)| \leqslant A \exp\left\{ K \sum_{q=1}^{m} |x_q| \right\} \tag{II.4}$$

и интегрируемую в смысле Римана по любому конечному параллелепипеду $a_1 < x_1 < b_1, \ldots, a_m < x_m < b_m$.

Тогда при $N \to \infty$ математическое ожидание случайной величины

$$E\{f(x_1, \ldots, x_m)\}$$

стремится к предельному значению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1, \ldots, x_m) f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m,$$

где

$$\Phi = \frac{\exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} (A^{-1})_{rs} x_r x_s \right\}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m \sqrt{\det \|A_{rs}\|}} \tag{II.5}$$

и $(A^{-1})_{rs}$ являются элементами матрицы A^{-1}, обратной матрице $\|A_{rs}\|$.

Доказательство. Разобьем его на два этапа. Прежде всего покажем справедливость теоремы для функций вида

$$f = \exp\left\{\sum_{r=1}^{m} \lambda_r x_r\right\}, \tag{II.6}$$

где λ_r — произвольные фиксированные комплексные числа. Затем, исходя из этого факта, распространим предельное соотношение на случай произвольной функции f, удовлетворяющей условиям теоремы, чем и завершим доказательство.

Рассмотрим выражение математического ожидания случайной величины $\exp\left\{\sum_{r=1}^{m} \lambda_r x_r\right\}$ и заметим, что ввиду независимости φ_n и их равномерного распределения по окружности можно написать

$$E\left\{\exp\left(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r x_r\right)\right\} = \prod_{n=1}^{N} \mathfrak{M}\left\{\exp\left(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r a_{n,r} \cos\varphi + \sum_{r=1}^{m} \lambda_r b_{n,r} \sin\varphi\right)\right\}, \tag{II.7}$$

где вообще

$$\mathfrak{M}\{F(\varphi)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi)\, d\varphi.$$

Но при любых A и B имеем тождественно

$$\mathfrak{M}\{\exp(A\cos\varphi + B\sin\varphi)\} = \mathfrak{M}\left\{\exp\left(\sqrt{A^2 + B^2}\cos\varphi\right)\right\}.$$

Поэтому соотношение (II.7) может быть представлено в виде

$$E\left\{\exp\left(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r x_r\right)\right\} = \prod_{n=1}^{N} (1 + u_n), \tag{II.8}$$

где

$$u_n = \mathfrak{M}\left\{\exp\left(\sqrt{\mathfrak{A}_n}\cos\varphi\right) - 1\right\} \tag{II.9}$$

и

$$\mathfrak{A}_n = \left(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r a_{n,r}\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r b_{n,r}\right)^2. \tag{II.10}$$

Но при любых комплексных u_n, R_n имеем очевидное неравенство

$$\left|\prod_{n=1}^{N}(1 + u_n) - \prod_{n=1}^{N}(1 + u_n + R_n)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |R_n| \prod_{n=1}^{N}(1 + |u_n| + |R_n|),$$

полагая в котором

$$R_n = e^{u_n} - u_n - 1,$$

из (II.8) получим

$$\left|E\left\{\exp\left(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r x_r\right)\right\} - \exp\left\{\sum_{n=1}^{N} u_n\right\}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|u_n|^2}{2} \exp\{|u_n|\} \exp\left\{\sum_{n=1}^{N} |u_n|\right\}. \tag{II.11}$$

С другой стороны, благодаря неравенству

$$\left|\exp\left\{\sqrt{\mathfrak{A}_n}\cos\varphi\right\} - 1 - \sqrt{\mathfrak{A}_n}\cos\varphi - \frac{\left(\sqrt{\mathfrak{A}_n}\cos\varphi\right)^2}{2} - \frac{\left(\sqrt{\mathfrak{A}_n}\cos\varphi\right)^3}{6}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\mathfrak{A}_n|^2\cos^4\varphi}{24}\exp\left\{\sqrt{|\mathfrak{A}_n|}\right\}$$

соотношение (II.9) дает

$$\left|u_n - \frac{\mathfrak{A}_n}{4}\right| < \frac{|\mathfrak{A}_n|^2}{64}\exp\left\{\sqrt{|\mathfrak{A}_n|}\right\} \tag{II.12}$$

и

$$|u_n| < \frac{|\mathfrak{A}_n|}{4} + \frac{|\mathfrak{A}_n|^2}{64}\exp\left\{\sqrt{|\mathfrak{A}_n|}\right\}. \tag{II.13}$$

Положим теперь

$$\sum_{r=1}^{m}|\lambda_r|^2\sqrt{2m\sum_{r=1}^{m}\sum_{n=1}^{N}(a_{r,n}^4 + b_{r,n}^4)} = \varepsilon_N$$

и заметим, что в силу условия теоремы

$$\varepsilon_N \to 0, \quad N \to \infty. \tag{II.14}$$

Из (II.10) имеем

$$|\mathfrak{A}_n| \leqslant \sum_{r=1}^{m}|\lambda_r|^2\sum_{r=1}^{m}(a_{n,r}^2 + b_{n,r}^2) \leqslant \varepsilon_N.$$

Но ввиду (II.14) для достаточно больших N, которые мы только и будем далее рассматривать, можем положить $\varepsilon_N < 1$, и на основании (II.13)

$$|u_n| < \frac{1}{2}|\mathfrak{A}_n| < \frac{1}{2}.$$

Поэтому, принимая во внимание (II.12), (II.13), неравенство (II.11) можно представить в форме

$$\left|M\left\{\exp\left(\sum_{r=1}^{m}\lambda_r x_r\right)\right\} - \exp\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathfrak{A}_n}{4}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{|\mathfrak{A}_n|^2}{8}\sqrt{\mathrm{e}}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}|\mathfrak{A}_n|\right\} + \sum_{n=1}^{N}\frac{|\mathfrak{A}_n|^2}{64}\,\mathrm{e}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}|\mathfrak{A}_n|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_N\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{8}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}|\mathfrak{A}_n|\right\}\left(1 + \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{8}\right)\sum_{n=1}^{N}|\mathfrak{A}_n|. \tag{II.15}$$

Имеем далее

$$\sum_{n=1}^{N} \mathfrak{A}_n = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} 2\lambda_r\lambda_s E(x_r x_s) \to 2\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} \lambda_r\lambda_s A_{rs},$$

$$\sum_{n=1}^{N} |\mathfrak{A}_n| \leqslant \sum_{r=1}^{m} |\lambda_r|^2 \sum_{r=1}^{m} 2E(x_r^2) \to \sum_{r=1}^{m} |\lambda_r|^2 \sum_{r=1}^{m} 2A_{rr},$$

и, следовательно, из (II.15) можем заключить, что

$$E\left\{\exp\left(\sum_{r=1}^{m}\lambda_r x_r\right)\right\} \to \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} A_{rs}\lambda_r\lambda_s\right\}, \quad N\to\infty.$$

Нетрудно заметить, однако, с помощью вычисления интегралов типа интеграла Пуассона, что тождественно

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} A_{rs}\lambda_r\lambda_s\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1,\dots,x_m)\exp\left\{\sum_{r=1}^{m}\lambda_r x_r\right\} dx_1\dots dx_m.$$

Итак, мы приходим к предельному соотношению

$$E\left\{\exp\left(\sum_{r=1}^{m}\lambda_r x_r\right)\right\} \to E_\infty\left\{\exp\left(\sum_{r=1}^{m}\lambda_r x_r\right)\right\}, \quad N\to\infty,$$

где для сокращения положено

$$E_\infty\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \Phi f\, dx_1\dots dx_m,$$

и тем самым заканчиваем первый этап нашего доказательства.

§ 2. Из доказанного выше вытекает справедливость предельного соотношения

$$E\{f\} \to E_\infty\{f\}, \quad N\to\infty, \tag{II.16}$$

для функций, представимых конечными суммами вида

$$f = \sum_{\lambda_1}\dots\sum_{\lambda_m} A_{\lambda_1,\dots,\lambda_m}\exp(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m), \tag{II.17}$$

где

$$A_{\lambda_1,\dots,\lambda_m} = \text{const}.$$

Пусть M — произвольное положительное число. Имеем, очевидно,

$$\exp\left\{M\sum_{q=1}^{m}|x_q|\right\} \leqslant \sum_{q_1=1}^{2}\dots\sum_{q_m=1}^{2}\exp\left\{M\sum_{s=1}^{m}(-1)^{q_s}x_s\right\},$$

и потому

$$E\left[\exp\left\{M\sum_{q=1}^{m}|x_q|\right\}\right]\leqslant\sum_{q_1=1}^{2}\dots\sum_{q_m=1}^{2}E\left[\exp\left\{M\sum_{s=1}^{m}(-1)^{q_s}x_s\right\}\right]\to$$

$$\to\sum_{q_1=1}^{2}\dots\sum_{q_m=1}^{2}E_\infty\left[\exp\left\{M\sum_{s=1}^{m}(-1)^{q_s}x_s\right\}\right].$$

Таким образом, всякому $M>0$ можно поставить в соответствие такое $C(M)>0$, что для всех N имеет место неравенство

$$E\left[\exp\left\{M\sum_{q=1}^{m}|x_q|\right\}\right]\leqslant C(M),\quad E_\infty\left[\exp\left\{M\sum_{q=1}^{m}|x_q|\right\}\right]\leqslant C(M). \tag{II.18}$$

Заметив это, перейдем к рассмотрению произвольной непрерывной функции $f(x_1,\dots,x_m)$, удовлетворяющей неравенству (II.4).

Нетрудно видеть, что для любого положительного значения T мы можем построить непрерывную функцию $f_T(x_1,\dots,x_m)$, обладающую периодом $3T$ по каждому из аргументов, так, чтобы она удовлетворяла неравенству (II.4) и чтобы для значений x_k, меньших T по абсолютной величине, f_T совпадала с f:

$$f_T(x_1,\dots,x_m)=f(x_1,\dots,x_m)\quad\text{для }|x_1|\leqslant T,\dots,|x_m|\leqslant T.$$

Ввиду (II.4) имеем

$$|f_T(x_1,\dots,x_m)-f(x_1,\dots,x_m)|\leqslant 2A\exp\left\{K\sum_{q=1}^{m}|x_q|\right\}.$$

Но левая часть этого неравенства равна нулю, если все аргументы по абсолютной величине не превышают T. С другой стороны, если хотя бы один из них больше T, то

$$K\sum_{q=1}^{m}|x_q|\leqslant 2K\sum_{q=1}^{m}|x_q|-KT.$$

Поэтому для всех $x_1,\dots,x_m$ можем написать

$$|f_T(x_1,\dots,x_m)-f(x_1,\dots,x_m)|\leqslant 2A\,\mathrm{e}^{-KT}\exp\left\{2K\sum_{q=1}^{m}|x_q|\right\},$$

откуда благодаря (II.18) получаем

$$\begin{aligned}E\{|f-f_T|\}&\leqslant 2AC(2K)\,\mathrm{e}^{-KT},\\ E_\infty\{|f-f_T|\}&\leqslant 2AC(2K)\,\mathrm{e}^{-KT}.\end{aligned}\tag{II.19}$$

Фиксируем теперь произвольно малое положительное число ε и подберем T так, чтобы

$$AC(2K)\,\mathrm{e}^{-KT}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}. \tag{II.20}$$

Так как любую непрерывную периодическую функцию аргументов $x_1, \ldots, x_m$ мы можем равномерно аппроксимировать суммами типа (II.17) (с чисто мнимыми значениями показателей λ), то, очевидно, можно найти такую сумму f_ε этого типа, чтобы

$$|f_T - f_\varepsilon| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}.$$

Тогда вследствие (II.19), (II.20) имеем

$$E\{|f - f_\varepsilon|\} \leqslant E\{|f - f_T|\} + E\{|f_T - f_\varepsilon|\} \leqslant \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3} \tag{II.21}$$

и аналогично

$$E_\infty\{|f - f_\varepsilon|\} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{II.22}$$

Но так как f_ε является суммой типа (II.17), то для любого фиксированного значения ε имеем в соответствии с вышеустановленным

$$E\{f_\varepsilon\} \to E_\infty\{f_\varepsilon\} \quad \text{при } N \to \infty,$$

и, следовательно, можно указать такое значение N_ε, что

$$|E\{f_\varepsilon\} - E_\infty\{f_\varepsilon\}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для } N \geqslant N_\varepsilon.$$

Принимая во внимание (II.21), (II.22), заметим, что для всех $N \geqslant N_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|E\{f\} - E_\infty\{f\}| \leqslant E\{|f - f_\varepsilon|\} + E_\infty\{|f - f_\varepsilon|\} + \\ + |E\{f_\varepsilon\} - E_\infty\{f_\varepsilon\}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

показывающее, что

$$E\{f\} \to E_\infty\{f\} \quad \text{при } N \to \infty.$$

Перейдем, наконец, к рассмотрению общего случая. Пусть $f(x_1, \ldots, x_m)$ будет функцией, удовлетворяющей неравенству (II.4) и интегрируемой в смысле Римана по любому конечному параллелепипеду.

Так как для этой функции интеграл, взятый в смысле Римана,

$$E_\infty\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi f \, dx_1 \ldots dx_m$$

является абсолютно сходящимся, то для любого $\varepsilon > 0$ можно построить такие непрерывные функции $\bar{f}_\varepsilon$, $\overset{+}{f}_\varepsilon$, удовлетворяющие неравенствам типа (II.4), что

$$\bar{f}_\varepsilon \leqslant f \leqslant \overset{+}{f}_\varepsilon, \quad E_\infty\{\overset{+}{f}_\varepsilon\} - E_\infty\{\bar{f}_\varepsilon\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но для функций $\bar{f}_\varepsilon$, $\overset{+}{f}_\varepsilon$, по вышеустановленному, имеем

$$E\{\bar{f}_\varepsilon\} \to E_\infty\{\bar{f}_\varepsilon\}, \quad E\{\overset{+}{f}_\varepsilon\} \to E_\infty\{\overset{+}{f}_\varepsilon\}$$

при любом положительном фиксированном значении ε, и потому всякому $\varepsilon > 0$ мы можем поставить в соответствие такое N_ε, что

$$|E\{\bar{f}_\varepsilon\} - E_\infty\{\bar{f}_\varepsilon\}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad |E\{\overset{+}{f}_\varepsilon\} - E_\infty\{\overset{+}{f}_\varepsilon\}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } N \geqslant N_\varepsilon.$$

Следовательно, для всех $N \geqslant N_\varepsilon$ справедливы неравенства

$$E\{f\} - E_\infty\{f\} \leqslant E\{\overset{+}{f}_\varepsilon\} - E_\infty\{\overset{-}{f}_\varepsilon\} =$$

$$= E\{\overset{+}{f}_\varepsilon\} - E_\infty\{\overset{+}{f}_\varepsilon\} + E_\infty\{\overset{+}{f}_\varepsilon\} - E_\infty\{\overset{-}{f}_\varepsilon\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$E\{f\} - E_\infty\{f\} \geqslant E\{\overset{-}{f}_\varepsilon\} - E_\infty\{\overset{+}{f}_\varepsilon\} =$$

$$= E\{\overset{-}{f}_\varepsilon\} - E_\infty\{\overset{-}{f}_\varepsilon\} + E_\infty\{\overset{-}{f}_\varepsilon\} - E_\infty\{\overset{+}{f}_\varepsilon\} \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon,$$

показывающие, что разность

$$E\{f\} - E_\infty\{f\}$$

можно сделать сколь угодно малой (меньшей ε по абсолютной величине) при достаточно больших N (при $N \geqslant N_\varepsilon$). Это и завершает доказательство нашей теоремы.

§ 3. Рассматривая приведенное доказательство, мы видим, что оно непосредственно применимо также и к тому случаю, когда в суммах вида (II.1) величины $a_{n,r}$, $b_{n,r}$ представляют собой статистические переменные, независимые для разных значений[1] индекса n.

Для обеспечения справедливости нашей теоремы в этом случае достаточно заменить условие (II.3) условием выполнения неравенств

$$E\{\exp\{C[|a_{n,r}| + |b_{n,r}|]\} - 1\} \leqslant \eta_N(C), \quad n = 1, \ldots, N, \quad r = 1, \ldots, m, \tag{II.23}$$

при любых возможных значениях индексов n, r и при любом фиксированном значении положительной постоянной C.

В этих неравенствах не зависящая от индексов n, r величина $\eta_N(C)$ должна стремиться к нулю для $N \to \infty$ при любом значении положительного числа C.

Глава III

О ВЛИЯНИИ СЛУЧАЙНОЙ СИЛЫ НА ГАРМОНИЧЕСКИЙ ВИБРАТОР

§ 1. Рассмотрим гармонический вибратор, описываемый уравнением колебаний вида

$$q'' + \omega^2 q = f(t), \tag{III.1}$$

где сила $f(t)$ представляется конечной суммой из N членов:

$$f(t) = \sum_\nu a_\nu \cos(\nu t + \varphi_\nu). \tag{III.2}$$

Предположим, что N фазовых углов φ_ν являются независимыми статистическими переменными с равномерным по окружности распределением вероятности.

[1] Величины $a_{n,r}$, $b_{n,r}$ при одном и том же значении индекса n вообще могут быть статистически независимыми.

В отношении же амплитуд a_ν и частот ν будем считать, что они есть данные вещественные числа, зависящие от N так, что при $N \to \infty$ для любого положительного α имеем

$$\sum_{0<\nu<\alpha} a_\nu^2 \to \int_0^\alpha I(\nu)\, d\nu, \quad \sum_\nu a_\nu^2 \to \int_0^\infty I(\nu) d_\nu, \tag{III.3}$$

где $I(\nu)$ — некоторая неотрицательная непрерывная функция ν, интегрируемая на интервале $0 < \nu < \infty$.

Вследствие этих допущений предельный переход $N \to \infty$ с физической точки зрения соответствует переходу от случайных сил с дискретным спектром к случайным силам с непрерывным спектром, характеризуемым спектральной интенсивностью $I(\nu)$.

Условимся называть состоянием вибратора $x(t)$ в некоторый момент времени t совокупность $q(t)$, $v(t)$ его координаты и скорости, относящихся к этому моменту.

Тогда совершенно ясно, что задание начального состояния вибратора вполне определяет распределение вероятностей для набора n его состояний $x(t_1), \ldots, x(t_n)$, относящихся к моментам времени $t_1, \ldots, t_n$.

В самом деле, интегрируя дифференциальное уравнение (III.1), получаем

$$q(t) = q_p(t) + q_e(t), \quad v(t) = v_p(t) + v_e(t),$$

где

$$q_p(t) = q(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t,$$
$$v_p(t) = -q(0)\omega \sin\omega t + v(0)\cos\omega t$$

и

$$q_e(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$
$$v_e(t) = \int_0^t \cos\omega(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau. \tag{III.4}$$

При данных фиксированных значениях $q(0)$, $v(0)$ все величины $q_p(t_1)$, $v_p(t_1), \ldots, q_p(t_n)$, $v_p(t_n)$ имеют определенные значения. С другой стороны, величины $q_e(t_1)$, $v_e(t_1), \ldots, q_e(t_n)$, $v_e(t_n)$, определенные выражением (III.2) для $f(t)$, являются известными функциями фазовых углов φ_ν, закон распределения вероятностей для которых задан.

Мы можем, таким образом, рассматривать совокупность состояний вибратора

$$\{x(t)\}, \quad -\infty < t < \infty,$$

как некоторый стохастический процесс.

Посмотрим, что произойдет с этим стохастическим процессом при переходе к непрерывному спектру, т. е. при $N \to \infty$.

Возьмем для этого некоторую произвольную функцию $2n$ аргументов $F(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n)$, определенную для всех их вещественных значений, ин-

тегрируемую в смысле Римана по любому конечному $2n$-мерному параллелепипеду и удовлетворяющую неравенству

$$|F(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n)| \leqslant A \exp\left\{K \sum_{q=1}^{n} (|\xi_q| + |\eta_q|)\right\}, \tag{III.5}$$

в котором A и K представляют некоторые положительные постоянные. Рассмотрим случайную переменную

$$F(q(t_1), v(t_1), \ldots, q(t_n), v(t_n)), \quad t_1 < t_2 < \ldots < t_n, \tag{III.6}$$

и составим ее математическое ожидание

$$E\{F[q(t_1), v(t_1), \ldots, q(t_n), v(t_n)]\}. \tag{III.7}$$

Покажем, что оно стремится к определенному пределу при $N \to \infty$, для чего используем теорему, доказанную нами в гл. II.

Теорема. *Допустим, что даны m (m фиксировано) случайных величин вида*

$$x_r = \sum_{n=1}^{N} (a_{n,r} \cos \varphi_n + b_{n,r} \sin \varphi_n), \quad r = 1, \ldots, m, \tag{III.8}$$

в которых фазовые углы φ_n являются независимыми статистическими переменными, равнораспределенными по окружности, а величины $a_{n,r}$, $b_{n,r}$ — данными вещественными числами, зависящими от N таким образом, что при $N \to \infty$ математические ожидания

$$E(x_r x_s), \quad r = 1, \ldots, m, \quad s = 1, \ldots, m,$$

стремятся к коэффициентам A_{rs} некоторой положительно определенной квадратичной формы, причем так, что

$$\sum_{n=1}^{N} (a_{n,r}^4 + b_{n,r}^4) \to 0, \quad N \to \infty, \quad r = 1, \ldots, m. \tag{III.9}$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_m)$ есть некоторая функция, определенная для всех вещественных значений переменных $x_1, \ldots, x_m$, интегрируемая в смысле Римана по любому конечному m-мерному параллелепипеду и удовлетворяющая неравенству

$$|f(x_1, \ldots, x_m)| \leqslant A \exp\left\{K \sum_{q=1}^{m} |x_q|\right\},$$

в котором A и K — некоторые положительные постоянные.

Тогда при $N \to \infty$

$$E\{f(x_1, \ldots, x_m)\} \to \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1, \ldots, x_m) f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m,$$

где

$$\Phi = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}(A^{-1})_{rs}x_r x_s\right\}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m \sqrt{\det\|A_{rs}\|}}$$

и где $(A^{-1})_{rs}$ *являются элементами матрицы, обратной матрице* $\|A_{rs}\|$.

По поводу формулировки этой теоремы заметим, что в силу очевидного тождества

$$\sum_r\sum_s \lambda_r\lambda_s E(x_r x_s) = E\left\{\left(\sum_r \lambda_r x_r\right)^2\right\}$$

мы можем условие стремления величин $E(x_r x_s)$ к коэффициентам некоторой положительно определенной квадратичной формы заменить эквивалентным условием стремления квадратичной формы

$$E\left\{\left(\sum_r \lambda_r x_r\right)^2\right\},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — произвольные вещественные переменные, к некоторой предельной положительно определенной квадратичной форме при $N \to \infty$.

Чтобы использовать ее для доказательства существования предела у математического ожидания (III.7), возьмем в качестве $x_1, \ldots, x_m$ случайные величины $q_s(t_1)$, $v_s(t_1), \ldots, q_s(t_n)$, $v_s(t_n)$, полагая тем самым $m = 2n$. Далее, в качестве функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ выберем функцию

$$F\{q_p(t_1) + \xi_1,\ v_p(t_1) + \eta_1, \ldots, q_p(t_n) + \xi_n,\ v_p(t_n) + \eta_n\}.$$

Величины $q_s(t_1)$, $v_s(t_1), \ldots, q_s(t_n)$, $v_s(t_n)$ являются случайными переменными вида (III.8):

$$q_s(t_k) = \sum_\nu \left\{ \frac{a_\nu}{\omega} \int_0^{t_k} \sin\omega(t_k - \tau)\cos\nu\tau\, d\tau \cos\varphi_\nu - \right.$$
$$\left. - \frac{a_\nu}{\omega} \int_0^{t_k} \sin\omega(t_k - \tau)\sin\nu\tau\, d\tau \sin\varphi_\nu \right\},$$

$$v_s(t_k) = \sum_\nu \left\{ a_\nu \int_0^{t_k} \cos\omega(t_k - \tau)\ \cos\nu\tau\, d\tau\ \cos\varphi_\nu - \right.$$
$$\left. - a_\nu \int_0^{t_k} \cos\omega(t_k - \tau)\ \sin\nu\tau\, d\tau\ \sin\varphi_\nu \right\},$$

для которых благодаря (III.3) выполняются условия (III.9).

В самом деле, чтобы убедиться в выполнении условия (III.9), достаточно установить, что

$$\sum_{\nu} a_\nu^4 \to 0. \tag{III.3'}$$

Пусть $a_{\nu_0}^2$ обозначает наибольшее из чисел a_ν^2.

Имеем, очевидно,

$$\sum_{\nu} a_\nu^4 \leqslant a_{\nu_0}^2 \sum_{\nu} a_\nu^2.$$

Но, согласно условию (III.3), сумма $\sum_{\nu} a_\nu^2$ стремится к конечной величине, а именно к $\int_0^\infty I(\nu)\,d\nu$. Поэтому соотношение (III.3') будет доказано, если мы докажем, что

$$a_{\nu_0}^2 \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Для доказательства этого последнего соотношения фиксируем произвольно малое число δ и найдем столь большое число Ω, для которого

$$\int_{\Omega}^{\infty} I(\nu)\,d\nu < \frac{\delta}{2}.$$

Разделим интервал $(0, \Omega)$ на L равных частей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_L$ и возьмем L столь большим, чтобы

$$\int_{\Delta_1} I(\nu)\,d\nu < \frac{\delta}{2}, \quad \int_{\Delta_2} I(\nu)\,d\nu < \frac{\delta}{2}, \ldots, \int_{\Delta_L} I(\nu)\,d\nu < \frac{\delta}{2}.$$

Рассмотрим суммы

$$\sum_{\Delta_1} a_\nu^2, \quad \sum_{\Delta_2} a_\nu^2, \ldots, \sum_{\Delta_L} a_\nu^2, \quad \sum_{\nu > \Omega} a_\nu^2,$$

взятые по частотам ν, лежащим соответственно в интервалах $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_L$, $\nu > \Omega$. Так как эти суммы, по условию (III.3), при $N \to \infty$ стремятся соответственно к интегралам

$$\int_{\Delta_1} I(\nu)\,d\nu, \quad \int_{\Delta_2} I(\nu)\,d\nu, \ldots, \int_{\Delta_L} I(\nu)\,d\nu, \quad \int_{\Omega}^{\infty} I(\nu)\,d\nu,$$

то, очевидно, можно найти такое N_δ, что для всех $N > N_\delta$ величины указанных сумм будут меньше δ.

Поскольку $a_{\nu_0}^2$ должно быть меньше одной из них, то

$$a_{\nu_0}^2 < \delta \quad \text{для } N > N_\varepsilon,$$

тем самым мы видим, что

$$a_{\nu_0}^2 \to 0 \quad \text{при } N \to \infty,$$

и завершаем наше доказательство. Для обоснования применимости цитированной выше теоремы теперь достаточно показать, что квадратичная форма

$$E\left\{\left[\sum_{r=1}^{n}(\lambda_r q_s(t_r)+\mu_r v_s(t_r))\right]^2\right\}=Q_N(\lambda,\mu)$$

(относительно вещественных переменных λ, μ) при $N\to\infty$ стремится к некоторой предельной положительно определенной форме. Для этого заметим, что на основании (III.4) мы можем написать

$$Q_N(\lambda,\mu)=E\left\{\left[\sum_{r=1}^{n}\int_0^{t_r}\frac{\lambda_r\sin\omega(t_r-\tau)+\omega\mu_r\cos\omega(t_r-\tau)}{\omega}f(\tau)\,d\tau\right]^2\right\}=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\sum_{r'=1}^{n}\int_0^{t_r}\int_0^{t_{r'}}K_r(t_r-\tau)K_{r'}(t_{r'}-\tau')E\{f(\tau)f(\tau')\}d\tau\,d\tau',$$

где для сокращения введено обозначение

$$\frac{\lambda_r\sin\omega z+\mu_r\omega\cos\omega z}{\omega}=K_r(z).$$

Но, с другой стороны,

$$E\{f(\tau)f(\tau')\}=\frac{1}{2}\sum a_\nu^2\cos\nu(\tau-\tau'),$$

откуда вследствие (III.3)

$$E\{f(\tau)f(\tau')\}\to\int_0^{\infty}I(\nu)\cos\nu(\tau-\tau')\,d\nu,$$

и потому

$$Q_N(\lambda,\mu)\to\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{r'=1}^{n}\int_0^{t_r}\int_0^{t_{r'}}K_r(t_r-\tau)K_{r'}(t_{r'}-\tau')\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\infty}I(\nu)\cos\nu(\tau-\tau')\,d\nu\right\}d\tau\,d\tau'.$$

Положим по определению[1]

$$I(-\nu)=I(\nu).$$

[1] До сих пор спектральная интенсивность $I(\nu)$ была определена лишь для положительных ν.

Тогда, очевидно,

$$\int_0^\infty I(\nu)\cos\nu(\tau-\tau')\,d\nu=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\cos\nu(\tau-\tau')\,d\nu=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\,e^{i\nu(\tau-\tau')}\,d\nu,$$

так что

$$\lim_{N\to\infty} Q_N(\lambda,\mu)=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left\{\sum_{r=1}^{n}\sum_{r'=1}^{n}\int_0^{t_r}\int_0^{t_{r'}} K_r(t_r-\tau)K_{r'}(t_{r'}-\tau')\,e^{i\nu(\tau-\tau')}\,d\tau\,d\tau'\right\}d\nu,$$

или

$$\lim_{N\to\infty} Q_N(\lambda,\mu)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left|\sum_{r=1}^{n}\int_0^{t_r} K_r(t_r-\tau)\,e^{i\nu\tau}\,d\tau\right|^2 d\nu=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left|\sum_{r=1}^{n}\int_0^{t_r}\frac{\lambda_r\sin\omega(t_r-\tau)+\mu_r\omega\cos\omega(t_r-\tau)}{\omega}\,e^{i\nu\tau}\,d\tau\right|^2 d\nu.$$

Как видно, предельная квадратичная форма существует и является положительно определенной. Мы можем поэтому использовать вышеупомянутую теорему и прийти к следующему результату.

Если $F(\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_n,\eta_n)$ — некоторая функция, определенная для всех вещественных значений своих аргументов, удовлетворяющая неравенству (III.5) и интегрируемая в смысле Римана по любому конечному $2n$-мерному параллелепипеду; если $t_1,\ldots,t_n$ — произвольные фиксированные числа, удовлетворяющие неравенству

$$t_1<\ldots<t_n,$$

тогда при $N\to\infty$ математическое ожидание

$$E\{F(q(t_1),\,v(t_1),\ldots,q(t_n),\,v(t_n))\} \tag{III.10}$$

стремится к предельному значению

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t_1,\ldots,t_n,\,\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_n,\eta_n)\times$$

$$\cdot\,F(q_p(t_1)+\xi_1,v_p(t_1)+\eta_1,\ldots,q_p(t_n)+\xi_n,v_p(t_n)+\eta_n)\,d\xi_1\,d\eta_1\ldots d\xi_n\,d\eta_n=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t_1,\ldots,t_n,\,\xi_1-q_p(t_1),\eta_1-v_p(t_1),\ldots,\xi_n-q_p(t_n),\eta_n-v_p(t_n))\times$$

$$\times\,F(\xi_1,\ldots,\eta_n)\,d\xi_1\ldots d\eta_n. \tag{III.11}$$

Здесь

$$\Phi(t_1, \ldots, t_n, \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sqrt{D}} \exp\left\{-\frac{1}{2} R(\xi, \eta)\right\}, \qquad \text{(III.12)}$$

где $R(\xi, \eta)$ — квадратичная форма относительно переменных $\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n$, коэффициенты которой являются элементами матрицы, обратной матрице коэффициентов квадратичной формы

$$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu) \left| \sum_{r=1}^{n} \int_0^{t_r} \frac{\xi_r \sin \omega(t_r - \tau) + \eta_r \omega \cos \omega(t_r - \tau)}{\omega} e^{i\nu\tau} \, d\tau \right|^2 d\nu, \qquad \text{(III.13)}$$

и где D есть детерминант квадратичной формы $Q(\xi_1, \eta)$.

Применим этот результат для функции $F(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n)$, равной единице в некотором произвольно фиксированном параллелепипеде

$$a_1 \leqslant \xi_1 \leqslant a_1 + \Delta a_1, \quad b_1 \leqslant \eta_1 \leqslant b_1 + \Delta b_1, \ldots, \quad a_n \leqslant \xi_n \leqslant a_n + \Delta a_n,$$
$$b_n \leqslant \eta_n \leqslant b_n + \Delta b_n$$

и равной нулю вне этого параллелепипеда.

Тогда, разумеется, математическое ожидание

$$E\{F(q(t_1), v(t_1), \ldots, q(t_n), v(t_n))\}$$

представляет вероятность события

$$a_1 \leqslant q(t_1) \leqslant a_1 + \Delta a_1, \quad b_1 \leqslant v(t_1) \leqslant b_1 + \Delta b_1, \ldots, \quad a_n \leqslant q(t_n) \leqslant a_n + \Delta a_n,$$
$$b_n \leqslant v(t_n) \leqslant b_n + \Delta b_n,$$

и мы видим, что вероятность этого события при $N \to \infty$ приближается к предельному значению, равному

$$\int_{a_1}^{a_1+\Delta a_1} \ldots \int_{b_n}^{b_n+\Delta b_n} \Phi(t_1, \ldots, t_n, \xi_1 - q_p(t_1), \ldots, \eta_n - v_p(t_n)) \, d\xi_1 \, d\eta_1 \ldots d\xi_n \, d\eta_n.$$

Мы можем поэтому говорить о предельном стохастическом процессе

$$\{X(t)\}, \quad -\infty < t < \infty, \qquad \text{(III.14)}$$

характеризуемом плотностями распределения вероятностей

$$\Phi(t_1, \ldots, t_n, \xi_1 - q_p(t_1), \ldots, \eta_n - v_p(t_n))$$

случайных величин

$$\xi_1 = q(t_1), \ \eta_1 = v(t_1), \ldots, \xi_n = q(t_n), \ \eta_n = v(t_n).$$

Этот предельный стохастический процесс, вообще говоря, не является марковским. Однако, как будет показано ниже, в двух физически интересных случаях его можно все же аппроксимировать марковским процессом.

Прежде чем приступить к рассмотрению этих случаев, установим еще одну формулу для определения функции $\Phi(t_1, \ldots, t_n, \xi_1, \ldots, \eta_n)$, которой нам в дальнейшем придется воспользоваться.

Возьмем для этого некоторую произвольную функцию F того же типа, что и раньше, от $2n$ аргументов и рассмотрим предельное математическое ожидание

$$E(F) = \lim_{N\to\infty} E\{F(g(t_1),\ h(t_1),\ g(t_2)-g(t_1),\ h(t_2)-h(t_1),\ \dots,\ g(t_n)-g(t_{n-1}),\ h(t_n)-h(t_{n-1}))\},$$

где вообще

$$\begin{aligned} g(t) &= q(t)\sin\omega t + \frac{v(t)}{\omega}\cos\omega t, \\ h(t) &= -q(t)\cos\omega t + \frac{v(t)}{\omega}\sin\omega t. \end{aligned} \tag{III.15}$$

На основании нашего общего результата имеем

$$E(F) = \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t_1,\dots,t_n,\ \xi_1 - q_p(t_1),\dots,\eta_n - v_p(t_n)) \times F(g_1, h_1, g_2-g_1,\dots,h_n-h_{n-1})\,d\xi_1\,d\eta_1\dots d\xi_n\,d\eta_n, \tag{III.16}$$

где

$$g_k = \xi_k\sin\omega t_k + \frac{\eta_k}{\omega}\cos\omega t_k, \quad h_k = -\xi_k\cos\omega t_k + \frac{\eta_k}{\omega}\sin\omega t_k.$$

Мы можем, однако, подсчитать $E(F)$ и другим путем. В самом деле, приложим теорему из гл. II к тому случаю, когда в качестве статистических переменных $x_1,\dots,x_m$ мы берем случайные величины

$$g(t_1),\ h(t_1),\ g(t_2)-g(t_1),\dots,h(t_n)-h(t_{n-1}).$$

Замечая, что

$$g(t) = \frac{v(0)}{\omega} + \int_0^t \frac{\cos\omega\tau}{\omega} f(\tau)\,d\tau, \quad h(t) = -q(0) + \int_0^t \frac{\sin\omega\tau}{\omega} f(\tau)\,d\tau,$$

$$g(t_{k+1}) - g(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\cos\omega\tau}{\omega} f(\tau)\,d\tau, \quad h(t_{k+1}) - h(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\sin\omega\tau}{\omega} f(\tau)\,d\tau,$$

и повторяя ранее приведенные рассуждения, получаем

$$E(F) = \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(t_1,\dots,t_n,\ \alpha_1 - \frac{v(0)}{\omega},\ \beta_1 + q(0),\ \alpha_2,\dots,\beta_n\right) \times F(\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_n,\beta_n)\,d\alpha_1\dots d\beta_n. \tag{III.17}$$

Здесь

$$\Psi(t_1,\dots,t_n,\ \alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_n,\beta_n) = \frac{1}{2(\pi)^n\sqrt{\Delta}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Pi(\alpha,\beta)\right\}, \tag{III.18}$$

где $\Pi(\alpha,\beta)$ — квадратичная форма относительно переменных $\alpha_1,\beta_1,\ldots,$ α_n,β_n, коэффициенты которой являются элементами матрицы, обратной матрице коэффициентов квадратичной формы

$$\Omega(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left|\sum_{r=0}^{n-1}\int_{t_r}^{t_{r+1}}\frac{\alpha_{r+1}\cos\omega\tau+\beta_{r+1}\sin\omega\tau}{\omega}\,e^{i\nu\tau}\,d\tau\right|^2 d\nu,\quad t_0=0, \tag{III.19}$$

и где Δ есть детерминант квадратичной формы $\Omega(\alpha,\beta)$. Совершим под знаком интеграла в формуле (III.17) замену переменных интегрирования, выразив α,β через ξ,η с помощью соотношений

$$\alpha_1=g_1,\quad \beta_1=h_1,\quad \alpha_2=g_2-g_1,$$
$$\beta_2=h_2-h_1,\ldots,\quad \alpha_n=g_n-g_{n-1},\quad \beta_n=h_n-h_{n-1},$$
$$g_k=\xi_k\sin\omega t_k+\frac{\eta_k}{\omega}\cos\omega t_k,\quad h_k=-\xi_k\cos\omega t_k+\frac{\eta_k}{\omega}\sin\omega t_k.$$

Тогда, сравнивая формулы (III.16), (III.17) и принимая во внимание величину инфинитезимального объема в переменных (α,β), (ξ,η)

$$d\alpha_1\,d\beta_1\ldots d\alpha_n\,d\beta_n=\left(\frac{1}{\omega}\right)^{2n}d\xi_1\,d\eta_1\ldots d\xi_n\,d\eta_n,$$

получаем благодаря произвольности функции F

$$\Phi(t_1,\ldots,t_n,\ \xi_1-q_p(t_1),\ \eta_1-v_p(t_1),\ldots,\xi_n-q_p(t_n),\ \eta_n-v_p(t_n))=$$
$$=\left(\frac{1}{\omega}\right)^{2n}\Psi\left(t_1,\ldots,t_n,\ \alpha_1-\frac{v(0)}{\omega},\ \beta_1+q(0),\ \alpha_2,\ \beta_2,\ldots,\alpha_n,\ \beta_n\right). \tag{III.20}$$

Это и есть та формула для Φ, которую мы хотели установить.

§ 2. Рассмотрим случай, когда интенсивность $I(\nu)$ может быть аппроксимирована постоянной, которую мы обозначим через I^*. Более точно, пусть $I(\nu)$ зависит от некоторого параметра M, и притом таким образом, что при $M\to\infty$

$$I(\nu)=I^*+\eta_M\quad\text{для}\quad 0\leqslant\nu\leqslant\nu_M,$$
$$I(\nu)\leqslant I^*\qquad\text{для}\quad \nu>\nu_M, \tag{III.21}$$

где

$$\eta_M\to 0,\quad \nu_M\to\infty.$$

Тогда очевидно, что для всякой непрерывной функции $f(\nu)$, имеющей на бесконечности порядок малости $1/\nu^2$, возможен переход к пределу под знаком интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu)\,I(\nu)\,d\nu\to I^*\int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu)\,d\nu,\quad M\to\infty.$$

Так как, в частности, интегралы под знаком квадратов модулей в формулах (III.13), (III.19) имеют для больших ν порядок малости $1/\nu$ и, сле-

довательно, квадраты модулей будут порядка $1/\nu^2$, то мы можем написать предельные соотношения вида

$$Q(\xi,\eta)\to Q^*(\xi,\eta),\quad \Omega(\alpha,\beta)\to\Omega^*(\alpha,\beta),\quad M\to\infty,$$

в которых

$$Q^*(\xi,\eta)=\frac{I^*}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{r=1}^{n}\int\limits_0^{t_r}\frac{\xi_r\sin\omega(t_r-\tau)+\eta_r\omega\cos\omega(t_r-\tau)}{\omega}\,\mathrm{e}^{i\nu\tau}\,d\tau\right|^2 d\nu, \tag{III.22}$$

$$\Omega^*(\alpha,\beta)=\frac{I^*}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{r=0}^{n-1}\int\limits_{t_r}^{t_{r+1}}\frac{\alpha_{r+1}\cos\omega\tau+\beta_{r+1}\sin\omega\tau}{\omega}\,\mathrm{e}^{i\nu\tau}\,d\tau\right|^2 d\nu.$$

Заметим теперь, что формулы (III.12), (III.18) выражают функции $\Phi(t_1,\dots,t_n,\ \xi_1,\dots,\eta_n)$, $\Psi(t_1,\dots,t_n,\ \alpha_1,\dots,\beta_n)$ через коэффициенты квадратичных форм $Q(\xi,\eta)$, $\Omega(\alpha,\beta)$, и притом таким образом, что бесконечно малое изменение этих коэффициентов влечет за собой бесконечно малое изменение функций Φ, Ψ.

Поэтому

$$\begin{gathered}\Phi(t_1,\dots,t_n,\ \xi_1,\ \eta_1,\dots,\xi_n,\eta_n)\to\Phi^*(t_1,\dots,t_n,\ \xi_1,\ \eta_1,\dots,\xi_n,\eta_n),\\ \Psi(t_1,\dots,t_n,\ \alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_n,\beta_n)\to\Psi^*(t_1,\dots,t_n,\ \alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_n,\beta_n),\\ M\to\infty,\end{gathered} \tag{III.23}$$

где Φ^* и Ψ^* с помощью формул вида (III.12), (III.18) выражаются через коэффициенты квадратичных форм Q^* и Ω^*.

Итак, при $M\to\infty$ плотности распределения вероятностей

$$\Phi(t_1,\dots,t_n,\ \xi_1-q_p(t_1),\ \eta_1-v_p(t_1),\dots,\xi_n-q_p(t_n),\ \eta_n-v_p(t_n)) \tag{III.24}$$

для статистических переменных $q(t_1)$, $v(t_1)$, $\dots$, $q(t_n)$, $v(t_n)$ (или, если угодно, для набора n последовательных состояний вибратора $x(t_1),\dots,x(t_n)$) приближаются к предельным значениям

$$\Phi^*(t_1,\dots,t_n,\ \xi_1-q_p(t_1),\ \eta_1-v_p(t_1),\dots). \tag{III.25}$$

Стохастический процесс, определенный этими плотностями вероятности (III.25), условимся называть аппроксимирующим процессом, поскольку его плотности вероятности могут служить аппроксимацией для плотностей вероятности (III.24) предельного стохастического процесса в случае, когда спектральная интенсивность $I(\nu)$ является в вышеуказанном смысле достаточно близкой к постоянной.

Покажем сейчас, что аппроксимирующий предельный стохастический процесс является марковским.

Рассмотрим для этого квадратичную форму $\Omega^*(\alpha, \beta)$ и воспользуемся для раскрытия ее выражения (III.22) уравнением замкнутости интегралов Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{i\nu x}\, dx \right|^2 d\nu = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2\, dx.$$

Получим

$$\Omega^*(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} I^* \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} \Omega(t_r, t_{r+1}, \alpha_{r+1}, \beta_{r+1}) + \Omega(t_1, \alpha_1, \beta_1) \right\}, \tag{III.26}$$

где

$$\Omega(t, \alpha, \beta) = \int_0^t \left| \frac{\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t}{\omega} \right|^2 dt, \tag{III.27}$$

$$\Omega(t', t'', \alpha, \beta) = \int_{t'}^{t''} \left| \frac{\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t}{\omega} \right|^2 dt. \tag{III.28}$$

Таким образом, квадратичная форма $\Omega^*(\alpha, \beta)$ распадается на сумму n отдельных квадратичных форм, каждая из которых зависит лишь от одной пары переменных α, β. Поэтому детерминант этой формы Δ^* является произведением детерминантов этих отдельных квадратичных форм:

$$\Delta^* = \Delta(t_1)\, \Delta(t_1, t_2) \ldots \Delta(t_{n-1}, t_n), \tag{III.29}$$

и для «обратной» формы $\Pi^*(\alpha, \beta)$ имеем разложение

$$\Pi^*(\alpha, \beta) = \Pi(t_1, \alpha_1, \beta_1) + \sum_{r=1}^{n-1} \Pi(t_r, t_{r+1}, \alpha_r, \beta_r), \tag{III.30}$$

где формы

$$\Pi(t, \alpha, \beta), \quad \Pi(t', t'', \alpha, \beta) \tag{III.31}$$

являются соответственно обратными для форм

$$\frac{\pi}{2} I\Omega(t, \alpha, \beta), \quad \frac{\pi}{2} I\Omega(t', t'', \alpha, \beta). \tag{III.32}$$

Благодаря (III.18), (III.29), (III.30) приходим к факторизации выражения функции Ψ^*:

$$\Psi^*(t_1, \ldots, t_n, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n) = \\ = \sigma(t_1, \alpha_1, \beta_1)\, \sigma(t_1, t_2, \alpha_2, \beta_2) \ldots \sigma(t_{n-1}, t_n, \alpha_n, \beta_n), \tag{III.33}$$

в котором

$$\sigma(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\Delta(t)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \Pi(t, \alpha, \beta) \right\}, \\ \sigma(t', t'', \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\Delta(t', t'')}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \Pi(t', t'' \alpha, \beta) \right\}. \tag{III.34}$$

С другой стороны, из (III.28) убеждаемся, что

$$\Omega(t', t'', \alpha, \beta) = \int_0^{t''-t'} \left| \frac{\alpha \cos\omega(t'+t) + \beta \sin\omega(t'+t)}{\omega} \right|^2 dt =$$

$$= \Omega(t''-t',\ \alpha\cos\omega t' + \beta \sin\omega t', -\alpha \sin\omega t' + \beta\cos\omega t').$$

Как видно, квадратичная форма

$$\Omega(t''-t',\ \alpha, \beta)$$

переходит в форму

$$\Omega(t', t'', \alpha, \beta),$$

если ее аргументы α, β подвергнуть ортогональному преобразованию

$$\alpha \to \alpha\cos\omega t' + \beta \sin\omega t',$$

$$\beta \to -\alpha \sin\omega t' + \beta\cos\omega t'.$$

Так как от такого преобразования детерминант формы не изменится, то, следовательно,

$$\Delta(t', t'') = \Delta(t''-t').$$

Далее, если одна квадратичная форма переходит в другую посредством ортогонального преобразования, то их обратные формы также переходят одна в другую с помощью того же преобразования.

Поэтому благодаря (III.34) можем написать

$$\sigma(t', t'', \alpha, \beta) = \sigma(t''-t',\ \alpha\cos\omega t' + \beta\sin\omega t', -\alpha\sin\omega t' + \beta\cos\omega t'). \quad \text{(III.35)}$$

Воспользуемся теперь тождеством (III.20), которое, разумеется, имеет место и для функций Φ^* и Ψ^* (в этом можем убедиться, совершив в нем предельный переход при $M \to \infty$).

Тогда в силу (III.33), (III.35) имеем

$$\Phi^*(t_1, \ldots, t_n,\ \xi_1 - q_p(t_1),\ \eta_1 - v_p(t_1), \ldots, \xi_n - q_p(t_n),\ \eta_n - v_p(t_n)) =$$

$$= \left(\frac{1}{\omega}\right)^{2n} \sigma\left(t_1, \alpha_1 - \frac{v(0)}{\omega}, \beta_1 + q(0)\right) \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{n-1} \sigma(t_{r+1} - t_r, \alpha_{r+1}\cos\omega t_r + \beta_{r+1}\sin\omega t_r, -\alpha_{r+1}\sin\omega t_r + \beta_{r+1}\cos\omega t_r). \quad \text{(III.36)}$$

В частности, для $n = 1$ получаем

$$\Phi^*(t_1,\ \xi_1 - q_p(t_1),\ \eta_1 - v_p(t_1)) = \frac{1}{\omega^2}\sigma\left(t_1,\ \alpha_1 - \frac{v(0)}{\omega}, \beta_1 + q(0)\right), \quad \text{(III.37)}$$

откуда, раскрывая $q_p(t_1)$ и $v_p(t_1)$ и выражая α_1, β_1 через ξ_1 и η_1, имеем

$$\Phi^*\left(t_1, \xi_1 - q(0)\cos\omega t_1 - \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t_1, \eta_1 + q(0)\omega\sin\omega t_1 - v(0)\cos\omega t_1\right) =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\sigma\left(t_1, \xi_1\sin\omega t_1 + \frac{\eta_1}{\omega}\cos\omega t_1 - \frac{v(0)}{\omega}, -\xi_1\cos\omega t_1 + \frac{\eta_1}{\omega}\sin\omega t_1 + q(0)\right).$$

Так как в этом тождестве величины t_1, ξ_1, η_1, $q(0)$, $v(0)$ могут иметь произвольные значения, то мы можем, в частности, подставить в него вместо них соответственно любые другие величины, например $t_{k+1}-t_k$, ξ_{k+1}, η_{k+1}, ξ_k, η_k. Произведя эту подстановку, получим соотношение

$$P(t_{k+1}-t_k,\ \xi_k,\ \eta_k,\ \xi_{k+1},\ \eta_{k+1})=\frac{1}{\omega^2}\,\sigma(t_{k+1}-t_k,\ \lambda_k,\ \mu_k), \tag{III.38}$$

где для сокращения положено

$$P(t,\eta,\xi',\eta')=\Phi^*\left(t,\xi'-\xi\cos\omega t-\frac{\eta}{\omega}\sin\omega t,\eta'+\xi\omega\sin\omega t-\eta\cos\omega t\right),$$

$$\lambda_k=\xi_{k+1}\sin\omega(t_{k+1}-t_k)+\frac{\eta_{k+1}}{\omega}\cos\omega(t_{k+1}-t_k)-\frac{\eta_k}{\omega}, \tag{III.39}$$

$$\mu_k=-\xi_{k+1}\cos\omega(t_{k+1}-t_k)+\frac{\eta_{k+1}}{\omega}\sin\omega(t_{k+1}-t_k)+\xi_k.$$

Имеем далее

$$\begin{aligned}\lambda_k&=\xi_{k+1}\sin\omega(t_{k+1}-t_k)+\\&+\frac{\eta_{k+1}}{\omega}\cos\omega(t_{k+1}-t_k)-\frac{\eta_k}{\omega}\cos\omega(t_{k+1}-t_k)-\xi_k\sin\omega(t_{k+1}-t_k)=\\&=\left\{\xi_{k+1}\sin\omega t_{k+1}+\frac{\eta_{k+1}}{\omega}\cos\omega t_{k+1}-\xi_k\sin\omega t_k-\frac{\eta_k}{\omega}\cos\omega t_k\right\}\cos\omega t_k+\\&+\left\{-\xi_{k+1}\cos\omega t_{k+1}+\frac{\eta_{k+1}}{\omega}\sin\omega t_{k+1}+\xi_k\cos\omega t_k-\frac{\eta_k}{\omega}\sin\omega t_k\right\}\sin\omega t_k=\\&=\alpha_{k+1}\cos\omega t_k+\beta_{k+1}\sin\omega t_k\end{aligned}$$

и аналогично

$$\mu_k=-\alpha_{k+1}\sin\omega t_k+\beta_{k+1}\cos\omega t_k.$$

Поэтому, принимая во внимание формулы (III.37)–(III.39), можем представить тождество (III.36) в следующей форме:

$$\begin{aligned}&\Phi^*(t_1,\dots,t_n,\ \xi_1-q_p(t_1),\ \eta_1-v_p(t_1),\dots,\xi_n-q_p(t_n),\ \eta_n-v_p(t_n))=\\&\quad=P(t_1,q(0),v(0),\xi_1,\eta_1)\,P(t_r-t_1,\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2)\dots\\&\quad\dots P(t_n-t_{n-1},\xi_{n-1},\eta_{n-1},\xi_n,\eta_n).\end{aligned} \tag{III.40}$$

В частности,

$$\Phi^*(t_1,\xi_1-v_p(t_1),\eta_1-v_p(t_1))=P(t_1,q(0),v(0),\xi_1,\eta_1). \tag{III.41}$$

Соотношение (III.40) можно также записать в виде

$$\begin{aligned}&\Phi^*(t_1,\dots,t_n,\ \xi_1-q_p(t_1),\ \eta_1-v_p(t_1),\dots,\xi_n-q_p(t_n),\ \eta_n-v_p(t_n))\times\\&\qquad\times d\xi_1\,d\eta_1\dots d\xi_n\,d\eta_n=\\&\quad=\{\Phi^*(t_1,\dots,t_{n-1},\ \xi_1-q_p(t_1),\ \eta_1-v_p(t_1),\dots,\xi_{n-1}-p(t_{n-1}),\\&\eta_{n-1}-v_p(t_{n-1}))\,d\xi_1\dots d\eta_{n-1}\}P(t_n-t_{n-1},\xi_{n-1},\eta_{n-1},\xi_n,\eta_n)\,d\xi_n\,d\eta_n.\end{aligned} \tag{III.42}$$

Заметим теперь, что, согласно общему принципу теории вероятности, вероятность совместного осуществления двух событий A и B равна произведению вероятности события A и условной вероятности события B или, точнее,

относительной вероятности события B при условии, что событие A уже осуществилось.

Обозначим символом

$$x(t) \in \delta\xi\, \delta\eta$$

событие

$$\xi < q(t) < \xi + d\xi, \quad \eta < v(t) < \eta + d\eta.$$

Примем за A событие

$$x(t_1) \in \delta\xi_1\, \delta\eta_1, \ldots, x(t_{n-1}) \in \delta\xi_{n-1}\delta\eta_{n-1}$$

и за B событие

$$x(t_n) \in \delta\xi_n\, \delta\eta_n.$$

Тогда левая часть равенства (III.42) представляет вероятность совместного осуществления событий A и B, а первый множитель правой части — вероятность события A. Таким образом, в силу упомянутого принципа второй множитель правой части (III.42) дает относительную вероятность события B при условии, что событие A уже осуществилось.

Мы видим, следовательно, что не зависящая от $q(0)$, $v(0)$, ξ_1, $\eta_1, \ldots$ $\ldots, \xi_{n-2}$, η_{n-2} величина

$$P(t_n - t_{n-1}, \xi_{n-1}, \eta_{n-1}, \xi_n, \eta_n)$$

представляет плотность относительного распределения вероятности величин $q(t_n) = \xi_n$, $v(t_n) = \eta_n$ при условии, что величины $q(0)$, $v(0)$, $q(t_1)$, $v(t_1), \ldots, q(t_{n-1})$, $v(t_{n-1})$ имеют заданные значения.

Итак, поскольку относительное распределение вероятностей для состояния $x(t_n)$ при заданных $x(0)$, $x(t_1), \ldots, x(t_{n-1})$ $(0 < t_1 \ldots < t_n)$ зависит только от непосредственного предшествующего состояния $x(t_{n-1})$, то рассматриваемый нами сейчас аппроксимирующий предельный стохастический процесс действительно является марковским, что мы и хотели показать.

Заметим теперь, что величина

$$\Phi^*(t, \xi - q_p(t),\ \eta - v_p(t))$$

представляет собой плотность вероятности распределения переменных $q(t)$, $v(t)$, поскольку ввиду наложенного условия $q(0)$, $v(0)$ имеют заданные значения. Если бы мы в начальный момент времени вместо задания точных значений $q(0)$, $v(0)$ задали некоторое распределение вероятности с плотностью $\varrho_0(\xi, \eta)$, то тогда плотность вероятности $\varrho(t, q, v)$ для распределения переменных $q = q(t)$, $v = v(t)$ мы могли бы определить формулой

$$\varrho(t, q, v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*\left(t, q - \xi\cos\omega t - \frac{\eta}{\omega}\sin\omega t, v + \xi\omega\sin\omega t - \eta\cos\omega t\right) \times$$

$$\times\, \varrho_0(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta, \quad \text{(III.43)}$$

причем на основании (III.12), (III.22)

$$\Phi^*(t, x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{AC - B^2}} \exp\left\{\frac{Cx^2 - 2Bxy + Ay^2}{2(AC - B^2)}\right\}, \quad \text{(III.44)}$$

где A, B, C являются коэффициентами квадратичной формы

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=\frac{I^*\pi}{2}\int_0^t\left[\frac{x\sin\omega(t-\tau)+y\omega\cos\omega(t-\tau)}{\omega}\right]^2 d\tau.$$

Имеем, следовательно,

$$A=\frac{I^*\pi}{4\omega^2}\left(t-\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right),\quad C=\frac{I^*\pi}{4}\left(t+\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right),$$
$$B=\frac{I^*\pi}{8\omega^2}(1-\cos 2\omega t). \tag{III.45}$$

Рассматривая выражение (III.43), нетрудно заметить, что оно удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка вида

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+v\frac{\partial\varrho}{\partial x}-\omega^2x\frac{\partial\varrho}{\partial v}-\frac{\pi}{4}I^*\frac{\partial^2\varrho}{\partial v^2}=0. \tag{III.46}$$

В самом деле, производя дифференцирование подынтегрального выражения

$$\Phi^*\left(t,q-\xi\cos\omega t-\frac{\eta}{\omega}\sin\omega t,v+\xi\omega\sin\omega t-\eta\cos\omega t\right), \tag{III.47}$$

представляющего плотность вероятности перехода из состояния (ξ,η) в состояние (q,v) с помощью явных формул (III.44), (III.45), можно непосредственно убедиться, что это выражение как функция переменных t,q,v тождественно удовлетворяет уравнению (III.46).

§ 3. Рассмотрим теперь случай, когда основное уравнение колебаний (III.1) может быть записано в виде

$$q''+\omega^2q=\varepsilon f(t), \tag{III.48}$$

где ε — малый параметр, а $f(t)$ является случайной функцией того же типа, что и в § 1.

Заметим, что в соответствии с результатами этого параграфа выражение

$$\Phi(t,\xi-q_p(t),\eta-v_p(t))=$$
$$=\Phi\left(t,\xi-q(0)\cos\omega t-\frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t,\eta+q(0)\omega\sin\omega t-v(0)\cos\omega t\right) \tag{III.49}$$

представляет плотность вероятности распределения величин $q(t)=\xi$, $v(t)=\eta$ в момент времени t для предельного стохастического процесса при условии, что начальные значения этих величин равны $q(0)$, $v(0)$. Нам представляется целесообразным вместо координаты и скорости $q(t)$, $v(t)$ ввести новые переменные $E(t)$, $\varphi(t)$ посредством соотношений

$$q(t)=\frac{\sqrt{2E(t)}}{\omega}\sin\varphi(t),\quad v(t)=\sqrt{2E(t)}\cos\varphi(t).$$

Так как

$$E(t)=\frac{1}{2}(v^2(t)+\omega^2q^2(t)),$$

то, очевидно, эту величину мы можем интерпретировать как энергию вибратора в момент времени t. Переменную $\varphi(t)$ можем представлять как фазу вибратора, соответствующую моменту t.

Полагая

$$\xi = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}\sin\varphi, \quad \eta = \sqrt{2E}\cos\varphi,$$

сравним выражение инфинитезимального элемента фазовой площади в переменных ξ, η и в переменных E, φ. Имеем

$$d\xi\, d\eta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial E}, & \frac{\partial\xi}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\eta}{\partial E}, & \frac{\partial\eta}{\partial\varphi} \end{vmatrix} dE\, d\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\sin\varphi}{\omega\sqrt{2E}}, & \frac{\sqrt{2E}}{\omega}\cos\varphi \\ \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2E}}, & -\sqrt{2E}\sin\varphi \end{vmatrix} dE\, d\varphi = \frac{1}{\omega}\, dE\, d\varphi,$$

поскольку здесь берутся всегда абсолютные значения определителей.

Поэтому так как Φ представляет плотность вероятности распределения величин ξ, η, то плотность вероятности распределения величин E, φ будет равна $(1/\omega)\Phi$. Таким образом, замечая, что

$$\xi - q(0)\cos\omega t - \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}\sin\varphi - \frac{\sqrt{2E_0}}{\omega}\sin(\varphi_0 + \omega t),$$

$$\eta + q(0)\omega\sin\omega t - v(0)\cos\omega t = \sqrt{2E}\cos\varphi - \sqrt{2E_0}\cos(\varphi_0 + \omega t),$$

где E_0, φ_0 есть начальные значения E, φ, мы видим, что плотность вероятности распределения энергии и фазы вибратора для момента времени t определяется выражением

$$\frac{1}{\omega}\Phi\left(t, \frac{\sqrt{2E}}{\omega}\sin\varphi - \frac{\sqrt{2E_0}}{\omega}\sin(\varphi_0 + \omega t),\right.$$

$$\left.\sqrt{2E}\cos\varphi - \sqrt{2E_0}\cos(\varphi_0 + \omega t)\right). \quad \text{(III.50)}$$

Для раскрытия этого выражения воспользуемся формулами (III.12), (III.13), в которых только $I(\nu)$ надлежит заменить на $\varepsilon^2 I(\nu)$, поскольку сейчас мы вместо уравнения (III.1) рассматриваем уравнение (III.48), в котором $f(t)$ заменено на $\varepsilon f(t)$. Получим

$$\Phi(t, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{AC - B^2}}\exp\left\{-\frac{C\xi^2 - 2B\xi\eta + A\eta^2}{2(AC - B^2)}\right\}, \quad \text{(III.51)}$$

где

$$A\xi^2 + 2B\eta\xi + C\eta^2 =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left|\frac{\xi\sin\omega(t-\tau) + \eta\omega\cos\omega(t-\tau)}{\omega}\, e^{i\nu\tau}\, d\tau\right|^2 d\nu =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu)\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi\sin\omega z + \eta\omega\cos\omega z}{\omega} e^{-i\nu z}\right|^2 d\nu. \quad \text{(III.52)}$$

Найдем теперь асимптотическое выражение, аппроксимирующее плотность вероятности распределения (III.50) при достаточно малых значениях параметра ε.

Фиксируем некоторое сколь угодно малое положительное число α и будем рассматривать значения

$$t \geqslant \frac{\alpha}{\varepsilon^2}. \tag{III.53}$$

Совершим в интеграле (III.52) замену переменных

$$\nu = \omega + \varepsilon^2 \mu, \quad z = \frac{\tau}{\varepsilon^2}.$$

Тогда убедимся, что

$$A\xi^2 + 2B\eta\xi + C\eta^2 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega + \varepsilon^2\mu) \times$$

$$\times \left| \int_0^{t\varepsilon^2} \frac{\xi \sin \frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau + \eta\omega \cos \frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau}{\omega} \exp\left\{-i\frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau\right\} \exp\{-i\mu\tau\}\, d\tau \right|^2 d\mu. \tag{III.54}$$

Но, по уравнению замкнутости,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^{t\varepsilon^2} \frac{\xi \sin \frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau + \eta\omega \cos \frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau}{\omega} \exp\left\{-i\frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau\right\} \exp\{-i\mu\tau\}\, d\tau \right|^2 d\mu =$$

$$= 2\pi \int_0^{t\varepsilon^2} \left| \frac{\xi \sin \frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau + \eta\omega \cos \frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau}{\omega} \exp\left\{-i\frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau\right\} \right|^2 d\tau =$$

$$= \frac{2\pi}{\omega^2} \int_0^{t\varepsilon^2} \left\{ \xi^2 \sin^2 \frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau + 2\xi\eta\omega \sin \frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau \cos \frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau + \eta^2\omega^2 \cos^2 \frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau \right\} d\tau =$$

$$= \xi^2 \frac{\pi}{\omega^2} t\varepsilon^2 \left\{ 1 - \varepsilon^2 \frac{\sin 2\omega t}{2\omega t\varepsilon^2} \right\} + \frac{2\pi}{\omega^2} \varepsilon^2 \{1 - \cos 2\omega t\}\, \xi\eta +$$

$$+ \pi t\varepsilon^2 \left\{ 1 + \varepsilon^2 \frac{\sin 2\omega t}{2\omega t\varepsilon^2} \right\} \eta^2.$$

Поэтому, принимая во внимание, что $t\varepsilon^2 \geqslant \alpha$, из (III.54) получим следующие асимптотические формулы для коэффициентов A, B, C:

$$A = I(\omega)\frac{\pi}{4\omega^2}\varepsilon^2 t(1 + \eta_\varepsilon), \quad B = I(\omega)\frac{\pi}{4\omega}\varepsilon^2 t\eta'_\varepsilon, \quad C = I(\omega)\frac{\pi}{4}\varepsilon^2 t(1 + \eta''_\varepsilon), \tag{III.55}$$

где в рассматриваемой области изменения t величины η_ε, η'_ε, η''_ε равномерно стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Подставим теперь найденные выражения (III.55) в формулу (III.51) и обозначим для сокращения плотность вероятности (III.50), рассматриваемую как функцию переменных t, E, φ, через

$$\varrho(t, E, \varphi). \tag{III.50'}$$

Тогда убедимся, что равномерно по отношению к t в интервале (III.53) будем иметь при $\varepsilon \to 0$

$$\varrho(t, E, \varphi) - \frac{2}{I(\omega)\pi^2\varepsilon^2 t} \exp\left\{-\frac{E + E_0 - 2\sqrt{EE_0}\cos(\varphi_0 + \omega t - \varphi)}{\frac{\pi}{4} I(\omega)\varepsilon^2 t}\right\} \to 0. \tag{III.56}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{2}{I(\omega)\pi^2\varepsilon^2 t} \exp\left\{-\frac{E + E_0 - 2\sqrt{EE_0}\cos\vartheta}{\frac{\pi}{4} I(\omega)\varepsilon^2 t}\right\} \tag{III.57}$$

и разложим его как периодическую функцию угла ϑ в ряд Фурье.

Так как функция (III.57) не изменяется при замене ϑ на $-\vartheta$, то ее ряд Фурье имеет вид

$$A_0(\varepsilon^2 t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon^2 t)\cos n\vartheta,$$

где, в частности,

$$A_0(\varepsilon^2 t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2}{I(\omega)\pi^2\varepsilon^2 t} \exp\left\{-\frac{E + E_0 - 2\sqrt{EE_0}\cos\vartheta}{\frac{\pi}{4} I(\omega)\varepsilon^2 t}\right\} d\vartheta.$$

Мы видим, следовательно, что вычитаемое в левой части соотношения (III.56) представится рядом (сходящимся абсолютно и равномерно)

$$A_0(\varepsilon^2 t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon^2 t)\cos n(\varphi_0 + \omega t - \varphi). \tag{III.58}$$

Выберем теперь некоторую переменную длину Δt_ε таким образом, что

$$\varepsilon^2 \Delta t_\varepsilon \to 0, \quad \omega \Delta t_\varepsilon \to \infty \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{III.59}$$

Тогда, так как

$$\left|\frac{1}{\Delta t_\varepsilon}\int_t^{t+\Delta t_\varepsilon} \cos n(\varphi_0 + \omega t - \varphi)\, dt\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin n(\varphi_0 + \omega t + \omega\Delta t_\varepsilon - \varphi) - \sin n(\varphi_0 + \omega t - \varphi)}{n\omega\Delta t_\varepsilon}\right| < \frac{2}{n\omega\Delta t_\varepsilon} \to 0,$$

нетрудно убедиться на основании (III.56), (III.59), что равномерно по отношению к t в интервале (III.53) при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{\Delta t_\varepsilon} \int_t^{\Delta t_\varepsilon} \varrho(t, E, \varphi)\, dt - \varrho_\alpha(t, E) \to 0, \tag{III.60}$$

где

$$\varrho_\alpha(t, E) = A_0 = \frac{2}{I(\omega)\pi^2\varepsilon^2 t} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp\left\{ - \frac{E + E_0 - 2\sqrt{EE_0}\cos\vartheta}{\frac{\pi}{4} I(\omega)\varepsilon^2 t} \right\} d\vartheta. \tag{III.61}$$

Итак, согласно соотношению (III.60), плотность вероятности распределения энергии и фазы колебаний для момента времени t аппроксимируется при малом ε выражением $\varrho_\alpha(t, E)$, которое, как это можно обнаружить путем непосредственной проверки, удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка вида

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\pi}{4}\varepsilon^2 I(\omega) \frac{\partial}{\partial E}\left(E \frac{\partial \varrho}{\partial E} \right). \tag{III.62}$$

Поскольку (III.61) не зависит явно от φ, то в принятой аппроксимации фаза вибратора распределена равномерно по окружности и все ее значения равновероятны.

Мы рассматривали до сих пор плотности вероятности распределения энергии и фазы для одного произвольного момента времени.

Не представило бы, однако, никаких принципиальных трудностей рассмотреть, как и в § 2, распределение энергий и фаз для n различных моментов времени. При аппроксимации типа (III.60) можно было бы показать, что для аппроксимирующего процесса фазы вибратора в различные моменты оказываются статистически независимыми и равнораспределенными по окружности, а энергии $\{E(t)\}$ $(-\infty < t < \infty)$ образуют марковский процесс с вероятностями перехода, определяемыми уравнением (III.62).

Таким образом, в принятом приближении для достаточно малых ε влияние возмущающей силы типа (III.2) сводится к возбуждению случайных переходов между различными возможными значениями энергии. Как видно, здесь имеется некоторая аналогия с квантовой механикой, в которой малое возмущение, явно зависящее от времени, может трактоваться как причина случайных переходов между различными уровнями энергии. Разумеется, при этом следует иметь в виду то естественное различие, что, в то время как в квантовой механике множество возможных уровней энергии вибратора дискретно, в классической механике для значений энергии мы имеем континуум.

Для получения асимптотического выражения для плотности вероятности распределения мы рассматривали интервал времени $t \geqslant \alpha/\varepsilon^2$.

Покажем сейчас, что если постоянная α выбрана достаточно малой, то при $\varepsilon \to 0$ наш стохастический процесс может быть аппроксимирован чисто динамическим процессом — синусоидальными собственными колебаниями — на интервале времени $0 < t < \alpha/\varepsilon^2$.

Рассмотрим для этого математическое ожидание величины

$$[v(t) - v_p(t)]^2 + \omega^2[q(t) - q_p(t)]^2. \tag{III.63}$$

На основании (III.4) мы видим, что для стохастического процесса с конечным N оно равно

$$\varepsilon^2 E\left\{\left[\int_0^t \cos\omega(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\right]^2+\left[\int_0^t \sin\omega(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\right]^2\right\}=$$

$$=\varepsilon^2 E\left\{\left|\int_0^t e^{i\omega(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau\right|^2\right\}=\varepsilon^2 E\left\{\left|\int_0^t e^{-i\omega\tau}f(\tau)\,d\tau\right|^2\right\}=$$

$$=\varepsilon^2\int_0^t\int_0^t e^{-i\omega(\tau-\tau')}E\{f(\tau)f(\tau')\}\,d\tau\,d\tau'=$$

$$=\varepsilon^2\int_0^t\int_0^t e^{-i\omega(\tau-\tau')}\frac{1}{2}\sum_\nu a_\nu^2\cos\nu(\tau-\tau')\,d\tau\,d\tau'.$$

Переходя здесь к пределу при $N\to\infty$, убеждаемся, что для предельного стохастического процесса математическое ожидание величины (III.63) будет

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^t\int_0^t e^{-i\omega(\tau-\tau')}\left\{\int_0^\infty I(\nu)\cos\nu(\tau-\tau')\,d\nu\right\}d\tau\,d\tau'=$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty} I(\nu)\left\{\int_0^t\int_0^t e^{i(\nu-\omega)(\tau-\tau')}\,d\tau\,d\tau'\right\}d\nu=$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty} I(\nu)\left|\int_0^t e^{i(\nu-\omega)z}\,dz\right|^2 dz=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} I(\nu)\frac{1-\cos(\nu-\omega)t}{(\nu-\omega)^2}\,d\nu.$$

Таким образом, обозначая через $I_{\max}$ максимальное значение интенсивности $I(\nu)$, мы видим, что для рассматриваемого стохастического процесса математическое ожидание величины (III.63) будет меньше, чем

$$\frac{\varepsilon^2}{2}I_{\max}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(\nu-\omega)t}{(\nu-\omega)^2}\,d\nu=\frac{\pi}{2}I_{\max}|\varepsilon^2 t|,$$

и, следовательно, на интервале $0<t<\alpha/\varepsilon^2$ будем иметь

$$E\{[v(t)-v_p(t)]^2\}<\frac{\pi}{2}I_{\max}|\varepsilon^2 t|<\frac{\pi}{2}I_{\max}\alpha,$$

$$E\{[q(t)-q_p(t)]^2\}<\frac{\pi}{2\omega^2}I_{\max}|\varepsilon^2 t|<\frac{\pi}{2\omega^2}I_{\max}\alpha.$$

Полученные неравенства показывают, что средние квадратичные отклонения «случайных» переменных $q(t)$, $v(t)$ от «динамических» $q_p(t)$, $v_p(t)$ на интервале времени $0<t<\alpha/\varepsilon^2$ можно сделать сколь угодно малыми при

достаточно малом фиксированном α, хотя при $\varepsilon \to 0$ длина этого интервала и стремится к бесконечности.

Итак, на простом примере гармонического вибратора, находящегося под действием силы, представленной суперпозицией некогерентных синусоидальных колебаний с непрерывным спектром, мы показали, что один и тот же процесс в зависимости от характера применяемой аппроксимации может представляться весьма по-разному: как чисто причинный динамический процесс, как марковский процесс с одномерным и двухмерным фазовым пространством и, наконец, в общем случае, как некоторый немарковский процесс.

При этом способ предельного перехода в различных параметрах задачи представляет собой, по-видимому, достаточно эффективный прием для математического исследования различных возможных приближенных представлений.

Глава IV

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПРИМЕР УСТАНОВЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В СИСТЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С ТЕРМОСТАТОМ

Одним из основных принципов статистической механики является положение о том, что в системе, связанной с термостатом, устанавливается статистическое равновесие.

При этом термостат представляется как система с весьма большим, практически бесконечным числом степеней свободы, и связь между исследуемой системой S и термостатом Σ определяется наличием некоторого «достаточно слабого» взаимодействия $H_{S\Sigma}$.

Однако ввиду принципиальных трудностей интегрирования микроскопических уравнений механики для динамической системы $S+\Sigma$ с неаддитивным вследствие наличия взаимодействия гамильтонианом $H_S + H_\Sigma + H_{S\Sigma}$ указанный принцип не иллюстрируется даже на каком-нибудь весьма частном и простом примере, который бы позволил детально исследовать происхождение такого необратимого макроскопического процесса, как процесс установления статистического равновесия на основе микроскопических, обратимых уравнений механики.

Целью настоящей главы и является построение такого примера. При этом мы не претендуем на особую физическую значимость нашей модели и руководствуемся в выборе примера только соображениями максимальной простоты математического исследования. Возьмем в качестве системы S обычный гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H_S = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

и в качестве системы Σ — совокупность весьма большого числа N гармонических вибраторов с гамильтонианом

$$H_\Sigma = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\{p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2\}.$$

Гамильтониан взаимодействия между системами S и Σ выберем в виде

$$H_{S\Sigma} = \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_n q,$$

где α_n — некоторые постоянные и ε — малый параметр.

Предположим, что в начальный момент времени, который условимся считать моментом $t = 0$, в результате соответствующих измерений найдено, что «большая» система Σ находится в макроскопическом состоянии статистического равновесия с температурой T и что микроскопическое состояние «малой» системы S точно фиксировано. Иначе говоря, мы предположим, что при $t = 0$ переменные q, p имеют некоторые заданные значения q_0, p_0, а переменные q_n, p_n в этот момент являются случайными величинами с законом распределения, характеризуемым плотностью вероятности гиббсовского канонического ансамбля:

$$\varrho_\Sigma = \exp\left\{\frac{\Psi - H_\Sigma}{kT}\right\},$$

где k — постоянная Больцмана.

Покажем, что при некоторых весьма общих допущениях, наложенных на асимптотическое распределение величин $\{\alpha_n, \omega_n\}$ при $N \to \infty$, в системе S будет устанавливаться статистическое равновесие с температурой T, если только ε достаточно мало. Установление статистического равновесия в «малой системе» S понимается здесь с точки зрения гиббсовского ансамбля этих систем.

Хотя начальные значения q, p известны точно, но вследствие взаимодействия с Σ переменные q, p, характеризующие динамическое состояние S в момент времени $t > 0$, будут уже случайными величинами, закон распределения которых можно представить с помощью некоторого гиббсовского ансамбля с плотностью $\varrho_S = \varrho(t, q, p)$. Оказывается, что при достаточно малом ε эта плотность распределения на достаточно длительном интервале времени аппроксимируется функцией $\varrho_S^0 = \varrho_0(t, H_S)$, которая при увеличении t приближается к гиббсовской функции канонического распределения

$$\exp\left\{\frac{\Psi - H_S}{kT}\right\} \tag{IV.1}$$

для системы S.

Следует заметить, что в принятой постановке задачи мы не можем исследовать происхождение состояния статистического равновесия в самой системе Σ из какого-либо другого, неравновесного состояния, поскольку в нашем примере Σ состоит из невзаимодействующих осцилляторов.

Чтобы исследовать проблему установления статистического равновесия в термостате, необходимо ввести в гамильтониан H_Σ соответствующие члены взаимодействия между отдельными составляющими ее осцилляторами. Этой проблемой мы здесь заниматься не будем и ограничимся рассмотрением того, как при «извне» заданном статистическом равновесии в Σ возникает статистическое равновесие в S.

Упомянутое условие, наложенное на $\{\alpha_n, \omega_n\}$, выберем в следующей форме.

Пусть при $N \to \infty$ имеют место соотношения, соответствующие переходу к непрерывному спектру:

$$\sum_{0<\omega_n<\nu} \frac{\alpha_n^2}{\omega_n^2} \to \int_0^\nu J(\nu)\,d\nu, \quad \sum_{\nu<\omega_n} \frac{\alpha_n^2}{\omega_n^2} \to \int_\nu^\infty J(\nu)\,d\nu \tag{IV.2}$$

для любого положительного ν. Здесь $J(\nu)$ — некоторая непрерывная неотрицательная функция, суммируемая на интервале $(0, \infty)$:

$$\int_0^\infty J(\nu)\,d\nu < \infty. \tag{IV.3}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Существует предельная (при $N \to \infty$) плотность вероятности распределения*

$$\varrho_S = \varrho(t, q, p)$$

случайных величин $q = q_t$, $p = p_t$, представляющих координату и импульс системы S в момент времени $t > 0$.

При достаточно малом ε функция ϱ_S может быть аппроксимирована функцией вида

$$\varrho_S^0 = \varrho_0(t, E) =$$

$$= \frac{\omega}{4\pi^2(1-e^{-2\varepsilon^2\delta t})kT} \int_0^{2\pi} d\theta \exp\left\{-\frac{E + E_0 e^{-2\varepsilon^2\delta t} - 2\sqrt{EE_0}\,e^{-\varepsilon^2\delta t}\cos\theta}{kT(1-e^{-2\varepsilon^2\delta t})}\right\}, \tag{IV.4}$$

где

$$E = H_S = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \quad \delta = \frac{\pi}{4}J(\omega),$$

в том смысле, что, фиксируя произвольно малое положительное α и произвольно большое β, имеем равномерно по отношению к t в интервале $\alpha/\varepsilon^2 < t < \beta/\varepsilon^2$

$$\frac{1}{\Delta t_\varepsilon} \int_t^{t+\Delta t_\varepsilon} \{\varrho_S - \varrho_S^0\}\,dt \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{IV.5}$$

для любой последовательности $\{\Delta t_\varepsilon\}$, такой, что

$$\varepsilon^2 \Delta t_\varepsilon \to 0, \quad \Delta t_\varepsilon \to \infty \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{IV.6}$$

Примечание 1. Как видно из формулы (IV.4), «сглаженная» плотность вероятности ϱ_S^0 удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка частного вида

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\pi}{2}\varepsilon^2 kT J(\omega)\frac{\partial}{\partial E}\left\{E\left(\frac{\partial \varrho}{\partial E} + \frac{\varrho}{kT}\right)\right\} \tag{IV.7}$$

и для $t \to \infty$ приближается к функции канонического распределения:

$$\varrho_S^0 \to \frac{\omega}{2\pi kT}\exp\left\{-\frac{E}{kT}\right\}, \quad t \to \infty.$$

Далее, при $t \to 0$ эта функция переходит в $(\omega/2\pi)\delta(E - E_0)$ (где $E_0 = 1/2(p_0^2 + \omega^2 q_0^2)$ и где δ — обычная несобственная дельта-функция) в том смысле, что для любой непрерывной и ограниченной $f(E)$ имеем

$$\int_0^\infty f(E)\varrho_0(t, E)\, dE \to \frac{\omega}{2\pi} f(E_0), \quad t \to 0.$$

Примечание II. Прежде чем перейти к строгому доказательству сформулированной выше теоремы, заметим, что ее результат мог бы быть весьма просто получен с помощью разработанной нами статистической теории возмущений. Можно было бы также воспользоваться еще более элементарными соображениями, постоянно применяемыми в физической литературе, несмотря на их нестрогость. Мы их сейчас приведем, намереваясь сделать результат нашей теоремы интуитивным. Считая ε достаточно малым, возьмем период времени Δt_ε так, чтобы Δt_ε было весьма велико по сравнению с собственным периодом осциллятора S, и вместе с тем так, чтобы за время Δt_ε влияние системы Σ на колебание S было пренебрежимо малым. Тогда в течение интервала времени длиной Δt_ε можем положить приближенно

$$q_t = a \sin(\omega t + \varphi), \quad p_t = a\omega \cos(\omega t + \varphi),$$

или, выражая амплитуды колебаний через энергию,

$$q_t = \frac{\sqrt{2E}}{\omega} \sin(\omega t + \varphi), \quad p_t = \sqrt{2E}\, \cos(\omega t + \varphi). \tag{IV.8}$$

Но так как средняя по t от периодической функции

$$f(\omega t + \varphi)$$

(обладающей по отношению к t периодом $2\pi/\omega$) за промежуток времени, достаточно большой по сравнению с $2\pi/\omega$, приближенно равна фазовой средней

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi,$$

то «сглаженную» плотность

$$\frac{1}{\Delta t_\varepsilon} \int_t^{t+\Delta t_\varepsilon} \varrho_S\, dt$$

мы можем считать функцией, зависящей от q, p только посредством величины E. Таким образом, если $\varrho(t, q, p)$ представляет плотность вероятности распределения величин q, p в момент времени t, то можно положить

$$\varrho_S^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varrho \left\{ t, \frac{\sqrt{2E}}{\omega} \sin\varphi, \sqrt{2E}\, \cos\varphi \right\} d\varphi.$$

С другой стороны, по самому определению плотности вероятности, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varrho\, dq\, dp = 1,$$

или в переменных E, φ

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} \varrho \frac{dE\, d\varphi}{\omega} = 1,$$

и потому

$$\int_{0}^{\infty} \varrho_S^0\, dE = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{IV.9}$$

Так как при $t = 0$ энергия S имеет заданное значение E_0, при $t \to 0$ функция ϱ_S^0 должна переходить в функцию, пропорциональную $\delta(E - E_0)$.

Благодаря (IV.9) мы видим, что множитель пропорциональности равен $\omega/2\pi$. Видим также, что вообще функция $(2\pi/\omega)\varrho_S^0$ представляет плотность вероятности для распределения энергии системы S в момент времени t.

Допустим, что вследствие наличия слабого взаимодействия между S и Σ в системе S энергия претерпевает случайные изменения, причем соответствующий стохастический процесс описывается общим уравнением Фоккера–Планка

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial (A\varrho)}{\partial E} + \frac{\partial^2 (B\varrho)}{\partial E^2}, \tag{IV.10}$$

в котором A и B есть некоторые функции E. Для их определения используем здесь известное рассуждение, примененное Эйнштейном и Смолуховским для нахождения коэффициентов в уравнении броуновского движения частицы, движущейся в заданном потенциальном поле, а именно найдем сначала функцию $A(E)$ и затем определим $B(E)$ из того условия, чтобы уравнение (IV.10) допускало не зависящие от времени равновесные решения, пропорциональные $\exp\{-E/kT\}$.

Пусть $\Delta_t E$ обозначает приращение энергии за время от 0 до t и $\overline{\Delta_t E}$ — его среднее значение при условии, что начальное значение энергии S равно данной величине E. Тогда для t соответствующего порядка малости имеем приближенно

$$\overline{\Delta_t E} = A(E)t. \tag{IV.11}$$

Нам надлежит поэтому подсчитать среднее приращение энергии осциллятора S. Представим это приращение в виде суммы

$$\overline{\Delta_t E} = \overline{\Delta_t' E} + \overline{\Delta_t'' E}$$

среднего значения величины энергии $\overline{\Delta_t' E}$, отданной системой S термостату, и среднего значения величины энергии $\overline{\Delta_t'' E}$, перешедшей из Σ в S.

Поскольку энергия взаимодействия считается малой, $\overline{\Delta_t' E}$ приближенно равно с обратным знаком среднему приращению энергии термостата, обусловленному влиянием S на Σ: $\overline{\Delta_t' E} = -\overline{\Delta_t H_\Sigma}$.

Таким образом,

$$\overline{\Delta_t E} = -\overline{\Delta_t H_\Sigma} + \overline{\Delta_t'' E}. \tag{IV.12}$$

Заметим теперь, что уравнения движения для системы Σ будут иметь вид

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + \omega_n^2 q_n = -\varepsilon \alpha_n q, \quad \frac{dq_n}{dt} = p_n,$$

откуда

$$q_n = a_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) - \varepsilon \alpha_n \int_0^t \frac{\sin \omega_n (t-\tau)}{\omega_n} q(\tau)\, d\tau,$$

$$p_n = a_n \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) - \varepsilon \alpha_n \int_0^t \cos \omega_n (t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau,$$

или приближенно (для t столь малых, что в интервале $(0, t)$ влиянием возмущения на колебания S можно пренебречь)

$$\begin{aligned} q_n &= a_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) - \varepsilon \alpha_n \int_0^t \frac{\sin \omega_n (t-\tau)}{\omega_n} a \sin(\omega \tau + \varphi)\, d\tau, \\ p_n &= a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) - \varepsilon \alpha_n \int_0^t \cos \omega_n (t-\tau)\, a \sin(\omega \tau + \varphi)\, d\tau. \end{aligned} \tag{IV.13}$$

В этих формулах подразумевается, что величина $(1/2)\omega_n^2 a_n^2$ представляет энергию n-го осциллятора, φ_n — его фазу; $(1/2)\omega^2 a^2 = E$. Так как в начальный момент времени система Σ находилась в состоянии статистического равновесия, то фазы φ_n являются независимыми случайными величинами с равномерным распределением по окружности; a_n также являются статистически независимыми, причем, по теореме о равнораспределении энергии,

$$\frac{1}{2}\omega_n^2 \overline{a_n^2} = kT.$$

Из формул (IV.13), очевидно, имеем

$$\frac{1}{2}\overline{(p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2)_t} = \frac{1}{2}\omega_n^2 \overline{a_n^2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \alpha_n^2 a^2 \left\{ \overline{\left[\int_0^t \sin \omega_n (t-\tau) \sin(\omega \tau + \varphi)\, d\tau \right]^2} + \right.$$

$$\left. + \overline{\left[\int_0^t \cos \omega_n (t-\tau) \sin(\omega \tau + \varphi)\, d\tau \right]^2} \right\}.$$

Но, с другой стороны, тождественно

$$\overline{\left[\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\,\sin(\omega\tau+\varphi)\,d\tau\right]^2}+$$

$$+\overline{\left[\int_0^t \cos\omega_n(t-\tau)\sin(\omega\tau+\varphi)\,d\tau\right]^2}=\overline{\left|\int_0^t e^{i\omega_n(t-\tau)}\sin(\omega\tau+\varphi)\,d\tau\right|^2}=$$

$$=\frac{1-\cos(\omega_n+\omega)t}{2(\omega_n+\omega)^2}+\frac{1-\cos(\omega_n-\omega)t}{2(\omega_n-\omega)^2},$$

откуда

$$\overline{\Delta_t H_\Sigma}=\frac{\varepsilon^2 E}{\omega^2}\left\{\frac{1}{2}\sum_n \alpha_n^2\frac{1-\cos(\omega_n-\omega)t}{(\omega_n-\omega)^2}+\frac{1}{2}\sum_n \alpha_n^2\frac{1-\cos(\omega_n+\omega)t}{(\omega_n+\omega)^2}\right\}.$$

Переходя здесь к непрерывному спектру ($N\to\infty$) и заменяя в соответствии с условием (IV.2) суммы интегралами, имеем

$$\overline{\Delta_t H_\Sigma}=\frac{\varepsilon^2 E}{2\omega^2}\left\{\int_0^\infty J(\nu)\nu^2\frac{1-\cos(\nu-\omega)t}{(\nu-\omega)^2}\,d\nu+\int_0^\infty J(\nu)\nu^2\frac{1-\cos(\nu+\omega)t}{(\nu+\omega)^2}\,d\nu\right\}=$$

$$=\frac{\varepsilon^2 E}{2\omega^2}\int_0^\infty \nu^2 J(\nu)\frac{1-\cos(\nu-\omega)t}{(\nu-\omega)^2}\,d\nu, \quad \text{(IV.14)}$$

причем по определению положено $J(-\nu)=J(\nu)$. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\nu)\frac{1-\cos(\nu-\omega)t}{(\nu-\omega)^2}\,d\nu, \quad I(\nu)=\nu^2 J(\nu), \quad \text{(IV.15)}$$

входящий в соотношение (IV.14), хорошо известен в теории излучения. Его асимптотическое значение для достаточно больших t равно

$$I(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(\nu-\omega)t}{(\nu-\omega)^2}\,d\nu=\pi I(\omega)t=\pi\omega^2 J(\omega)t. \quad \text{(IV.16)}$$

Но, так как благодаря малости ε величина t может быть взята весьма большой без того, чтобы на интервале длиной t влиянием возмущения на S нельзя было пренебречь, мы можем упростить формулу (IV.14), заменив в ней интеграл (IV.15) его асимптотическим значением (IV.16). Получим

$$\overline{\Delta_t H_\Sigma}=\frac{\varepsilon^2 E\pi}{2}J(\omega)t.$$

Рассуждая совершенно аналогично, в том же приближении получим

$$\overline{\Delta_t'' E}=\frac{\varepsilon^2 kT\pi}{2}J(\omega)t$$

и потому на основании (IV.11), (IV.12) находим

$$A(E) = \frac{\varepsilon^2\pi}{2} J(\omega)\{kT - E\},$$

так что наше основное уравнение (IV.10) можем записать в виде

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\varepsilon^2\pi}{2} J(\omega)\frac{\partial}{\partial E}[(kT - E)\varrho] + \frac{\partial^2 B(E)\varrho}{\partial E^2}. \qquad \text{(IV.17)}$$

Для определения функции $B(E)$ используем условие, согласно которому уравнение (IV.17) должно допускать решение, не зависящее от времени и пропорциональное $\exp\{-E/kT\}$. Имеем

$$-\frac{\varepsilon^2\pi}{2} J(\omega)(kT - E)\exp\left\{-\frac{E}{kT}\right\} + \frac{\partial}{\partial E}\left[B(E)\exp\left\{-\frac{E}{kT}\right\}\right] = C = \text{const},$$

или

$$\frac{\partial B(E)}{\partial E} - \frac{B(E)}{kT} + \frac{\varepsilon^2\pi}{2} J(\omega)(E - kT) = C\exp\left\{\frac{E}{kT}\right\}.$$

Общее решение этого уравнения будет иметь вид

$$B(E) = \frac{\varepsilon^2\pi}{2} kTJ(\omega)E + CE\exp\left\{\frac{E}{kT}\right\} + C'\exp\left\{\frac{E}{kT}\right\}, \qquad \begin{matrix} C = \text{const}, \\ C' = \text{const}. \end{matrix}$$

Из них физический смысл имеет лишь частное решение

$$B(E) = \frac{\varepsilon^2\pi}{2} kTJ(\omega)E,$$

которым мы и воспользуемся. Подставляя его в (IV.17), получаем уравнение Фоккера–Планка частного вида

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\varepsilon^2\pi}{2} J(\omega)\frac{\partial}{\partial E}(kT - E)\varrho + \frac{\varepsilon^2\pi}{2} kTJ(\omega)\frac{\partial^2 E\varrho}{\partial E^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\varepsilon^2 kTJ(\omega)\frac{\partial}{\partial E}\left\{E\left(\frac{\partial \varrho}{\partial E} + \frac{\varrho}{kT}\right)\right\},$$

совпадающее с уравнением (IV.7).

Итак, «сглаженная» плотность вероятности ϱ_S^0 должна удовлетворять этому дифференциальному уравнению (IV.7) и приводиться к $\omega\delta(E - E_0)/2\pi$ при $t \to 0$. Это требование и определяет выражение (IV.4) нашей теоремы.

Изложенные соображения, разумеется, совершенно неудовлетворительны с логической точки зрения. Ими можно пользоваться скорее лишь как эвристическим методом для «угадывания» результата.

Мы привели их здесь только затем, чтобы представить пример того, как подобные рассуждения, весьма распространенные в работах по статистической физике, могут быть обоснованы с помощью математически строгого доказательства, к которому мы сейчас и приступим.

Доказательство. Прежде всего напишем точные уравнения механики для рассматриваемой совокупности $S + \Sigma$ с полным гамильтонианом

$$H = H_S + H_\Sigma + H_{S\Sigma} = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2) + \varepsilon\sum_{n=1}^{N}\alpha_n q_n q.$$

Имеем

$$\frac{d^2q_n}{dt^2}+\omega_n^2q_n=-\varepsilon\alpha_nq,\quad p_n=\frac{dq_n}{dt},\tag{IV.18}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega^2q=-\varepsilon\sum_{n=1}^{N}\alpha_nq_n,\quad p=\frac{dq}{dt}.\tag{IV.19}$$

Вместе с этими уравнениями будем принимать во внимание наши начальные условия, согласно которым при $t=0$ переменные q, p имеют значения q_0, p_0, а переменные q_n, p_n являются случайными величинами, распределенными с плотностью вероятности

$$\varrho_\Sigma=\exp\left\{\frac{\Psi-H_\Sigma}{kT}\right\}.\tag{IV.20}$$

Решая уравнения (IV.18), имеем

$$q_n=q_n^*(t)-\varepsilon\alpha_n\int_0^t\frac{\sin\omega_n(t-\tau)}{\omega_n}q(\tau)\,d\tau,\tag{IV.21}$$

где

$$q_n^*(t)=q_n(0)\cos\omega_nt+p_n(0)\frac{\sin\omega_nt}{\omega_n}.\tag{IV.22}$$

Здесь $q_n(0)$, $p_n(0)$ — случайные величины, распределенные с плотностью вероятности (IV.20):

$$\varrho_\Sigma=\exp\left\{\frac{\Psi}{kT}-\frac{1}{2kT}\sum_{n=1}^{N}[p_n^2(0)+\omega_n^2q_n^2(0)]\right\}.\tag{IV.23}$$

Введем новые переменные

$$q_n(0)=\frac{\sqrt{2E_n}}{\omega_n}\cos\varphi_n,\quad p_n(0)=-\sqrt{2E_n}\sin\varphi_n.\tag{IV.24}$$

Так как

$$\frac{1}{2}[p_n^2(0)+\omega_n^2q_n^2(0)]=E_n,$$

то из формулы (IV.23) можно заметить, что фазы $\{\varphi_n\}$ являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными по окружности, а $\{E_n\}$ являются независимыми случайными величинами, каждая из которых распределена с плотностью вероятности

$$\frac{\exp\left\{-\dfrac{E_n}{kT}\right\}}{\displaystyle\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{E}{kT}\right\}dE}=\frac{1}{kT}\exp\left\{-\frac{E_n}{kT}\right\}.\tag{IV.25}$$

Подставляя выражение (IV.21) в уравнение (IV.19) и принимая во внимание соотношения (IV.22), (IV.24), приходим к интегродифференциальному уравнению типа уравнения Вольтерра

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega^2 q=\varepsilon^2\int_0^t K_N(t-\tau)q(\tau)\,d\tau+\varepsilon f_N(t), \tag{IV.26}$$

где для сокращения положено

$$K_N(t)=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^2\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n},\quad f_N(t)=-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\frac{\sqrt{2E_n}}{\omega_n}\cos(\omega_n t+\varphi_n). \tag{IV.27}$$

Пусть $v=v_N(t)$ есть решение интегродифференциального уравнения

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\omega^2 v=\varepsilon^2\int_0^t K_N(t-\tau)v(\tau)\,d\tau \tag{IV.28}$$

при начальных условиях

$$v=0,\quad \frac{dv}{dt}=1\quad\text{при } t=0. \tag{IV.29}$$

Тогда, принимая во внимание, что $K_N(0)=0$, нетрудно убедиться, что искомое решение уравнения (IV.26) представляется квадратурой

$$\begin{aligned} q(t)&=q_0v_N'(t)+p_0v_N(t)+\varepsilon\int_0^t v_N(t-\tau)f_N(\tau)\,d\tau,\\ p(t)&=q_0v_N''(t)+p_0v_N'(t)+\varepsilon\int_0^t v_N'(t-\tau)f_N(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{IV.30}$$

Докажем сейчас необходимое нам в дальнейшем утверждение о том, что последовательности функций $\{v_N(t)\}$, $\{v_N'(t)\}$, $\{v_N''(t)\}$ являются сходящимися равномерно в каждом конечном интервале.

Для этого, полагая

$$Q_N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\frac{1-\cos\omega_n t}{\omega_n^2}, \tag{IV.31}$$

запишем уравнение (IV.28) в виде

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\omega^2 v=\varepsilon^2\int_0^t Q_N'(t-\tau)v(\tau)\,d\tau$$

или, интегрируя по частям и замечая, что выражение $Q(t-\tau)v(\tau)$ обращается в нуль при $\tau=0$ и при $\tau=t$, в виде

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\omega^2 v=\varepsilon^2\int_0^t Q_N(t-\tau)\frac{dv(\tau)}{d\tau}\,d\tau. \tag{IV.32}$$

Введем обозначение

$$v_N''(t) = w_N(t). \tag{IV.33}$$

Тогда

$$v_N(t) = t + \int_0^t (t-\tau) w_N(\tau)\, d\tau, \quad v_N'(t) = 1 + \int_0^t w_N(\tau)\, d\tau,$$

так что уравнение (IV.32) дает

$$w_N(t) + \omega^2 \int_0^t (t-\tau) w_N(\tau)\, d\tau - \varepsilon^2 \int_0^t Q_N(t-\tau) \left\{ \int_0^\tau w_N(\tau')\, d\tau' \right\} d\tau =$$

$$= -\omega^2 t + \varepsilon^2 \int_0^t Q_N(t-\tau)\, d\tau.$$

Но, очевидно,

$$\int_0^t Q_N(t-\tau) \left\{ \int_0^\tau w_N(\tau')\, d\tau' \right\} d\tau = \int_0^t \left\{ \int_\tau^t Q_N(t-z)\, dz \right\} w_N(\tau)\, d\tau,$$

и, таким образом, функция (IV.33) удовлетворяет интегральному уравнению типа уравнения Вольтерра

$$w_N(t) + \int_0^t \left\{ \omega^2 (t-\tau) - \varepsilon^2 \int_\tau^t Q_N(t-z)\, dz \right\} w_N(\tau)\, d\tau =$$

$$= -\omega^2 t + \varepsilon^2 \int_0^t Q_N(t-\tau)\, d\tau. \tag{IV.34}$$

С другой стороны, ввиду условия (IV.2) из формулы (IV.31) следует, что равномерно в любом конечном интервале

$$Q_N(t) \to Q(t), \quad N \to \infty, \tag{IV.35}$$

где

$$Q(t) = \int_0^\infty J(\nu)(1 - \cos \nu t)\, d\nu. \tag{IV.36}$$

Поэтому в интегральном уравнении (IV.34) ядро и свободный член равномерно на конечном интервале стремятся при $N \to \infty$ соответственно к выражениям

$$\omega^2 (t-\tau) - \varepsilon^2 \int_\tau^t Q(t-z)\, dz, \quad -\omega^2 t + \varepsilon^2 \int_0^t Q(t-\tau)\, d\tau.$$

Отсюда на основании известного свойства интегральных уравнений типа уравнения Вольтерра заключаем, что равномерно на конечном интервале

$$w_N(t) \to w(t), \tag{IV.37}$$

где $w(t)$ есть решение предельного уравнения

$$w(t) + \int_0^t \left\{ \omega^2(t-\tau) - \varepsilon^2 \int_\tau^t Q(t-z)\,dz \right\} w(\tau)\,d\tau = -\omega^2 t + \varepsilon^2 \int_0^t Q(t-\tau)\,d\tau. \tag{IV.38}$$

Полагая теперь

$$v(t) = t + \int_0^t (t-\tau) w(\tau)\,d\tau,$$

из решения (IV.38) имеем

$$v''(t) + \omega^2 v(t) = \varepsilon^2 \int_0^t Q(t-\tau) v'(\tau)\,d\tau, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1, \tag{IV.39}$$

и благодаря (IV.38) видим, что равномерно в любом конечном интервале

$$v_N(t) \to v(t), \quad v'_N(t) \to v'(t), \quad v''_N(t) \to v''(t), \tag{IV.40}$$

что мы и хотели доказать.

Заметив это, рассмотрим произвольные числа $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ и построим функцию $f(x, y)$, равную единице, если ее аргументы удовлетворяют двум неравенствам

$$a_1 < x < b_1, \quad a_2 < y < b_2,$$

и равную нулю, если хотя бы одно из них не выполнено.

Тогда очевидно, что математическое ожидание

$$P_N = E\{f(q(t), p(t))\}$$

представляет вероятность события

$$a_1 < q(t) < b_1, \quad a_2 < p(t) < b_2. \tag{IV.41}$$

Покажем сейчас, что величина P_N стремится к пределу при $N \to \infty$.

В самом деле, на основании (IV.30) имеем

$$P_N = E\{f[q_0 v'_N(t) + p_0 v_N(t) + x_1,\ q_0 v''_N(t) + p_0 v'_N(t) + x_2]\}, \tag{IV.42}$$

где x_1 и x_2 — случайные величины вида

$$\begin{aligned} x_1 &= -\varepsilon \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sqrt{2E_n} \int_0^t v_N(t-\tau) \cos(\omega_n \tau + \varphi_n)\,d\tau, \\ x_2 &= -\varepsilon \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sqrt{2E_n} \int_0^t v'_N(t-\tau) \cos(\omega_n \tau + \varphi_n)\,d\tau, \end{aligned} \tag{IV.43}$$

т. е.

$$x_1 = \sum_{n=1}^{N} (a_{n,1} \cos \varphi_n + b_{n,1} \sin \varphi_n), \quad x_2 = \sum_{n=1}^{N} (a_{n,2} \cos \varphi_n + b_{n,2} \sin \varphi_n), \tag{IV.44}$$

где

$$\begin{aligned} a_{n,1} &= -\varepsilon \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sqrt{2E_n} \int_0^t v_N(t-\tau) \cos \omega_n \tau \, d\tau, \\ b_{n,1} &= \varepsilon \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sqrt{2E_n} \int_0^t v_N(t-\tau) \sin \omega_n \tau \, d\tau, \\ a_{n,2} &= -\varepsilon \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sqrt{2E_n} \int_0^t v'_N(t-\tau) \cos \omega_n \tau \, d\tau, \\ b_{n,2} &= \varepsilon \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sqrt{2E_n} \int_0^t v'_N(t-\tau) \sin \omega_n \tau \, d\tau. \end{aligned} \tag{IV.45}$$

Так как в выражениях (IV.44) фазы φ_n являются независимыми случайными величинами с равномерным распределением по окружности, а случайные величины $\{a_{n,g}\}$, $\{b_{n,g}\}$ независимы при разных значениях индекса g, мы применим для нахождения предела выражения (IV.42) нашу предельную теорему в том виде, в каком она была сформулирована в § 2 гл. II.

Нетрудно проверить выполнение условий применимости этой теоремы. Возьмем, например, квадратичную форму относительно переменных λ, μ

$$\mathcal{E}\{(\lambda x_1 + \mu x_2)^2\}.$$

Имеем из соотношений (IV.43)

$$\mathcal{E}\{(\lambda x_1 + \mu x_2)^2\} = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2 \left(\frac{\alpha_n}{\omega_n}\right)^2 \mathcal{E}\{E_n\} \left| \int_0^t \{\lambda v_N(t-\tau) + \mu v'_N(t-\tau)\} \, e^{i\omega_n \tau} \, d\tau \right|^2.$$

Но тождественно

$$\left| \int_0^t \{\lambda v_N(t-\tau) + \mu v'_N(t-\tau)\} \, e^{i\omega_n \tau} \, d\tau \right|^2 = \left| \int_0^t \{\lambda v_N(z) + \mu v'_N(z)\} \, e^{-i\omega_n z} \, dz \right|^2$$

и благодаря (IV.25)

$$\mathcal{E}\{E_n\} = kT.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}\{(\lambda x_1+\mu x_2)^2\}=\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^2 kT\left(\frac{\alpha_n}{\omega_n}\right)^2\left|\int_0^t\{\lambda v_N(z)+\mu v'_N(z)\}\,\mathrm{e}^{-i\omega_n z}\,dz\right|^2,$$

откуда, переходя к пределу при $N\to\infty$, имеем на основании (IV.2), (IV.40)

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{E}\{(\lambda x_1+\mu x_2)^2\}=\varepsilon^2 kT\int_0^\infty J(\nu)\left|\int_0^t\{\lambda v(z)+\mu v'(z)\}\,\mathrm{e}^{-i\nu z}\,dz\right|^2 d\nu.$$

Эта предельная квадратичная форма

$$A(t)\lambda^2+2B(t)\lambda\mu+C(t)\mu^2=$$

$$=\varepsilon^2 kT\int_0^\infty J(\nu)\left|\int_0^t\{\lambda v(z)+\mu v'(z)\}\,\mathrm{e}^{-i\nu z}\,dz\right|^2 d\nu, \quad \text{(IV.46)}$$

очевидно, является положительно определенной.

Тривиально проверяются и остальные условия упомянутой предельной теоремы. Применяя ее, из (IV.42) получаем

$$\lim_{N\to\infty}P_N=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,t)f\{q^*(t)+\xi,\,p^*(t)+\eta\}\,d\xi\,d\eta,$$

или

$$\lim_{N\to\infty}P_N=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)\Phi\{\xi-q^*(t),\,\eta-p^*(t),\,t\}\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\Phi\{\xi-q^*(t),\,\eta-p^*(t),\,t\}\,d\xi\,d\eta, \quad \text{(IV.47)}$$

где

$$\begin{aligned}q^*(t)&=q_0v'(t)+p_0v(t),\\ p^*(t)&=q_0v''(t)+p_0v'(t)\end{aligned} \quad \text{(IV.48)}$$

и

$$\Phi\{\xi,\eta,t\}=\frac{1}{2\pi\sqrt{AC-B^2}}\exp\left\{-\frac{C\xi^2-2B\xi\eta+A\eta^2}{2(AC-B^2)}\right\}. \quad \text{(IV.49)}$$

Таким образом, предельное значение вероятности того, что в момент времени $t<0$ координата и импульс системы S лежат соответственно в интервалах (a_1,b_1), (a_2,b_2), существует и равно интегралу (IV.47).

Существует, следовательно, и предельная плотность вероятности распределения координаты и импульса в момент t:

$$\varrho_S=\varrho(t,q,p)=\Phi\{q-q^*(t),\,p-p^*(t),\,t\}. \quad \text{(IV.50)}$$

Заметив это, фиксируем произвольное малое положительное α и произвольное большое β и будем рассматривать задачу об аппроксимации ϱ_S в интервале

$$\frac{\alpha}{\varepsilon^2} < t < \frac{\beta}{\varepsilon^2} \tag{IV.51}$$

некоторым более простым выражением ϱ_S^0 для достаточно малых ε.

Так как ввиду (IV.46), (IV.48) функция ϱ_S зависит в конечном счете от поведения функции $v(t)$, мы начнем с вывода асимптотического выражения этой функции в интервале (IV.51) при $\varepsilon \to 0$.

Для этого возьмем уравнение (IV.39) и подставим в него в соответствии с (IV.36)

$$Q(t) = I - P(t), \quad I = \int_0^\infty J(\nu)\,d\nu, \quad P(t) = \int_0^\infty J(\nu)\cos \nu t\,d\nu. \tag{IV.52}$$

Получим

$$\begin{gathered} v''(t) + \omega^2 v(t) = \varepsilon^2 I v(t) - \varepsilon^2 \int_0^t P(t-t')v'(t')\,dt', \\ v(0) = 0, \quad v'(0) = 1. \end{gathered} \tag{IV.53}$$

Совершим здесь замену переменных, полагая

$$\begin{gathered} v(t) = \overset{+}{\zeta}(t)\,e^{i\omega t} + \overset{-}{\zeta}(t)\,e^{-i\omega t}, \\ v'(t) = (i\omega + \varepsilon^2\overset{+}{\Delta})\overset{+}{\zeta}(t)\,e^{i\omega t} + (-i\omega + \varepsilon^2\overset{-}{\Delta})\overset{-}{\zeta}(t)\,e^{-i\omega t}, \end{gathered} \tag{IV.54}$$

где

$$\begin{aligned} \overset{+}{\Delta} &= \frac{I}{2i\omega} - \frac{1}{2}\int_0^\infty P(u)\,e^{i\omega u}\,du, \\ \overset{-}{\Delta} &= -\frac{I}{2i\omega} - \frac{1}{2}\int_0^\infty P(u)\,e^{-i\omega u}\,du. \end{aligned} \tag{IV.55}$$

Дифференцируя первое из соотношений (IV.54) и сравнивая со вторым, получаем

$$\overset{+}{\zeta}'e^{i\omega t} + \overset{-}{\zeta}'e^{-i\omega t} = \varepsilon^2\overset{+}{\Delta}\overset{+}{\zeta}e^{i\omega t} + \varepsilon^2\overset{-}{\Delta}\overset{-}{\zeta}e^{-i\omega t}. \tag{IV.56}$$

Далее, дифференцируя второе из этих соотношений и подставляя в уравнение (IV.53), имеем

$$\begin{aligned} \overset{+}{\zeta}'(i\omega + \varepsilon^2\overset{+}{\Delta})\,e^{i\omega t} + \overset{-}{\zeta}'(-i\omega + \varepsilon^2\overset{-}{\Delta})\,e^{-i\omega t} &= \varepsilon^2(I - i\omega\overset{+}{\Delta})\overset{+}{\zeta}\,e^{i\omega t} + \\ + \varepsilon^2(I + i\omega\overset{-}{\Delta})\overset{-}{\zeta}\,e^{-i\omega t} - \varepsilon^2\int_0^t P(t-t')\Big\{&(i\omega + \varepsilon^2\overset{+}{\Delta})\overset{+}{\zeta}(t')\,e^{i\omega t'} + \\ &+ (-i\omega + \varepsilon^2\overset{-}{\Delta})\overset{-}{\zeta}(t')\,e^{-i\omega t'}\Big\}\,dt'. \end{aligned} \tag{IV.57}$$

Разрешив два линейных уравнения (IV.56), (IV.57) относительно производных наших новых неизвестных функций, найдем

$$\begin{aligned}
\overset{+}{\zeta}' &= \varepsilon^2 \overset{++}{L}\overset{+}{\zeta} + \varepsilon^2 \overset{+-}{M}\overset{-}{\zeta}\, e^{-2i\omega t} + \\
&\quad + \varepsilon^2 \int_0^t \left\{ \overset{++}{R}\overset{+}{K}(t-t')\overset{+}{\zeta}(t') + \overset{++}{S}\overset{+}{K}(t-t')\, e^{-2i\omega t'}\overset{-}{\zeta}(t') \right\} dt', \\
\overset{-}{\zeta}' &= \varepsilon^2 \overset{--}{L}\overset{-}{\zeta} + \varepsilon^2 \overset{-+}{M}\overset{+}{\zeta}\, e^{2i\omega t} + \\
&\quad + \varepsilon^2 \int_0^t \left\{ \overset{--}{R}\overset{-}{K}(t-t')\overset{-}{\zeta}(t') + \overset{--}{S}\overset{-}{K}(t-t')\, e^{2i\omega t'}\overset{+}{\zeta}(t') \right\} dt',
\end{aligned} \tag{IV.58}$$

где для сокращения положено

$$\begin{aligned}
\overset{+}{L} &= \frac{(I - i\omega\overset{+}{\Delta}) + (i\omega - \varepsilon^2\overset{-}{\Delta})\overset{+}{\Delta}}{2i\omega + \varepsilon^2(\overset{+}{\Delta} - \overset{-}{\Delta})}, \quad \overset{+}{M} = \frac{(I + i\omega\overset{-}{\Delta}) + (i\omega - \varepsilon^2\overset{-}{\Delta})\overset{-}{\Delta}}{2i\omega + \varepsilon^2(\overset{+}{\Delta} - \overset{-}{\Delta})}, \\
\overset{+}{R} &= \frac{-(i\omega + \varepsilon^2\overset{+}{\Delta})}{2i\omega + \varepsilon^2(\overset{+}{\Delta} - \overset{-}{\Delta})}, \quad \overset{+}{S} = \frac{i\omega - \varepsilon^2\overset{-}{\Delta}}{2i\omega + \varepsilon^2(\overset{+}{\Delta} - \overset{-}{\Delta})}, \quad \overset{+}{K}(t) = P(t)\, e^{-i\omega t}
\end{aligned} \tag{IV.59}$$

и где $\overset{-}{L}$, $\overset{-}{M}$, $\overset{-}{R}$, $\overset{-}{S}$, $\overset{-}{K}(t)$ обозначают соответствующие комплексно-сопряженные величины. Вместе с полученной системой интегродифференциальных уравнений (IV.58) рассмотрим и начальные условия.

В силу (IV.52) и (IV.53) имеем

$$\overset{+}{\zeta}(0) + \overset{-}{\zeta}(0) = 0, \quad (i\omega + \varepsilon^2\overset{+}{\Delta})\overset{+}{\zeta}(0) + (-i\omega + \varepsilon^2\overset{-}{\Delta})\overset{-}{\zeta}(0) = 1,$$

откуда

$$\overset{+}{\zeta}(0) = \frac{1}{2i\omega + \varepsilon^2(\overset{+}{\Delta} - \overset{-}{\Delta})}, \quad \overset{-}{\zeta}(0) = -\frac{1}{2i\omega + \varepsilon^2(\overset{+}{\Delta} - \overset{-}{\Delta})}. \tag{IV.60}$$

Введем теперь в уравнение (IV.58) новую независимую переменную

$$\tau = \varepsilon^2 t \tag{IV.61}$$

и заметим, что, когда t изменяется в интервале (IV.51), переменная будет изменяться в фиксированном конечном интервале

$$\alpha < \tau < \beta. \tag{IV.62}$$

Подставляя (IV.61) в (IV.58), имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d\overset{+}{\zeta}}{d\tau} &= \overset{++}{L}\overset{+}{\zeta} + \overset{+-}{M}\overset{-}{\zeta} \exp\left\{-2i\omega\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\tau \left\{ \overset{++}{R}\overset{+}{K}\left(\frac{\tau-\tau'}{\varepsilon^2}\right)\overset{+}{\zeta}(\tau') + \overset{++}{S}\overset{+}{K}\left(\frac{\tau-\tau'}{\varepsilon^2}\right) \exp\left\{-2i\frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau'\right\}\overset{-}{\zeta}(\tau') \right\} d\tau'
\end{aligned}$$

и соответствующее сопряженное уравнение.

Интегрируя эти уравнения от 0 до τ и переставляя порядок интегрирования в двойных интегралах, находим

$$\overset{+}{\zeta}(\tau)=\overset{+}{\zeta}(0)+\int_0^\tau\left\{\overset{+}{L}+\frac{\overset{+}{R}}{\varepsilon^2}\int_0^{\tau-\tau'}\overset{+}{K}\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right)dz\right\}\overset{+}{\zeta}(\tau')\,d\tau'+$$
$$+\int_0^\tau\left\{\overset{+}{M}+\frac{\overset{+}{S}}{\varepsilon^2}\int_0^{\tau-\tau'}\overset{+}{K}\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right)dz\right\}\exp\left\{-2i\frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau'\right\}\overset{-}{\zeta}(\tau')\,d\tau', \tag{IV.63}$$

$$\overset{-}{\zeta}(\tau)=\overset{-}{\zeta}(0)+\int_0^\tau\left\{\overset{-}{L}+\frac{\overset{-}{R}}{\varepsilon^2}\int_0^{\tau-\tau'}\overset{-}{K}\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right)dz\right\}\overset{-}{\zeta}(\tau')\,d\tau'+$$
$$+\int_0^\tau\left\{\overset{-}{M}+\frac{\overset{-}{S}}{\varepsilon^2}\int_0^{\tau-\tau'}\overset{-}{K}\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right)dz\right\}\exp\left\{2i\frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau'\right\}\overset{+}{\zeta}(\tau')\,d\tau'.$$

С другой стороны, из (IV.59) имеем

$$\overset{+}{L}=\frac{I}{2i\omega}+O(\varepsilon^2),\quad \overset{+}{M}=\frac{I+2i\omega\overset{-}{\Delta}}{2i\omega}+O(\varepsilon^2),$$
$$\overset{+}{R}=-\frac{1}{2}+O(\varepsilon^2),\quad \overset{+}{S}=\frac{1}{2}+O(\varepsilon^2), \tag{IV.64}$$

где $O(\varepsilon^2)$ обозначают величины порядка малости ε^2.

Далее, при любых фиксированных $\tau>\tau'$ находим

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\tau-\tau'}\overset{+}{K}\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right)dz=\int_0^{(\tau-\tau')/\varepsilon^2}\overset{+}{K}(u)\,du\to\int_0^\infty\overset{+}{K}(u)\,du=\int_0^\infty P(u)\,\mathrm{e}^{-i\omega u}\,du.$$

Так как ввиду выражений (IV.55)

$$\frac{I}{2i\omega}+\overset{-}{\Delta}+\frac{1}{2}\int_0^\infty P(u)\,\mathrm{e}^{-i\omega u}\,du=0,$$

то мы убеждаемся на основании (IV.64), что ядра интегральных уравнений (IV.63) являются сходящимися при $\varepsilon\to 0$:

$$\overset{+}{L}+\frac{\overset{+}{R}}{\varepsilon^2}\int_0^{\tau-\tau'}\overset{+}{K}\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right)dz\to\frac{I}{2i\omega}-\frac{1}{2}\int_0^\infty P(u)\,\mathrm{e}^{-i\omega u}\,du,$$
$$\left\{\overset{+}{M}+\frac{\overset{+}{S}}{\varepsilon^2}\int_0^{\tau-\tau'}\overset{+}{K}\left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right)dz\right\}\exp\left\{-2i\frac{\omega}{\varepsilon^2}\tau'\right\}\to 0.$$

Кроме того, вследствие (IV.60) свободные члены этих уравнений также являются сходящимися при $\varepsilon \to 0$:

$$\overset{+}{\zeta}(0) \to \frac{1}{2i\omega}, \quad \overset{-}{\zeta}(0) \to -\frac{1}{2i\omega}.$$

Поэтому на основании известного свойства интегральных уравнений типа уравнения Вольтерра в интервале (IV.62) имеем

$$|\overset{+}{\zeta} - \overset{+}{\xi}| \leqslant \eta(\varepsilon), \quad |\overset{-}{\zeta} - \overset{-}{\xi}| \leqslant \eta(\varepsilon), \tag{IV.65}$$

где

$$\eta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{IV.66}$$

и где $\overset{+}{\xi}$, $\overset{-}{\xi}$ — решения предельных уравнений

$$\begin{aligned} \overset{+}{\xi}(\tau) &= \left\{ \frac{I}{2i\omega} - \frac{1}{2} \int_0^\infty P(u)\, e^{-i\omega u}\, du \right\} \int_0^\tau \overset{+}{\xi}(\tau')\, d\tau' + \frac{1}{2i\omega}, \\ \overset{-}{\xi}(\tau) &= -\left\{ \frac{I}{2i\omega} + \frac{1}{2} \int_0^\infty P(u)\, e^{i\omega u}\, du \right\} \int_0^\tau \overset{-}{\xi}(\tau')\, d\tau' - \frac{1}{2i\omega}. \end{aligned} \tag{IV.67}$$

Положим

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} \int_0^\infty P(u) \sin(\omega u)\, du - \frac{I}{2\omega}, \\ \delta &= \frac{1}{2} \int_0^\infty P(u) \cos(\omega u)\, du = \frac{\pi}{4} J(\omega). \end{aligned} \tag{IV.68}$$

Тогда решение (IV.67) можем представить в форме

$$\overset{+}{\xi}(\tau) = \frac{1}{2i\omega} e^{(-\delta + i\Omega)\tau}, \quad \overset{-}{\xi}(\tau) = -\frac{1}{2i\omega} e^{(-\delta - i\Omega)\tau}$$

и потому, возвращаясь к первоначальной независимой переменной, на основании (IV.65) убеждаемся, что в рассматриваемом нами интервале (IV.51) имеют место неравенства

$$\left| \overset{+}{\zeta} - \frac{1}{2i\omega} e^{-\delta\varepsilon^2 t} e^{i\Omega\varepsilon^2 t} \right| \leqslant \eta(\varepsilon), \quad \left| \overset{-}{\zeta} + \frac{1}{2i\omega} e^{-\delta\varepsilon^2 t} e^{-i\Omega\varepsilon^2 t} \right| \leqslant \eta(\varepsilon).$$

Отсюда благодаря формулам (IV.54) замечаем, что в интервале (IV.51)

$$\begin{aligned} \left| v(t) - e^{-\delta\varepsilon^2 t} \frac{\sin(\omega + \varepsilon^2\Omega)t}{\omega} \right| &\leqslant 2\eta(\varepsilon), \\ \left| v'(t) - e^{-\delta\varepsilon^2 t} \cos(\omega + \varepsilon^2\Omega)t \right| &\leqslant \eta_1(\varepsilon), \end{aligned} \tag{IV.69}$$

где также $\eta_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Из этих соотношений и уравнения (IV.53) нетрудно установить в указанном интервале аналогичную формулу и для второй производной:

$$|v''(t)+e^{-\delta\varepsilon^2 t}\omega\sin(\omega+\varepsilon^2\Omega)t|\leqslant\eta_2(\varepsilon),\quad \eta_2(\varepsilon)\to 0,\quad \varepsilon\to 0. \tag{IV.70}$$

Рассмотрим теперь квадратичную форму (IV.46) и построим ее приближенное выражение

$$\varepsilon^2 kT\int_0^\infty J(\nu)\left|\int_0^t\left\{\frac{\lambda}{\omega}\sin\omega_\varepsilon z+\mu\cos\omega_\varepsilon z\right\}e^{-\delta\varepsilon^2 z-i\nu z}\,dz\right|^2 d\nu=$$

$$=\frac{\varepsilon^2 kT}{2}\int_{-\infty}^\infty J(\nu)\left|\int_0^t\left\{\frac{\lambda}{\omega}\sin\omega_\varepsilon z+\mu\cos\omega_\varepsilon z\right\}e^{-\delta\varepsilon^2 z-i\nu z}\,dz\right|^2 d\nu, \tag{IV.71}$$

где

$$J(-\nu)=J(\nu),\quad \omega_\varepsilon=\omega+\varepsilon^2\Omega.$$

Преобразуем здесь переменные интегрирования

$$v=\omega_\varepsilon+\varepsilon^2 x,\quad z=\frac{y}{\varepsilon^2}.$$

Тогда приближенное выражение (IV.71) для формы (IV.46) примет вид

$$\frac{kT}{2}\int_{-\infty}^\infty J(\omega_\varepsilon+\varepsilon^2 x)\times$$

$$\times\left|\int_0^{t\varepsilon^2}\left\{\frac{\lambda}{\omega}\sin\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon^2}y+\mu\cos\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon^2}y\right\}\exp\left\{-i\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon^2}y\right\}\exp\{-\delta y-ixy\}\,dy\right|^2 dx.$$

Тем самым можно убедиться, что эта форма аппроксимируется равномерно по отношению к t в интервале (IV.51) формой вида

$$\frac{kT}{2}J(\omega_\varepsilon)\int_{-\infty}^\infty\left|\int_0^{t\varepsilon^2}\left\{\frac{\lambda}{\omega}\sin\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon^2}y+\mu\cos\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon^2}y\right\}\exp\left\{-i\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon^2}y\right\}e^{-\delta y-ixy}\,dy\right|^2 dx=$$

$$=\pi kTJ(\omega_\varepsilon)\int_0^{t\varepsilon^2}\left\{\frac{\lambda}{\omega}\sin\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon^2}y+\mu\cos\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon^2}y\right\}^2 e^{-2\delta y}\,dy. \tag{IV.72}$$

Но эта форма в свою очередь приближается равномерно на рассматриваемом интервале квадратичной формой

$$kT(1-e^{-2\varepsilon^2\delta t})\left\{\frac{\lambda^2}{\omega^2}+\mu^2\right\}.$$

Отсюда ввиду (IV.46), (IV.61) убеждаемся, что на указанном интервале

$$\left|A(t)-\frac{kT}{\omega^2}(1-\mathrm{e}^{-2\varepsilon^2\delta t})\right|\leqslant\zeta(\varepsilon),$$

$$|B(t)|\leqslant\zeta(\varepsilon),$$

$$|C(t)-kT(1-\mathrm{e}^{-2\varepsilon^2\delta t})|\leqslant\zeta(\varepsilon),$$

где $\zeta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Таким образом, из (IV.49) находим

$$\Phi\{\xi,\eta,t\}-\frac{\omega}{2\pi kT(1-\mathrm{e}^{-2\varepsilon^2\delta t})}\exp\left\{\frac{\omega^2\xi^2+\eta^2}{2kT(1-\mathrm{e}^{-2\varepsilon^2\delta t})}\right\}\to 0,\quad \varepsilon\to 0, \tag{IV.73}$$

равномерно по отношению к t в интервале (IV.51).

С другой стороны, на основании (IV.48), (IV.69), (IV.70) имеем

$$\left|q^*(t)-\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta t}\left(q_0\cos\omega_\varepsilon t+p_0\frac{\sin\omega_\varepsilon t}{\omega}\right)\right|\leqslant|q_0|\eta_1(\varepsilon)+2|p_0|\eta(\varepsilon),$$

$$\left|p^*(t)-\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta t}(-q_0\omega\sin\omega_\varepsilon t+p_0\cos\omega_\varepsilon t)\right|\leqslant|q_0|\eta_2(\varepsilon)+|p_0|\eta_1(\varepsilon)$$

или, вводя в рассмотрение начальную энергию E_0 и начальную фазу φ_0 вибратора S:

$$q_0=\frac{\sqrt{2E_0}}{\omega}\cos\varphi_0,\quad p_0=-\sqrt{2E_0}\sin\varphi_0,$$

можем записать эти неравенства в виде

$$\left|q^*(t)-\frac{\sqrt{2E_0}}{\omega}\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta t}\cos(\omega_\varepsilon t+\varphi_0)\right|\leqslant|q_0|\eta_1(\varepsilon)+2|p_0|\eta(\varepsilon),$$

$$\left|p^*(t)+\sqrt{2E_0}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta t}\sin(\omega_\varepsilon t+\varphi_0)\right|\leqslant|q_0|\eta_2(\varepsilon)+2|p_0|\eta_1(\varepsilon).$$

Отсюда, принимая во внимание формулы (IV.50) и (IV.73), убеждаемся, что равномерно по отношению к t в интервале (IV.51) имеет место соотношение

$$\left|\varrho_S-\frac{\omega}{2\pi kT(1-\mathrm{e}^{-2\varepsilon^2\delta t})}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{E+E_0\mathrm{e}^{-2\varepsilon^2\delta t}-2\sqrt{EE_0}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta t}\cos(\omega_\varepsilon t+\varphi_0-\varphi)}{kT(1-\mathrm{e}^{-2\varepsilon^2\delta t})}\right\}\right|\to 0,\quad \varepsilon\to 0, \tag{IV.74}$$

в котором

$$q=\frac{\sqrt{2E}}{\omega}\cos\varphi,\quad p=-\sqrt{2E}\sin\varphi.$$

Пусть теперь $\{\Delta t_\varepsilon\}$ будет такой последовательностью, что

$$\varepsilon^2 \Delta t_\varepsilon \to 0, \quad \Delta t_\varepsilon \to \infty \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Тогда из соотношения (IV.74) видим, что равномерно по отношению к t в интервале (IV.51)

$$\frac{1}{\Delta t_\varepsilon} \int_t^{t+\Delta t_\varepsilon} \{\varrho_S - \varrho_S^0\}\, dt \to 0,$$

где

$$\varrho_S^0 = \frac{\omega}{4\pi^2 kT(1 - \mathrm{e}^{-2\varepsilon^2\delta t})} \int_0^{2\pi} d\theta \exp\left\{ -\frac{E + E_0 \mathrm{e}^{-2\varepsilon^2\delta t} - 2\sqrt{E E_0}\, \mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta t} \cos\theta}{kT(1 - \mathrm{e}^{-2\varepsilon^2\delta t})} \right\},$$

что и завершает доказательство нашей теоремы.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ*

§ 1. В настоящей статье мы хотим указать на одну форму теории возмущений, с помощью которой можно получать статистические уравнения для классических и квантовых динамических систем.

В частности, в рамках этой теории удается получить квантовый аналог уравнений Фоккера–Планка и тем самым подойти к рассмотрению таких квантовых схем, которые должны изучаться с помощью гиббсовских ансамблей и не могут быть описаны обычным путем с помощью ψ-функции.

Для лучшего выявления основной идеи предлагаемого метода приведем изложение на сравнительно простом примере, когда полный гамильтониан системы имеет вид

$$\Gamma = H + f(t)P, \tag{1}$$

где H — гамильтониан невозмущенной системы, $f(t)P$ — гамильтониан возмущения. В классической теории будем рассматривать H и P как данные, не зависящие явно от времени функции канонических координат и импульсов:

$$H = H(q, p), \quad P = P(q, p)4,$$

в квантовой — как некоторые, явно от времени не зависящие динамические операторы. В отношении «возмущающей силы» $f(t)$ мы предположим, что она не зависит от динамических переменных нашей системы и является вещественной функцией времени вида

$$f(t) = \sum_p a_\nu \cos(\nu t + \varphi_\nu), \tag{2}$$

где φ_ν — независимые произвольные фазы, все значения которых равновероятны, a_ν — данные вещественные числа. Частотный спектр возмущающей силы предполагается практически непрерывным, так что мы можем суммы вида

$$\sum_p F(\nu) a_\nu^2 \tag{3}$$

с непрерывными $F(\nu)$ заменять в пределе интегралами

$$\int_0^\infty F(\nu) I_\nu \, d\nu. \tag{4}$$

* Уч. зап. МГУ. Вып. 77. Физика. 1945. Кн. 3. С. 74–100; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 330.

Заметим, что гамильтониан возмущения принятого типа рассматривается, например, в задаче о динамической системе, находящейся в поле излучения с напряженностью $|\mathbf{E}| = f(t)$, параллельном некоторой фиксированной оси. В этом случае P представляет компоненту вектора поляризации по этой оси, а $I(\nu)$ — спектральную интенсивность излучения.

Существенно отметить, что поле излучения в данной схеме трактуется как совершенно внешнее по отношению к изучаемой системе, и потому реакция излучения здесь не учитывается.

Рассмотрим сначала вопрос о движении системы, характеризуемой гамильтонианом вида (1), с точки зрения классической механики и условимся результат измерения начального состояния системы описывать с помощью гиббсовского ансамбля с определенной относительной плотностью экземпляров $\rho_0(q, p)$, которая будет представлять плотность вероятности распределения координат и импульсов в начальный момент времени $t = 0$.

В частности, если в результате измерения мы находим точные значения q_0, p_0 этих переменных, т. е. в нашей интерпретации если все экземпляры гиббсовского ансамбля находятся в одном и том же динамическом состоянии (q_0, p_0) в начальный момент времени, то можно положить

$$\rho_0 = \delta(q - q_0)\delta(p - p_0), \tag{5}$$

где δ — соответствующие дельта-функции.

Неизбежное наличие погрешности $\Delta q, \Delta p$ при определении значений координат и импульсов можно учесть, приняв за δ «размазанные» дельта-функции, локализующие распределение вероятности в конечном объеме порядка $\Delta q \Delta p$.

Итак, пусть начальная плотность $\rho_0(q, p)$ задана. Обозначим через D_t плотность вероятности распределения координат и импульсов в момент времени t при условии, что фазы φ_ν, входящие в выражение возмущающей силы, имеют какие-то заданные значения.

Так как при этом условии гамильтониан системы Γ полностью определен, то эволюция D_t во времени должна совершаться в соответствии с хорошо известным динамическим уравнением Лиувилля со скобками Пуассона

$$\frac{\partial D_t}{\partial t} = [\Gamma, D_t] = [H, D_t] + f(t)[P, D_t]. \tag{6}$$

В начальный же момент времени в силу сделанного допущения

$$D_t = \rho_0 \quad \text{при } t = 0. \tag{7}$$

Заметим теперь, что по своему определению D_t соответствует условной вероятности, представляя плотность вероятности распределения q, p в момент времени t, при условии, что фазы φ_ν имеют какие-то заданные значения. Но так как сами фазы являются случайными величинами, статистически независимыми и распределенными с равномерной плотностью по окружности, то плотность вероятности $\rho_t(q, p)$ для распределения q, p в момент t в обычном смысле, т. е. при неизвестных значениях фаз φ_ν, может быть найдена из D_t с помощью усреднения по всем фазам:

$$\rho_t = \overline{D}_t \tag{8}$$

Здесь черта сверху указывает на выполнение операции усреднений по всем φ_ν, т. е. на то, что по каждой φ_ν мы интегрируем по всей окружности и делим результат на 2π:

$$\overline{D_t} = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} D_t \prod_\nu \left(\frac{d\varphi_\nu}{2\pi} \right).$$

Введем в рассмотрение операции $\left\{\overline{\varphi_\nu=\varphi}\right\}$, $\left\{\overline{\varphi_\nu=\varphi,\varphi_\mu=\theta}\right\}$, представляющие соответственно операции усреднений: по всем фазам, кроме одной — φ_ν, значение которой полагается равным — φ_0; по всем фазам, кроме двух φ_ν, φ_μ, значения которых полагаются равными φ, θ, и т. д.

Тогда выражения

$$\rho^\nu_{t,\varphi} = \overline{D_t}^{\varphi_\nu=\varphi}; \quad \rho^{\nu,\mu}_{t,\varphi,\theta} = \overline{D_t}^{\varphi_\nu=\varphi,\varphi_\mu=\theta}; \dots, \tag{9}$$

очевидно, будут представлять плотности вероятности распределения координат и импульсов системы в момент t соответственно при условиях, что одна из фаз, а именно φ_ν, имеет заданное значение φ, что две фазы — φ_ν и φ_μ — имеют заданные значения φ и θ и т. д.

Заметив это, рассмотрим некоторую динамическую переменную $\mathfrak{a}$, зависящую от координат и импульсов системы, а также, может быть, и от фаз возмущения. Найдем среднее значение этой динамической переменной в момент времени t при произвольных фазах. Имеем

$$\mathfrak{a}_\Phi(t) = \int_\Phi \overline{\mathfrak{a} D_t}\, dq\, dp, \tag{10}$$

где Φ обозначает пространство состояний (q, p) заданной системы.

В частности, если динамическая переменная $\mathfrak{a}$ относится только к самой рассматриваемой системе и не зависит от фаз возмущения, из (8), (10) получим

$$\mathfrak{a}_\Phi(t) = \int_\Phi \mathfrak{a}\overline{D_t}\, dq\, dp = \int_\Phi \mathfrak{a}\rho_t\, dq\, dp. \tag{11}$$

Если, далее, $\mathfrak{a}$ зависит также и от этих фаз, причем аддитивно:

$$\mathfrak{a} = \sum_\nu \mathfrak{a}_\nu(\varphi_\nu), \tag{12}$$

где $\mathfrak{a}_\nu(\varphi_\nu)$ — зависящие от ϕ функции q, p, то в силу (9), (10) можем написать

$$\mathfrak{a}_\Phi(t) = \sum_\nu \int_\Phi \overline{\mathfrak{a}_\nu(\varphi_\nu) D_t}\, dq\, dp = \sum_\nu \frac{1}{2\pi} \int_\Phi \left\{ \int_0^{2\pi} \mathfrak{a}_\nu(\varphi) \overline{D_t}^{\varphi_0=\varphi} d\varphi \right\} dq\, dp =$$

$$= \sum_\nu \int_\Phi \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{a}_\nu(\varphi) \rho^\nu_{t,\varphi}\, d\varphi \right\} dq\, dp. \tag{13}$$

Так, например, среднее значение $\Gamma_{\text{ср}}(t)$ полного гамильтониана системы в момент времени t будет равно сумме

$$\int_{\Phi} H P_t \, dq \, dp = \sum_{\nu} a_\nu \int_{\Phi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\nu_t + \varphi) \rho^{\nu}_{t,\varphi} \, d\varphi \right\} dq \, dp.$$

Совершенно аналогично для динамических переменных, зависящих от фаз возмущения через посредство бинарных сумм

$$\mathfrak{a} = \sum_{\substack{\nu,\mu \\ \nu \neq \mu}} \mathfrak{a}_{\nu,\mu}(\varphi_\nu, \varphi_\mu), \tag{14}$$

получим

$$\mathfrak{a}_\Phi(t) = \sum_{\substack{\nu,\mu \\ \nu \neq \mu}} \mathfrak{a}_{\nu,\mu}(\varphi_\nu, \varphi_\mu) \int_{\Phi} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{a}_{\nu\mu}(\varphi, \theta) \rho^{\nu,\mu}_{t,\varphi,\theta} \, d\varphi \, d\theta \right\} dq \, dp, \tag{15}$$

и т. д. Как видно, для вычисления средних значений для динамических переменных, относящихся к самой системе, нет необходимости знать выражение D_t, являющееся вообще очень сложной функцией весьма большого числа аргументов (число фаз φ_ν в пределе бесконечно), и достаточно найти лишь ρ_t — результат усреднения D_t по всем фазам. Поэтому если мы желаем ограничиться только той информацией о движении системы, которая может быть доставлена знанием средних значений динамических переменных указанного типа, то в этом случае возникает проблема определения ρ_t без предварительного определения D_t. Эта проблема и будет ниже предметом нашего исследования. Мы укажем здесь на один приближенный метод, с помощью которого точное уравнение (6) для D_t может быть переделано в приближенное уравнение для ρ_t. При этом для того, чтобы провести изложение единообразно и для классической и для квантовой схем, скажем предварительно несколько слов по поводу постановки указанной проблемы для систем, подчиняющихся законам квантовой механики.

Заметим, что, по существу, все сказанное выше остается в силе и для квантовой схемы, если только мы примем во внимание обычные «правила перехода». Именно: состояние системы должно теперь определяться не совокупностью координат и импульсов, а некоторой ψ-функцией; плотность вероятности распределения следует заменить «матрицей плотности», классические динамические переменные — функции q, p — квантовыми операторами, действующими на ψ-функции, интеграцию по пространству состояний системы $\int_\Phi \ldots dq \, dp$ — операцией Sp и т. п.

Таким образом, пусть результат измерения начального состояния системы мы будем описывать с помощью некоторого гиббсовского ансамбля с определенной квантовой плотностью ρ_0. В частности, если ρ_0 соответствует «чистому случаю», когда все экземпляры рассматриваемого ансамбля находятся в одном и том же состоянии, а именно ψ_0, то будем иметь

$$\rho_0 = P_{\psi_0}, \tag{16}$$

где P_{ψ_0} — так называемый оператор проектирования, который в гильбертовом пространстве векторов, представляющих возможные ψ-состояния данной системы, проектирует любой вектор на направление вектора ψ_0.

В общепринятом матричном представлении, основанном на некоторой полной ортонормированной системе ψ-функций x_n, можно написать в этом случае «чистого состояния»

$$(\rho_0)_{n,m} = (\overset{+}{x}{}^t_n \cdot P_{\psi_0} x_m) = [(\overset{+}{x}_n \cdot \psi_0(\overset{+}{\psi}_0 x_m))] = (\overset{+}{x}_n \cdot \psi_0)(\overset{+}{\psi}_0 \cdot x_m), \tag{17}$$

где $(\cdot)$ — вещественное скалярное произведение.

В более общем случае, когда отдельные экземпляры гиббсовского ансамбля находятся в состояниях ψ_a соответственно с вероятностями $\{W_a\}$, для матрицы плотности получим следующее выражение:

$$(\rho_0)_{n,m} = \sum_a W_a (\overset{+}{x}_n \cdot \psi_a)(\overset{+}{\psi}_a \cdot x_m). \tag{18}$$

Обозначим теперь через D_t квантовую плотность для момента времени t при условии, что фазовые углы φ_ν имеют какие-то заданные значения.

Так как при этом условии полный гамильтониан системы Γ является вполне определенным динамическим оператором, убеждаемся на основании хорошо известного результата квантовой механики, что закон эволюции D_t во времени должен определяться уравнением (6), в котором, разумеется, скобкам Пуассона надлежит теперь придать квантовый смысл.

Равным образом остается справедливым и начальное условие (7).

Рассмотрим некоторую динамическую переменную $\mathfrak{a}$. В общем случае, когда она может зависеть также и от фаз возмущения, имеем для ее среднего значения в момент t при произвольных фазах следующую формулу:

$$\mathfrak{a}_\Phi(t) = \mathrm{Sp}\,(\overline{\mathfrak{a} D_t}), \tag{19}$$

соответствующую классической формуле (10). В частности, если $\mathfrak{a}$ относится только к самой системе и не зависит от возмущения, получаем

$$\mathfrak{a}_\Phi(t) = \mathrm{Sp}\,(\mathfrak{a}\rho_t), \tag{20}$$

где

$$\rho_t = \overline{D}_t, \tag{21}$$

Совершенно аналогично можно преобразовать соотношения (13), (15).

Таким образом, и для систем, подчиняющихся законам квантовой механики, в случае если мы желаем ограничиться только той информацией, которая доставляется средними значениями динамических переменных, относящихся к самой системе, нет необходимости знать выражение для «условной квантовой плотности» D_t, зависящей от фазовых углов, и вполне достаточно уметь определить ее усредненное значение, т. е. ρ_t. Как видно, здесь возникает та же проблема, что и для классических систем, и мы будем сейчас изучать уравнение (6) безотносительно к его классическому или квантовому смыслу.

§ 2. Итак, рассмотрим уравнение (6) и поставим задачу о получении из него некоторого приближенного уравнения для вычисления ρ_t. Усредним для этого (6) по всем фазам. Тогда, приняв во внимание (9), получим

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = [H, \rho_t] + \overline{[P, f(t)P_t]} = [H, \rho_t] + \sum_\nu a_\nu \left[P, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^\nu_{t,\varphi} \cos(\nu_t + \varphi)\, d\varphi \right].$$

Усредним теперь уравнение (6) по всем фазам, кроме одной, а именно φ_μ, значение которой положим равным θ. Тогда

$$\frac{\partial \rho^\mu_{t,\theta}}{\partial t} = [H, \rho^\mu_{t,\theta}] + \left[\overline{P, f(t)P_t}^{\varphi_\mu=\theta} \right] =$$

$$= [H, \rho^\mu_{t,\theta}] + \sum_\nu a_\nu \left[\overline{P, D_t \cos(\nu_t + \varphi_\nu)}^{\varphi_\mu=\theta} \right] + a_\mu \left[\overline{P, D_t \cos(\mu_t + \varphi_\mu)}^{\varphi_\mu=\theta} \right].$$

Но, очевидно,

$$\overline{D_t \cos(\mu_t + \varphi_\mu)}^{\varphi_\mu=\theta} = \rho^\mu_{t,\varphi} \cos(\mu_t + \theta)$$

и

$$\overline{D_t \cos(\nu_t + \varphi_0)}^{\varphi_\mu=\theta} = \rho^\mu_{t,\varphi} \cos(\mu_t + \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{\mu,\nu}_{t,\theta,\varphi} \cos(\nu_t + \varphi)\, d\varphi,$$

так что

$$\frac{\partial \rho^\mu_{t,\theta}}{\partial t} = [H, \rho^\mu_{t,\theta}] + a_\mu [P, \rho^\mu_{t,\theta}] \cos(\mu_t + \theta) +$$

$$+ \sum_{\nu \neq \mu} a_\nu \left[P, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{\mu,\nu}_{t,\theta,\varphi} \cos(\nu_t + \varphi)\, d\varphi \right] \quad (22)$$

или при изменении порядка индексов

$$\nu \rightleftarrows \mu, \quad \varphi \rightleftarrows \theta$$

$$\frac{\partial \rho^\nu_{t,\varphi}}{\partial t} = [H, \rho^\nu_{t,\varphi}] + a_\nu [P, \rho^\nu_{t,\varphi}] \cos(\nu_t + \varphi) +$$

$$+ \sum_{\mu \neq \nu} a_\mu \left[P, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{\nu,\mu}_{t,\varphi,\theta} \cos(\mu_t + \theta)\, d\theta \right]. \quad (23)$$

Вычтем теперь (22) из (23) и введем в рассмотрение выражения

$$\sigma^\nu_{t,\varphi} = \rho^\nu_{t,\varphi} - \rho_t, \quad \sigma^{\nu,\mu}_{t,\varphi,\theta} = \rho^{\nu,\mu}_{t,\varphi,\theta} - \rho^\mu_{t,\theta}. \quad (24)$$

Имеем

$$\frac{\partial\sigma^{\nu}_{t,\varphi}}{\partial t} = [H, \sigma^{\nu}_{t,\varphi}] + a_\nu[P, \rho_t]\cos(\nu_t + \varphi) + a_\nu[P, \sigma^{\nu}_{t,\varphi}]\cos(\nu_t + \varphi) +$$

$$+ \sum_{\mu+\nu} a_\mu \left[P, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho^{\nu,\mu}_{t,\varphi,\theta}\cos(\mu_t + \theta)\,d\theta\right] - \sum_{\mu} a_\mu \left[P, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho^{\mu}_{t,\theta}\cos(\mu_t + \theta)\,d\theta\right],$$

заменив в сумме, фигурирующей в правой части (22), ν, φ соответственно на μ, θ.

Отсюда получаем

$$\frac{\partial\sigma^{\nu}_{t,\varphi}}{\partial t} = [H, \sigma^{\nu}_{t,\varphi}] + a_\nu[P, \rho_t]\cos(\nu_t + \varphi) + a_\nu[P, \sigma^{\nu}_{t,\varphi}]\cos(\nu_t + \varphi) +$$

$$+ \sum_{\mu\neq\nu} a_\mu \left[P, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho^{\nu,\mu}_{t,\varphi,\theta}\cos(\mu_t + \theta)\,d\theta\right] = a_\nu \left[P, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho^{\nu}_{t,\theta}\cos(\nu_t + \theta)\,d\theta\right].$$

Но, очевидно,

$$\int_0^{2\pi} \rho^{\nu}_{t,\theta}\cos(\nu_t + \theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \rho_t\cos(\nu_t + \theta)\,d\theta + \int_0^{2\pi} \sigma^{\nu}_{t,\theta}\cos(\nu_t + \theta)\,d\theta =$$

$$= \rho_t \int_0^{2\pi} \cos(\nu_t + \theta)\,d\theta + \int_0^{2\pi} \sigma_{t,\theta}\cos(\nu_t + \theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sigma^{\nu}_{t,\theta}\cos(\nu_t + \theta)\,d\theta$$

и, таким образом, окончательно

$$\frac{\partial\sigma^{\nu}_{t,\varphi}}{\partial t} = [H, \sigma^{\nu}_{t,\varphi}] + a_\nu[P, \rho_t]\cos(\nu_t + \varphi) + a_\nu[P, \sigma^{\nu}_{t,\varphi}]\cos(\nu_t + \varphi) +$$

$$+ \sum_{\mu\neq\nu} a_\mu \left[P, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma^{\nu,\mu}_{t,\varphi,\theta}\cos(\mu_t + \theta)\,d\theta\right] - a_\nu \left[P, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma^{\nu}_{t,\theta}\cos(\nu_t + \theta)\,d\theta\right]. \tag{25}$$

До сих пор мы производили над основным уравнением (6) лишь чисто формальные операции, и полученные нами уравнения (22), (25) являются точными уравнениями. Заметим теперь, что поскольку ρ_0 не зависит от фаз возмущения, то соответствующим усреднением начального соотношения (7) убеждаемся, что в начальный момент

$$\rho_t = \rho_0, \quad \rho^{\nu}_{t,\varphi} = \rho_0, \quad \rho^{\nu,\mu}_{t,\varphi,\theta} = \rho_0; \ldots$$

и потому

$$\sigma^{\nu}_{t,\varphi} = 0, \quad \sigma^{\nu,\mu}_{t,\varphi,\theta} = 0 \quad \text{при } t = 0. \tag{26}$$

Ввиду этого предположим, что на некотором интервале времени $(0, \tau)$ выражения

$$\sigma^{\nu}_{t,\varphi}, \quad \sigma^{\nu,\mu}_{t,\varphi,\theta} \tag{27}$$

можно считать малыми и в первом приближении вообще ими пренебречь.

Если возмущение мало, например, если P пропорционально малому параметру:

$$P = \varepsilon Q, \tag{28}$$

то естественно ожидать, что τ может быть сделано сколь угодно большим при достаточно малом ε.

Используя основную идею теории возмущений, мы отбросим в уравнении (25) все члены, в которые одновременно входят и возмущение, и выражения (27).

Таким образом, получим уже приближенное уравнение

$$\frac{\partial \sigma^{\nu}_{t,\varphi}}{\partial t} = [H, \sigma^{\nu}_{t,\varphi}] + a_{\nu}[P, \rho_t]\cos(\nu_t + \varphi). \tag{29}$$

Выразив отсюда $\sigma^{\nu}_{t,\varphi}$ через ρ_t и подставив

$$\rho^{\nu}_{t,\varphi} = \rho_t + \sigma^{\nu}_{t,\varphi}$$

в уравнение (22), придем к искомому уравнению для непосредственного определения ρ_t. Для этого введем в рассмотрение явно от времени не зависящий оператор A, действующий на динамические переменные с помощью соотношения

$$A_u = [H, u].$$

В частности, в классическом случае, когда динамические переменные являются функциями координат и импульсов:

$$u = u(q, p),$$

этот оператор будет иметь вид

$$A = \sum \left\{ \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} \right\}.$$

В квантовом случае A является оператором, действующим на операторы, в отличие от динамических переменных, являющихся операторами, действующими на ψ-функции:

$$A = \frac{1}{ih}\{H \ldots - \ldots H\}.$$

Рассмотрим теперь безотносительно к ранее изложенным соображениям уравнение вида

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = A \cdot u_t + \Phi_t. \tag{30}$$

Тогда, поскольку A не зависит явно от времени, имеем квадратуру

$$u_t = \mathrm{e}^{At} + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}\Phi_\tau \, d\tau. \tag{31}$$

Чтобы раскрыть смысл оператора e^{At}, рассмотрим уравнение для изменения во времени динамических переменных в невозмущенной системе. Если F_t есть

значение некоторой динамической переменной в момент времени t, то при отсутствии возмущения $F = H$ и потому

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = [F_t, H] = -[H, F_t]$$

или после введения оператора A

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = -AF_t,$$

откуда

$$F_t = \mathrm{e}^{-At} F_0.$$

Таким образом, оператор

$$T_t = \mathrm{e}^{-At}, \tag{32}$$

приложенный к некоторой динамической переменной, переводит ее в то ее значение, которое она примет по истечении времени t (при отсутствии возмущения). Этот оператор соответствует, следовательно, сдвигу времени на t.

В частности, в классическом случае имеем

$$T_t F(q, p) = F(q_t, p_t), \tag{33}$$

где q_t, p_t определяются как решения невозмущенных уравнений Гамильтона:

$$\frac{\partial q_t}{\partial t} = \frac{\partial H_t}{\partial p_t}, \quad \frac{\partial p_t}{\partial t} = \frac{\partial H_t}{\partial q_t},$$

принимающие значения q, p при $t = 0$. В квантовой механике для оператора сдвига времени найдем известное выражение через унитарные операторы обычного типа

$$T_t F = \overset{+}{U}_t F U_t, \tag{34}$$

где

$$U_t = \mathrm{e}^{Ht/i\hbar}.$$

Итак, решение (31) уравнения (30) может быть представлено в форме

$$U_t = T_{-t} u_0 + \int_0^t T_{\tau - t} \Phi_\tau \, d\tau.$$

Замечая теперь, что уравнение (29) будет иметь вид (30) и что к тому же $\sigma^0_{t,\varphi}$ аннулируется при $t = 0$, находим

$$\sigma^\nu_{t,\varphi} = a_\nu \int_0^t \cos(\nu t + \varphi) T_{\tau - t}[P, \rho_\tau] \, d\tau$$

и потому

$$\rho^\nu_{t,\varphi} = \rho_t a_\nu \int_0^t \cos(\nu t + \varphi) T_{\tau - t}[P, \rho_\tau] \, d\tau. \tag{35}$$

Подставляя это выражение в уравнение (22), получаем

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = [H, \rho_t] + \\ + \sum_\nu a_\nu^2 \left[P, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \cos(\nu_t + \varphi) \cos(\nu_\tau + \varphi) T_{\tau - t}[P, \rho_\tau] \, d\tau \, d\varphi \right], \quad (36)$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \rho_t \cos(\nu_t + \varphi) \, d\varphi = \rho_t \int_0^{2\pi} \cos(\nu_t + \varphi) \, d\varphi = 0.$$

Замечая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \cos(\nu_t + \varphi) \cos(\nu_\tau + \varphi) \, d\varphi = \frac{1}{2} \cos \nu(t - \tau),$$

из (36) получаем

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = [H, \rho_t] + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_\nu a_\nu^2 \cos \nu(t - \tau) [P, T_{\tau - t}[P, \rho_\tau]] \, d\tau.$$

Заменяя здесь в пределе сумму интегралом и учитывая таким образом непрерывность спектра возмущения, мы приходим к искомому уравнению для определения ρ_t

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = [H, \rho_t] + \int_0^t \Delta(t - \tau) [P, T_{\tau - t}[P, \rho_\tau]] \, d\tau, \quad (37)$$

в котором

$$\Delta(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty I(\nu) \cos(\nu z) \, d\nu. \quad (38)$$

Полученное уравнение (37) благодаря присутствию интегрального члена, как видно, обладает гистерезисным характером в том смысле, что производная плотности в некоторый момент времени t зависит не только от выражения плотности в этот момент времени, но и от ее поведения во все предыдущие моменты, считая от начального, что соответствует немарковскому процессу.

Однако в двух практически важных случаях, которые мы сейчас будем рассматривать, этот гистерезисный характер выпадает и приближенное уравнение (37) может быть заменено другим приближенным уравнением, в котором уже производная плотности в некоторый момент времени зависит от выражения плотности только в этот же момент времени.

§ 3. Рассмотрим случай, когда в уравнении (37) функция (38) может быть заменена дельта-функцией:

$$\Delta(z)=\frac{1}{2}I\int_0^\infty \cos(\nu z)\,d\nu,\quad I=I(0).$$

Пусть, например, можно указать Δt такого порядка, что можно пренебречь как величиной $\Delta(z)$ для $z>\Delta t$, так и изменением состояния системы за интервал времени длиной Δt. Тогда имеем приближенно для $t>\Delta t$

$$\int_0^t \Delta(t-\tau)[P,T_{\tau-t}[P,\rho_\tau]]\,d\tau=\int_{t-\Delta t}^t \Delta(t-\tau)[P,T_{\tau-t}[P,\rho_\tau]]\,d\tau=$$

$$=\int_{t-\Delta t}^t \Delta(t-\tau)\,d\tau[P,[P,\rho_t]]=\int_{-\infty}^t \Delta(t-\tau)\,d\tau[P,[P,\rho_t]] \quad (39)$$

Но, с другой стороны, благодаря (38)

$$\int_{-\infty}^t \Delta(t-\tau)\,d\tau=\int_0^\infty \Delta(z)\,dz=\frac{I(0)\pi}{4}$$

и, таким образом, приближенное уравнение (37) можем заменить приближенным уравнением вида

$$\frac{\partial\rho_t}{\partial t}=[H,\rho_t]+\frac{I\pi}{4}[P,[P,\rho_t]],\quad t>0. \quad (40)$$

Раскрывая его в классическом случае, приходим к уравнению Фоккера–Планка, решая которое можем получить выражение для p_t через начальную плотность:

$$\rho_t=\int_\Phi K(t;q',p';q,p)\rho_0(q',p')\,dq'\,dp',$$

причем «функция Грина» $K(t;q',p';q,p)$ имеет здесь смысл плотности вероятности перехода $(q',p')\to(q,p)$.

Как видно, даже если начальный гиббсовский ансамбль находится в «чистом состоянии» (q_0,p_0), т. е. если он имеет вид (5), все равно в момент $t>0$ мы имеем «смесь», причем

$$K(t;q_0,p_0;q,p)$$

представляет тогда плотность распределения величин q,p.

Нетрудно убедиться также, что выражение «типа энтропии»

$$S_t=-\int_\Phi \rho_t\ln\rho_t\,dq\,dp \quad (41)$$

монотонно возрастает при увеличении t:

$$\frac{\partial S_t}{\partial t}>0\quad\text{для}\quad t>0. \quad (42)$$

В самом деле, так как тождественно

$$\int_{\Phi} \rho_t \, dq \, dp = 1,$$

то

$$\int_{\Phi} \frac{\partial \rho_t}{\partial t} \, dq \, dp = 0,$$

и потому

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = -\int_{\Phi} \frac{\partial \rho_t}{\partial t} \ln \rho_t \, dq \, dp = \int_{\Phi} [\rho_t, H] \ln \rho_t \, dq \, dp - \frac{I\pi}{4} \int_{\Phi} [P, [P, \rho_t]] \ln \rho_t \, dq \, dp. \tag{43}$$

Но, интегрируя по частям, получаем тождество

$$\int_{\Phi} [A, B] C \, dq \, dp = \sum \int_{\Phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} A \frac{\partial B}{\partial p} \right\} C \, dq \, dp - \sum \int_{\Phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} B \frac{\partial B}{\partial q} \right\} C \, dq \, dp =$$

$$= \sum \int_{\Phi} \left\{ \frac{\partial B}{\partial q} \frac{\partial C}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial p} \frac{\partial C}{\partial q} \right\} dq \, dp = \int_{\Phi} A [B, C] \, dq \, dp,$$

из которого, в частности, находим

$$\int_{\Phi} [H, \rho_t] \ln \rho_t \, dq \, dp = \int_{\Phi} H [\rho_t, \ln \rho_t] \, dq \, dp = \int_{\Phi} H \frac{1}{\rho_t} [\rho_t, \rho_t] \, dq \, dp = 0,$$

$$\int_{\Phi} [\rho [p, \rho_t]] \ln \rho_t \, dq \, dp = -\int_{\Phi} [[p, \rho_t], P] \ln \rho_t \, dq \, dp =$$

$$= -\int_{\Phi} [p, \rho_t] [p, \ln \rho_t] \, dq \, dp = -\int_{\Phi} \frac{1}{\rho_t} [p, \rho_t]^2 \, dq \, dp$$

и, подставляя в (43), имеем

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \frac{I\pi}{4} \int_{\Phi} \frac{1}{\rho_t} \{[p, \rho_t]\}^2 \, dq \, dp \ln \rho_t \, dq \, dp.$$

откуда и вытекает справедливость неравенства (42).

Интересно отметить, что уравнение (40) имеет место только для $t > 0$. В самом деле, взяв $t < -\Delta t$, вместо (39) получим

$$\int_0^t \Delta(t-\tau) [p, T_{\tau - t} [p, \rho_\tau]] \, d\tau = \int_{t+\Delta t}^t \Delta(t-\tau) [p, T_{\tau-t} [p, \rho_\tau]] \, d\tau =$$

$$= \int_{t+\Delta\tau}^0 \Delta(t-\tau) \, d\tau [p, [p, \rho_t]] = -\int_{-\Delta\tau}^t \Delta(z) \, dz [p, [p, \rho_t]] = \int_{-\infty}^0 \Delta(z) \, dz [p, [p, \rho_t]].$$

Но вследствие симметрии функции по отношению к замене z на $-z$

$$\int_{-\infty}^{0} \Delta(z)\,dz = \int_{0}^{\infty} \Delta(z)\,dz = \frac{I\pi}{4}.$$

Таким образом, для отрицательных t вместо (40) приходим к уравнению вида

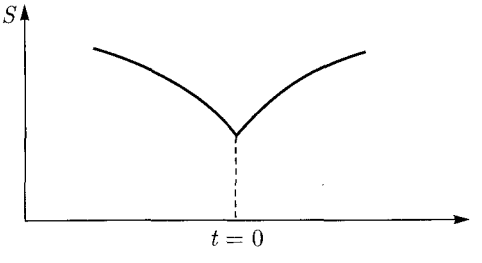
$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = [H, \rho_t] - \frac{I\pi}{4}[p, [p, \rho_t]], \quad t < 0,$$

из которого вытекает, что

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} < 0, \quad t < 0,$$

т. е. что «энтропия» S_t убывает, когда t уменьшается от 0 до $-\infty$.

Следовательно, с точки зрения введенной нами «энтропии» S_t процесс является обратимым по отношению к начальному моменту $t = 0$, в который величина S_t имеет минимальное значение.



Процесс, однако, не является обратимым по отношению к любому другому моменту времени $t \neq 0$ (рисунок). Этот «привилегированный» характер момента $t = 0$ — момента измерения начального состояния системы — математически соответствует тому факту, что только при $t = 0$ функция $D_t = \rho_0$ не зависит от фазовых углов возмущения, тогда как в любой другой момент времени $t \neq 0$ функция D_t, определяемая уравнением (6), должна зависеть от φ_ν.

Возьмем частный случай, когда (при $m = 1$) гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\{p^2 + \omega^2 q^2\}, \quad p = q',$$

приводит к уравнениям движения вида

$$q'' + \omega^2 q = f(t), \quad q' = p. \tag{44}$$

Для него из (40) имеем хорошо известное фоккер-планковское уравнение для незатухающего гармонического вибратора, возмущаемого случайными силами:

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = -p\frac{\partial \rho_t}{\partial q} + \omega^2 q\frac{\partial \rho_t}{\partial p} + \frac{I\pi}{4}\frac{\partial^2 \rho_t}{\partial p^2}. \tag{45}$$

В нашей статье «О влиянии случайной силы на гармонический вибратор»[1] уравнение (44) было рассмотрено при тех же допущениях относительно возмущающей случайной силы, что и в настоящей работе, но с помощью математически строгого метода. Оказалось, что в случае, который мы сейчас изучаем, когда интенсивность $I(0)$ аппроксимируется постоянной I, стохастический процесс, возбуждаемый в системе действием возмущения, действи-

[1] Уч. зап. МГУ. Вып. 77. Физика. 1945. Кн. 3. С. 51; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. IV, 2006, с. 97.

тельно может быть аппроксимирован марковским процессом с уравнением Фоккера–Планка (45).

Таким образом, в указанном примере математически нестрогая теория возмущений приводит к вполне корректному результату.

В связи с этим нам представляется целесообразным поставить общую проблему обоснования статистической теории возмущений, тем более что она не только может представить чисто математический интерес, но и иметь прикладное значение для физики, в частности для квантовой механики. Дело в том, что многие основные результаты квантовой механики получаются лишь в схемах теории возмущений (статистический характер которых определяется неизбежным переходом к непрерывному спектру и усреднением по различного рода фазовым углам), причем в ряде интересных случаев приходят к расходящимся выражениям. Расходимости обычно объясняют как следствие физической некорректности теории, например неучетом конечности радиуса электрона, релятивизма и т. п. Но вполне возможно, что эти расходимости иногда обусловливаются некорректным применением самой теории возмущений. Поэтому нам и кажется вполне своевременным выдвинуть проблему обоснования, или, лучше сказать, проблему установления пределов применимости этой теории.

Мы рассматривали сейчас уравнение (40) для классических систем. Скажем теперь несколько слов о его квантово-механическом смысле. Раскрывая скобки Пуассона как квантовые, найдем уравнение

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \frac{H\rho_t - \rho_t H}{i\hbar} - \frac{I\pi}{4\hbar^2}\{p^2\rho_t - 2p\rho_t p + \rho_t p^2\}, \quad t > 0, \tag{46}$$

являющееся квантовым аналогом фоккер-планковского уравнения (40).

Процесс, описываемый этим уравнением, — «квантовый марковский стохастический процесс» — не может рассматриваться с помощью представления о ψ-функции, закономерно изменяющейся со временем согласно уравнению Шредингера.

В самом деле, если при $t = 0$ система находится в определенном «чистом» ψ-состоянии, то для $t > 0$ мы уже не получим одной определенной ψ-функции и квантовая плотность ρ_t будет соответствовать «смеси».

Чтобы в этом убедиться, введем выражение «энтропии»

$$S_t = -\operatorname{Sp}(\rho_t \ln \rho_t).$$

Пусть $\{\psi_n\}$ являются собственными функциями оператора ρ, а $\{w_n\}$ — соответствующими собственными значениями. Как известно, эти ψ_n могут быть интерпретированы как возможные состояния экземпляров ансамбля Гиббса, w_n — как соответствующие вероятности. В силу свойств квантовой плотности

$$w_n \geqslant 0, \quad \sum_n w_n = 1, \quad -\operatorname{Sp}(\rho \ln \rho) = -\sum_n w_n \ln w_n.$$

Отсюда следует, что $-\operatorname{Sp}(\rho \ln \rho)$ всегда положителен и может быть равен нулю, лишь если все w_n, кроме одного, равны нулю, а один из w_n, например w_{n_ν}, равен единице. Но этот последний случай соответствует чистому состоянию, когда все экземпляры ансамбля находятся в одном определенном квантовом состоянии ψ_{n_0}. Итак, наша «энтропия» может быть равна нулю

лишь для чистого состояния. Но, рассуждая, как ранее было показано для классической схемы, нетрудно убедиться, что эта энтропия будет возрастать при увеличении t от 0 до ∞ и, следовательно, начальное «чистое» состояние может перейти в «смесь».

Заметим в заключение, что в своем известном трактате[1] И. фон Нейман указал на один важный процесс, приводящий к увеличению энтропии

$$-\operatorname{Sp}(\rho \ln \rho),$$

именно на процесс наблюдения состояния системы. Поэтому тот факт, что в рассматриваемой системе происходит систематическое увеличение энтропии, можно было бы поставить в соответствие с тем, что эта система находится в поле излучения и тем самым как бы перманентно «наблюдается».

§ 4. Пусть теперь спектральная интенсивность возмущения $I(\nu)$ произвольна, лишь бы она достаточно быстро аннулировалась на бесконечности, но зато пусть возмущение можно рассматривать как малое и положить

$$p = \varepsilon Q,$$

где ε — малый параметр. Тогда уравнение (37) перепишем в виде

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = [H, \rho_t] + \varepsilon^2 \int_0^t \Delta(t-\tau)[Q, T_{\tau-t}[Q, \rho_\tau]]\, d\tau. \tag{47}$$

Заметим теперь, что и в квантовой и в классической механике имеет место тождество

$$T_z[A, B] = [T_z A, T_z B]. \tag{48}$$

В самом деле, для квантовой механики

$$T_z[A, B] = U_z^{-1}\left(\frac{AB - BA}{ih}\right) U_z = \\ = \frac{U_z^{-1} A U_z U_z^{-1} B U_z - U_z^{-1} B U_z U_z^{-1} A U_z}{ih} = [T_z A, T_z B].$$

В классическом же случае справедливость (48) следует из инвариантности скобок Пуассона по отношению к каноническим преобразованиям, если принять во внимание каноничность преобразования $(q, p) \to (q_z, p_z)$, осуществляемого оператором T_z.

В силу (48) уравнение (47) дает

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = [H, \rho_t] + \varepsilon^2 \int_0^t \Delta(t-\tau)[Q, [T_{\tau-t} Q, T_{\tau-t}\rho_\tau]]\, d\tau. \tag{49}$$

Но ввиду малости возмущения можно пренебречь его влиянием на движение системы в течение весьма длительного промежутка времени Δt, причем при

[1] *Neumann J. von.* Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Springer, 1932; Пер. на рус. яз.: *Нейман И. фон.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.

достаточно малом ε величину Δt можно взять сколь угодно большой. Имеем поэтому приближенно, не учитывая влияния возмущения на интервале времени $(\tau, \tau+\Delta t)$,

$$\rho_{\tau+z} = T_{-z}\rho_\tau \quad \text{для } 0 < z < \Delta t,$$

т. е.

$$\rho_t = T_{\tau-t}\rho_\tau \quad \text{для } t-\Delta t < \tau < t.$$

С другой стороны, если спектральная интенсивность удовлетворяет физически единственному условию конечности интеграла $\int_0^\infty I(\nu)\,d\nu$, то функция $\Delta(z)$ будет стремиться к нулю при $z\to\infty$, и притом так, что интеграл $\int_0^\infty \Delta(z)\,dz$ также оказывается сходящимся. Поэтому, взяв достаточно большое Δt, можем написать следующие приближенные соотношения для $t > \Delta t$:

$$\int_0^t \Delta(t-\tau)[Q,[T_{\tau-t}Q, T_{\tau-t}\rho_\tau]]\,d\tau = \int_{t-\Delta t}^t \Delta(t-\tau)[Q,[T_{\tau-t}Q, T_{\tau-t}\rho_\tau]]\,d\tau =$$

$$= \int_{t-\Delta t}^t \Delta(t-\tau)[Q,[T_{\tau-t}Q,\rho_t]]\,d\tau = \left[Q,\left[\int_{t-\Delta t}^t \Delta(t-\tau)T_{\tau-t}Q\,d\tau, \rho_t\right]\right] =$$

$$= \left[Q,\left[\int_{-\infty}^t \Delta(t_2-\tau)T_{\tau-t}Q\,d\tau, \rho_t\right]\right] = \left[Q,\left[\int_0^\infty \Delta(z)T_{-z}Q\,dz, \rho_t\right]\right],$$

ввиду которых приближенное уравнение (49) можем заменить новым приближенным уравнением

$$\frac{\partial\rho_t}{\partial t} = [H,\rho_t] + \varepsilon^2\left[Q,\left[\int_0^\infty \Delta(z)T_{-z}Q\,dz, \rho_t\right]\right].$$

Откуда, принимая во внимание начальное условие, имеем

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t [H,\rho_t]\,dt + \varepsilon^2\int_0^t [Q,[\Omega,\rho_t]]\,dt$$

или

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t [H,\rho_t]\,dt + \varepsilon^2\int_0^t \left[Q,\left[\Omega,\int_0^t \rho_t\,dt\right]\right], \tag{50}$$

где для сокращения обозначено

$$\Omega = \int_0^\infty \Delta(z)T_{-z}Q\,dz. \tag{51}$$

Заметив это и предположив, что движение в невозмущенной системе является почти периодическим, возьмем некоторую динамическую переменную A, составим предел

$$\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} T_{-z}A\,dz,$$

который можно рассматривать как результат выполнения над A операции временно́го усреднения, и условимся обозначать его через $M\{A\}$. Рассмотрим выражение

$$M\{[H,A]\}=\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} T_{-z}[H,A]\,dz=\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}[T_{-z}H,T_{-z}A]\,dz.$$

Но так как при невозмущенном движении энергия H остается постоянной, то имеем тождественно $T_{-z}H=H$. С другой стороны, по самому определению оператора T_{-z}

$$[H,T_{-z}A]=\frac{\partial T_{-z}A}{\partial z}.$$

Поэтому получим

$$M\{[H,A]\}=\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\frac{\partial T_{-z}A}{\partial z}\,dz=\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{T_{-\Delta t}A-A}{\Delta t}.$$

Ввиду допущения о почти периодическом характере невозмущенного движения оператор A остается ограниченным при $\Delta t\to\infty$, и мы убеждаемся в справедливости тождества

$$M\{[H,A]\}=0, \tag{52}$$

которым далее воспользуемся.

Рассмотрим теперь «сглаженную» плотность

$$\tilde{\rho}_t=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\rho_t\,\Delta t, \tag{53}$$

усредненную по промежутку времени, в течение которого можно пренебречь действием возмущения. Но тогда приближенно

$$\tilde{\rho}_t=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\rho_{t+z}\,dz=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}T_{-z}\rho_t\,dz.$$

Так как далее величина Δt может быть взята сколь угодно большой, то для случая слабого возмущения можно приближенно положить

$$\tilde{\rho}_t=M\{\rho_t\}. \tag{54}$$

Чтобы получить уравнение для введенной «сглаженной» плотности, применим к обеим частям уравнения (50) операцию $M\{\ldots\}$. Тогда получим

$$\widetilde{\rho}_t = M(\rho_0) + M\left\{\int_0^t [H, \rho_t]\,dt\right\} + \varepsilon^2 M\left\{\int_0^t \left[Q, \left[\Omega, \int_0^t \rho_t\,dt\right]\right]\right\}.$$

Но ввиду тождества (52)

$$M\left\{\int_0^t [H, \rho_t]\,dt\right\} = \int_0^t M\{[H, \rho_t]\}\,dt = 0$$

и потому

$$\widetilde{\rho}_t = M(\rho_0) + \varepsilon^2 M\left\{\int_0^t \left[Q, \left[\Omega, \int_0^t \rho_t\,dt\right]\right]\right\}.$$

Заменяя здесь приближенно для $t > \Delta t$ в соответствии с определением (53) интеграл плотности $\int_0^t \rho_t\,dt$ интегралом от сглаженной плотности $\int_0^t \widetilde{\rho}_t\,dt$, имеем окончательно следующее приближенное уравнение:

$$\widetilde{\rho}_t = M(\rho_0) + \varepsilon^2 M\left\{\int_0^t \left[Q, \left[\Omega, \int_0^t \widetilde{\rho}_t\,dt\right]\right]\right\}, \tag{55}$$

или

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}_t}{\partial t} = \varepsilon^2 M\{[Q, [\Omega, \widetilde{\rho}_t]]\}, \tag{55'}$$

которое мы будем сейчас раскрывать для квантовой и классической схем.

Рассмотрим сначала квантовый случай и выберем такое матричное представление динамических переменных, основанное на ортонормированной системе $\{\psi_n\}$ собственных функций оператора H, в котором H представляется диагональной матрицей. Пусть A есть некоторая динамическая переменная. Тогда, как известно,

$$(T_{-z}A)_{n,m} = \mathrm{e}^{-i\nu_{n,m}z} A_{n,m}, \quad \nu_{n,m} = \frac{H_n - H_m}{h}.$$

Предположим, что уровни $\{H_n\}$ невозмущенной энергии не вырождены. В этом случае $\nu_{n,m} \neq 0$ при $n \neq m$, и потому

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (T_{-z}A)_{n,m}\,dz = \frac{1 - \mathrm{e}^{-i\nu_{n,m}\Delta t}}{\nu_{n,m}\Delta t} A_{n,m} = 0, \quad n \neq m.$$

Таким образом, операция временно́го усреднения M переводит произвольную матрицу $A = \|A_{n,m}\|$ в диагональную:

$$M(A) = \begin{Vmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{nn} \end{Vmatrix},$$

заменяя нулями все недиагональные $A_{n,m}$ и оставляя неизменными диагональные элементы A_{nn}. Заметив это, обозначим диагональные элементы матрицы плотности ρ_t через $\{w_n(t)\}$. Тогда в силу (54) для матрицы сглаженной плотности найдем

$$\widetilde{\rho}_t = \begin{Vmatrix} w_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n(t) \end{Vmatrix}. \tag{56}$$

Как видно, величины $\{w_n(t)\}$ будут ее собственными значениями, а базисные функции представления $\{\psi_n(t)\}$ — собственными функциями, и, следовательно, матрица плотности (56) соответствует гиббсовскому ансамблю, экземпляры которого находятся в состоянии $\{\psi_n(t)\}$ с относительными числами заполнения $\{w_n\}$. Таким образом, мы приходим к общепринятому в квантовой механике представлению о том, что рассматриваемая динамическая система, возмущаемая полем излучения, находится на одном из квантовых уровней $\{H_n\}$ с некоторой вероятностью $\{w_n(t)\}$.

Перейдем теперь к раскрытию уравнения (55′). Имеем

$$[Q,[\Omega,\rho_t]]_{n,n} = \sum_m \frac{1}{ih}\{Q_{n,m}[\Omega,\rho_t]_{m,n} - Q_{m,n}[\Omega,\rho_t]_{m,n}\}.$$

Но

$$[\Omega,\rho_t]_{n,m} = \frac{w_n - w_m}{i\hbar}\,\Omega_{m,n},$$

и потому

$$[Q,[\Omega,\rho_t]]_{n,n} = \sum_m \frac{w_n - w_m}{\hbar^2}\{Q_{n,m}\Omega_{m,n} + Q_{m,n}\Omega_{n,m}\}.$$

С другой стороны, в силу (51) имеем

$$\Omega_{n,m} = \int_0 \Delta(z)\{T_{-z}Q\}_{n,m}\,dz = \int_0^\infty \Delta(z)\mathrm{e}^{-i\nu_{n,m}z}\,dz Q_{n,m},$$

откуда, если принять во внимание определение (38) функции $\Delta(z)$,

$$Q_{n,m}\Omega_{m,n} + Q_{m,n}\Omega_{n,m} = Q_{n,m}\Omega_{m,n}\int_0^\infty \Delta(z)(\mathrm{e}^{i\nu_{n,m}z} + \mathrm{e}^{i\nu_{n,m}z})\,dz =$$

$$= [Q_{n,m}]^2 \cdot 2\int_0^\infty \Delta(z)\cos(\nu_{n,m}z)\,dz = \frac{\pi}{2}I(\nu_{n,m})[Q_{n,m}]^2,$$

что дает

$$[Q,[\Omega,\rho_t]]_{n,n} = \sum_m \frac{\pi\varepsilon^2}{2h^2}I(\nu_{n,m})[Q_{n,m}]^2\{w_m - w_n\}.$$

Итак, из уравнения (55′) получаем окончательно следующее уравнение:

$$\frac{\partial w_n(t)}{\partial t} = \sum_m \frac{\pi\varepsilon^2}{2h^2}I(\nu_{n,m})[Q_{n,m}]^2\{w_m(t) - w_n(t)\}. \tag{57}$$

В этом уравнении величина $w_n(t)$ представляет вероятность того, что наша система находится в момент времени t на n-м квантовом уровне, поэтому величина

$$\frac{\pi\varepsilon^2}{2h^2} I(\nu_{n,m})[Q_{n,m}]^2 \tag{58}$$

имеет смысл вероятности перехода $n \leftrightarrows m$, отнесенной к единице времени. Таким образом, в принятой аппроксимации мы имеем обычную схему квантовой механики, в которой влияние возмущения учитывается как фактор, вызывающий случайные переходы между стационарными состояниями ψ_n невозмущенной системы, с вероятностями, пропорциональными квадрату модуля соответствующего матричного элемента гамильтониана возмущения.

При этом система как бы «не помнит свою историю» и вероятности переходов $n \to m$ не зависят от предыдущей эволюции состояний.

С математической точки зрения в принятой аппроксимации возбуждающийся в системе стохастический процесс является марковским с дискретным фазовым пространством[1]. Принимая во внимание те приближенные допущения, которые лежат в основе вывода уравнения (55′), а следовательно и уравнения (57), мы не видим *á priori* оснований для того, чтобы и в более высоком приближении реальный процесс все же мог бы аппроксимироваться марковским процессом того же типа, только с уточненными значениями вероятностей перехода.

Обычно в квантовой механике без детального анализа смысла самого понятия «вероятности перехода» вычисляют эту величину во «втором», в «третьем» и т. п. приближениях, причем в ряде важных случаев получают расходящийся результат. Очень возможно, что здесь расходимость вызывается не только физической некорректностью исходной динамической модели, но и невозможностью в более высоком приближении аппроксимировать реальный процесс марковским и необходимостью использовать более подходящую стохастическую схему.

Во всяком случае, нам кажется вполне своевременным поставить проблему исследования различных классов стохастических процессов, которые могут быть использованы для аппроксимирования реальных процессов, возбуждающихся в квантовых системах под влиянием возмущения.

Заметим в заключение, что иногда высказывается утверждение о том, что приведенная выше схема учета влияния возмущения с помощью представления о случайных переходах между стационарными состояниями является специфически квантовой и не имеет классического аналога.

Однако нетрудно убедиться, что, раскрывая то же уравнение (55′) с точки зрения классической механики, мы получим уравнение, являющееся классическим аналогом квантового уравнения (57).

Пусть, в самом деле, наша система подчиняется законам классической механики.

Предположим для простоты, что уравнения невозмущенного движения могут быть проинтегрированы с помощью введения переменных действия I и угловых переменных w. Иначе говоря, мы предполагаем, что посредством ка-

[1] Фазовым пространством является здесь множество квантовых уровней стационарных состояний.

нонического преобразования $(p, q) \to (I, w)$ невозмущенный гамильтониан H оказывается функцией только от I:

$$H = H(I_1, \ldots, I_\nu).$$

Тогда уравнения невозмущенного движения могут быть представлены в форме

$$\frac{dI_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial w_k} = 0, \quad \frac{\partial w_k}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial I_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \nu,$$

и потому оператор T_t оставляет переменные $I_1, \ldots, I_\nu$ неизменными, а угловые переменные $w_1, \ldots, w_\nu$ сдвигает соответственно на

$$w_k(I)t, \quad k = 1, 2, \ldots, \nu,$$

где

$$w_k = H'_{I_k}(I_1, \ldots, I_\nu).$$

Возьмем теперь некоторую динамическую переменную A, относящуюся к рассматриваемой системе, и представим ее в виде

$$A = A(I, w),$$

в котором $A(I, w)$ есть периодическая функция переменных $w_1, \ldots, w_\nu$ с периодом 2π. Разлагая ее в кратный ряд Фурье, получим

$$A(I, w) = A_0(I) + \sum_n A_n(I) e^{i(nw)}, \quad (nw) = n_1 w_1 + \ldots + n_\nu w_\nu. \tag{59}$$

Здесь $A_0(I)$ — постоянный (по отношению к w) член, и в сумме $\sum_n$ суммирование распространено по тем значениям $n(n_1, \ldots, n_\nu)$, для которых $n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_\nu^2 \neq 0$.

Имеем, следовательно,

$$T_{-z}A = A_0(I) + \sum_n A_n(I) e^{i(nw)} e^{-i(nw)z}, \quad (nw) = n_1 w_1 + \ldots + n_\nu w_\nu,$$

и потому

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} T_{-z}A \, dz = A_0(I) + \sum_n A_n(I) e^{i(nw)} \frac{1 - e^{-i(nw)\Delta t}}{(nw)\Delta t}.$$

Допустим, что в системе нет вырождения (внутреннего резонанса), так что все комбинационные частоты (nw) отличны от нуля.

Тогда, очевидно,

$$\lim_{\Delta \to \infty} \frac{1 - e^{-i(nw)\Delta t}}{i(nw)\Delta t} = 0,$$

и потому

$$M(A) = A_0(I). \tag{60}$$

Но, как это следует из (59), $A_0(I)$ получается из $A(I, w)$ усреднением по всем угловым переменным $w_1, \ldots, w_\nu$. Мы видим, следовательно, что операция временного усреднения в рассматриваемом случае эквивалентна операции

усреднения по угловым переменным. Условившись обозначать эту последнюю операцию чертой сверху, можем записать (60) в следующей форме:

$$M(A) = \overline{A}.$$

Заметим теперь, что в соответствии с (54) имеем

$$\widetilde{\rho}_t = \overline{\rho}_t,$$

и, следовательно, сглаженная плотность является функцией, не зависящей от угловых переменных:

$$\widetilde{\rho}_t = \widetilde{\rho}_t(t, I_1, \ldots, I_\nu).$$

Поэтому

$$[\Omega, \widetilde{\rho}_t] = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial w_k} \frac{\partial \widetilde{\rho}_t}{\partial I_k}.$$

Но вообще

$$[A, B] = \sum_{s=1}^{\nu} \left\{ \frac{\partial A}{\partial w_s} \frac{\partial B}{\partial I_s} - \frac{\partial A}{\partial I_s} \frac{\partial B}{\partial w_s} \right\} = \sum_{s=1}^{\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial I_s} \left(B \frac{\partial A}{\partial w_s} \right) - \frac{\partial}{\partial w_s} \left(B \frac{\partial A}{\partial I_s} \right) \right\},$$

так что

$$M\{[A, B]\} = \overline{[A, B]} = \sum_{s=1}^{\nu} \left(\frac{\partial A}{\partial w_s} B \right).$$

Отсюда получаем

$$M\{[Q, [\Omega, \widetilde{\rho}_t]]\} = \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial I_s} \left(\overline{\frac{\partial Q}{\partial w_s} \frac{\partial \Omega}{\partial w_k}} \frac{\partial \widetilde{\rho}_t}{\partial I_k} \right),$$

и, таким образом, наше уравнение (55′) дает

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}_t}{\partial t} = \varepsilon^2 \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial I_s} \left(\overline{\frac{\partial Q}{\partial w_s} \frac{\partial \Omega}{\partial w_k}} \frac{\partial \widetilde{\rho}_t}{\partial I_k} \right).$$

Представим теперь переменную Q в виде

$$Q = Q(I, w) = \sum_n Q_n(I) \mathrm{e}^{i(nw)}, \tag{61}$$

где суммирование распространено по всем значениям сложного индекса $n(n_1, \ldots, n_\nu)$. Так как Q вещественно, то мы можем заменить здесь i на $-i$, не меняя результата. Поэтому имеем также

$$Q = Q(I, w) = \sum_n Q_n^*(I) \mathrm{e}^{-i(nw)}, \tag{62}$$

где * обозначает переход к комплексно-сопряженным величинам.

С другой стороны, в силу (51)

$$\Omega = \int_0^\infty \Delta(z) T_{-z} Q \, dz = \int_0^\infty \Delta(z) Q(I, w - w(I)z) \, dz,$$

откуда ввиду (62)

$$\Omega = \sum_n Q_n^*(I) e^{-i(nw)} \int_0^\infty \Delta(z) e^{i(nw)z}\, dz. \tag{63}$$

Дифференцируя, из (61) и (63) получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial w_s} = i \sum_n Q_n(I) n_s e^{i(nw)},$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial w_s} = -i \sum_n Q_n^*(I) n_k e^{-i(nw)} \int_0^\infty \Delta(z) e^{i(nw)z}\, dz,$$

что дает

$$\overline{\frac{\partial Q}{\partial w_s}\frac{\partial \Omega}{\partial w_k}} = \sum_n Q_n(I) Q_n^*(I) n_s n_k \int_0^\infty \Delta(z) e^{i(nw)z}\, dz =$$

$$= \sum_n |Q_n(I)|^2 n_s n_k \int_0^\infty \Delta(z) e^{i(nw)z}\, dz. \tag{64}$$

Но так как эта величина вещественная, то мы можем здесь, не изменяя ее, заменить i на $-i$. Получим

$$\overline{\frac{\partial Q}{\partial w_s}\frac{\partial \Omega}{\partial w_k}} = \sum_n |Q_n(I)|^2 n_s n_k \int_0^\infty \Delta(z) e^{-i(nw)z}\, dz. \tag{65}$$

Складывая (64), (65) и деля пополам, видим, что

$$\overline{\frac{\partial Q}{\partial w_s}\frac{\partial \Omega}{\partial w_k}} = \sum_n n_s n_k \int_0^\infty \Delta(z) \cos(nw) z\, dz |Q_n(I)|^2.$$

С другой стороны, на основании (38)

$$\int_0^\infty \Delta(z) \cos(nw) z\, dz = \frac{\pi}{4} I\{(nw)\}.$$

Итак, уравнение (55′) приводит в рассматриваемом случае к уравнению Фоккера–Планка вида

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}_t}{\partial t} = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial I_s} A_{ks}(I) \frac{\partial \widetilde{\rho}_t}{\partial I_k}, \tag{66}$$

в котором

$$A_{ks}(I) = \overline{\frac{\partial Q}{\partial w_s}\frac{\partial \Omega}{\partial w_k}} = \frac{\pi}{4} \sum_n n_k n_s I\{(nw)\} |Q_n(I)|^2. \tag{67}$$

Это уравнение и является классическим аналогом квантового уравнения (57). Нетрудно убедиться, что, переходя в уравнении (57) к пределу при $\hbar \to 0$,

с помощью принципа соответствия мы опять придем к уравнению Фоккера–Планка (66). Рассмотрим частный случай, когда

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \quad Q = q$$

и когда, следовательно, уравнение возмущенного движения будет иметь вид

$$q'' + \omega^2 q = \varepsilon f(t). \tag{68}$$

Переменные I, w вводятся здесь с помощью хорошо известных формул

$$q = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}, \quad p = q' = \sqrt{2I\omega}\cos w.$$

Поэтому

$$Q = \sqrt{\frac{I}{2\omega}}\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i}\right),$$

откуда, согласно (67),

$$A(I) = \frac{\pi}{4\omega} I(w).$$

Таким образом, уравнение (66) дает

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_t}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\pi}{4\omega} I(w) \frac{\partial}{\partial I}\left(I \frac{\partial \tilde{\rho}_t}{\partial I}\right)$$

или при замене переменной действия на переменную энергии

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_t}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\pi}{4\omega} I(w) \frac{\partial}{\partial I}\left(E \frac{\partial \tilde{\rho}_t}{\partial I}\right).$$

В заключение заметим, что частный случай системы, описываемой уравнением (68), был рассмотрен в нашей статье, указанной выше. Причем вполне строгим методом было доказано, что при сделанных допущениях возбуждающийся в этой системе стохастический процесс действительно может быть аппроксимирован для достаточно малого E марковским процессом с фоккер-планковским уравнением (69).

Нам представляется поэтому желательным углубить изложенные здесь рассуждения, чтобы ими можно было воспользоваться для целей математического обоснования статистической теории возмущений в более общих случаях.

4.

ЛЮДВИГ БОЛЬЦМАН*

50 лет отделяют нас от дня трагической гибели одного из величайших физиков XIX в., автора фундаментальных исследований по кинетической теории газов, термодинамике и теории излучения, убежденного и страстного борца за атомистические взгляды в науке — Людвига Больцмана.

Имя Больцмана неразрывно связано с обоснованием и развитием статистической физики: он открыл фундаментальный закон стационарного «больцмановского распределения», который красной нитью проходит через все отделы статистической физики; ему принадлежат статистическая интерпретация второго начала термодинамики и знаменитая H-теорема, которые легли в основу теории необратимых процессов; он является автором кинетического уравнения, на базе которого выросла современная физическая кинетика. Он автор одного из законов излучения абсолютно черного тела, приведших к «ультрафиолетовой катастрофе» классической физики, устранение которой привело в свою очередь к теории квантов.

Судьбу Людвига Больцмана как одного из основоположников современной физики можно сравнить только с судьбой великого творца теории множеств Георга Кантора. Идеи их обоих не были поняты и оценены надлежащим образом при жизни авторов, что трагически сказалось на судьбах этих гениальных людей. Но творения их поняты и оценены последующими поколениями, взошли бурным урожаем на научной ниве физики и математики, и как нельзя себе мыслить сегодня современной математики без методов теории множеств, без методов трансфинитного, создателем которых является Георг Кантор, так и нельзя мыслить себе современную физику без статистических методов, основоположником и ревностным пропагандистом которых являлся Людвиг Больцман.

Родился Больцман 20 февраля 1844 г. в Вене. Его отец, финансовый комиссар, рано умер. Брат Альберт, бывший, по свидетельству современников, также высокоодаренным юношей, умер, будучи еще учеником гимназии, от туберкулеза легких. У Больцмана была еще сестра Хедвиг, жизнь которой также оборвалась рано и трагически — помрачением разума. Курс гимназии Больцман окончил в Линце и в 1863 г. поступил в Венский университет. Здесь в знаменитом университете Больцман слушал Стефана.

Уже в то время у Больцмана сложились тесные и дружественные отношения с Лошмидтом, оказавшим большое влияние на формирование научных интересов Больцмана. В студенческие годы появляется его первая работа «О движении электричества на изогнутых поверхностях» (1865) и год спустя

---

* Вестник АН СССР. 1956. N 12. С. 112–113; УФН. 1957. Т. 61, вып. 1. С. 7–15; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 709.

вторая — «О механическом значении 2-го закона теории тепла». Из названий этих двух первых работ видны две области физики, на которые Больцман благодаря влиянию учителей и друзей Стефана и Лошмидта направил свое внимание: кинетическая теория газов и максвелловская теория электромагнитного поля.

Сам Больцман рассказывал, что на его вопрос о том, что он должен изучать, чтобы «войти» в учение об электричестве, Стефан дал ему английскую грамматику, которая должна была открыть Больцману доступ к работам Максвелла. Теория Максвелла произвела на Больцмана огромное впечатление.

Больцман интересовался искусством. Многие его работы снабжены поэтическими эпиграфами. Особенно отмечал Больцман влияние на него Шиллера: «Без Шиллера мог, конечно, быть человек с моим носом и бородой, но это не был бы я».

Получив в 1866 г. в возрасте 22 лет докторскую степень, Больцман занимает год спустя должность приват-доцента физики в Венском университете; до этого он был ассистентом Стефана.

В 1869 г. он переехал в Грац на должность профессора теоретической физики. Это время было периодом расцвета его научной деятельности, когда он выполнил наиболее фундаментальные свои исследования.

В Граце Больцман оставался до 1873 г., причем в 1871–1872 гг. бывал по одному семестру в отпуске, который проводил в Гейдельберге и Берлине. Во время этих поездок он сблизился с математиком Кенигсбергом, физиками Кирхгофом и Гельмгольцем, химиком Бунзеном и познакомился с Софьей Ковалевской. К этому времени Больцман был уже автором ряда крупных работ, и имя его стало приобретать известность. В 1873 г. к Больцману перешла кафедра его учителя математики Мота в Венском университете, однако в 1876 г. он снова возвращается в Грац профессором экспериментальной физики. К этому времени он был уже автором знаменитой H-теоремы и основного газокинетического уравнения. В том же году Больцман женился на Генриэтте фон Айгентлер, после чего прожил безвыездно в Граце целых 14 лет. Единственным заметным событием за это время было его приглашение по совету Кирхгофа в Берлинский университет, которое он отклонил.

В 1890 г. Больцман оставляет Грац и переезжает в Мюнхен, где занимает кафедру теоретической физики до 1894 г. В этом году умирает Стефан, и Больцман наследует кафедру своего учителя в Венском университете.

В 1900 г. он переезжает в Лейпциг, где занимает кафедру теоретической физики, однако через 2 года снова возвращается в Вену. Последние годы его жизни прошли в Вене, где он читал лекции по физике и натуральной философии.

5 сентября 1906 г. трагическая смерть оборвала его жизнь.

Научное наследие Людвига Больцмана чрезвычайно богато. Его оригинальные произведения изданы в трех томах (1909). Кроме того, он оставил ряд курсов, из которых наиболее фундаментальным является курс «Лекции по теории газов». В этих лекциях систематически изложены его фундаментальные результаты по кинетической теории материи и статистической физике. Среди его курсов следует также отметить «Лекции по максвелловской теории электричества и света», прочитанные в Мюнхене и изданные в 1891–1893 гг.,

в которых он активно популяризировал новое еще тогда учение Фарадея и Максвелла об электричестве и магнетизме. Ему принадлежат также лекции «Принципы механики», отличающиеся глубиной подхода, и (совместно с его учеником Наблом) статья «Кинетическая теория материи» в «Энциклопедии математических наук».

Методологические взгляды Больцмана нашли свое выражение в его многочисленных публичных лекциях и выступлениях.

Только теперь, спустя полвека, мы в состоянии оценить значение его вклада в науку, ибо достижения ученого оцениваются не только его фактическими результатами, но и результатами последователей, работавших и развивавших его идеи. Чем выше и шире здание, выросшее на фундаментальных идеях ученого, тем ценнее его вклад.

В своих теоретических работах Больцман был прежде всего страстным и убежденным сторонником молекулярной теории. Представление о том, что макроскопические материальные тела не являются непрерывной средой и состоят из громадного числа мельчайших частиц, восходит, как хорошо известно, еще к Демокриту. Но только в XIX в. это представление привело к созданию законченной физической теории — кинетической теории материи и статистической физики. Именно Больцману и принадлежат фундаментальные идеи, завершающие эту линию развития.

Первоначально основной идеей кинетической теории материи было молекулярно-кинетическое толкование первого начала термодинамики — закона сохранения энергии. Затем, во второй половине XIX в., в 1859 г., Максвелл открывает равновесное распределение газовых молекул. Больцман в 1868–1875 гг. обобщает результаты Максвелла на газы, находящиеся во внешнем силовом поле. Таким образом, он приходит к формуле «равновесного больцмановского распределения», ставшей впоследствии основой всей классической статистической физики.

Чтобы понять ту трудную обстановку, в которой приходилось творить великому физику, ту напряженную идейную борьбу, которую он вел, необходимо учесть положение, создавшееся в физике в конце прошлого столетия.

Расцвет его научного творчества приходится на период господства сторонников теории «чистого описания». Классическая физика, развивая идеи Ньютона и Декарта, стремилась быть продолжением механики и все явления пыталась сводить к механическому движению. Например, всеобщий закон сохранения и превращения энергии был воспринят и понят большинством физиков чисто механически, как следствие известной теоремы механики, если принять, что тепловые и другие явления имеют механическую природу. Иначе обстояло дело со 2-м началом термодинамики, констатировавшим необратимость всех реальных процессов. 2-е начало формулировалось как обобщение опыта, причем его физический смысл оставался невыясненным, так же как и пределы применимости. Как вывод, основанный на прямолинейном применении 2-го начала ко всей Вселенной, получался закон рассеяния энергии и как его следствие — «тепловая смерть» Вселенной. Это последнее обстоятельство и породило затруднения классической механистической физики. Если бы все физические явления можно было свести к механическим, то остался бы совершенно необъяснимым закон рассеяния энергии. Отсюда и

получило начало столь нашумевшее противопоставление «энергетического» (вообще феноменологического) и механического мировоззрений.

Энергетисты (вообще сторонники «чистого описания») утверждали, что задачей науки и теории должно быть по возможности простое описание явлений. Теория должна быть математическим выражением отношений, данных непосредственно в опыте. При этом теория должна отказаться от гипотез, модельных представлений, от попыток объяснения явлений, сведения их к наипростейшим. По самому духу своего построения феноменология приписала 2-му началу универсальность и абсолютную верность. Выдвинутое же Больцманом статистическое толкование 2-го принципа термодинамики открывало широчайшие возможности для слияния термодинамики с атомистикой. Следует напомнить, что атомистическая гипотеза не пользовалась популярностью в научном мире, ибо в те времена прямых экспериментальных доказательств в пользу атомистики еще не было, и Больцману приходилось всю свою жизнь защищать атомистику от бесчисленных нападок. «Я являюсь последним, который думает отрицать возможность построения иной, нежели атомистической картины природы», — с горечью пишет он в своих «Принципах механики». Один из глашатаев феноменологии, Оствальд, только в 1908 г., спустя два года после смерти Больцмана, открыто признал существование атомов и молекул под влиянием прямых экспериментов.

Остановимся несколько подробнее на методологических воззрениях Больцмана.

Своеобразие философских и методологических принципов, которые защищал Людвиг Больцман, в значительной мере определило необычную судьбу его творчества. Он был членом главных академий Старого и Нового Света. Ряд университетов избрал его почетным доктором. Однако в конце жизни взгляды его были объявлены антинаучными, а сам он — ученым «старой школы». Чтобы иметь представление о создавшейся ситуации, достаточно привести высказывание одного немецкого журнала (1898) по поводу выхода в свет ныне классической книги Больцмана «Лекции по теории газов». Этот журнал писал (цитата приведена в трудах М. Смолуховского, т. III, с. 61): «Кинетическая теория, как известно, так же ошибочна, как и разные механические теории гравитации, в частности, она ошибочно понимает принцип сохранения энергии: если, однако, кто-либо захочет с ней познакомиться, пусть возьмет в руки книгу Больцмана».

По поводу этого высказывания великий ученик Больцмана польский физик Мариан Смолуховский говорит: «Весьма поучительно следить за изменчивыми судьбами научных теорий. Они более интересны, чем изменчивые судьбы людей, ибо каждая из них включает в себя что-то бессмертное, хотя бы частицу вечной истины».

В речи «О значении теории» Больцман пишет: «Я держусь мнения, что задача теории заключается в конструировании существующего в нас отражения внешнего мира, которое должно служить путеводной звездой во всех наших мыслях и экспериментах. Своеобразие человеческого духа заключается именно в том, что он стремится себе создать такое отражение и все более и более приспособлять его к внешнему миру... В нашем смысле Колумб, Майер и Фарадей — чистейшие теоретики, так как не поиски практической пользы, а отображение природы в их уме служило им руководящей целью.

Выработка и постоянное усовершенствование этого отображения и является задачей теории».

В другой статье находим: «Мы заключаем относительно существования всех вещей только из впечатлений, которые они производят на наши органы чувств».

В статье «Математика об энергетике» Больцман пишет: «Недоверие к выведенным из непосредственных чувственных восприятий представлениям вообще привело к крайности, противоположной прежнему наивному верованию. Говорят — нам даны лишь чувственные восприятия, поэтому нельзя делать ни одного шага дальше». И далее: «Если мы не хотим прийти к выводу, что вообще существуют лишь представления, которые я имею в данный момент, и ничего больше, что опровергается уже пользой знания для практической деятельности, то необходимо признать за нами, при всей осторожности, и способность на основе восприятий делать заключения о том, чего мы не воспринимаем, хотя заключения эти мы и должны постоянно исправлять, ибо они входят в противоречия с новыми восприятиями». Если быть последовательными, то из подобных приведенных здесь рассуждений сторонников Маха и др. вытекает отрицание существования не только всех других существ, кроме собственного Я, но и всех представлений, которые имелись раньше. Так, Больцман опровергает идеалистическую философию махизма, сводя ее к солипсизму. Как ни странно, но в свое время Больцману в связи с его борьбой против абсолютизирования чисто феноменологических теорий пришлось отстаивать пользу и необходимость гипотез для развития науки.

В статье «О статистической механике» Больцман пишет: «Наши теории никоим образом не построены из логически неопровержимых истин; напротив, они состоят из более или менее произвольных картин — так называемых гипотез».

Кирхгоф в труде по механике ставит себе задачей описать явления природы возможно просто и наглядно, отказываясь от какого-либо их объяснения. Его работой началась модная в то время «описательная физика». Ее сторонники возражали против объяснения явлений природы, поскольку мы не в состоянии до конца объяснить их. Наиболее простые закономерности природы не могут быть на данном этапе развития науки объектом объяснения. «Наука о природе только разлагает комплексы на более простые и однородные составные части, сводит более сложные законы к более фундаментальным», — говорит Больцман. На этом процесс объяснения, естественно, должен заканчиваться. Но эта естественная граница объяснения не есть проявление ограниченности нашего интеллекта, так же как не является дефектом нашего зрения то, что мы не можем видеть сквозь непрозрачные предметы. Сам Больцман пишет по этому поводу: «Некоторые проблемы напоминают вопрос, поставленный одному художнику: "Что за картину он спрятал за занавесом?" — "Занавес и есть картина", — ответил художник. Ему было предложено обмануть знатоков своим искусством, для чего он и нарисовал картину, изображающую занавес. Обыкновенно усматривают ограничение нашего интеллекта в том обстоятельстве, что если бы нам удалось открыть самые простые, основные законы, то мы не были бы в состоянии их дальше объяснить, т. е. разложить на более простые. Не стоим ли мы перед вышеупомянутым нарисованным занавесом?»

Больцман был последовательным атомистом и приложил много сил, чтобы отстоять право атомистической теории на существование: «...Все наблюдения единогласно доказывают, что существуют тела таких ничтожных размеров, что, только сцепляясь миллионами, они могут возбуждать наши органы чувств. Мы называем их атомами и молекулами... О структуре атома мы не будем знать ничего до тех пор, пока на основании наблюдений нам не удастся сформулировать какую-нибудь гипотезу... Надежду на успех дает спектральный анализ. Существование атомов и молекул является, конечно, только гипотезой. Может быть, атомистическая гипотеза будет вытеснена какой-либо другой гипотезой. Может быть, но невероятно». Невероятно, по мнению Больцмана, потому, что на основе атомистической гипотезы были сделаны предсказания, которые он ставит в ряд с предсказанием планеты Нептуна Леверье. И далее: «Тесно к атомистике примыкает гипотеза о том, что элементы телесного мира не остаются в покое, образуя материю, но что они находятся в непрерывном движении. И эта гипотеза, которую называют механической теорией тепла, также представляет собою воззрение, твердо опирающееся на факты» («2-й закон механической теории тепла»).

«Не логика, не философия, не метафизика решают в последней инстанции, верно что-либо или ложно, а дело. То, что ведет нас к верному делу, то и истина. Поэтому я считаю завоевания техники не побочными продуктами естественных наук, а логическими доказательствами. Если бы мы не достигли этих практических результатов, мы не знали бы, как рассуждать».

Можно было бы привести еще немало высказываний Больцмана по вопросам методологии физики и даже чисто философским. Больцман часто выступал с популярными лекциями, докладами, которые были изданы отдельной книгой «Popul.are Schriften», причем он не боялся портить отношения, чем завоевал себе славу человека неуживчивого, с беспокойным характером. Этим, по-видимому, объясняются его частые переезды и смена профессур.

Борьба Больцмана против махизма, которую он вел с большой энергией, отмечена у В. И. Ленина. В книге «Материализм и эмпириокритицизм» читаем: «Из немецких физиков систематически боролся против махистского течения умерший в 1906 году Людвиг Больцман. Увлечению новыми гносеологическими догмами он противопоставлял простое и ясное сведение махизма к солипсизму... Больцман, конечно, боится назвать себя материалистом и даже специально оговаривается, что он вовсе не против бытия божия. Но его теория познания, по существу, дела материалистическая и выражает она мнение большинства естествоиспытателей».

Перейдем к характеристике физических воззрений Больцмана, и прежде всего его механицизма. Сам он об этом пишет: «Если вы спросите меня относительно моего убеждения, назовут ли нынешний век железным веком или веком пара и электричества, я отвечу, не задумываясь, что наш век будет называться веком механического миропонимания, веком Дарвина». В этих словах скрыт глубокий смысл: Больцман не только механист в узком смысле слова. На языке естествоиспытателя того времени слово механицизм означало зачастую просто мировоззрение, базирующееся на признании причинности и закономерности в природе.

По Больцману, механика служит фундаментом общего естествознания, ибо наипростейшее явление — это перемена места. «Мы выбираем для объяснения явлений природы совокупность очень большого числа очень малых частиц, непрерывно движущихся и подчиняющихся законам механики» («Принципы механики»). Таким образом, атомистика Больцмана — это механическая атомистика, отличающаяся от наших современных представлений. Осторожный естествоиспытатель Больцман чужд застоя и консерватизма. Интересно, например, его отношение к утверждению о неделимости атомов. По этому поводу он писал: «В неделимость атома не верит в настоящее время ни один физик». Больцману пришлось отстаивать атомистику главным образом в спорах с энергетикой, причем его интересовала в основном проблема структуры материи. Он исходил из дискретности материи и от нее шел к континууму и дифференциальным уравнениям, неоднократно обсуждая этот предельный переход в статьях «О неизбежности атомистики в естественных науках», «Еще раз об атомистике» и др. На попытки энергетиков спрятаться за дифференциальные уравнения Больцман возражал, говоря, что тот, кто не видит атомистики за дифференциальными уравнениями, за деревьями не видит леса.

Больцман не отрицал возможности немеханического объяснения природы, он не возводил в абсолют механицизм, а просто считал, что в его время ничего лучше не было.

«Никто не утверждает, что существует доказательство того, что совокупность явлений природы может быть объяснена механически. Я сам когда-то ломал копья за механическое воззрение на природу, но только в том смысле, что оно является колоссальным прогрессом по сравнению с прежним, чисто мистическим». И дальше: «Это представление является для нас только опытом, который может быть усовершенствован, а со временем, быть может, даже вообще оставлен» («Математика об энергетике»). При этом Больцман считал, что всякое новое немеханическое миропонимание должно будет включить в себя элементы прежнего механического. Но он яростно отбивал попытки отвергнуть его теории только потому, что они механистические и отстаивают атомистику, хотя оппоненты не могли предложить что-либо лучшее. «Не от энергетики, не от феноменологии пришел луч надежды немеханического объяснения природы, но от атомистической теории. Нечего говорить, что я имею в виду современную электронную теорию», — так приветствовал Больцман появление последней.

Больцман был исследователем в высшей степени оригинальным и наряду с выдающимися теоретическими работами является автором ряда тонких экспериментальных исследований. Высокий уровень его математической культуры, богатая фантазия, интуиция и экспериментальные способности характеризуют его научное лицо. Больцман не идет напролом к решению сложных проблем. «В естествознании менее, чем где-либо, оправдывается положение, что прямой путь — самый короткий», — говорит он. Но и занимаясь проблемами, которые кажутся ему разрешимыми в данный момент, он не теряет из вида большие проблемы общего характера.

Больцман был не только выдающимся ученым, но и выдающимся преподавателем. Поражает его умение кристально ясно излагать сложнейшие

вопросы теоретической физики. Впрочем, стремление к ясности, строгости и законченности вообще отличает его творчество.

Больцман был человеком очень широкого диапазона. Среди работ Больцмана имеются работы и по математике, и по механике, и по гидродинамике, и по теории упругости, и по теории электромагнитного поля и оптике, и по термодинамике и кинетической теории газов. Значение этих работ неодинаково. Из них, бесспорно, выделяются работы по кинетической теории газов и статистическому обоснованию термодинамики.

Постараемся проследить появление важнейших работ Больцмана в этой области.

В 1871–1872 гг. появляются три важнейшие работы Больцмана: «О тепловом равновесии многоатомного газа», «Аналитическое доказательство 2-го закона механической теории тепла» и «Дальнейшее исследование теплового равновесия газовых молекул». В этих работах анализируется установление теплового равновесия в газах и распределение Максвелла обобщается сначала на случай многоатомных молекул, а затем на случай смеси газов. При этом получается знаменитое больцмановское распределение, которое встречается всюду, где применяется классическая статистика.

В работе 1875 г. «О тепловом равновесии в газе, на который действуют внешние силы» показано, что полученные ранее результаты сохраняют свою силу для случая газа, находящегося в поле внешних сил. В этой работе Больцман формулирует общее газокинетическое уравнение именно в том виде, в котором оно используется и сейчас, хотя в более ранних его работах оно уже встречалось для различных частных случаев (стационарного, без наличия внешних сил и др.). Все доказательства он проводит исходя из своего уравнения. Вводя функцию H (средний логарифм функции распределения), он доказывает свою знаменитую H-теорему в самом общем виде (доказательство для частного случая в отсутствие внешних сил было им дано еще в 1872 г.). H-теорема гласит: функция H с течением времени не может возрастать, т. е. ее поведение с точностью до знака аналогично поведению энтропии. Функция H остается постоянной для случая термодинамического равновесия. В этой же работе показано, что только больцмановское распределение удовлетворяет условиям статистического равновесия.

Спустя два года, в 1877 г., в работе «О связи между 2-м законом механической теории тепла и теорией вероятностей» Больцман указывает связь H-функции со статистическим весом данного состояния и показывает таким образом, что наивероятнейшее состояние и состояние теплового равновесия идентичны. Эти результаты затем обобщаются на случай многоатомных молекул и на случай наличия поля внешних сил. Вычисляя функцию H для случая идеального одноатомного газа, Больцман показал пропорциональность энтропии и функции H; таким образом, энтропия была связана с вероятностью данного макроскопического состояния. Этими работами под термодинамику была подведена статистическая база, что является одним из величайших открытий физики, позволяющих связывать термодинамические свойства вещества с его молекулярным строением. Эта концепция является основой всей статистической физики.

В ряде последующих работ Больцман разрабатывает методы приближенного решения своего уравнения, выводит из него гидродинамические уравнения,

исследует возможность распространения кинетической теории газов на случай сил притяжения и т. д. Он применяет свой метод к явлениям переноса в газах, рассматривает явления диффузии, внутреннего трения и др. Этим, конечно, не ограничиваются его работы по термодинамике и теории газов.

Истолкование энтропии как величины, пропорциональной логарифму вероятности состояния, является блестящим достижением Больцмана. Это толкование сыграло основную роль и в наше время, послужив, например, основным понятием современной теории информации.

Сегодня, как никогда, понятен смысл великой формулы Больцмана $S = k \ln W$, которая, как сказал Зоммерфельд, «высеченная на памятнике Больцмана на Венском кладбище, парит на фоне облаков, плывущих над могилой великого Больцмана».

H-теорема Больцмана вызвала огромную и весьма плодотворную дискуссию, благодаря которой был создан ряд новых научных направлений, например так называемая эргодическая теория.

Противники H-теоремы указывали, что монотонное изменение величины H противоречит полной обратимости механики (Лошмидт) и так называемой теореме о возвращаемости (Пуанкаре–Цермело), согласно которой состояния динамических систем должны через некоторое время приближенно повторяться.

Занявшись более внимательным анализом предпосылок H-теоремы, Больцман приходит к более ясной формулировке статистического характера второго начала термодинамики: возрастание является лишь наиболее вероятным изменением энтропии при определенных условиях, налагаемых на начальное состояние рассматриваемой молекулярной системы. Именно рассматривая систему, которая в начальный момент t_0 была в маловероятном состоянии и которая с течением времени переходит к более вероятным состояниям, мы приходим к подавляюще вероятному возрастанию энтропии, хотя возможно и ее убывание. С другой стороны, из обратимости механики следует, что до момента t_0 энтропия должна была уменьшиться со столь же большой вероятностью. Таким образом, мы получим обратимую флуктуацию в момент t_0.

Чтобы понять необратимость статистических процессов, нужно только предположить, что мы присутствуем при затухании космически грандиозной флуктуации. Изложенное выражает как раз краткий смысл флуктуационной гипотезы Больцмана, стремившегося примирить наблюдаемую термодинамическую необратимость с материалистическим представлением о неограниченном существовании Вселенной. Эта гипотеза сыграла свою роль в борьбе против антинаучной теории «тепловой смерти» Вселенной. Представление о тепловой смерти было основано на применении ко всей Вселенной в целом термодинамических законов. Однако это необоснованная экстраполяция. Такое возражение относится, конечно, также к флуктуационной гипотезе Больцмана.

Проблема создания статистической теории необратимых процессов, первое решение которой было дано Больцманом, оказалась весьма плодотворной. Этой проблеме посвятил всю свою жизнь его ученик, великий польский физик Мариан Смолуховский.

Исследования Смолуховского привели к созданию статистической теории броуновского движения, которая сыграла огромную роль в науке. Достаточно сказать, что на базе этих работ выросла сегодня обширная ветвь математики — теория марковских случайных процессов.

Исследование броуновского движения привело к открытию меры Винера, имеющей в настоящее время фундаментальное значение после работ Фейнмана и в такой совершенно новой области, как квантовая теория поля.

Вторая большая группа работ Больцмана посвящена максвелловской теории электромагнетизма. Больцман принадлежит к числу поклонников и пропагандистов теории Максвелла, шедшей тогда вразрез с привычными взглядами и казавшейся многим математически чрезвычайно сложной.

Первая большая экспериментальная работа Больцмана была посвящена доказательству справедливости максвелловского соотношения между показателем преломления и диэлектрической постоянной вещества.

Сначала Больцман исследовал твердые изоляторы. Методом конденсатора он определил диэлектрические постоянные серы, парафина. Значительно большие трудности представило определение диэлектрических постоянных газов. Им были исследованы воздух, водород, кислород, углекислый газ и др. Большие трудности, которые при этом были преодолены, свидетельствуют об экспериментальном искусстве Больцмана. Еще большие трудности Больцман преодолел при определении зависимости диэлектрической постоянной от направления в случае анизотропии среды. Он был первым, кто сделал этот вывод из максвелловской теории, и сам же проверил его в опытах с шаром, вырезанным из кристалла ромбической серы. Так Больцман одним из первых дал экспериментальное доказательство теории Максвелла.

Вторая часть его работ по теории электромагнитного поля, относящихся к этим же годам (1872–1874), посвящена изучению поляризации диэлектриков в электрическом поле. В частности, целью одной из его работ являлось показать, что изменение емкости конденсатора объясняется именно поляризацией диэлектрика, а не его слабой проводимостью. Попутно, другим методом, им были определены диэлектрические постоянные ряда веществ.

Кроме того, можно указать на его некоторые теоретические работы, например, о движении электричества на изогнутых поверхностях, о взаимодействии частей электрического контура произвольной формы и т. д.

Нельзя не отметить его работы по теории термоэлектричества, диамагнетизма, эффекта Холла, где им была указана возможность определения знака носителей заряда, теории электро- и магнитострикции, исследований о действии магнитного поля на электрический разряд в разреженных газах, несколько работ о капиллярных явлениях и теплоемкости газов.

Реализуя идею Больцмана, Теплер построил прибор, позволяющий оптическим методом анализировать акустические колебания. Этим методом были исследованы периоды, амплитуды, сдвиги фаз и другие характеристики колебаний в воздушных резонаторах. Несколько работ Больцмана посвящено теории упругого последействия, причем он отстаивал ту точку зрения, что упругая сила зависит не только от мгновенной, но и от предшествующей деформации. Свою теорию Больцман пытался подтвердить опытами по крутильным колебаниям металлических стержней.

В 1884 г. Больцман теоретически вывел закон Стефана о тепловом излучении. Из общих соображений он получил известную формулу, связывающую давление и плотность энергии черного излучения, и затем, применяя термодинамику к тепловому излучению, получил свою знаменитую формулу.

Лоренц назвал эту работу «перлом теоретической физики». Перечисленные работы не исчерпывают всего списка трудов Больцмана, но дают представление о широте его научных интересов и размахе деятельности. Но, конечно, основные его результаты принадлежат кинетической теории газов и статистическому обоснованию термодинамики. Сам Больцман говорил: «Отдельный человек может достигнуть большого значения лишь благодаря полной преданности какой-либо идее». Этими словами и хочется закончить обзор его деятельности.

О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ*

Введение

При решении многих задач физики и техники мы сталкиваемся с необходимостью исследования колебательных систем. Первоначально такие исследования проводились в рамках небесной механики. Наиболее важные результаты этого периода — локальная теория периодических решений Пуанкаре–Ляпунова, качественная теория динамических систем на плоскости Пуанкаре–Бендиксона, теория динамических систем Биркгофа.

Бурное развитие радио- и электротехники вызвало острую потребность в создании новых методов исследования нелинейных колебательных систем. Фундаментальный вклад в решение возникшей проблемы внесли Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов.

Разработанные и строго обоснованные методы образовали мощный, практически удобный математический аппарат для таких исследований. Среди многочисленных вариантов этих методов, разработанных для самых разнообразных классов нелинейных систем, во многих случаях удобным оказывается специальный метод последовательной замены переменных, предложенный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым еще в 1934 г. [1].

Остановимся на основных моментах этого метода. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в стандартной форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — точки n-мерного евклидова пространства E_n, t — время, ε — малый положительный параметр. Для уравнения (1) образуем m-е приближение

$$x^{(m)} = \xi + \varepsilon F^{(1)}(t, \xi) + \ldots + \varepsilon^m F^{(m)}(t, \xi), \tag{2}$$

в котором переменная ξ является решением уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 P^{(2)}(\xi) + \ldots + \varepsilon^m P^{(m)}(\xi). \tag{3}$$

---

* Первая летняя математическая школа, Канев, 15 июня — 15 июля 1963 г. Киев, 1964. С. 11–101; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. IV, 2006, с. 220.

Здесь функции $F^{(1)}(t,\xi),\ldots,F^{(m)}(t,\xi)$ и $P^{(1)}(\xi),\ldots,P^{(m)}(\xi)$ подобраны (исходя из известных выражений для $X(t,\xi,\varepsilon)$) так, чтобы ряды (2) удовлетворяли уравнениям (1) с точностью до величин порядка ε^{m+1}.

Если теперь, определив функции $F^{(1)}(t,\xi),\ldots,F^{(m)}(t,\xi)$, рассматривать выражение (2) не как приближенное решение системы (1), а как некоторую форму замены переменных, преобразующую неизвестную x к новой неизвестной ξ, то уравнение (1) приводится к уравнению

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon P^{(1)}(\xi)+\varepsilon^2 P^{(2)}(\xi)+\ldots+\varepsilon^m P^{(m)}(\xi)+\varepsilon^{m+1}R(t,\xi\varepsilon), \tag{4}$$

состоящему из «интегрируемой» части и возмущения $\varepsilon^{m+1}R(t,\xi,\varepsilon)$, являющегося величиной порядка ε^{m+1}. При этом если переменная ξ удовлетворяет уравнению (4), то выражение (2) представляет собой точное решение уравнения (1) [2].

Естественный путь дальнейшего развития приведенного метода — рассмотреть его в пределе, т. е. в выражениях (2)–(4) устремить m к бесконечности. Если ряды (2) окажутся сходящимися, то система уравнений (1) сведется к «интегрируемой» системе

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon P(\xi,\varepsilon). \tag{5}$$

Такое развитие метода оказалось, однако, невозможным: уже для систем с квазипериодическими по t функциями $X(t,x,\varepsilon)$ в формулах (2) появляются, как правило, малые знаменатели, и ряды (2) расходятся.

Заманчивая идея сведения «неинтегрируемой» системы (1) к «интегрируемому» виду (5) долгое время оставалась недоступной практическому воплощению.

Лишь в последнее время в связи с появлением работ А. Н. Колмогорова [3] и В. И. Арнольда [4] Н. Н. Боголюбовым разработан новый вариант метода последовательной замены переменных, и идея сведения нашла свое реальное воплощение в работах различных авторов.

Остановимся вкратце на основной идее указанных работ А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда. Рассмотрим консервативную динамическую систему, определяемую каноническими уравнениями

$$\begin{aligned}&\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q},\\ &\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad p=(p_1,\ldots,p_n),\quad q=(q_1,\ldots,q_n),\end{aligned} \tag{6}$$

с аналитической функцией Гамильтона $H(p,q,\varepsilon)$, периодической по q с периодом 2π. Предположим, что система (6) отличается от интегрируемой малым возмущением, т. е. ее гамильтониан представляется в виде

$$H(p,q,\varepsilon)=H_0(p)+\varepsilon H_1(p,q)+\ldots. \tag{7}$$

Подставив выражение (7) в уравнения (6), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial q} + \dots, \\ \frac{dq}{dt} &= \omega(p) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p} + \dots \quad \left(\omega(p) = \frac{\partial H_0}{\partial p}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Произведем в системе уравнений (8) каноническое преобразование согласно формулам

$$\begin{aligned} p &= p' + \varepsilon \frac{\partial S(p', q)}{\partial q}, \\ q' &= q + \varepsilon \frac{\partial S(p', q)}{\partial p'}, \end{aligned} \tag{9}$$

приводящее $H(p, q, \varepsilon)$ к виду

$$H(p, q, \varepsilon) = H_0'(p', \varepsilon) + \varepsilon^2 H_1'(p', q') + \dots, \tag{10}$$

а уравнения (8), следовательно, к системе

$$\begin{aligned} \frac{dp'}{dt} &= -\varepsilon^2 \frac{\partial H_1'}{\partial q'} + \dots, \\ \frac{dq'}{dt} &= \omega'(p') + \varepsilon^2 \frac{\partial H_1'}{\partial p'} + \dots . \end{aligned} \tag{11}$$

Совершив в системе уравнений (11) преобразование того же типа, что и замена (9), придем к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dp''}{dt} &= -\varepsilon^4 \frac{\partial H_1''}{\partial q''} + \dots, \\ \frac{dq''}{dt} &= \omega''(p'') + \varepsilon^4 \frac{\partial H_1''}{\partial p''} + \dots \end{aligned} \tag{12}$$

и т. д., при этом порядки малости «неинтегрируемых» добавок в получаемых уравнениях будут соответственно пропорциональны $\varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^8, \dots, \varepsilon^{2^s}, \dots$.

Приведенный здесь процесс последовательных преобразований содержит существенно новый элемент исследования, заключающийся в том, что для получения итерационного процесса мы не улучшаем преобразование (9), дополняя его членами высшего порядка малости, как это предлагалось в работе [1], а совершаем повторное применение такого же преобразования.

Возникающая при этом «ускоренная сходимость» процесса типична для ньютоновского метода касательных. Она подавляет влияние малых знаменателей, появляющихся в формулах замены переменных (9), и для «большинства» начальных значений p суперпозиция таких замен сходится. Объединяя метод ускоренной сходимости с методом интегральных многообразий, учитывая при этом ряд специфических особенностей, свойственных нелинейным колебательным системам, удалось значительно расширить области применимости метода и решить задачу о существовании квазипериодических решений для общего случая $n > 2$.

§ 1. Постановка задачи. Существование инвариантного многообразия

Уже сравнительно давно выяснилось [1, 2], что в задачах нелинейной механики в ряде важных случаев можно установить существование интегральных многообразий тороидального типа, обладающих свойством *асимптотического* притяжения близких траекторий.

Тем самым вопрос об исследовании стационарных колебательных процессов сводится к вопросу об изучении структуры траекторий, лежащих на таких интегральных многообразиях.

В упомянутых работах для этой цели использовались известные результаты теории Пуанкаре–Данжуа, относящиеся к отображениям окружности на саму себя. С их помощью удалось доказать существование квазипериодических решений и исследовать их устойчивость для тех случаев, когда тороидальные многообразия являются двумерными.

Случай торов высшей размерности нам не удалось изучить в рамках указанной теории. Теперь, однако, после появления работы В. И. Арнольда [4], а затем работы Ю. Мозера [5], открылись пути для исследования значительно более общих случаев, поскольку отпали ограничения на размерность интегральных тороидальных многообразий.

Настоящие лекции и посвящены вопросам существования квазипериодических решений и установлению их свойств аналитичности по отношению к малому параметру на основе объединения метода В. И. Арнольда с нашим методом доказательства существования интегральных многообразий.

Для ряда задач теории нелинейных колебаний, описываемых дифференциальными уравнениями с малым параметром, во многих случаях удается обнаружить существование инвариантного тороидального многообразия.

Пусть мы имеем динамическую систему, характеризующуюся совокупностью уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \varepsilon), \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — векторы n-мерного евклидова пространства, ε — малый положительный параметр.

При ряде предположений для системы (1.1) можно установить существование инвариантного тороидального многообразия вида

$$x = f(\varphi), \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n). \tag{1.2}$$

В этом случае исходные уравнения сводятся к уравнению на торе

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu + f(\varphi), \tag{1.3}$$

где $f(\varphi)$ — периодическая функция $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, которая может быть достаточно малой (благодаря наличию параметра ε в исходной системе), т. е. преобразование (1.3) близко к повороту.

При некоторых условиях тор обладает свойством асимптотического притяжения траекторий любых решений уравнений (1.1), не лежащих на торе.

Для ряда дифференциальных уравнений такие свойства были установлены в середине 1930-х гг. [1] и усовершенствованы в 1940-х гг. в нашей работе [2].

Однако для задач нелинейной механики представляет интерес не только нахождение тороидального многообразия, но и исследование поведения интегральных кривых на этом многообразии. Наши ранние исследования по этому вопросу проводились с помощью теории Пуанкаре–Данжуа (теория отображения окружности на себя). Но эта теория относится к одномерному случаю, когда исходная система дифференциальных уравнений приводится к виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi, \theta) + \nu, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega. \tag{1.4}$$

Для этих двух уравнений применялась теория Пуанкаре–Данжуа, согласно которой поведение решений на торе характеризовалось числом вращения Ω.

Если Ω иррациональное, то решения на торе квазипериодические.

Если Ω рациональное, то имеются периодические решения и все остальные решения с течением времени приближаются к ним.

Когда исходная система уравнений (1.1) приводилась к специальной системе вида (1.4), то удавалось доказать существование квазипериодического решения, установить его устойчивость и т. д. Общий же случай, когда уравнения (1.1) на торе сводятся к уравнениям вида (1.3), не был рассмотрен.

В настоящее время благодаря появившимся работам В. И. Арнольда [4] и Ю. Мозера [5] удается исследовать структуру уравнений на торе любой размерности при условии, что функция $f(\varphi, \theta)$ малая.

Остановимся на изложении основной идеи В. И. Арнольда. Вначале интуитивно рассмотрим, как будут вести себя решения системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu + f(\varphi), \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n), \tag{1.5}$$

где $f(\varphi)$ — малая периодическая функция φ, представимая в виде m-кратного ряда Фурье:

$$f(\varphi) = \sum_m f_m e^{i(m\varphi)}, \quad (m\varphi) = m_1\varphi_1 + \dots + m_n\varphi_n. \tag{1.6}$$

Очевидно, что движение в целом, описываемое уравнением (1.5), представляет собой систематическое вращение, на которое накладываются некоторые малые колебательные движения.

Если усреднить правую часть уравнения (1.5) по φ, то получим в нулевом приближении уравнение

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \nu + \overline{f}(\varphi), \tag{1.7}$$

которое показывает, что в нулевом приближении имеем только вращение с несколько измененной частотой

$$\omega = \nu + \overline{f}. \tag{1.8}$$

Для получения решения уравнения (1.5) в первом приближении следует учесть члены, вызывающие вибрации. Имеем

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 + \sum_{|m|\neq 0} \frac{f_m e^{i(m,\omega t + m\varphi_0)}}{i(m\omega)}, \quad (m\omega) = m_1\omega_1 + \ldots + m_n\omega_n, \tag{1.9}$$

при этом предполагаем, что все ω_i линейно независимы.

Так как правая часть уравнений (1.5) содержит малые слагаемые, то можно было бы применить теорию возмущений и получить также и высшие приближения. Однако при этом следует заметить, что в знаменатели будут входить суммы $(m\omega)$ — так называемые малые делители, и поэтому раскладывать ω по степеням ε не представляется возможным. Уже из этих чисто интуитивных соображений становится очевидным, что нецелесообразно находить ω по ν и f. Наоборот, считая, что ω задано, следует определять[1] $\Delta = \nu - \omega$ как функцию от ω:

$$\Delta = \Delta(\omega), \tag{1.10}$$

при этом в первом приближении имеем

$$\Delta = -\overline{f}. \tag{1.11}$$

Остановимся на рассмотрении сходимости ряда, стоящего в формуле первого приближения (1.9). Заметим следующее. Если даже f_m быстро убывает, так, что $|f_m| \leqslant C\rho^{|m|}$, где $\rho < 1$, то все равно можно подобрать ω так, что ряд (1.9) окажется расходящимся. Поэтому на ω надо наложить некоторое условие, например условие

$$|(m\omega)| \geqslant K|m|^{-(n+1)}, \tag{1.12}$$

где n — размерность пространства; $|m| = |m_1| + |m_2| + \ldots + |m_n|$; $m_1, \ldots, m_n$ — любые целые (положительные и отрицательные) числа.

Известно, что если рассмотреть сферу в пространстве переменных $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, то тогда относительная мера множества тех ω, для которых (1.12) не выполняется, будет стремиться к нулю вместе с K. Таким образом, при достаточно малых K «большинство» ω удовлетворяет (1.12).

При рассмотрении вопроса о последовательном построении высших приближений мы сталкиваемся с существенными трудностями, которые состоят в следующем.

Пусть $f(\varphi)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая неравенству $|f(\varphi)| \leqslant M$ в области

$$|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho. \tag{1.13}$$

Обозначим

$$\tilde{f}(\varphi) = \sum_{|m|\neq 0} \frac{f_m e^{i(m\varphi)}}{i(m\omega)}. \tag{1.14}$$

Тогда в области $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho - 2\delta$ имеет место неравенство

$$|\tilde{f}(\varphi)| \leqslant \frac{MC}{\delta^{2n+1}}. \tag{1.15}$$

[1] На целесообразность выражать входящие в уравнения «частоты нулевого приближения» через точные частоты указывалось еще в монографии [6].

Для обычного итерационного процесса мы имеем оценки вида

$$M_{n+1} \leqslant \varepsilon C_n M_n.$$

Если при этом $C_n < \text{const}$, то тогда при $\varepsilon C_n < 1$ мы имеем процесс, сходящийся как геометрическая прогрессия. Но если $C_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то из такого рода оценок нельзя доказать сходимость ряда, стоящего в правой части (1.9).

Обратим внимание на формулу (1.15). В итерационном процессе мы должны сужать δ, последовательно переходя от ρ к $\rho - 2\delta$, затем к $\rho - 2\delta - 2\delta_1$ и т. д., и тогда, как видно, в формулах (1.15) появляются растущие множители. Это и есть хорошо известная трудность малых делителей, с которой столкнулся Пуанкаре в прошлом столетии в небесной механике. В. И. Арнольду удалось преодолеть эту трудность чрезвычайно простым и оригинальным способом.

Возвратимся к рассмотрению формулы первого приближения для уравнения (1.5):

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 + \widetilde{f}(\omega t + \varphi_0). \tag{1.16}$$

Рассмотрим ее не как первое приближение решения уравнения (1.5), а как замену переменных

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \widetilde{f}(\varphi^{(1)}) \tag{1.17}$$

в уравнении

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \Delta + f(\varphi). \tag{1.18}$$

Согласно (1.14), имеет место соотношение

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi^{(1)}}\omega = f(\varphi^{(1)}) - \overline{f}. \tag{1.19}$$

Подставляя (1.17) в (1.18), имеем

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dt} + \frac{\partial \widetilde{f}(\varphi^{(1)})}{\partial \varphi^{(1)}}\frac{d\varphi^{(1)}}{dt} = \omega + \Delta + f(\varphi^{(1)} + \widetilde{f}(\varphi^{(1)})). \tag{1.20}$$

Воспользовавшись (1.19), получим

$$\left(1 + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi^{(1)}}\right)\left(\frac{d\varphi^{(1)}}{dt} - \omega\right) = \Delta + \overline{f} + f(\varphi^{(1)} + \widetilde{f}) - f(\varphi^{(1)}). \tag{1.21}$$

Разделим (1.21) на $(1 + \partial \widetilde{f}/\partial \varphi^{(1)})$. В результате получим

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dt} = \omega + \Delta + \overline{f} + \left\{\left(1 + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi^{(1)}}\right)^{-1} - 1\right\}(\Delta + \overline{f}) + \\ + \left(1 + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi^{(1)}}\right)^{-1}\{f(\varphi^{(1)} + \widetilde{f}) - f(\varphi^{(1)})\}. \tag{1.22}$$

Введем новое отклонение от частоты

$$\Delta^{(1)} = \Delta + \overline{f}. \tag{1.23}$$

Тогда уравнение (1.22) запишется в виде

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dt} = \omega + \Delta^{(1)} + f^{(1)}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}), \tag{1.24}$$

где

$$f^{(1)}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}) = \left\{ \left(1 + \frac{\partial \tilde{f}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)})}{\partial \varphi^{(1)}}\right)^{-1} - 1 \right\}(\Delta + \bar{f}) + \\ + \left(1 + \frac{\partial \tilde{f}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)})}{\partial \varphi^{(1)}}\right)^{-1} \{f(\varphi^{(1)} + \tilde{f}) - f(\varphi^{(1)})\}. \quad (1.25)$$

Определим теперь порядок малости входящих сюда величин.

Если $f(\varphi)$ и Δ являются величинами первого порядка малости (порядка ε), то после первой замены переменных $f^{(1)}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)})$ и $\Delta^{(1)}$ будут величинами второго порядка малости (порядка ε^2). Если теперь совершить преобразование того же типа в уравнениях (1.24), то получим уравнение вида

$$\frac{d\varphi^{(2)}}{dt} = \omega + \Delta^{(2)} + f^{(2)}(\varphi^{(2)}, \Delta^{(2)}) \quad (1.26)$$

и т. д., причем порядки малости функций $f^{(n)}(\varphi^{(n)}, \Delta^{(n)})$ и $\Delta^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots, s)$ будут соответственно пропорциональны $\varepsilon^4, \varepsilon^8, \ldots \varepsilon^{2^s}$.

Заметим, что преобразования типа (1.17), сводящие уравнения (1.18) к виду (1.26), являются обычными преобразованиями, давно используемыми в теории нелинейных колебаний.

Существенно новым элементом, приведшим к успеху исследования, является то, что для получения аппроксимационного процесса мы здесь не улучшаем преобразование (1.17), дополняя его членами высшего порядка малости по ε, а совершаем повторное применение такого же преобразования к новому уравнению (1.26) и т. д. Именно в этом и состоит характерная особенность метода В. И. Арнольда, обеспечивающая «ускоренную сходимость».

Исследуем вопрос о сходимости рассматриваемого процесса более детально. Пусть для первоначальной функции $f(\varphi)$ имеет место неравенство

$$|f(\varphi)| \leqslant M \text{ в области } |\operatorname{Im} \varphi| \leqslant \rho.$$

Тогда для новой функции $f^{(1)}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)})$ будем иметь

$$|f^{(1)}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)})| \leqslant M_1 \text{ в области } |\operatorname{Im} \varphi^{(1)}| \leqslant \rho - 2\delta, \quad |\Delta^{(1)}| \leqslant M.$$

Здесь

$$M_1 = P\frac{M^2}{\delta^{2n+2}}, \quad (1.27)$$

где

$$P = \frac{C}{K}, \quad C = \text{const}. \quad (1.28)$$

Для построения итерационного процесса нам необходимо соответствующим образом выбрать ρ и δ. Согласно (1.13), первоначальная область характеризовалась числом ρ. После первой итерации мы получили

$$\rho_1 = \rho - 2\delta, \quad (1.29)$$

после второй итерации —

$$\rho_2 = \rho - 2\delta - 2\delta_1 \quad (1.30)$$

и т. д.

Очевидно, необходимо, чтобы все ρ_i были ограничены снизу, например $\rho_n \geqslant \rho/2$.

Для этого положим

$$\delta = \gamma, \quad \delta_1 = \gamma^2, \ldots, \delta_n = \gamma^{n+1} \tag{1.31}$$

и подберем γ так, чтобы оно удовлетворяло равенству

$$2(\gamma + \gamma^2 + \ldots) = \frac{\rho}{2}. \tag{1.32}$$

В результате будем получать последовательно дифференциальные уравнения для все новых переменных, в которых отклонения от вращения будут оцениваться соответственно величинами

$$\begin{aligned} M_1 &= P\frac{M^2}{\gamma^{2n+2}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{s+1} &= P\frac{M_s^2}{\gamma^{(2n+2)(s+1)}}, \end{aligned} \tag{1.33}$$

или

$$M_{s+1} = PN^{s+1}M_s^2,$$

где

$$N = \frac{1}{\gamma^{2n+2}}.$$

Если M_0 достаточно мало, то процесс будет быстро сходиться. Так, если положим $PN^2M \leqslant r_0 < 1$, то из итерационных формул (1.33) найдем

$$M_s \leqslant \frac{r_0^{2^s}}{N^{s+2}}, \tag{1.34}$$

что и обеспечивает быструю сходимость данного процесса.

Таким образом, переходя к пределу, будем иметь следующую замену переменных:

$$\varphi = \theta + \Phi(\theta) \tag{1.35}$$

и такое значение Δ, при котором вместо уравнения (1.18) получаем уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \tag{1.36}$$

соответствующее равномерному вращению.

В частности, если $f(\varphi) = \varepsilon f(\varphi)$, то последовательные итерации приводят нас к аналитическим функциям в области достаточно малых $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, и так как сходимость итерационного процесса является равномерной, то предельные функции будут аналитическими в этой области, а значит, функции

$$\Delta = \Delta(\varepsilon), \quad \Phi = \Phi(\varphi, \varepsilon) \tag{1.37}$$

могут быть разложены в сходящиеся ряды по степеням ε. Непосредственное же исследование этих степенных рядов представило бы значительные трудности.

Подчеркнем еще раз чрезвычайную устойчивость итерационного процесса при наличии квадратичной сходимости. Так, если бы вместо соотношения

$$M_{s+1} = PN^{s+1}M_s^2 \tag{1.38}$$

мы имели бы даже соотношение вида

$$M_{s+1} = N^{(1+\gamma)^s}M_s^2, \tag{1.39}$$

то и тогда была бы сходимость при достаточно малом M_0, если только $0 < \gamma < 1$. Действительно, возведя обе части равенства (1.39) в $(1-\gamma)$-ю степень, получим

$$M_{s+1}^{1-\gamma} = N^{(1+\gamma)^s(1-\gamma)}\left(M_s^{1-\gamma}\right)^2. \tag{1.40}$$

Положим

$$M_s^{1-\gamma} = N^{-(1+\gamma)^s}\lambda_s. \tag{1.41}$$

Тогда, подставив это значение в (1.40), получим

$$N^{-(1+\gamma)^s(1+\gamma)}\lambda_{s+1} = N^{(1+\gamma)^s(1-\gamma)-2(1+\gamma)^s}\lambda_s^2 = N^{-(1+\gamma)(1+\gamma)^s}\lambda_s^2. \tag{1.42}$$

Заметим, что

$$\lambda_n = \lambda_0^{2n}. \tag{1.43}$$

Полагая в (1.41) $s = 0$, имеем

$$\lambda_0 = M_0^{1-\gamma}N, \tag{1.44}$$

откуда находим

$$\lambda_0^{1/(1-\gamma)} = M_0N^{1/(1-\gamma)}. \tag{1.45}$$

Из (1.41), учитывая (1.43), имеем

$$M_s = \frac{1}{N^{(1+\gamma)^s(1/(1-\gamma))}}\lambda^{1/(1-\gamma)} = \frac{1}{N^{(1+\gamma)^s(1/(1-\gamma))}}\lambda_0^{(1/(1-\gamma))\Delta\ 2^s}. \tag{1.46}$$

Далее, принимая во внимание (1.45), окончательно получаем

$$M_s = \frac{1}{N^{(1+\gamma)^s(1/(1-\gamma))}}\left(M_0N^{1/(1-\gamma)}\right)^{2^s}, \tag{1.47}$$

откуда и следует справедливость сделанного выше утверждения. Как видно, к «ускоренной» сходимости также квадратичного типа приводит хорошо известный метод касательных, или метод Ньютона. Поэтому В. И. Арнольд и называет свой итерационный процесс методом Ньютона.

Следует отметить, что уже в своей известной работе [3] А. Н. Колмогоров анонсировал применение метода Ньютона для получения итерационного процесса в вопросе о существовании квазипериодических решений для гамильтоновых систем классической механики.

В приведенных выше рассуждениях существенно, чтобы $f(\varphi)$ была аналитической функцией φ в некоторой комплексной области типа

$$|\operatorname{Im}\varphi| < \rho. \tag{1.48}$$

Методами, применяемыми в нелинейной механике, удается доказать при соответствующих ограничениях, что функции $x = f(\varphi)$, определяющие тор,

обладают достаточным количеством производных. Однако этими методами нельзя доказать аналитичность тора.

Остановимся кратко на идее доказательства существования инвариантного тора.

Обычно вместо переменных $x=(x_1,\dots,x_n)$ вводятся новые переменные h и φ таким образом, чтобы исходные уравнения сводились к виду

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt}&=Hh+F(h,\varphi),\\ \frac{d\varphi}{dt}&=\nu+f(h,\varphi),\end{aligned}\tag{1.49}$$

где вещественные части всех собственных значений матрицы H отрицательны:

$$|e^{Ht}|\leqslant Pe^{-\alpha t},\quad t\geqslant 0,\tag{1.50}$$

здесь $P>0$, $\alpha>0$ — постоянные; функции $F(h,\varphi)$ и $f(h,\varphi)$ — малые при достаточно малых h и регулярные.

В уравнениях (1.49) член Hh дает эффект сужения в пространстве h, а углы φ определяют эффект вращения.

Даже если функции, стоящие в правых частях системы уравнений (1.49), аналитические и сколь угодно малые, доказать существование аналитического тора в комплексной области для этих уравнений непосредственно нельзя.

Действительно, рассмотрим самый простой пример.

Выберем систему уравнений с одним h:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt}&=-\alpha h+f(\varphi)=-\alpha h+\sum_m \rho^{|m|}e^{i(m\varphi)},\quad \varphi=(\varphi_1,\varphi_2),\\ \frac{d\varphi}{dt}&=\nu+\varepsilon\gamma.\end{aligned}\tag{1.51}$$

Для этой системы легко находим инвариантное многообразие

$$h=S(\varphi),\tag{1.52}$$

где

$$S(\varphi)=\sum_m \rho^{|m|}\frac{e^{i(m\varphi)}}{im(\nu+\varepsilon\gamma)+\alpha}.\tag{1.53}$$

Очевидно, что при вещественных ε и γ тор всегда существует. Если же ε или γ — комплексные, то ими всегда можно распорядиться так, чтобы

$$m(\nu+\operatorname{Re}\varepsilon\gamma)=0\tag{1.54}$$

и

$$m(\operatorname{Im}\varepsilon\gamma)+\alpha=0.$$

В этом случае для функции $S(\varphi)$ мы можем получить множество полюсов при сколь угодно малых $|\varepsilon|$. Следовательно, нельзя непосредственно установить существование инвариантного тора, аналитического как по углу, так и по параметру ε в окрестности значения $\varepsilon=0$.

Как известно, в нелинейной механике при доказательстве теорем о существовании тора на всех этапах появляются квадратуры по бесконечному промежутку, которые содержат φ_t. И поскольку $\operatorname{Im}\varphi_t$ может стремиться к бес-

конечности при $t \to \infty$, то мы выйдем из области, в которой подынтегральная функция ограничена. Эту трудность, по-видимому, можно обойти, если воспользоваться методом сглаживания Ю. Мозера, в котором, как известно, требуется не аналитичность, а только дифференцируемость соответствующих функций и потому нет необходимости переходить в комплексную область.

Представляет интерес, воспользовавшись результатами Ю. Мозера, доказать следующий факт.

Пусть имеется уравнение на торе

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu + \Delta + f(\varphi), \tag{1.55}$$

где $f(\varphi)$ — функция, обладающая достаточным количеством производных и достаточно малая. Тогда можно подобрать такое Δ, чтобы стала возможной замена переменных, приводящая уравнение (1.55) к чистому вращению

$$\frac{d\theta}{dt} = \nu.$$

§ 2. Установление свойств аналитичности квазипериодических решений

В настоящих лекциях нас будет интересовать не только вопрос существования квазипериодических решений, но и установление их свойств аналитичности по отношению к параметру, с тем чтобы можно было писать для них заведомо сходящиеся степенные разложения.

Для этого соединим метод В. И. Арнольда с нашим методом доказательства существования интегральных многообразий.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \varphi, \Delta), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + f(h, \varphi, \Delta), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $F(h, \varphi, \Delta)$, $f(h, \varphi, \Delta)$ — функции, регулярные в области

$$|h| < \eta, \quad |\operatorname{Im} \varphi| < \rho, \quad |\Delta| < \sigma. \tag{2.2}$$

Задача состоит в том, чтобы подобрать такое Δ, при котором уравнения (2.1) свелись бы к уравнениям вида

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где частоты ω вещественны. Для системы (2.3) доказательство существования квазипериодических решений уже не представляет трудностей.

Остановимся сначала на вспомогательных определениях. Введем новое определение нормы.

Обычно норма определяется следующим образом:

$$|h| = \sup_{k=1,\dots,n_0} |h_k|,$$

где $h = h_1, \dots, h_n$; h — комплексное число.

Введем новую норму

$$\|h\| = \sup_{\substack{k=1,\dots,n_0 \\ 0 \leqslant t < \infty}} |e^{Ht} h_k| e^{\alpha t}, \tag{2.4}$$

где H — матрица в уравнении (2.3), удовлетворяющая условию

$$|e^{Ht}| \leqslant P e^{-\alpha t} \quad \text{для} \quad t \geqslant 0, \quad \alpha > 0, \quad P = \text{const} \geqslant 1. \tag{2.5}$$

Очевидно, что новая норма удовлетворяет неравенству

$$|h| \leqslant \|h\| \leqslant P(h). \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что $\|h\|$ может быть принято за обычную норму в линейном n_0-мерном комплексном пространстве. Так, например, для нее выполняется неравенство треугольника

$$\|h' + h''\| \leqslant \sup_{\substack{k=1,\dots,n_0 \\ 0 \leqslant t < \infty}} |e^{Ht}(h' + h'')| e^{\alpha t} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{k=1,\dots,n_0 \\ 0 \leqslant t < \infty}} |e^{Ht} h'| e^{\alpha t} + \sup_{\substack{k=1,\dots,n_0 \\ 0 \leqslant t < \infty}} |e^{Ht} h''| e^{\alpha t} = \|h'\| + \|h''\|. \tag{2.7}$$

Доказательство существования квазипериодического решения для системы (2.3) следует из теоремы.

Теорема I. *Пусть относительно системы* (2.3) *выполняются следующие условия*:

1)

$$\|F(h, \varphi)\| \leqslant N, \quad n_0 \left\| \frac{\partial F(h, \varphi)}{\partial h_q} \right\| \leqslant L \tag{2.8}$$

в области

$$\|h\| \leqslant \eta, \quad |\operatorname{Im} \varphi| \leqslant \rho,$$

где η, ρ, N, L *— некоторые постоянные, при этом*

$$\frac{N}{\alpha} \leqslant \eta, \quad L \leqslant \frac{\alpha}{2}; \tag{2.9}$$

2) *все собственные значения матрицы* H *имеют отрицательные вещественные части, и, следовательно, имеет место неравенство*

$$|e^{Ht}| \leqslant P e^{-\alpha t},$$

где $P = \text{const} \geqslant 1$, $t \geqslant 0$, $\alpha > 0$.

Тогда система уравнений (2.3) *допускает существование единственного тороидального интегрального многообразия вида*

$$h = S(\varphi), \tag{2.10}$$

где

$$\|S(\varphi)\| \leqslant \frac{N}{\alpha} \quad \text{для} \quad |\operatorname{Im} \varphi| \leqslant \rho. \tag{2.11}$$

Если для любого решения, не лежащего на многообразии, при $t = t_0$ *начальные значения* h_0, φ_0 *удовлетворяют условиям*

$$\|h_0\| \leqslant \eta, \quad \|\operatorname{Im} \varphi_0\| \leqslant \rho,$$

то тогда для любых $t \geqslant t_0$ *будет выполняться следующее неравенство*:

$$\|h_t - S(\varphi_t)\| \leqslant 2\eta e^{-(\alpha/2)t}, \quad t \geqslant 0, \tag{2.12}$$

при этом

$$|h_t| \leqslant \eta \quad \text{для} \quad t \geqslant 0. \tag{2.13}$$

Доказательство. Рассмотрим решение интегрального уравнения

$$h_t = \int_{-\infty}^{t} e^{H(t-\tau)} F(h_\tau, \varphi + \omega\tau)\, d\tau, \tag{2.14}$$

удовлетворяющего нашему дифференциальному уравнению (2.3). Пусть

$$h_t = S(\varphi + \omega t). \tag{2.15}$$

Тогда

$$S(\varphi + \omega t) = \int_{-\infty}^{t} e^{H(t-\tau)} F\{S(\varphi + \omega\tau), \varphi + \omega\tau\}\, d\tau. \tag{2.16}$$

Произведем в (2.16) следующую замену переменных:

$$\varphi \to \varphi - \omega t, \quad t - \tau = z.$$

Тогда вопрос о существовании искомого интегрального инвариантного многообразия сводится к рассмотрению уравнения

$$S(\varphi) = \int_{0}^{\infty} e^{Hz} F\{S(\varphi - \omega z), \varphi - \omega\, z\}\, dz. \tag{2.17}$$

Решение уравнения (2.17) ищем с помощью обычного итерационного процесса:

$$\begin{aligned} &S_0(\varphi) = 0, \\ &S_1(\varphi) = \int_{0}^{\infty} e^{Hz} F\{0, \varphi - \omega z\}\, dz, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &S_{n+1}(\varphi) = \int_{0}^{\infty} e^{Hz} F\{S_n(\varphi - \omega z), \varphi - \omega\, z\}\, dz. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Принимая во внимание условия теоремы, можем написать

$$\|S_1(\varphi)\| \leqslant \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha z}\, dz N = \frac{N}{\alpha} \leqslant \eta. \tag{2.19}$$

Допустим, что для всех $S_k(\varphi)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ выполняется неравенство

$$\|S_k(\varphi)\| \leqslant \frac{N}{\alpha}. \tag{2.20}$$

Докажем, что и при $k=n+1$ данное неравенство справедливо. Так как

$$\|S_n(\varphi)\| \leqslant \eta, \quad |\operatorname{Im}(\varphi-\omega z)| = |\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho, \tag{2.21}$$

то

$$\|S_{n+1}(\varphi)\| \leqslant N\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha z}\,dz = \frac{N}{\alpha}. \tag{2.22}$$

Установим сходимость последовательностей S_n. Для этого рассмотрим разность

$$S_{n+1}(\varphi)-S_n(\varphi) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{Hz}\{F[S_n(\varphi-\omega z),\varphi-\omega z]- \\ -F[S_{n-1}(\varphi-\omega z),\varphi-\omega z]\}\,dz \quad (n=1,2,\ldots). \tag{2.23}$$

Так как

$$\left\|\frac{\partial F(h,\varphi)}{\partial h_q}\right\| \leqslant L,$$

то можем написать

$$\|S_{n+1}(\varphi)-S_n(\varphi)\| \leqslant \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha z}L\{\|S_n(\varphi-\omega z)-S_{n-1}(\varphi-\omega\ z)\|\}\,dz. \tag{2.24}$$

Пусть

$$\sup_{|\operatorname{Im}\psi|\leqslant\rho}\|S_n(\psi)-S_{n-1}(\psi)\| = D_n. \tag{2.25}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &D_1 \leqslant \frac{N}{\alpha},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &D_{n+1} \leqslant \frac{L}{\alpha}D_n \leqslant \frac{1}{2}D_n. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Таким образом,

$$D_n < \frac{N}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \tag{2.27}$$

откуда следует равномерная сходимость в области $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho$ последовательности $S_n(\varphi)$:

$$S_n(\varphi) \to S(\varphi). \tag{2.28}$$

Остановимся теперь на доказательстве свойства притяжения интегральным многообразием траекторий любых решений, не лежащих на многообразии, для которых $|h_0| \leqslant \eta$ в области $|\operatorname{Im}\varphi_0| < \rho$.

Подставляя значение $h=S(\varphi+\omega t)$ в уравнение (2.3), получаем

$$\frac{dS(\varphi+\omega t)}{dt} = HS(\varphi+\omega t)+F\{S(\varphi+\omega t),\varphi+\omega\ t\}. \tag{2.29}$$

Пусть параметр $h_0 = h$ удовлетворяет неравенству

$$\|h\| \leqslant \eta. \tag{2.30}$$

Тогда из выражения

$$h_t = \sum_0^t \mathrm{e}^{H(t-\tau)} F(h_\tau, \varphi + \omega\tau)\, d\tau + \mathrm{e}^{Ht} h_0 \tag{2.31}$$

нетрудно видеть, что

$$|h_t| \leqslant \eta, \quad t \geqslant 0. \tag{2.32}$$

Действительно,

$$\|h_t\| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}\|h_0\| + \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha\,(t-\tau)}\, d\tau\, N \tag{2.33}$$

или

$$\|h_t\| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}\|h_0\| + \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha} N \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}\eta + \eta(1-\mathrm{e}^{-\alpha t}) \leqslant \eta.$$

Далее имеем

$$\frac{dh_t}{dt} = Hh_t + F(h_t, \varphi + \omega\ t). \tag{2.34}$$

Вычитая из (2.34) уравнения (2.29), получаем

$$\frac{d(h_t - S(\varphi+\omega t))}{dt} = \\ = H[h_t - S(\varphi+\omega t)] + F(h_t, \varphi+\omega t) - F(S(\varphi+\omega t), \varphi+\omega\ t). \tag{2.35}$$

Разрешая (2.35), находим

$$h_t - S(\varphi+\omega t) = \mathrm{e}^{Ht}(h - S(\varphi)) + \\ + \int_0^t \mathrm{e}^{H(t-\tau)}\{F(h_\tau, \varphi+\omega\tau) - F(S(\varphi+\omega\tau), \varphi+\omega\tau)\}\, d\tau,$$

откуда после мажорации правой части получаем

$$\|h_t - S(\varphi+\omega t)\| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t} 2\eta + \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} L|h_\tau - S(\varphi+\omega\tau)|\, d\tau, \tag{2.36}$$

или

$$\|h_t - S(\varphi+\omega t)\| \leqslant\ \mathfrak{G}(t), \tag{2.37}$$

где

$$\mathfrak{G}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} 2\eta + L\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \mathfrak{G}(\tau)\, d\tau, \tag{2.38}$$

$$\mathfrak{G}(0) = 2\eta. \tag{2.39}$$

Дифференцируя (2.38) по t как по параметру, имеем

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = -\alpha\mathfrak{G} + L\mathfrak{G} = -(\alpha - L)\mathfrak{G}. \tag{2.40}$$

Принимая во внимание, что $\alpha - L \geqslant \alpha - \alpha/2 \geqslant \alpha/2$, а также (2.38), находим

$$\mathfrak{G}(t) = 2\eta e^{-(\alpha-L)t} \leqslant 2\eta\ e^{-(\alpha/2)t}.$$

Следовательно, из (2.37) окончательно получаем

$$\|h_t - S(\varphi + \omega t)\| \leqslant 2\eta e^{-(\alpha/2)t}, \quad t \geqslant 0, \tag{2.41}$$

что и завершает доказательство нашей теоремы.

Примечание. Если H и $F(h, \varphi)$ — вещественные функции вещественных аргументов h, φ, то $S(\varphi)$ — вещественная функция вещественного аргумента φ.

Если $F(h, \varphi)$ — аналитическая функция μ в области ϑ и условия теоремы в области ϑ (с фиксированными ρ, η) выполнены, то $S = S(\varphi, \mu)$ — аналитическая функция по μ в области ϑ.

Прежде чем перейти к приведению системы уравнений (2.1) к виду (2.8), выведем ряд вспомогательных оценок.

Пусть $f(\varphi)$ — аналитическая функция угловой переменной $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, ограниченная константой M:

$$|f(\varphi)| \leqslant M \tag{2.42}$$

в области

$$|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho. \tag{2.43}$$

Для периодической функции $f(\varphi)$ имеет место следующее разложение:

$$f(\varphi) = \sum_{|m|} f_m e^{i(m\varphi)}, \quad (m\varphi) = m_1\varphi_1 + \ldots + m_n\varphi_n, \tag{2.44}$$

а также, согласно введенному нами обозначению,

$$\widetilde{f}(\varphi) = \sum_{|m|\neq 0} \frac{f_m}{i(m\omega)} e^{i(m\varphi)}. \tag{2.45}$$

Очевидно, также имеем

$$\frac{\partial\widetilde{f}(\varphi)}{\partial\varphi}\omega = f(\varphi) - \overline{f}(\varphi) = \sum_{|m|\neq 0} f_m e^{i(m\varphi)}, \quad |m| = |m_1| + \ldots + |m_n|. \tag{2.46}$$

Пусть $0 < 2\delta < \rho$, $\delta < 1$, и, кроме того, выполняется условие (1.12):

$$|(m\omega)| \geqslant k|m|^{-(n+1)}. \tag{2.47}$$

Тогда $\widetilde{f}(\varphi)$ — аналитическая функция φ в области $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho - 2\delta$, причем в этой области справедливы следующие оценки:

$$|\widetilde{f}(\varphi)| \leqslant \frac{M}{k}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2n+1}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}(1+e)^n, \tag{2.48}$$

$$\sum_k \left|\frac{\partial\widetilde{f}(\varphi)}{\partial\varphi_k}\right| \leqslant \frac{M}{k}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2n+2}\left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+2}(1+e)^n. \tag{2.49}$$

Действительно, имеем

$$f_m = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-i(m\theta)}\, d\theta = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\theta + i\varphi) e^{-i(m\theta)} e^{(m\varphi)}\, d\theta. \tag{2.50}$$

Положим $\varphi_k = -\rho \operatorname{sign} m$, тогда $(m\varphi) = -\rho|m|$ и из (2.49) получаем

$$|f_m| = M\ e^{-\rho|m|}. \tag{2.51}$$

Легко показать, что в области $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho - 2\delta$ при выполнении условий (2.42) и (2.47) справедливы неравенства

$$|\tilde{f}(\varphi)| \leqslant \frac{M}{k} \sum_m |m|^{n+1} e^{-2\delta|m|}, \tag{2.52}$$

$$\sum_k \left| \frac{\partial \tilde{f}(\varphi)}{\partial \varphi_k} \right| \leqslant \frac{M}{k} \sum_m |m| e^{n+2} e^{-2\delta|m|}. \tag{2.53}$$

Оценим сначала выражение

$$\sum_m |m|^\nu e^{-2\delta|m|} \quad \text{при} \quad 0 < \delta < 1, \quad \nu > 1. \tag{2.54}$$

Найдем значение $z \geqslant 1$, при котором выражение

$$\nu \ln z - \delta z \tag{2.55}$$

достигает максимума.

Дифференцируя (2.55) по z и приравнивая результат нулю, находим

$$\frac{\nu}{z} = \delta, \quad z = \frac{\nu}{\delta} > 1,$$

откуда получаем

$$\nu \ln z - \delta z \leqslant \nu \left(\ln \frac{\nu}{\delta} - 1 \right).$$

Интегрируя полученное выражение, находим

$$z^\nu \leqslant e^{\delta z} e^{\nu(\ln(\nu/\delta) - 1)} = \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu \frac{e^{\delta z}}{\delta^\nu}. \tag{2.56}$$

Подставив (2.56) в (2.54), найдем

$$\sum_m e^{-2|m|\delta} |m|^\nu \leqslant \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu \frac{1}{\delta^\nu} \sum_m e^{-|m|\delta} =$$

$$= \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu \frac{1}{\delta^\nu} \left(1 + 2 \sum_{1<q<\infty} e^{-2\delta} \right)^n = \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu \frac{1}{\delta^\nu} \left(\frac{1 + e^{-\delta}}{1 - e^{-\delta}} \right)^n.$$

Но

$$1 - e^{-\delta} > \delta e^{-\delta}.$$

Следовательно,

$$\frac{1 + e^{-\delta}}{1 - e^{-\delta}} \leqslant \frac{1}{\delta}(1 + e^\delta) < \frac{1 + e}{\delta},$$

и поэтому

$$\sum_m \mathrm{e}^{-2|m|\delta}|m|^\nu < \left(\frac{\nu}{\mathrm{e}}\right)^\nu \frac{1}{\delta^{\nu+n}}(1+\mathrm{e})^n. \tag{2.57}$$

Подставив (2.57) в (2.52) и (2.53) соответственно при $\nu = n+1$ и $\nu = n+2$, получим оценки (2.48) и (2.42).

Примечание. Если $f(\varphi)$ — вещественная функция вещественного аргумента φ, то и $\widetilde{f}(\varphi)$ — вещественная функция вещественного аргумента φ.

Если $f(\varphi) = f(\varphi, \mu)$, где μ — комплексные параметры, и функция $f(\varphi, \mu)$ аналитична по μ, когда значения μ принадлежат некоторой области ϑ, а условия (2.42) и (2.43) с фиксированными M и P для $f(\varphi, \mu)$ при $\mu \in \vartheta$ выполнены, тогда и $\widetilde{f}(\varphi, \mu)$ — функция, аналитическая по μ в ϑ.

Пусть h — любая точка множества $\sum_\eta$ точек h, для которых $\|h\| \leqslant \eta$. Фиксируем $q = 1, \ldots, n_0$ и рассмотрим h', для которых

$$h'_k = h_k, \quad k \neq q, \quad |h'_q - h_q| \leqslant \frac{\eta - \eta_1}{P}, \quad \eta > \eta_1,$$

где $P = \mathrm{const}$.

Для таких h' имеем

$$|h' - h| \leqslant \frac{\eta - \eta_1}{P},$$

а также

$$\|h' - h\| \leqslant \eta - \eta_1$$

и

$$\|h'\| \leqslant \|h\| + \|h' - h\| < \eta.$$

Поэтому если $f(h)$ — аналитическая функция h в области $\sum_\eta$, для которой

$$|f(h)| \leqslant N \quad \text{для} \quad \|h\| \leqslant \eta, \tag{2.58}$$

то тогда

$$\left|\frac{\partial f(h)}{\partial h_q}\right| \leqslant \frac{NP}{\eta - \eta_1} \quad \text{для} \quad \|h\| \leqslant \eta_1 - \eta. \tag{2.59}$$

После этих предварительных оценок перейдем к вопросу о приведении уравнений (2.1) к виду (2.3). Найдем такое преобразование

$$\varphi = \theta + \Phi(h, \theta, \Delta) \tag{2.60}$$

от угловых переменных φ к угловым переменным θ, в которых уравнения (2.1) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \theta + \Phi, \Delta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Это преобразование должно, очевидно, удовлетворять уравнению

$$\left(1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial h}\{Hh + F(h, \theta + \Phi, \Delta)\} = \omega + \Delta + f(h, \theta + \Phi, \Delta). \tag{2.62}$$

Непосредственно решить уравнение (2.62) относительно Φ достаточно трудно. Поэтому, намереваясь воспользоваться основной идеей В. И. Арнольда,

подберем Φ так, чтобы удовлетворить уравнению (2.62) с точностью до величин второго порядка малости (если f условно считать величиной первого порядка малости). Поскольку само Φ — первого порядка малости, то, отбрасывая в (2.62) члены второго порядка малости, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial h}\{Hh + F(h, \theta, \Delta)\} = f(h, \theta, \Delta) + C, \tag{2.63}$$

где C — постоянная.

Для разрешимости уравнения (2.63), как мы увидим, в качестве постоянной C следует выбрать величину $-\overline{f(S(\theta), \theta, \Delta)}$, где $S(\theta)$ определяет соответствующее инвариантное тороидальное многообразие для системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \theta, \Delta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega. \end{aligned} \tag{2.64}$$

В дальнейшем мы покажем, что преобразование типа

$$\varphi = \theta + \Phi(h, \theta, \Delta)$$

действительно повышает порядок малости с первого до второго, и, таким образом, у нас открывается возможность для получения итерационного процесса с ускоренной сходимостью.

Для получения необходимых нам оценок рассмотрим следующее уравнение типа (2.63):

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\omega + \frac{\partial u}{\partial h}\{Hh + F(h, \varphi)\} = f(h, \varphi) - \overline{f(S(\varphi), \varphi)}, \tag{2.65}$$

где $S(\varphi)$ — инвариантное многообразие, определенное из уравнения (2.3); $\overline{f(S(\varphi), \varphi)}$ — постоянная, обеспечивающая разрешимость уравнения (2.65).

Для уравнения (2.65) справедлива следующая теорема.

Теорема II. *Пусть для уравнения* (2.65) *выполняются следующие условия*:

$$|f(h, \varphi)| \leqslant M, \quad \|F(h, \varphi)\| \leqslant N, \quad n_0 \left\| \frac{\partial F(h, \varphi)}{\partial h_q} \right\| \leqslant L \tag{2.66}$$

в области

$$\|h\| \leqslant \eta, \quad |\operatorname{Im} \varphi| \leqslant \rho, \tag{2.67}$$

где η, ρ, M, N, L — *постоянные, удовлетворяющие условиям*

$$L \leqslant \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{N}{\alpha} \leqslant \eta\left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right), \quad 0 \leqslant 2\delta \leqslant \rho, \quad \delta < 1, \tag{2.68}$$

а также выполняется условие (1.12).

Тогда уравнение (2.65) *имеет специальное решение вида*

$$u = \widehat{f}(h, \varphi) = \overline{f(S(\varphi), \varphi)} - \int_0^\infty \{f(h_\tau, \varphi_\tau) - f(S(\varphi_\tau), \varphi_\tau)\}\, d\tau, \tag{2.69}$$

аналитическое по аргументам h, φ и удовлетворяющее неравенствам

$$|\widehat{f}(h,\varphi)| \leqslant M\left\{4Pn_0\frac{\rho}{\alpha\delta}+\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\frac{(1+\mathrm{e})^n}{k\delta^{2n+1}}\right\},$$

$$\sum_q\left|\frac{\partial\widehat{f}(h,\varphi)}{\partial\varphi_q}\right| \leqslant M\left\{2Pn_0n\frac{\rho}{\alpha\delta^2}+\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2}\frac{(1+\mathrm{e})^n}{k\delta^{2n+1}}\right\}, \tag{2.70}$$

$$\left|\frac{\partial\widehat{f}(h,\varphi)}{\partial h_q}\right| \leqslant M\frac{4P^2\rho^2n_0}{\alpha\eta\delta^2}$$

в области

$$\|h\| \leqslant \eta\left(1-\frac{2\delta}{\rho}\right), \quad |\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho\left(1-\frac{2\delta}{\rho}\right). \tag{2.71}$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что (2.69) удовлетворяет уравнению (2.65).

Запишем решение (2.69) в следующем виде:

$$\widehat{f}(h,\varphi) = v(h,\varphi) + \overline{f\{S(\varphi),\varphi\}} = v(h,\varphi) + w(\varphi). \tag{2.72}$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial w}{\partial h}(Hh+F)+\frac{\partial w}{\partial\varphi}\omega = \frac{\partial w}{\partial\varphi}\omega = f(S(\varphi),\varphi) - \overline{f(S(\varphi),\varphi)}.$$

Действительно, по определению

$$w(\varphi) = \overline{f(S(\varphi),\varphi)} = \sum_{|m|\neq 0}\frac{F_m}{i(m\omega)}\mathrm{e}^{i(m\varphi)},$$

откуда, дифференцируя, находим

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial\varphi}\omega = \sum_{|m|\neq 0} f_m\mathrm{e}^{i(m\varphi)} = f\{S(\varphi),\varphi\} - \overline{f\{S(\varphi),\varphi\}}.$$

Остается показать, что

$$\frac{\partial v(h,\varphi)}{\partial h}(Hh+F(h,\varphi))+\frac{\partial v(h,\varphi)}{\partial\varphi}\omega = f(h,\varphi) - f(S(\varphi),\varphi). \tag{2.73}$$

Возьмем $\varphi_t = \varphi + \omega t$ и h_t как решение уравнения

$$\frac{dh_t}{dt} = Hh_t + F(h_t,\varphi_t), \quad t \geqslant 0,$$

при начальном условии $h_t = h$ при $t = 0$. Тогда, произведя в (2.73) замену $h_t = h$, $\varphi_t = \varphi$ при $t = 0$, приводим его к виду

$$\frac{dv(h_t,\varphi_t)}{dt} = f(h_t,\varphi_t) - f(S(\varphi_t),\varphi_t). \tag{2.74}$$

Из выражения (2.74) видно, почему в формуле (2.65) надо было в качестве постоянной взять $\overline{f(S(\varphi),\varphi)}$.

Действительно, выбрав

$$\widehat{f}(h,\varphi) = v(h,\varphi) - w(\varphi),$$

мы имеем

$$\frac{\partial w(\varphi)}{\partial \varphi}\,\omega = f(S(\varphi),\varphi) + \text{const}.$$

Чтобы $w(\varphi)$ отсюда можно было определить как периодическую функцию углов φ, необходимо положить

$$\text{const} = -\overline{f(S(\varphi),\varphi)}.$$

С другой стороны, из (2.72) имеем

$$v(h_t,\varphi_t) = -\int_0^\infty \{f(h_{t+\tau},\varphi_{t+\tau}) - f(S(\varphi_{t+\tau}),\varphi_{t+\tau})\}\,d\tau = \\ = -\int_t^\infty \{f(h_z,\varphi_z) - f(S(\varphi_z),\varphi_z)\}\,dz. \quad (2.75)$$

Очевидно, это выражение действительно удовлетворяет уравнению (2.74) и, следовательно, уравнению (2.73).

Таким образом, мы доказали, что (2.72) удовлетворяет уравнению (2.65).

Перейдем теперь к установлению для решения (2.69) оценок (2.70). Рассмотрим область

$$D\left\{\|h\| \leqslant \eta\left(1-\frac{\delta}{\rho}\right),\quad |\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho\right\}. \quad (2.76)$$

В этой области, согласно неравенствам (2.66) и (2.67), имеем

$$\|h_t\| \leqslant \eta\left(1-\frac{\delta}{\rho}\right),\quad \|S(\varphi_t)\| \leqslant \eta\left(1-\frac{\delta}{\rho}\right). \quad (2.77)$$

Согласно (2.66) и (2.58), в области D выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial f(h,\varphi)}{\partial h_q}\right| \leqslant \frac{M\rho}{\eta\delta}. \quad (2.78)$$

Поэтому, учитывая (2.41), получаем

$$|f(h_\tau,\varphi_\tau) - f(S(\varphi_\tau),\varphi_\tau)| \leqslant \frac{PM\rho n_0}{n\delta}|h_\tau - S(\varphi_\tau)| \leqslant \frac{2P\rho n_0}{\delta}\mathrm{e}^{-(\alpha/2)t},\quad t \geqslant 0.$$

Следовательно, в области D имеем

$$|v(h,\varphi)| \leqslant 2\frac{PM\rho n_0}{\delta}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\alpha/2)\tau}\,d\tau = \frac{4PM\rho n_0}{\alpha\delta}, \quad (2.79)$$

и поэтому в более узкой области (2.71) получим

$$\left|\frac{\partial v(h,\varphi)}{\partial h_q}\right| \leqslant \frac{4MP^2\rho^2 n_0}{\alpha\eta\delta^2},\quad \left|\frac{\partial v(h,\varphi)}{\partial \varphi_k}\right| \leqslant \frac{2PM\rho n_0}{\alpha\delta^2}. \quad (2.80)$$

С другой стороны, согласно (2.48) и (2.49) в области (2.71) получаем неравенства

$$|w(\varphi)| \leqslant \frac{M}{k}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2n+1}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}(1+\mathrm{e})^n,$$

$$\sum_k \left|\frac{\partial w(\varphi)}{\partial \varphi_k}\right| \leqslant \frac{M}{k}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2n+2}\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2}(1+\mathrm{e})^n,$$

которые совместно с (2.79) и (2.80) дают искомые оценки (2.70).

Примечание. Если H — вещественная матрица, $F(h,\varphi)$, $f(h,\varphi)$ — вещественные функции вещественных аргументов h,φ, то и функция $\hat{f}(h,\varphi)$ вещественна при вещественных h,φ.

Если $F=F(h,\varphi,\mu)$, $f=f(h,\varphi,\mu)$ — аналитические функции μ в некоторой области и все оценки справедливы равномерно в ϑ, то $\hat{f}(h,\varphi,\mu)$ — аналитическая функция μ в ϑ.

§ 3. Построение итерационного процесса с ускоренной сходимостью

Перейдем к определению величины Δ и нахождению преобразования, переводящего второе уравнение в системе (2.1) в уравнение чистого вращения.

При построении этого преобразования существенное значение имеет следующая лемма.

Лемма I. *Пусть в уравнениях*

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= H + F(h,\varphi,\Delta),\\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + f(h,\varphi,\Delta)\end{aligned} \tag{3.1}$$

$h=(h_1,\ldots,h_{n_0})$, $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n_0})$, ω — *вещественные частоты, удовлетворяющие условию* (1.12), *а* $F(h,\varphi,\Delta)$, $f(h,\varphi,\Delta)$ — *аналитические функции комплексных переменных* h,φ,Δ, *достаточно малые при достаточно малых* $h,\operatorname{Im}\varphi,\delta$ *и удовлетворяющие неравенствам*

$$\|F(h,\varphi,\Delta)\| \leqslant N, \quad n_0\left\|\frac{\partial F(h,\varphi,\Delta)}{\partial h_q}\right\| \leqslant L, \quad |f(h,\varphi,\Delta)| \leqslant M \tag{3.2}$$

в области

$$\|h\| \leqslant \eta, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho, \quad |\Delta| < \sigma, \tag{3.3}$$

причем константы N,L,M,η,ρ,σ *связаны следующими соотношениями:*

$$\begin{aligned}&\frac{N}{\alpha} \leqslant \eta\left(1-\frac{\delta}{\rho}\right), \quad L \leqslant \frac{\alpha}{2}, \quad M \leqslant \frac{\sigma}{4\pi},\\ &0<\delta<\frac{\rho}{2}, \quad \delta<1, \quad \frac{MQ(\rho,\delta)}{\alpha\delta^{2n+4}} \leqslant 1,\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$Q(\rho,\delta)=Q\left(\rho,\delta,P,\frac{\alpha}{k}\right)=4Pn_0n\rho\delta^{2n+2}+2\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2}\frac{\alpha}{k}(1+\mathrm{e})^n\delta^2+$$

$$+\left(\frac{n\delta^2}{1-1/(2n)}+\frac{4P^2\rho^2n_0^2n}{1-1/(2n)}\right)\left[4Pn_0\rho\delta^{2n}+\frac{\alpha}{k}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}(1+\mathrm{e})^n\right]. \quad (3.5)$$

Тогда имеется аналитическое преобразование

$$\varphi=\theta+u(h,\theta,\Delta^{(1)}),\quad \Delta=\Delta(\Delta^{(1)}), \quad (3.6)$$

приводящее систему уравнений (3.1) *к виду*

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt}&=Hh+F_1(h,\theta,\Delta^{(1)}),\\ \frac{d\theta}{dt}&=\omega+\Delta^{(1)}+f_1(h,\theta,\Delta^{(1)}),\end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned}F_1(h,\theta,\Delta^{(1)})&=F(h,\theta+u(h,\theta,\Delta^{(1)}),\Delta(\Delta^{(1)})),\\ f_1(h,\theta,\Delta^{(1)})&=f(h,\theta+u(h,\theta,\Delta^{(1)}),\Delta(\Delta^{(1)})),\end{aligned} \quad (3.8)$$

при этом $\Delta(\Delta^{(1)}), f_1(h,\theta,\Delta^{(1)})$ *и* $F_1(h,\theta,\Delta^{(1)})$ *— аналитические функции аргументов* h, θ, $\Delta^{(1)}$ *и в области*

$$\|h\|\leqslant\eta\left(1-\frac{2\delta}{\rho}\right),\quad |\operatorname{Im}\theta|\leqslant\rho\left(1-\frac{2\delta}{\rho}\right),\quad |\Delta^{(1)}|\leqslant M \quad (3.9)$$

справедливы неравенства

$$|\Delta(\Delta^{(1)})-\Delta^{(1)}|\leqslant M,\quad \sum_q\left|\frac{\partial\Delta(\Delta^{(1)})}{\partial\Delta_q^{(1)}}\right|\leqslant 1+\frac{4Mn}{\sigma}\leqslant 2, \quad (3.10)$$

$$|u(h,\theta,\Delta^{(1)})|\leqslant\frac{MA(\rho,\delta)}{\alpha\delta^{2n+1}}\leqslant\frac{\delta}{n},\quad \sum_q\left|\frac{\partial u(h,\theta,\Delta^{(1)})}{\partial\theta_q}\right|\leqslant\frac{MQ(\rho,\delta)}{2\alpha\delta^{2n+4}}\leqslant\frac{1}{2},$$

$$\sum\left|\frac{\partial u(h,\theta,\Delta^{(1)})}{\partial\Delta_q^{(1)}}\right|\leqslant\frac{M2n(1-1/(2n))^{-1}A(\rho,\delta)}{\alpha\delta^{2n+1}\sigma},$$

$$\left|\frac{\partial u(h,\theta,\Delta^{(1)})}{\partial h_q}\right|\leqslant M\frac{4P^2\rho^2n_0}{\alpha\eta\delta^2}, \quad (3.11)$$

$$\|F_1(h,\theta,\Delta^{(1)})\|\leqslant N,\quad n_0\left\|\frac{\partial F_1(h,\theta,\Delta^{(1)})}{\partial h_q}\right\|\leqslant L_1,\quad |f_1(h,\theta,\Delta^{(1)})|\leqslant M_1,$$

где

$$\begin{aligned}A(\rho,\delta)&=A\left(\rho,\delta,P,\frac{\alpha}{k}\right)=4P_0\rho\delta^{2n}+\frac{\alpha}{k}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}(1+\mathrm{e})^n,\\ L_1&=L+\frac{2MP^2n_0^2n\rho^2}{\delta^3(1-1/(2n))},\quad M_1=\frac{M^2Q(\rho,\delta)}{\delta^{2n+4}\alpha}.\end{aligned} \quad (3.12)$$

Доказательство. Вначале приведем систему (3.1) к виду, в котором новая функция f будет величиной второго порядка малости. В соответствии с замечанием на с. 246 выберем преобразование в виде

$$\varphi = \theta + \hat{f}(h, \theta, \Delta). \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в уравнение (3.1), имеем

$$\left(1 + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial h}\frac{dh}{dt} = \omega + \Delta + f(h, \theta + \hat{f}, \Delta). \tag{3.14}$$

Вычитая из (3.14) систему

$$\frac{\partial u(h, \varphi, \Delta)}{\partial h}(Hh + F(h, \varphi, \Delta)) + \frac{\partial u(h, \varphi, \Delta)}{\partial \varphi}\omega = f(h, \varphi, \Delta) - \overline{f(S(\varphi, \Delta), \varphi, \Delta)},$$

получаем

$$\left(1 + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dt} - \omega\right) + \frac{\partial \hat{f}}{\partial h}\left(\frac{dh}{dt} - Hh - F(h, \theta, \Delta)\right) =$$

$$= \Delta + f(h, \theta + \hat{f}, \Delta) + \overline{f(S(\varphi, \Delta), \varphi, \Delta)} - f(h, \theta, \Delta) =$$

$$= \Delta_1 + f(h, \theta + \hat{f}, \Delta) - f(h, \theta, \Delta). \tag{3.15}$$

Подставляя в уравнение (3.15) вместо производной dh/dt ее значение

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F(h, \varphi, \Delta),$$

получаем

$$\left(1 + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dt} - \omega\right) =$$

$$= \Delta_1 + f(h, \theta + \hat{f}, \Delta) - f(h, \theta, \Delta) - \frac{\partial \hat{f}}{\partial h}[F(h, \theta + \hat{f}, \Delta) - F(h, \theta, \Delta)]. \tag{3.16}$$

Введем теперь новую величину $\Delta^{(1)}$ согласно формуле

$$\Delta^{(1)} = \Delta + \overline{f(S(\varphi, \Delta), \varphi, \Delta)}. \tag{3.17}$$

Тогда, разрешая систему уравнений (3.18) относительно $d\theta/dt$ и учитывая при этом систему для dh/dt, имеем окончательно

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \theta + \hat{f}, \Delta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega + \Delta^{(1)} + E(h, \theta, \Delta), \end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$E(h, \theta, \Delta) = \left\{\left(1 + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\right)^{-1} - 1\right\}\Delta^{(1)} + \left(1 + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left\{[f(h, \theta + \hat{f}, \Delta) - f(h, \theta, \Delta)] - \frac{\partial \hat{f}}{\partial h}[F(h, \theta + \hat{f}, \Delta) - F(h, \theta, \Delta)]\right\}. \tag{3.19}$$

Прежде чем приступить к получению оценок, произведем формальный анализ порядков малости величин, входящих в правую часть выражения (3.19). Считая $\widehat{f}$ и Δ величинами первого порядка малости, видим, что f также будет величиной первого порядка малости. Порядок малости $\Delta^{(1)}$ тоже будет не ниже первого, и тогда из рассмотрения выражения (3.19) видим, что $E(h, \theta + \widehat{f}, \Delta)$ будет величиной второго порядка малости.

Переходя к оценкам, рассмотрим прежде всего зависимость Δ от $\Delta^{(1)}$, определяемую выражением (3.17).

Обозначим

$$\overline{f(S(\varphi, \Delta), \varphi, \Delta)} = a(\Delta).$$

Согласно условию леммы I, функция $a(\Delta)$ является аналитической функцией Δ и в области $|\Delta| \leqslant \sigma$ удовлетворяет неравенству

$$|a(\Delta)| \leqslant M.$$

Поэтому, очевидно, справедливы неравенства

$$\sum_q \left| \frac{\partial a(\Delta)}{\partial \Delta_q} \right| \leqslant \frac{2Mn}{\sigma} \leqslant \frac{1}{2} \tag{3.20}$$

в области

$$|\Delta| \leqslant \frac{\sigma}{2},$$

и, следовательно, функция $a(\Delta)$ будет удовлетворять условию Липшица

$$|a(\Delta^{(1)}) - a(\Delta'')| \leqslant \frac{1}{2} |\Delta' - \Delta''|; \quad |\Delta'|, |\Delta''| \leqslant \frac{\sigma}{2}.$$

Отсюда следует, что уравнение

$$\Delta + a(\Delta) = \Delta^{(1)} \tag{3.21}$$

разрешимо:

$$\Delta = \Delta(\Delta^{(1)})$$

и функция $\Delta(\Delta^{(1)})$ является аналитической функцией $\Delta^{(1)}$ в области

$$|\Delta^{(1)}| \leqslant M,$$

причем в этой области

$$|\Delta(\Delta^{(1)})| \leqslant 2M \leqslant \frac{\sigma}{2n} < \frac{\sigma}{2}.$$

Выведем еще некоторые оценки для Δ. Дифференцируя уравнения (3.21), имеем

$$\frac{\partial \Delta_k}{\partial \Delta_q^{(1)}} + \sum_r \frac{\partial a_k(\Delta)}{\partial \Delta_r} \frac{\partial \Delta_r}{\partial \Delta_q^{(1)}} = \delta_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q, \\ 0, & k \neq q, \end{cases}$$

откуда, принимая во внимание (3.20), находим

$$\left| \frac{\partial \Delta_k}{\partial \Delta_q^{(1)}} \right| \leqslant \delta_{kq} + \frac{2M}{\sigma} \sum_r \left| \frac{\partial \Delta_r}{\partial \Delta_q^{(1)}} \right| \tag{3.22}$$

или, суммируя по r,

$$\sum_r \left|\frac{\partial \Delta_r}{\partial \Delta_q^{(1)}}\right| \leqslant 1 + \frac{2Mn}{\sigma} \sum_r \left|\frac{\partial \Delta_r}{\partial \Delta_q^{(1)}}\right|$$

и, следовательно,

$$\sum_r \left|\frac{\partial \Delta}{\partial \Delta_q^{(1)}}\right| \leqslant \frac{1}{1 - 2Mn/\sigma} \leqslant 2.$$

Поэтому неравенство (3.22) можем записать в виде

$$\left|\frac{\partial \Delta_k}{\partial \Delta_q^{(1)}}\right| \leqslant \delta_{kq} + \frac{4M}{\sigma}. \tag{3.23}$$

Суммируя неравенство (3.23) по q, находим

$$\sum_q \left|\frac{\partial \Delta_k}{\partial \Delta_q^{(1)}}\right| \leqslant 1 + \frac{4M}{\sigma} n \leqslant 2.$$

Очевидно также, что

$$|\Delta(\Delta^{(1)}) - \Delta^{(1)}| \leqslant M.$$

Остановимся теперь на оценке функции $\widehat{f}$, входящей в формулу замены переменных (3.13).

В силу оценок теоремы II имеем следующие неравенства:

$$|\widehat{f}(h, \theta, \Delta)| \leqslant \frac{MA(\rho, \delta)}{\alpha \delta^{2n+1}},$$

$$\sum_q \left|\frac{\partial \widehat{f}(h, \theta, \Delta)}{\partial \theta_q}\right| \leqslant \frac{M}{\alpha \delta^{2n+2}} \left\{ 2Pn_0 n\rho \delta^{2n} + \left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2} \frac{\alpha}{k} (1 + \mathrm{e})^n \right\} <$$

$$< \frac{MQ(\rho, \delta)}{2\alpha \delta^{2n+4}} \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\left|\frac{\partial \widehat{f}(h, \theta, \Delta)}{\partial h_q}\right| \leqslant \frac{M}{\alpha \delta^2} \frac{4P^2 \rho^2 n_0}{\eta}$$

в области

$$\|h\| \leqslant \eta \left(1 - \frac{2\delta}{\rho}\right), \quad |\operatorname{Im} \theta| \leqslant \rho \left(1 - \frac{2\delta}{\rho}\right), \quad |\Delta| \leqslant \sigma.$$

Заметим также, что

$$\frac{MA(\rho, \delta)}{\alpha \delta^{2n+1}} = \frac{M}{\alpha} \frac{4Pn_0 \rho}{\delta} + \frac{\alpha}{k} \frac{((n+1)/\mathrm{e})^{n+1} (1 + \mathrm{e})^n}{\delta^{2n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \frac{\delta}{n} \frac{M}{\alpha} \left(\frac{2Pn_0 n\rho}{\delta^2} + \left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2} \frac{\alpha}{k} (1 + \mathrm{e})^n \right) \leqslant 2 \frac{\delta}{n} \frac{M}{2\alpha} \frac{Q(\rho, \delta)}{\delta^{2n+4}} \leqslant \frac{\delta}{n}.$$

Далее, очевидно, имеем

$$\left|\frac{\partial \widehat{f}(h, \theta, \Delta)}{\partial \Delta_k}\right| \leqslant \frac{(1 - 1/(2n))^{-1} MA(\rho, \delta)}{\alpha \delta^{2n+1} \sigma}$$

для $|\Delta| \leqslant \sigma/2n$.

Поэтому, положив $\widehat{f}(h,\theta,\Delta(\Delta^{(1)}))=u(h,\theta,\Delta^{(1)})$, убеждаемся в выполнении неравенств (3.10) в области (3.9). Полагая $F_1(h,\theta,\Delta^{(1)})=F(h,\theta+\widehat{f},\Delta)$, видим, что в области (3.9) имеет место неравенство $\|F_1\|\leqslant N$. Далее имеем

$$n_0\left\|\frac{\partial F_1}{\partial h_k}\right\|=n_0\left\|F'_{h_k}(h,\theta+\widehat{f},\Delta)+\sum_q F'_{\varphi_q}(h,\theta+\widehat{f},\Delta)\frac{\partial\widehat{f}_q}{\partial h_k}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant L+n_0\frac{Nn}{2(1-1/(2n))\delta}\frac{M}{\alpha\delta^2}\frac{4P^2\rho^2n_0}{\eta}\leqslant L+\frac{2MP^2n_0n\rho^2}{\delta^3(1-1/(2n))}.$$

Очевидно, можем положить

$$L_1=L+\frac{2MP^2n_0^2n\rho^2}{\delta^3(1-1/(2n))}.$$

Остается найти M_1, т. е. получить оценку для $E(h,\theta,\Delta)$.

Заметим, что при выполнении условия

$$\sum_q|a_{kq}|\leqslant d\leqslant\frac{1}{2},$$

рассматривая систему

$$y_k+\sum a_{kq}y_q=z_k,$$

или в сокращенной записи

$$y=(1+a)^{-1}z,$$

получаем следующую оценку:

$$|(1+a)^{-1}-1|\leqslant\frac{d}{1-d}\leqslant 2d. \tag{3.24}$$

Далее, из неравенства

$$\sum_q\left|\frac{\partial\widehat{f}}{\partial\theta_q}\right|\leqslant\frac{M}{\alpha\delta^{2n+2}}\left\{2Pn_0n\rho\delta^{2n}+\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2}\frac{\alpha}{k}(1+\mathrm{e})^n\right\}\leqslant\frac{1}{2},$$

принимая во внимание (3.24), находим

$$\left|\left(1+\frac{\partial\widehat{f}}{\partial\theta}\right)^{-1}\right|\leqslant 2,$$

а также

$$\left|\left(1+\frac{\partial\widehat{f}}{\partial\theta}\right)^{-1}-1\right|\leqslant\frac{2M}{\alpha\delta^{2n+2}}\left\{2Pn_0n\delta^{2n}+\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2}\frac{\alpha}{k}(1+\mathrm{e})^n\right\}.$$

Таким образом,

$$|E(h,\theta,\Delta)|\leqslant\frac{2M^2}{\alpha\delta^{2n+2}}\left\{2Pn_0n\rho\delta^{2n}+\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2}\frac{\alpha}{k}(1+\mathrm{e})^n\right\}+$$

$$+2|f(h,\theta+\widehat{f},\Delta)-f(h,\theta,\Delta)|+2n_0\frac{M}{\alpha\delta^2}\frac{4P^2\rho^2n_0}{\eta}|F(h,\theta+\widehat{f},\Delta)-F(h,\theta,\Delta)|. \tag{3.25}$$

Однако имеет место неравенство

$$|f(h,\theta+\hat{f},\Delta)-f(h,\theta,\Delta)|\leqslant\frac{Mn}{2(1-1/(2n))\delta}|\hat{f}|\leqslant\frac{M^2n}{2(1-1/(2n))\alpha}\frac{A(\rho\,,\delta)}{\delta^{2n+2}}, \tag{3.26}$$

так как

$$|\operatorname{Im}(\theta+\hat{f})|\leqslant\rho-2\delta+\frac{\delta}{n}=\rho-2\left(1-\frac{1}{2n}\right)\delta,$$

$$|F(h,\theta+\hat{f},\Delta)-F(h,\theta,\Delta)|\leqslant \tag{3.27}$$

$$\leqslant\frac{Nn}{2(1-1/(2n))\delta}|\hat{f}|\leqslant\frac{Nn}{2(1-1/(2n))}\frac{MA(\rho,\delta)}{\delta^{2n+2}}.$$

Подставляя (3.26) и (3.27) в правую часть (3.25), находим

$$|E(h,\theta,\Delta)|\leqslant\frac{M^2}{\alpha\delta^{2n+4}}\left\{4Pn_0n\rho\delta^{2n+2}+2\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2}\frac{\alpha}{k}(1+\mathrm{e})^n\delta^2+\right.$$

$$\left.+\frac{n}{1-1/(2n)}A(\rho,\delta)\delta^2+\frac{n}{1-1/(2n)}\frac{4P^2\rho^2n_0^2N}{\alpha\eta}A(\rho,\delta)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M^2}{\alpha\delta^{2n+4}}\left\{4Pn_0n\rho\delta^{2n+2}+2\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2}\frac{\alpha}{k}(1+\mathrm{e})^n\delta^2+\right.$$

$$+\left[4Pn_0\rho\delta^{2n}+\frac{\alpha}{k}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}(1+\mathrm{e})^n\right]\times$$

$$\left.\times\left(\frac{n\delta^2}{1-1/(2n)}+\frac{4P^2n_0^2n\rho^2}{1-1/(2n)}\right)\right\}=\frac{M^2}{\alpha\delta^{2n+4}}Q(\rho,\delta),$$

$$\frac{A(\rho,\delta)}{Q(\rho,\delta)}\leqslant\frac{1-1/(2n)}{n\delta^2}.$$

Полагая

$$f_1(h,\theta,\Delta^{(1)})=E(h,\theta,\Delta(\Delta^{(1)})),$$

убеждаемся в получении всех необходимых оценок, что и завершает доказательство леммы.

Примечание. Если H, $F(h,\varphi,\Delta)$, $f(h,\varphi,\Delta)$ — вещественные функции вещественных аргументов h,φ,Δ, то $u(h,\varphi,\Delta)$, $F_1(h,\varphi,\Delta)$, $f_1(h,\varphi,\Delta)$ также будут вещественными функциями вещественных аргументов h,φ,Δ.

Если $F(h,\varphi,\Delta)$, $f(h,\varphi,\Delta)$ — аналитические функции μ в области ϑ и все оценки леммы имеют место равномерно везде в ϑ, то и $u(h,\varphi,\Delta)$, $F_1(h,\varphi,\Delta)$, $f_1(h,\varphi,\Delta)$ будут аналитическими функциями μ в ϑ.

Применим доказанную лемму для построения такого итерационного процесса с ускоренной сходимостью для системы (3.1)

$$\frac{dh}{dt}=Hh+F(h,\varphi,\Delta),$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega+\Delta+f(h,\varphi,\Delta),$$

который последовательно повышал бы малость f во втором уравнении системы (3.1).

Будем полагать последовательно

$$\varphi = \varphi^{(1)} + u^{(1)}(h, \varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}),$$
$$\Delta = \Delta(\Delta^{(1)}),$$

где $u^{(1)}$ определено, как указано в лемме I.

Функции $\varphi^{(1)}$, $\Delta^{(1)}$ будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F_1(h, \varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}),$$
$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dt} = \omega + \Delta^{(1)} + f_1(h, \varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}).$$

К ним опять можно применить соответствующее этой новой системе преобразование из леммы. В результате получим

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} + u^{(2)}(h, \varphi^{(2)}, \Delta^{(2)}),$$
$$\Delta^{(1)} = \Delta^{(1)}(\Delta^{(2)}),$$

где $\varphi^{(2)}$, $\Delta^{(2)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F_2(h, \varphi^{(2)}, \Delta^{(2)}),$$
$$\frac{d\varphi^{(2)}}{dt} = \omega + \Delta^{(2)} + f_2(h, \varphi^{(2)}, \Delta^{(2)}).$$

Продолжая указанный процесс, на s-м шаге получим

$$\varphi^{(s-1)} = \varphi^{(s)} + u^{(s)}(h, \varphi^{(s)}, \Delta^{(s)}),$$
$$\Delta^{(s-1)} = \Delta^{(s-1)}(\Delta^{(s)}),$$

где $\varphi^{(s)}$, $\Delta^{(s)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F_s(h, \varphi^{(s)}, \Delta^{(s)}),$$
$$\frac{d\varphi^{(s)}}{dt} = \omega + \Delta^{(s)} + f_s(h, \varphi^{(s)}, \Delta^{(s)}).$$

Очевидно, нам необходимо обеспечить на каждом этапе итерационного процесса условия применимости леммы.

Для этого мы введем следующие ограничения.

Положим, что в системе (3.1) функции $F(h, \varphi, \Delta)$, $f(h, \varphi, \Delta)$ являются аналитическими функциями комплексных переменных h, φ, Δ и удовлетворяют условиям (3.2) в области (3.3). Кроме того, ω удовлетворяет неравенству (1.12). Полагаем также, что выполняются следующие неравенства:

$$N \leqslant \frac{\alpha n}{2}, \quad L \leqslant \frac{\alpha}{4}, \quad M\frac{Q(\rho, \gamma)}{\alpha}\left(\frac{1}{\gamma^{2n+4}}\right)^2 \leqslant r_0 < 1,$$

где

$$\gamma = \frac{P}{\rho+4}, \quad M \leqslant \frac{\sigma}{4n}, \quad \gamma^{2n+4} r_0 \leqslant \frac{1}{4n}, \quad \frac{\gamma^{2n+4}}{2} \sum_{s=0}^{\infty} r_0^{2^s} < \ln \frac{3}{2},$$
$$\frac{(1-1/(2n))^{-1} P^2 n_0^2 n \rho^2}{Q(\rho,\gamma)} \sum_{s=0}^{\infty} r_0^{2^s} \gamma^{(s+1)(2n+1)} \gamma^{(2n+4)} \leqslant \frac{1}{8}. \tag{3.28}$$

На s-м шаге будем рассматривать область

$$|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_s = \rho - 2(\delta + \delta_1 + \ldots + \delta_{s-1}), \quad \|h\| \leqslant \eta_s = \frac{\eta}{\rho}\rho_s, \quad |\Delta^{(s)}| \leqslant M_{s-1}.$$

Чтобы при сужении области $\delta \to \delta_1 \to \delta_2 \to \ldots \to \delta_s$ величины ρ_s были ограничены снизу, мы полагаем

$$\delta = \gamma, \quad \delta_1 = \gamma^2, \ldots, \delta_s = \gamma^s, \ldots$$

и подбираем γ из геометрической прогрессии

$$2(\delta + \delta_1 + \ldots) = 2\gamma(1 + \gamma + \gamma^2 + \ldots) = \frac{2}{1-\gamma} = \frac{\rho}{2}.$$

В этом случае ρ_s при любых s будут больше $\rho/2$.

Покажем теперь, что в области (3.28) будут иметь место неравенства

$$\|F_s(h,\varphi,\Delta^{(s)})\| \leqslant N_s, \quad n_0 \left\| \frac{\partial F_s(h,\varphi,\Delta^{(s)})}{\partial h_q} \right\| \leqslant L_s,$$
$$\|f_s(h,\varphi,\Delta^{(s)})\| \leqslant M_s, \quad |\Delta^{(\nu)}(\Delta^{(\nu+1)}(\ldots\Delta^{(s)}\ldots)\ldots)| \leqslant M_{\nu-1},$$

где

$$M_s = \frac{\alpha}{Q(\rho,\gamma)} r_0^{2^s} \gamma^{(s+2)(2n+4)}, \quad N_s = \frac{\alpha}{2}\eta,$$
$$L_s = L + \frac{2P^2 n_0^2 n \rho^2 \alpha}{(1-1/(2n))Q(\rho,\gamma)} \sum_{p=0}^{s-1} r_0^{2^p} \gamma^{(p+1)(2n+1)+(2n+4)} \leqslant \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2}.$$

Непосредственно используя лемму, мы вначале установим справедливость оценок (3.28) для $s = 1$, а затем воспользуемся методом индукции.

Допустив, что все оценки справедливы для $s \leqslant s_0$, докажем их справедливость для $s = s_0 + 1$.

Прежде всего, проверим условие применимости доказанной леммы I для перехода от $s = s_0$ к $s = s_0 + 1$.

Заменяя в неравенствах (3.3) и (3.4) ρ, δ, σ соответственно на ρ_s, $\delta_s = \gamma^{s+1}$, M_{s-1}, получаем следующие неравенства:

$$\frac{N_{s_0}}{\alpha} \leqslant \eta_{s_0}\left(1 - \frac{\delta_{s_0}}{\rho_{s_0}}\right), \quad L_{s_0} \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

Очевидно, также имеем

$$\frac{M_{s_0}}{M_{s_0-1}} = r^{2^{s_0-1}} \gamma^{(2n+4)} \leqslant \gamma^{(2n+4)} r_0 \leqslant \frac{1}{4n}$$

и

$$\frac{M_{s_0}Q(\rho_{s_0},\delta_{s_0})}{\alpha\delta_{s_0}^{2n+4}}=\frac{M_{s_0}Q(\rho_{s_0},\gamma^{s_0+1})}{\alpha\gamma^{(2n+4)(s_0+1)}}\leqslant\frac{M_{s_0}Q(\rho,\gamma)}{\alpha\gamma^{(2n+4)(s_0+1)}}=$$

$$=r_0^{2^{s_0}}\gamma^{(2n+4)}\leqslant r_0^2\gamma^{(2n+4)}<\frac{1}{4n}<1.$$

Итак, можем воспользоваться оценками доказанной выше леммы для перехода от s_0 к s_0+1.

Далее, в области

$$D_s\left\{\|h\|\leqslant\eta\left(1-\frac{\delta_s}{\rho_s}\right),\quad|\operatorname{Im}\varphi|\leqslant\rho_s\right\}$$

имеем следующее неравенство:

$$|f_{s_0+1}(h,\varphi,\Delta^{(s_0+1)})|\leqslant\frac{M_{s_0}^2Q(\rho_{s_0},\delta_{s_0})}{\alpha\delta_{s_0}^{2n+4}}\leqslant\frac{M_{s_0}^2Q(\rho,\gamma)}{\alpha\gamma^{(2n+4)(s_0+1)}}=$$

$$=\frac{\alpha}{Q(\rho,\gamma)}\frac{r_0^{2^{(s_0+1)}}\gamma^{2(s_0+1)(2n+4)}}{\gamma^{(2n+4)(s_0+1)}}.$$

Поэтому можем положить

$$M_{s_0+1}=\frac{\alpha}{Q(\rho,\gamma)}r_0^{2^{s_0+1}}\gamma^{(s_0+3)(2n+4)}.$$

Кроме того, имеем

$$\frac{M_{s_0+1}+M_{s_0}}{M_{s_0-1}}=\frac{M_{s_0+1}}{M_{s_0}}\frac{M_{s_0}}{M_{s_0-1}}+\frac{M_{s_0}}{M_{s_0-1}}\leqslant\left(\frac{1}{4n}\right)^2+\frac{1}{4n}<\frac{1}{2n}$$

и

$$M_{s_0+1}+M_{s_0}<\frac{1}{2n}M_{s_0-1}<M_{s_0-1}.$$

Поэтому если

$$|\Delta^{(s_0+1)}|<M_{s_0},$$

то

$$|\Delta^{(s_0)}(\Delta^{(s_0+1)})|\leqslant\frac{1}{2n}M_{s_0-1}<M_{s_0-1}$$

и, следовательно,

$$|\Delta^{(\nu)}(\Delta^{(\nu+1)}\dots(\Delta^{(s_0+1)})\dots)|\leqslant M_{\nu-1}$$

(формально мы положили $M_{-1}\equiv\sigma$).

Остается проверить справедливость полученных формул для N_{s_0+1} и L_{s_0+1}.

В силу леммы в области D_{s_0+1} имеем

$$|u^{(s_0+1)}(h,\varphi,\Delta^{(s_0+1)})|\leqslant\frac{\delta_{s_0+1}}{n}\leqslant\frac{\gamma^{(s_0+2)}}{n}.$$

Однако

$$F_{s+1}(h,\varphi,\Delta^{(s_0+1)})=F_{s_0}(h,\varphi+u^{(s_0+1)},\Delta^{(s_0)}(\Delta^{(s_0+1)})).$$

Кроме того, в области D_{s_0+1}

$$|\operatorname{Im}(\varphi + u^{(s_0+1)})| \leqslant \rho_{s_0+1} + \frac{\gamma^{(s_0+2)}}{n} = \rho_{s_0} - 2\gamma^{(s_0+1)} + \frac{\gamma^{(s_0+2)}}{n} < \rho_{s_0}.$$

Поэтому

$$\|F_{s_0+1}(h, \varphi, \Delta^{(s_0+1)})\| \leqslant \frac{\alpha}{2}\eta.$$

Далее имеем

$$h_0 \left\| \frac{\partial F_{s_0+1}(h, \varphi, \Delta^{(s_0+1)})}{\partial h_q} \right\| \leqslant L_s + \frac{2M_{s_0}P^2 n_0^2 n\rho^2}{\gamma^{3(s_0+1)}(1 - 1/(2n))} =$$

$$= L_{s_0} + \frac{2\alpha}{Q(\rho\ ,\gamma)} P^2 n_0^2 n\rho^2 \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \gamma^{(s_0+2)(2n+4)-3(s_0+1)} r_0^{2^{s_0}}.$$

Поэтому можем положить

$$L_{s_0+1} = L_{s_0} + \frac{2\alpha}{Q(\rho, \gamma)} P^2 n_0^2 n\rho^2 \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-1} \gamma^{(s_0+1)(2n+1)+(2n+4)} r_0^{2^{s_0}} =$$

$$= L + \frac{2P^2 n_0^2 n\rho^2 \alpha}{Q(\rho, \gamma)(1 - 1/(2n))} \sum_{p=0}^{s_0} r_0^{2^p} \gamma^{(p+1)(2n+1)+(2n+4)}.$$

Таким образом, доказана применимость леммы для перехода от $s = s_0$ к $s = s_0 + 1$.

Мы видели, что на каждом шаге итерационного процесса выполнены условия применимости леммы, и потому можем пользоваться всеми полученными в ней оценками. С помощью этих оценок перейдем теперь к доказательству сходимости итерационного процесса.

Выразим φ и Δ через $\varphi^{(m)}$, $\Delta^{(m)}$:

$$\varphi = \varphi^{(m)} + \Phi^{(m)}(h, \varphi^{(m)}, \Delta^{(m)}),$$
$$\Delta = D^{(m)}(\Delta^{(m)}).$$

Имеем тождества

$$D^{(m)}(\Delta^{(m)}) = D^{(m+1)}(\Delta^{(m+1)}),$$
$$\varphi^{(m)} + \Phi^{(m)}(h, \varphi^{(m)}, \Delta^{(m)}) = \varphi^{(m+1)} + \Phi^{(m+1)}(h, \varphi^{(m+1)}, \Delta^{(m+1)}),$$

откуда находим

$$D^{(m+1)}(\Delta^{(m+1)}) = D^{(m)}(\Delta^{(m)}(\Delta^{(m+1)})),$$
$$\Phi^{(m+1)}(h, \theta, \Delta^{(m+1)}) = u^{(m+1)}(h, \theta, \Delta^{(m+1)}) + \tag{3.29}$$
$$+ \Phi^{(m)}(h, \theta + u^{(m+1)}(h, \theta, \Delta^{(m+1)}), \Delta^{(m)}(\Delta^{(m+1)})).$$

Произведем оценки для этих функций и их производных.

Имеем для $|\Delta^{(m+1)}| < M_m$:

$$\sum_q \left|\frac{\partial\Delta}{\partial\Delta_q^{(1)}}\right| \leqslant 1 + \frac{4Mn}{\sigma} \leqslant 2,$$
$$\sum_q \left|\frac{\partial\Delta_q^{(1)}}{\partial\Delta_q^{(2)}}\right| \leqslant 1 + \frac{4M_1 n}{M},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_q \left|\frac{\partial\Delta_q^{(s-1)}}{\partial\Delta_q^{(s)}}\right| \leqslant 1 + \frac{4M_s n}{M_{s-1}},$$

откуда находим

$$\sum_q \left|\frac{\partial\Delta}{\partial\Delta_q^{(s)}}\right| \leqslant \left(1 + \frac{4Mn}{\sigma}\right)\left(1 + \frac{4M_1 n}{M}\right)\ldots\left(1 + \frac{4M_s n}{M_{s-1}}\right).$$

Но

$$\frac{M_p}{M_{p-1}} \leqslant \gamma^{(2n+4)} r_0^{2p-1}, \quad \gamma^{(2n+4)} r_0 \leqslant \frac{1}{2n},$$

поэтому

$$\left(1 + \frac{4Mn}{\sigma}\right)\left(1 + \frac{4M_1 n}{M}\right)\ldots\left(1 + \frac{4M_s n}{M_{s-1}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 4(1 + 2r_0)(1 + 2r_0^3)\ldots = 4\prod_{1\leqslant p<\infty}\left(1 + 2r_0^{2p-1}\right) = C(r_0).$$

Следовательно, при всех m имеем

$$\sum_q \left|\frac{\partial D^{(m)}(\Delta^{(m)})}{\partial\Delta_q^{(m)}}\right| \leqslant C(r_0).$$

Очевидно, можем написать

$$|D^{(m+1)}(0) - D^{(m)}(0)| = |D^{(m)}(\Delta^{(m)}(0)) - D^{(m)}(0)| \leqslant$$
$$\leqslant C(r_0)|\Delta^{(m)}(0)| \leqslant C(r_0) M_m \leqslant C(r_0)\left(\frac{1}{4n}\right)^{m+1}\sigma$$

и, таким образом, получаем критерий равномерной сходимости (при $k > 0$)

$$|D^{(m+k)}(0) - D^{(m)}(0)| \leqslant C(r_0)\sigma \sum_{p=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n}\right)^{m+1} = \frac{C(r_0)\sigma}{1 - 1/(4n)}\left(\frac{1}{4n}\right)^{m+1}.$$

Заметим при этом, что полученное неравенство грубо мажорировано.

Далее, пусть

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\Phi^{(m)}(h, \varphi, \Delta^{(m)})}{\partial\varphi_k}\right| \leqslant Z_m$$

в области $\|h\| \leqslant \eta_m$, $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_m$, $|\Delta^{(m)}| \leqslant M_{m-1}$. Тогда из (3.29) имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\Phi^{(m+1)}(h,\theta,\Delta^{(m+1)})}{\partial\theta_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial u^{(m+1)}(h,\theta,\Delta^{(m+1)})}{\partial\theta_k}\right| + Z_m\left\{1+\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial u^{(m+1)}(h,\theta,\Delta^{(m+1)})}{\partial\theta_k}\right|\right\}$$

и, принимая во внимание оценки леммы, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial u^{(m+1)}}{\partial\theta_k}\right| \leqslant \frac{M_m Q(\rho_m,\delta_m)}{2\alpha\delta_m^{2n+4}} \leqslant \frac{M_m Q(\rho,\gamma)}{2\alpha\gamma^{(2n+4)(m+1)}} = \frac{1}{2}r_0^{2^m}\gamma^{(2n+4)}.$$

Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$Z_{m+1} = \frac{1}{2}r_0^{2^m}\gamma^{(2m+4)} + Z_m\left(1+\frac{1}{2}r_0^{2^m}\gamma^{(2n+4)}\right),$$

$$(1+Z_{m+1}) = \left(1+\frac{1}{2}r_0^{2^m}\gamma^{(2n+4)}\right)(1+Z_m),$$

$$Z_m = \prod_{0\leqslant p\leqslant m-1}\left(1+\frac{1}{2}r_0^{2^p}\gamma^{(2n+4)}\right) - 1 < \exp\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2}r_0^{2^p}\gamma^{(2n+4)} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\Phi^{(m)}(h,\varphi,\Delta^{(m)})}{\partial\varphi_k}\right| \leqslant \frac{1}{2} \tag{3.30}$$

в области

$$\|h\| \leqslant \eta_m, \quad |\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_m, \quad |\Delta^{(m)}| \leqslant M_{m-1}.$$

Оценим в этой же области следующую сумму:

$$\sum_{q}\left|\frac{\partial\Phi^{(m)}(h,\varphi,\Delta^{(m)})}{\partial\Delta_q^{(m)}}\right| \leqslant Y_m.$$

Согласно оценке (3.10), имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial u^{(m+1)}}{\partial\Delta^{(m+1)}}\right| \leqslant \frac{M_m\Delta 2n(1-1/(2n))^{-1}A(\rho,\gamma)}{\alpha M_{m-1}\gamma^{(2n+1)(m+1)}} =$$

$$= r_0^{2^{m-1}}\gamma^{(2n+4)-(2n+1)(m+1)}\frac{2n(1-1/(2n))A(\rho,\delta)}{\alpha}, \quad m \geqslant 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\Delta^{(1)}}\right| \leqslant \frac{M\Delta 2n(1-1/(2n))^{-1}A(\rho,\gamma)}{\alpha\sigma\gamma^{(2n+1)}}.$$

Поэтому

$$Y_{m+1} = \frac{3}{2}S_m + Y_m(1+\nu_m), \quad Y_0 \equiv 0, \tag{3.31}$$

где обозначено

$$\nu_0 = 1 + \frac{4Mn}{\sigma}, \ldots, \nu_p = 1 + \frac{4M_p}{M_{p-1}}n, \quad p \geqslant 1,$$

$$S_0 = \frac{M}{\alpha\sigma}\frac{2n(1-1/(2n))^{-1}A(\rho,\gamma)}{\gamma^{(2n+1)}},$$

$$S_m = r_0^{2^{m-1}}\gamma^{3-(2n+1)m}.$$

Положим

$$Y_m = X_m \prod_{0\leqslant p\leqslant m-1}(1+\nu_p).$$

Тогда из (3.31) получим

$$X_{m+1} = X_m + \frac{3}{2(1+\nu_p)}S_m.$$

Поэтому

$$Y_m < \left\{\prod_{0\leqslant p<\infty}(1+\nu_p)\right\}\frac{3}{2}\sum_{p=0}^{\infty}S_p \leqslant \frac{3}{2}C(r_0)\sum_{p=0}^{\infty}S_p =$$

$$= \frac{3C(r_0)n(1-1/(2n))^{-1}A(\rho,\gamma)}{\alpha}\left\{\frac{M}{\sigma\gamma^{2n+1}} + \sum_{p=0}^{\infty}r_0^{2^p}\gamma^{3-(2n+1)(p+1)}\right\} \equiv Y.$$

Теперь, согласно (3.29), в области

$$\|h\| \leqslant \frac{\eta}{2}, \quad |\operatorname{Im}\theta| \leqslant \frac{\rho}{2}$$

будет справедливо неравенство

$$|\Phi^{(m+1)}(h,\theta,0) - \Phi^{(m)}(h,\theta,0)| \leqslant$$

$$\leqslant |u^{(m+1)}(h,\theta,0)| + |\Phi^{(m)}(h,\theta+u^{(m+1)},\Delta^{(m)}(0)) - \Phi^{(m)}(h,\theta,0)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\frac{M_m A(\rho,\gamma)}{\alpha\gamma^{(2n+1)(m+1)}} + Y M_{m-1} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{A(\rho,\gamma)}{Q(\rho,\gamma)}r_0^{2^m}\gamma^{(2n+4)+3(m+1)} + Y\frac{\alpha}{Q(\rho,\gamma)}r_0^{2^{m-1}}\gamma^{(m+1)(2n+4)}.$$

Поэтому в области

$$\|h\| \leqslant \frac{\eta}{2}, \quad |\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \frac{\rho}{2} \tag{3.32}$$

имеем (при $k \geqslant 1$)

$$|\Phi^{(m+k)}(h,\theta,0) - \Phi^{(m)}(h,\theta,0)| \leqslant \frac{3}{2}\frac{A(\rho,\gamma)}{Q(\rho,\gamma)}\gamma^{2n+4}\sum_{m}^{\infty}r_0^{2^p}\gamma^{3(p+1)} +$$

$$+ \frac{3C(r_0)n(1-1/(2n))A(\rho,\gamma)}{Q(\rho,\gamma)}\sum_{m}^{\infty}r_0^{2^{p-1}}\gamma^{(p+1)(2n+4)}$$

или, принимая во внимание, что

$$\frac{A(\rho,\gamma)}{Q(\rho,\gamma)} < \frac{1-1/(2n)}{n\gamma^2},$$

получаем

$$|\Phi^{(m+k)}(h,\theta,0) - \Phi^{(m)}(h,\theta,0)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3}{2n}\gamma^{2n+2}\sum_m^\infty r_0^{2^p}\gamma^{3(p+1)} + 3C(r_0)\sum_m^\infty r_0^{2^{p-1}}\gamma^{(2n+4)p+2(n+1)}.$$

Итак, равномерно в области (3.32)

$$\Phi^{(m)}(h,\theta,0) \to \Phi^{(\infty)}(h,\theta,0),$$

причем

$$|\Phi^{(\infty)}(h,\theta,0) - \Phi^{(m)}(h,\theta,0)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3}{2n}\gamma^{2n+2}\sum_m^\infty r_0^{2^p}\gamma^{3(p+1)} + 3C(r_0)\sum_m^\infty r_0^{2^{p-1}}\gamma^{(2n+4)p+2(n+1)}. \quad (3.33)$$

Далее имеем

$$D^{(m)}(0) \to D^{(\infty)}(0),$$

причем

$$|D^{(\infty)}(0) - D^{(m)}(0)| \leqslant \frac{C(r_0)\sigma}{1-1/(4n)}\left(\frac{1}{4n}\right)^{m+1}. \quad (3.34)$$

Согласно (3.30), имеем также

$$\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial\Phi^{(\infty)}(h,\theta,0)}{\partial\theta_k}\right| \leqslant \frac{1}{2} \quad (3.35)$$

в области

$$\|h\| \leqslant \frac{\eta}{2}, \quad |\operatorname{Im}\theta| \leqslant \frac{\rho}{2}.$$

Согласно (3.29) и оценкам леммы в рассматриваемой области (3.32), имеет место неравенство

$$|\Phi^{(m+1)}| \leqslant \frac{\delta_m}{n} + |\Phi^{(m)}|.$$

Отсюда находим

$$|\Phi^{(\infty)}(h,\theta,0)| \leqslant \frac{1}{n}(\delta+\delta_1+\dots) = \frac{\rho}{4n}. \quad (3.36)$$

Итак, посредством замены вида

$$\varphi = \theta + \Phi^{(\infty)}(h,\theta,0)$$

система уравнений

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F(h,\varphi,\Delta),$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \Delta + f(h,\varphi,\Delta),$$

где $\Delta = D^{(\infty)}$, приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F'(h,\theta) = Hh + F(h,\theta + \Phi^{(\infty)}(h,\theta,0),\Delta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Так как для системы (3.37) выполняются условия

$$\|F'(h,\theta)\| \leqslant \alpha\frac{\eta}{2} \quad \text{и} \quad h_0\left\|\frac{\partial F'(h,\theta)}{\partial h_q}\right\| \leqslant L_\infty < \frac{\alpha}{2},$$

то, следовательно, в области $\|h\| \leqslant \eta/2$, $|\operatorname{Im}\theta| \leqslant \rho/2$ к этим уравнениям применима теорема I.

Таким образом, у уравнений (3.37) существует квазипериодическое решение с частотой ω:

$$h_t = S^{(\infty)}(\theta_0 + \omega t), \quad |S^{(\infty)}| \leqslant \frac{\eta}{2} \quad \text{при} \quad |\operatorname{Im}\theta_0| \leqslant \frac{\rho}{2}.$$

Итак, у основной системы уравнений (3.1) существует квазипериодическое решение с частотами ω:

$$\begin{aligned} h_\tau &= S^{(\infty)}(\theta_0 + \omega t), \\ \varphi_\tau &= \theta_0 + \omega t + \Phi^{(\infty)}(S(\theta_0 + \omega t), \theta_0 + \omega t, 0) \end{aligned}$$

при $\Delta = D^{(\infty)}$.

Заметим, что преобразования

$$\varphi = \theta + \Phi^{(\infty)}(h,\theta,0),$$

согласно (3.35) и (3.36), обратимы в области

$$\|h\| \leqslant \frac{\eta}{2}, \quad |\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right),$$

т. е. можно записать

$$\theta = \varphi + \Psi(h,\varphi).$$

Поэтому, согласно теореме I, если h_t, φ_t — любые решения системы (3.1), начальные значения которых h_0, φ_0 удовлетворяют условию

$$\|h_0\| \leqslant \frac{\eta}{2}, \quad |\operatorname{Im}\varphi_0| \leqslant \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right),$$

то справедливы оценки

$$\|h_t - S^{(\infty)}(\theta_0 + \omega t)\| \leqslant \eta e^{-\alpha t/2} \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

$$\|\varphi_t - \theta_0 - \omega t - \Phi^{(\infty)}(S(\theta_0 + \omega t), \theta_0 + \omega t, 0)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

где

$$\theta_0 = \varphi_0 + \Psi(h_0, \varphi_0).$$

Действительно, легко видеть, что

$$\begin{aligned} &|\varphi_t - \theta_0 - \omega t - \Phi^{(\infty)}(S(\theta_0 + \omega t), \theta_0 + \omega t, 0)| = \\ &\quad = |\Phi^{(\infty)}(h_t, \theta_0 + \omega t, 0) - \Phi^{(\infty)}(S(\theta_0 + \omega t), \theta_0 + \omega t, 0)| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема III. *Если в уравнениях* (3.1) *функции* F *и* f *удовлетворяют всем условиям, сформулированным в начале настоящего параграфа, то тогда эти уравнения имеют квазипериодическое решение с частотами* ω *вида*

$$h_\tau = S^{(\infty)}(\theta_0 + \omega t),$$

$$\varphi_\tau = \theta_0 + \omega t + \Phi^{(\infty)}(S(\theta_0 + \omega t), \theta_0 + \omega\ t, 0)$$

при соответствующем выборе Δ.

Если h_t, φ_t *— любые решения системы* (3.1), *начальные значения которых* h_0, φ_0 *удовлетворяют условию*

$$\|h_0\| \leqslant \frac{\eta}{2}, \quad |\operatorname{Im}\varphi_0| \leqslant \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right),$$

то тогда h_t *и* φ_t *будут асимптотически приближаться к этому квазипериодическому решению.*

Примечание. Учитывая примечания к предыдущим теоремам и леммам, видим, что если H, $F(h, \theta, \Delta)$, $f(h, \theta, \Delta)$ — вещественные функции вещественных аргументов h, θ, Δ, то $F'(h, \theta)$, $\Phi^{(\infty)}(h, \theta, 0)$, $\Delta = D^{(\infty)}(0)$ тоже вещественные функции вещественных аргументов h, θ.

Пусть F и f являются аналитическими функциями параметров μ из области ϑ и пусть везде в ϑ выполнены вышеуказанные неравенства с фиксированными η, ρ, σ, r_0. Тогда $D^{(m)}(0)$ и $\Phi^{(m)}(h, \theta, 0)$ будут аналитическими функциями μ в ϑ.

Так как сходимость $\Phi^{(m)}(h, \theta, 0)$ и $D^{(m)}(0)$, согласно выражениям (3.33) и (3.34), определяется величинами η, ρ, σ, r_0, то она будет равномерной по отношению к μ в ϑ. Поэтому и $D^{(\infty)}$, $\Phi^{(\infty)}$, F', $S^{(\infty)}$ будут аналитическими функциями μ в ϑ.

§ 4. О зависимости квазипериодических решений от параметра. Асимптотические и сходящиеся разложения

Остановимся теперь на вопросе применения доказанной теоремы III к некоторым классам уравнений, встречающихся в нелинейной механике.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \varphi, \Delta, \varepsilon), \quad h = (h_1, \ldots, h_{n_0}), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + f(h, \varphi, \Delta, \varepsilon), \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $F(h, \varphi, \Delta, \varepsilon)$, $f(h, \varphi, \Delta, \varepsilon)$ — аналитические функции в области

$$\begin{aligned} |h_0| \leqslant \eta_0, \quad |\Delta| \leqslant \sigma_0, \\ |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0, \quad |\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для системы (4.1) имеет место следующая теорема.

Теорема IV. *Пусть для системы* (4.1) *выполняются следующие условия:*
1) *в области* (4.2) *функции* $F(h,\varphi,\Delta,\varepsilon)$, $f(h,\varphi,\Delta,\varepsilon)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} |F(h,\varphi,\Delta,\varepsilon)| &\leqslant C_1|h|^2 + C_2|\Delta| + C_3|\varepsilon|, \\ |f(h,\varphi,\Delta,\varepsilon)| &\leqslant B_1|h| + B_2|\Delta| + B_3|\varepsilon|, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где C_i, B_i $(i=1,2,3)$ — *постоянные;*
2) *функции* $F(h,\varphi,\Delta,\varepsilon)$, $f(h,\varphi,\Delta,\varepsilon)$ — *вещественные при вещественных аргументах;*
3) *вещественные части всех собственных значений матрицы* H *меньше* $-\alpha<0$;
4) *вещественные* ω *удовлетворяют неравенствам*

$$|(m\omega)| \geqslant k|m|^{-(n+1)}. \tag{4.4}$$

Тогда можно найти такие положительные постоянные $\varepsilon_1<\varepsilon_0$, $\eta_1<\eta_0$, $\rho_1<\rho_0$, *что будут справедливы следующие утверждения:*
1) *в области*

$$|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1 \tag{4.5}$$

можно определить аналитическую функцию $\Delta(\varepsilon)$, *вещественную при вещественных* ε, *так, что уравнения* (4.1) *при* $\Delta=\Delta(\varepsilon)$ *будут иметь квазипериодическое решение с частотами* ω *вида*

$$\begin{aligned} h_t &= S(\omega t+\Psi,\varepsilon), \\ \varphi_t &= \omega t+\Psi+\Phi(\omega t+\Psi,\varepsilon), \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $S(\theta,\varepsilon)$ *и* $\Phi(\theta,\varepsilon)$ — *аналитические функции аргументов* θ, ε *в области*

$$|\operatorname{Im}\theta| \leqslant \rho_1, \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1, \tag{4.7}$$

вещественные при вещественных θ,ε;
2) *любые решения системы* (4.1) h_t,φ_t, *начальные значения которых* h_0,φ_0 *удовлетворяют условиям*

$$|h_0| \leqslant \eta, \quad |\operatorname{Im}\varphi_0| \leqslant \rho_1,$$

при $t\to\infty$ *будут асимптотически приближаться к решению* (4.6).

Доказательство. Заметим, что, согласно условию теоремы, имеет место неравенство

$$|e^{-Ht}| \leqslant Pe^{-\alpha t}, \quad t\geqslant 0. \tag{4.8}$$

Далее, очевидно, можем написать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|F(h,\varphi,\Delta,\varepsilon)\| &\leqslant N = PC_1\eta^2 + PC_2\sigma + PC_3|\varepsilon|, \\ |f(h,\varphi,\Delta,\varepsilon)| &\leqslant M = B_1\eta + B_2\mathfrak{G} + B_3|\varepsilon|, \end{aligned} \tag{4.9}$$

а также

$$\varepsilon n_0 \left\| \frac{\partial F(h,\varphi,\Delta,\varepsilon)}{\partial h_q} \right\| \leqslant L = \frac{n_0}{\eta}\left\{4PC_1\eta^2 + C_2\sigma + C_3|\varepsilon|\right\} \tag{4.10}$$

в области

$$|h| \leqslant \eta \leqslant \frac{r_0}{2}, \quad |\Delta| \leqslant \sigma_0, \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0.$$

Найдем такое $r_0 < 1$, чтобы выполнялись неравенства

$$\gamma^{2n+4} r_0 \leqslant \frac{1}{4n}, \quad \frac{\gamma^{2n+4}}{2} \sum_{s=0}^{\infty} r_0^{2^s} < \ln \frac{3}{2}, \quad \gamma = \frac{\rho_0}{\rho_0 + 4},$$
$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-1} \frac{P^2 n_0^2 n \rho_0^2}{Q(\rho_0, \gamma)} \sum_{s=0}^{\infty} r_0^{2^s} \gamma^{(p+1)(2n+1)+(2n+4)} \leqslant \frac{1}{8}. \tag{4.11}$$

Тогда, чтобы удовлетворить всем условиям теоремы III, достаточно лишь удовлетворить условиям

$$N \leqslant \frac{\alpha\eta}{2}, \quad L \leqslant \frac{\alpha}{4}, \quad M \leqslant \frac{\sigma}{4n}, \quad \frac{M}{\alpha} \frac{Q(\rho, \gamma)}{\gamma^{2n+8}} \leqslant r_0, \tag{4.12}$$

которые, очевидно, выполняются при достаточно малых η, σ, $|\varepsilon|$.

Рассмотрим теперь систему уравнений вида

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon A h + \varepsilon F(h, \varphi, \Delta, \varepsilon),$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \Delta + \varepsilon f(h, \varphi, \Delta, \varepsilon). \tag{4.13}$$

Пусть функции $F(h, \varphi, \Delta, \varepsilon)$, $f(h, \varphi, \Delta, \varepsilon)$ удовлетворяют всем условиям теоремы IV и все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части.

Чтобы воспользоваться теоремой III предыдущего параграфа, положим

$$H = \varepsilon A, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{4.14}$$

Тогда

$$|e^{Ht}| \leqslant P e^{-\alpha t}, \tag{4.15}$$

где $P = \text{const}$, $\alpha = \varepsilon\beta > 0$.

Опять найдем такое $r_0 < 1$, чтобы выполнялись неравенства (4.11).

Затем, чтобы удовлетворить условиям теоремы III, достаточно удовлетворить условиям (4.12), которые, очевидно, выполняются при достаточно малых η, σ, ε_0.

Заметим, что, в отличие от теоремы IV, здесь $\alpha = \varepsilon\beta$. Однако N, L, M содержат лишнюю степень ε. Поэтому будет справедливо следующее утверждение.

Можно найти числа $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, $\eta_1 < \eta_0$, $\rho_1 < \rho_0$ таким образом, что:

1) в интервале $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ можно определить вещественную функцию $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ так, что уравнения (4.13) при $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ будут иметь квазипериодическое решение с частотами ω:

$$h_t = S(\omega t + \Psi, \varepsilon),$$
$$\varphi_t = \omega t + \Psi + \Phi(\omega t + \Psi, \varepsilon), \tag{4.16}$$

где $S(\theta, \varepsilon)$, $\Phi(\theta, \varepsilon)$ — аналитические функции угловой переменной θ в области

$$|\operatorname{Im} \theta| \leqslant \rho_1, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0; \tag{4.17}$$

2) решения h_t, φ_t, начальные значения которых удовлетворяют условиям

$$|h_0| \leqslant \eta_1, \quad |\operatorname{Im} \varphi_0| \leqslant \rho_1, \tag{4.18}$$

при $t \to \infty$ асимптотически приближаются к этому квазипериодическому решению.

Рассмотрим теперь вопрос об аналитичности по ε функций $S(\theta, \varepsilon)$, $\Phi(\theta, \varepsilon)$, характеризующих квазипериодическое решение.

Подчеркнем, что, в отличие от предыдущих рассуждений, мы здесь имеем дело только с положительными ε, лежащими в достаточно малом интервале. Это обусловлено тем, что для того, чтобы пользоваться ранее доказанными теоремами, нам необходимо выполнение неравенства

$$|e^{\varepsilon A t}| \leqslant P e^{-\beta|\varepsilon|\, t}. \tag{4.19}$$

Пусть a — собственные числа матрицы A. Тогда собственными числами матрицы εA будут

$$\varepsilon a = |\varepsilon| a e^{i \operatorname{Arg} \varepsilon}, \tag{4.20}$$

и потому, каковы бы ни были сами a, соответствующим выбором $\operatorname{Arg} \varepsilon$ можно сделать (поворотом оси) собственное число матрицы εA лежащим на мнимой оси. Это и препятствует рассмотрению всех комплексных ε, лежащих в сколь угодно малой области $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$.

Однако можно установить свойство аналитичности функций F, f, Δ по отношению к параметру ε, взяв $\operatorname{Arg} \varepsilon$ достаточно малым, таким образом, чтобы

$$\operatorname{Re} \varepsilon a < -|\varepsilon|\beta < 0, \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0. \tag{4.21}$$

Нетрудно проверить, что в этой области выполняются все оценки теоремы III и, таким образом, в этой области функции S, Φ, Δ будут аналитическими функциями ε.

Однако клинообразная область, как известно, является недостаточной, чтобы в ней сходились разложения по степеням ε.

Может возникнуть вопрос: не обусловливается ли такое положение недостаточной эффективностью наших рассуждений.

Нетрудно, однако, найти элементарный пример уравнений типа (4.13), когда рассматриваемые функции не будут аналитическими в сколь угодно малой окрестности.

Рассмотрим систему уравнений с одним h:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\varepsilon\beta h + \varepsilon^2 \sum_{|m|\neq 0} \rho^{|m|} e^{i(m\varphi)}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \end{aligned} \tag{4.22}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$; ρ — положительное число меньшее 1; $0 < \rho < 1$; $\beta > 0$.

Из (4.22) легко находим

$$h = S(\varphi, \varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{|m|\neq 0} \frac{\rho^{|m|} e^{i(m\varphi)}}{i(m\omega) + \varepsilon\beta}. \tag{4.23}$$

Рассмотрим знаменатель выражения (4.23)

$$i(m_1\omega_1 + m_2\omega_2) + \varepsilon\beta. \tag{4.24}$$

Полагая в (4.24)

$$m_1 = p > 0, \qquad m_2 = -q < 0, \tag{4.25}$$

получаем

$$\frac{1}{\omega_2}\left\{i\left(p\frac{\omega_1}{\omega_2} - q\right) + \varepsilon\frac{\beta}{\omega_2}\right\}. \tag{4.26}$$

Так как число ω_1/ω_2 является иррациональным, то существует стремящаяся к бесконечности последовательность целых p и q, такая, что $p(\omega_1/\omega_2) - q \to$ $\to 0$. Поэтому выражение (4.26) будет обращаться в нуль для бесконечной последовательности ε, лежащих на мнимой оси:

$$\varepsilon = -\frac{i\omega_2}{\beta}\left(p\frac{\omega_1}{\omega_2} - q\right). \tag{4.27}$$

Следовательно, функция $S(\varphi, \varepsilon)$ как функция ε обладает бесконечным числом полюсов, лежащих на мнимой оси, с точкой сгущения в нуле. Очевидно, что такая функция не может быть разложена в сходящийся степенной ряд по параметру ε.

Можно, однако, заметить, что формальное разложение функции $S(\varphi, \varepsilon)$ в степенной ряд по параметру ε будет обладать свойством асимптотической сходимости. Этот факт обусловлен следующим обстоятельством. Неравенство (4.4) в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$|(m\omega)| \geqslant \frac{k}{|m|^3}. \tag{4.28}$$

Поэтому знаменатель в (4.23) может обратиться в нуль лишь при условии

$$|\varepsilon\beta| \geqslant \frac{k}{|m|^3}, \tag{4.29}$$

т. е. когда

$$|m| \geqslant \left(\frac{k}{\beta|\varepsilon|}\right)^{1/3} = C|\varepsilon|^{-1/3}, \quad C = \left(\frac{k}{\beta}\right)^{1/3}. \tag{4.30}$$

С другой стороны, соответствующий числитель будет иметь порядок малости выше, чем

$$\rho^{C|\varepsilon|^{-1/3}}, \tag{4.31}$$

откуда следует, что этот числитель будет стремиться к нулю быстрее любой степени ε.

Указанное свойство асимптотичности формальных степенных разложений справедливо не только в этом частном простом примере, но и в общем случае рассматриваемых уравнений вида (4.13).

Чтобы показать это, построим формальные разложения

$$\begin{aligned} h &= S(\Psi, \varepsilon) = \sum_m \varepsilon^m S_m(\Psi), \\ \varphi &= \Psi + \Phi(\Psi, \varepsilon) = \Psi + \sum_m \varepsilon^m \Phi_m(\Psi), \\ \Delta(\varepsilon) &= \sum_m \varepsilon^m \Delta_m. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Фактически мы можем определить все коэффициенты соответствующих функций, если выражения (4.32) подставить в исходные уравнения (4.13) и при дифференцировании учесть, что

$$\frac{d\Psi}{dt} = \omega. \tag{4.33}$$

Рассмотрим k-е приближение, получаемое из формальных разложений (4.32) после пренебрежения в правых частях (4.32) членами порядка ε^{k+1} и выше:

$$\begin{aligned} h^{(k)} &= S^{(k)}(\Psi, \varepsilon) = \sum_{m}^{k} \varepsilon^m S_m(\Psi), \\ \varphi^{(k)} &= \Psi + \Phi^{(k)}(\Psi, \varepsilon) = \Psi + \sum_{m}^{k} \varepsilon^m \Phi_m(\Psi), \\ \Delta^{(k)}(\varepsilon) &= \sum_{m}^{k} \varepsilon^m \Delta_m. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Совершим теперь в уравнениях (4.13) замену переменных с помощью формул

$$\begin{aligned} h &= h^{(1)} + S^{(k)}(\Psi, \varepsilon), \\ \varphi &= \Psi + \Phi^{(k)}(\Psi, \varepsilon), \\ \Delta &= D + \Delta^{(k)}(\varepsilon). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Тогда очевидно, что $h^{(1)} = 0$, $D = 0$ будут удовлетворять полученной системе уравнений с точностью до величин $(k+1)$-го порядка малости.

Таким образом, с помощью развитой нами техники оценок нетрудно показать, что для рассматриваемого квазипериодического решения $h^{(1)}$ и D будут величинами $(k+1)$-го порядка малости.

Можно, однако, вместо асимптотических рядов (4.32) получить, и притом различными способами, сходящиеся разложения.

Так, мы можем рассмотреть уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \varepsilon A h + \varepsilon F(h, \varphi, \Delta, \mu), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + \varepsilon f(h, \varphi, \Delta, \mu), \end{aligned} \tag{4.36}$$

которые совпадают с исходными уравнениями (4.13) при $\mu = \varepsilon$.

Благодаря условиям, наложенным на функции $\varepsilon F(h, \varphi, \Delta, \mu)$, $\varepsilon f(h, \varphi, \Delta, \mu)$ при достаточно малых $|\mu| \leqslant \varepsilon_0$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, будут выполняться условия применимости теоремы III. Поэтому функции $S(\varphi, \mu)$, $\Phi(\varphi, \mu)$, Δ, μ будут аналитическими функциями μ в области

$$|\mu| \leqslant \varepsilon_0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \tag{4.37}$$

и, следовательно, могут быть разложены в равномерно сходящиеся степенные ряды по μ.

Полагая в этих рядах $\mu = \varepsilon$, мы получим сходящиеся разложения, представляющие функции $\Delta(\varepsilon)$, $S(\varphi, \varepsilon)$, характеризующие квазипериодическое решение.

Заметим, что рассмотренная процедура неоднозначна.

Укажем еще один чрезвычайно простой для практических расчетов способ. Запишем исходную систему в виде

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \varepsilon A h + \varepsilon z F(h, \varphi, \Delta, \varepsilon z), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + \varepsilon z f(h, \varphi, \Delta, \varepsilon z). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Заметим, что она совпадает с системой (4.36). Для рассматриваемой системы можно проверить применимость доказанных теорем для $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|z| \leqslant \text{const}/\sqrt{\varepsilon}$. Поэтому при достаточно малом ε функции $\Delta(\varepsilon z)$, $S(\varphi, \varepsilon z)$, $\Phi(\varphi, \varepsilon z)$ могут быть разложены в степенные сходящиеся ряды по z. Нужная нам точка $z = 1$ лежит в круге сходимости. Нетрудно заметить, что в разложения функций h и φ параметр ε будет входить как в виде степеней ε^k, так и через знаменатели типа $[\varepsilon A + i(m\omega)]^{-1}$.

§ 5. Квазипериодические решения в системах второго порядка

Применим полученные выше результаты для исследования колебательной системы, описываемой системой n уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \lambda_k^2 q_k = \varepsilon f_k\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{dq_1}{dt}, \ldots, \frac{dq_n}{dt}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.1}$$

или в векторной форме

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \lambda^2 q = \varepsilon f\left(q, \frac{dq}{dt}\right), \quad q = (q_1, \ldots, q_n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n). \tag{5.2}$$

Совершим в системе уравнений (5.2) обычное в нелинейной механике преобразование. Введем новые переменные: амплитуду $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и фазу $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ колебаний, с помощью формул

$$q = a \sin\theta, \quad \frac{dq}{dt} = a\lambda \cos\theta, \quad \lambda > 0. \tag{5.3}$$

Тогда вместо (5.2) получим следующие уравнения для амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A(a, \theta, \lambda) = \frac{\varepsilon}{\lambda} f(a \sin\theta, a\lambda \cos\theta) \cos\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \lambda + \varepsilon B(a, \theta, \lambda) = \lambda - \frac{\varepsilon}{a\lambda} f(a \sin\theta, a\lambda \cos\theta) \sin\theta. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Уравнения первого приближения, соответствующие системе (5.4) в нерезонансном случае, как известно [6], будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A^{(0)}(a, \lambda), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \lambda + \varepsilon B^{(0)}(a, \lambda), \end{aligned} \tag{5.5}$$

где

$$A^{(0)}(a,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}A(a,\theta,\lambda)\,d\theta_1\dots d\theta_n,$$
$$B^{(0)}(a,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}B(a,\theta,\lambda)\,d\theta_1\dots\ d\theta_n. \tag{5.6}$$

Предположим, что система уравнений первого приближения (5.5) имеет стационарное решение с постоянной амплитудой

$$a=a^{(0)},\quad A^{(0)}(a^{(0)},\lambda)=0, \tag{5.7}$$

которое будет асимптотически устойчивым, т. е. предположим, что вещественные части всех корней характеристического уравнения

$$\det\left\{P-\varepsilon\left(\frac{\partial A^{(0)}(a,\lambda)}{\partial a}\right)_{a=a^{(0)}}\right\}=0 \tag{5.8}$$

отрицательны. Тогда всякое решение уравнения первого приближения, достаточно близкое к $a^{(0)}$, будет асимптотически приближаться к стационарному решению при $t\to\infty$. Мы предположим также, что каждая из переменных $a_1^{(0)},\dots,a_n^{(0)}$ отлична от нуля.

Для рассматриваемого стационарного решения фазы $\theta=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)$ будут меняться с постоянными частотами

$$\omega_k=\lambda_k+\varepsilon B_k^{(0)}(a_1^{(0)},\dots,a_n^{(0)},\lambda_1,\dots,\lambda_n)\quad(k=1,2,\dots,\ n) \tag{5.9}$$

и координаты q_k $(k=1,2,\dots,n)$ будут квазипериодическими с частотами ω_k $(k=1,2,\dots,n)$.

После этих замечаний относительно решений уравнений первого приближения (5.5) перейдем к исследованию решений исходной точной системы уравнений (5.1).

Основываясь на доказанной в предыдущем параграфе теореме IV, мы можем доказать для системы уравнений (5.1) следующее утверждение.

Пусть $f(q,q')$ будут аналитическими функциями переменных q,q' в окрестности тора

$$q=a^{(0)}\sin\theta,\quad q'=a^{(0)}\omega\cos\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \tag{5.10}$$

Полагаем, как и ранее, что вещественные ω удовлетворяют неравенствам

$$|(m\omega)|\geqslant\frac{k}{|m|^{(n+1)}}.$$

Предположим также, что вещественные части всех собственных значений матрицы

$$\left\|\left(\frac{\partial A^{(0)}(a,\lambda)}{\partial a}\right)_{a=a^{(0)}}\right\|$$

отрицательны. Тогда можно указать такое положительное ε_0, что для всех $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ будут справедливы следующие утверждения.

1. Можно определить такие ν, что для $\lambda=\omega+\nu$ уравнения (5.1) будут обладать квазипериодическими решениями с частотами ω:

$$q=Q(\omega t+\Psi,\varepsilon),\quad \nu=\nu(\varepsilon)$$

и всякое решение, достаточно близкое к квазипериодическому, приближается к нему при $t\to\infty$.

2. Формальные разложения функции $Q(\omega t+\Psi,\varepsilon)$ по степеням ε будут асимптотически сходящимися и могут быть преобразованы в равномерно сходящиеся разложения с помощью парциальных суммирований, основанных на введении вспомогательных параметров (z или μ).

Чтобы к системе уравнений (5.1) можно было применить теорему IV, надо прежде всего преобразовать эту систему. Для этого рассмотрим следующие разложения:

$$\begin{aligned} A(a,\theta,\omega+\nu)&=\sum_m A^{(m)}(a,\nu)e^{i(m\theta)},\\ B(a,\theta,\omega+\nu)&=\sum_m B^{(m)}(a,\nu)e^{i(m\theta)}. \end{aligned}\tag{5.11}$$

Как и обычно, отделим систематическое движение от малых колебаний. Для этого совершим в уравнениях (5.4) следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} a&=b+\varepsilon u(b,\varphi,\nu),\\ \theta&=\varphi+\varepsilon v(b,\varphi,\nu), \end{aligned}\tag{5.12}$$

где

$$\begin{aligned} u(b,\varphi,\nu)&=\sum_{|m|\neq 0}\frac{A^{(m)}(b,\nu)e^{i(m\varphi)}}{i(m\omega)},\\ v(b,\varphi,\nu)&=\sum_{|m|\neq 0}\frac{B^{(m)}(b,\nu)e^{i(m\varphi)}}{i(m\omega)}. \end{aligned}\tag{5.13}$$

Заметим, что справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned} \omega\frac{\partial u}{\partial\varphi}&=A(b,\varphi,\omega+\nu)-A^{(0)}(b,\omega+\nu),\\ \omega\frac{\partial v}{\partial\varphi}&=B(b,\varphi,\omega+\nu)-B^{(0)}(b,\omega+\nu). \end{aligned}\tag{5.14}$$

Подставляя (5.12) в уравнения (5.4), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{db}{dt}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial b}\frac{db}{dt}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\varepsilon A(b+\varepsilon u,\varphi+\varepsilon v,\omega+\nu),\\ &\varepsilon\frac{\partial v}{\partial b}\frac{db}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\varepsilon B(b+\varepsilon u,\varphi+\varepsilon v,\omega+\nu)+\omega+\nu, \end{aligned}\tag{5.15}$$

откуда, учитывая (5.14), находим

$$\begin{aligned} &\left(1+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial b}\right)\frac{db}{dt}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}-\omega\right)=\\ &\quad=\varepsilon A^{(0)}(b,\omega+\nu)+\varepsilon[A(b+\varepsilon u,\varphi+\varepsilon v,\omega+\nu)-A(b,\varphi,\omega+\nu)]=\\ &\quad=\varepsilon A^{(0)}(b,\omega+\nu)+\varepsilon^2A^{(1)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon), \end{aligned}\tag{5.16a}$$

$$\varepsilon\frac{\partial v}{\partial b}\frac{db}{dt}+\left(1+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}-\omega\right)=$$

$$=\nu+\varepsilon B^{(0)}(b,\omega+\nu)+\varepsilon[B(b+\varepsilon u,\varphi+\varepsilon v,\omega+\nu)-B(b,\varphi,\omega+\nu)]=$$

$$=\nu+\varepsilon B^{(0)}(b,\omega+\nu)+\varepsilon^2B^{(1)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon). \quad (5.16б)$$

Нам необходимо разрешить систему (5.16) относительно db/dt и $d\varphi/dt$. Для этого рассмотрим следующую вспомогательную систему уравнений:

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial b}\right)x+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\varphi}y=\zeta,\quad \varepsilon\frac{\partial v}{\partial b}x+\left(1+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)y=\eta, \quad (5.17)$$

из которой без затруднения находим

$$\begin{aligned}x&=[1+\varepsilon T^{(1,1)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)]\zeta+\varepsilon T^{(1,2)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)\eta,\\ y&=\varepsilon T^{(2,1)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)\zeta+[1+\varepsilon T^{(2,2)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)]\eta,\end{aligned} \quad (5.18)$$

где $T^{(i,j)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)$ $(i,j=1,2)$ являются аналитическими функциями $b,\varphi,\nu,\varepsilon$ при достаточно малых $b-a^{(0)}$, $|\operatorname{Im}\varphi|$, ν,ε.

Разрешая систему (5.16) относительно db/dt, $d\varphi/dt$, принимая при этом во внимание (5.17) и (5.18), находим

$$\begin{aligned}\frac{db}{dt}&=[1+\varepsilon T^{(1,1)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)][\varepsilon A^{(0)}(b,\omega+\nu)+\varepsilon^2A^{(1)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)]+\\&+\varepsilon T^{(1,2)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)[\nu+\varepsilon B^{(0)}(b,\omega+\nu)+\varepsilon^2B^{(1)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)],\\ \frac{d\varphi}{dt}&=\omega+[1+\varepsilon T^{(2,2)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)][\nu+\varepsilon B^{(0)}(b,\omega+\nu)+\varepsilon^2B^{(1)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)]+\\&+\varepsilon T^{(2,1)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)[\varepsilon A^{(0)}(b,\omega+\nu)+\varepsilon^2A^{(1)}(b,\varphi,\nu,\varepsilon)],\end{aligned} \quad (5.19)$$

или

$$\begin{aligned}\frac{db}{dt}&=\varepsilon A^{(0)}(b,\omega)+\varepsilon X(b,\varphi,\nu,\varepsilon),\\ \frac{d\varphi}{dt}&=\omega+\nu+\varepsilon B^{(0)}(b,\omega)+\varepsilon Y(b,\varphi,\nu,\varepsilon),\end{aligned} \quad (5.20)$$

где, как нетрудно видеть, функции $X(b,\varphi,\nu,\varepsilon)$ и $Y(b,\varphi,\nu,\varepsilon)$ являются величинами порядка ν и ε.

Введем теперь в уравнениях (5.20) новую переменную $h=(h_1,\ldots,h_n)$ по формуле

$$b=a^{(0)}+h \quad (5.21)$$

и обозначим

$$\left(\frac{\partial A^{(0)}(b,\omega)}{\partial b}\right)_{b=a^{(0)}}=A,\quad \nu+\varepsilon B^{(0)}(a^{(0)},\omega)=\Delta. \quad (5.22)$$

Тогда система (5.20) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt}&=\varepsilon Ah+\varepsilon F(h,\varphi,\Delta,\varepsilon),\\ \frac{d\varphi}{dt}&=\omega+\Delta+\varepsilon f(h,\varphi,\Delta,\varepsilon),\end{aligned} \quad (5.23)$$

где $F(h, \varphi, \Delta, \varepsilon)$ — функция порядка h^2, Δ, ε, а $f(h, \varphi, \Delta, \varepsilon)$ — функция порядка h, Δ, ε.

Если теперь функции $f(q, q')$ являются аналитическими в окрестности тора

$$q = a^{(0)} \sin\theta, \quad q' = a^{(0)}\omega \cos\theta, \tag{5.24}$$

то функции $F(h, \varphi, \Delta, \varepsilon)$, $f(h, \varphi, \Delta, \varepsilon)$ также будут аналитическими функциями $h, \varphi, \Delta, \varepsilon$ в области

$$|h_0| \leqslant \eta_0, \quad |\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_0, \quad |\Delta| \leqslant \sigma_0, \quad |\varepsilon| \leqslant \mu_0 \tag{5.25}$$

(при достаточно малых η_0, ρ_0, σ_0, μ_0), причем в этой области выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |F(h, \varphi, \Delta, \varepsilon)| &\leqslant C_1|h|^2 + C_2|\Delta| + C_3|\varepsilon|, \\ |f(h, \varphi, \Delta, \varepsilon)| &\leqslant B_1|h| + B_2|\Delta| + B_3|\varepsilon|, \end{aligned} \tag{5.26}$$

где C_1, C_2, C_3, B_1, B_2, B_3 — постоянные.

Система (5.23) является системой уравнений типа (4.36). Поэтому мы можем применить полученные в предыдущем параграфе результаты, согласно которым можно подобрать такое Δ, что уравнения (5.23) будут иметь квазипериодическое решение с вышеперечисленными свойствами, что и завершает доказательство сделанного нами выше утверждения.

Список литературы

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Киев: Изд-во АН УССР, 1934. 112 с.; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. II, 2005, с. 117.
2. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. IV, 2006, с. 9.
3. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98, № 4. С. 527–530.
4. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. I. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. 1961. Т. 25. С. 21–86.
5. *Moser J.* A New Technique for the Construction of Solutions of Nonlinear Differential Equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1961. V. 47, N 11. P. 1824–1831.
6. *Крилов М. М., Боголюбов М. М.* Про деякі формальні розклади нелінійної механикі. Київ: Вид-во ВУАН, 1934. 89 с.; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. II, 2005, с. 26.

6.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ, СВЯЗАННЫХ С ОБОСНОВАНИЕМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ*

В настоящем сообщении я хотел бы коснуться ряда вопросов, относящихся к проблеме обоснования статистической механики.

Как известно, основным постулатом статистической механики, обеспечивающим ее применимость к термодинамике, является следующее допущение: если рассматриваемая динамическая система является макроскопической системой, изолированной от внешних влияний и заключенной в некотором конечном макроскопическом объеме V, то наблюдаемые значения макроскопических динамических величин стремятся при $t \to \infty$ к постоянным значениям, представляемым средними этих величин, взятыми по равновесному распределению Гиббса.

В более краткой форме говорят, что в такой системе происходит процесс приближения к состоянию статистического равновесия. Подчеркнем, что этот постулат используется для рассмотрения как классических, так и квантовых *динамических систем*. В *рамках классической* механики попытки обоснования указанного постулата привели к созданию весьма глубокой и интересной математической теории — так называемой эргодической теории.

В эргодической теории рассматриваются динамические системы, изолированные от внешних влияний, с компактным фазовым пространством независимо от того, могут они считаться макроскопическими или нет.

Пусть, например, мы имеем динамическую систему с гамильтонианом $H(x)$ (где x представляет «фазовую точку», т. е. совокупность координат и импульсов), такую, что инвариантная гиперповерхность $H(x) = E$, $E = \text{const}$, заключена в конечной области точек (x). Эту гиперповерхность и будем в дальнейшем считать фазовым пространством.

Тогда инвариантная мера Лиувилля

$$\prod_j dq_j\, dp_j$$

порождает на данной гиперповерхности инвариантную меру μ, которую можно нормировать на единицу:

$$\int d\mu = 1.$$

---

* Доклады 2-го Междунар. симпозиума по избранным проблемам статистической механики, Дубна, авг. 1981 г. Дубна, 1982. С. 9–18.

Весьма интересным оказывается случай транзитивности меры μ, когда указанное фазовое пространство нельзя разбить на два инвариантных множества, каждое из которых обладало бы строго положительной мерой μ.

Возьмем временно́е среднее от некоторой динамической величины $f(x)$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x_t)\,dt,$$

где x_t представляет фазовую точку системы в момент t при начальном условии $x_t = x$ для $t = 0$. Тогда в случае транзитивности это временное среднее почти везде в рассматриваемом фазовом пространстве приближается при $T \to \infty$ к пространственному среднему:

$$\int f(x)\,d\mu.$$

Еще более ясной становится аналогия с «установлением статистического равновесия» в случае динамических систем, обладающих свойством перемешивания. Для систем этого типа оказывается справедливым следующее утверждение.

Пусть $g(x), f(x)$ — две произвольные функции из $L_2(\mu)$. Тогда

$$\int f(x_t)g(x)\,d\mu \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \int f(x)\,d\mu \int g(x)\,d\mu.$$

Рассмотрим начальное распределение вероятности $\rho_0(x)$ в нашем фазовом пространстве $\int \rho_0(x)\,d\mu = 1$ и возьмем $g(x) = \rho_0(x)$. Тогда для динамических систем со свойством перемешивания мы получим (при $t \to \infty$) процесс приближения среднего значения динамической величины к пространственному среднему

$$\int f(x_t)\rho_0(x)\,d\mu \to \int f(x)\,d\mu.$$

По поводу результатов эргодической теории надо, однако, сказать, что свойство транзитивности, а в особенности свойство перемешивания, для динамических систем, рассматриваемых в статистической механике, установить чрезвычайно трудно. По-видимому, свойства транзитивности и перемешивания требуют слишком узких условий, налагаемых на динамические системы. По моему мнению, здесь дело в том, что в классической эргодической теории не учитывается макроскопический характер таких систем и соответственно динамических величин. С точки зрения статистической механики нужно установить наличие приближения при $t \to \infty$ к пространственному среднему только для макроскопических систем. Конечно, само понятие макроскопичности в общем случае трудно математически сформулировать так, чтобы ввести его в рамки общей теории динамических систем. Это понятие, однако, легко сформулировать для ряда типичных примеров.

Так, возьмем случай гамильтониана, рассматриваемого для одноатомного газа из одинаковых частиц,

$$H = \sum_{1\leqslant j\leqslant N}\left\{\frac{p_j^2}{2m} + U_v(\mathbf{r}_j)\right\} + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant N}\Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|),$$

находящихся в замкнутом сосуде объемом V. Здесь $\Phi(r)$ — потенциальная энергия взаимодействия пары частиц. Потенциал $U_v(\mathbf{r})$ вводится для того, чтобы формально учесть конечность объема V. Для этого можно выбрать $U_v(\mathbf{r})$ равным нулю внутри сосуда, за исключением малой окрестности границы сосуда, и быстро возрастающим к $+\infty$ при приближении $\mathbf{r}$ к граничной поверхности V. Динамическая система с указанным гамильтонианом будет макроскопической, если число N очень велико.

Таким образом, с математической точки зрения макроскопические свойства являются асимптотическими свойствами для предельного перехода при $N \to \infty$. Имея в виду исследование объемных свойств, этот предельный переход обычно совершают, считая, что при $N \to \infty$ граничная поверхность сосуда бесконечно расширяется ($V \to \infty$), а плотность числа частиц на единицу объема остается постоянной: $N/V = n$. При этом в качестве макроскопических динамических величин естественно принять динамические величины аддитивного, бинарного, тернарного и т. п. типов.

Заметим, что для обоснования статистической механики совершенно необязательно наличие, скажем, свойства перемешивания при любых конечных N, V. Важно лишь соответствующее поведение при $t \to \infty$ предельных средних значений макроскопических величин после совершения предельного перехода статистической механики: $N \to \infty$, $V \to \infty$, $N/V = n = \text{const}$.

Недостаточность эргодической теории в ее стандартной формулировке становится особенно ясной при переходе к динамическим системам квантовой механики. Возьмем, например, квантовую динамическую систему с тем же гамильтонианом, который упоминался выше. При выполнении функцией $\Phi(r)$ обычных условий, накладываемых на потенциальную энергию взаимодействия, этот гамильтониан при конечных N, V имеет чисто дискретный спектр:

$$H\varphi_n = E_n\varphi_n.$$

Пусть ρ_0— начальный (при $t = 0$) статистический оператор фон Неймана, f — динамическая величина, f_t — эта же величина в представлении Гейзенберга для момента времени t. Тогда

$$\operatorname{Sp} f_t\rho_0 = \sum_{n,m}(\varphi_n, f_t\varphi_m)(\varphi_m, \rho_0\varphi_n) = \\ = \sum_{n,m}(\varphi_n, f\varphi_m)(\varphi_m, \rho_0\varphi_n)\exp\left\{\frac{i(E_n - E_m)}{\hbar}t\right\}.$$

Таким образом, рассматриваемое среднее $\operatorname{Sp} f_t\rho_0$ является почти периодической функцией времени и поэтому при $t \to \infty$ ни к какому пределу не стремится. Следовательно, при конечных N, V аналога перемешивания не будет. Более того, величина

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T(\operatorname{Sp} f_t\rho_0)\,dt = \sum_{\substack{n,m \\ E_n=E_m}}(\varphi_n, f\varphi_m)(\varphi_m, \rho_0\varphi_n)$$

существенно зависит от начального распределения вероятности ρ_0, и аналогии с более слабым свойством транзитивности также нет. Отсюда ясно, что приближения к состоянию статистического равновесия средних значений

макроскопических динамических переменных можно ожидать лишь после совершения предельного перехода статистической механики.

Надо, однако, подчеркнуть, что как в классическом, так и в квантовом случае требуемое основным постулатом статистической механики свойство средних значений динамических величин строго доказать пока не удалось даже для систем с вышеуказанным гамильтонианом.

Для интуитивного рассмотрения ситуации с предельным переходом в классической и квантовой статистической механике целесообразно ввести приведенные распределения вероятности одной, двух, ..., s частиц

$$\rho(1); \quad \rho(1,2); \quad \ldots; \quad \rho(1,2,\ldots,s).$$

В классической механике это функции координат соответствующих частиц, в квантовой механике — статистические операторы, действующие на волновые функции этих частиц.

Исходя из уравнения Лиувилля нетрудно получить для этих приведенных распределений зацепляющуюся цепочку уравнений. В этой цепочке можно формально перейти к пределу статистической механики и получить цепочку уравнений уже для предельных приведенных распределений вероятности ρ. Трудности здесь возникнут, если мы попытаемся обосновать возможность такого перехода в цепочке уравнений. Если не обращать внимания на эту сложную проблему и ограничиться случаем достаточно слабого взаимодействия, то из данной цепочки при надлежащих начальных условиях расцепления корреляций можно получать в качестве уравнений первого приближения уравнения типа уравнений Больцмана, характеризующие процесс установления статистического равновесия.

Обратим теперь внимание на то, что в статистической механике используется еще и следующий постулат.

Пусть имеется некоторая «малая» динамическая система S, слабо взаимодействующая с «большой» динамической системой Σ. Термины «малая» и «большая» следует понимать в том смысле, что число степеней свободы в системе Σ много больше числа степеней свободы в системе S. Тогда, если «большая» система находится в состоянии статистического равновесия, т. е. является термостатом, то распределение вероятности в системе S приближается к равновесному.

Более подробно: если $\rho_t(S,\Sigma)$ — статистический оператор для системы $S+\Sigma$ в момент времени t при начальном условии

$$\rho_0(S,\Sigma) = \rho_0(S)\rho(\Sigma),$$

где $\rho(\Sigma)$ соответствует состоянию статистического равновесия в системе Σ, то приведенный статистический оператор для системы S

$$\rho_t(S) = \operatorname*{Sp}_{\Sigma} \rho_t(S,\Sigma)$$

после выполнения предельного перехода статистической механики стремится при $t \to \infty$ к равновесной форме.

Мы привели здесь квантовую формулу. В классическом случае для выражения приведенной функции распределения вероятности в системе надо лишь заменить $\operatorname*{Sp}_{\Sigma}$ интегралом по фазовому пространству системы Σ.

Простейшим примером системы S может служить свободная материальная точка, а системы Σ — совокупность невзаимодействующих гармонических осцилляторов. Для определенности мы рассмотрим этот случай с точки зрения квантовой механики. Тогда мы имеем задачу о взаимодействии частицы с квантовым бозонным полем [1, 2]. Задача такого типа рассматривается, в частности, в теории полярона, где взаимодействие электрона с фононным полем характеризуется гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \sum_k \hbar\omega_k \overset{+}{b}_k b_k + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \left(\frac{\hbar}{2\omega_k}\right)^{1/2} \mathcal{L}(k) e^{i\mathbf{kr}} (b_k + \overset{+}{b}_{-k}).$$

Здесь $\omega_k, \mathcal{L}$ — радиально-симметричные вещественные функции волнового вектора $\mathbf{k}$, причем ω_k существенно положительно; $b_k, \overset{+}{b}_k$ — бозе-амплитуды, соответствующие вектору $\mathbf{k}$. В суммах по k суммирование идет по обычному квазидискретному спектру

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi n_1}{L}, \frac{2\pi n_2}{L}, \frac{2\pi n_3}{L}\right), \quad L^3 = V, n_\alpha \text{ — целые числа},$$

переходящему в непрерывный для $V \to \infty$.

К сожалению, и эта, казалось бы, упрощенная задача оказывается чрезвычайно трудной для строгого математического доказательства факта приближения при $t \to \infty$ предельной функции $\lim\limits_{V\to\infty} \rho_t(S)$ к ее равновесной форме. Поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением лишь весьма упрощенной модельной задачи, когда гамильтониан системы представляется квадратичной формой

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{c^2 r^2}{2} + \sum_k \hbar\omega_k \overset{+}{b}_k b_k + \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \left(\frac{\hbar}{2\omega_k}\right)^{1/2} \mathcal{L}(k)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(b_k + \overset{+}{b}_{-k}),$$

где

$$c^2 = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{\mathcal{L}^2(k) k_\alpha^2}{\omega_k^2} = \frac{1}{3\sqrt{V}} \sum_k \frac{\mathcal{L}^2(k) k^2}{\omega_k^2}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Благодаря такому выбору величины c наш гамильтониан можно также представить в виде

$$H = \frac{p^2}{2m} + \sum_k \hbar\omega_k \left\{\overset{+}{b}_k + \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\mathcal{L}(k)}{2\hbar\omega_k^3}\right\} \left\{b_k - \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\mathcal{L}(k)}{2\hbar\omega_k^3}\right\}.$$

Отсюда видно, что эта квадратичная форма положительна.

Для удобства рассмотрения положим, что суммы по k при конечном V содержат лишь конечное число членов, например таких, что

$$k^2 < K_V, \quad K_V \to \infty, \quad V \to \infty.$$

Тогда уравнения движения в представлении Гейзенберга образуют конечную систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Легко видеть, что три корня соответствующего секулярного уравнения равны нулю, тогда как остальные отличны от нуля. Эти три ну-

левых корня связаны с законом сохранения полного импульса, который для рассматриваемой динамической системы есть

$$\mathbf{P}=\mathbf{p}-\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{\mathbf{k}\mathcal{L}(k)}{\omega_k}\left(\frac{\hbar}{2\omega_k}\right)^{1/2}\mathcal{L}(k)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(b_k+\overset{+}{b}_{-k}).$$

Из указанных дифференциальных уравнений непосредственно следует, что движение частицы представляется суперпозицией инерциального движения и гармонических вибраций.

Займемся теперь нахождением плотности вероятности распределения по импульсам $w_t(p)$ в системе S (диагональные элементы матрицы, соответствующей $\rho_t(S)$ в импульсном представлении). Будем исходить из тождества

$$\operatorname{Sp} f(S,\Sigma)\rho_t(S,\Sigma)=\operatorname{Sp} f(S_t,\Sigma_t)\rho_0(S,\Sigma)=\operatorname{Sp} f(S_t,\Sigma_t)\rho_0(S)\rho(\Sigma),$$

в котором $f(S_t,\Sigma_t)$ обозначает динамическую величину $f(S,\Sigma)$ в представлении Гейзенберга для момента времени t. В частности, для

$$f(S,\Sigma)=f(S)=F(\mathbf{p}),$$

отсюда найдем

$$\int F(\mathbf{p})w_t(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}=\operatorname{Sp} F(\mathbf{p})\rho_t(S)=\operatorname{Sp} F(\mathbf{p}_t)\rho_0(S)\rho(\Sigma).$$

и

$$\int \mathrm{e}^{-i\lambda\mathbf{p}}w_t(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}=\operatorname{Sp}\mathrm{e}^{-i\lambda\mathbf{p}}\rho(S)\rho(\Sigma). \tag{1}$$

Таким образом, $w_t(\mathbf{p})$ можно определить, проинтегрировав упоминавшуюся систему дифференциальных уравнений и выразив $\mathbf{p}_t$ через начальные значения операторов $\mathbf{r},\mathbf{p},\ldots,b_k,\overset{+}{b}_k\ldots$.

С помощью (1) можно установить, что при конечном V плотность вероятности распределения по импульсам $w_t(\mathbf{p})$ является почти периодической функцией и поэтому не имеет предела при $t\to\infty$.

Посмотрим теперь, как будет обстоять дело после совершения предельного перехода $V\to\infty$. Наложим на функции волнового вектора $\omega_k,\mathcal{L}(\mathbf{k})$ следующие условия. Пусть $\mathbf{J}(\Omega)$ — аналитическая функция Ω в полосе, окружающей вещественную ось, обладающая свойствами

$$\mathbf{J}(-\Omega)=\mathbf{J}(\Omega),\quad |\mathbf{J}\Omega|\leqslant\frac{\text{const}}{|\Omega|^2},$$

и на вещественной оси $\mathbf{J}(\Omega)>0$.

Выберем теперь $\mathcal{L}(k),\omega_k$ так, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\omega_k<\omega}\frac{\mathcal{L}^2(k)k^2}{\omega_k^2}\leqslant\frac{c_1}{\omega},$$

где c_1 — постоянная, не зависящая от V,

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\omega_k\geqslant\omega}\frac{\mathcal{L}^2(k)k^2}{\omega_k^2}\to\int_0^\omega\mathbf{J}(\omega)\,d\omega,\quad \omega>0.$$

Такой выбор можно реализовать, положив, например,

$$\omega_k = S|k|, \quad S = \text{const}, \quad \mathcal{L}^2(k) = 2\pi^2 \frac{S^2}{|k|^2} \mathbf{J}(S|k|); \quad \mathcal{L}(0) = 0.$$

При выполнении этих условий нетрудно показать, что, во-первых, существует предел $|\lim_{V\to\infty} w_t(\mathbf{p})|$, а во-вторых, что эта предельная функция при $t \to \infty$ стремится к равновесной. Для доказательства этого утверждения удобно исключить $b_k(t), \overset{+}{b}_k(t)$ из наших дифференциальных уравнений, получив при этом уравнение вида

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + \frac{1}{m}\int_0^\infty d\tau K(t-\tau)\mathbf{p}(\tau) =$$

$$= \mathbf{r}K(t) - \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \left(\frac{\hbar}{2\omega_k}\right)^{1/2} \mathcal{L}(k)\mathbf{k}(b_k e^{-i\omega_k t} + \overset{+}{b}_{-k} e^{i\omega_k t}), \quad (2)$$

где

$$K(t) = \frac{1}{V}\sum_k \frac{\mathcal{L}^2(k)k^2}{\omega_k^2} \cos\omega_k t.$$

Уравнение (2) удобно решить с помощью преобразования Лапласа. Таким образом, находим выражение оператора $\mathbf{p}(t)$ через начальные значения операторов $\mathbf{r}, \mathbf{p}, \ldots, b_k, \overset{+}{b}_k$, что позволяет с помощью формулы (1) найти собственно плотность вероятности распределения по импульсам $w_t(\mathbf{p})$ в S-системе. В случае линейной модели полярона такая плотность вероятности имеет вид сдвинутого распределения Максвелла [1].

Для такого $w_t(\mathbf{p})$ нетрудно убедиться в существовании термодинамического предела, а также в том, что предельная функция

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{V\to\infty} w_t(\mathbf{p})$$

описывает равновесие в системе.

Список литературы

1. *Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.)* Кинетическое уравнение для динамической системы, взаимодействующей с фононным полем // ЭЧАЯ. 1980. Т. 11, вып. 2. С. 245–300; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VII, 2007, с. 560.
2. *Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.)* Аспекты теории полярона. ОИЯИ, Р17-81-65. Дубна, 1981; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VII, 2007, с. 377.

Часть вторая

ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ КОНДЕНСИРОВАННОЙ МАТЕРИИ

7.

К ТЕОРИИ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ*

В настоящей статье сделана попытка построения последовательной молекулярной теории явления сверхтекучести без допущения определенных предположений о структуре энергетического спектра.

Наиболее естественно здесь исходить из модели неидеального газа Бозе–Эйнштейна со слабым взаимодействием между частицами.

Аналогичные попытки объяснения сверхтекучести с помощью явления вырождения идеального газа Бозе–Эйнштейна уже делались в свое время Тисса и Лондоном, но столкнулись с сильной критикой.

Указывалось, например, что гелий II из-за наличия интенсивного взаимодействия между его молекулами не имеет ничего общего с идеальным газом. Это возражение, впрочем, не может считаться существенным, так как если поставить целью создание не феноменологической теории, а молекулярной и исходить только из общепринятых «микроскопических» уравнений квантовой механики, то совершенно ясно, что попытки теоретического расчета свойств реальной жидкости безнадежны. От молекулярной теории сверхтекучести, во всяком случае на первом этапе, можно требовать лишь принципиального, качественного объяснения, основанного на упрощенной модели.

Действительно, существенное возражение против указанного круга идей состоит в том, что в вырожденном идеальном газе Бозе–Эйнштейна частицы, находящиеся в основном состоянии, не могут вести себя как «сверхтекучие», поскольку ничто не могло бы помешать им обмениваться импульсом с возбужденными частицами при столкновениях и тем самым испытывать трение при их движении через жидкость.

В настоящей статье мы постараемся преодолеть эту основную трудность и показать, что при некоторых условиях в слабонеидеальном газе Бозе–Эйнштейна «вырожденный конденсат» может двигаться без трения относительно элементарных возбуждений с произвольной достаточно малой скоростью. Существенно отметить, что в развиваемой теории эти элементарные возбуждения являются коллективным эффектом и не могут отождествляться с индивидуальными молекулами. Необходимость рассмотрения «коллективных» элементарных возбуждений вместо индивидуальных молекул была впервые подчеркнута Л. Д. Ландау в его известной работе по теории сверхтекучести.

§ 1. Рассмотрим систему из N одинаковых одноатомных молекул, заключенных в некотором макроскопическом объеме V и подчиняющихся статистике Бозе.

---

* Известия АН СССР. Серия физическая. 1947. Т. 11, № 1. С. 77; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 307.

Предположим, как обычно, что ее гамильтониан имеет вид

$$H=\sum_{i=1}^{N}T(p_i)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\Phi(|q_i-q_j|),$$

где

$$T(p_i)=\frac{|p_i|^2}{2m}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{|p_i^\alpha|^2}{2m}$$

— кинетическая энергия i-й молекулы, $\Phi(|q_i-q_j|)$ — потенциальная энергия пары (i,j).

Тогда, воспользовавшись методом вторичного квантования, напишем основное уравнение в следующей форме:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+\int\Phi(|q-q'|)\Psi^*(q')\Psi(q')\,dq'\Psi, \tag{1}$$

причем

$$\Psi=\sum_f a_f\varphi_f(q),\quad \Psi^*=\sum_f a_f^*\varphi_f^*(q).$$

В этих формулах a_f, a_f^* — сопряженные операторы с перестановочными соотношениями известного типа:

$$a_fa_{f'}-a_{f'}a_f=0,\quad a_fa_{f'}^*-a_{f'}^*a_f=\Delta_{f,f'}=\begin{cases}0, & f\neq f',\\ 1, & f=f',\end{cases}$$

а $\{\varphi_f(q)\}$ — ортонормированная

$$\int\varphi_f^*(q)\varphi_{f'}(q)\,dq=\Delta_{f,f'}.$$

Для простоты изложения будем применять в дальнейшем систему собственных функций оператора импульса одной частицы:

$$\varphi_f(q)=\frac{1}{V^{1/2}}\exp\left[i\frac{(fq)}{\hbar}\right],\quad (fq)=\sum_{\alpha=1}^{3}f^\alpha q^\alpha,$$

для которой оператор $a_f^*a_f$ представляет число молекул с импульсом f. При конечном значении V вектор f, очевидно, является квантованным. Например, при обычных граничных условиях типа периодичности

$$f^\alpha=\frac{2\pi n^\alpha h}{l},$$

где n^1, n^2, n^3 — целые числа; l — сторона куба, объем которого V.

Поскольку, однако, мы здесь будем заниматься исследованием термодинамических объемных свойств, мы должны всегда иметь в виду предельный переход, при котором стенки сосуда раздвигаются до бесконечности, $V\to\infty$, $N\to\infty$, а удельный объем $v=V/N$ остается постоянным. Поэтому в конечном результате будем переходить к непрерывному спектру, заменяя суммы вида $\sum_f F(f)$ интегралами

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int F(f)]\,df.$$

Уравнения (1) являются точными уравнениями задачи N тел, и, чтобы продвинуться в исследовании движения рассматриваемой совокупности молекул, нам необходимо совершить некоторую аппроксимацию, основанную на допущении малости энергии взаимодействия. В соответствии с этим допущением будем считать потенциальную функцию $\Phi(r)$ пропорциональной некоторому малому параметру ε. Какое безразмерное отношение может быть принято за ε, — выяснится в дальнейшем. Заметим лишь, что, строго говоря, сделанное предположение соответствует пренебрежению конечностью радиуса молекул, поскольку мы здесь не учитываем интенсивного возрастания $\Phi(r)$ при малых r, обеспечивающего непроницаемость молекул. Впрочем, как мы увидим, результаты, которые будут получены, могут быть обобщены и на случай учета конечности подобного радиуса.

Переходя к формулировке приближенного метода, заметим, что если бы взаимодействие полностью отсутствовало, т. е. если бы параметр ε точно равнялся нулю, то при нулевой температуре мы могли бы положить $N_f = 0$ $(f \neq 0)$. В рассматриваемом же случае малого ε и слабо возбужденных состояний газа эти соотношения выполняются приближенно в том смысле, что подавляющая часть молекул обладает импульсами, близкими к нулю. Разумеется, выбор нулевого импульса как предельного для частиц в основном состоянии, очевидно, соответствует специальному выбору координатной системы — именно такой, в которой «конденсат» покоится.

На этих соображениях мы основываем следующий прием для приближенного решения уравнений (1).

1. Ввиду того что $N_0 = a_0^* a_0$ весьма велико по сравнению с единицей, выражение

$$a_0^* a_0 - a_0 a_0^* = 1$$

должно быть мало по сравнению с самими a_0, a_0^*, и потому мы будем считать a_0, a_0^* обычными c-числами[1], пренебрегая их некоммутативностью.

2. Полагая

$$\Psi = \frac{a_0}{\sqrt{V}} + \vartheta, \quad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{f \neq 0} a_f \exp\left[i \frac{(fq)}{\hbar}\right],$$

будем считать ϑ «поправочным членом первого порядка» и пренебрегать в уравнениях (1) членами начиная с квадратичных относительно ϑ, что соответствует учету слабости возбуждения.

Тогда получим основные приближенные уравнения в виде

$$i\hbar \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vartheta + \frac{N_0}{V} \Phi_0 \vartheta + \\ + \frac{N_0}{V} \int \Phi(|q - q'|) \vartheta(q')\, dq' + \frac{a_0^2}{V} \int \Phi(|q - q'|) \vartheta^*(q')\, dq', \quad (2)$$

$$i\hbar \frac{\partial a_0}{\partial t} = \frac{N_0}{V} \Phi_0 a_0,$$

[1] Аналогичное замечание было использовано Дираком в его монографии «Основы квантовой механики» (1935, 2-е изд.) в конце § 63 «Волны и бозе–эйнштейновские частицы».

где

$$\Phi_0 = \int \Phi(|q|)\, dq.$$

Для перехода от операторной волновой функции ϑ к операторным амплитудам a_f воспользуемся разложением Фурье

$$\Phi(|q-q'|) = \sum_f \frac{1}{V} \exp\left[\frac{i}{\hbar} f(q-q')\right] \nu(f). \tag{3}$$

Благодаря радиальной симметрии потенциальной функции амплитуды

$$\nu(f) = \int \Phi(|q|) \frac{1}{V} \exp\left[-i\frac{(fq)}{\hbar}\right] dq$$

в этом разложении зависят лишь от длины $|f|$ вектора f.

Подставив (3) в уравнение (2), найдем

$$i\hbar \frac{\partial a_f}{\partial t} = -\left\{T(f) + E_0 + \frac{N_0}{V}\nu(f)\right\} a_f + \frac{a_0^2}{V}\nu(f) a^*_{-f}, \quad E_0 = \frac{N_0}{V}\Phi_0,$$

или, полагая, что

$$a_f = \exp\left[\frac{E_0}{i\hbar}\right] b_f, \quad a_0 = \exp\left[\frac{E_0}{i\hbar}\right] b, \tag{4}$$

можем также написать:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial b_f}{\partial t} &= -\left(T(f) + \frac{N_0}{V}\nu(f)\right) b_f + \frac{b^2}{V}\nu(f) b^*_{-f}, \\ -i\hbar \frac{\partial b_{-f}}{\partial t} &= \frac{(b^*)^2}{V}\nu(f) b_f + \left(T(f) + \frac{N_0}{V}\nu(f)\right) b^*_{-f}. \end{aligned} \tag{5}$$

Решая эту систему двух уравнений с постоянными коэффициентами, убеждаемся, что зависимость от времени операторов b_f, b_f^* выражается линейной комбинацией экспонент вида

$$\exp\left[\pm\frac{E(f)}{i\hbar} t\right],$$

где

$$E(f) = \sqrt{2T(f)\frac{N_0}{V}\nu(f) + T^2(f)}\,. \tag{6}$$

Заметим теперь, что если

$$\nu(0) = \int \Phi(|q|)\, dq > 0, \tag{7}$$

то в рассматриваемом случае (ε достаточно мало) подкоренное выражение в формуле (6) будет положительным и, таким образом, b_f, b_f^* оказываются периодическими функциями времени. Если, наоборот, $\nu(0) < 0$, то для малых импульсов это подкоренное выражение будет отрицательным и, следовательно, $E(f)$ окажется комплексным. Поэтому b_f, b_f^* будут содержать вещественную экспоненту, возрастающую со временем, ввиду чего состояния с малыми N_f оказываются неустойчивыми.

Чтобы обеспечить устойчивость слабовозбужденных состояний, будем рассматривать в дальнейшем только такие типы взаимодействия между молеку-

лами, для которых неравенство (7) удовлетворяется. Интересно отметить, что неравенство (7) представляет собой не что иное, как условие термодинамической устойчивости газа при абсолютном нуле.

В самом деле, при абсолютном нуле свободная энергия совпадает со средней энергией, а главный член в выражении этой последней имеет вид

$$E = \frac{N^2}{2V} \int \Phi(|q|)\, dq,$$

так как поправочные члены, например средняя кинетическая энергия, будут пропорциональны высшим степеням ε.

Поэтому давление P выразится формулой

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{N^2}{2V^2} \int \Phi(|q|)\, dq = \frac{\rho^2}{2m^2} \int \Phi(|q|)\, dq,$$

где $\rho = Nm/V$ — плотность газа.

Следовательно, неравенство (7) эквивалентно условию термодинамической устойчивости: $\partial P/\partial \rho > 0$.

Заметим, наконец, что поскольку мы здесь учитываем лишь главные члены, то вместо выражения (6) можем написать в том же приближении:

$$E(f) = \sqrt{2T(f)\,\frac{N}{V}\,\nu(f) + T^2(f)} = \sqrt{\frac{|f|^2\nu(0)}{mv} + \frac{|f|^4}{4m^2}}, \tag{6'}$$

откуда для малых импульсов

$$E(f) = \sqrt{\frac{\nu(0)}{mv}}\,|f|(1 + \ldots) = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}\,|f|(1 + \ldots),$$

где многоточие обозначает члены, исчезающие вместе с f.

Условимся теперь всегда приписывать всякому квадратному корню, с которым будем иметь дело, положительный знак.

Тогда для малых импульсов

$$E(f) = c|f|(1 + \ldots), \tag{8}$$

где c — скорость звука при абсолютном нуле. Наоборот, для достаточно больших импульсов можно разложить $E(f)$ по степеням e и написать:

$$E(f) = \frac{|f|^2\nu(0)}{2m} + \frac{1}{v}\,\nu(f) + \ldots . \tag{9}$$

Так как $\nu(f)$ стремится к нулю при увеличении $|f|$, то для достаточно больших импульсов величина $E(f)$ приближается к кинетической энергии одной молекулы $T(f)$.

Возвратимся теперь к уравнениям (5) и введем вместо операторов b_f, b_f^* новые взаимно сопряженные операторы ξ_f, ξ_f^* с помощью соотношений

$$\xi_f = \frac{b_f - L_f b_{-f}^*}{\sqrt{1 - |L_f|^2}}, \quad \xi_f^* = \frac{b_f^* - L_f^* b_{-f}}{\sqrt{1 - |L_f|^2}}, \tag{10}$$

в которых L_f представляют числа, определенные равенствами[1]

$$L_f = \frac{Vb^2}{N_0^2 \nu(f)} \left\{ E(f) - T(f) - \frac{N_0}{V} \nu(f) \right\},$$

так что

$$|L_f|^2 = \left(\frac{\frac{N_0}{V} \nu(f)}{E(f) + T(f) + \frac{N_0}{V} \nu(f)} \right)^2, \qquad (11)$$

$$1 - |L_f|^2 = \frac{2E(f)}{E(f) + T(f) + \frac{N_0}{V} \nu(f)}.$$

Выражая b_f, b_f^* из формулы (10), найдем

$$b_f = \frac{\xi_f + L_f \xi_{-f}^*}{\sqrt{1 - |L_f|^2}}, \quad b_f^* = \frac{\xi_f^* + L_f^* \xi_{-f}}{\sqrt{1 - |L_f|^2}}. \qquad (12)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (5), получим

$$i\hbar \frac{\partial \xi_f}{\partial t} = E(f) \xi_f, \quad -i\hbar \frac{\partial \xi_f^*}{\partial t} = E(f) \xi_f^*. \qquad (13)$$

Непосредственно убеждаемся также, что новые операторы удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы a_f, a_f^*:

$$\xi_f \xi_{f'} - \xi_{f'} \xi_f = 0, \quad \xi_f \xi_{f'}^* - \xi_{f'}^* \xi_f = \Delta_{f,f'}. \qquad (14)$$

Отсюда уже можно заключить, что возбужденные состояния изучаемой совокупности молекул можно представить как идеальный газ из отдельных «элементарных возбуждений» — «квазичастиц» с энергией, зависящей от импульса согласно формуле $E = E(f)$. Подобно тому как молекулы описывались операторами a_f, a_f^*, эти квазичастицы описываются операторами ξ_f, ξ_f^* и потому также подчиняются статистике Бозе. Оператор

$$n_f \xi_f^* \xi_f$$

представляет собой число квазичастиц с импульсом f.

Сказанное станет совершенно ясным, когда мы рассмотрим полную энергию

$$H = H_{\text{кин}} + H_{\text{пот}},$$

где

$$H_{\text{кин}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^*(q) \Delta \Psi(q)\, dq,$$

$$H_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \int \Phi(|q - q'|) \Psi^*(q) \Psi^*(q') \Psi(q) \Psi(q')\, dq'\, dq =$$

$$= \frac{1}{2V} \sum_f \nu(f) \int \exp\left[i \frac{f(|q - q'|)}{\hbar} \right] \Psi^*(q) \Psi^*(q') \Psi(q) \Psi(q')\, dq'\, dq.$$

[1] Если мы здесь построим соответствующую частоту $E(f)/\hbar$ и перейдем к пределу: $\hbar \to 0$, $f/\hbar = k$, то получим классическую формулу А. А. Власова для зависимости частоты от волнового числа.

Имеем для кинетической энергии

$$H_{\text{кин}} = \sum_f T(f) a_f^* a_f = \sum_f T(f) b_f^* b_f.$$

Потенциальную энергию вычислим в соответствии с принятым приближением, а именно: в выражении

$$\Psi^*(q)\Psi^*(q')\Psi(q)\Psi(q') = \left(\frac{a_0^*}{\sqrt{V}} + \vartheta^*(q)\right)\left(\frac{a_0^*}{\sqrt{V}} + \vartheta^*(q')\right)\left(\frac{a_0}{\sqrt{V}} + \vartheta(q)\right)\left(\frac{a_0}{\sqrt{V}} + \vartheta(q')\right)$$

отбросим члены начиная с кубических по отношению к ϑ, ϑ^*.

Тогда

$$H_{\text{пот}} = \Phi_0 \left\{ \frac{1}{2}\frac{N_0^2}{V} + \frac{N_0}{V}\sum_{f\neq 0} b_f^* b_f \right\} + \frac{b^2}{2V}\sum_{f\neq 0}\nu(f) b_f^* b_{-f}^* + \frac{(b^*)^2}{2V}\sum_{f\neq 0}\nu(f) b_f b_{-f} + \frac{N_0}{V}\sum_{f\neq 0}\nu(f) b_f^* b_f.$$

Так как здесь

$$\sum_{f\neq 0} b_f^* b_f = \sum_{f\neq 0} N_f = N - N_0,$$

то в принятом приближении

$$\frac{1}{2}\frac{N_0^2}{V} + \frac{N_0}{V}\sum_{f\neq 0} b_f^* b_f = \frac{1}{2}\frac{N^2}{V},$$

и потому

$$H_{\text{пот}} = \frac{N^2}{2V}\Phi_0 + \frac{b^2}{2V}\sum_{f\neq 0}\nu(f) b_f^* b_{-f}^* + \frac{(b^*)^2}{2V}\sum_{f\neq 0}\nu(f) b_f b_{-f} + \frac{N_0}{V}\sum_{f\neq 0}\nu(f) b_f^* b_f + \sum_{f'} T(f) b_f^* b_f.$$

Выразив операторы b_f, b_f^* через операторы ξ_f, ξ_f^* с помощью формул (12), найдем окончательно

$$H = H_0 + \sum_{f\neq 0} E(f) n_f, \quad n_f = \xi_f^* \xi_f, \tag{15}$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2}\frac{N^2}{V}\Phi_0 + \sum_{f\neq 0}\frac{E(f) - T(f) - \frac{N_0}{V}\nu(f)}{2} = \frac{1}{2}\frac{N^2}{V}\Phi_0 + \frac{V}{2(2\pi\hbar)^3}\int\left\{E(f) - T(f) - \frac{N_0}{V}\nu(f)\right\} df. \tag{16}$$

Итак, полная энергия рассматриваемого неидеального газа складывается из энергии основного состояния H_0 и суммы индивидуальных энергий отдельных квазичастиц. Квазичастицы, очевидно, не взаимодействуют друг с другом и образуют идеальный газ Бозе–Эйнштейна.

Легко видеть, что отсутствие взаимодействия между квазичастицами обусловлено применявшейся аппроксимацией, в которой в выражении энергии отбрасывались члены начиная с кубических по отношению к ξ_f, ξ_f^*. Поэтому полученный результат относится лишь к слабовозбужденным состояниям.

Если бы мы учли как малое возмущение отброшенные кубические члены в выражении энергии или соответственно квадратичные члены в уравнениях (13), то мы обнаружили бы слабое взаимодействие между квазичастицами, обусловливающее установление статистического равновесия в их совокупности. Переходя к изучению состояния статистического равновесия, докажем, что полный импульс квазичастиц $\sum f n_f$ сохраняется. Рассмотрим для этого компоненты полного импульса совокупности молекул. Имеем

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^\alpha = \int \Psi^*(q) \left\{ -i\hbar \frac{\partial \Psi(q)}{\partial q^\alpha} \right\} dq = \sum_f f^\alpha a_f^* a_f = \sum_f f^\alpha b_f^* b_f,$$

откуда на основании формул преобразования (12) убеждаемся, что

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^\alpha = \sum_f f^\alpha \frac{(\xi_f^* + L_f^* \xi_{-f})(\xi_f + L_f \xi_{-f}^*)}{1 - |L_f|^2}.$$

Но ввиду инвариантности L_f, L_f^* при замене f на $-f$ можно написать:

$$\sum_f f^\alpha \frac{L_f^* \xi_{-f} \xi_f}{1 - |L_f|^2} = \sum_f f^\alpha \frac{L_f \xi_f^* \xi_{-f}^*}{1 - |L_f|^2} = 0,$$

$$\sum_f f^\alpha \frac{|L_f|^2 \xi_{-f} \xi_{-f}^*}{1 - |L_f|^2} = \sum_f f^\alpha \frac{|L_f|^2 (\xi_{-f} \xi_{-f}^* - 1)}{1 - |L_f|^2} = \sum_f f^\alpha \frac{|L_f|^2}{1 - |L_f|^2} \xi_f^* \xi_f,$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^\alpha = \sum_f f^\alpha n_f,$$

т. е. что полный импульс совокупности молекул равен полному импульсу совокупности квазичастиц. Поскольку полный импульс совокупности молекул сохраняется, то сумма $\sum f n_f$ действительно представляет собой интеграл движения.

Легко заметить, что полное число квазичастиц n_f не сохраняется: они могут возникать и уничтожаться. Поэтому с помощью обычного рассуждения убеждаемся, что в состоянии статистического равновесия средние значения чисел заполнения $\overline{n}_f$ $(f \neq 0)$ определяются формулой

$$\overline{n}_f = \left\{ A \exp\left(\frac{E(f) - (fu)}{\theta} \right) - 1 \right\}^{-1}, \quad A = 1, \tag{17}$$

где θ — температурный модуль, u — произвольный вектор. Длина этого вектора, впрочем, должна быть ограничена сверху. В самом деле, так как средние

числа заполнения должны быть положительны, то для всех $f \neq 0$ должно выполняться неравенство

$$E(f) > (fu),$$

из которого следует неравенство

$$E(f) > |f||u|.$$

Но в силу ранее установленных свойств $E(f)$ отношение

$$\frac{E(f)}{|f|}$$

является непрерывной положительной функцией $|f|$, принимающей значение $c > 0$ при $|f| = 0$ и возрастающей как $|f|/(2m)$ при $|f| \to \infty$. Поэтому рассматриваемое отношение имеет существенно положительное минимальное значение; таким образом, условие положительности чисел $\overline{n}_f$ эквивалентно неравенству

$$|u| \leqslant \min \frac{E(f)}{|f|}. \tag{18}$$

Если бы при малых импульсах величина $E(f)$ убывала не пропорционально импульсу, а пропорционально его квадрату, как кинетическая энергия молекулы, то правая часть полученного неравенства равнялась бы нулю и единственным возможным значением u был бы нуль. В нашем же случае вектор $\mathbf{u}$ может быть произвольным, лишь бы его длина была достаточно мала.

Заметим, что формула (17) дает такое распределение импульсов в газе квазичастиц, при котором он как целое движется со скоростью u. Вначале мы выбрали координатную систему, в которой конденсат, т. е. совокупность молекул, в основном состоянии покоится. Если бы мы перешли к координатной системе, в которой газ квазичастиц как целое покоится, мы обнаружили бы, наоборот, движение конденсата со скоростью u. Поскольку это относительное движение происходит стационарно в состоянии статистического равновесия при отсутствии внешних сил, мы видим, что оно не сопровождается трением и представляет собой, следовательно, свойство сверхтекучести[1].

Как мы видели, энергия квазичастицы при малых импульсах приближенно равна $c|f|$, где c — скорость звука. Поэтому квазичастица при малых импульсах представляет собой не что иное, как фонон. При увеличении импульса, когда кинетическая энергия $T(f)$ делается большой по сравнению с энергией связи молекулы, энергия квазичастицы непрерывно приближается к индивидуальной энергии молекулы $T(f)$.

Таким образом, ни о каком разделении квазичастиц на два различных сорта — на фононы и ротоны — не может быть речи.

---

[1] Если мы возьмем систему координат, в которой конденсат движется со скоростью u, нетрудно заметить, что энергия рассматриваемой совокупности молекул будет равна

$$H = \sum_f \{E(f) - (fu)\} n_f + H_0 + \frac{Mu^2}{2}.$$

Отсюда с помощью рассуждения Ландау из его известной работы (1941) свойство сверхтекучести делается непосредственно очевидным, поскольку возникновение элементарных возбуждений энергетически невыгодно, так как сопровождается увеличением энергии.

§ 2. Рассмотрим теперь распределение импульсов в совокупности молекул для состояния статистического равновесия. Введем функцию $w(f)$, определив ее так, чтобы $Nw(f)\,df$ представляло среднее число молекул с импульсами из элементарного импульсного объема df. Эта функция, очевидно, нормирована в том смысле, что

$$\int w(f)\,df = 1. \tag{19}$$

Пусть теперь $F(f)$ — произвольная непрерывная функция импульса. Тогда среднее значение динамической переменной

$$\sum_{i=1}^{N} F(p_i)$$

будет равно

$$N\int F(f)w(f)\,df. \tag{20}$$

Но, с другой стороны, это же среднее значение равно

$$\sum_f F(f)\overline{N}_f = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int F(f)\overline{N}_f\,df. \tag{21}$$

Таким образом, сравнивая (20) и (21), находим

$$w(f) = \frac{V}{N(2\pi\hbar)^3}\,\overline{N}_f = \frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3}\,\overline{b_f^* b_f},$$

откуда, выражая b_f^*, b_f через ξ_f^*, ξ_f, получим

$$w(f) = \frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3}\left(1-|L_f|^2\right)^{-1}\overline{\left(\xi_f^* + L_f^*\xi_{-f}\right)\left(\xi_f + L_f\xi_{-f}^*\right)} =$$

$$= \frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{\overline{n}_f + |L_f|^2(\overline{n}_{-f}+1)}{1-|L_f|^2}, \tag{22}$$

где на основании (17)

$$\overline{n}_f = \left\{\exp\left(\frac{E(f)-(fu)}{\theta}\right) - 1\right\}^{-1}. \tag{23}$$

Полученное выражение (22) для функции распределения справедливо лишь для $f \neq 0$. Поэтому на основании условия нормировки (19) общее выражение функции распределения импульсов молекул будет равно

$$w(f) = C\delta(f) + \frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{\overline{n}_f + |L_f|^2(\overline{n}_{-f}+1)}{1-|L_f|^2}, \tag{24}$$

где $\delta(f)$ — δ-функция Дирака; C — число, определенное равенством

$$C = 1 - \frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{\overline{n}_f + |L_f|^2(\overline{n}_{-f}+1)}{1-|L_f|^2}\,df. \tag{25}$$

Величина C, очевидно, равна N_0/N, так как CN представляет собой среднее число молекул с нулевым импульсом. В полученных формулах на основании (11)

$$\frac{|L_f|^2}{1-|L_f|^2}=\frac{\left(\frac{N_0}{V}\nu(f)\right)^2}{2E(f)\left\{E(f)+T(f)+\frac{N_0}{V}\nu(f)\right\}},$$
$$\frac{1}{1-|L_f|^2}=\frac{E(f)+T(f)+\frac{N_0}{V}\nu(f)}{2E(f)}, \tag{26}$$

и потому при абсолютном нуле функция распределения импульсов

$$w(f)=C\delta(f)+\frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3}\frac{\left(\frac{N_0}{V}\nu(f)\right)^2}{2E(f)\left\{E(f)+T(f)+\frac{N_0}{V}\nu(f)\right\}},$$

причем

$$1-C=\frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{\left(\frac{N_0}{V}\nu(f)\right)^2}{2E(f)\left\{E(f)+T(f)+\frac{N_0}{V}\nu(f)\right\}}\,df. \tag{27}$$

Таким образом, и при абсолютном нуле только часть молекул будет обладать точно нулевым импульсом. Остальные же непрерывно распределены по всему спектру импульсов.

В соответствии с ранее сказанным примененный нами приближенный метод пригоден, лишь пока $(N-N_0)/N=1-C\ll 1$; поэтому взаимодействие между молекулами должно быть достаточно малым, чтобы обеспечить малость интеграла (27).

Теперь выясним, что следует понимать под малостью взаимодействия.

Пусть

$$\Phi(r)=\Phi_m F\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

где $F(\rho)$ — функция, принимающая со своими производными значения порядка 1 для $\rho\sim 1$, быстро стремящиеся к нулю при $\rho\to\infty$. Тогда

$$\nu(f)=\Phi_m r_0^3\omega\left(\frac{|f|r_0}{\hbar}\right),$$

где $\omega(x)$ — функция, принимающая значения ~ 1 для $x\sim 1$, быстро стремящиеся к нулю при $x\to\infty$.

Переходя в (27) к безразмерным переменным и приводя трехмерный интеграл к одномерному, найдем

$$\frac{N-N_0}{N}=\frac{\nu}{r_0^3}\eta\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\frac{\eta\omega^2(x)x\,dx}{\alpha(x)\{x\alpha(x)+x^2+\eta\omega(x)\}}, \tag{28}$$

где

$$\alpha(x)=\sqrt{x^2+2\eta\omega(x)},\quad \eta=\frac{r_0^3N_0}{V}\Phi_m\Big/\frac{\hbar^2}{2mr_0^2}\sim\frac{r_0^3}{\nu}\Phi_m\Big/\frac{\hbar^2}{2mr_0^2}.$$

Нетрудно убедиться, что при малом η интеграл в правой части (28) будет величиной порядка $\sqrt{\eta}$, и условие применимости данного метода будет представлено неравенствами

$$\eta \ll 1, \quad \frac{\nu}{r_0^3}\eta^{3/2} \ll 1,$$

т. е.

$$\frac{r_0^3}{\nu}\Phi_m \ll \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}, \quad \sqrt[3]{\frac{r_0^3}{\nu}}\,\Phi_m \ll \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}. \tag{29}$$

Для температур, отличных от нуля, аналогичное рассмотрение общей формулы (24) приведет к дополнительному условию слабости возбуждения, требующему, чтобы температура была мала по сравнению с температурой λ-точки.

Как видно, условие малости взаимодействия в форме (29) автоматически исключает возможность учета короткодействующих сил отталкивания, так как для этого было бы необходимо принять во внимание интенсивное возрастание $\Phi(r)$ при $r \to 0$.

Нетрудно, однако, видоизменить полученные здесь результаты с тем, чтобы распространить их на более реальный случай газа малой плотности с молекулами, обладающими конечным радиусом.

Действительно, в окончательных формулах потенциальная функция $\Phi(r)$ входит лишь в выражение

$$\nu(f) = \int \Phi(|q|) \exp\left(-i\frac{(fq)}{\hbar}\right) dq, \tag{30}$$

пропорциональное амплитуде борновской вероятности парного соударения. Так как при малой плотности взаимодействие между молекулами осуществляется главным образом с помощью именно парных соударений, то выражение (30) должно быть заменено[1] соответствующим выражением, пропорциональным амплитуде «точной вероятности» парного соударения; иными словами, мы должны положить

$$\nu(f) = \int \Phi(|q|)\varphi(q, f)\, dq, \tag{31}$$

где $\varphi(q, f)$ — решение уравнения Шредингера для относительного движения пары молекул:

$$-\frac{\hbar^2}{m}\Delta\varphi + \{\Phi(|q|) - E\}\varphi = 0,$$

переходящее на бесконечности в $\exp\left(-i\frac{(fq)}{\hbar}\right)$.

Замена (30) на (31) в формуле для $E(f)$ и приведет к результатам, относящимся к газам малой плотности. Поэтому, например, условие существования сверхтекучести $\nu(0) > 0$ может быть записано в виде

$$\int \Phi(|q|)\varphi(|q|)\, dq > 0, \tag{32}$$

[1] Это важное замечание было мне любезно сообщено Л. Д. Ландау.

где $\varphi(|q|)$ — радиально-симметричное решение уравнения

$$-\frac{\hbar^2}{m}\Delta\varphi + \Phi(|q|)\varphi = 0$$

переходящее на бесконечности в 1.

Чтобы связать, как и раньше, неравенство (32) с условием термодинамической устойчивости, вычислим главный член в разложении по степеням плотности свободной энергии газа при абсолютном нуле. Поскольку при абсолютном нуле свободная энергия совпадает со средней энергией, имеем следующее выражение для этой энергии, отнесенной к одной молекуле:

$$\mathcal{E} = \overline{T} + \frac{1}{2V}\int \Phi(|q|)g(|q|)\,dq, \tag{33}$$

где $\overline{T}$ — среднее значение кинетической энергии одной молекулы; $g(r)$ — молекулярная функция распределения, стремящаяся к 1 при $r \to \infty$.

С другой стороны, по теореме вириала давление P можно определить по формуле

$$PV = \frac{2}{3}\overline{T} - \frac{1}{6}\int \Phi'(|q|)|q|g(|q|)\,dq. \tag{34}$$

Заметим теперь, что главный член в разложении молекулярной функции распределения (при абсолютном нуле) по степеням плотности будет, очевидно, равен $\varphi^2(|q|)$. Поэтому, отбрасывая в (33) и (34) члены, пропорциональные квадрату плотности, найдем

$$\mathcal{E} = \overline{T} + \frac{1}{2V}\int \Phi(|q|)\varphi^2(|q|)\,dq,$$

$$PV = \frac{2}{3}\overline{T} - \frac{1}{6V}\int \Phi'(|q|)\varphi^2(|q|)\,dq.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$PV = -V\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V},$$

получим уравнение для определения главного члена в выражении $\overline{T}$. Произведя вычисление, находим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2V}\int \Phi(|q|)\varphi(|q|)\,dq = \frac{\nu(0)}{2V}, \quad P = \frac{\nu(0)}{2V^2}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае — газ малой плотности — условие существования сверхтекучести (32) эквивалентно обычному условию термодинамической устойчивости газа при абсолютном нуле:

$$\frac{\partial P}{\partial V} < 0.$$

Кроме того, можно также убедиться в том, что при малых импульсах энергия квазичастиц опять будет переходить в $c|f|$, где c — скорость звука.

Рассмотрим в качестве примера модель, в которой молекулы являются идеально упругими шарами с диаметром r_0, так что

$$\Phi(r) = +\infty, \qquad r < r_0,$$
$$\Phi(r) = 0, \qquad r > r_0.$$

Произведя простое вычисление, найдем

$$\nu(0) = 4\pi \frac{\hbar^2 r_0}{m}.$$

Если допустить здесь наличие слабого притяжения между шарами и положить

$$\Phi(r) = +\infty, \qquad r < r_0,$$
$$\Phi(r) = \varepsilon\Phi_0(r) < 0, \qquad r > r_0,$$

где ε — малый параметр, то с точностью до членов порядка ε^2 получим

$$\nu(0) = 4\pi \frac{\hbar^2 r_0}{m} + 4\pi \int_{r_0}^{\infty} r^2 \Phi(r)\, dr.$$

Таким образом, в данной модели появление сверхтекучести обусловлено соотношением между силами отталкивания и притяжения. Силы отталкивания «благоприятствуют» сверхтекучести, силы притяжения «препятствуют».

Заметим в заключение, что переход к рассмотрению реальной жидкости по указанной здесь теории, по-видимому, возможен, если использовать такие полуфеноменологические понятия, как понятие свободной энергии для слабонеравновесных состояний.

О ПРИНЦИПЕ КОМПЕНСАЦИИ И МЕТОДЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ*

§ 1. Принцип компенсации

В настоящей работе мы рассмотрим возможные обобщения принципа компенсаций «опасных» диаграмм на случай пространственно неоднородных состояний, а также установим его связь с методом самосогласованного поля.

Важным примером здесь может служить вопрос об электродинамике сверхпроводящего состояния, когда мы должны исследовать реакцию динамической системы на приложение внешнего неоднородного поля.

Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — вектор-потенциал, зависящий от $\mathbf{r}$. Тогда в индивидуальном гамильтониане электрона будет дополнительный член

$$-\frac{e}{2m}\{(pA)+(Ap)\}+\frac{e^2}{2m}A^2,$$

нарушающий пространственную однородность.

Заметим, что наличие членов этого типа делает недостаточной компенсацию диаграмм, соответствующих импульсам k, $-k$. Действительно, определяя $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в виде суперпозиции компонент Фурье

$$A(q)\mathrm{e}^{-i(q,r)},$$

мы видим, что в таком же смысле опасными будут и диаграммы с произвольными импульсами k_1, k_2, во всяком случае, те, для которых $q=k_1+k_2$ достаточно мало. Ясно, что их нельзя исключить с помощью обычного канонического преобразования, перепутывающего амплитуды рождения и уничтожения импульсов $\pm k$, так как оно содержит лишь одну произвольную функцию u_k (или v_k).

Чтобы компенсировать диаграммы с любой парой импульсов p_1, p_2, мы должны воспользоваться более общим *каноническим преобразованием*, сформулированным в работе [1]:

$$a_f=\sum_\nu(u_{f\nu}\alpha_\nu+v_{f\nu}a_\nu^+), \tag{1}$$

где $f=(\rho,\sigma)$; σ — спиновый индекс; $u_{f\nu}$, $v_{f\nu}$ — произвольные функции, связанные своеобразными соотношениями ортонормировки

$$\sum_\nu(u_{f\nu}u^*_{f'\nu}+v_{f\nu}v^*_{f'\nu})=\delta(f-f'),\quad \sum_\nu(u_{f\nu}v_{f'\nu}+u_{f'\nu}v_{f\nu})=0. \tag{2}$$

---

* Препринт ОИЯИ Р-267. Дубна, 1958; УФН. 1959. Т. 67, вып. 4. С. 549; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 424.

Именно эти соотношения обеспечивают канонический характер рассматриваемого преобразования (1).

Для простоты изложения мы изучим здесь обобщенный принцип компенсации применительно к гамильтониану с прямым взаимодействием между частицами, поскольку в таком случае уже первое приближение приводит к нетривиальному результату. Как уже отмечалось ранее [2], введение в рассмотрение, например, электронно-фононного взаимодействия потребует перехода ко второму приближению.

Имея в виду различные приложения, возьмем выражение полного гамильтониана в достаточно общей форме:

$$H=\sum_{f'f'} T(f,f')a_f^+ a_{f'}+\frac{1}{2}\sum_{f_1,f_2,f_2',f_1'} U(f_1,f_2,f_2',f_1')a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ a_{f_2'}a_{f_1'},$$
$$T(f,f')=I(f,f')-\lambda\delta(f-f'), \tag{3}$$

где λ — химический потенциал, I — индивидуальный гамильтониан частиц, U — энергия взаимодействия пары частиц. Мы, разумеется, предполагаем здесь, что I и U удовлетворяют обычным условиям симметрии, эрмитовости и т. п.

Принцип компенсации опасных диаграмм в рассматриваемом первом приближении будет таким:

$$\langle\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}H\rangle_0=0. \tag{4}$$

Усреднение берется по состоянию C_0, соответствующему вакууму для новых амплитуд α:

$$\alpha_\nu C_0=0,\quad C_0^*\alpha_\nu^+=0. \tag{5}$$

Уравнение (4) можем раскрыть, подставив сюда выражения (1) и вычислив просто вакуумные средние. Таким путем получим явные уравнения для определения неизвестных u, v, которые надо решать совместно с условиями (2).

В ряде случаев более удобно придать этим уравнениям несколько иную форму. Покажем для этого, что из (4) следует, что

$$\mathfrak{A}\equiv\langle[a_{f_1}a_{f_2};H]\rangle_0=0,$$
$$\mathfrak{B}\equiv\langle[a_{f_1}^+a_{f_2};H]\rangle_0=0. \tag{6}$$

Имеем, действительно,

$$\mathfrak{A}\equiv\sum_{\nu_1,\nu_2}\langle[(u_{f_1\nu_1}\alpha_{\nu_1}+v_{f_1\nu_1}\alpha_{\nu_1}^+)(u_{f_2\nu_2}\alpha_{\nu_2}+v_{f_2\nu_2}\alpha_{\nu_2}^+);H]\rangle_0=$$
$$=\sum_{\nu_1,\nu_2}u_{f_1\nu_1}u_{f_2\nu_2}\langle\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}H-H\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\rangle_0+$$
$$+\sum_{\nu_1,\nu_2}u_{f_1\nu_1}v_{f_2\nu_2}\langle\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}^+H-H\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}^+\rangle_0+$$
$$+\sum_{\nu_1,\nu_2}v_{f_1\nu_1}u_{f_2\nu_2}\langle\alpha_{\nu_1}^+\alpha_{\nu_2}H-H\alpha_{\nu_1}^+\alpha_{\nu_2}\rangle_0+$$
$$+\sum_{\nu_1,\nu_2}v_{f_1\nu_1}v_{f_2\nu_2}\langle\alpha_{\nu_1}^+\alpha_{\nu_2}^+H-H\alpha_{\nu_1}^+\alpha_{\nu_2}^+\rangle_0.$$

Но с учетом (5)

$$\langle H\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\rangle_0 = \langle \alpha^+_{\nu_1}\alpha^+_{\nu_2}H\rangle_0 = \langle \alpha^+_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}H\rangle_0 = \langle H\alpha^+_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\rangle_0 = 0$$

и, кроме того,

$$\langle \alpha_{\nu_1}\alpha^+_{\nu_2}H - H\alpha_{\nu_1}\alpha^+_{\nu_2}\rangle_0 = \langle -\alpha^+_{\nu_2}\alpha_{\nu_1}H + H\alpha^+_{\nu_2}\alpha_{\nu_1}\rangle_0 = 0.$$

Отсюда на основании условия (4) вытекает, что

$$\mathfrak{A} = \sum_{\nu_1,\nu_2} u_{f_1\nu_1}u_{f_2\nu_2}\langle \alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}H\rangle_0 - \sum_{\nu_1,\nu_2} v_{f_1\nu_1}v_{f_2\nu_2}\langle \alpha_{\nu_2}\alpha_{\nu_1}H\rangle_0^* = 0.$$

Аналогично доказывается и второе из уравнений (6).

Нетрудно убедиться также, что из уравнений (6) следует уравнение (4). Таким образом, обе эти системы (4), (6) полностью эквивалентны.

Покажем сейчас, что сами формы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не являются независимыми.

Начнем с преобразования соотношений ортонормировки (2). Введем комбинированные индексы

$$\begin{aligned} g &= (f,\rho), \quad \rho = 0,1 \\ \omega &= (\nu,\tau), \quad \tau = 0,1, \end{aligned} \tag{7}$$

и положим

$$\begin{aligned} \varphi_{\nu,0}(f,0) &= v^*_{f\nu}, \quad \varphi_{\nu,0}(f,1) = u_{f\nu}, \\ \varphi_{\nu,1}(f,0) &= u^*_{f\nu}, \quad \varphi_{\nu,1}(f,1) = v_{f\nu}. \end{aligned} \tag{8}$$

В таких обозначениях рассматриваемые соотношения принимают обычный вид

$$\sum_{\omega} \varphi^*_{\omega}(g)\varphi_{\omega}(g') = \delta(g-g'), \tag{9}$$

откуда следует, что

$$\sum_{g} \varphi^*_{\omega}(g)\varphi_{\omega'}(g) = \delta(\omega-\omega'),$$

или в старых обозначениях

$$\begin{aligned} \sum_f \{u^*_{f\nu_1}u_{f\nu_2} + v^*_{f\nu_2}v_{f\nu_1}\} &= \delta(\nu_1-\nu_2), \\ \sum_f \{v^*_{f\nu_1}u_{f\nu_2} + v^*_{f\nu_2}u_{f\nu_1}\} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

С помощью этих соотношений нетрудно выразить амплитуды α, α^+ через a, a^+:

$$\alpha_\nu = \sum_f \{u^*_{f\nu}a_f + v_{f\nu}a^+_f\}. \tag{11}$$

Обратим теперь внимание на тождество

$$\langle [\alpha^+_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}, H]\rangle_0 = 0, \tag{12}$$

обусловленное лишь свойствами (5). Подставив сюда выражения (11), найдем

$$\sum_{f_1,f_2} \langle [(u_{f_1\nu_1}a^+_{f_1} + v^*_{f_1\nu_1}a_{f_1})(u^*_{f_2\nu_2}a_{f_2} + v_{f_2\nu_2}a^+_{f_2}), H]\rangle_0 = 0$$

или, раскрывая скобки,

$$\sum_{f_1,f_2} u_{f_1\nu_1}u^*_{f_2\nu_2}\langle[a^+_{f_1}a_{f_2},H]\rangle_0+\sum_{f_1,f_2} u_{f_1\nu_1}v_{f_2\nu_2}\langle[a^+_{f_1}a^+_{f_2},H]\rangle_0+$$
$$+\sum_{f_1,f_2} v^*_{f_1\nu_1}u^*_{f_2\nu_2}\langle[a_{f_1}a_{f_2},H]\rangle_0+\sum_{f_1,f_2} v^*_{f_1\nu_2}v^*_{f_2\nu_2}\langle[a_{f_1}a^*_{f_2},H]\rangle_0=0.$$

Таким образом, убеждаемся, что между формами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеются тождественные соотношения[1]

$$\sum_{f_1,f_2}\{u_{f_1\nu_1}u^*_{f_2\nu_2}\mathfrak{B}(f_1,f_2)+u_{f_1\nu_1}v_{f_2\nu_2}\mathfrak{A}^*(f_1,f_2)+$$
$$+v^*_{f_1\nu_1}u_{f_2\nu_2}\mathfrak{A}(f_1,f_2)+v^*_{f_1\nu_1}v_{f_2\nu_2}\mathfrak{B}^*(f_1,f_2)\}=0. \quad (13)$$

Перейдем теперь к нахождению явных выражений для $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Имеем

$$\mathfrak{A}(f_1,f_2)=\sum_f\{T(f_1,f)\langle a_f a_{f_2}\rangle_0+T(f_2,f)\langle a_{f_1}a_f\rangle_0\}+$$
$$+\sum_{f_1',f_2'}U(f_1,f_2,f_2',f_1')\langle a_{f_1'}a_{f_2'}\rangle_0+\sum_{f,f_1',f_2'}U(f_1,f;f_2',f_1')\langle a^+_f a_{f_2}a_{f_2'}a_{f_1'}\rangle_0+$$
$$+\sum_{f,f_1',f_2'}U(f,f_2;f_2',f_1')\langle a^+_f a_{f_1}a_{f_2'}a_{f_1'}\rangle_0 \quad (14)$$

и также

$$\mathfrak{B}(f_1,f_2)=\sum_f\{T(f_2,f)\langle a^+_{f_1}a_f\rangle_0+T(f,f_1)\langle a^+_f a_{f_2}\rangle_0\}-$$
$$-\sum_{f,f_1',f_2'}\{U(f_1',f_2';f,f_1)\langle a^+_{f_1'}a^+_{f_2'}a_f a_{f_2}\rangle_0-U(f_2,f;f_2',f_1')\langle a^+_{f_1}a^+_f a_{f_2'}a_{f_1'}\rangle_0\}. \quad (15)$$

Входящие сюда вакуумные средние типа

$$F(f,f')=\langle a^+_f a_{f'}\rangle_0,\quad \Phi(f_1,f_2)=\langle a_{f_1}a_{f_2}\rangle_0, \quad (16)$$

$$F_2(f_1,f_2;f_2',f_1')=\langle a^+_{f_1}a^+_{f_2}a_{f_2'}a_{f_1'}\rangle_0,$$
$$\Phi_2(f_1;f_2,f_3,f_4)=\langle a^+_{f_1}a_{f_2}a_{f_3}a_{f_4}\rangle_0 \quad (17)$$

[1] Заметим, что если бы мы в формулах (6), определяющих $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, заменили усреднение по вакуумному состоянию C_0 усреднением

$$\frac{\mathrm{Sp}(\ldots D)}{\mathrm{Sp}\,D}$$

по некоторому распределению D, диагональному в представлении $\ldots n_\nu \ldots$ ($n_\nu=\alpha^+_\nu\alpha_\nu$), то тождества (13) все же имели бы место при $\nu_1=\nu_2$. Действительно, ввиду диагональности D, $\mathrm{Sp}(\alpha^+_\nu\alpha_\nu HD)=\mathrm{Sp}(HD\alpha^+_\nu\alpha_\nu)=\mathrm{Sp}(H\alpha^+_\nu\alpha_\nu D)$ и, следовательно,

$$\overline{[\alpha^+_\nu\alpha_\nu,H]}=0.$$

определим, выражая амплитуды a, a^+ через α, α^+, с помощью формулы (1). Таким образом найдем

$$F(f, f') = \sum_{\nu} v^*_{f\nu} v_{f'\nu}, \quad \Phi(f_1, f_2) = \sum_{\nu} u_{f_1\nu} v_{f_2\nu}, \tag{18}$$

$$F_2(f_1, f_2; f_2', f_1') = F(f_1, f_1')F(f_2, f_2') - \\ - F(f_1, f_2')F(f_2, f_1') + \Phi^*(f_1, f_2)\Phi(f_1', f_2'), \tag{19}$$

$$\Phi_2(f_1; f_2, f_3, f_4) = F(f_1, f_2)\Phi(f_3, f_4) - \\ - F(f_1, f_3)\Phi(f_2, f_4) + F(f_1, f_4)\Phi(f_2, f_3). \tag{20}$$

Подставив полученные выражения в (14), (15), мы найдем искомые явные выражения для $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{A}(f_1, f_2) = \mathfrak{A}(f_1, f_2/F, \Phi),$$
$$\mathfrak{B}(f_1, f_2) = \mathfrak{B}(f_1, f_2/F, \Phi).$$

Имеем, например,

$$\mathfrak{A}(f_1, f_2/F, \Phi) = \sum_f \{E(f_1, f)\Phi(f, f_2) + E(f_2, f)\Phi(f_1, f)\} + \\ + S(f_1, f_2) - \sum_f \{F(f, f_1)S(f, f_2) + F(f, f_2)S(f_1, f)\}, \tag{21}$$

где

$$E(f_1, f) = T(f_1, f) + \sum_{f', f''} \{U(f_1, f''; f', f) - U(f_1, f''; f, f')\}F(f'', f'),$$
$$S(f_1, f_2) = \sum_{f_1', f_2'} U(f_1, f_2; f_2', f_1')\Phi(f_1,' f_2'). \tag{22}$$

Итак, предложенный обобщенный принцип компенсации приводит в первом приближении к уравнениям

$$\mathfrak{A}(f_1, f_2/F, \Phi) = 0,$$
$$\mathfrak{B}(f_1, f_2/F, \Phi) = 0, \tag{23}$$

которые ранее были уже получены [3, 4] с помощью обобщения хорошо известного метода самосогласованного поля Фока.

Кроме этих уравнений мы имеем еще дополнительное условие, а именно: функции F, Φ должны быть представимы в форме (18).

Было бы, очевидно, весьма целесообразно сформулировать такое дополнительное условие в виде ряда соотношений, наложенных непосредственно на F, Φ.

Заметим прежде всего, что из (18) сразу же вытекает, что

$$F^*(f, f') = F(f', f), \quad \Phi(f_2, f_2) = -\Phi(f_1, f_2). \tag{24}$$

Введем опять комбинированные индексы g, ω и рассмотрим матрицу

$$K(g, g') = \sum_{\omega} \varphi^*_{\omega}(g)\varphi_{\omega}(g')n_{\omega}, \tag{25}$$

в которой

$$n_{\nu,0}=1, \quad n_{\nu,1}=0.$$

Тогда

$$K(f,0;f',0)=\sum_{\nu} v_{f\nu}v^{*}_{f'\nu}, \qquad K(f,0;f',1)=\sum_{\nu} v_{f\nu}u_{f'\nu},$$
$$K(f,1;f',0)=\sum_{\nu} u^{*}_{f\nu}v^{*}_{f'\nu}, \qquad K(f,1;f',1)=\sum_{\nu} u^{*}_{f\nu}u_{f'\nu}.$$

Отсюда получим в силу условий ортонормировки (2):

$$K(g,g')=\begin{vmatrix} F(f',f); & -\Phi(f,f') \\ \Phi^{*}(f,f'); & \delta(f-f')-F(f,f') \end{vmatrix}. \tag{26}$$

С другой стороны, прямо из определения (25) мы видим, что $\varphi_\omega(g)$, n_ω будут соответственно собственными векторами и собственными числами оператора K. Так как эти собственные числа равны нулю или единице, K будет проекционным оператором, и потому

$$K=K^2. \tag{27}$$

Раскрывая это соотношение, найдем дополнительные условия, которым должны удовлетворять функции F и Φ:

$$\begin{gathered} F(f_1,f_2)=\sum_f F(f_1,f)F(f,f_2)+\sum_f \Phi^{*}(f,f_1)\Phi(f,f_2), \\ \sum_f F(f_1,f)\Phi^{*}(f,f_2)+\sum_f F(f_2,f)\Phi(f,f_1)=0. \end{gathered} \tag{28}$$

Покажем сейчас, что условия (24), (28) полностью эквивалентны условию представимости функций F, Φ в форме (18). Для этого нам остается доказать, что любые F, Φ, удовлетворяющие условиям (24), (28), действительно могут быть представлены в виде (18).

Прежде всего воспользуемся тривиальными условиями (24) и введем матрицу $K(g,g')$ с помощью (26). В силу (24) $K(g,g')$, очевидно, будет эрмитовой и потому может быть представлена в форме (25), в которой $\varphi_\omega(g)$ будет представлять ортонормированную систему собственных векторов K.

Введем в пространстве точек $\{g\}$ точечное преобразование T, меняющее $(f,0)$ на $(f,1)$ и наоборот. Имеем

$$TK\equiv K(Tg;Tg')=\begin{vmatrix} \delta(f-f')-F(f,f'); & \Phi^{*}(f,f') \\ -\Phi(f,f'); & F(f',f) \end{vmatrix}=\delta(g-g')-K^{*}(g,g').$$

С учетом этого свойства нетрудно заметить, что если $\varphi(g)$ есть какой-либо собственный вектор оператора K, а n — соответствующее собственное число, то $\varphi^{*}(Tg)$, $1-n$ будут также собственным вектором и числом для K.

Таким образом, нумерацию $\{\omega\}$ собственных векторов и чисел оператора K можем осуществить с помощью системы двух индексов $\{\nu,\tau\}$ $(\tau=0,\ 1)$, положив

$$\begin{gathered} n_{\nu,0}=n_\nu, \quad n_{\nu,1}=1-n_\nu, \\ \varphi_{\nu,0}(g)=\varphi_\nu(g), \quad \varphi_{\nu_1}(g)=\varphi^{*}_\nu(Tg). \end{gathered} \tag{29}$$

Теперь воспользуемся условиями (28), из которых вытекает, что

$$K = K^2$$

и, следовательно, $n_\omega = 0, 1$. Единичное значение припишем n_ν, а нулевое — $1 - n_\nu$, ликвидировав тем самым произвол, содержащийся в разбиении индекса ω на $(\nu, 0)$ и $(\nu, 1)$.

Определив $\varphi_{\nu,0}(g)$, $\varphi_{\nu,1}(g)$, можно теперь определить функции $u_{f\nu}$, $v_{f,\nu}$, обратив соотношения (8). Так как $\varphi_\omega(g)$ образуют обычную ортонормированную систему, мы видим, что найденные функции u, v будут удовлетворять соотношениям (2).

Для окончания данного доказательства нам остается лишь раскрыть равенства (25) и заметить, что из них непосредственно вытекают представления[1] (18).

Итак, рассматриваемая задача приведена к решению уравнений (23) совместно с дополнительными условиями (24), (28). Функции u, v явно здесь уже не фигурируют. Найдя выражения для F и Φ, мы можем затем уже определить и систему функций u, v с помощью изложенного выше приема.

Подчеркнем здесь, что определение системы u, v содержит большой произвол.

Действительно, пусть $\varphi_{\nu,0}(g)$ представляет ортонормированную систему собственных векторов для оператора K, соответствующих единичному собственному значению. Если мы подвергнем ее произвольному унитарному преобразованию, мы опять получим ортонормированную систему собственных векторов оператора K, соответствующих единичному собственному числу. То же замечание, разумеется, относится и к $\varphi_{\nu,1}(g)$. Видим, следовательно, что системы $\{\varphi_{\nu,0}(g)\}\{\varphi_{\nu,1}(g)\}$ определены лишь с точностью до произвольных унитарных преобразований, действующих на индекс ν. Поэтому и в функциях u, v содержится та же степень произвола.

Мы уже говорили, что уравнения (23) не являются независимыми, так как формы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ связаны между собой тождествами (13). Поэтому во многих случаях целесообразно рассмотрение одного[2] из них:

$$\mathfrak{A}(f_1, f_1 | F, \Phi) = 0,$$

совместно с дополнительными условиями (24), (28). Второе уравнение (23) будет тогда выполняться автоматически.

---

[1] Интересно отметить, что если бы мы имели дело с функциями F, Φ, удовлетворяющими только условиям (24), то, повторив приведенные выше рассуждения, мы получили бы вместо (18) представления следующего вида:

$$F(f, f') = \sum_\nu \{v^*_{f\nu} v_{f'\nu}(1 - n_\nu) + u^*_{f\nu} u_{f'\nu} n_\nu\},$$

$$\Phi(f, f') = \sum_\nu \{u_{f\nu} v_{f'\nu}(1 - n_\nu) + v^*_{f\nu} u_{f'\nu} n_\nu\}.$$

Заметим еще, что если функции F и Φ можно определить с помощью усреднения $F(f, f') = \mathrm{Sp}\{a^+_f a_{f'} D\}(\mathrm{Sp}\, D)^{-1}$, $\Phi(f, f') = \mathrm{Sp}\{a_f a_{f'} D\}(\mathrm{Sp}\, D)^{-1}$ по любому положительному статистическому оператору D, то операторы K, $1 - K$ должны быть оба неотрицательными, и потому в полученном представлении $0 \leqslant n_\nu \leqslant 1$.

[2] Может представиться также случай, когда $\Phi \equiv 0$. Тогда, наоборот, уравнение $\mathfrak{A} = 0$ выполняется тривиально, и мы должны ограничиться рассмотрением уравнения $\mathfrak{B} = 0$.

Рассмотрим в качестве примера вопрос об определении основного сверхпроводящего состояния в теории сверхпроводимости.

Положим в рассматриваемых формулах $f=(\rho,\sigma)$, где ρ — импульс, а σ — спиновый индекс, два значения которого условимся обозначать знаками «+» и «−». Возьмем, как обычно[1],

$$I(p,p')=E(p)\delta(p-p'), \tag{30}$$

$$U(f_1,f_2;f_2',f_1')=\frac{1}{V}\,\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')\delta(\sigma_1-\sigma_1')\delta(\sigma_2-\sigma_2')J(p_1,p_2;p_2',p_1'),$$

где V — объем системы. В качестве J мы рассматриваем вещественную функцию, инвариантную по отношению к преобразованию отражения импульсов $p\to -p$.

Нетрудно проверить тогда, что всем уравнениям и дополнительным условиям мы удовлетворим, положив

$$\begin{gathered}F(f,f')=\delta(f-f')F(p),\quad \Phi(f,f')=\delta(f+f')\Phi(f),\\ \Phi(p,-)=\Phi(p);\quad \Phi(p,+)=-\Phi(p),\end{gathered} \tag{31}$$

где $F(p)$, $\Phi(p)$ — вещественные функции p, инвариантные по отношению к преобразованию отражения импульса, определяемые следующими уравнениями:

$$\begin{gathered}2\xi(p)\Phi(p)+(1-2F(p))\frac{1}{V}\sum_{p'}J(p,-p,-p',p')\Phi(p')=0,\\ F(p)=F^2(p)+\Phi^2(p),\end{gathered} \tag{32}$$

в которых

$$\xi(p)=E(p)-\lambda+\frac{1}{V}\sum_{p'}\{2J(p',p;p,p')-J(p,p';p,p')\}F(p'). \tag{33}$$

Положим здесь

$$-\frac{1}{V}\sum_{p'}J(p,-p;-p',p')\Phi(p')=C(p).$$

Тогда из уравнений (32) получим

$$\begin{aligned}\Phi(p)&=\frac{C(p)}{2\Omega(p)},\\ \Omega(p)&=\sqrt{\xi^2(p)+C^2(p)},\\ F(p)&=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{\xi(p)}{\Omega(p)}\right\}\end{aligned} \tag{34}$$

[1] Обращаем внимание на то, что в данном изложении мы пользуемся дискретной дельта-функцией, т. е. символом Кронекера:

$$\delta(p)=1,\quad p=0;\qquad \delta(p)=0,\quad p\neq 0.$$

и убедимся, что $C(p)$ удовлетворяет уравнению

$$C(p)+\frac{1}{V}\sum_{p'}J(p,-p;-p',p')\frac{C(p')}{2\Omega(p')}=0. \tag{35}$$

Как видно, мы приходим здесь к обычным формулам теории сверхпроводимости.

Соответствующие функции u, v можно определить, положив

$$\begin{gathered}u_{f\nu}=u(p)\delta(\nu-f),\quad v_{f\nu}=v(f)\delta(\nu+f),\\ v(p,+)=v(p),\quad v(p,-)=-v(p),\end{gathered} \tag{36}$$

причем

$$\begin{aligned}v^2(p)&=F(p),\\ u^2(p)&=1-F(p).\end{aligned}$$

§ 2. Метод самосогласованного поля

Мы рассматривали до сих пор лишь вопрос об определении основного состояния, не зависящего от времени. Нетрудно, однако, обобщить метод самосогласованного поля и для изучения процессов, явно зависящих от времени.

Введем для этого зависящие от времени функции

$$\begin{aligned}F_t(f_1,f_2)&=\overline{a^+_{f_1}a_{f_2}},\\ \Phi_t(f_1,f_2)&=\overline{a_{f_1}a_{f_2}}\end{aligned} \tag{37}$$

и условимся рассматривать амплитуды a в представлении Гейзенберга. Совершающееся здесь усреднение надо понимать тогда как усреднение

$$\overline{A}=\frac{\mathrm{Sp}(AD)}{\mathrm{Sp}\,D}$$

по некоторому не зависящему от t статистическому оператору D.

Заметим теперь, что из уравнений движения вытекают следующие точные соотношения:

$$\begin{aligned}i\frac{\partial F(f_1,f_2)}{\partial t}&=\overline{[a^+_{f_1}a_{f_1};H]},\\ i\frac{\partial\Phi(f_1,f_2)}{\partial t}&=\overline{[a_{f_1}a_{f_2};H]},\end{aligned}$$

или в более развернутой форме

$$\begin{aligned}i\frac{\partial F(f_1,f_2)}{\partial t}&=\sum_f\{T(f_1,f)F(f_1,f)-T(f,f_1)F(f,f_2)\}-\\ &-\sum_{f,f_1',f_2'}\{U(f',f_2';f,f_1)F_2(f_1',f_2';f,f_2)-U(f_2,f;f_2',f_1')F_2(f_1,f;f_2',f_1')\},\end{aligned} \tag{38}$$

$$i\frac{\partial\Phi(f_1,f_2)}{\partial t}=\sum_f\{T(f_1,f)\Phi(f,f_2)+T(f_2,f)\Phi(f_1,f)\}+$$
$$+\sum_{f_1',f_2'}U(f_1,f_2;f_2',f_1')\Phi(f_1',f_2')+\sum_{f,f_1',f_2'}\{U(f_1,f;f_2',f_1')\Phi_2(f;f_2,f_2',f_1')+$$
$$+U(f,f_2;f_2',f_1')\Phi_2(f;f_1,f_2',f_1')\},\quad(39)$$

где опять

$$F_2(f_1,f_2;f_2',f_1')=\overline{a^+_{f_1}a^+_{f_2}a_{f_2'}a_{f_1'}},$$
$$\Phi_2(f_1;f_2,f_3,f_4)=\overline{a^+_{f_1}a_{f_2}a_{f_3}a_{f_4}}.\quad(40)$$

По принципам теории цепочек функций распределения мы должны были бы снова выразить $\partial F_2/\partial t$, $\partial\Phi_2/\partial t$ через функции распределения более высокого порядка и т. д.

Переход к замкнутой системе приближенных уравнений мог бы быть совершен за счет «расцепления» одного из таких уравнений, например с помощью какой-либо подходящей аппроксимации, выражающей входящую в него высшую корреляционную функцию через низшие.

В методе самосогласованного поля мы довольствуемся наиболее простым и грубым подходом, а именно ограничиваемся только первыми, уже полученными уравнениями (36), (39) и проводим в них приближенную замену F_2, Φ_2 через F, Φ.

Возьмем эти функции[1]:

$$F(f_1,f_2)=\frac{\mathrm{Sp}\{a^+_{f_1}(t)a_{f_2}(t)D\}}{\mathrm{Sp}\,D},$$
$$\Phi(f_1,f_2)=\frac{\mathrm{Sp}\{a_{f_1}(t)a_{f_2}(t)D\}}{\mathrm{Sp}\,D},$$
$$F_2(f_1,f_2;f_2',f_1')=\frac{\mathrm{Sp}\{a^+_{f_1}(t)a^+_{f_2}(t)a_{f_2'}(t)a_{f_1'}(t)D\}}{\mathrm{Sp}\,D},\quad(41)$$
$$\Phi_2(f_1,f_2,f_3,f_4)=\frac{\mathrm{Sp}\{a^+_{f_1}(t)a^+_{f_2}(t)a_{f_3}(t)a_{f_4}(t)D\}}{\mathrm{Sp}\,D}$$

и предположим, что статистический оператор D диагонален в представлении $\ldots n_\nu\ldots$, в котором $n_\nu=\alpha^+{}_\nu(t)\alpha_\nu(t)$. Строго говоря, такое предположение можно сделать только для одного фиксированного момента времени, так как D остается постоянным, а $\alpha(t)$, $\alpha^+(t)$, вообще говоря, изменяются со временем.

Тем не менее наше приближение можно считать правильным для первого приближения в тех случаях, когда основная часть гамильтониана H в амплитудах α имеет вид

$$\sum_\nu\Omega(\nu)a^+_\nu\alpha_\nu,$$

[1] Из такого определения сразу же следует, что F, Φ всегда удовлетворяют условиям (24).

так как тогда в «нулевом приближении» уравнения движения будут таковы:

$$i\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial t} = \Omega(\nu)\alpha_\nu,$$

а для них

$$\alpha_\nu^+(t)\alpha_\nu(t) = \text{const}.$$

Здесь главная часть зависимости $a_f(t)$, $a_f^+(t)$ от t компенсируется временной зависимостью функций u, v.

Используя указанное приближение, подставим в (41) выражения (1) и выполним усреднение с учетом диагональности D в представлении $\ldots n_\nu \ldots$.

Получим

$$\begin{aligned}\Phi(f_1, f_2) &= \sum_\nu \{u_{f_1\nu} v_{f_2\nu}(1-\overline{n}_\nu) + v_{f_1\nu} u_{f_2\nu}\overline{n}_\nu\},\\ F(f_1, f_2) &= \sum_\nu \{v^*_{f_1\nu} v_{f_2\nu}(1-\overline{n}_\nu) + u^*_{f_1\nu} u_{f_2\nu}\overline{n}_\nu\},\end{aligned} \tag{42}$$

где $\overline{n}_\nu$ — среднее от $\alpha_\nu^+(t)\alpha_\nu(t)$.

Найдем также

$$F_2(f_1, f_2; f_2', f_1') = F(f_1, f_1')F(f_2, f_2') - F(f_1, f_2')F(f_2, f_1') + \\ + \Phi^*(f_1, f_2)\Phi(f_1', f_2'), \tag{43}$$

$$\Phi_2(f_1, f_2, f_3, f_4) = F(f_1, f_2)\Phi(f_3, f_4) + F(f_1, f_4)\Phi(f_2, f_3) - \\ - F(f_1, f_3)\Phi(f_2, f_4). \tag{44}$$

Подставив выражения (43), (44) в уравнения (38), (39), мы получим временные уравнения самосогласованного поля в следующем виде:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \Phi(f_1, f_2)}{\partial t} &= \mathfrak{A}\left(f_1, \frac{f_2}{F}, \Phi\right),\\ i\frac{\partial F(f_1, f_2)}{\partial t} &= \mathfrak{B}\left(f_1, \frac{f_2}{F}, \Phi\right).\end{aligned} \tag{45}$$

Нетрудно заметить, что входящие сюда формы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ имеют те же выражения, что и раньше. Это обусловлено совпадением правых частей уравнений (38), (39) с соответствующими выражениями из (14), (15) и совпадением формул (43), (44) с формулами (19), (20).

Мы можем, следовательно, воспользоваться ранее установленными свойствами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Обратим сейчас внимание на тождество (13), справедливое в рассматриваемом случае[1] при $\nu_1 = \nu_2$.

[1] Как уже отмечалось ранее, тождество (13) будет верно при любых ν_1, ν_2, если в формулах (42) все $\overline{n}_\nu = 0$.

Основываясь на нем, установим важное свойство решений уравнений (45), а именно то, что для любого решения

$$\frac{d\overline{n}_\nu}{dt} = 0. \tag{46}$$

Иначе говоря, покажем, что собственные числа оператора K остаются постоянными при изменении времени.

Действительно, в соответствии с (25)

$$\varphi_\omega K = \overline{n}_\omega \varphi_\omega.$$

Поэтому сделанное утверждение будет доказано, как только мы убедимся, что при любом ω

$$\sum_{g,g'} \varphi_\omega(g) \frac{dK(g,g')}{dt} \varphi_\omega(g') = 0. \tag{47}$$

Но, так как всегда

$$n_{\nu 1} = 1 - n_{\nu 0},$$

мы видим, что равенство (47) достаточно доказать лишь для $\omega = (\nu, 0)$.

Пользуясь определением (26) оператора K и формулами (8), найдем

$$\sum_{g,g'} \varphi_{\nu,0}(g) \frac{dK(g,g')}{dt} \varphi^*_{\nu,0}(g') = -\sum_{f,f'} v^*_{\nu f} v_{\nu f'} \frac{dF^*(f,f')}{dt} +$$

$$+ \sum_{f,f'} v^*_{\nu f} u^*_{\nu f'} \frac{d\Phi(f,f')}{dt} - \sum_{f,f'} u_{\nu f} v_{\nu f'} \frac{d\Phi^*(f,f')}{dt} + \sum_{f,f'} u_{\nu f} u^*_{\nu f'} \frac{dF(f,f')}{dt} = 0,$$

откуда на основании (45) и (13) получим

$$i \sum_{g,g'} \varphi_{\nu 0}(g) \frac{dK(g,g')}{dt} \varphi^*_{\nu,0}(g') = \sum_{f,f'} \{ v^*_{\nu f} v_{\nu f'} \mathfrak{B}^*(f,f') +$$

$$+ v^*_{\nu f} u^*_{\nu f'} \mathfrak{A}(f,f') + u_{\nu f} v_{\nu f'} \mathfrak{A}^*(f,f') + u_{\nu f} u^*_{\nu f'} \mathfrak{B}(f,f') \} = 0,$$

что и доказывает сделанное утверждение (46).

Мы имеем здесь типичное свойство метода самосогласованного поля — неучет релаксационных эффектов.

Если сохраняется любой набор $\ldots n_\nu \ldots$, то, в частности, будет сохраняться и система $n_\nu = 0$, соответствующая ранее рассматривавшемуся основному состоянию. Поэтому уравнения (45) совместимы и с дополнительными условиями (28).

Запишем сейчас эти уравнения и дополнительные условия в r-представлении для случая, когда

$$I = \frac{(p - eA)^2}{m},$$

а взаимодействие характеризуется не зависящей от скоростей и спинов потенциальной функцией $U(r_1, r_2)$. Имеем[1]

$$i\frac{\partial \Phi_{\sigma_1,\sigma_2}(r_1,r_2)}{dt} = \left\{ \frac{\left(i\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + e\mathbf{A}(r_1)\right)^2}{2m} + \frac{\left(i\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} + e\mathbf{A}(r_2)\right)^2}{2m} - 2\lambda + \right.$$

$$\left. + \int U(r_1,r')\sum_\sigma F_{\sigma\sigma}(r',r')\,dr' + \int U(r_2,r')\sum_\sigma F_{\sigma\sigma}(r',r')\,dr' \right\} \Phi_{\sigma_1,\sigma_2}(r_1,r_2) -$$

$$- \sum_\sigma \int dr' \{U(r_1,r')F_{\sigma,\sigma_1}(r',r_1)\Phi_{\sigma,\sigma_2}(r',r_2) +$$

$$+ U(r_2,r')F_{\sigma,\sigma_2}(r',r_2)\Phi_{\sigma_1,\sigma}(r_1,r')\} + U(r_1,r_2)\Phi_{\sigma_1,\sigma_2}(r_1,r_2) -$$

$$- \sum_\sigma \int dr' \{F_{\sigma,\sigma_1}(r',r_1)U(r',r_2)\Phi_{\sigma,\sigma_2}(r',r_2) +$$

$$+ F_{\sigma,\sigma_2}(r',r_2)U(r_1,r')\Phi_{\sigma_1,\sigma}(r_1,r')\}, \quad (48)$$

$$i\frac{\partial F_{\sigma_1,\sigma_2}(r_1,r_2)}{dt} = \left\{ \frac{\left(i\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} + e\mathbf{A}(r_2)\right)^2}{2m} - \frac{\left(i\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + e\mathbf{A}(r_1)\right)^2}{2m} \right\} F_{\sigma_1,\sigma_2}(r_1,r_2) +$$

$$+ \sum_\sigma \int dr \{\Phi(r_2,r) - \Phi(r_1,r)\}\{F_{\sigma,\sigma}(r,r)F_{\sigma_1,\sigma_2}(r_1,r_2) -$$

$$- F_{\sigma_1,\sigma}(r_1,r)F_{\sigma,\sigma_2}(r,r_2) + \Phi^*_{\sigma_1,\sigma}(r_1,r)\Phi_{\sigma,\sigma_2}(r,r_2)\}, \quad (49)$$

$$F_{\sigma_1,\sigma_2}(r_1,r_2) = \sum_\sigma \int dr \{F_{\sigma_1,\sigma}(r_1,r)F_{\sigma,\sigma_2}(r,r_2) + \Phi^*_{\sigma,\sigma_1}(r,r_1)\Phi_{\sigma,\sigma_2}(r,r_2)\},$$

$$\sum_\sigma \int dr \{F_{\sigma_1,\sigma}(r_1,r)\Phi^*_{\sigma,\sigma_2}(r,r_2) + F_{\sigma_2,\sigma}(r_2,r)\Phi^*_{\sigma,\sigma_1}(r,r_1)\} = 0. \quad (50)$$

Как видно, вся эта система уравнений градиентно-инвариантна. Градиентное преобразование

$$e\mathbf{A}(r) \to e\mathbf{A}(r) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\varphi(r) \quad (51)$$

компенсируется преобразованием функций F, Φ:

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma_1,\sigma_2}(r_1,r_2) &\to \Phi_{\sigma_1,\sigma_2}(r_1,r_2)e^{i\{\varphi(r_1)+\varphi(r_2)\}}, \\ F_{\sigma_1,\sigma_2}(r_1,r_2) &\to F_{\sigma_1,\sigma_2}(r_1,r_2)e^{i\{-\varphi(r_1)+\varphi(r_2)\}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Градиентная инвариантность здесь обусловлена градиентной инвариантностью гамильтониана.

[1] Здесь r обозначает вектор $\mathbf{r}$, а dr — трехмерный элемент объема.

При рассмотрении задач теории сверхпроводимости в модели, в которой электронно-фононное взаимодействие заменено прямым взаимодействием электронов, зависящим от скоростей (оно эффективно лишь у поверхности Ферми), соответствующий гамильтониан уже не будет точно градиентно-инвариантным. Это свойство выполняется только приближенно, и потому уравнения метода самосогласованного поля будут градиентно-инвариантны лишь с той же степенью приближения.

Важно отметить, что использованные при выводе наших уравнений аппроксимации сами по себе не нарушают градиентной инвариантности. К этому вопросу мы еще вернемся в § 4.

§ 3. Представление с фиксированным числом частиц

Будем рассматривать теперь совершенно независимо от ранее сказанного корреляционную функцию

$$F_2(f_1, f_2; f_2', f_1'),$$

взятую в r-представлении. Мы полагаем здесь $f = (r, \sigma)$, где σ — некоторый дискретный, например спиновый, индекс.

Допустим, эта функция может быть представлена в форме

$$F_2 = \sum_n \Psi_n^*(f_1, f_2)\Psi_n(f_1', f_2') + \widetilde{F}_2 \tag{53}$$

таким образом, что:

1) при стремлении к бесконечности расстояний между парами (f_1, f_2) и (f_1', f_2') дополнительное слагаемое $\widetilde{F}_2$ достаточно быстро исчезает;

2) при неограниченном увеличении расстояния между точками f_1 и f_2 функция $\Psi_n(f_1, f_2)$ также приближается к нулю и интеграл

$$\int |\Psi_n(f_1, f_2)|^2 \, df_2 = \int |\Psi_n(f_2, f_2)|^2 \, df_2 \tag{54}$$

является сходящимся.

Тогда очевидно, что мы можем интерпретировать $\Psi_n(f_1, f_2)$ как волновую функцию пары частиц, находящихся в одном из связанных состояний, а интеграл (54) — как пропорциональный плотности числа тех частиц в точке f_1, которые связаны в пары, находящиеся в состоянии Ψ_n.

Рассмотрим с этой точки зрения формулу (43) и возьмем для определенности ситуацию в теории сверхпроводимости. Имеем для основного состояния

$$\Phi_{-+}(r_1, r_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{ik(r_1 - r_2)} \Phi(k) \, dk, \quad \Phi(k) = \frac{C(k)}{2\sqrt{\xi^2(k) + C^2(k)}}$$

и

$$F_{\sigma\sigma}(r_1, r_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{ik(r_1 - r_2)} F(k) \, dk, \quad F(k) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\xi(k)}{\sqrt{\xi^2(k) + C^2(k)}}\right\}.$$

Как видно, упоминавшиеся условия 1, 2 здесь выполнены, и потому $\Phi(f_1, f_2) = \Phi_{-+}(r_1, r_2)$ может считаться волновой функцией связанной пары

частиц (обладающих противоположными спинами). В данном случае существует лишь одно состояние $\Phi(f_1, f_2)$, и мы можем говорить, что все связанные квазимолекулы находятся в конденсате. Связанные пары, выпавшие из конденсата, в изложенном методе с учетом формулы[1] (43) принципиально не учитываются.

Обратим сейчас внимание на то, что в наших рассуждениях мы существенно использовали каноническое преобразование (1). В силу этого обстоятельства и для состояния C_0, и для статистического оператора D полное число частиц $N = \sum a_f^+ a_f$ не является квантовым числом и не имеет строго фиксированного значения. С другой стороны, N всегда является интегралом движения для рассматриваемого нами гамильтониана (3). Поэтому вполне естественно потребовать получения тех же результатов в представлении, в котором N является квантовым числом.

Посмотрим, однако, что получилось бы в действительности, если бы мы попытались проводить рассуждения в таком представлении.

Прежде всего, мы не могли бы перепутывать амплитуды рождения и уничтожения и потому должны были бы положить в формулах (1) $v \equiv 0$. Но тогда вместо (43) мы получили бы аппроксимацию

$$F_2(f_1, f_2; f_2', f_1') = F(f_1, f_1')F(f_2, f_2') - F(f_1, f_2')F(f_2, f_1') \tag{55}$$

обычного метода Фока, вообще не учитывающую возможность появления связанных состояний из пар частиц.

Положение может показаться еще худшим, так как независимо ни от каких аппроксимаций имеет место равенство

$$\overline{a_{f_1} a_{f_2}} = 0$$

для любого усреднения, при котором N строго фиксировано. Выход из этого парадокса, однако, не представляет затруднений. Просто, если мы желаем работать с фиксированным N, необходимо пойти дальше в цепочке уравнений, связывающих между собой функции распределения, и обратиться к корреляционным функциям более высокого порядка.

Чтобы не вдаваться в сложные вычисления, воспользуемся сейчас интуитивным, несколько упрощенным подходом. Исходя из представления о том, что в рассматриваемой динамической системе имеются связанные пары, находящиеся в одном и том же состоянии $\Phi(f_1, f_2)$, дополним формулу (55) обычного метода Фока членом

$$\Phi^*(f_1, f_2)\Phi(f_1', f_2'),$$

описывающим вклад таких пар. Подставив полученное выражение в точное соотношение (38), мы сразу же получим второе из уравнений (45).

Чтобы вывести первое из уравнений (45), определяющее Φ, рассмотрим двухвременную корреляционную функцию вида

$$\overline{a_{f_1}(t) a_{f_2}(t) a_{f_2''}^+(\tau) a_{f_1''}^+(\tau)}$$

и продифференцируем ее по времени t. На основании точных уравнений

[1] Такой учет можно произвести, если обобщить аппроксимацию (43) в духе выражения (53).

движения получим[1]

$$i\frac{\partial\langle a_{f_1}(t)a_{f_2}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle}{\partial t}=\langle[a_{f_1}(t)a_{f_2}(t);H]a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle=$$
$$=\sum_f\{I(f_1,f)\langle a_f(t)a_{f_2}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle+$$
$$+I(f_2,f)\langle a_{f_1}(t)a_f(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle\}+$$
$$+\sum_{f_1'f_2'}U(f_1,f_2;f_2',f_1')\langle a_{f_1'}(t)a_{f_2'}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle+$$
$$+\sum_{f,f_1',f_2'}U(f_1,f;f_2',f_1')\langle a^+_f(t)a_{f_2}(t)a_{f_2'}(t)a_{f_1'}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle+$$
$$+\sum_{f,f_1',f_2'}U(f,f_2;f_2',f_1')\langle a^+_f(t)a_{f_1}(t)a_{f_2'}(t)a_{f_1'}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle. \quad (56)$$

Заметим, кстати, что это соотношение отличается от (39) только тем, что теперь справа стоят два оператора a^+, компенсирующих изменение числа частиц.

Произведем здесь переход к приближенному уравнению, выразив функции вида

$$\langle a^+_{f_1}(t)a_{f_2}(t)a_{f_2'}(t)a_{f_1'}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1''}(\tau)\rangle$$

через произведения четырех и двух операторов. Заметим, что при таком расцеплении мы должны теперь учитывать строгое сохранение числа N. После этого мы в уравнении, полученном из (56), отодвинем пару (f_2', f_1') на бесконечность.

Воспользуемся поэтому следующей аппроксимацией:

$$\langle a^+_{f_1}(t)a_{f_2}(t)a_{f_2'}(t)a_{f_1'}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1'}(\tau)\rangle=$$
$$=\langle a^+_{f_1}(t)a_{f_2}(t)\rangle\langle a_{f_2'}(t)a_{f_1'}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1'}(\tau)\rangle-$$
$$-\langle a^+_{f_1}(t)a_{f_2'}(t)\rangle\langle a_{f_2}(t)a_{f_1'}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1'}(\tau)\rangle+$$
$$+\langle a^+_{f_1}(t)a_{f_1'}(t)\rangle\langle a_{f_2}(t)a_{f_2'}(t)a^+_{f_2''}(\tau)a^+_{f_1'}(\tau)\rangle+S, \quad (57)$$

где S обозначает сумму членов, содержащих множители $\langle a^+_{f_1''}(\tau)a_f(t)\rangle$ или $\langle a^+_{f_2''}(\tau)a_f(\tau)\rangle$. Мы не выписываем явного выражения S, поскольку такие члены исчезнут при удалении пары точек (f_2'', f_1'') на бесконечность.

Подставим формулу (57) в (56) и удалим на бесконечность эту пару точек. Тогда выражения вида $\langle a_{f_1}(t)a_{f_2}(t)a^+_{f_2'}(\tau)a^+_{f_1'}(\tau)\rangle$ распадутся на произведения $\Psi_t(f_1,f_2)\Psi^*_\tau(f_1',f_2')$, в которых $\Psi_t(f_1,f_2)$ обозначает волновую функцию

[1] Операцию усреднения будем обозначать здесь не чертой сверху, а скобками $\langle\ldots\rangle$, поскольку это удобнее для длинных выражений.

связанных пар, и мы получим, отделяя общий множитель $\Psi^*_\tau(f'_2, f'_2)$, уравнение

$$i\frac{\partial\Psi_t(f_1,f_2)}{\partial t}=\sum_f\{I(f_1,f)(\Psi_t(f_1,f_2)+I(f_2,f)\Psi_t(f_1,f)\}+$$
$$+\sum_{f'_1f'_2}U(f_1,f_2;f'_2,f'_1)\Psi_t(f_1,f'_2)+$$
$$+\sum_{f,f'_2,f'_1}U(f_1,f;f'_2,f'_1)\{F_t(f_1,f_2)\Psi_t(f'_2,f'_1)-F_t(f,f'_2)\Psi_t(f_2,f'_1)+$$
$$+F_t(f,f'_1)\Psi_t(f_2,f'_2)\}+\sum_{f,f'_1,f'_2}U(f_1,f_2;f'_2,f'_1)\{F_t(f,f_1)\Psi_t(f'_2,f'_1)-$$
$$-F_t(f,f'_2)\Psi_t(f,f'_1)+F_t(f_1,f'_1)\Psi_t(f_1,f'_2)\}. \quad (58)$$

Заметим, что в основном стационарном состоянии Ψ_t должна быть пропорциональна e^{-iEt}, где E — соответствующая энергия. Введем величину[1]

$$\lambda=\frac{E}{2}$$

и положим в общем неравновесном случае

$$\Psi_t(f_1,f_2)=e^{-2i\lambda t}\Phi_t(f_1,f_2),$$

так что

$$i\frac{\partial\Psi_t}{\partial t}=e^{-2i\lambda t}\left\{i\frac{\partial\Phi_t}{\partial t}+2\lambda\Phi_t\right\}.$$

Тогда, как видно, полученное уравнение (58) превратится в недоставшее нам первое из уравнений (45).

Приведенным рассуждениям можно придать более совершенную форму и с их помощью прийти к более точным уравнениям, но на этом мы останавливаться не будем. Сейчас нам важно подчеркнуть, что уравнения обобщенного метода самосогласованного поля можно получить в схеме с фиксированным полным числом частиц. При этом выясняется смысл преобразования (1). Именно с его помощью те результаты, которые нормально получились бы в более высоком приближении, получаются в более низком приближении.

---

[1] Смысл величины λ как химического потенциала можно раскрыть на основе следующих соображений. С одной стороны, множитель e^{-iEt} должен выражать временную зависимость волновой функции пары

$$\langle C^*_N a_{f_1}(t)a_{f_2}(t)C_{N+2}\rangle,$$

где C_N обозначает низшее состояние системы в случае, когда число частиц равно N.

С другой стороны, пусть полная энергия системы в состоянии C_N равна $E(N)$. Тогда временная зависимость приведенной формы определится множителем

$$\exp\{-i[E(N+2)-E(N)]t\}.$$

Таким образом,

$$2\lambda\equiv E=E(N+2)-E(N)$$

и

$$\lambda=\frac{\partial E(N)}{\partial N}.$$

Это свойство основано на том, что в переменных α связанное состояние выпадает. Так, например, в использованном выше первом приближении

$$\langle a_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\alpha^+_{\nu_2'}\alpha^+_{\nu_1'}\rangle = (1-\overline{n}_{\nu_1})(1-\overline{n}_{\nu_2})\{\delta(\nu_1-\nu_1')\delta(\nu_2-\nu_2') - \\ - \delta(\nu_1-\nu_2')\delta(\nu_2-\nu_1')\} = \langle\alpha_{\nu_1}\alpha^+_{\nu_1'}\rangle\langle\alpha_{\nu_2}\alpha^+_{\nu_2'}\rangle - \langle\alpha_{\nu_1}\alpha^+_{\nu_2'}\rangle\langle\alpha_{\nu_2}\alpha^+_{\nu_1'}\rangle.$$

Такого же положения можно добиться и в высших приближениях. Принцип компенсации опасных диаграмм как раз и представляет для этого средство. Все те диаграммы, которые по этому принципу компенсируются, именно и определяют связанное состояние.

Таким образом, в тех случаях, когда препятствием для применения теории возмущений является возможность появления связанного состояния пар частиц (бозе-конденсата), принцип компенсации с помощью введения новых переменных α^+, α, в которых такое состояние выпадает, ликвидирует тем самым препятствие для применения этой обычной теории.

§ 4. Коллективные колебания

Перейдем теперь к вопросу об определении спектра элементарных возбуждений основного состояния.

С точки зрения метода самосогласованного поля вопрос этот может решаться следующим образом.

Как уже отмечалось, числа $\overline{n}_\nu$ остаются постоянными и для основного состояния все они равны нулю. Желая исследовать малые колебания около такого состояния, положим $\overline{n}_\nu = 0$. Иными словами, наложим дополнительные условия (28).

Пусть F_0, Φ_0 будут выражениями F, Φ для основного состояния. Рассмотрим бесконечно малые приращения

$$F = F_0 + \delta F, \quad \Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$$

и составим для них линейные уравнения в вариациях:

$$i\frac{\partial\delta\Phi(f_1,f_2)}{\partial t} = \delta\mathfrak{A}\left(f_1, \frac{f_2}{F}, \Phi\right), \\ i\frac{\partial\delta F(f_1,f_2)}{\partial t} = \delta\mathfrak{B}\left(f_1, \frac{f_2}{F}, \Phi\right). \tag{59}$$

Кроме того, учтем, что δF и $\delta\Phi$ должны быть связаны между собой дополнительными условиями (28), ввиду чего

$$\delta\left\{F(f_1,f_2) - \sum_f F(f_1,f)F(f,f_2) - \sum_f \Phi^*(f,f_1)\Phi(f,f_2)\right\} = 0, \\ \delta\left\{\sum_f F(f_1,f)\Phi^*(f,f_2) + \sum_f F(f_2,f)\Phi^*(f,f_1)\right\} = 0. \tag{60}$$

Заметим также, что благодаря (24) $\delta\Phi$ должна быть антисимметричной, а δF — эрмитовой.

Полученные однородные уравнения будем решать с помощью суперпозиции элементарных решений, пропорциональных e^{-iEt}. Таким образом, найдем[1] секулярные уравнения для определения спектра колебаний.

С учетом наличия условий (60) вариации δF и $\delta\Phi$ не являются независимыми, и потому технически удобнее выразить их через новые независимые неизвестные, автоматически удовлетворяющие (60). Такие выражения можно сразу же получить, замечая, что благодаря (60) бесконечно малое преобразование претерпевают не $n_\nu \equiv 0$, а функции $u_{f\nu}$ и $v_{f\nu}$. Эти преобразования должны быть совместны с условиями ортонормировки (2).

Вместо того чтобы варьировать u, v, можно совершить бесконечно малое преобразование над самими операторами α:

$$\alpha_\nu \to \alpha_\nu + \sum_{\nu'} \mu(\nu', \nu)\alpha_{\nu'} + \sum_{\nu'} \lambda(\nu', \nu)\alpha^+_{\nu'}, \tag{61}$$

при этом из условий каноничности данного бесконечно малого преобразования следует, что

$$\lambda(\nu_1, \nu_2) + \lambda(\nu_2, \nu_1) = 0, \tag{62}$$

$$\mu^*(\nu_1, \nu_2) + \mu(\nu_2, \nu_1) = 0. \tag{63}$$

Тогда

$$\langle \alpha_\nu \alpha_\mu \rangle_0 \to \lambda(\nu, \mu),$$

$\langle \alpha^+_\nu \alpha_\mu \rangle_0$ остаются нулями,

и отсюда получаем

$$F_0(f_1, f_2) + \delta F(f_1, f_2) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \langle (u^*_{f_1\nu_1}\alpha^+_{\nu_1} + v^*_{f_1\nu_1}\alpha_{\nu_1})(u_{f_2\nu_2}\alpha_{\nu_2} + v_{f_2\nu_2}\alpha^+_{\nu_2}) \rangle_0 =$$

$$= F_0(f_1, f_2) + \sum_{\nu_1, \nu_2} \{ v^*_{f_1\nu_1} u_{f_2\nu_2} \lambda(\nu_1, \nu_2) + u^*_{f_1\nu_1} v_{f_2\nu_2} \lambda^*(\nu_2, \nu_1) \},$$

$$\Phi_0(f_1, f_2) + \delta\Phi(f_1, f_2) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \langle (u_{f_1\nu_1}\alpha_{\nu_1} + v_{f_1\nu_1}\alpha^+_{\nu_1})(u_{f_2\nu_2}\alpha_{\nu_2} + v_{f_2\nu_2}\alpha^+_{\nu_2}) \rangle_0 =$$

$$= \Phi_0(f_1, f_2) + \sum_{\nu_1, \nu_2} \{ u_{f_1\nu_1} u_{f_2\nu_2} \lambda(\nu_1, \nu_2) + v_{f_1\nu_1} v_{f_2\nu_2} \lambda^*(\nu_2, \nu_1) \}.$$

Как видно, коэффициенты μ не вошли в данные формулы. Это обусловлено тем, что в рассматриваемом случае $\overline{n}_\nu \equiv 0$. Заметим еще, что и независимо от приведенных соображений нетрудно проверить, что выражения

$$\delta F(f_1, f_2) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \{ v^*_{f_1\nu_1} u_{f_2\nu_2} \lambda(\nu_1, \nu_2) + u^*_{f_1\nu_1} v_{f_2\nu_2} \lambda^*(\nu_2, \nu_1) \}, \tag{64}$$

[1] Подчеркнем, что такой способ определения спектра элементарных возбуждений путем линеаризации нелинейных уравнений идейно восходит к известным работам А. А. Власова [5]. Следует также заметить, что именно эти работы оказали большое влияние на разработку понятия коллективных колебаний.

$$\delta\Phi(f_1, f_2) = \sum_{\nu_1,\nu_2} \{u_{f_1\nu_1} u_{f_2\nu_2} \lambda(\nu_1, \nu_2) + v_{f_1\nu_1} v_{f_2\nu_2} \lambda^*(\nu_2, \nu_1)\} \tag{65}$$

при произвольной антисимметричной $\lambda(\nu_1, \nu_2)$ представляют собой общее решение дополнительных условий (60), (24).

Чтобы получить уравнение для $\partial\lambda/\partial t$, целесообразно выразить также λ через δF и $\delta\Phi$. Помножим для этого (64) на $v_{f_1\mu_1}$, а (65) на $u^*_{f_1\mu_1}$ и просуммируем полученные выражения. Тогда в силу условий ортонормированности в форме (10) найдем

$$\sum_{f_1} \{v_{f_1\nu_1} \delta F(f_1, f_2) + u^*_{f_1\mu_1} \delta\Phi(f_1, f_2)\} = \sum_{\nu_2} u_{f_2\nu_2} \lambda(\mu_1, \nu_2). \tag{66}$$

Помножим далее (64) на $u_{f_2\mu_1}$, а (65) на $v^*_{f_1\mu_1}$ и опять просуммируем. Получим

$$\sum_{f_1} \{u_{f_1\mu_1} \delta F(f_1, f_2) + v^*_{f_1\mu_1} \delta\Phi(f_1, f_2)\} = \sum_{\nu_2} v_{f_2\nu_2} \lambda^*(\nu_2, \mu_1)$$

или

$$\sum_{f_1} \{u^*_{f_1\mu_1} \delta F(f_1, f_2) + v_{f_1\mu_1} \delta\Phi^*(f_1, f_2)\} = -\sum_{\nu_2} v^*_{f_2\nu_2} \lambda(\mu_1, \nu_2). \tag{67}$$

Из (66) и (67) тем же приемом найдем искомое выражение для λ:

$$\lambda(\mu_1, \mu_2) = \sum_{f_1,f_2} \{u^*_{f_2\mu_2} v_{f_1\mu_1} \delta F(f_1, f_2) + u^*_{f_2\mu_2} u^*_{f_1\mu_1} \delta\Phi(f_1, f_2) - \\ - v_{f_2\mu_2} u^*_{f_1\mu_1} \delta F^*(f_1, f_2) - v_{f_2\mu_2} v_{f_1\mu_1} \delta\Phi^*(f_1, f_2)\}. \tag{68}$$

Продифференцировав это выражение по t и приняв во внимание (59), получим уравнение для определения λ:

$$i \frac{\partial\lambda(\nu_1, \nu_2)}{\partial t} = \sum_{f_1,f_2} \{u^*_{f_2\nu_2} v_{f_1\nu_1} \delta\mathfrak{B}(f_1, f_2) + u^*_{f_2\nu_2} u^*_{f_1\nu_1} \delta\mathfrak{A}(f_1, f_2) + \\ + v_{f_2\nu_2} u^*_{f_1\nu_1} \delta\mathfrak{B}^*(f_1, f_2) + v_{f_2\nu_2} v_{f_1\nu_1} \delta\mathfrak{A}^*(f_1, f_2)\}. \tag{69}$$

Чтобы полностью раскрыть это уравнение, надо проварьировать формы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и выразить δF, $\delta\Phi$ через λ с помощью формул (64), (65).

После длительных, но, в сущности, простых вычислений будем иметь[1]

$$i \frac{\partial\lambda(\nu_1, \nu_2)}{\partial t} = \sum_{\omega} \{\Omega(\nu_2, \omega)\lambda(\nu_1, \omega) - \Omega(\nu_1, \omega)\lambda(\nu_2, \omega)\} + \\ + \sum_{\omega_1,\omega_2} \{X(\nu_1, \nu_2; \omega_1, \omega_2)\lambda(\omega_1, \omega_2) + Y(\nu_1, \nu_2; \omega_1, \omega_2)\lambda^*(\omega_2, \omega_1)\}, \tag{70}$$

[1] Здесь индекс ω, в отличие от обозначений § 1, представляет просто индекс суммирования по ν.

причем

$$\Omega(\nu,\omega)=\sum_{f,f'}\xi(f,f')(u^*_{f\nu}u_{f'\omega}-v^*_{f\omega}v_{f'\nu})+$$
$$+\sum_{f_1,f_2,f_1',f_2'}U(f_1,f_2;f_2',f_1')\Phi_0(f_2',f_1')u^*_{f_1\nu}v^*_{f_2\omega}+$$
$$+\sum_{f_1f_2,f_1'f_2'}U(f_1,f_2;f_2',f_1')\Phi_0^*(f_2,f_1)v_{f_2'\nu}u_{f_1'\omega},$$

$$\xi(f,f')=T(f,f')+\sum_{f_1,f_1'}\{U(f_1,f;f',f_1')-U(f_1,f;f_1',f')\}F_0(f_1,f_1'),$$

$$X(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{2}\sum U(f_1,f_2;f_2',f_1')(u^*_{f_2\nu_1}u^*_{f_1\nu_2}-u^*_{f_1\nu_1}u^*_{f_2\nu_2})u_{f_1'\omega_2}u_{f_2'\omega_1}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum U(f_1,f_2;f_2',f_1')(u_{f_1'\nu_1}u_{f_2'\nu_2}-v_{f_2'\nu_1}v_{f_1'\nu_2})v^*_{f_1\omega_1}v^*_{f_2\omega_2}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum\{U(f_1,f_2;f_2',f_2')-U(f_1,f_2;f_1',f_2')(v_{f_1'\nu_1}u^*_{f_1\nu_2}-u^*_{f_1\nu_1}v_{f_1'\nu_2})\times$$
$$\times(v^*_{f_2\omega_1}u_{f_2'\omega_2}-v^*_{f_2\omega_2}u_{f_2'\omega_1}),\quad(71)$$

$$Y(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{2}\sum U(f_1,f_2;f_2',f_1')(u^*_{f_2\nu_1}u^*_{f_1\nu_2}-u^*_{f_1\nu_1}u^*_{f_2\nu_2})v_{f_2'\omega_1}v_{f_1'\omega_2}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum U(f_1,f_2;f_2',f_1')(v_{f_1'\nu_1}v_{f_2'\nu_2}-v_{f_2'\nu_1}v_{f_1'\nu_2})u^*_{f_2\omega_2}u_{f_1\omega_1}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum\{U(f_1,f_2;f_2',f_1')-U(f_1,f_2;f_1',f_2')\}(v_{f_1'\nu_1}u^*_{f_1\nu_2}-v_{f_1'\nu_2}u^*_{f_1\nu_1})\times$$
$$\times(u^*_{f_2'\omega_1}v_{f_2'\omega_2}-u^*_{f_2\omega_2}v_{f_2'\omega_1}).$$

Из (70) получим также

$$-\frac{i\,\partial\lambda^*(\nu_1,\nu_2)}{\partial t}=\sum_{\omega}\{\Omega^*(\nu_2,\omega)\lambda^*(\nu_1,\omega)-\Omega^*(\nu_1,\omega)\lambda^*(\nu_2,\omega)\}+$$
$$+\sum_{\omega_1,\omega_2}\{X^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\lambda^*(\omega_1,\omega_2)+Y^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\lambda(\omega_2,\omega_1)\}.\quad(72)$$

Решение системы линейных однородных уравнений (70), (72) будем искать в виде суперпозиции нормальных колебаний:

$$\lambda(\nu_1,\nu_2)=\sum_E \mathrm{e}^{-iEt}\xi_E(\nu_1,\nu_2),$$
$$\lambda^*(\nu_1,\nu_2)=\sum_E \mathrm{e}^{-iEt}\eta_E(\nu_1,\nu_2),\quad \xi^*_{-E}=\eta_E.\quad(73)$$

Подставив (73) в (70) и (72), для определения спектра получим секулярные уравнения следующего вида:

$$E\xi(\nu_1,\nu_2)=\sum\{\Omega(\nu_2,\omega)\xi(\nu_1,\omega)-\Omega(\nu_1,\omega)\xi(\nu_2,\omega)\}+$$
$$+\sum\{X(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\xi(\omega_1,\omega_2)+Y(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\eta(\omega_2,\omega_1)\},\quad(74a)$$

$$-E\eta(\nu_1,\nu_2)=\sum\{\Omega^*(\nu_2,\omega)\eta(\nu_1,\omega)-\Omega^*(\nu_1,\omega)\eta(\nu_2,\omega)\}+$$
$$+\sum\{X^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\eta(\omega_1,\omega_2)+Y^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\eta(\omega_2,\omega_1)\}. \quad (74б)$$

Подчеркнем, что те же самые уравнения мы получили бы, если бы вместо метода самосогласованного поля воспользовались методом приближенного вторичного квантования.

Используя этот метод, мы должны были бы ввести бозе-амплитуды $\beta_{\nu\gamma}$ ($\beta_{\gamma\nu}=-\beta_{\nu\gamma}$), заменив ими произведения ферми-амплитуды $\alpha_\nu\alpha_\gamma$. Тогда мы диагонализировали бы соответствующий гамильтониан, являющийся квадратичной формой из операторов β, β^+, посредством канонического преобразования

$$\beta_{\nu_1\nu_2}=\sum_n\{\xi_n(\nu_1,\nu_2)\zeta_n+\eta_n(\nu_1,\nu_2)\zeta_n^+\} \quad (75)$$

с условием нормировки

$$\sum_n\{|\xi_n|^2-|\eta_n|^2\}=1. \quad (76)$$

Здесь ξ_n — новые бозе-амплитуды с зависимостью от времени, определяемой множителем e^{-iE_nt}. При этом оказалось бы, что ξ и η как раз должны удовлетворять уравнениям (74).

Заметим, кстати, что вывод этих уравнений с помощью метода приближенного вторичного квантования имеет некоторое преимущество перед тем, который был нами дан выше, так как естественно приводит к условию нормировки (76), определяющему знак E.

В методе самосогласованного поля этот знак не фиксируется: нетрудно заметить, что если E, ξ, η есть решение системы секулярных уравнений (74), то преобразование

$$E\to -E,\quad \xi\to\eta^*,\quad \eta\to\xi^*$$

приводит опять к решению той же системы.

Мы составили сейчас уравнения для собственных колебаний. Рассмотрим теперь вопрос о вынужденных колебаниях, возбуждаемых малыми внешними полями, вызывающими вариацию $I(f,f')$ (закон взаимодействия считаем не зависящим от внешних полей).

Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получим вместо однородных уравнений (70), (72) неоднородные уравнения следующего вида:

$$i\frac{\partial\lambda(\nu_1,\nu_2)}{\partial t}=\sum_\omega\{\Omega(\nu_2,\omega)\lambda(\nu_1,\omega)-\Omega(\nu_1,\omega)\lambda(\nu_2,\omega)\}+$$
$$+\sum_{\omega_1,\omega_2}\{X(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\lambda(\omega_1,\omega_2)+Y(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\lambda^*(\omega_2,\omega_1)\}+$$
$$+\sum_{ff'}\{v_{f'\nu_1}u^*_{f\nu_2}-u^*_{f\nu_1}v_{f'\nu_2}\}\,\delta I(f_1,f'),$$
$$-i\frac{\partial\lambda^*(\nu_1,\nu_2)}{\partial t}=\sum_\omega\{\Omega^*(\nu_2,\omega)\lambda^*(\nu_1,\omega)-\Omega^*(\nu_1,\omega)\lambda(\nu_2,\omega\}- \quad (77)$$
$$-\sum_{\omega_1,\omega_2}\{X^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\lambda^*(\omega_1,\omega_2)+Y^*(\nu_1,\nu_2;\omega_1,\omega_2)\lambda(\omega_2,\omega_1)\}+$$
$$+\sum_{f_1f'}\{v^*_{f'\nu_1}u_{f\nu_2}-u_{f\nu_1}v^*_{f'\nu_2}\}\,\delta I^*(f_1,f').$$

Применим теперь только что выведенные общие уравнения к конкретному случаю динамической системы, рассмотренной в § 1 в связи с теорией сверхпроводимости.

Подставим формулы (30), (31), (36) из § 1 в выражения (71) и раскроем тем самым уравнения (74).

Заметим при этом, что спектр распадается на две ветви, у одной из них

$$\lambda_{\sigma\sigma} = 0$$

и колебания происходят у пар частиц с противоположными спинами. Для другой ветви, наоборот,

$$\lambda_{-+} = \lambda_{+-} = 0$$

и колебания происходят у пар с одинаковыми спинами.

Рассмотрим здесь первую ветвь и положим, что

$$\lambda_{-+}(p_1, p_2) = \lambda(p_1, p_2),$$
$$\xi_{-+}(p_1, p_2) = \xi(p_1, p_2),$$
$$\eta_{-+}(p_1, p_2) = \eta(p_1, p_2).$$

Тогда система уравнений (74) примет вид

$$\begin{aligned} E\xi(p_1, p_2) &= \{\Omega(p_1) + \Omega(p_2)\}\xi(p_1, p_2) + \frac{1}{V}\sum_{p_1', p_2'} \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \times \\ &\times \{X(p_1, p_2; p_1', p_2')\xi(p_1', p_2') + Y(p_1, p_2; p_1', p_2')\eta(-p_2', -p_1')\}, \\ -E\eta(-p_2, -p_1) &= \{\Omega(p_1) + \Omega(p_2)\}\eta(-p_2, -p_1) + \\ &+ \frac{1}{V}\sum_{p_1', p_2'} \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')\{X(p_1, p_2; p_1', p_2')\eta(-p_2', -p_1') + \\ &+ Y(p_1, p_2; p_1', p_2')\xi(p_1', p_2')\}, \end{aligned} \tag{78}$$

где $\Omega(p)$ имеет то же выражение (34), что и в § 1, и где

$$\begin{aligned} X(p_1, p_2; p_1', p_2') &= J(p_1, p_2; p_2', p_1')\{u(p_1)u(p_2)u(p_1')u(p_2') + \\ &+ v(p_1)v(p_2)v(p_1')v(p_2')\} + [J(-p_1, p_2'; -p_1', p_2) - J(p_2', -p_1; -p_1', p_2)] \times \\ &\times \{v(p_1)u(p_2)v(p_1')u(p_2') + u(p_1)v(p_2)u(p_1')v(p_2')\} + \\ &+ J(p_1, -p_1'; p_2', -p_2)\{u(p_1)v(p_2)v(p_1')u(p_2') + v(p_1)u(p_2)u(p_1')v(p_2')\}, \\ Y(p_1, p_2; p_1', p_2') &= -J(p_1, p_2; p_2', p_1')\{u(p_1)u(p_2)v(p_1')v(p_2') + \\ &+ v(p_1)v(p_2)u(p_1')u(p_2')\} + [J(-p_1, p_2'; -p_1', p_2) - J(p_2', -p_1; -p_1', p_2)] \times \\ &\times \{u(p_1)v(p_2)v(p_1')u(p_2') + v(p_1)u(p_2)u(p_1')v(p_2')\} + \\ &+ J(p_1, -p_1'; p_2', -p_2)\{v(p_1)u(p_2)v(p_1')u(p_2') + u(p_1)v(p_2)u(p_1')v(p_2')\}. \end{aligned} \tag{79}$$

Как видно, полученные уравнения связывают между собой функции

$$\xi(p_1, p_2), \quad \eta(-p_2, -p_1)$$

только при фиксированном $p_1 + p_2$. Заметим также, что коэффициенты X, Y одинаковы в обоих уравнениях (78). Поэтому будет удобно положить

$$p_1 = p, \quad p_2 = -p + q,$$
$$\xi(p_1, p_2) - \eta(-p_2, -p_1) = \theta_q(p),$$
$$\xi(p_1, p_2) + \eta(-p_2, -p_1) = \vartheta_q(p).$$

Преобразуем тогда уравнения (78) к более простой форме:

$$L_q(\theta) = E\theta, \quad M_q(\vartheta) = E\vartheta, \tag{80}$$

где

$$\begin{aligned} L_q(\theta) &= \{\Omega(p) + \Omega(p-q)\}\theta(p) + \frac{1}{V}\sum_{p'} Q_q(p, p')\theta(p'), \\ M_q(\vartheta) &= \{\Omega(p) + \Omega(p-q)\}\vartheta(p) + \frac{1}{V}\sum_{p'} R_q(p, p')\vartheta(p') \end{aligned} \tag{81}$$

и где

$$\begin{aligned} Q_q(p, p') = {} & \\ = {} & J_q(p, p')\{u(p)u(p-q) + v(p)v(p-q)\}\{u(p')u(p'-q) + v(p')v(p'-q)\} + \\ & + I_q(p, p')\{v(p)u(p-q) - u(p)v(p-q)\}\{v(p')u(p'-q) - u(p')v(p'-q)\}, \\ R_q(p, p') = {} & \\ = {} & J_q(p, p')\{u(p)u(p-q) - v(p)v(p-q)\}\{u(p')u(p'-q) - v(p')v(p'-q)\} + \\ & + G_q(p, p')\{v(p)u(p-q) + u(p)v(p-q)\}\{v(p')u(p'-q) + u(p')v(p'-q)\}, \end{aligned}$$

причем

$$J_q(p, p') = J(p, -p + q; -p' + q, p'),$$

$$\begin{aligned} I_q(p, p') = {} & J(p, p' - q; p', p - q) - J(p, p' - q, p - q, p') - \\ & - J(p, -p'; -p' + q, p - q), \end{aligned} \tag{82}$$

$$\begin{aligned} G_q(p, p') = {} & J(p, p' - q; p', p - q) - J(p, p' - q, p - q, p') + \\ & + J(p, -p'; -p' + q, p - q). \end{aligned}$$

Поясним сейчас физический смысл функций θ и ϑ. Рассмотрим для этого выражения для плотности числа частиц $\rho(r)$ и плотности импульса $\mathbf{p}(r)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \rho(r) = \left\langle \sum_\sigma \Psi_\sigma^+(r)\Psi_\sigma(r) \right\rangle = \frac{1}{V}\sum_{p_1, p_2, \sigma} \langle a_{p_1\sigma}^+ a_{p_2\sigma}\rangle e^{i(p_2 - p_1)r} = \\ = \frac{1}{V}\sum_{p_1, p_2, \sigma} F_{\sigma\sigma}(p_1, p_2)e^{i(p_2 - p_1)r} \end{aligned} \tag{83}$$

и

$$\mathbf{p}(r)=\left\langle\sum_{\sigma}\left\{\Psi_{\sigma}^{+}(r)\left(-i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Psi_{\sigma}(r)\right)+i\frac{\partial\Psi_{\sigma}^{+}(r)}{\partial\mathbf{r}}\Psi_{\sigma}(r)\right\}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{V}\sum_{p_1,p_2,\sigma}\langle a_{p_1\sigma}^{+}a_{p_2\sigma}\rangle(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\mathrm{e}^{i(p_2-p_1)r}=$$

$$=\frac{1}{V}\sum_{p_1,p_2,\sigma}F_{\sigma\sigma}(p_1,p_2)\mathrm{e}^{i(p_2-p_1)r}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2).$$

Введем компоненты Фурье для этих плотностей:

$$\rho(r)=\sum_{q}\rho_q\mathrm{e}^{i(qr)},\quad \mathbf{p}(r)=\sum_{q}\mathbf{p}_q\mathrm{e}^{i(qr)},$$

и заметим, что основное состояние является пространственно однородным и бестоковым.

Следовательно, на основании (83) имеем

$$\rho_0=\frac{1}{V}\sum_{p}2v_p^2,\quad \rho_q=\frac{1}{V}\sum_{p_2-p_1=q}\{\delta F_{++}(p_1,p_2)+\delta F_{--}(p_1,p_2)\},\quad q\neq 0,$$
$$\mathbf{p}_q=\frac{1}{2V}\sum_{p_2-p_1=q}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\{\delta F_{++}(p_1,p_2)+\delta F_{--}(p_1,p_2)\}. \tag{84}$$

С другой стороны, раскрыв формулы (64), получим

$$\begin{aligned}\delta F_{--}(p_1,p_2)&=v(p_1)u(p_2)\lambda(p_2,-p_1)+u(p_1)v(p_2)\lambda^{*}(p_1,-p_2),\\ \delta F_{++}(p_1,p_2)&=v(p_1)u(p_2)\lambda(-p_1,p_2)+u(p_1)v(p_2)\lambda^{*}(-p_2,p_1).\end{aligned} \tag{85}$$

Подставив эти выражения в (84), после очевидных упрощений найдем

$$\rho_q=\sum_{p_1+p_2=q}\{v(p_2)u(p_1)+v(p_1)u(p_2)\}\{\lambda(p_1,p_2)+\lambda^{*}(-p_2,-p_1)\},$$
$$\mathbf{p}_q=\frac{1}{2V}\sum_{p_1+p_2=q}(\mathbf{p}_1,-\mathbf{p}_2)\{v(p_1)u(p_1)+v(p_1)u(p_2)\}\times$$
$$\times\{\lambda(p_1,p_2)-\lambda^{*}(-p_2,-p_1)\}. \tag{86}$$

Откуда на основании (73) получим

$$\rho_q=\sum_{E}\rho_q^{(E)}\mathrm{e}^{-iEt},\quad \mathbf{p}_q=\sum_{E}\mathbf{p}_q^{(E)}\mathbf{e}^{-iEt},$$
$$\rho_q^{(E)}=\frac{1}{V}\sum_{p}\{u(p)v(p-q)+v(p)u(p-q)\}\vartheta_q(p), \tag{87}$$
$$\mathbf{p}_q^{(E)}=\frac{1}{2V}\sum_{p}(2\mathbf{p}-\mathbf{q})\{u(p)v(p-q)-v(p)u(p-q)\}\theta_q(p).$$

Таким образом, вклад в колебания плотности числа частиц от элементарного возбуждения определяется функцией ϑ, а соответствующий вклад в колебания плотности импульса — функцией θ.

Обратимся теперь к уравнениям (81). Положим в них

$$\begin{aligned} \theta(p) &= S_1\,\delta(p-p_0), \\ \vartheta(p) &= S_2\,\delta(p-p_0), \end{aligned} \tag{88}$$

где S_1 и S_2 — постоянные, а p_0 — произвольный фиксированный импульс.

Отбрасывая члены порядка $1/V$, исчезающие после предельного перехода, $V\to\infty$, и вызывающие лишь локальные изменения в волновой функции, видим, что (88) будет допустимой системой решений, если S_1 и S_2 будут связаны соотношениями

$$\begin{aligned} S_1\{\Omega(p_0)+\Omega(p_0-q)\} &= ES_2, \\ S_2\{\Omega(p_0)+\Omega(p_0-q)\} &= ES_1, \end{aligned} \tag{89}$$

откуда видим, что

$$E^2 = \{\Omega(p_0)+\Omega(p_0-q)\}^2.$$

Таким образом, убеждаемся в существовании непрерывного спектра[1]

$$E = \Omega(p_0)+\Omega(p_0-q), \tag{90}$$

отделенного щелью. При данном q энергия E здесь непрерывно зависит от импульса p_0.

Построим также асимптотическую часть волновой функции элементарного возбуждения этого типа, для чего раскроем формулу (65). Найдем

$$\delta\Phi_{-+}(p_1,p_2) = u(p_1)u(p_2)\lambda(p_1,p_2) - v(p_1)v(p_2)\lambda^*(-p_2,-p_1),$$

и потому в рассматриваемом случае для δ-образной составляющей имеем

$$\delta\Phi_{-+}(p_1,p_2) = \delta(p_1-p_0)\,\delta(p_2+p_0-q)S\exp\{-i[\Omega(p_0)+\Omega(p_0-q)]t\},$$

где постоянная S будет равна

$$S = u(p_0)u(p_0-q)\frac{S_1+S_2}{2} + v(p_0)v(p_0-q)\frac{S_1-S_2}{2}.$$

Имеем, следовательно, в r-представлении

$$\delta\Phi_{-+}(r_1,r_2) = \text{const}\cdot\exp\{-i(\Omega(p_0)+\Omega(p_0-q))t\}\exp\{ip_0r_1 + i(q-p_0)r_2\}.$$

Сравним это выражение с волновой функцией пары $(-,+)$ в основном состоянии:

$$\Phi^0_{-+}(r_1,r_2) = \text{const}\int e^{ip(r_1-r_2)}u(p)v(p)\,dp.$$

Ясно, что такая функция Φ^0_{-+} соответствует связанному состоянию пары частиц, в частности, при $|r_1-r_2|\to\infty$ функция эта стремится к нулю. Выражение же $\delta\Phi_{-+}$ распадается на произведение двух плоских волн и соответствует независимому движению двух частиц с импульсами p_0, $q-p_0$.

---

[1] Положительный знак выбираем на основании общего условия нормировки (76), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\sum_p \theta(p)\vartheta(p) > 0. \tag{76}$$

Подставив в это условие решение (88), видим, что S_1 и S_2 должны иметь одинаковые знаки. Поэтому уравнение (89) приводит к положительному знаку E.

Таким образом видно, что элементарные возбуждения из непрерывного спектра можно физически интерпретировать как возбуждения, отвечающие диссоциации квазимолекулы на отдельные составляющие ее частицы.

Перейдем теперь к изучению спектра коллективных колебаний, который будет определяться с помощью решений уравнений (81), соответствующих дискретным (при фиксированном q) значениям E.

Рассмотрим прежде всего случай, когда частицы не имеют электрического заряда. В этом случае ввиду отсутствия кулоновского взаимодействия будем считать все ядра I, J, G конечными.

Далее, из уравнения (35) следует, что

$$L_0(\theta)=0 \quad \text{для} \quad \theta=u(p)v(p).$$

Поэтому неоднородное уравнение

$$L_0(\theta)=f(p)$$

может иметь решение только в том случае, если

$$\sum_p f(p)u(p)v(p)=0. \tag{91}$$

Видим теперь, что система уравнений (81) имеет при $q=0$ решение

$$\theta=u(p)v(p), \quad \vartheta=0, \quad E=0, \tag{92}$$

и потому будем искать ее решение для малых $|q|$ с помощью разложений по степеням $|q|$:

$$\begin{aligned}
&\theta=u(p)v(p)+|q|\theta_1(p,e)+|q|^2\theta_2(p,e)+\dots,\\
&\vartheta=|q|\vartheta_1(p,e)+\dots,\\
&E=|q|E_1+\dots,
\end{aligned} \tag{93}$$

где

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{q}}{|q|}.$$

Подставив эти разложения в уравнения (81), получим

$$L_0(\theta_1)=-\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant 3} e_\alpha\left\{\frac{\partial L_q(uv)}{\partial q_\alpha}\right\}_{q=0}, \tag{94}$$

$$M_0(\vartheta_1)=E_1u(p)v(p), \tag{95}$$

$$L_0(\theta_2)=E_1\vartheta_1-\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant 3} e_\alpha\left\{\frac{\partial L_q}{\partial q^\alpha}(\theta_1)\right\}_{q=0}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant\alpha\leqslant 3\\ 1\leqslant\beta\leqslant 3}} e_\alpha e_\beta\left\{\frac{\partial^2 L_q(uv)}{\partial q^\alpha\,\partial q^\beta}\right\}_{q=0}. \tag{96}$$

Уравнение (94) разрешимо, так как функция $f(p)$, стоящая в его правой части, обладает свойством $f(-p)=-f(p)$, ввиду которого условие (91) выполняется тривиально.

Для разрешимости уравнения (96) мы должны потребовать на основании (91), чтобы

$$E_1 \sum_p \vartheta_1(p,e)u(p)v(p) =$$

$$= \sum_p u(p)v(p)\left\{ \sum_{1\leqslant\alpha\leqslant 3} e_\alpha \left\{ \frac{\partial L_q}{\partial q^\alpha}(\theta_1) \right\}_{q=0} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} e_\alpha e_\beta \left\{ \frac{\partial^2 L_q(uv)}{\partial q^\alpha\, \partial q^\beta} \right\}_{q=0} \right\}. \quad (97)$$

Из уравнения (95) следует, что ϑ_1 пропорционально E_1. Поэтому условие (97) дает возможность определить E_1^2 и т. д.

Проведя указанную здесь программу вычислений в случае радиальной симметрии, можно убедиться в том, что при малом $|q|$

$$E = \frac{|q|s}{\sqrt{3}},$$

где, если отвлечься от поправок на взаимодействие, множитель s равен величине скорости частиц на поверхности Ферми.

Мы нашли, таким образом, коллективные колебания квазиакустического характера. Область их существования ограничена импульсами q, для которых соответствующая E лежит ниже порога возбуждения непрерывного спектра.

Посмотрим теперь, что произойдет с колебаниями этого типа у динамической системы электронов, рассматриваемой в теории сверхпроводимости. Заметим прежде всего, что наличие кулоновского взаимодействия вызывает здесь существенную особенность у ядра G_q:

$$G_q = 8\pi e^2/|q|^2 + G'_q.$$

Целесообразно поэтому представить теперь оператор M_q в виде

$$M_q(\vartheta) = M'_q(\vartheta) + \frac{8\pi e^2}{|q|^2}\{v(p)u(p-q) + u(p)v(p-q)\} \times$$

$$\times \frac{1}{V}\sum_V \vartheta(p')\{v(p')u(p'-q) + u(p')v(p'-q)\}, \quad (98)$$

явно выделив в нем часть с особенностью[1] при $q = 0$.

[1] Не следует думать, что при более точной трактовке мы получили бы эффект экранирования в множителе G_q и тем самым ликвидировали бы указанную особенность. Причина этого в том, что мы имеем здесь дело с колебаниями плотности электрического заряда, что видно хотя бы из того, что в (98) как раз и входит амплитуда этих колебаний (см. (87)). Эффект экранирования появляется, вообще говоря, в выражениях, соответствующих учету корреляции. При рассмотрении же влияния пространственной неоднородности мы всегда должны принимать во внимание дальнодействующий характер кулоновских сил. Именно поэтому мы и считаем, что в более точной трактовке сингулярность при $q = 0$ в указанных выражениях сохранится. *При исследовании же неоднородности в распределении заряда кулоновские силы имеют дальнодействующий характер*, и потому в q-представлении всегда должна присутствовать указанная особенность при $q = 0$.

Для регуляризации (81) введем новую неизвестную, положив

$$\frac{1}{V}\sum_{p'}\vartheta(p')\{v(p')u(p'-q)+u(p')v(p'-q)\}=\frac{|q|^2}{16\pi e^2}\Psi.$$

Тогда данная система уравнений может быть записана в следующей форме:

$$L_q(\theta)=E\vartheta,$$

$$M_q'(\vartheta)+\{v(p)u(p-q)+u(p)v(p-q)\}\frac{\Psi}{2}=E\theta,$$

$$\frac{1}{V}\sum_{p'}\vartheta(p')\{v(p')u(p'-q)+u(p')v(p'-q)\}=\frac{|q|^2}{16\pi e^2}\Psi. \tag{99}$$

Видно, что при $q=0$ она имеет решение при произвольном E:

$$\theta=u(p)v(p),\quad \vartheta=0,\quad \Psi=E.$$

Поэтому будем искать ее решение для малых $|q|$ с помощью разложения

$$\begin{aligned}&\theta=u(p)v(p)+|q|\theta_1(p,e)+|q|^2\theta_2(p,e)+\ldots,\\ &\vartheta=|q|\vartheta_1(p,e)+\ldots,\quad \Psi=E_0+|q|\Psi_1+\ldots,\\ &E=E_0+|q|E_1+\ldots\end{aligned} \tag{100}$$

Подставив выражения (100) в (99), найдем

$$L_0(\theta_1)=E_0\vartheta_1-\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant 3}e_\alpha\left\{\frac{\partial L_q(uv)}{\partial q_\alpha}\right\}_{q=0}, \tag{101}$$

$$M_0'(\vartheta)=u(p)v(p)(E_1-\Psi_1)+E_0\theta_1+\frac{E_0}{2}\sum_\alpha e_\alpha\left\{u(p)\frac{\partial v(p)}{\partial p_\alpha}+v(p)\frac{\partial u(p)}{\partial p_\alpha}\right\}, \tag{102}$$

$$\frac{1}{V}\sum_{p'}\vartheta_1(p')u(p')v(p')=0, \tag{103}$$

$$L_0(\theta_2)=E_0\vartheta_2+E_1\vartheta_1-\sum_\alpha e_\alpha\left\{\frac{\partial L_q}{\partial q_\alpha}(\theta_1)\right\}_{q=0}-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}e_\alpha e_\beta\left\{\frac{\partial^2 L_q(uv)}{\partial q_\alpha\,\partial q_\beta}\right\}_{q=0}, \tag{104}$$

$$2\frac{1}{V}\sum_p\vartheta_2(p)u(p)v(p)=\frac{E_0}{16\pi e^2}+\frac{1}{V}\sum_{\alpha,p}\vartheta_1(p)e_\alpha\left\{u(p)\frac{\partial v(p)}{\partial p_\alpha}+v(p)\frac{\partial u(p)}{\partial p_\alpha}\right\}. \tag{105}$$

В уравнении (102) положим

$$E_1-\Psi_1=0.$$

Тогда из формул (100), (102) можно заметить, что θ_1 и ϑ_1 будут антисимметричны при перемене знака p, и потому условие (103) будет удовлетворено автоматически.

Для решения уравнения (104) напишем обычное условие

$$E_0 \sum \vartheta_2(p)u(p)v(p) =$$

$$= \sum u(p)v(p)\left\{ \sum_\alpha e_\alpha \left(\frac{\partial L_q}{\partial q_\alpha}(\theta_1) \right)_{q=0} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} e_\alpha e_\beta \left[\frac{\partial^2 L_q(uv)}{\partial q_\alpha \, \partial q_\beta} \right]_{q=0} \right\}. \quad (106)$$

Левая часть этого равенства на основании (105) будет равна

$$V\left\{ \frac{E_0^2}{32\pi e^2} + \frac{1}{2V} \sum_{\alpha,p} \vartheta(p) e_\alpha \left\{ u(p) \frac{\partial v(p)}{\partial p_\alpha} + v(p) \frac{\partial u(p)}{\partial p_\alpha} \right\} \right\}. \quad (107)$$

Теперь видим, что уравнение (106), определяющее E_0, не имеет нулевого корня. Действительно, из (101), (102) следует, что левая часть (106), представленная выражением (107), обратится в нуль при $E_0 = 0$. Правая же часть (106) при $E_0 = 0$ совпадает с правой частью (97) и потому будет отлична от нуля.

Вычислим сейчас E_0 для радиально-симметричного случая. Возьмем

$$E(p) = \frac{p^2}{2m}$$

и предположим еще, что

$$J(p_1, p_2; p_2', p_1') = J(p_1 - p_1') \quad \text{при} \quad p_1 + p_2 = p_1' + p_2'. \quad (108)$$

Тогда можно проверить наличие тождества

$$L_q(\chi_q) = \left\{ \frac{(p-q)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \right\} (v(p)u(p-q) - u(p)v(p-q)), \quad (109)$$

в котором

$$\chi_q(p) = u(p)v(p-q) + u(p-q)v(p). \quad (110)$$

Заметим, что случай (108) реализуется, если взаимодействие не зависит от скоростей и определяется потенциалом $U(r_1 - r_2)$. В этом случае

$$J(p) = J(-p) = \int U(r) \mathrm{e}^{i(rp)} \, dr.$$

В теории сверхпроводимости кроме кулоновских сил, для которых условие (108) естественно выполняется, необходимо принять во внимание еще фрелиховское взаимодействие, обусловленное обменом фононами. Такое взаимодействие эффективно лишь в узком слое около поверхности Ферми, и в этой области его вклад в J будет равен

$$J_{\mathrm{ph}}(p_1, p_2; p_2', p_1') = -g^2(p_1 - p_1') \quad \text{при} \quad p_1 + p_2 = p_1' + p_2', \quad (111)$$

где $g(q)$ — величина, характеризующая связь электронов с фононами. Поэтому мы и можем пользоваться соотношением (109). Строго говоря, чтобы оно имело место точно, необходимо продеформировать выражение (110). Мы заметили бы тогда отклонения порядка отношения C/ω, где ω — средняя энергия фонона, т. е. отклонения порядка величины эффектов запаздывания электронно-фононного взаимодействия.

Благодаря этому обстоятельству такое уточнение нецелесообразно проводить в рассматриваемой сейчас модели, в которой электронно-фононное взаимодействие заменено прямым взаимодействием электронов, поскольку сама эта замена допустима лишь с точностью до пренебрежения эффектами запаздывания.

Применим сейчас соотношения (109), (110) для определения величины E_0. Ввиду эрмитовости оператора L_q имеем

$$\sum_p \{L_q(\theta)\chi_q - L_q(\chi_q)\theta\} = 0, \tag{112}$$

откуда следует

$$E\frac{1}{V}\sum_p \vartheta(p)\{u(p)v(p-q) + v(p)u(p-q)\} \approx$$

$$= \frac{1}{V}\sum_p \theta(p)\left\{\frac{(p-q)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m}\right\}\{v(p)u(p-q) - u(p)v(p-q)\}. \tag{113}$$

Вычислим теперь обе части этого равенства с точностью до величины порядка $|q|^2$ включительно. Из (100) видим, что

$$\theta(p) = u(p)v(p) + |q|\theta_1 + \dots .$$

Кроме того, из (99) и (100) имеем

$$\frac{1}{V}\sum_p \vartheta(p)\{u(p)v(p-q) + v(p)u(p-q)\} = \frac{|q|^2}{16\pi e^2}\{E_0 + |q|\Psi_1 + \dots\},$$

поэтому из (113) получим

$$E_0^2 = 16\pi e^2 \frac{1}{V}\sum_p u(p)v(p)\frac{(\mathbf{pe})}{m}\left\{v(p)\left(\mathbf{e}\frac{\partial u(p)}{\partial \mathbf{p}}\right) - u(p)\left(\mathbf{e}\frac{\partial v(p)}{\partial \mathbf{p}}\right)\right\}, \tag{114}$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{q}/|q|$. Подставив в (114) выражения u, v (36), найдем окончательно

$$E_0 = \sqrt{\frac{4e^2}{3\pi}\frac{p_F^2}{m}}, \tag{115}$$

где p_F — импульс Ферми.

Очевидно, что мы получили здесь обычное значение энергии для известных плазменных колебаний; специфика сверхпроводящего состояния полностью выпала[1]. Ввиду того что E_0 значительно больше энергии непрерывного спектра (при малых q), найденное стационарное решение окажется в более точной трактовке лишь квазистационарным.

Отметим, однако, одно любопытное обстоятельство, а именно то, что, несмотря на полученный сейчас результат, у системы уравнений (81) значение $E = 0$ можно рассматривать как приближенное собственное значение.

[1] Этот результат был ранее получен Андерсоном [6]. Высказывавшееся ранее (см. § 7 в [1]) предположение о существенности влияния сверхпроводящего состояния не подтвердилось.

Действительно, учитывая (109), нетрудно заметить, что, выбрав выражения

$$\theta_q(p) = \chi_q(p), \quad \vartheta_q(p) = 0, \quad E = 0,$$

мы удовлетворим требованиям системы (81) с точностью до величин порядка $|q|^2$. Несколько позже мы заметим, что это обстоятельство оказывается весьма существенным для обеспечения градиентной инвариантности теории.

Мы только что отмечали, что плазменные колебания со своим высоким значением E неспецифичны для сверхпроводящего состояния. В связи с этим можно поставить вопрос: имеются ли вообще коллективные колебания, характерные для такого состояния?

Как мы теперь видим, их можно искать лишь среди колебаний, не меняющих плотности распределения электрического заряда.

Иначе говоря, мы должны искать решения системы (81), у которых исчезает выражение

$$\frac{1}{V}\sum_p \vartheta(p)\{u(p)v(p-q) + v(p)u(p-q)\},$$

с которым и связано появление особенности при $q = 0$ (см. (98)).

Возьмем радиально-симметричный случай. Установим ось z по направлению вектора $\mathbf{q}$ и введем цилиндрические координаты. Будем искать решения вида

$$\begin{aligned} \theta_q(p) &= e^{in\varphi}\theta(p^2, p_z), \\ \vartheta_q(p) &= e^{in\varphi}\vartheta(p^2, p_z), \end{aligned} \qquad n \neq 0.$$

Такие решения формально будут существовать, и для них указанное выражение тождественно равно нулю. Вопрос состоит лишь в том, будут ли соответствующие значения E лежать ниже порога возбуждения непрерывного спектра.

Следовало бы проанализировать также колебания не рассматривавшейся здесь ветви спектра, у которой

$$\lambda_{-+} = \lambda_{+-} = 0.$$

§ 5. Вопросы электродинамики сверхпроводящего состояния

Рассмотрим вопрос об изменении основного сверхпроводящего состояния под действием внешнего постоянного поля $\mathbf{A}(r)$.

Чтобы работать в линейном приближении, будем считать $\mathbf{A}(r)$ бесконечно малым первого порядка и воспользуемся общими уравнениями (77).

Тогда, если не учитывать наличия парамагнитного члена[1], получим

$$\lambda_{-+}(p_1, p_2) = \frac{1}{2}\theta_q(p), \quad \lambda^*_{-+}(-p_2, -p_1) = -\frac{1}{2}\theta_q(p) \tag{116}$$

и

$$L_q(\theta_q) = -\frac{e}{m}(2\mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{A}(q)\{v(p)u(p-q) - u(p)v(p-q)\}. \tag{117}$$

[1] В линейном приближении его эффект можно всегда рассмотреть независимо.

Займемся сейчас исследованием свойств этого уравнения. Возьмем

$$e\mathbf{A}(q) = i\mathbf{q}\varphi(q). \tag{118}$$

Тогда в r-представлении мы должны иметь при наличии градиентной инвариантности условие

$$F(r_1, r_2) = \exp\{i[\varphi(r_2) - \varphi(r_1)]\}F_0(r_1, r_2)$$

или, поскольку в данном случае φ бесконечно мало,

$$\delta F(r_1, r_2) = i\{\varphi(r_2) - \varphi(r_1)\}F_0(r_1, r_2).$$

Переходя к p-представлению и используя формулу (85), получим

$$\lambda(p_1, p_2) = i\varphi(p_1 + p_2)\{u_{p_1}v_{p_2} + v_{p_1}u_{p_2}\}$$

и

$$\theta_q(p) = 2i\varphi(q)\{u(p)v(p-q) + v(p)u(p-q)\} = 2i\varphi(q)\chi_q(p).$$

С другой стороны, найденное $\theta_q(p)$ должно удовлетворять уравнению (117) в случае (118), и потому

$$2i\varphi(q)L_q\{\chi_q\} = \frac{1}{im}\{(2\mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{q}\}\varphi(q)\{v(p)u(p-q) - u(p)v(p-q)\}.$$

Но это и есть не что иное, как соотношение (109).

Таким образом, свойство градиентной инвариантности имеет место с той же степенью точности, как и соотношение (109), т. е. с точностью до эффектов запаздывания электронно-фононного взаимодействия.

Представим теперь себе то положение, которое получилось бы, если поступать следующим образом. Рассмотрим сначала гамильтониан системы без внешнего поля, совершим каноническое преобразование

$$a_{k1+} = u_k\alpha_{k0} + v_k\alpha^+_{k1}, a_{-k,-} = u_k\alpha_{k1} - v_k\alpha^+_{k0}$$

и определим u, v из условия компенсации опасных диаграмм с импульсами k, $-k$.

Затем введем в гамильтониан малое внешнее поле, преобразуем все выражение к амплитудам α, α^+, после чего, не заботясь о компенсации новых опасных диаграмм с импульсами k, $-k+q$, возникающих из-за внешнего поля, применим обычную теорию возмущений.

Тогда вместо (117) мы получили бы

$$\{\Omega(p) + \Omega(p-q)\}\theta_q(p) = -\frac{e}{m}(2\mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{A}(q)\{v(p)u(p-q) - u(p)v(p-q)\},$$

откуда следует

$$\theta_q(p) = \frac{-\frac{e}{m}(2\mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{A}(\mathbf{q})}{\Omega(p) + \Omega(p-q)}\{v(p)u(p-q) - u(p)v(p-q)\}. \tag{119}$$

Этот результат, очевидно, уже не будет градиентно-инвариантным ни в каком разумном приближении. Заменив $L_q(\theta)$ на

$$\{\Omega(p) + \Omega(p-q)\}\theta,$$

мы разрушили тем самым основное свойство этого оператора — то, что нуль является его собственным значением при $q = 0$.

Интересно отметить, что уравнение (117) может быть также получено следующим образом. В полном гамильтониане мы совершаем обычное каноническое преобразование, перепутывающее амплитуды с импульсами $\pm q$. Затем применим метод приближенного вторичного квантования, вводя бозе-амплитуды, заменяющие произведения операторов α_ν, α_μ. Тогда, как показал Галасевич (частное сообщение), мы приходим при изучении «статической деформации» системы, обусловленной действием постоянного вектор-потенциала, в точности к уравнениям (117). Таким образом, интегральный член в выражении L в каком-то смысле можно интерпретировать как происходящий от коллективного эффекта. Заметим, что аналогичный подход был развит в работе Блатта и Мацубары [9].

Перейдем теперь к изучению зависимости плотности тока от вектор-потенциала. Имеем на основании (84)

$$m\mathbf{j}_q = e\mathbf{p}_q - e^2\mathbf{A}(q)\frac{2}{V}\sum v_p^2,$$

и потому благодаря (87)

$$m\mathbf{j}_q = \frac{1}{V}\sum_p e\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{2}\right)\theta_q(p)\{u(p) - v(p-q) - v(p)u(p-q)\} - e^2\mathbf{A}(q)\frac{2}{V}\sum_p v_p^2. \tag{120}$$

Обозначим через $T_\alpha(p, q)$ решение уравнения

$$L_q(T_\alpha) = -\frac{2p_\alpha - q_\alpha}{m}\{v(p)u(p-q) - u(p)v(p-q)\}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{121}$$

Тогда на основании (117) и (120) найдем

$$\begin{aligned} \theta_q(p) &= e\sum_\alpha T_\alpha(p, q)A_\alpha(q), \\ j_q^\alpha &= \frac{e^2\rho_0}{m}\sum_\beta\{S_{\alpha\beta}(q) - \delta(\alpha - \beta)\}A_\beta(q), \end{aligned} \tag{122}$$

где

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{2}{V}\sum_p v_p^2, \\ S_{\alpha\beta}(q) &= \frac{1}{V}\sum\frac{(2p_\alpha - q_\alpha)}{2\rho_0}\{u(p)v(p-q) - v(p)u(p-q)\}T_\beta(p, q). \end{aligned} \tag{123}$$

С учетом (121) можно написать также

$$S_{\alpha\beta}(q) = \frac{1}{V}\frac{m}{\rho_0}\sum_p L_q(T_\alpha)T_\beta.$$

Отсюда можно убедиться в симметричности $S_{\alpha\beta}$:

$$S_{\alpha\beta}(q) = S_{\beta\alpha}(q). \tag{124}$$

Из (123) имеем также

$$\sum_\alpha q_\alpha S_{\alpha\beta}(q) = \frac{m}{\rho_0 V}\sum_p L_q(\chi_q)T_\beta = \frac{1}{V}\frac{m}{\rho_0}\sum_p \chi_q L_q(T_\beta) = \frac{1}{V\rho_0}\sum_p (2p_\beta - q_\beta)\times$$

$$\times\{u(p)v(p-q) - v(p)u(p-q)\}\{u(p)v(p-q) + v(p)u(p-q)\} =$$

$$= \frac{1}{V\rho_0}\sum_p (2p_\beta - q_\beta)\{u^2(p)v^2(p-q) - v^2(p)u^2(p-q)\} =$$

$$= \frac{1}{V\rho_0}\sum_p (2p_\beta - q_\beta)\{v^2(p-q) - v^2(p)\} =$$

$$= \frac{1}{V\rho_0}\sum_p (2p_\beta - q_\beta)v^2(p-q) - \frac{1}{V\rho_0}\sum_p (2p_\beta - q_\beta)v^2(p) =$$

$$= \frac{1}{V\rho_0}\sum_p (2p_\beta + q_\beta)v^2(p) - \frac{1}{V\rho_0}\sum_p (2p_\beta - q_\beta)v^2(p).$$

Получаем, таким образом, соотношения Букингема [7]

$$\sum_\alpha q_\alpha S_{\alpha\beta}(q) = q_\beta. \tag{125}$$

В силу (125) и (122) можно убедиться в выполнении закона сохранения: $\mathbf{q}\mathbf{j}_a = 0$. Видим также, что $\mathbf{j}_q$ фактически зависит лишь от поперечной части $\mathfrak{A}$ вектор-потенциала A:

$$j_q^\alpha = \frac{e^2\rho_0}{m}\sum_\beta \{S_{\alpha\beta}(q) - \delta(\alpha-\beta)\}\mathfrak{A}_\beta(q),$$

$$\mathfrak{A}_\alpha(q) = A_\alpha(q) - \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}(q))}{q^2}q_\alpha.$$

Исследуем сейчас зависимость j_α от $\mathfrak{A}(q)$ при малых q. Так как теперь $\mathbf{q}\mathfrak{A}(q) = 0$, то уравнение (117) можем представить в форме

$$L_q(\theta_q) = 2\frac{e}{m}(\mathbf{p}_\perp\mathfrak{A})\{u(p)v(p-q) - v(p)u(p-q)\},$$

где $\mathbf{p}_\perp$ — составляющая $\mathbf{p}$, перпендикулярная вектору $\mathbf{q}$. Установив в пространстве импульсов ось z по направлению $\mathfrak{A}(q)$, а ось x — по направлению $\mathbf{q}$, получим тогда

$$\theta_q(p) = e\mathfrak{A}(q)\tau(p,q), \tag{126}$$

где

$$L_q(\tau) = f(p,q) = \frac{2}{m}p_z\{u(p)v(p-q) - v(p)u(p-q)\}. \tag{127}$$

Как видно, здесь $f(p,q)$ будет антисимметричной функцией p_z:

$$f(p_x, p_y, -p_z; q) + f(p_x, p_y, +p_z; q) = 0. \tag{128}$$

Такая функция будет ортогональна к $u(p)$, $v(p)$. Поэтому всегда[1] можно искать решение уравнения (127) в виде

$$\tau(p, q) = q\tau_1(p) + q^2\tau_2(p) + \ldots,$$

где τ_1, τ_2, ... — антисимметричные функции переменной p в смысле (128).

С другой стороны, подставив (126) в (120), найдем

$$\mathbf{j}_q = \frac{e^2\rho_0}{m}\{S(q) - \mathbf{e}_z\}\mathfrak{A}(q),$$

где $\mathbf{e}_z$ — орт оси z, а

$$S(q) = \sum \frac{2\mathbf{p} - \mathbf{q}}{2\rho_0}\tau(p, q)\{u(p)v(p-q) - v(p)u(p-q)\}.$$

Но при $q \to 0$ функция τ будет функцией первого порядка малости, и потому $S(q)$ будет исчезать как q^2.

Итак, для достаточно малых q

$$\mathbf{j}_q = -\frac{e^2\rho_0}{m}\mathfrak{A}(q), \tag{129}$$

и мы имеем эффект Мейсснера в чистом виде [8, 9].

Как мы видели, при рассмотрении влияния вектор-потенциала существенным оказался лишь оператор $L_q(\theta)$ [10].

Если бы мы пожелали рассмотреть влияние внешнего скалярного потенциала U, то в линейном приближении пришли бы к уравнению

$$M_q(\vartheta) = -2eU(q)\{u(p)v(p-q) + v(p)u(p-q)\}$$

с оператором M_q. Так как этот оператор из-за деформации зарядовой плотности содержит сингулярный член, нетрудно убедиться, что специфика сверхпроводящего состояния (в линейном приближении) здесь выпадает и эффект экранирования будет происходить так же, как и в нормальном состоянии.

Заметим, наконец, что если мы будем изучать влияние члена, пропорционального $\mathbf{H} \times \boldsymbol{\sigma}$, то мы придем к новому оператору, тому самому, который входит в уравнения колебаний для той ветви спектра, где $\lambda_{-+} = 0$.

Примечание при корректуре. Недавно нам стала известна новая интересная работа Мэя и Шафрота [11], в которой с использованием нашей старой техники компенсации только диаграмм с противоположными импульсами также получены убедительные результаты относительно калибровочной инвариантности эффекта Мейсснера. Ввиду этого им пришлось рассмотреть все порядки теории возмущений, ибо, как это было показано в настоящей работе, в случае наличия электромагнитного поля следует применять обобщенный принцип компенсации. Однако в отличие от нашего подхода указанные авторы сразу исследовали ситуацию с тройным гамильтонианом, что представляет дополнительные преимущества.

[1] С чисто математической точки зрения возможен, конечно, случай, когда уравнение $L_0(\theta) = 0$ кроме симметричного решения $\theta = u(p)v(p)$ имеет еще другое собственное решение, антисимметричное по отношению к p_z. Физически, однако, рассмотрение подобного случая не имеет оснований, и мы его учитывать не будем.

Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В.* Новый метод в теории сверхпроводимости. М.: Изд-во АН СССР, 1958; *Боголюбов Н.Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 530.
2. *Боголюбов Н.Н.* О новом методе в теории сверхпроводимости. I // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58; *Боголюбов Н.Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 177.
3. *Тябликов С.В.* // Докл. АН СССР. 1958; Науч. докл. высш. школы. Сер. физ.-мат. наук. 1958. № 3. С. 549.
4. *Боголюбов Н.Н., Соловьев В.Г.* Об одном вариационном принципе в проблеме многих тел // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, № 5. С. 1011; *Боголюбов Н.Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 419.
5. *Власов А.А.* Теория многих частиц. М.: ГИТТЛ, 1950.
6. *Anderson P.W.* // Phys. Rev. 1958. V. 110. P. 827; 1958. V. 110. P. 985.
7. *Buckingham M.J.* // Nuovo Cimento. 1957. V. 5. P. 1763.
8. *Bardeen J., Cooper L., Schrieffer J.* // Phys. Rev. 1957. V. 108. P. 1175.
9. *Blatt J.M., Matsubara T.* // Progr. Theor. Phys. 1958. N 20. P. 781.
10. *Bardeen J.* // Nuovo Cimento. 1957. V. 5. P. 1765.
11. *May R.M., Schafroth M.R.* // Phys. Rev. 1959. V. 115. P. 1446.

О ПРИНЦИПЕ ОСЛАБЛЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИИ И МЕТОДЕ КВАЗИСРЕДНИХ*

Данная публикация является результатом обработки лекций, прочитанных автором зимой 1960 г. Лекции эти посвящены развитию представлений об ослаблении корреляции, важность которых для классических динамических систем была показана в монографии [1].

В связи с этими представлениями излагается метод квазисредних, основные идеи которого были намечены в работе [2].

Метод квазисредних прилагается к вопросам теории сверхтекучести и сверхпроводимости. Выясняется связь между градиентной инвариантностью и свойствами энергетического спектра.

Глава I

ПРИНЦИП ОСЛАБЛЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИИ

§ 1. Введение

В задачах статистической физики при изучении статистического равновесия весьма часто используется представление [1] о том, что корреляция между отдаленными частицами в макроскопической динамической системе при достаточно больших расстояниях между ними практически исчезает.

Для выяснения этого положения можно прибегнуть, например, к следующей аргументации[1].

Рассмотрим изолированную макроскопическую систему Σ, занимающую некоторый объем V, линейный размер которого L весьма велик по сравнению с эффективным радиусом действия r_0 межчастичных сил. Разобьем V на весьма большое число объемов $V_1, \ldots, V_M$, но так, чтобы их линейные размеры l оставались много большими r_0.

Мы разбиваем таким образом систему Σ на ряд подсистем $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_M$, каждая из которых состоит еще из достаточно большого числа частиц N_j.

---

* ОИЯИ. Дубна, 1961; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 9.

[1] Эта аргументация «в обратном направлении» приводится в книге [3] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица. С ее помощью авторы, *исходя из представления* о малости корреляции между слабо взаимодействующими частями макроскопической системы, разъясняют привилегированную роль канонического распределения Гиббса.

Нетрудно заметить, что энергия взаимодействия между этими подсистемами будет исчезающе малой по сравнению с их внутренней энергией. Действительно, взаимодействие между различными Σ_j осуществляется в основном с помощью частиц, находящихся в слое шириной порядка r_0 около поверхностей, ограничивающих объемы V_j. Относительное же число таких частиц (отнесенное к полному числу частиц) будет исчезающе малой величиной — порядка r_0/l.

В этой ситуации мы можем пренебречь энергией взаимодействия между подсистемами и представить полную энергию H системы Σ как сумму независимых энергий отдельных подсистем Σ_j:

$$H_\Sigma = H_{\Sigma_1} + \ldots + H_{\Sigma_M}.$$

Но тогда оператор гиббсовского распределения

$$D = \exp\left(-\frac{H_\Sigma}{\theta}\right)$$

распадается на произведение независимых операторов, относящихся к отдельным Σ_j, и корреляция между частицами из различных подсистем Σ_j окажется исчезающе малой. Мы говорим сейчас о корреляции между динамическими величинами, относящимися к *одному и тому же моменту времени*, поскольку именно они определяются *только формой* D, а не уравнениями движения. Мы можем, однако, распространить сделанное заключение и на динамические величины, относящиеся к различным моментам времени.

Действительно, ввиду малости взаимодействия между подсистемами мы можем рассматривать их с достаточной точностью как практически изолированные в течение некоторого интервала времени T. Необходимо заметить, что $T \to \infty$ при $r_0/l \to 0$, $N_j/V_j = \text{const}$. Если корреляции между частицами из различных Σ_j в любой момент времени отсутствуют и их движения в различных Σ_j совершаются независимо в течение промежутка времени порядка T, то очевидно, что будут исчезать и корреляции между динамическими величинами для частиц из разных Σ_j, относящихся к различным временам t_j, если только

$$|t_i - t_j| < T.$$

Следует заметить, что приведенное интуитивное рассуждение, весьма простое с физической точки зрения, исключительно трудно провести на надлежащем математическом уровне, где мы должны пользоваться точными формулировками и работать со строгими мажорационными оценками.

Принцип ослабления корреляции удается проверить на таком уровне только для специальных, особо простых моделей и то с помощью весьма длительных и громоздких расчетов [4].

Подобная ситуация, впрочем, типична вообще для всех «проблем обоснования» статистической физики, например для проблемы обоснования эргодической гипотезы, канонического распределения Гиббса, закона возрастания энтропии при необратимых процессах и т. п. Мы не будем поэтому вдаваться здесь в эти сложнейшие проблемы и ограничимся лишь более тщательной формулировкой принципа ослабления корреляции и затем перейдем к рассмотрению его различных приложений.

§ 2. Общая формулировка

Ограничимся случаем пространственной однородности, когда рассматриваемые макроскопические системы находятся в однородной фазе. Динамические свойства этих систем будем характеризовать с помощью средних значений от полевых функций в гейзенберговском представлении:

$$\langle \dots \Psi^+(t_j, x_j) \dots \Psi(t_s, x_s) \dots \rangle = F(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n). \tag{2.1}$$

Здесь $x = (\mathbf{r}, \sigma)$ — совокупность пространственных координат $(\mathbf{r})$ и ряда дискретных индексов (σ), определяющих спин частиц, их сорт и т. п.; n — фиксированное число 1, 2, 3, ...

Далее,

$$\Psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k a_{k\sigma}(t) e^{i(\mathbf{kr})}, \tag{2.2}$$

где $a_{k\sigma}$ — бозе- или ферми-амплитуды в гейзенберговском представлении, V — объем системы.

Подчеркнем, что средние значения в (2.1) берутся по гиббсовскому ансамблю, *причем всегда совершается обычный предельный переход*:

$$V \to \infty, \quad \frac{N_\nu}{V} \to \rho_\nu$$

(ρ_ν — конечные величины, представляющие плотности числа частиц различных сортов).

Таким образом, *равенства* (2.1) *всегда понимаются в предельном смысле*[1]:

$$F(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n) = \lim_{V \to \infty} \langle \dots \Psi^+(t_j, x_j) \dots \Psi(t_s, x_s) \dots \rangle. \tag{2.1'}$$

Скажем сейчас несколько слов по поводу «правил отбора» для рассматриваемых средних, обусловливаемых законами сохранения числа частиц, спина и т. п.

Пусть, например, мы имеем закон сохранения полного числа частиц:

$$N = \sum_{k,\sigma} a^+_{k\sigma} a_{k\sigma} = \sum_\sigma \int_V \Psi^+ \Psi \, d\mathbf{r},$$

так что

$$[H; N] = 0,$$

где H — гамильтониан обсуждаемой системы.

---

[1] Выражения F, как нетрудно видеть, могут содержать сингулярные или обобщенные функции, например δ-функции и т. п. Поэтому предельные соотношения должны пониматься в обобщенном смысле [4]. Мы, однако, не будем давать здесь точных формулировок. Это отклонило бы нас от основной темы и привело бы к сложным и недостаточно еще корректно поставленным математическим вопросам. Нам представляется, что в настоящее время пока нецелесообразно требовать проведения исследований по статистической физике на строгом математическом уровне, который сейчас доступен лишь для анализа сравнительно простых «модельных» примеров. Вполне достаточно применять интуитивные рассуждения, учитывающие физическую сущность задачи.

Ясно тогда, что если усреднение совершается по ансамблю Гиббса с фиксированным N, то

$$\langle \dots \Psi^+(t_j, x_j) \dots \Psi(t_s, x_s) \dots \rangle = 0,$$

если в произведении

$$\mathfrak{A} = \dots \Psi^+(t_j, x_j) \dots \Psi(t_s, x_s) \dots$$

число операторов уничтожения Ψ не равно числу операторов рождения Ψ^+.

Заметим далее, что такое же положение останется и в случае усреднения по большому ансамблю, когда

$$\langle \mathfrak{A} \rangle = \lim_{V \to \infty} \frac{\mathrm{Sp}\left\{ \mathfrak{A} \exp\left(-\frac{H - \lambda N}{\theta} \right) \right\}}{\mathrm{Sp}\left\{ \exp\left(-\frac{H - \lambda N}{\theta} \right) \right\}},$$

где λ — химический потенциал.

Действительно, так как H коммутирует с N, мы можем воспользоваться для представления Sp системой волновых функций Φ_ν, являющихся собственными функциями одновременно для H и N.

Тогда

$$\mathrm{Sp}\left\{ \mathfrak{A} \exp\left(-\frac{H - \lambda N}{\theta} \right) \right\} = \sum_\nu \langle \Phi_\nu^* \mathfrak{A} \Phi_\nu \rangle \exp\left(-\frac{E_\nu - \lambda N_\nu}{\theta} \right),$$

где E_ν, N_ν — собственные значения H, N для состояний Φ_ν.

Поскольку в состоянии Φ_ν оператор N имеет определенное значение N_ν, мы видим, что

$$\langle \Phi_\nu^* \mathfrak{A} \Phi_\nu \rangle = 0,$$

если в $\mathfrak{A}$ *число операторов рождения* Ψ^+ не равно *числу операторов уничтожения* Ψ, и поэтому в данном случае имеем также

$$\langle \mathfrak{A} \rangle = 0.$$

Совершенно аналогично убедимся, что если имеет место закон сохранения частиц определенного сорта, то написанное равенство справедливо и в том случае, когда в $\mathfrak{A}$ числа операторов рождения и уничтожения частиц *данного сорта* различны.

Такая же ситуация возникает при учете закона сохранения z-компоненты спина и т. п. В отношении правил отбора закон сохранения полного импульса

$$\mathbf{p} = \sum_{k,\sigma} \mathbf{k} a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma}$$

принадлежит к несколько иному типу. В обычном пространстве он просто соответствует трансляционной инвариантности соответствующих средних,

а правила отбора проявляются в импульсном пространстве. В самом деле, при наличии этого закона сохранения

$$\mathrm{Sp}\left\{\mathbf{p}\mathfrak{A}\exp\left(-\frac{H-\lambda N}{\theta}\right)-\mathfrak{A}\mathbf{p}\exp\left(-\frac{H-\lambda N}{\theta}\right)\right\}=$$

$$=\mathrm{Sp}\left\{\mathfrak{A}\left[\exp\left(-\frac{H-\lambda N}{\theta}\right);\mathbf{p}\right]\right\}=0,$$

и потому

$$\langle[p_\alpha;\mathfrak{A}]\rangle=0,\quad \alpha=1,2,3.$$

Отсюда следует, что

$$\langle[p_\alpha;\ldots\Psi^+(t_j,\mathbf{r}_j+\boldsymbol{\xi},\sigma_j)\ldots\Psi(t_s,\mathbf{r}_s+\boldsymbol{\xi},\sigma_s)\ldots]\rangle=0.$$

Но, с другой стороны, левая часть этого соотношения равна

$$i\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\langle\ldots\Psi^+(t_j,\mathbf{r}_j+\boldsymbol{\xi},\sigma_j)\ldots\Psi(t_s,\mathbf{r}_s+\boldsymbol{\xi},\sigma_s)\ldots\rangle.$$

Имеем поэтому

$$\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}F(t_1,\mathbf{r}_1+\boldsymbol{\xi},\sigma_1;\ldots;t_n,\mathbf{r}_n+\boldsymbol{\xi},\sigma_n)=0.$$

Таким образом, рассматриваемые выражения F не изменяются при пространственной трансляции:

$$\mathbf{r}_j\to\mathbf{r}_j+\boldsymbol{\xi}.$$

Воспользуемся теперь импульсным представлением (2.2). Получим

$$F(t_1,x_1;\ldots;t_n,x_n)=$$

$$=\sum_{(\ldots k_\nu\sigma_\nu\ldots)}\frac{1}{V^{n/2}}\langle\ldots a^+_{-k_j\sigma_j}(t_j)\ldots a_{k_s\sigma_s}(t_s)\ldots\rangle e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1+\ldots+\mathbf{k}_n\mathbf{r}_n)}.$$

Отсюда, принимая во внимание трансляционную инвариантность F, мы и получаем правила отбора в импульсном пространстве:

$$\langle\ldots a^+_{-k_j\sigma_j}(t_j)\ldots a_{k_s\sigma_s}(t_s)\ldots\rangle=0,\quad\text{если}\quad\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_n\neq0. \tag{2.3}$$

После сделанных предварительных замечаний приступим к формулировке принципа ослабления корреляции. Рассмотрим средние $F(t_1,x_1;\ldots t_n,x_n)$, не запрещаемые правилами отбора, и разобьем совокупность аргументов $\{t_1,x_1;\ldots,x_n\}$ произвольным образом на ряд групп:

$$\{\ldots t_\alpha,x_\alpha\ldots\},\quad\{\ldots t_\beta,x_\beta\ldots\},\ldots.$$

Нас будет интересовать асимптотическая форма F, когда все моменты времени t_1, ..., t_n фиксированы, а расстояния между точками $\mathbf{r}_j$ из *различных групп* стремятся к бесконечности. Постулируем прежде всего, что под знаком среднего полевые функции

$$\varphi(t_1,\mathbf{r}_1,\sigma_1),\quad\varphi(t_2,\mathbf{r}_2,\sigma_2)$$

($\varphi=\Psi^+$ или Ψ) при фиксированных t_1, t_2 и $|r_1-r_2|\to\infty$ будут в пределе точно коммутировать или антикоммутировать между собой. Тогда для на-

хождения асимптотической формы F мы можем переставлять в выражении (2.1) полевые функции $\varphi(t_i, x_i)$ с аргументами из различных групп и тем добиться такого положения, чтобы полевые функции для каждой данной группы аргументов оказались вместе в одном комплексе.

Поэтому получим

$$F(t_1, x_1; \dots t_n, x_n) - \eta < \mathfrak{A}_1(\dots t_\alpha, x_\alpha \dots)\mathfrak{A}_2(\dots t_\beta, x_\beta \dots) \dots > \to 0, \quad \eta = \pm 1,$$

где $\mathfrak{A}_1(\dots t_\alpha, x_\alpha \dots)$ представляет произведение полевых функций с аргументами только из первой группы, $\mathfrak{A}_2(\dots t_\beta, x_\beta \dots)$ — соответствующее произведение с аргументами только из второй группы и т. д.

Сделанное допущение об асимптотической коммутации выражает, по нашему мнению, совершенно универсальную закономерность.

Как известно, в квантовой теории поля все полевые функции $\varphi(t_1, x_1)$, $\varphi(t_2, x_2)$ должны точно коммутировать или антикоммутировать, если четырехмерный вектор

$$t_1 - t_2, \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

пространственноподобен.

В задачах статистической физики, где мы имеем дело с формально нелокальными взаимодействиями, свойства коммутации должны удовлетворяться лишь приближенно, тем точнее, чем больше $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ при данных t_1, t_2.

Перейдем теперь к рассмотрению асимптотической структуры выражения

$$\langle \mathfrak{A}_1(\dots t_\alpha, x_\alpha \dots)\mathfrak{A}_2(\dots t_\beta, x_\beta \dots) \dots \rangle \tag{2.4}$$

при неограниченном увеличении пространственных расстояний между точками r_j из различных групп (t_1, ..., t_n фиксированы).

Так как корреляция между динамическими величинами $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ должна ослабевать и практически исчезать при достаточно больших расстояниях, мы должны были бы считать, что эта асимптотическая форма распадается на произведение вида

$$\Phi_1(\dots t_\alpha, x_\alpha \dots)\Phi_2(\dots t_\beta, x_\beta \dots) \dots . \tag{2.4'}$$

Следует, однако, заметить, что *такая формулировка принципа ослабления корреляции не является самой общей*, и мы можем представить себе случаи, где положение будет более сложным.

Возьмем, например, полностью изотропную ферромагнитную систему с температурой ниже точки Кюри, когда имеется конечная вероятность того, что спины расположены параллельно. Если бы было приложено внешнее однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, хотя бы и весьма малое, то эти спины ориентировались бы по направлению $\mathbf{H}$.

Рассмотрим случай, когда внешнего магнитного поля нет. Тогда направление $\mathbf{e}$ вектора намагниченности неопределенно, и мы имеем типичный «случай вырождения». Возьмем среднее типа (2.4) для состояния системы с данным фиксированным ортом вектора намагниченности[1]

$$\langle \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \dots \rangle_{\mathbf{e}},$$

[1] Мы можем «определить» это состояние как предельное — оно включает однородное внешнее поле, направленное по $\mathbf{e}$, — и затем устремим к нулю интенсивность этого поля.

и пусть его асимптотическая форма (2.4′) будет следующей:

$$\Phi_{1\mathbf{e}}\Phi_{2\mathbf{e}}.$$

Так как усреднение по всему гиббсовскому ансамблю в рассматриваемом случае отсутствия внешнего поля включает также и усреднение по $\mathbf{e}$, то

$$\langle \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots\rangle = \int \langle \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots\rangle_{\mathbf{e}}\, d\mathbf{e},$$

где интеграл

$$\int \ldots\, d\mathbf{e}$$

обозначает среднее по всем направлениям орта $\mathbf{e}$. Поэтому и соответствующая асимптотическая форма (2.4′) будет иметь вид

$$\int \Phi_{1\mathbf{e}}\Phi_{2\mathbf{e}} \ldots\, d\mathbf{e}.$$

Выполнив входящие сюда тривиальные интеграции по углам, получим *сумму* членов типа (2.4′). Таким образом, асимптотическая форма для среднего (2.4) в рассматриваемом случае представляется *не одним* произведением типа (2.4′), а суммой произведений этого типа.

Заметим, что подобное положение возникает, когда мы имеем дело с «вырожденным» состоянием, «формально не устойчивым» по отношению к включению бесконечно малых внешних полей.

В этой работе мы не будем иметь дело с такими случаями. Надо к тому же добавить, что отмеченные «трудности» в формулировке принципа ослабления корреляции *имеют чисто формальный характер. Всегда можем ввести* в гамильтониан *достаточно малое внешнее поле* (чтобы не изменить реальных физических свойств системы), *снимающее вырождение, и прийти к «нормальному положению», когда асимптотическое выражение полностью факторизуется.*

Поэтому мы сформулируем принцип ослабления корреляции в «нормальной форме», потребовав, чтобы асимптотическое значение среднего (2.4) представлялось выражением (2.4′), в котором каждая из функций

$$\Phi_i(\ldots t_\gamma, x_\gamma \ldots)$$

зависит лишь от одной, именно i, группы аргументов и не меняется при изменении структуры других операторов $\mathfrak{A}_s$ с $s \neq i$, *если только при таком изменении мы не выходим за рамки правил отбора для средних* $\langle \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_2 \ldots\rangle$.

Именно в такой форме мы и будем применять принцип ослабления корреляции в данной работе.

Поясним принятую здесь общую формулировку на некоторых примерах. Рассмотрим, в частности, динамическую систему, состоящую из одинаковых бесспиновых частиц, подчиняющихся статистике Бозе, для которой из аддитивных законов сохранения имеют место законы сохранения полного числа частиц N и полного импульса $\mathbf{p}$. Правила отбора для средних типа

$$\langle \ldots \Psi^+(t_i, \mathbf{r}_i) \ldots \Psi(t_j, \mathbf{r}_j) \ldots\rangle$$

определяются первым из них — эти средние могут быть отличны от нуля лишь в случае, если «однородный оператор» — произведение полевых функций

$$\mathfrak{A}(t_1, \mathbf{r}_1; \ldots t_n, \mathbf{r}_n) = \ldots \Psi^+(t_i, \mathbf{r}_i) \ldots \Psi(t_j, \mathbf{r}_j) \ldots$$

— сохраняет N, т.е. если в нем число Ψ^+ равно числу Ψ. Заметим, что к классу таких однородных операторов, сохраняющих N, принадлежит также c-число: $\mathfrak{A} = I$, поскольку I можно формально считать «произведением нулевого числа» Ψ и Ψ^+.

Разобьем систему индексов $(1, 2, \ldots, n)$ произвольным образом на ряд различных групп $(\ldots\alpha\ldots), (\ldots\beta\ldots), \ldots$ и сопоставим каждой группе однородный оператор, сохраняющий N:

$$\mathfrak{A}_1(\ldots t_\alpha, \mathbf{r}_\alpha \ldots); \quad \mathfrak{A}_2(\ldots t_\beta, \mathbf{r}_\beta \ldots); \ldots .$$

Здесь $\mathfrak{A}_1$ может включать полевые функции лишь с аргументами $\ldots t_\alpha, \mathbf{r}_\alpha \ldots$, $\mathfrak{A}_2$ — лишь с аргументами $\ldots t_\beta, \mathbf{r}_\beta \ldots$ и т.д. Необходимо подчеркнуть, что *каждый* из них сохраняет N.

Рассмотрим среднее (2.4):

$$\langle \mathfrak{A}_1(\ldots t_\alpha, \mathbf{r}_\alpha \ldots)\mathfrak{A}_2(\ldots t_\beta, \mathbf{r}_\beta \ldots) \ldots \rangle,$$

фиксируем t_1, t_2, ..., t_n и будем неограниченно увеличивать все расстояния между точками $\mathbf{r}_j$ *из различных групп*. Тогда в соответствии с принципом ослабления корреляции выражение (2.4) должно в пределе разбиваться на произведение (2.4′):

$$\Phi_1(\ldots t_\alpha, \mathbf{r}_\alpha \ldots)\Phi_2(\ldots t_\beta, \mathbf{r}_\beta \ldots) \ldots .$$

При этом Φ_1 не изменится, если мы изменим $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ..., но так, чтобы произведение $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ... не запрещалось правилами отбора, т.е. так, чтобы $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 \ldots$ продолжало коммутировать с N. Следовательно, функция Φ_1 не изменится, если мы заменим $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ... единицей. Но тогда выражение (2.4) окажется равным $\langle \mathfrak{A}_1 \rangle$. Далее мы можем оставить $\mathfrak{A}_2$ и заменить на I операторы $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$, ...; при этом Φ_2 не изменится и т.д.

Таким образом убедимся, что

$$\Phi_1 = \langle \mathfrak{A}_1 \rangle, \quad \Phi_2 = \langle \mathfrak{A}_2 \rangle, \quad \ldots, \tag{2.5}$$

и потому в рассматриваемом случае

$$\langle \mathfrak{A}_1(\ldots t_\alpha, \mathbf{r}_\alpha \ldots)\mathfrak{A}_2(\ldots t_\beta, \mathbf{r}_\beta \ldots) \ldots \rangle - \\ - \langle \mathfrak{A}_1(\ldots t_\alpha, \mathbf{r}_\alpha \ldots) \rangle \langle \mathfrak{A}_2(\ldots t_\beta, \mathbf{r}_\beta \ldots) \rangle \ldots \to 0. \tag{2.6}$$

Соотношения (2.5) мы не можем обобщить на тот случай, когда не каждый из операторов $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... в отдельности сохраняет N. Действительно, пусть, например, у $\mathfrak{A}_1$ число Ψ^+ не равно числу Ψ, но у всего произведения $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots$ эти числа равны. В такой ситуации мы не сможем использовать это рассуждение с заменой операторов $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ... числом 1, так как тогда все произведение $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots$ станет равным $\mathfrak{A}_1$ и не будет коммутировать с N, выйдя тем самым за рамки правил отбора.

Возьмем, например, выражение

$$\langle \Psi^+(t_1, \mathbf{r})\Psi(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle,$$

фиксируем t_1, t_2 и устремим к бесконечности расстояние $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. На основании принципа ослабления корреляции можно утверждать, что тогда

$$\langle \Psi^+(t_1, \mathbf{r}_1)\Psi(t_2, \mathbf{r}_2)\rangle - \Phi_1(t_1, \mathbf{r}_1)\Phi_2(t_2, \mathbf{r}_2) \to 0. \tag{2.7}$$

Однако здесь уже нельзя считать, что всегда

$$\Phi_1(t_1, \mathbf{r}_1) = \langle \Psi^+(t_1, \mathbf{r}_1)\rangle; \quad \Phi_2(t_2, \mathbf{r}_2) = \langle \Psi(t_2, \mathbf{r}_2)\rangle. \tag{2.8}$$

Покажем, что такое положение возникло не потому, что мы, скажем, неудачно сформулировали принцип ослабления корреляции, а потому, что соотношения (2.8) на самом деле могут не выполняться. Чтобы в этом убедиться, предположим, наоборот, что соотношения (2.8) всегда выполняются. Тогда, поскольку в силу правил отбора, обусловленных сохранением N,

$$\langle \Psi \rangle = 0, \quad \langle \Psi^+ \rangle = 0,$$

мы будем иметь из (2.7)

$$\langle \Psi^+(t_1, \mathbf{r}_1)\Psi(t_2, \mathbf{r}_2)\rangle \to 0,$$

и в частности

$$\langle \Psi^+(t, \mathbf{r}_1)\Psi(t, \mathbf{r}_2)\rangle \to 0. \tag{2.9}$$

С другой стороны, это последнее выражение не зависит от t в соответствии с законом сохранения энергии. Далее, в силу закона сохранения импульса оно не может зависеть от самих $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, но только от разности $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

Таким образом, можно положить

$$\langle \Psi^+(t, \mathbf{r}_1)\Psi(t, \mathbf{r}_2)\rangle = F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

так что соотношение (2.9) в этом случае будет представлено в виде

$$F(\mathbf{r}) \to 0, \quad \text{если} \quad |\mathbf{r}| \to \infty. \tag{2.10}$$

Но, переходя к импульсному представлению (2.2), найдем

$$F(\mathbf{r}) = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \sum_{(k)} \langle a_k^+ a_k\rangle \mathrm{e}^{-i(\mathbf{kr})}.$$

Поэтому в интеграле Фурье

$$F(\mathbf{r}) = \int W(k)\mathrm{e}^{-i(\mathbf{kr})}\, d\mathbf{k} \tag{2.11}$$

произведение $W(k)\, d\mathbf{k}$ выражает плотность числа частиц с импульсами из бесконечно малого импульсного объема $d\mathbf{k}$. Отсюда следует, что

$$W(k) \geqslant 0, \quad \int W(k)\, d\mathbf{k} = \rho, \tag{2.12}$$

где ρ — плотность числа частиц.

Обсудим случай, когда в рассматриваемой системе имеется конденсат. Тогда, если конденсат как целое покоится, то

$$W(k) = \rho_0\, \delta(\mathbf{k}) + W_1(k), \tag{2.13}$$

где $W_1(k)$ — обычная функция, характеризующая непрерывное распределение по импульсам частиц, не находящихся в конденсате, а ρ_0 — плотность числа частиц конденсата.

Но поскольку $W_1(k)$ является обычной интегрируемой функцией, имеем

$$\int W_1(k)\mathrm{e}^{-i(\mathbf{kr})}\,d\mathbf{k} \to 0, \quad |\mathbf{r}| \to \infty,$$

и потому

$$F(\mathbf{r}) = \rho_0 + \int W_1(k)\mathrm{e}^{-i(\mathbf{kr})}\,dk \to \rho_0 \neq 0, \quad |\mathbf{r}| \to \infty, \tag{2.14}$$

что находится в противоречии с (2.10), а тем самым и с (2.8). Сравнивая (2.14) с (2.7), мы видим, что в рассматриваемом случае

$$\Phi_1(t, \mathbf{r}_1)\Phi_2(t, \mathbf{r}_2) = \rho_0. \tag{2.15}$$

Покажем сейчас, как различные соотношения, вытекающие из принципа ослабления корреляции, выражаются в импульсном представлении. Заметим прежде всего, что ввиду закона сохранения $\mathbf{p}$ среднее от произведения

$$\langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle$$

(в котором $\varphi = \Psi$ или Ψ^+, причем число Ψ равно числу Ψ^+) будет пространственно однородно, и потому мы можем написать соответствующий интеграл Фурье в следующей форме:

$$\langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle =$$
$$= \int A(t_1, \mathbf{p}_1; \dots; t_n, \mathbf{p}_n)\,\delta(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n)\mathrm{e}^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{p}_n\mathbf{r}_n)}\,d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n. \tag{2.16}$$

С другой стороны, с помощью (2.2), (2.3) получим также

$$\langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle =$$
$$= \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V^{n/2}} \sum_{(p_1,\dots,p_n)} \langle \alpha_{p_1}(t_1) \dots \alpha_{p_n}(t_n) \rangle \mathrm{e}^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{p}_n\mathbf{r}_n)}\,\Delta(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n), \tag{2.17}$$

где $\Delta(\mathbf{p})$ — дискретная δ-функция Кронекера:

$$\Delta(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{p} = 0, \\ 0, & \mathbf{p} \neq 0, \end{cases}$$

где

$$\alpha_p(t_j) = a_{p_j}(t_j), \quad \text{если} \quad \varphi(t_j, \mathbf{r}_j) = \Psi(t_j, \mathbf{r}_j);$$
$$\alpha_{p_j}(t_j) = a^+_{-p_j}(t_j), \quad \text{если} \quad \varphi(t_j, \mathbf{r}_j) = \Psi^+(t_j, \mathbf{r}_j).$$

Соотношение (2.17) запишем в виде

$$\langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle =$$
$$= \lim_{V\to\infty} \left\{ \frac{(2\pi)^3}{V} \right\}^n \sum_{(p_1,\dots,p_n)} \{(2\pi)^{-3n} V^{\frac{n-2}{2}} \langle \alpha_{p_1}(t_1) \dots \alpha_{p_n}(t_n) \rangle\} \times$$
$$\times V\Delta(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n)\mathrm{e}^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{p}_n\mathbf{r}_n)}. \tag{2.18}$$

Заметим теперь, что при переходе к пределу $V \to \infty$, когда мы заменяем суммы соответствующими интегралами, множитель $(2\pi)^3/V$ заменяется на $d\mathbf{p}$, а $V\Delta(\mathbf{p})$ — на дираковскую функцию $\delta(\mathbf{p})$. Поэтому, сравнив (2.18) с (2.16), найдем

$$A(t_1, \mathbf{p}_1; \ldots; t_n, \mathbf{p}_n) = \lim_{V\to\infty} \frac{V^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^{3n}} \langle \alpha_{p_1}(t_1) \ldots \alpha_{p_n}(t_n) \rangle, \tag{2.19}$$

где $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ — произвольные векторы, связанные только соотношением

$$\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n = 0. \tag{2.20}$$

Рассмотрим выражение

$$\langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \ldots \varphi(t_s, \mathbf{r}_s) \Psi^+(t, \mathbf{r}) \Psi(t', \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) \varphi(t_{s+1}, \mathbf{r}_{s+1}) \ldots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle,$$

в котором, как всегда, $\varphi = \Psi^+$ или Ψ и числа Ψ и Ψ^+ равны. Выражение это должно распадаться на произведение

$$\langle \Psi^+(t, \mathbf{r}) \Psi(t', \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) \rangle \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \ldots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle,$$

когда $|\mathbf{r}| \to \infty$, а t, t', t_1, ..., t_n; $\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{r}_1$, ..., $\mathbf{r}_n$ являются независимыми аргументами (не меняющимися при изменении $\mathbf{r}$).

Покажем сейчас, как это свойство, вытекающее из принципа ослабления корреляции, может быть сформулировано в импульсном представлении.

Возьмем функцию

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(k^2) e^{i(\mathbf{kx})}\, d\mathbf{k},$$

где

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z < 1, \\ 0, & z > 1. \end{cases}$$

Положим

$$D\varepsilon(r) = \varepsilon^3 D(\varepsilon r)$$

и заметим, что

$$D_\varepsilon(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f\left(\frac{k^2}{\varepsilon^2}\right) e^{i(\mathbf{kr})}\, d\mathbf{k},$$

$$\int D_\varepsilon(r)\, d\mathbf{r} = \int D(x)\, d\mathbf{x} = 1. \tag{2.21}$$

Имеем, очевидно,

$$\int D_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) E(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int D(x) E\left(\mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x}, \tag{2.22}$$

где

$$E(\mathbf{r}) = \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \ldots \varphi(t_s, \mathbf{r}_s) \Psi^+(t, \mathbf{r}) \Psi(t', \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) \varphi(t_{s+1}, \mathbf{r}_{s+1}) \ldots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle -$$
$$- \Psi^+(t, \mathbf{r}) \Psi(t', \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) \rangle \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \ldots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle. \tag{2.23}$$

Пусть теперь $\varepsilon \to 0$. Тогда видно, что значение интеграла, стоящего в правой части (2.22), фактически обусловлено лишь той областью $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{x}/\varepsilon$, где $r \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int D_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) E(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = 0. \tag{2.24}$$

Заметим, кстати, что, взяв вместо r_1 любое другое r_i $(i = 2, \ldots, n)$, мы получили бы аналогичный результат.

Заметим далее, что ввиду пространственной и временной однородности

$$\langle \Psi^+(t, \mathbf{r}) \Psi(t', \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) \rangle = F(t' - t, \xi). \tag{2.25}$$

Следовательно, на основании (2.21) имеем

$$\int D\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \langle \Psi^+(t, \mathbf{r}) \Psi(t', \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) \rangle\, d\mathbf{r} = F(t' - t, \boldsymbol{\xi}).$$

Таким образом, из (2.23), (2.24) получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int D\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \ldots \varphi(t_s, \mathbf{r}_s) \Psi^+(t, \mathbf{r}) \Psi(t', \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) \times$$
$$\times \varphi(t_{s+1}, \mathbf{r}_{s+1}) \ldots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle\, d\mathbf{r} - F(t' - t, \boldsymbol{\xi}) \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \ldots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle = 0. \tag{2.26}$$

Используем теперь фурье-представления типа (2.16):

$$\langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \ldots \varphi(t_s, \mathbf{r}_s) \Psi^+(t, \mathbf{r}) \Psi(t', \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) \varphi(t_{s+1}, \mathbf{r}_{s+1}) \ldots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle =$$
$$= \int \delta(\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n + \mathbf{p} + \mathbf{p}') A(t_1, \mathbf{p}_1; \ldots; t_s, \mathbf{p}_s; t, \mathbf{p}; t', \mathbf{p}'; \ldots; t_n, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times \exp\{i[\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n \mathbf{r}_n + (\mathbf{p} + \mathbf{p}')\mathbf{r} + \mathbf{p}'\boldsymbol{\xi}]\}\, d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_n\, d\mathbf{p}\, d\mathbf{p}' =$$
$$= \int \delta(\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n - \mathbf{q}) A(t_1, \mathbf{p}_1; \ldots; t_s, \mathbf{p}_s; t, -(\mathbf{p} + \mathbf{q}); t', \mathbf{p}; \ldots; t_n, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times \exp\{i[\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n \mathbf{r}_n - \mathbf{q}\mathbf{r} + \mathbf{p}'\boldsymbol{\xi}]\}\, d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_n\, d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}. \tag{2.27}$$

Найдем, приняв во внимание (2.21),

$$\int D\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \ldots \Psi^+(t, \mathbf{r}) \Psi(t', \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) \ldots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle\, d\mathbf{r} =$$
$$= \int f\left(\frac{q^2}{\varepsilon^2}\right) \delta(\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n - \mathbf{q}) \times$$
$$\times A(t_1, \mathbf{p}_1; \ldots; t_s, \mathbf{p}_s; t, -(\mathbf{p} + \mathbf{q}); t', \mathbf{p}; \ldots; t_n, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times \exp\{i[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q})\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_2 \mathbf{r}_2 + \ldots + \mathbf{p}_n \mathbf{r}_n + \mathbf{p}\boldsymbol{\xi}]\}\, d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_n\, d\mathbf{p}\, d\mathbf{q} =$$
$$= \int f\left(\frac{q^2}{\varepsilon^2}\right) \delta(\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times A(t_1, \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}; \ldots; t_s, \mathbf{p}_s; t, -(\mathbf{p} + \mathbf{q}); t', \mathbf{p}; \ldots; t_n, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times \exp\{i[\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n \mathbf{r}_n + \mathbf{p}\boldsymbol{\xi}]\}\, d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_n\, d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}.$$

Далее с помощью фурье-представлений

$$F(t'-t,\boldsymbol{\xi})=\int J(t'-t,\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\boldsymbol{\xi}}\,d\mathbf{p}\langle\varphi(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi(t_n,\mathbf{r}_n)\rangle=$$

$$=\int\delta(\mathbf{p}_1+\dots+\mathbf{p}_n)A(t_1,\mathbf{p}_1;\dots;t_n,\mathbf{p}_n)\exp\{i[\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{p}_n\mathbf{r}_n]\}\,d\mathbf{p}_1\dots d\mathbf{p}_n \tag{2.28}$$

получим

$$F(t'-t,\boldsymbol{\xi})\langle\varphi(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi(t_n,\mathbf{r}_n)\rangle=\int\delta(\mathbf{p}_1+\dots+\mathbf{p}_n)A(t_1,\mathbf{p}_1;\dots;t_n,\mathbf{p}_n)\times$$

$$\times J(t'-t,\mathbf{p})\exp\{i[\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{p}_n\mathbf{r}_n+\mathbf{p}\boldsymbol{\xi}]\}\,d\mathbf{p}_1\dots d\mathbf{p}_n\,d\mathbf{p}.$$

Итак, соотношение (2.26) может быть приведено к следующей форме:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\delta(\mathbf{p}_1+\dots+\mathbf{p}_n)\mathfrak{I}_\varepsilon\exp\{i[\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{p}_n\mathbf{r}_n+\mathbf{p}\boldsymbol{\xi}]\}\,d\mathbf{p}_1\dots d\mathbf{p}_n\,d\mathbf{p}=0, \tag{2.29}$$

где

$$\mathfrak{I}_\varepsilon=\int d\mathbf{q}\,f\left(\frac{q^2}{\varepsilon^2}\right)A(t_1,\mathbf{p}_1+\mathbf{q};\dots;t_s,\mathbf{p}_s;t,-(\mathbf{p}+\mathbf{q});t',\mathbf{p};\dots;t_n,\mathbf{p}_n)-$$

$$-J(t'-t,\mathbf{p})A(t_1,\mathbf{p}_1;\dots;t_n,\mathbf{p}_n);$$

и мы будем иметь

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathfrak{I}_\varepsilon=0 \tag{2.30}$$

в области, где $\mathbf{p}_1+\dots+\mathbf{p}_n=0$.

Выразим теперь входящие сюда функции A, JA с помощью формул типа (2.19). Получим с учетом (2.25), (2.28)

$$J(t'-t,\mathbf{p})A(t_1,\mathbf{p}_1;\dots;t_n,\mathbf{p}_n)=\lim_{V\to\infty}\frac{V^{(n-1)/2}}{(2\pi)^{3(n+1)}}\langle a_p^+(t)a_p(t')\rangle\times$$

$$\times\langle\alpha_{p_1}(t_1)\dots\alpha_{p_n}(t_n)\rangle A(t_1,\mathbf{p}_1+\mathbf{q};\dots;t_s,\mathbf{p}_s;t,-(\mathbf{p}+\mathbf{q});t',\mathbf{p};\dots;t_n,\mathbf{p}_n)=$$

$$=\lim_{V\to\infty}\frac{V^{n/2}}{(2\pi)^{3(n+2)}}\langle\alpha_{p_1+q}(t_1)\dots\alpha_{p_s}(t_s)a_{p+q}^+(t)a_p(t')\alpha_{p_{s+1}}(t_{s+1})\dots\alpha_{p_n}(t_n)\rangle,$$

и потому

$$\int d\mathbf{q}\,f\left(\frac{q^2}{\varepsilon^2}\right)A(t_1,(\mathbf{p}_1+\mathbf{q});\dots;t_s,\mathbf{p}_s;t,-(\mathbf{p}+\mathbf{q});t',\mathbf{p};\dots;t_n,\mathbf{p}_n)=$$

$$=\lim_{V\to\infty}\frac{V^{(n-2)/2}}{(2\pi)^{3(n+1)}}\sum_{(q)}f\left(\frac{q^2}{\varepsilon^2}\right)\langle\alpha_{p_1+q}(t_1)\dots\alpha_{p_s}(t_s)a_{p+q}^+(t)a_p(t')\times$$

$$\times\alpha_{p_{s+1}}(t_{s+1})\dots\alpha_{p_n}(t_n)\rangle=\lim_{V\to\infty}\frac{V^{(n-2)/2}}{(2\pi)^{3(n+1)}}\sum_{\substack{q\\(|q|<\varepsilon)}}\langle\alpha_{p_1+q}(t_1)\dots\alpha_{p_s}(t_s)\times$$

$$\times a_{p+q}^+(t)a_p(t')\alpha_{p_{s+1}}(t_{s+1})\dots\alpha_{p_n}(t_n)\rangle.$$

Таким образом, предельное соотношение (2.30) можно представить в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{V\to 0}\Bigg\{V^{(n-2)/2}\sum_{\substack{q\\(|q|<\varepsilon)}}\langle\alpha_{p_1+q}(t_1)\dots\alpha_{p_s}(t_s)a^+_{p+q}(t)a_p(t')\alpha_{p_{s+1}}(t_{s+1})\times\dots$$

$$\dots\times\alpha_{p_n}(t_n)\rangle-\langle a^+_p(t)a_p(t')\rangle V^{(n-2)/2}\langle\alpha_{p_1}(t_1)\dots\alpha_{p_n}(t_n)\rangle\Bigg\}=0 \quad (2.31)$$

в области, где $\mathbf{p}_1+\dots+\mathbf{p}_n=0$.

Это соотношение и представляет собой «импульсную форму» выражения рассматривавшегося свойства ослабления корреляции. Заметим, что обычно в работах по статистической физике предельный переход не указывается явно. В каком-то смысле это вполне последовательно, поскольку, как мы уже об этом говорили, выполнение предельных переходов типа $V\to\infty$ на строгом математическом уровне в настоящее время все еще не представляется возможным и всегда приходится прибегать к интуитивным соображениям.

В такой «неявной» форме соотношение (2.31) запишем в следующем виде:

$$V^{(n-2)/2}\sum_{q\sim 0}\langle\alpha_{p_1+q}(t_1)\dots\alpha_{p_s}(t_s)a^+_{p+q}(t)a^+_p(t')\alpha_{p_{s+1}}(t_{s+1})\dots\alpha_{p_n}(t_n)\rangle=$$

$$=\langle a^+_p(t)a_p(t')\rangle V^{(n-2)/2}\langle\alpha_{p_1}(t_1)\dots\alpha_{p_n}(t_n)\rangle. \quad (2.32)$$

Подчеркнем, что здесь *нельзя считать, что суммирование включает только точку* $q=0$; знак $q\sim 0$ указывает, что суммирование проводится по бесконечно малой окрестности этой точки или, более точно, что в полученных выражениях мы *сначала* должны *перейти к пределу* $V\to\infty$, *а затем область суммирования по* q *сузить к нулевой точке.*

Соотношения вида (2.32), такие, в частности, как

$$\sum_{q\sim 0}\langle\alpha^+_{p_1+q}(t_1)a^+_{p+q}(t)a_p(t')\alpha_{p_1}(t_1)\rangle=\langle a^+_p(t)a_p(t')\rangle\langle a^+_{p_1}(t_1)a_{p_1}(t_1), \quad (2.33)$$

оказываются иногда полезными для приближенного «расцепления» уравнений для функций Грина.

Мы рассматривали до сих пор системы, в которых полное число частиц является интегралом движения. Скажем сейчас несколько слов по поводу положения, возникающего для случая систем, у которых N не коммутирует с гамильтонианом.

Пусть для определенности мы имеем дело с системами, состоящими из одинаковых бозе-частиц. Мы, разумеется, предполагаем, что законы сохранения энергии и импульса выполняются, но только они не приводят к правилам отбора, которые следует учитывать при использовании принципа ослабления корреляции. Возьмем, например,

$$\langle\Psi(t,\mathbf{r})\rangle.$$

Это среднее уже не обязано всегда равняться нулю. В силу законов сохранения энергии и импульса имеет место временная и пространственная однородность. Поэтому

$$\langle\Psi(t,\mathbf{r})\rangle=\Psi_0=\text{const}$$

и

$$\langle \Psi^+(t, \mathbf{r}) \rangle = \Psi_0^*. \tag{2.34}$$

Рассмотрим выражение

$$\langle \Psi^+(t_1, \mathbf{r}_1) \Psi(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle. \tag{2.35}$$

Пусть t_1, t_2 фиксированы, а $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$. Тогда в пределе оно переходит в произведение

$$\Phi_1(t_1, \mathbf{r}_1) \Phi_2(t_2, \mathbf{r}_2).$$

Здесь Φ_1 не должно измениться, если в (2.35) мы проведем замену $\Psi(t_2, \mathbf{r}_2) \to \to 1$, а Φ_2 не должно измениться при замене $\Psi^+(t_1, \mathbf{r}_1) \to 1$. Такие замены теперь допустимы ввиду отсутствия правил отбора, обусловленных сохранением N.

Отсюда мы убеждаемся, что

$$\Phi_1 = \langle \Psi^+(t_1, \mathbf{r}_1) \rangle; \quad \Phi_2 = \langle \Psi(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle.$$

Это рассуждение непосредственно обобщается на случай средних типа (2.4), и, таким образом, оказывается, что соотношения (2.6) будут теперь справедливы совершенно независимо от того, сколько Ψ и Ψ^+ входят в однородные операторы $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ...

Глава II
БОЗЕ-СИСТЕМЫ

§ 3. Квазисредние

Мы будем рассматривать систему одинаковых бесспиновых частиц, подчиняющихся статистике Бозе, с гамильтонианом вида

$$H = -\frac{1}{2m} \int_V \Psi^+(\mathbf{r}) \Delta \Psi(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int_V \Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \Psi^+(\mathbf{r}_1) \Psi^+(\mathbf{r}_2) \Psi(\mathbf{r}_2) \Psi(\mathbf{r}_1)\, d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2 =$$

$$= \sum_{(k)} \frac{k^2}{2m} a_k^+ a_k + \frac{1}{2V} \sum_{(k_1, k_2, k_2', k_1')} \nu(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1') \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_2') a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ a_{k_2'} a_{k_1'}, \tag{3.1}$$

где $\Phi(\mathbf{r})$ — вещественная радиально-симметричная функция, характеризующая взаимодействие двух частиц; $\nu(\mathbf{k})$ — ее фурье-образ:

$$\nu(\mathbf{k}) = \int \Phi(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{kr})}\, d\mathbf{r},$$

который также является вещественной радиально-симметричной функцией.

Для использования спектральных теорем удобно иметь дело с большим гиббсовским ансамблем, и потому мы введем в гамильтониан член с химическим потенциалом λ:

$$\mathfrak{A}_\lambda = \mathfrak{A} - \lambda N. \tag{3.2}$$

Как видно, интегралами движения здесь будут число частиц

$$N = \sum_{(k)} a_k^+ a_k,$$

импульс

$$\mathbf{p} = \sum_{(k)} \mathbf{k} a_k^+ a_k$$

и, конечно, энергия системы.

Мы будем изучать тот случай, когда в системе имеется покоящийся конденсат, т.е. случай, когда (см. формулы (2.11)–(2.14))

$$F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle \Psi^+(t, \mathbf{r}_1)\Psi(t, \mathbf{r}_2)\rangle = \rho_0 + \int W_1(k) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}\, d\mathbf{k}, \quad \rho_0 > 0, \tag{3.3}$$

где ρ_0 — плотность числа частиц в конденсате; $W_1(k)$ — обычная интегрируемая функция, характеризующая непрерывное распределение по импульсам частиц, не находящихся в конденсате.

Возьмем выражение

$$\langle \Psi^+(t_1, \mathbf{r}_1)\Psi(t_2, \mathbf{r}_2)\rangle. \tag{3.4}$$

Как всегда, фиксируем t_1, t_2 и будем неограниченно увеличивать расстояние $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Асимптотическая форма этого выражения будет тогда следующей:

$$\Phi^*(t_1, \mathbf{r}_1)\Phi(t_2, \mathbf{r}_2). \tag{3.5}$$

Но выражение (3.4) остается инвариантным при пространственных и временных трансляциях, и потому таким же свойством должна обладать и его асимптотическая форма (3.5). Имеем, следовательно, при любых аргументах

$$\Phi^*(t_1 + \tau, \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\xi})\Phi(t_2 + \tau, \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\xi}) = \Phi^*(t_1, \mathbf{r}_1)\Phi(t_2, \mathbf{r}_2).$$

Отсюда вытекает, что

$$\Phi^*(t_1, \mathbf{r}_1)\Phi(t_2, \mathbf{r}_2) = C e^{i\{E_0(t_1 - t_2) - \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\}},$$

где

$$C = \text{const}.$$

В частности,

$$\Phi^*(t, \mathbf{r}_1)\Phi(t, \mathbf{r}_2) = C e^{-i\mathbf{p}_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}.$$

Но левая часть этого выражения в силу (3.3) должна быть равна

$$\lim_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty} F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \rho_0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{p}_0 = 0, \quad C = \rho_0,$$

и мы имеем

$$\Phi^*(t_1, \mathbf{r}_1)\Phi(t_2, \mathbf{r}_2) = \rho_0 e^{iE_0(t_1 - t_2)}. \tag{3.6}$$

Воспользуемся теперь спектральной теоремой. Пусть $A(t)$, $B(t)$ будут произвольными операторами в гейзенберговском представлении.

Тогда [5, 6]

$$\langle B(\tau)A(\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega,$$
$$\langle A(\tau)B(\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\mathrm{e}^{\omega/\theta}\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega. \tag{3.7}$$

На основании этой теоремы видим, что

$$\langle \Psi^+(t_1,\mathbf{r}_1)\Psi(t_2,\mathbf{r}_2)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega;\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\mathrm{e}^{i\omega(t_1-t_2)}\,d\omega,$$
$$\langle \Psi(t_2,\mathbf{r}_2)\Psi^+(t_1,\mathbf{r}_1)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega;\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\mathrm{e}^{\omega/\theta}\mathrm{e}^{i\omega(t_1-t_2)}\,d\omega.$$

Как мы видели, (3.6) представляет собой асимптотическую форму среднего (3.4), когда $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to\infty$. Но на основании принципа ослабления корреляции

$$\langle \Psi(t_2,\mathbf{r}_2)\Psi^+(t_1,\mathbf{r}_1)\rangle - \langle \Psi^+(t_1,\mathbf{r}_1)\Psi(t_2,\mathbf{r}_2)\rangle \to 0,$$
$$t_1, t_2 = \mathrm{const}, \quad |\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to\infty.$$

Следовательно, (3.6) будет также асимптотической формой и для среднего:

$$\langle \Psi(t_2,\mathbf{r}_2)\Psi^+(t_1,\mathbf{r}_1)\rangle.$$

Поэтому, переходя к пределу (3.7), получим

$$\rho_0\mathrm{e}^{iE_0(t_1-t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega)\mathrm{e}^{i\omega(t_1-t_2)}\,d\omega,$$
$$\rho_0\mathrm{e}^{iE_0(t_1-t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega)\mathrm{e}^{\omega/\theta}\mathrm{e}^{i\omega(t_1-t_2)}\,d\omega.$$

Откуда следует

$$I(\omega) = \rho_0\,\delta(\omega-E_0) = \rho_0\mathrm{e}^{E_0/\theta}\,\delta(\omega-E_0),$$

ввиду чего

$$E_0 = 0,$$

и мы найдем окончательно

$$\Phi^*(t_1,\mathbf{r}_1)\Phi(t_2,\mathbf{r}_2) = \rho_0.$$

Следовательно,

$$\Phi = \sqrt{\rho_0}\,\mathrm{e}^{i\eta},$$

где η — фаза, которую можно фиксировать произвольно. Условимся выбирать всегда $\eta = 0$ так, что

$$\Phi = \sqrt{\rho_0}\,.$$

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе,

$$\langle \Psi(t, \mathbf{r}) \rangle = \langle \Psi^+(t, \mathbf{r}) \rangle = 0.$$

Но мы можем ввести квазисреднее, положив по определению

$$\prec \Psi(t, \mathbf{r}) \succ = \prec \Psi^+(t, \mathbf{r}) \succ = \sqrt{\rho_0}\,.$$

Тогда асимптотическая форма обычного среднего (3.4) для

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty, \quad t_1, t_2 = \text{const}$$

может быть представлена в виде произведения квазисредних

$$\prec \Psi^+(t_1, \mathbf{r}_1) \succ \prec \Psi(t_2, \mathbf{r}_2) \succ.$$

Будем расширять понятие квазисреднего, распространив его прежде всего на «однородные операторы» типа

$$\mathfrak{A} = \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n), \qquad \varphi = \Psi \quad \text{или} \quad \Psi^+. \tag{3.8}$$

Так, если числа Ψ и Ψ^+ в $\mathfrak{A}$ равны, положим

$$\prec \mathfrak{A} \succ = \langle \mathfrak{A} \rangle. \tag{3.9}$$

Пусть теперь в $\mathfrak{A}$ число Ψ на единицу меньше числа Ψ^+. Заметим, что асимптотическая форма выражения

$$\langle \Psi(t, \mathbf{r}) \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle \tag{3.10}$$

при

$$t, t_1, \dots, t_n = \text{const}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \to \infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

будет следующей:

$$\Phi \cdot \Phi_n(t_1, \mathbf{r}_1; \dots; t_n, \mathbf{r}_n) = \sqrt{\rho_0}\, \Phi_n(t_1, \mathbf{r}_1; \dots; t_n, \mathbf{r}_n). \tag{3.11}$$

Возьмем систему неограниченно расширяющихся областей $\{\Omega\}$, охватывающих в пределе все пространство (в качестве Ω можем взять, например, сферы $|\mathbf{r}| < R$, $R \to \infty$). Ясно тогда, что вклад любой *ограниченной* области точек $\mathbf{r}$ в величину отношения

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \langle \Psi(t, \mathbf{r}) \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle \, d\mathbf{r}$$

исчезает при $\Omega \to \infty$ и что, следовательно, вся величина этого отношения в пределе обусловлена лишь точками $\mathbf{r}$, бесконечно удаленными от $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$. Поэтому для вычисления предела рассматриваемого отношения для $\Omega \to \infty$ можно под знаком интеграла заменить выражение (3.10) его асимптотической формой (3.11).

Положим по определению

$$\prec \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \succ = \Phi_n =$$

$$= \lim_{\Omega \to \infty} \frac{1}{\Omega \sqrt{\rho_0}} \int \langle \Psi(t, \mathbf{r}) \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle \, d\mathbf{r}. \tag{3.12}$$

Нетрудно заметить также, что

$$\prec\varphi(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi(t_n,\mathbf{r}_n)\succ =$$
$$= \lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega^{2m+1}\rho_0^{(2m+1)/2}}\int\limits_{\Omega}\dots\int\langle\Psi^+(\tau_1,\mathbf{x}_1)\Psi(t_1',\mathbf{x}_1')\dots\Psi^+(\tau_m,\mathbf{x}_m)\times$$
$$\times\Psi(\tau_m',\mathbf{x}_m')\Psi(t,\mathbf{r})\varphi(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi(t_n,\mathbf{r}_n)\rangle\,d\mathbf{x}_1\,d\mathbf{x}_1'\dots d\mathbf{x}_m\,d\mathbf{x}_m'\,d\mathbf{r}, \quad (3.13)$$

где τ_1, τ_1', ..., τ_m, τ_m' — произвольные постоянные моменты.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим группы точек

$$(d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_1'),\dots,(d\mathbf{x}_m, d\mathbf{x}_m'),\dots,(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n) \quad (3.14)$$

и обратим внимание на тот факт, что значение величины, стоящей в правой части соотношения (3.13), определяется только теми частями областей интегрирования, для которых расстояния между точками из различных групп (3.14) неограниченно увеличиваются. Мы можем поэтому заменить подынтегральное выражение в (3.13) соответствующей асимптотической формой.

Заметим, что в каждом отдельном из однородных операторов

$$\Psi^+(\tau_1,\mathbf{x}_1)\Psi(\tau_1',\mathbf{x}_1');\dots;\Psi^+(\tau_m,\mathbf{x}_m)\Psi(\tau_m',\mathbf{x}_m');\Psi(t,\mathbf{r})\varphi(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi(t_n,\mathbf{r}_n),$$

соответствующих группам (3.14), число Ψ^+ равно числу Ψ. Мы можем, следовательно, воспользоваться соотношением (2.6) и написать упоминавшуюся асимптотическую форму в виде

$$\langle\Psi^+(\tau_1,\mathbf{x}_1)\Psi(\tau_1',\mathbf{x}_1')\rangle\dots\langle\Psi^+(\tau_m,\mathbf{x}_m)\rangle\langle\Psi(\tau_m',\mathbf{x}_m')\rangle\langle\Psi(t,\mathbf{r})\varphi(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi(t_n,\mathbf{r}_n)\rangle.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega^{2m+1}\rho_0^{(2m+1)/2}}\int\limits_{\Omega}\dots\int\langle\Psi^+(\tau_1,\mathbf{x}_1)\Psi(\tau_1',\mathbf{x}_1')\dots\Psi^+(\tau_m,\mathbf{x}_m)\times$$
$$\times\Psi(\tau_m',\mathbf{x}_m')\Psi(t,\mathbf{r})\varphi(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi(t_n,\mathbf{r}_n)\rangle\,d\mathbf{x}_1\,d\mathbf{x}_1'\dots d\mathbf{x}_m\,d\mathbf{x}_m'\,d\mathbf{r} =$$
$$= \lim_{\Omega\to\infty}\left\{\frac{1}{\Omega^2\rho_0}\int\limits_{\Omega}\int\langle\Psi^+(\tau_1,\mathbf{x}_1)\Psi(\tau_1',\mathbf{x}_1')\rangle\,d\mathbf{x}_1\,d\mathbf{x}_1'\right\}\dots$$
$$\dots\left\{\frac{1}{\Omega^2\rho_0}\int\limits_{\Omega}\int\langle\Psi^+(\tau_m,\mathbf{x}_m)\Psi(\tau_m',\mathbf{x}_m')\rangle\,d\mathbf{x}_m\,d\mathbf{x}_m'\right\}\times$$
$$\times\frac{1}{\Omega\sqrt{\rho_0}}\int\limits_{\Omega}\langle\Psi(t,\mathbf{r})\varphi(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi(t_n,\mathbf{r}_n)\rangle\,d\mathbf{r}. \quad (3.15)$$

Но величина каждого из отношений

$$\frac{1}{\Omega^2\rho_0}\int\limits_{\Omega}\int\langle\Psi^+(\tau,\mathbf{x})\Psi(\tau',\mathbf{x}')\rangle\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{x}'$$

при $\Omega\to\infty$ определяется только той частью области интегрирования, для которой расстояние $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ неограниченно увеличивается. Поэтому, так как

соответствующая асимптотическая форма для

$$\langle \Psi^+(\tau, \mathbf{x})\Psi(\tau', \mathbf{x}')\rangle$$

равна ρ_0,

$$\lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega^2\rho_0} \int_\Omega \int \langle \Psi^+(\tau, \mathbf{x})\Psi(\tau', \mathbf{x}')\rangle \, d\mathbf{x}\, d\mathbf{x}' = 1.$$

Отсюда на основании (3.15) вытекает, что правая часть соотношения (3.13) равна

$$\lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega\sqrt{\rho_0}} \int_\Omega \langle \Psi(t, \mathbf{r})\varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n)\rangle \, d\mathbf{r}.$$

Но благодаря (3.12) это выражение равно

$$\prec \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \succ,$$

что и доказывает (3.13).

Напомним теперь, что под знаком среднего полевые функции, у которых расстояние между пространственными аргументами неограниченно увеличивается (временные аргументы фиксированы), должны асимптотически точно коммутировать между собой. Ввиду этого в подынтегральном выражении, в (3.13), полевые функции

$$\Psi^+(\tau_1, \mathbf{x}_1); \Psi(\tau_1', \mathbf{x}_1'); \dots; \Psi(\tau_m', \mathbf{x}_m'); \Psi(\tau, \mathbf{r})$$

внутри знака $\langle \dots \rangle$ *можно располагать в произвольном порядке.*

Следовательно, можем написать, например,

$$\prec \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \succ =$$
$$= \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega^s \rho_0^{s/2}} \int_\Omega \dots \int \langle \varphi(\tau_1, \mathbf{x}_1) \dots \varphi(\tau_s, \mathbf{x}_s)\varphi(\tau_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(\tau_n, \mathbf{r}_n)\rangle \, d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_s, \tag{3.16}$$

где

$$\varphi(\tau_j, \mathbf{x}_j) = \Psi^+(\tau_j, \mathbf{x}_j) \quad \text{или} \quad \Psi(\tau_j, \mathbf{x}_j),$$

причем в произведении

$$\varphi(\tau_1, \mathbf{x}_1) \dots \varphi(\tau_s, \mathbf{x}_s)$$

число Ψ^+ на единицу меньше числа Ψ.

Удобно ввести символ

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{A}),$$

указывающий разность между числом Ψ^+ и числом Ψ, входящими в произведение полевых функций $\mathfrak{A}$.

Мы можем сказать тогда, что соотношение (3.16) выполняется, когда

$$\mathfrak{N}(\varphi(\tau_1, \mathbf{x}_1) \dots (\tau_s, \mathbf{x}_s)) = -1.$$

Мы ввели сейчас понятие квазисреднего для однородных операторов $\mathfrak{A}$, у которых $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}) = 1$. Обобщим это понятие на случай произвольного однородного оператора

$$\mathfrak{A} = \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n)$$

с произвольным значением, положительным или отрицательным, числа $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$. Примем в качестве определения соотношение (3.16), в котором $\varphi(\tau_1, \mathbf{x}_1) \dots (\tau_s, \mathbf{x}_s)$ взяты теперь так, чтобы

$$\mathfrak{N}(\varphi(\tau_1, \mathbf{x}_1) \dots \varphi(\tau_s, \mathbf{x}_s)) = -\mathfrak{N}(\varphi(\tau_1, \mathbf{x}_1) \dots \varphi(\tau_n, \mathbf{x}_n)). \tag{3.17}$$

Не зависящий от $\tau_1, \dots, \tau_s$ и структуры областей $\{\Omega\}$ предел в (3.16) должен существовать на основании принципа ослабления корреляции.

Это определение однозначно, так как с помощью только что производившегося рассуждения можно установить, что правая часть соотношения (3.16) не изменяется, если мы изменим число s и порядок следования операторов Ψ^+, Ψ в произведении

$$\varphi(\tau_1, \mathbf{x}_1) \dots \varphi(\tau_s, \mathbf{x}_s),$$

лишь бы только число

$$\mathfrak{N}(\varphi(\tau_1, \mathbf{x}_1) \dots \varphi(\tau_s, \mathbf{x}_s))$$

при этом оставалось неизменным.

Перейдем к рассмотрению основных свойств квазисредних. Из самого определения (3.16), (3.17) сразу же вытекает, что

$$\prec\mathfrak{A}\succ^* = \prec\mathfrak{A}^+\succ. \tag{3.18}$$

Покажем далее, что квазисредние также обладают свойствами временной и пространственной однородности. Действительно, выражение (3.16) не зависит от $\tau_1, \dots, \tau_s$. Далее, мы можем провести трансляцию областей Ω, заменив $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}$ с фиксированным (произвольно) $\boldsymbol{\xi}$. Получим области $\{\Omega_{\boldsymbol{\xi}}\}$, которые так же, как и Ω, неограниченно расширяются, охватывая в пределе все пространство точек $\mathbf{r}$.

Поэтому имеем

$$\begin{aligned}\prec\varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n)\succ &= \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega^s \rho_0^{s/2}} \int_{\Omega_{\boldsymbol{\xi}}} \dots \int \langle \varphi(\tau_1 + \tau, \mathbf{x}_1) \dots \varphi(\tau_s + \tau, \mathbf{x}_s) \times \\ &\times \varphi(\tau_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(\tau_n, \mathbf{r}_n)\rangle \, d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_s = \\ &= \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega^s \rho_0^{s/2}} \int_{\Omega} \dots \int \langle \varphi(\tau_1 + \tau, \mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\xi}) \dots \varphi(\tau_s + \tau, \mathbf{x}_s + \boldsymbol{\xi}) \times \\ &\times \varphi(\tau_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(\tau_n, \mathbf{r}_n)\rangle \, d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_s,\end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}&\prec\varphi(t_1 + \tau, \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\xi}) \dots \varphi(t_n + \tau, \mathbf{r}_n + \boldsymbol{\xi})\succ = \\ &= \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega^s \rho_0^{s/2}} \int_{\Omega} \dots \int \langle \varphi(\tau_1 + \tau, \mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\xi}) \dots \varphi(\tau_s + \tau, \mathbf{x}_s + \boldsymbol{\xi}) \times \\ &\times \varphi(\tau_1 + \tau, \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\xi}) \dots \varphi(\tau_n + \tau, \mathbf{r}_n + \boldsymbol{\xi})\rangle \, d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_s.\end{aligned}$$

Следовательно, поскольку обычные средние инвариантны по отношению к временным и пространственным трансляциям, получим также

$$\prec\varphi(t_1 + \tau, \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\xi}) \dots \varphi(t_n + \tau, \mathbf{r}_n + \boldsymbol{\xi})\succ = \prec\varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n)\succ. \tag{3.19}$$

Из (3.16) следует также, что под знаком квазисреднего полевые функции, у которых расстояние между пространственными аргументами неограниченно увеличивается (временные аргументы фиксированы), должны асимптотически точно коммутировать между собой.

Рассмотрим теперь два однородных оператора:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_c, \mathbf{r}_c),\\ \mathfrak{A}_2 &= \varphi(t_{c+1}, \mathbf{r}_{c+1}) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Построим произведения

$$\begin{aligned}P_1 &= \varphi(\tau_1, \mathbf{x}_1) \dots \varphi(\tau_s, \mathbf{x}_s),\\ P_2 &= \varphi(\tau'_1, \mathbf{x}'_1) \dots \varphi(\tau'_l, \mathbf{x}'_l)\end{aligned} \tag{3.21}$$

так, чтобы

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(P_1) + \mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1) &= 0,\\ \mathfrak{N}(P_2) + \mathfrak{N}(\mathfrak{A}_2) &= 0.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\prec\mathfrak{A}_1\succ &= \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega^s \rho_0^{s/2}} \int_\Omega \dots \int \langle P_1 \mathfrak{A}_1 \rangle \, d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_s,\\ \prec\mathfrak{A}_2\succ &= \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega^l \rho_0^{l/2}} \int_\Omega \dots \int \langle P_2 \mathfrak{A}_2 \rangle \, d\mathbf{x}'_1 \dots d\mathbf{x}'_l.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Поскольку

$$\mathfrak{N}(P_1 P_2) = \mathfrak{N}(P_1) + N(P_2) = -\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1) - \mathfrak{N}(\mathfrak{A}_2) = -\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2),$$

имеем также

$$\prec\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\succ = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega^{s+l} \rho_0^{(s+l)/2}} \int_\Omega \dots \int \langle P_1 P_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \rangle \, d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_s \, d\mathbf{x}'_1 \dots d\mathbf{x}'_l.$$

Отсюда с учетом «свойства асимптотической коммутации» полевых функций под знаком обычного среднего получим

$$\prec\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\succ = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega^{s+l} \rho_0^{(s+l)/2}} \int_\Omega \dots \int \langle P_1 \mathfrak{A}_1 P_2 \mathfrak{A}_2 \rangle \, d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_s \, d\mathbf{x}'_1 \dots d\mathbf{x}'_l. \tag{3.24}$$

Будем теперь неограниченно увеличивать расстояния между точками из двух групп:

$$(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_c), \quad (\mathbf{r}_{c+1}, \dots, \mathbf{r}_n), \tag{3.25}$$

т. е.

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \to \infty, \quad i = 1, \dots, c, \quad j = c+1, \dots, n,$$

и найдем соответствующую асимптотическую форму для квазисреднего $\prec\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\succ$.

Из формулы (3.24) вытекает, что для этого нам следует заменить подынтегральное выражение в (3.24) его асимптотической формой для случаев, когда расстояния между точками из двух групп

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_c), \quad (\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_l, \mathbf{r}_{c+1}, \dots, \mathbf{r}_n)$$

неограниченно увеличиваются.

Но операторы, соответствующие этим группам в рассматриваемом подынтегральном выражении, будут следующими:

$$P_1\mathfrak{A}_1, \quad P_2\mathfrak{A}_2.$$

Каждый из них сохраняет N, так как благодаря (3.22)

$$\mathfrak{N}(P_1\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{N}(P_1) + \mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1) = 0,$$
$$\mathfrak{N}(P_2\mathfrak{A}_2) = \mathfrak{N}(P_2) + \mathfrak{N}(\mathfrak{A}_2) = 0.$$

Поэтому можно воспользоваться свойством ослабления корреляции в форме (2.6) и написать асимптотическую форму подынтегрального выражения в формуле (3.24) в виде

$$\langle P_1\mathfrak{A}_1\rangle\langle P_2\mathfrak{A}_2\rangle.$$

Но на основании (3.23)

$$\lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega^{s+l}\rho_0^{(s+l)/2}} \int\dots\int\langle P_1\mathfrak{A}_1\rangle\, d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_s \int\dots\int\langle P_2\mathfrak{A}_2\rangle\, d\mathbf{x}'_1 \dots d\mathbf{x}'_l = \prec\mathfrak{A}_1\succ\prec\mathfrak{A}_2\succ,$$

и мы видим, что, когда расстояния между точками из различных групп (3.25) неограниченно увеличиваются ($t_1, \dots, t_n = \text{const}$), квазисреднее $\prec\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\succ$ асимптотически приближается к произведению квазисредних $\prec\mathfrak{A}_1\succ\prec\mathfrak{A}_2\succ$.

Приведенное рассуждение непосредственно распространяется и на случай, когда мы разбиваем совокупность n точек $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ на любое число групп.

Таким образом можно установить, что свойство ослабления корреляции для квазисредних можно представить в форме соотношения (2.6), заменив в нем везде средние на квазисредние, совершенно независимо от того, сколько Ψ и Ψ^+ содержится в операторах $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$.

Как мы видим, квазисредние в отношении своих свойств ведут себя как обычные средние для систем, у которых число N не сохраняется (см. заключительные замечания в § 2).

До сих пор мы имели дело с понятием квазисреднего только для однородных операторов. Пусть теперь

$$\mathfrak{B} = \sum_\nu C_\nu\mathfrak{A}_\nu, \tag{3.26}$$

где C_ν — постоянные c-числа, а $\mathfrak{A}_\nu$ — однородные операторы ранее рассматривавшегося типа, к числу которых относим и «тривиальный оператор» $\mathfrak{A} = 1$.

Положим по определению

$$\prec\mathfrak{B}\succ = \sum_\nu C_\nu\prec\mathfrak{A}_\nu\succ. \tag{3.27}$$

Квазисреднее $\prec\mathfrak{B}\succ$ окажется тогда линейной формой от $\mathfrak{B}$. Сформулируем свойство ослабления корреляции для неоднородных операторов. Разобьем систему индексов $(1, 2, \dots, n)$ произвольным образом на ряд различных групп $(\dots\alpha\dots)$; $(\dots\beta\dots)$; ... и сопоставим каждой из них оператор, представляющийся конечной суммой типа (3.26):

$$\mathfrak{B}_1(\dots t_\alpha, \mathbf{r}_\alpha \dots), \quad \mathfrak{B}_2(\dots t_\beta, \mathbf{r}_\beta \dots), \quad \dots .$$

Подчеркнем, что в $\mathfrak{B}_1$ могут входить полевые функции лишь с аргументами из 1-й группы, в $\mathfrak{B}_2$ — только с аргументами из 2-й группы и т. д.

Возьмем квазисреднее

$$\prec\mathfrak{B}_1(\dots t_\alpha, \mathbf{r}_\alpha \dots)\mathfrak{B}_2(\dots t_\beta, \mathbf{r}_\beta \dots)\dots\succ. \tag{3.28}$$

Будем неограниченно увеличивать расстояния между точками $\mathbf{r}_j$ из различных групп, $t_1, \dots, t_n = \text{const}$. Тогда асимптотическая форма для (3.28) будет равна

$$\prec\mathfrak{B}_1(\dots t_\alpha, \mathbf{r}_\alpha \dots)\succ\prec\mathfrak{B}_2(\dots t_\beta, \mathbf{r}_\beta \dots)\succ \dots . \tag{3.29}$$

В самом деле, поскольку мы можем написать

$$\mathfrak{B}_1 = \sum_{(\nu_1)} C_{\nu_1}\mathfrak{A}^{(1)}_{\nu_1}, \quad \mathfrak{B}_2 = \sum_{(\nu_2)} C_{\nu_2}\mathfrak{A}^{(2)}_{\nu_2}, \quad \dots,$$

получим

$$\prec\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\dots\succ = \sum_{(\nu 1, \nu 2, \dots)} C_{\nu_1}C_{\nu_2}\dots\prec\mathfrak{A}^{(1)}_{\nu_1}\mathfrak{A}^{(2)}_{\nu_2}\dots\succ.$$

Но асимптотическая форма для квазисреднего от произведения однородных операторов $\mathfrak{A}^{(1)}_{\nu_1}\mathfrak{A}^{(2)}_{\nu_2}\dots$ будет следующей:

$$\prec\mathfrak{A}^{(1)}_{\nu_1}\succ\prec\mathfrak{A}^{(2)}_{\nu_2}\succ\dots .$$

Поэтому асимптотическая форма для (3.28) может быть представлена выражением

$$\sum_{(\nu_1,\nu_2,\dots)} C_{\nu_1}C_{\nu_2}\dots\prec\mathfrak{A}^{(1)}_{\nu_1}\succ\prec\mathfrak{A}^{(2)}_{\nu_2}\succ\dots = \left\{\sum_{(\nu_1)} C_{\nu_1}\prec\mathfrak{A}^{(1)}_{\nu_1}\succ\right\}\left\{\sum_{(\nu_2)} C_{\nu_2}\prec\mathfrak{A}^{(2)}_{\nu_2}\succ\right\}\dots,$$

равным (3.29), что мы и хотели показать.

Основываясь на представлении о линейности квазисредних, можем распространить на них все линейные операции, с которыми обычно имеют дело в случае обычных средних, такие, как, например, интегрирование по некоторым аргументам, в частности построение фурье-образов; переход к импульсному представлению и т. п.

Перейдем к рассмотрению вопроса о спектральных формулах. Пусть имеются два «гейзенберговских» оператора $A(t)$, $B(t)$, зависящие от «однородного времени», например

$$A(t) = \sum_{\nu} C_\nu \dots \varphi(t, \mathbf{r}_\alpha)\dots,$$

$$B(t) = \sum_{\nu} C'_\nu \dots \varphi(t, \mathbf{r}_\beta)\dots .$$

Покажем, что для квазисредних

$$\prec A(t)B(\tau)\succ, \quad \prec B(\tau)A(t)\succ$$

можно получить спектральные представления вида (3.7).

Для этого понадобится лишь то общее свойство квазисредних, что они являются пределом обычных средних:

$$\begin{aligned} \prec A(t)B(\tau)\succ &= \lim_{\Omega\to\infty} \langle A_\Omega(t)B_\Omega(\tau)\rangle, \\ \prec B(\tau)A(t)\succ &= \lim_{\Omega\to\infty} \langle B_\Omega(\tau)A_\Omega(t)\rangle, \end{aligned} \tag{3.30}$$

где A_Ω, B_Ω — гейзенберговские операторы, коммутирующие с N. Для обычных средних напишем спектральные формулы

$$\begin{aligned} \langle B_\Omega(\tau)A_\Omega(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega; A_\Omega, B_\Omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega, \\ \langle A_\Omega(t)B_\Omega(\tau)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega; A_\Omega, B_\Omega)\mathrm{e}^{\omega/\theta}\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Основываясь на (3.30), совершим здесь предельный переход. Найдем

$$\begin{aligned} \prec B(\tau)A(t)\succ &= \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega, \\ \prec A(t)B(\tau)\succ &= \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\mathrm{e}^{\omega/\theta}\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Так как $\prec A, B\succ$ является билинейной формой по отношению к B, A (линейной по каждому из двух операторов), мы видим из (3.32), что входящее сюда выражение $J_{A,B}(\omega)$ также будет обладать этим свойством.

В силу соотношения

$$\prec \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^+\succ = \lim_{\Omega\to\infty} \langle \mathfrak{A}_\Omega, \mathfrak{A}_\Omega^+\rangle$$

можно заметить, что

$$\prec \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^+\succ \geqslant 0. \tag{3.33}$$

Заметим, наконец, что

$$\prec AB\succ^* = \prec B^+A^+\succ. \tag{3.34}$$

Основываясь на этих простых свойствах, установим некоторые неравенства, которые нам понадобятся в дальнейшем. Докажем прежде всего, что

$$J_{A,A^+}(\omega) \geqslant 0. \tag{3.35}$$

Возьмем для этого произвольную функцию $f(\omega)$, достаточно регулярную и достаточно быстро убывающую на бесконечности. Если мы сумеем доказать, что для всякой такой функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,A^+}(\omega)|f(\omega)|^2\,d\omega \geqslant 0, \tag{3.36}$$

то справедливость (3.35) будет тем самым установлена, поскольку мы всегда можем локализовать $|f(\omega)|^2$ в сколь угодно узкой окрестности любой точки ω_0.

Чтобы доказать неравенство (3.36), построим функцию

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega$$

и заметим, что

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt.$$

Имеем поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,A^+}(\omega)|f(\omega)|^2\,d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\,J_{A,A^+}(\omega)h(t)h^*(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\prec A^+(\tau)A(t)\succ h(t)h^*(\tau)=\prec\mathfrak{A},\mathfrak{A}^+\succ,$$

где

$$\mathfrak{A}=\int_{-\infty}^{+\infty}A^+(\tau)h^*(\tau)\,d\tau,\quad \mathfrak{A}^+=\int_{-\infty}^{+\infty}A(t)h(t)\,dt.$$

Отсюда на основании (3.33) и вытекает неравенство (3.36).

Докажем теперь, что

$$J^*_{A,B}(\omega)=J_{B^+,A^+}(\omega). \tag{3.37}$$

Имеем действительно

$$\prec A^+(\tau)B^+(t)\succ=\int_{-\infty}^{+\infty}J_{B^+,A^+}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega,$$

и потому

$$\prec A^+(t)B^+(\tau)\succ=\int_{-\infty}^{+\infty}J_{B^+,A^+}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega(t-\tau)}\,d\omega. \tag{3.38}$$

С другой стороны,

$$\prec A^+(t)B^+(\tau)\succ=\prec B(\tau)A(t)\succ^*=$$

$$=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}J_{A,B}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega\right\}^*=\int_{-\infty}^{+\infty}J^*_{A,B}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega(t-\tau)}\,d\omega. \tag{3.39}$$

Сравнив (3.38) с (3.39), убедимся в справедливости (3.37). Пусть теперь

$$Z(A,B)$$

будет произвольной билинейной формой из A, B, обладающей следующими свойствами:

$$\begin{gathered} Z(A, A^+) \geqslant 0, \\ \{Z(A, B)\}^* = Z(B^+, A^+). \end{gathered} \tag{3.40}$$

Покажем, что всегда имеет место неравенство

$$|Z(A, B)|^2 \leqslant Z(A, A^+) Z(B^+, B). \tag{3.41}$$

Для доказательства заметим, что на основании (3.40)

$$Z(xA + y^* B^+, x^* A^+ + yB) \geqslant 0,$$

где x, y — произвольные c-числа. Отсюда, раскрывая скобки, получим

$$xx^* Z(A, A^+) + xyZ(A, B) + y^* x^* Z(B^+, A^+) + y^* yZ(B^+, B) \geqslant 0. \tag{3.42}$$

Положим здесь

$$x^* = -Z(A, B); \quad x = -\{Z(A, B)\}^* = -Z(B^+, A^+), \quad y = y^* = Z(A, A^+).$$

Тогда

$$-|Z(A, B)|^2 Z(A, A^+) + \{Z(A, A^+)\}^2 Z(B^+, B) \geqslant 0.$$

Отсюда, если $Z(A, A^+) \neq 0$, мы получим неравенство (3.41). Нам остается показать, что если

$$Z(A, A^+) = 0, \tag{3.43}$$

то и

$$Z(A, B) = 0. \tag{3.44}$$

Для этого в (3.42) в случае выполнения условия (3.43) положим

$$x^* = -Z(A, B)R, \quad x = -Z(B^+, A^+)R, \quad y = y^* = 1,$$

где R — произвольное положительное число. Найдем

$$-2R|Z(A, B)|^2 + Z|B^+, B| \geqslant 0. \tag{3.45}$$

Пусть $R \to \infty$. Тогда, если (3.44) не верно, мы видим, что левая часть (3.45) должна стремиться к $-\infty$, что невозможно. Итак, доказательство неравенства (3.41) полностью закончено.

Заметим теперь, что

$$Z(A, B) = J_{A,B}(\omega)$$

удовлетворяет условиям (3.40), так как для $J_{A,B}$ справедливы соотношения (3.35), (3.37). Мы можем поэтому воспользоваться в данном случае неравенством (3.41) и написать:

$$|J_{A,B}(\omega)|^2 \leqslant J_{A,A^+}(\omega) J_{B^+,B}(\omega). \tag{3.46}$$

Можем положить также

$$Z(A, B) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega) \frac{e^{\omega/\theta} - 1}{\omega} \, d\omega, \tag{3.47}$$

поскольку условия (3.40) опять выполняются ввиду (3.35), (3.37) и положительности функции

$$\frac{e^{\omega/\theta}-1}{\omega}.$$

Установим связь функции (3.47) с функцией Грина. Рассмотрим, следуя [5], запаздывающую и опережающую функции Грина:

$$\begin{aligned}\langle\langle A(t), B(\tau)\rangle\rangle_\mu &= -i\theta(t-\tau)\langle A(t)B(\tau) - B(\tau)A(t)\rangle,\\ \langle\langle A(t), B(\tau)\rangle\rangle_a &= i\theta(\tau-t)\langle A(t)B(\tau) - B(\tau)A(t)\rangle,\end{aligned} \tag{3.48}$$

построенные в данном случае на квазисредних.

На основании спектральных представлений (3.32) нетрудно заметить, что фурье-образы их как функций будут равны соответственно

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_{E+i\varepsilon}, \quad \langle\langle A, B\rangle\rangle_{E-i\varepsilon}.$$

Здесь $\langle A, B\rangle\rangle_E$ как функция комплексного переменного задается формулой [5]:

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_{E=0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\frac{e^{\omega/\theta}-1}{E-\omega}\,d\omega. \tag{3.49}$$

Отсюда видим, что выражение (3.47) равно

$$-\langle\langle A, B\rangle\rangle_{E=0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\frac{e^{\omega/\theta}-1}{\omega}\,d\omega. \tag{3.50}$$

Поэтому неравенство (3.41) в данном случае принимает форму

$$|\langle\langle A, B\rangle\rangle_{E=0}|^2 \leqslant \langle\langle A, A^+\rangle\rangle_{E=0}\langle\langle B^+, B\rangle\rangle_{E=0}, \tag{3.51}$$

которая будет использована в дальнейшем.

§ 4. Выделение конденсата

В предыдущем параграфе мы ввели понятие квазисредних. Оказалось, что квазисредние обладают всеми свойствами обычных средних, за тем исключением, что для них нет правил отбора, вытекающих из закона сохранения числа частиц. Квазисредние совпадают с обычными средними для операторов, коммутирующих с N. Но в отличие от обычных средних выражение

$$\prec\varphi(t_1, \mathbf{r}_1)\ldots\varphi(t_n, \mathbf{r}_n)\succ,$$

в котором

$$\mathfrak{N}(\varphi(t_1, \mathbf{r}_1)\ldots\varphi(t_n, \mathbf{r}_n)) \neq 0,$$

вообще говоря, не равно тождественно нулю.

Так, например,

$$\prec\Psi(t, \mathbf{r})\succ = \prec\Psi^+(t, \mathbf{r})\succ = \sqrt{\rho_0}\,.$$

Условимся в дальнейшем обозначать квазисредние $\prec\mathfrak{N}\succ$ с помощью обычного символа среднего $\langle\mathfrak{N}\rangle$. Это не приведет нас к недоразумениям, поскольку

в рассматриваемом случае гамильтониана H_λ мы всегда будем иметь дело не с обычными средними, а с квазисредними.

Обсудим вопрос о получении системы уравнений для цепочки функций Грина, основанных на квазисредних. Нам будет удобнее иметь дело не с полной полевой функцией $\Psi(t,\mathbf{r})$, а с ее частью $\Psi_1(t,\mathbf{r})$:

$$\Psi(t,\mathbf{r}) = \Psi_1(t,\mathbf{r}) + \sqrt{\rho_0}\,. \tag{4.1}$$

Поскольку

$$\langle\Psi\rangle = \langle\Psi^+\rangle = \sqrt{\rho_0}\,,$$

мы видим, что

$$\langle\Psi_1\rangle = \langle\Psi_1^+\rangle = 0. \tag{4.2}$$

Имеем также

$$\begin{aligned}\langle\Psi_1^+(t,\mathbf{r}_1)\Psi_1(t,\mathbf{r}_2)\rangle &= \langle(\Psi^+(t,\mathbf{r}_1) - \sqrt{\rho_0}\,)(\Psi(t,\mathbf{r}_2) - \sqrt{\rho_0}\,)\rangle = \\ &= \langle\Psi^+(t,\mathbf{r}_1)\Psi(t,\mathbf{r}_2)\rangle - \sqrt{\rho_0}\,(\langle\Psi(t,\mathbf{r}_2)\rangle + \langle\Psi(t,\mathbf{r}_1)\rangle) + \rho_0 = \\ &= \langle\Psi^+(t,\mathbf{r}_1)\Psi(t,\mathbf{r}_2)\rangle - 2\rho_0 + \rho_0 = \int W(k)\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\,d\mathbf{k} - \rho_0 = \\ &= \int W_1(k)\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\,d\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Таким образом, у импульсного образа среднего (4.3), построенного с помощью Ψ_1, дельтовидной особенности при нулевом импульсе уже нет. Раз $W_1(k)$ является функцией, характеризующей обычное непрерывное распределение по импульсам, интеграл от нее по бесконечно малой окрестности импульса $\mathbf{k}=0$ будет равен нулю:

$$\int\limits_{k\sim 0} W_1(k)\,d\mathbf{k} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|k|<\varepsilon} W_1(k)\,d\mathbf{k} = 0.$$

Как мы видели выше в случае средних, построенных с помощью полных полевых функций Ψ, положение совершенно другое:

$$\langle\Psi^+(t,\mathbf{r}_1)\Psi(t,\mathbf{r}_2)\rangle = \int W(k)\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\,d\mathbf{k},$$

$$W(k) = \rho_0\,\delta(\mathbf{k}) + W_1(k),$$

так что

$$\int\limits_{k\sim 0} W(k)\,d\mathbf{k} = \lim_{|k|<\varepsilon}\int\limits_{|k|<\varepsilon} W(k)\,d\mathbf{k} = \rho_0.$$

Здесь мы сталкиваемся с частным проявлением некоторого общего свойства. Рассмотрим выражение

$$\langle\varphi_1(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi_1(t_s,\mathbf{r}_s)\varphi_1(t_{s+1},\mathbf{r}_{s+1})\dots\varphi_1(t_n,\mathbf{r}_n)\rangle, \quad \varphi_1 = \Psi_1 \text{ или } \Psi_1^+. \tag{4.4}$$

Фиксируем временные аргументы и будем неограниченно увеличивать расстояния:

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, \quad i = 1,\dots,s, \quad j = 1,\dots,s,s+1,\dots,n, \quad i\neq j.$$

Тогда на основании свойства ослабления корреляции для квазисредних мы видим, что соответствующая асимптотическая форма для выражения (4.4) будет иметь следующий вид:

$$\langle\varphi_1(t_1,\mathbf{r}_1)\rangle\dots\langle\varphi_1(t_s,\mathbf{r}_s)\rangle\langle\varphi_1(t_{s+1},\mathbf{r}_{s+1})\dots\varphi_1(t_n,\mathbf{r}_n)\rangle=0.$$

Перейдем к интегралам Фурье. Напишем

$$\langle\varphi_1(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi_1(t_n,\mathbf{r}_n)\rangle=$$
$$=\int\delta(\mathbf{p}_1+\dots+\mathbf{p}_n)A(t_1,\mathbf{p}_1;\dots;t_n,\mathbf{p}_n)e^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{p}_n\mathbf{r}_n)}\,d\mathbf{p}_1\dots d\mathbf{p}_n. \quad (4.5)$$

Повторив дословно рассуждения из § 2 (с помощью которых там была получена формула (2.30)), найдем, что сформулированное здесь свойство ослабления корреляции может быть выражено соотношениями

$$\int\limits_{p_1\sim0}\dots\int\limits_{p_s\sim0}\delta(\mathbf{p}_1+\dots+\mathbf{p}_n)A(t_1,\mathbf{p}_1;\dots;t_n,\mathbf{p}_n)\,d\mathbf{p}_1\dots d\mathbf{p}_s=0,\quad s=1,2,\dots, \quad (4.6)$$

в которых, как всегда,

$$\int\limits_{p\sim0}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{|p|<\varepsilon}.$$

Таким образом, в фурье-образах квазисредних не будет дельтовидных особенностей при нулевых значениях импульсов. Их интегралы по бесконечно малым окрестностям, около $\mathbf{p}=0$, равны нулю[1].

Это обстоятельство обусловлено, как видно, выделением конденсата, которое мы формально провели, перейдя от Ψ к Ψ_1. Обратимся теперь к вопросу об уравнениях для цепочки функций Грина. Здесь имеется несколько вариантов. Мы можем, например, ограничиться рассмотрением «двувременных» функций Грина [5]

$$\langle\langle\varphi_1(t,\mathbf{r}_1)\dots\varphi_1(t,\mathbf{r}_s);\varphi_1(\tau,\mathbf{x}_1)\dots\varphi_1(\tau,\mathbf{x}_m)\rangle\rangle_r=$$
$$=\theta(t-\tau)\langle[\varphi_1(t,\mathbf{r}_1)\dots\varphi_1(t,\mathbf{r}_s);\varphi_1(\tau,\mathbf{x}_1)\dots\varphi_1(\tau,\mathbf{x}_m)]\rangle,\quad\varphi_1=\Psi_1\text{ или }\Psi_1^+. \quad (4.7)$$

[1] Заметим, что такого свойства у обычных средних нет. Возьмем хотя бы, например, обычное среднее вида

$$\langle\Psi_1^+(t,\mathbf{r}_1)\Psi_1(t,\mathbf{r}_2)\rangle.$$

Имеем

$$\langle\Psi_1^+(t,\mathbf{r}_1)\Psi_1(t,\mathbf{r}_2)\rangle=\langle(\Psi^+(t,\mathbf{r}_1)-\sqrt{\rho_0})(\Psi(t,\mathbf{r}_2)-\sqrt{\rho_0})\rangle=$$
$$=\langle\Psi^+(t,\mathbf{r}_1)\Psi(t,\mathbf{r}_2)\rangle-\rho_0\{\langle\Psi^+(t,\mathbf{r}_1)\rangle+\langle\Psi(t,\mathbf{r}_2)\rangle\}+\rho_0=$$
$$=\langle\Psi^+(t,\mathbf{r}_1)\Psi(t,\mathbf{r}_2)\rangle+\rho_0=\int J(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\,d\mathbf{k},$$

где

$$J(k)=\rho_0\,\delta(\mathbf{k})+W(k)=2\rho_0\,\delta(\mathbf{k})+W_1(k)$$

и

$$\int J(k)\,d\mathbf{k}=2\rho_0.$$

Именно поэтому и целесообразно использование квазисредних.

Связь между ними, выражающая производную

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle\varphi_1(t,\mathbf{r}_1)\dots\varphi_1(t,\mathbf{r}_s);\varphi_1(\tau,\mathbf{x}_1)\dots\varphi_1(\tau,\mathbf{x}_m)\rangle\rangle \tag{4.8}$$

через другие функции Грина данного класса, получается с помощью уравнений движения. Имеем для гамильтониана H_λ

$$i\frac{\partial\Psi(t,\mathbf{r})}{\partial t}=\left(-\frac{1}{2m}\Delta-\lambda\right)\Psi(t,\mathbf{r})+\int\Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Psi^+(t,\mathbf{r}')\Psi(t,\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'\,\Psi(t,\mathbf{r}),$$

$$i\frac{\partial\Psi^+(t,\mathbf{r})}{\partial t}=\left(\frac{1}{2m}\Delta+\lambda\right)\Psi^+(t,\mathbf{r})-\Psi^+(t,\mathbf{r})\int\Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Psi^+(t,\mathbf{r}')\Psi(t,\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'.$$

Откуда, переходя к Ψ_1, Ψ_1^+, найдем

$$i\frac{\partial\Psi_1(t,\mathbf{r})}{\partial t}=\left(-\frac{1}{2m}\Delta-\lambda\right)\Psi(t,\mathbf{r})-\lambda\sqrt{\rho_0}+$$
$$+\int\Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\Psi_1^+(t,\mathbf{r}')+\sqrt{\rho_0})(\Psi_1(t,\mathbf{r}')+\sqrt{\rho_0})\,d\mathbf{r}'\,(\Psi(t,\mathbf{r})+\sqrt{\rho_0}), \tag{4.9}$$

$$i\frac{\partial\Psi_1^+(t,\mathbf{r})}{\partial t}=\left(\frac{1}{2m}\Delta+\lambda\right)\Psi(t,\mathbf{r})+\lambda\sqrt{\rho_0}-$$
$$-\int\Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\Psi_1^+(t,\mathbf{r}')+\sqrt{\rho_0})(\Psi_1^+(t,\mathbf{r}')+\sqrt{\rho_0})(\Psi_1(t,\mathbf{r}')+\sqrt{\rho_0})\,d\mathbf{r}'.$$

Исходя из этих уравнений движения, мы сможем выразить производную (4.8) через функции Грина данного класса, получая тем самым систему уравнений для рассматриваемой цепочки функций Грина.

Вместо двувременных функций типа (4.7) можно положить в основу функции Грина обычного швингеровского типа с T-произведением [6]

$$\langle T(\varphi_1(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi_1(t_n,\mathbf{r}_n))\rangle,\qquad \varphi_1=\Psi_1\quad\text{или}\quad\Psi_1^+, \tag{4.10}$$

в которых каждому пространственному аргументу $\mathbf{r}$ сопоставляется «свой» временной аргумент t. Систему уравнений для швингеровских функций Грина получим, раскрыв выражение для производной

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\langle T(\varphi(t_1,\mathbf{r}_1)\dots\varphi(t_n,\mathbf{r}_n))\rangle$$

с помощью уравнений движения (4.9).

Изучение именно швингеровских функций имеет особое преимущество для случая нулевой температуры, когда вместо гиббсовского ансамбля мы имеем «чистое состояние» — состояние с минимальной энергией.

Действительно, учитывая свойства T-произведения, мы можем в этом случае, так же как в квантовой теории поля, получить удобную для расчетов диаграммную технику Фейнмана. Роль «вакуума» квантовой теории поля здесь будет играть состояние с минимальной энергией. Как для двувременных функций (4.7), так и для швингеровских функций (4.10) целесообразно перейти к фурье-образам и изучать соответствующие системы уравнений в импульсном представлении.

Дело в том, что в импульсном представлении свойство пространственной однородности приобретает особо простую форму: функцию Грина, зависящую

от импульсов $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$, всегда надо рассматривать только в области, где $\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n = 0$, ввиду чего количество аргументов, которые фактически надо учитывать, уменьшается.

Как мы уже отмечали, интегралы от фурье-образов квазисредних, взятые по бесконечно малым окрестностям нулевого импульса, равны нулю. Так как функции Грина получаются из квазисредних путем домножения их только на θ-функции от *временных* аргументов, их фурье-образы $G(t_1, \mathbf{p}_1; \ldots; t_n, \mathbf{p}_n)$ будут обладать тем же свойством.

Поэтому в системе уравнений для функций Грина в импульсном представлении мы всегда можем исключать бесконечно малые окрестности $\mathbf{p} = 0$ из интегралов по импульсам.

Запишем схематически эти уравнения. Чтобы не детализировать, имеем ли мы дело с двувременными или швингеровскими функциями, не будем явно указывать временные аргументы. Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G(p_1, p_2)}{\partial t} = L, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0, \\ &\frac{\partial G(p_1, p_2, p_3)}{\partial t} = L^1, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Правые части L, L^1, ... содержат интегралы по импульсам от функций G. К уравнениям этого типа надо еще добавить уравнение, не содержащее импульса, которое мы получим из следующего соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi_1 \rangle = 0,$$

выразив $\partial \Psi_1 / \partial t$ с помощью (4.9).

Найдем

$$S = 0, \tag{4.12}$$

где

$$\begin{aligned} S = -\lambda \sqrt{\rho_0} + \int \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \Psi^+(t, \mathbf{r}') \Psi(t, \mathbf{r}') \Psi(t, \mathbf{r}) \rangle \, d\mathbf{r}' = \\ = -\lambda \sqrt{\rho_0} + \int \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \Psi^+(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}) \rangle \, d\mathbf{r}' = \\ = -\lambda \sqrt{\rho_0} + \int \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle (\sqrt{\rho_0} + \Psi_1^+(\mathbf{r}'))(\sqrt{\rho_0} + \Psi_1(\mathbf{r}'))(\sqrt{\rho_0} + \Psi_1(\mathbf{r})) \rangle \, d\mathbf{r}'. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Введем представления Фурье

$$\langle \Psi_1^+(\mathbf{r}') \Psi_1(\mathbf{r}) \rangle = \int W_1(k) \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} \, d\mathbf{k},$$

$$\langle \Psi_1(\mathbf{r}') \Psi_1(\mathbf{r}) \rangle = \int U(k) \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} \, d\mathbf{k},$$

$$\langle \Psi_1^+(\mathbf{r}') \Psi_1(\mathbf{r}') \Psi_1(\mathbf{r}) \rangle = \int I(k) \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} \, d\mathbf{k}.$$

Тогда выражение (4.13) можем преобразовать к виду

$$S = -\lambda\sqrt{\rho_0} + \nu(0)\rho_0^{3/2} + \sqrt{\rho_0}\,\nu(0)\int W_1(k)\,d\mathbf{k} + \\ + \sqrt{\rho_0}\int \nu(k)\{W_1(k) + U(k)\}\,d\mathbf{k} + \int \nu(k) I(k)\,d\mathbf{k}, \quad (4.14)$$

из которого ясно, что форма S является постоянной.

Пользуясь случаем, заметим, что эта форма вещественна. Действительно, формулы для перехода от обычных средних к квазисредним не содержат i. Коэффициенты гамильтониана вещественны и уравнения движения инвариантны по отношению к замене $i \to -i$, $t \to -t$. Поэтому будут вещественными W_1, U и I, а тем самым и S (ν — вещественно). Таким образом, (4.12) представляет только *одно* уравнение.

Воспользуемся теперь ранее сделанным замечанием и исключим бесконечно малую окрестность точки $\mathbf{p} = 0$ всех интегралов от функций G, входящих в уравнения (4.11), (4.12). Тогда нам не надо будет вообще рассматривать $G(\ldots p_j \ldots)$ в областях, где некоторые из $\mathbf{p}_j$ лежат в указанной бесконечно малой окрестности. Это позволит нам сейчас наметить другой весьма удобный подход к вопросу о нахождении функций Грина. Заметим, что мы можем провести такое исключение бесконечно малой окрестности нулевого импульса непосредственно в самом гамильтониане, подставив в H_λ выражения

$$\Psi = \sqrt{\rho_0} + \Psi_1, \quad \Psi_1 = \sum_{k \approx 0} \frac{1}{\sqrt{V}}\, a_k e^{i(\mathbf{kr})}, \quad (4.15)$$

где символ $k \approx 0$ указывает, что мы должны проводить суммирование по $|\mathbf{k}| > \varepsilon$, а ε устремлять к нулю после совершения предельного перехода $V \to \infty$ в уравнениях.

Тогда получим гамильтониан

$$H_\lambda(N) = -\frac{1}{2m}\int_V \Psi_1^+ \Delta\Psi_1\,d\mathbf{r} - \lambda\int_V \left(\sqrt{\frac{N_0}{V}} + \Psi_1^+\right)\left(\sqrt{\frac{N_0}{V}} + \Psi_1\right) d\mathbf{r} + \\ + \frac{1}{2}\int_V\int \Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\left(\sqrt{\frac{N_0}{V}} + \Psi_1^+(\mathbf{r}_1)\right)\left(\sqrt{\frac{N_0}{V}} + \Psi_1^+(\mathbf{r}_2)\right)\left(\sqrt{\frac{N_0}{V}} + \Psi_1(\mathbf{r}_2)\right) \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{N_0}{V}} + \Psi_1(\mathbf{r}_1)\right) d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2 = \sum{}'\left(\frac{k^2}{2m} - \lambda\right) a_k^+ a_k - \lambda N_0 + \frac{N_0^2}{2V}\,\nu(0) + \\ + \frac{N_0}{V}\sum{}'\{\nu(k) + \nu(0)\}a_k^+ a_k + \frac{N_0}{2V}\sum{}'\nu(k)\{a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k}\} + \\ + \frac{\sqrt{N_0}}{2V}\sum{}'\{\nu(k_1) + \nu(k_2)\}\,\Delta(k_1 + k_2 - k)a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ a_k + \\ + \frac{\sqrt{N_0}}{2V}\sum{}'\{\nu(k_1) + \nu(k_2)\}\,\Delta(k_1 + k_2 - k)a_k^+ a_{k_2} a_{k_1} + \\ + \frac{1}{2V}\sum{}'\nu(k_1 - k_1')\,\Delta(k_1 + k_2 - k_1' - k_2')a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ a_{k_2'} a_{k_1'}, \quad (4.16)$$

где

$$N_0 = \rho_0 V$$

и $\sum'$ указывает, что индексы суммирования подчинены условию $\mathbf{p} \neq 0$. Как видно, этот гамильтониан уже не коммутирует с N:

$$N = N_0 + \sum{}' a_k^+ a_k.$$

Рассмотрим для него *обычные средние* от произведений Ψ_1, Ψ_1^+ и построенные из них функции Грина. Заметим, что гамильтониан $H_\lambda(N_0)$ отличается от «первоначального» гамильтониана H_λ только тем, что из Ψ_1, Ψ_1^+ исключены амплитуды с импульсами из бесконечно малой окрестности $\mathbf{p} = 0$. Ясно поэтому, что, исходя из гамильтониана $H_\lambda(N_0)$, мы получим для его функций Грина те же уравнения (4.11), причем с автоматически удаленной бесконечно малой окрестностью нулевого импульса. Если бы уравнения (4.11) в случае первоначального гамильтониана H_λ относились бы к функциям Грина, построенным из обычных средних, то в соответствии с ранее сделанным примечанием в них нельзя было бы удалять эту бесконечно малую окрестность: интегралы от *таких* функций Грина по бесконечно малой окрестности нулевого импульса не должны равняться нулю.

Заметим далее, что уравнение (4.12) «с точки зрения» гамильтониана $H_\lambda(N_0)$ может быть интерпретировано следующим образом.

Обратим внимание на то, что благодаря (4.13), (4.16) справедливо равенство

$$\frac{S}{\sqrt{\rho_0}} = \frac{S + S^+}{2\sqrt{\rho_0}} = \left\langle \frac{\partial H_\lambda(N_0)}{\partial N_0} \right\rangle. \tag{4.17}$$

Построим выражение для свободной энергии:

$$F(N_0, \lambda, \theta) = -\theta \ln \operatorname{Sp} \mathrm{e}^{-H_\lambda(N_0)},$$

зависящее от N_0 как от параметра. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial N_0} = \left\langle \frac{\partial H_\lambda(N_0)}{\partial N_0} \right\rangle.$$

Поэтому уравнению (4.12) соответствует уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial N_0} = 0. \tag{4.18}$$

Таким образом, если мы определим параметр N_0 из уравнения (4.18) и напишем затем цепочку уравнений с функциями Грина для динамической системы с гамильтонианом $H_\lambda(N_0)$, мы получим те же уравнения (4.11), (4.12). Спектральные же свойства, играющие роль дополнительных или, так сказать, «граничных» условий к этим уравнениям, вообще не зависят от конкретного вида гамильтониана.

Итак, имеются две совершенно эквивалентные возможности для интерпретации уравнений, определяющих функции Грина, — мы можем исходить из данного гамильтониана H_λ, сохраняющего N, и работать с квазисредними или же обратиться к «модельному» гамильтониану $H_\lambda(N_0)$ с выделенным конденсатом и иметь дело уже с обычными средними.

В этом последнем варианте уравнения (4.12)–(4.18) можно интерпретировать как обычное термодинамическое условие для определения макроскопической переменной N_0 в состоянии статистического равновесия.

Для случая нулевой температуры модель с выделенным конденсатом впервые была предложена в нашей работе [7]. Подход к ней на основе диаграммной техники был развит в работах [8]. Недавно она была подвергнута подробному обсуждению в работе [9].

Скажем в заключение несколько слов по поводу самого понятия квазисредних. В предыдущем параграфе квазисредние определялись через асимптотические формы обычных средних при увеличении пространственных расстояний. Следует заметить, что имеется и другой, даже более простой, способ, основанный на введении в исходный гамильтониан H_λ «нефизических» членов, соответствующих рождению и уничтожению частиц. Возьмем, например, вспомогательный гамильтониан вида

$$H_{\lambda,\nu} = H_\lambda - \nu\sqrt{V}\ (a_0^+ + a_0), \quad \nu > 0, \tag{4.19}$$

где ν — некоторый параметр.

Такой гамильтониан уже не коммутирует с N, и правила отбора для средних, связанные с законом сохранения числа частиц, здесь отпадают. Поэтому *квазисреднее динамической величины* $\mathfrak{A}$ *для гамильтониана* H_λ *определим как предел*

$$\lim_{\nu\to 0}\langle\mathfrak{A}\rangle_{H_{\lambda,\nu}}$$

соответствующего обычного среднего, взятого для $H_{\lambda,\nu}$.

С таким определением квазисредних нетрудно было бы опять свести задачу к изучению модельной системы с выделенным конденсатом. Смысл введения «нефизического поля»

$$-\nu\sqrt{V}\ (a_0^+ + a_0) \tag{4.20}$$

состоит в том, что мы тем самым *исключаем группу преобразований*

$$a_k \to a_k e^{i\varphi}, \quad a_k^+ \to a_k^+ e^{-i\varphi}, \quad \varphi = \text{const}, \tag{4.21}$$

связанную с законом сохранения числа частиц.

Благодаря этому не только оператор

$$\frac{a_0^+ a_0}{V}$$

будет асимптотически c-числом, но также и операторы

$$\frac{a_0}{\sqrt{V}}, \quad \frac{a_0^+}{\sqrt{V}}$$

становятся асимптотически c-числами $\sim\sqrt{\rho_0}$.

Включением «поля» (4.20) мы как бы снимаем «вырождение» квазисредних

$$\langle\Psi^+\dots\Psi^+\Psi\dots\Psi\rangle; \quad \mathfrak{N}(\Psi^+\dots\Psi^+\Psi\dots\Psi\rangle = n \neq 0,$$

которые при преобразованиях (4.21) должны были бы умножаться на $e^{-in\varphi}$.

§ 5. Свойства симметрии функций Грина

Мы будем рассматривать здесь простейшие функции Грина типа

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle,$$

где

$$A, B = a, a^+.$$

Прежде всего, напомним основные определения и соответствующие спектральные формулы. Имеем

$$\begin{aligned}
\langle\langle A(t), B(\tau)\rangle\rangle^{\mathrm{ret}} &= -i\theta(t-\tau)\langle A(t)B(\tau) - B(\tau)A(t)\rangle,\\
\langle\langle A(t), B(\tau)\rangle\rangle^{\mathrm{adv}} &= i\theta(\tau-t)\langle A(t)B(\tau) - B(\tau)A(t)\rangle,\\
\langle\langle A(t), B(\tau)\rangle\rangle^{\mathrm{c}} &= -i\langle T(A(t)B(\tau))\rangle =\\
&= -i\{\theta(t-\tau)\langle A(t)B(\tau)\rangle + \theta(\tau-t)\langle B(\tau)A(t)\rangle\}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Их «энергетическое представление» определяем с помощью интегралов Фурье

$$\langle\langle A(t), B(\tau)\rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\langle A, B\rangle\rangle_E \mathrm{e}^{-iE(t-\tau)}\, dE. \tag{5.2}$$

Основываясь на спектральных формулах

$$\begin{aligned}
\langle B(\tau)A(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\, d\omega,\\
\langle A(t)B(\tau)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\mathrm{e}^{\omega/\theta}\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\, d\omega,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

получаем [5]

$$\begin{aligned}
\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{\mathrm{ret}} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^{\omega/\theta}-1)J_{A,B}(\omega)\frac{d\omega}{E-\omega+i\varepsilon},\\
\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{\mathrm{adv}} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^{\omega/\theta}-1)J_{A,B}(\omega)\frac{d\omega}{E-\omega-i\varepsilon},
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{\mathrm{c}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\left\{\frac{\mathrm{e}^{\omega/\theta}}{E-\omega+i\varepsilon} - \frac{1}{E-\omega-i\varepsilon}\right\} d\omega.$$

Для особого случая нулевой температуры спектральные формулы для средних (5.3) представляются в виде

$$\begin{aligned}\langle A(t)B(\tau)\rangle &= \int_0^\infty J_{A,B}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega,\\ \langle B(\tau)A(t)\rangle &= \int_0^\infty I_{A,B}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega,\end{aligned} \tag{5.5}$$

и тогда вместо (5.4) будем иметь

$$\begin{aligned}\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{\mathrm{ret}} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\epsilon(\omega)I_{A,B}(\omega)}{E-\omega+i\varepsilon}\,d\omega,\\ \langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{\mathrm{adv}} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\epsilon(\omega)I_{A,B}}{E-\omega-i\varepsilon}\,d\omega,\\ \langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{\mathrm{c}} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\epsilon(\omega)I_{A,B}(\omega)}{E-\omega+i\varepsilon\epsilon(\omega)}\,d\omega,\end{aligned} \tag{5.6}$$

где

$$\epsilon(\omega)=\begin{cases}1, & \omega>0,\\ -1, & \omega<0.\end{cases}$$

Как видно, запаздывающая и опережающая функции Грина

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{\mathrm{ret}},\quad \langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{\mathrm{adv}}$$

всегда являются граничными значениями функции комплексного переменного E:

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}J_{A,B}(\omega)\frac{\mathrm{e}^{\omega/\theta}-1}{E-\omega}\,d\omega. \tag{5.7}$$

Причинная же функция Грина

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{\mathrm{c}}$$

обладает этим свойством только в случае нулевой температуры. Заметим теперь, что из определений (5.1) вытекает

$$\begin{aligned}\langle\langle A(t), B(\tau)\rangle\rangle^{\mathrm{c}} &= \langle\langle B(\tau), A(t)\rangle\rangle^{\mathrm{c}},\\ \langle\langle A(t), B(\tau)\rangle\rangle^{\mathrm{ret}} &= \langle\langle B(\tau), A(t)\rangle\rangle^{\mathrm{adv}}.\end{aligned}$$

Откуда на основании (5.2) получим

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{\mathrm{c}} = \langle\langle B, A\rangle\rangle_{-E}^{\mathrm{c}}, \tag{5.8}$$

а также

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{\mathrm{ret}} = \langle\langle B, A\rangle\rangle_{-E}^{\mathrm{adv}}. \tag{5.9}$$

Расширяя соотношение (5.9) на комплексную плоскость, убеждаемся, что для функции комплексного переменного (5.7) также справедливо равенство типа (5.8):

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E = \langle\langle B, A\rangle\rangle_{-E}. \tag{5.10}$$

Рассмотрим матричную функцию Грина

$$G(E,k) = \begin{vmatrix} G_{11}(E,k) & G_{21}(E,k) \\ G_{12}(E,k) & G_{22}(E,k) \end{vmatrix}, \tag{5.11}$$

где

$$\begin{aligned} G_{11}(E,k) &= \langle\langle a_k, a_k^+\rangle\rangle, \qquad G_{21}(E,k) = \langle\langle a_{-k}^+, a_k^+\rangle\rangle_k, \\ G_{12}(E,k) &= \langle\langle a_k, a_{-k}\rangle\rangle, \qquad G_{22}(E,k) = \langle\langle a_{-k}^+, a_{-k}\rangle\rangle_E. \end{aligned} \tag{5.12}$$

В качестве $\langle\langle A, B\rangle\rangle_E$ мы будем подразумевать здесь или функцию комплексного переменного (5.7), или причинную функцию Грина для вещественных E. В обоих случаях благодаря (5.8), (5.10) имеем

$$\begin{aligned} &G_{22}(E,k) = G_{11}(-E,-k), \\ &G_{\alpha\beta}(E,k) = G_{\alpha\beta}(-E,-k), \quad \text{если} \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Заметим теперь, что гамильтониан $H_\lambda(N_0)$ инвариантен по отношению к каноническому преобразованию

$$a_k \to a_{-k}, \quad a_k^+ \to a_{-k}^+.$$

Поэтому средние

$$\begin{aligned} &\langle a_k^+(t) a_k(\tau)\rangle, \quad \langle a_k(t) a_k^+(\tau)\rangle, \\ &\langle a_k(t) a_{-k}(\tau)\rangle, \quad \langle a_{-k}^+(t) a_k^+(\tau)\rangle \end{aligned}$$

не должны меняться при замене $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$. Следовательно, и для рассматриваемых функций Грина будем иметь

$$G_{\alpha\beta}(E,k) = G_{\alpha\beta}(E,-k). \tag{5.14}$$

Заметим далее, что, так как коэффициенты в выражении (4.16) для гамильтониана $H_\lambda(N_0)$ все вещественны, соответствующие уравнения движения должны быть инвариантны по отношению к инверсии времени $t \to -t$, сопровождающейся заменой i на $-i$. Поэтому среднее

$$\langle a_{-k}(\tau) a_k(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_k(\omega) \mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\, d\omega \tag{5.15}$$

не изменяется для преобразования

$$t \to -t, \quad \tau \to -\tau, \quad i \to -i,$$

ввиду чего

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_k(\lambda) \mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} J_k^*(\omega) \mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\, d\omega.$$

Отсюда следует, что спектральная плотность $J_k(\omega)$ является вещественной функцией

$$J_k^*(\omega) = J_k(\omega), \tag{5.16}$$

и потому на основании (5.15)

$$\langle a_k^+(t)a_{-k}^+(\tau)\rangle = \langle a_{-k}(\tau)a_k(t)\rangle^* = \int_{-\infty}^{+\infty} J_k(\omega)\mathrm{e}^{i\omega(t-\tau)}\,d\omega$$

и

$$\langle a_k^+(\tau)a_{-\varkappa}^+(t)\rangle = \langle a_{-k}(\tau)a_k(t)\rangle.$$

Соответствующее соотношение для функций Грина будет следующим:

$$\langle\langle a_k^+, a_{-k}^+\rangle\rangle_E = \langle\langle a_{-k}, a_k\rangle\rangle_E,$$

т. е. в принятых обозначениях

$$G_{21}(E,k) = G_{12}(E,k). \tag{5.17}$$

Введем теперь матрицу $\Sigma(E,k)$:

$$\Sigma(E,k) = \frac{1}{2\pi}\,G^{-1}(E,k) \tag{5.18}$$

или

$$2\pi\Sigma(E,k)G(E,k) = I, \tag{5.19}$$

где I — единичная матрица. Эту матрицу $\Sigma(E,k)$ мы можем интерпретировать как полный «массовый оператор». В частном случае нулевой температуры, когда применима фейнмановская диаграммная техника, $\Sigma(E,k)$ представляет собой обычную «собственно энергетическую часть».

Из определения (5.18) ясно также, что ее элементы $\Sigma_{\alpha\beta}(E,k)$ всегда удовлетворяют тем же соотношениям симметрии (5.13), (5.14), (5.17), что и $G_{\alpha\beta}(E,k)$. Раскрывая матричное равенство (5.19), получим

$$\Sigma_{11}(E,k)G_{11}(E,k) + \Sigma_{12}(E,k)G_{21}(E,k) = \frac{1}{2\pi},$$
$$\Sigma_{21}(E,k)G_{11}(E,k) + \Sigma_{22}(E,k)G_{21}(E,k) = 0.$$

Но в силу только что сказанного

$$\Sigma_{21}(E,k) = \Sigma_{12}(E,k),$$
$$\Sigma_{22}(E,k) = \Sigma_{11}(-E,k),$$

и можно написать

$$\begin{aligned}\Sigma_{11}(E,k)\langle\langle a_k, a_k^+\rangle\rangle + \Sigma_{12}(E,k)\langle\langle a_k^+, a_k^+\rangle\rangle &= \frac{1}{2\pi},\\ \Sigma_{12}(E,k)\langle\langle a_k, a_k^+\rangle\rangle + \Sigma_{11}(-E,k)\langle\langle a_{-k}^+, a_k^+\rangle\rangle &= 0.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Входящие сюда функции $\Sigma_{\alpha\beta}$ обладают свойствами симметрии:

$$\begin{aligned}&\Sigma_{11}(E,-k) = \Sigma_{11}(E,k), \quad \Sigma_{12}(E,k) = \Sigma_{12}(E,-k),\\ &\Sigma_{12}(E,k) = \Sigma_{12}(-E,k).\end{aligned} \tag{5.21}$$

§ 6. Теорема о $1/q^2$ и ее приложения

Рассмотрим здесь градиентные преобразования

$$\begin{aligned}\Psi(t,\mathbf{r}) &\to \Psi'(t,\mathbf{r}) = e^{-i\chi(\mathbf{r})}\Psi(t,\mathbf{r});\\ \Psi^+(t,\mathbf{r}) &\to \Psi^{+\prime}(t,\mathbf{r}) = e^{i\chi(\mathbf{r})}\Psi^+(t,\mathbf{r}),\end{aligned} \tag{6.1}$$

где $\chi(\mathbf{r})$ — некоторая вещественная c-функция.

Возьмем выражение для гамильтониана H_λ в виде

$$H_\lambda = H(\Psi^+,\Psi) = T(\Psi^+,\Psi) + U(\Psi^+,\Psi),$$

в котором

$$T(\Psi^+,\Psi) = \frac{1}{2m}\int\limits_V \Psi^+(\mathbf{r})p^2\Psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{p} = -i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}},$$

$$U(\Psi^+,\Psi) = -\lambda\int \Psi^+(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_V\int\int \Psi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\Psi^+(\mathbf{r}_1)\Psi^+(\mathbf{r}_2)\Psi(\mathbf{r}_2)\Psi(\mathbf{r}_1)\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2.$$

Заметим, что для преобразования (6.1) имеем

$$\begin{aligned}U(\Psi^{+\prime},\Psi') &= U(\Psi^+,\Psi),\\ T(\Psi^{+\prime},\Psi') &= T'(\Psi^+,\Psi),\end{aligned} \tag{6.2}$$

где

$$T'(\Psi^+,\Psi) = \frac{1}{2m}\int\limits_V \Psi^+(\mathbf{r})\left(\mathbf{p} - \frac{\partial\chi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\right)^2\Psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}. \tag{6.3}$$

Построим новый гамильтониан:

$$H^1(\Psi^+,\Psi) = T(\Psi^+,\Psi) + U(\Psi^+,\Psi). \tag{6.4}$$

Тогда в силу (6.2) справедливо тождество

$$H'(\Psi^+,\Psi) = H(\Psi^{+\prime},\Psi'). \tag{6.5}$$

Рассмотрим средние

$$\begin{aligned}\langle\Psi^+(t,\mathbf{r}_1)\dots\Psi^+(t,\mathbf{r}_s)\Psi(t,\mathbf{R}_s)\dots\Psi(t,\mathbf{R}_1)\rangle_{H'} &= \\ = \langle\Psi^+(\mathbf{r}_1)\dots\Psi^+(\mathbf{r}_s)\Psi(\mathbf{R}_s)\dots\Psi(\mathbf{R}_1)\rangle_{H'} &= \\ = \langle\Psi^+(\mathbf{r}_1)\dots\Psi^{+\prime}(\mathbf{r}_s)\Psi(\mathbf{R}_s)\dots\Psi'(\mathbf{R}_1)\rangle_{H'} &\times \\ \times \exp i(\chi(\mathbf{R}_1)+\dots+\chi(\mathbf{R}_s)-\chi(\mathbf{r}_1)-\dots-\chi(\mathbf{r}_s)).&\end{aligned}$$

С другой стороны, принимая во внимание (6.5), можно написать

$$\langle\Psi^{+\prime}(\mathbf{r}_1)\dots\Psi^{+\prime}(\mathbf{r}_s)\Psi'(\mathbf{R}_s)\dots\Psi'(\mathbf{R}_1)\rangle_{H'} =$$
$$= \frac{\mathrm{Sp}\{\Psi^{+\prime}(\mathbf{r}_1)\dots\Psi'(\mathbf{R}_1)\mathrm{e}^{-H'(\Psi^+,\Psi)/\theta}\}}{\mathrm{Sp}\,\mathrm{e}^{-H'(\Psi^+,\Psi)/\theta}} =$$
$$= \frac{\mathrm{Sp}\{\Psi^{+\prime}(\mathbf{r}_1)\dots\Psi'(\mathbf{R}_1)\mathrm{e}^{-H'(\Psi^+,\Psi')/\theta}\}}{\mathrm{Sp}\,\mathrm{e}^{-H'(\Psi^+,\Psi')/\theta}} =$$
$$= \frac{\mathrm{Sp}\{\Psi^{+}(\mathbf{r}_1)\dots\Psi'(\mathbf{R}_1)\mathrm{e}^{-H(\Psi^+,\Psi)/\theta}\}}{\mathrm{Sp}\,\mathrm{e}^{-H(\Psi^+,\Psi)/\theta}} = \langle\Psi^{+}(\mathbf{r}_1)\dots\Psi(\mathbf{R}_1)\rangle_H.$$

Имеем поэтому

$$\langle\Psi^{+}(\mathbf{r}_1)\dots\Psi^{+}(\mathbf{r}_s)\Psi(\mathbf{R}_s)\dots\Psi(\mathbf{R}_1)\rangle_{H'} = \langle\Psi^{+}(\mathbf{r}_1)\dots\Psi^{+}(\mathbf{r}_s)\Psi(\mathbf{R}_s)\dots\Psi(\mathbf{R}_1)\rangle \times$$
$$\times \exp i(\chi(\mathbf{R}_1)+\dots+\chi(\mathbf{R}_s)-\chi(\mathbf{r}_1)-\dots-\chi(\mathbf{r}_s)). \quad (6.6)$$

Таким образом, получаем следующее правило: чтобы вычислить средние от полевых функций для гамильтониана H', надо взять эти средние для неизменного гамильтониана и произвести в них *обратное* градиентное преобразование:

$$\Psi(t,\mathbf{r}) \to \mathrm{e}^{i\chi(\mathbf{r})}\Psi(t,\mathbf{r}),$$
$$\Psi^{+}(t,\mathbf{r}) \to \mathrm{e}^{-i\chi(\mathbf{r})}\Psi^{+}(t,\mathbf{r}). \quad (6.7)$$

Ограничимся теперь рассмотрением бесконечно малых градиентных преобразований, когда

$$\chi(\mathbf{r})\,\delta\chi(\mathbf{r}) = (\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}+\mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}})\,\delta\xi, \quad (6.8)$$

где $\delta\xi$ — бесконечно малая вещественная величина.

Преобразование (6.7) в этом случае будет следующим:

$$\Psi \to \Psi + i\Psi\,\delta\chi(\mathbf{r}),$$
$$\Psi^{+} \to \Psi^{+} - i\Psi^{+}\,\delta\chi(\mathbf{r}),$$

или, если перейти к импульсному представлению,

$$a_k \to a_k + i(a_{k+q}+a_{k-q})\,\delta\xi,$$
$$a_k^{+} \to a_k^{+} - i(a_{k+q}^{+}+a_{k-q}^{+})\,\delta\xi. \quad (6.9)$$

Видим поэтому, что

$$\langle a_{k_1}^{+}a_{k_2}\rangle_{H'} = \langle a_{k_1}^{+}a_{k_2}\rangle - i\langle(a_{k_1+q}^{+}+a_{k_1+q}^{+})a_{k_2}\rangle_H\,\delta\xi + i\langle a_{k_1}^{+}(a_{k_2+q}+a_{k_2+q})\rangle\,\delta\xi.$$

Но

$$\langle a_k^{+}a_{k'}\rangle = \Delta(k-k')n_k, \quad n_k = \langle a_k^{+}a_k\rangle_H.$$

Следовательно,

$$\langle a_{k'}^{+}a_{k_2}\rangle = n_{k_1}\Delta(k_1-k_2) + i\,\delta\xi\{n_{k_1}[\Delta(k_2+q-k_1)+\Delta(k_2-q-k_1)] -$$
$$- n_{k_2}[\Delta(k_1+q-k_2)+\Delta(k_1-q-k_2)]\} =$$
$$= n_{k_1}\Delta(k_1-k_2) + i\,\delta\xi[\Delta(k_1-k_2+q)+\Delta(k_1-k_2-q)](n_{k_1}-n_{k_2}). \quad (6.10)$$

Заметим теперь, что

$$H' = H + \delta H, \tag{6.11}$$

где

$$\delta H = -\frac{1}{2m}\int_V \Psi^+(\mathbf{r})\left(\mathbf{p}\frac{\partial \delta x}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \delta x}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{p}\right)\Psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = S_q\frac{q^2}{2m}\delta\xi,$$
$$S_q = -i\sum_{(k)}\frac{(2\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{q}}{q^2}(a^+_{k+q}a_k - a^+_k a_{k+q}). \tag{6.12}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \frac{i}{2}\sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon}(a^+_{k+q}a_k - a^+_k a_{k+q}), \tag{6.13}$$

в котором ε — *пока* некоторый фиксированный импульс, и найдем его среднее значение для варьированного гамильтониана. Воспользовавшись формулой (6.10), найдем

$$\langle\mathfrak{A}_\varepsilon\rangle_{H+\delta H} = -\frac{\delta\xi}{2}\sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon}(n_{k+q} - n_k - n_k + n_{k+q}), \tag{6.14}$$

т. е.

$$\langle\mathfrak{A}_\varepsilon\rangle_{H+\delta H} = \delta\xi\left\{\sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} n_k - \sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} n_{k+q}\right\}.$$

Совершенно аналогично найдем

$$\langle S_q\rangle_{H+\delta H} = 2\,\delta\xi\sum_{(k)}\frac{(2\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{q}}{q^2}(n_{k+q} - n_k) =$$
$$= 2\,\delta\xi\sum_{(k)}\frac{(2\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{q}}{q^2}n_k - 2\,\delta\xi\sum_{(k)}\frac{(2\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{q}}{q^2}n_k = -4\sum_{(k)}n_k\,\delta\xi,$$

или

$$\langle S_q\rangle_{H+\delta H} = -4N\,\delta\xi. \tag{6.15}$$

С другой стороны, для вычисления среднего

$$\langle A\rangle_{H+\delta H}$$

мы всегда можем воспользоваться общей формулой [5]

$$\langle A\rangle_{H+\delta H} - \langle A\rangle_H = 2\pi\langle\langle A, \delta H\rangle\rangle_{E=0}. \tag{6.16}$$

Применим это соотношение для средних (6.14), (6.15) и примем во внимание выражение (6.12) для δH. Получим

$$\sum_{|k|<\varepsilon} n_k - \sum_{|k|<\varepsilon} n_{k+q} = \frac{q^2\pi}{m}\langle\langle\mathfrak{A}_\varepsilon, S_q\rangle\rangle_{E=0},$$
$$-4N = \frac{q^2\pi}{m}\langle\langle S_q, S_q\rangle\rangle_{E=0}. \tag{6.17}$$

Но, как видно из (6.12), (6.13), операторы S_q и $\mathfrak{A}_\varepsilon$ являются самосопряженными:

$$S_q = S_q^+, \quad \mathfrak{A}_\varepsilon = \mathfrak{A}_\varepsilon^+.$$

Мы можем поэтому написать, воспользовавшись неравенствами (3.51)

$$|\langle\langle \mathfrak{A}_\varepsilon, S_q\rangle\rangle_{E=0}|^2 \leqslant \langle\langle \mathfrak{A}_\varepsilon, \mathfrak{A}_\varepsilon\rangle\rangle_{E=0}\langle\langle S_q, S_q\rangle\rangle_{E=0},$$

откуда

$$|\langle\langle \mathfrak{A}_\varepsilon, \mathfrak{A}\varepsilon\rangle\rangle_{E=0}| \geqslant \frac{|\langle\langle \mathfrak{A}\varepsilon, S_q\rangle\rangle_{E=0}|^2}{|\langle\langle S_q, S_q\rangle\rangle_{E=0}|},$$

и поэтому благодаря (6.17) получаем

$$|\langle\langle \mathfrak{A}_\varepsilon, \mathfrak{A}_\varepsilon\rangle\rangle_{E=0}| \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} n_k - \sum\limits_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} n_{k+q}\right)^2}{4Nq^2\pi/m}. \tag{6.18}$$

Примем теперь во внимание выражение (6.13). Учитывая правило сохранения импульсов, найдем

$$\langle\langle \mathfrak{A}_\varepsilon, \mathfrak{A}\varepsilon\rangle\rangle_{E=0} = \frac{1}{4}\left\langle\left\langle \sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} a_{k+q}^+ a_k, \sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} a_k^+ a_{k+q}\right\rangle\right\rangle_{E=0} +$$

$$+ \frac{1}{4}\left\langle\left\langle \sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} a_k^+ a_{k+q}, \sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} a_{k+q}^+ a_k\right\rangle\right\rangle_{E=0}.$$

Следовательно, с учетом свойства симметрии (5.10) будем иметь

$$\langle\langle \mathfrak{A}_\varepsilon, \mathfrak{A}_\varepsilon\rangle\rangle_{E=0} = \frac{1}{2}\left\langle\left\langle \sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} a_{k+q}^+ a_k, \sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} a_k^+ a_{k+q}\right\rangle\right\rangle_{E=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{(|\mathbf{k}_1|<\varepsilon, |\mathbf{k}_2|<\varepsilon)} \langle\langle a_{k_1+q}^+ a_{k_1}, a_{k_2}^+ a_{k_2+q}\rangle\rangle_{E=0}. \tag{6.19}$$

Таким образом, из (6.18) получим

$$\left|\frac{1}{V^2}\sum_{(|\mathbf{k}_1|<\varepsilon, |\mathbf{k}_2|<\varepsilon)} V\langle\langle a_{k_1+q}^+ a_{k_1}, a_{k_2}^+ a_{k_2+q}\rangle\rangle_{E=0}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{m}{2\pi pq^2}\left(\frac{1}{V}\sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} n_k - \frac{1}{V}\sum_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} n_{k+q}\right)^2. \tag{6.20}$$

Представим теперь это неравенство в предельной форме для $V \to \infty$. Правая часть его, очевидно, будет иметь вид

$$\frac{m}{2\pi\rho q^2}\left(\int\limits_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} W(k)\,d\mathbf{k} - \int\limits_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} W(k+q)\,d\mathbf{k}\right).$$

Чтобы найти соответствующее выражение для левой части, рассмотрим интеграл Фурье

$$\langle\langle\Psi^+(\mathbf{r}_1)\Psi(\mathbf{r}_2), \Psi^+(\mathbf{r}_1')\Psi(\mathbf{r}_2')\rangle\rangle_{E=0} =$$
$$= \int e^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1+\mathbf{p}_2\mathbf{r}_2+\mathbf{p}_3\mathbf{r}_1'+\mathbf{p}_4\mathbf{r}_2')}\,\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4)S(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4)\,d\mathbf{p}_1\,d\mathbf{p}_2\,d\mathbf{p}_3\,d\mathbf{p}_4. \tag{6.21}$$

Поскольку, с другой стороны,

$$\langle\langle\Psi^+(\mathbf{r}_1)\Psi(\mathbf{r}_2), \Psi(\mathbf{r}_1')\Psi(\mathbf{r}_2')\rangle\rangle_{E=0} =$$
$$= \frac{1}{V}\sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)} V\langle\langle a^+_{-k_1}a_{k_2}a_{-k_3}a_{k_4}\rangle\rangle V\,\Delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)\times$$
$$\times\exp\{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1+\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2+\mathbf{k}_3\mathbf{r}_1'+\mathbf{k}_4\mathbf{r}_2')\},$$

видно, что выражение

$$\frac{V}{(2\pi)^{12}}\langle\langle a^+_{k_1+q}a_{k_1}, a^+_{k_2}a_{k_2+q}\rangle\rangle_{E=0}$$

в пределе заменяется на

$$S(-k_1-q, k_1, -k_2, k_2+q).$$

Таким образом, неравенство (6.20) может быть представлено в форме

$$\left|(2\pi)^6\iint\limits_{(|k_1|<\varepsilon,|k_2|<\varepsilon)} S(-k_1-q,k_1,-k_2,k_2+q)\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\right| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{m}{2\pi\rho q^2}\left(\int\limits_{|k|<\varepsilon} W(k)\,d\mathbf{k} - \int\limits_{|k|<\varepsilon} W(k+q)\,d\mathbf{k}\right)^2. \tag{6.22}$$

Перейдем теперь к пределу при $\varepsilon\to 0$. *Импульс* $\mathbf{q}$ *фиксируем не равным нулю.*

Тогда

$$\int\limits_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} W(k)\,d\mathbf{k} - \int\limits_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} W(k+q)\,d\mathbf{k} = \rho_0 + \int\limits_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} W_1(k)\,d\mathbf{k} - \int\limits_{|\mathbf{k}|<\varepsilon} W_(k+q)\,d\mathbf{k} \to \rho_0. \tag{6.23}$$

Далее, положим в (6.21)

$$\Psi = \sqrt{\rho_0} + \Psi_1, \quad \Psi^+ = \sqrt{\rho_0} + \Psi_1^+.$$

Тогда S будет представлено суммой фурье-образов функций Грина от произведений Ψ_1^+, Ψ_1, $\sqrt{\rho_0}$.

Напомним, что интегралы по бесконечно малым окрестностям нулевого импульса от фурье-образов функций Грина, построенных из произведений Ψ_1^+, Ψ_1, равны нулю. Включение же постоянной $\sqrt{\rho_0}$ дает добавочную

дельта-функцию $\delta(\mathbf{p})$. Поскольку $\mathbf{q}\neq 0$, мы должны учесть лишь ту компоненту S, которая появляется в представлении типа (6.21) для члена

$$\langle\langle\Psi^+(\mathbf{r}_1)\sqrt{\rho_0}\,,\sqrt{\rho_0}\;\Psi(r_2')\rangle\rangle_{E=0}=\rho_0\langle\langle\Psi^+(r_1),\Psi(r_2')\rangle\rangle=$$
$$=\int e^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1+\mathbf{p}_2\mathbf{r}_2+\mathbf{p}_3\mathbf{r}_3'+\mathbf{p}_4\mathbf{r}_4')}\,\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4)S_0(p_1,p_2,p_3,p_4)\,d\mathbf{p}_1\,d\mathbf{p}_2\,d\mathbf{p}_3\,\mathbf{p}_4.$$

Эта компонента будет иметь вид

$$S_0(p_1,p_2,p_3,p_4)=\delta(p_2)\delta(p_3)\rho_0\frac{\langle a^+_{-p_1},a_{-p_1}\rangle\rangle_{E=0}}{(2\pi)^6}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^6\iint\limits_{(|k_1|<\varepsilon,|k_2|<\varepsilon)}S(-k_1-q,k_1,-k_2,k_2+q)\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2=\rho_0\langle\langle a_q^+,a_q\rangle\rangle_{E=0}.$$

Принимая во внимание (6.22), (6.23), мы и заканчиваем доказательство теоремы о $1/q^2$:

$$|\langle\langle a_q^+,a_q\rangle\rangle_{E=0}|\geqslant\frac{m}{2\pi q^2}\,\frac{\rho_0}{\rho}. \tag{6.24}$$

Перейдем теперь к рассмотрению ряда ее приложений.

Напишем спектральные формулы

$$\begin{aligned}\langle a_q(\tau)a_q^+(t)\rangle&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}J_q(\omega)e^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega,\\ \langle a_q^+(t)a_q(\tau)\rangle&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}J_q(\omega)e^{-i\omega(t-\tau)}e^{\omega/\theta}\,d\omega,\end{aligned} \tag{6.25}$$

$$\langle\langle a_q^+,a_q\rangle\rangle_{E=0}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}J_q(\omega)\frac{e^{\omega/\theta}-1}{\omega}\,d\omega. \tag{6.26}$$

Подчеркнем, что входящая сюда спектральная интенсивность не отрицательна: $J_q(\omega)\geqslant 0$. Заметим также, что

$$\frac{e^{\omega/\theta}-1}{\omega}=(1+e^{\omega/\theta})\frac{\operatorname{th}\dfrac{\omega}{2\theta}}{\omega}\leqslant\frac{1}{2\theta}\,(1+e^{\omega/\theta}).$$

Поэтому

$$|\langle\langle a_q^+,a_q\rangle\rangle_{E=0}|\leqslant\frac{1}{4\pi\theta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}J_q(\omega)(1+e^{\omega/\theta})\,d\omega. \tag{6.27}$$

Положим в (6.25) $t=\tau$. Получим

$$1+2n_q=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}J_q(\omega)(1+e^{\omega/\theta})\,d\omega,$$

и поэтому на основании (6.24), (6.27) будем иметь

$$\frac{1+2n_q}{4\pi\theta} \geqslant \frac{m}{2\pi q^2}\frac{\rho_0}{\rho}.$$

Поскольку

$$n_q = (2\pi)^3 W(q), \quad q \neq 0, \tag{6.28}$$

можем также написать

$$W_1(q) = W(q) \geqslant \frac{1}{(2\pi)^3}\left\{\frac{\theta m}{q^2}\frac{\rho - 0}{\rho} - \frac{1}{2}\right\}, \quad q \neq 0. \tag{6.29}$$

Таким образом, плотность непрерывного распределения частиц по импульсам при $q \to 0$ стремится к бесконечности, как $1/q^2$. Это утверждение относится *только* к случаю, когда $\theta > 0$. Чтобы получить некоторую информацию для случая $\theta = 0$, воспользуемся спектральными формулами (5.5), (5.6). Имеем

$$\begin{gathered} -\langle\langle a_q^+, a_q\rangle\rangle_{E=0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_q(\omega)\frac{\epsilon(\omega)}{\omega}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_q(\omega)\frac{d\omega}{|\omega|}, \\ 2n_q + 1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_q(\omega), \quad I_q(\omega) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{6.30}$$

В случае достаточно малых $|q|$, когда можно говорить об «элементарных возбуждениях», обладающих определенной энергией, естественно предположить, что спектральная интенсивность $I_q(\omega)$ практически равна нулю для $|\omega| < E(q)$, где $E(q)$ — минимальная энергия элементарного возбуждения с импульсом q.

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_q(\omega)\frac{d\omega}{|\omega|} \leqslant \frac{1}{2\pi E(q)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_q(\omega)\,d\omega = \frac{2n_q+1}{2\pi E(q)},$$

или благодаря (6.30) и (6.24)

$$\frac{2n_q+1}{2\pi E(q)} \geqslant |\langle\langle a_q^+, a_q\rangle\rangle_{E=0}| \geqslant \frac{m}{2\pi q^2}\frac{\rho_0}{\rho},$$

откуда

$$(2\pi)^3 W(q) = n_q \geqslant \frac{mE(q)}{2q^2}\frac{\rho_0}{\rho} - \frac{1}{2}. \tag{6.31}$$

Если спектр элементарных возбуждений имеет фононный характер $E(q) = c|q|$, то $W(q)$ стремится к бесконечности при $q \to 0$ не медленнее, чем $1/|q|$.

Покажем теперь, что теоремой о $1/q^2$ можно воспользоваться и для выяснения характера спектра возбуждений. Возвратимся для этого к соотношениям (5.20) и представим их в «разрешенной форме»:

$$\langle\langle a_k, a_k^+\rangle\rangle_E = \frac{1}{2\pi}\frac{\Sigma_{11}(-E,k)}{\Sigma_{11}(E,k)\Sigma_{11}(-E,k) - \Sigma_{12}^2(E,k)}, \tag{6.32}$$

$$\langle\langle a^+_{-k}, a^+_k\rangle\rangle_E = -\frac{1}{2\pi}\frac{\Sigma_{12}(-E,k)}{\Sigma_{11}(E,k)\Sigma_{11}(-E,k)-\Sigma^2_{12}(E,k)}. \tag{6.33}$$

В соответствии с теоремой о $1/q^2$

$$|\langle\langle a_k, a^+_k\rangle\rangle| \geqslant \frac{m}{2\pi k^2}\frac{\rho_0}{\rho} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Предположим, что массовый оператор $\Sigma(E,k)$ регулярен в окрестности точки $E=0$, $k=0$.

Тогда из (6.32) следует, что

$$\Sigma^2_{11}(0,0) = \Sigma^2_{12}(0,0). \tag{6.34}$$

Отметим, что это соотношение для случая нулевой температуры было формально установлено с помощью теории возмущений в работе [9] Гугенгольца и Пайнса.

Возьмем, например, первое приближение теории возмущений по степеням малости взаимодействия для $\theta=0$. Анализируя форму гамильтониана (4.16), нетрудно заметить, что с учетом лишь членов первого порядка малости получим

$$\begin{aligned}\Sigma_{11}(E,k) &= E - \frac{k^2}{2m} + \lambda - \frac{N_0}{V}\{\nu(k)+\nu(0)\},\\ \Sigma_{12}(E,k) &= -\frac{N_0}{V}\nu(k), \quad F = -\lambda N_0 + \frac{N_0^2}{2V}\nu(0).\end{aligned} \tag{6.35}$$

Поэтому уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial N_0} = 0$$

дает

$$\lambda = \frac{N_0}{V}\nu(k),$$

и мы видим, что в данном приближении соотношение (6.34) автоматически выполняется. Возьмем «секулярное уравнение»

$$\Sigma_{11}(E,k)\Sigma_{11}(-E,k) - \Sigma^2_{12}(E,k) = 0. \tag{6.36}$$

В принятом приближении найдем

$$\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{N_0}{V}\nu(k)\right)^2 - \left(\frac{N_0}{V}\nu(k)\right)^2 = E^2.$$

Отсюда для энергии элементарного возбуждения получим [7]

$$E(k) = \sqrt{\frac{N_0}{V}\nu(k)\frac{k^2}{m} + \left(\frac{k^2}{2m}\right)^2}$$

и для достаточно малых импульсов

$$E(k) = c|k|, \tag{6.37}$$

где

$$c = \sqrt{\frac{N_0}{V}\frac{\nu(0)}{m}}.$$

Такую «акустическую» структуру спектра (6.37) *можно получить и в общем случае, если только справедливо допущение о регулярности*[1] *массового оператора в окрестности точки* $E=0$, $k=0$.

В самом деле, представим секулярное уравнение (6.36) в следующей симметризованной форме:

$$\left\{\frac{\Sigma_{11}(E,k)+\Sigma_{11}(-E,k)}{2}\right\}^2-\Sigma_{12}^2(E,k)=\left\{\frac{\Sigma_{11}(E,k)-\Sigma_{11}(-E,k)}{2}\right\}^2. \quad (6.38)$$

Заметим, что левая часть этого уравнения симметрична по отношению к замене $E\to -E$ и по отношению к замене $\mathbf{k}\to -\mathbf{k}$. В силу (6.34) она обращается в нуль при $E=0$, $k=0$. Поэтому для достаточно малых E и k положим

$$\left\{\frac{\Sigma_{11}(E,k)+\Sigma_{11}(-E,k)}{2}\right\}^2-\Sigma_{12}^2(E,k)=\beta k^2+\gamma E^2, \quad \beta,\gamma=\text{const}.$$

Заметим далее, что выражение

$$\frac{\Sigma_{11}(E,k)-\Sigma_{11}(-E,k)}{2}$$

антисимметрично по отношению к E. От k оно может зависеть лишь через посредство скаляра k^2. Учитывая только члены первого порядка, положим

$$\frac{\Sigma_{11}(E,k)-\Sigma_{11}(-E,k)}{2}=\alpha E, \quad \alpha=\text{const}.$$

Тогда уравнение (6.38) приводится к виду

$$\alpha^2E^2=\beta k^2+\gamma E^2,$$

откуда находим

$$E^2=\frac{\beta}{a^2-\gamma}\,k^2.$$

Так как полюс функций Грина (6.32) не может лежать в комплексной плоскости вне вещественной оси, то отношение

$$\frac{\beta}{\alpha^2-\gamma}$$

должно быть положительным числом. Тем самым для энергии возбуждения получаем формулу «акустического» типа[2] (6.37).

В заключение отметим, что следовало бы более тщательно проанализировать структуру массового оператора в окрестности точки $E=0$, $k=0$. Есть основания полагать, что, по-видимому, в некоторых случаях имеется более сложное положение, когда существуют возбуждения двух типов.

---

[1] В формулах (6.35) регулярность нарушается в случае кулоновского взаимодействия, когда

$$\nu(k)=\frac{4\pi e^2}{k^2}, \quad \nu(0)=0.$$

[2] На возможность использования свойства градиентной инвариантности для исследования характера спектра возбуждений было указано в нашей работе [2].

Глава III
ФЕРМИ-СИСТЕМЫ

§ 7. Состояния пар частиц

Мы будем рассматривать здесь пространственно однородные равновесные состояния макроскопических систем, состоящих из одинаковых ферми-частиц, характеризуемых полевыми функциями

$$\Psi^+(\mathbf{x}), \Psi(\mathbf{x}); \quad x = (\mathbf{r}, \sigma); \quad \sigma = \pm$$

с обычными условиями антикоммутации.

Для построения средних значений динамических величин условимся всегда использовать *большой* ансамбль. Попытаемся распространить на изучаемые системы такие понятия, как «волновая функция пары частиц», «состояние пары частиц», в частности «связанное состояние пары», и т. п.

Понятия эти имеют очевидный смысл в случае, когда динамическая система состоит всего из двух частиц. Мы же хотим обобщить их для систем из макроскопически большого числа частиц, взаимодействующих друг с другом. С этой целью рассмотрим парную корреляционную функцию

$$F(x_1, x_2; x_1', x_2') = \langle \Psi^+(x_1)\Psi^+(x_2)\Psi(x_2')\Psi(x_1')\rangle. \tag{7.1}$$

Учитывая свойство эрмитовости

$$F^*(x_1', x_2'; x_1, x_2) = F(x_1, x_2; x_1', x_2'), \tag{7.2}$$

напишем разложение F по ортонормированной системе собственных функций Ψ_ν:

$$F(x_1, x_2; x_1', x_2') = \sum_{(\nu)} N_\nu \Psi^*(x_1, x_2)\Psi_\nu(x_1', x_2') \tag{7.3}$$

с нормировкой

$$\int\int_V |\Psi_\nu(x_1, x_2)|^2 \, dx_1 \, dx_2 = 1, \tag{7.4}$$

где

$$\int_V \ldots \, dx = \sum_\sigma \int \ldots \, d\mathbf{r}.$$

В случае если мы имеем дело с газом малой плотности, то в первом приближении $\Psi_\nu(x_1, x_2)$ будут здесь обычными волновыми функциями для задачи двух тел (что вполне естественно, поскольку в первом приближении влиянием остальных частиц на *данную пару* частиц можно пренебречь).

Основываясь на такой аналогии, *мы будем называть собственные функции* $\Psi_\nu(x_1, x_2)$ *волновыми функциями пар частиц. Коэффициенты будем интерпретировать как среднее число пар, находящихся в состоянии с волновой функцией* Ψ_ν.

Из (7.1), (7.3) и (7.4) следует, что[1]

$$\langle N^2 - N\rangle = \sum_\nu N_\nu,$$

т. е. сумма всех N_ν *представляет полное число пар*. Заметим еще, что благодаря (7.1)

$$F(x_2, x_1; x_1', x_2') = -F(x_1, x_2; x_1', x_2'),$$
$$F(x_1, x_2; x_2', x_1') = -F(x_1, x_2; x_1', x_2'),$$

и потому

$$\Psi_\nu(x_2, x_1) + \Psi_\nu(x_1, x_2) = 0.$$

Функция Ψ_ν, как и обычные волновые функции двух ферми-частиц, должна обладать свойством антисимметрии.

Запишем теперь разложение (7.3) в более развернутой форме. Воспользуемся законом сохранения импульса и выделим в волновой функции $\Psi_\nu(x_1, x_2)$ множитель, соответствующий движению центра инерции с некоторым импульсом $\mathbf{q}$. Положим

$$\Psi_\nu(x_1, x_2) = \Psi_{\omega,\mathbf{q}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \sigma_1, \sigma_2) \exp i\mathbf{q}\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2},$$

индекс $\nu = (\omega, \mathbf{q})$ включает импульс $\mathbf{q}$ и, возможно, некоторые другие индексы (ω). Тогда соотношение (7.3) может быть приведено к виду

$$F(x_1, x_2; x_1', x_2') = 2\sum_{(\omega,q)} N_{\omega,q}\Psi^*_{\omega,q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \sigma_1, \sigma_2) \times$$
$$\times \Psi_{\omega,q}(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'; \sigma_1', \sigma_2') \exp i\mathbf{q}\left(\frac{\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2}\right). \quad (7.5)$$

Здесь $N_{\omega,q}$ представляет среднее число пар частиц, находящихся в состоянии $\Psi_{\omega,q}$, *причем каждая пара считается один раз* (а не два, как раньше). Благодаря (7.4) в (7.5) принята следующая нормировка:

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2}\int_V |\Psi_{\omega,q}(\mathbf{r}; \sigma_1, \sigma_2)|\, d\mathbf{r} = \frac{1}{V}. \quad (7.6)$$

Запишем теперь разложение (7.5) в интегральной форме, для чего перейдем к более удобной нормировке.

Рассмотрим волновую функцию пары частиц

$$\Psi_{\omega,q}(\mathbf{r}; \sigma_1, \sigma_2)$$

для данного *фиксированного* импульса $\mathbf{q}$.

---

[1] Имеем в самом деле из (7.1), (7.3), (7.4)

$$\sum_\nu N_\nu = \int_V\int\langle\Psi^+(x_1)\Psi^+(x_2)\Psi(x_2)\Psi(x_1)\rangle\, dx_1\, dx_2 =$$
$$= \int_V\int\langle\Psi^+(x_1)\Psi(x_1)\Psi^+(x_2)\Psi(x_2)\rangle\, dx_1\, dx_2 - \int_V\langle\Psi^+(x)\Psi(x)\rangle\, dx,$$

причем

$$\int_V \Psi^+(x)\Psi(x)\, dx = N.$$

Так как корреляция между обеими частицами пары должна практически исчезать при достаточно больших расстояниях r, то асимптотическая форма (при $r \to \infty$) рассматриваемой функции или равна нулю, или будет представлять плоскую волну, соответствующую относительному свободному движению с некоторым импульсом $\mathbf{p}$.

Рассмотрим сначала первую возможность и положим в этом случае

$$\Psi_{\omega,q}(\mathbf{r}; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{V}} \varphi_{\omega,q}(\mathbf{r}; \sigma_1, \sigma_2),$$

так что

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2} \int |\varphi_{\omega,q}(\mathbf{r}; \sigma_1, \sigma_2)|^2 \, d\mathbf{r} = 1. \tag{7.7}$$

Будем тогда говорить, что $\varphi_{\omega,q}$ представляет собой *связанное состояние пары частиц* с суммарным импульсом $\mathbf{q}$. Дискретный индекс ω указывает номер связанного состояния. Пусть теперь асимптотическая форма $\Psi_{\omega,q}$ будет плоской волной, соответствующей инерциальному относительному движению частиц пары с импульсом $\mathbf{q}$. Положим

$$\omega = (\mathbf{p}, j), \quad \Psi_{\omega,p}(\mathbf{r}; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{V} \varphi_{p,q,j}(\mathbf{r}; \sigma_1, \sigma_2).$$

В этом случае будем говорить, что $\varphi_{p,q,j}$ представляет собой волновую функцию несвязанного или «диссоциированного» состояния пары частиц. Для $\varphi_{p,q,j}$ мы имеем обычную в таком положении нормировку

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2} \frac{1}{V} \int |\varphi_{p,q,j}(\mathbf{r}; \sigma_1, \sigma_2)|^2 \, d\mathbf{r} = 1. \tag{7.8}$$

Мы можем теперь записать разложение (7.5) в следующей форме:

$$F(x_1, x_2; x_1', x_2') = 2 \sum_{(\omega,q)} \frac{N_{\omega,q}}{V} \varphi^*_{\omega,q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \sigma_1, \sigma_2) \varphi_{\omega,q}(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'; \sigma_1', \sigma_2') \times$$
$$\times \exp i\mathbf{q} \left(\frac{\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} \right) + 2 \sum_{(p,q,j)} \frac{N_{p,q,j}}{V} \varphi^*_{p,q,j}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \sigma_1, \sigma_2) \times$$
$$\times \varphi_{p,q,j}(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'; \sigma_1, \sigma_2') \exp i\mathbf{q} \left(\frac{\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} \right).$$

Учитывая здесь предельный переход $V \to \infty$, заменим суммы по импульсам соответствующими интегралами. Получим

$$F(x_1, x_2; x_1', x_2') = \sum_{(\omega,q)} 2 \int d\mathbf{q}\, \omega(\omega, q) \varphi^*_{\omega,q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \sigma_1, \sigma_2) \varphi_{\omega,q}(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'; \sigma_1', \sigma_2') \times$$
$$\times \exp i\mathbf{q} \left(\frac{\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} \right) + \sum_{(j)} 2 \int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, \omega_j(p, q) \varphi^*_{p,q,j}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \sigma_1, \sigma_2) \times$$
$$\times \varphi_{p,q,j}(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'; \sigma_1, \sigma_2') \exp i\mathbf{q} \left(\frac{\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} \right). \tag{7.9}$$

Как видно,

$$\omega(\omega, q)\, d\mathbf{q}$$

представляет в этой формуле плотность числа связанных пар, импульс $\mathbf{q}$ которых лежит в бесконечно малом импульсном объеме $d\mathbf{q}$;

$$\omega_j(p, q)\, d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}$$

обозначает плотность числа несвязанных пар с импульсами $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ из бесконечно малых объемов $d\mathbf{p}$, $d\mathbf{q}$.

Возьмем какую-либо волновую функцию связанного состояния:

$$\varphi_{\omega,q}(\mathbf{r}; \sigma_1, \sigma_2).$$

Если линейные размеры в той пространственной области, в которой практически локализована $\varphi_{\omega,q}$, существенно меньше среднего расстояния $r_{\text{ср}}$ между частицами (из различных пар) в данной макроскопической системе, то естественно говорить о том, что данная $\varphi_{\omega,q}$ соответствует обычной молекуле из двух частиц, находящейся в состоянии ω и движущейся с импульсом $\mathbf{q}$. В случае если l того же порядка или больше $r_{\text{ср}}$, можем сопровождать слово «молекула» приставками «квази» или «псевдо».

Сравним интегральное представление (7.9) с представлением простейшего среднего:

$$F(x, x') = \langle \Psi^+(x)\Psi(x') \rangle = \Delta(\sigma - \sigma') \int d\mathbf{q}\, \omega(q) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}. \tag{7.10}$$

Мы видим, что как (7.10) описывает распределение частиц по «одночастичным состояниям», т. е. по плоским волнам, так и формула (7.9) характеризует распределение частиц по «парным состояниям».

С помощью высших корреляционных функций мы могли бы таким же образом ввести понятия волновых функций для комплекса из трех и больше частиц.

§ 8. Квазисредние

В этом и следующих параграфах мы сосредоточим свое внимание на изучении «случая Шафрота»[1], когда в системе имеется покоящийся конденсат из парных квазимолекул, находящихся в S-состоянии.

Иными словами, мы будем изучать случай, когда в формуле (7.9)

$$\begin{aligned} \omega(\omega, q) &= \rho_0\, \Delta(\omega - \omega_0)\, \delta(\mathbf{q}) + \omega(\omega, q), \\ \varphi_{\omega_0,0}(\mathbf{r}; \sigma_1, \sigma_2) &= \epsilon(\sigma_1)\, \Delta(\sigma_1 + \sigma_2)\varphi(\mathbf{r}), \\ \epsilon(\sigma) &= \begin{cases} 1, & \sigma = +, \\ -1, & \sigma = -, \end{cases} \end{aligned} \tag{8.1}$$

причем

[1] Напомним, что в своих исследованиях Шафрот выдвинул положение, впоследствии полностью подтвердившееся, о том, что явление сверхпроводимости обусловлено возникновением в системе электронов проводимости бозе-конденсата из квазимолекул, образованных из пар электронов.

1. $\omega_1(\omega, q)$ и $\omega_j(p, q)$ соответствуют непрерывному распределению частиц по импульсам парных состояний;

2. $\varphi(r)$ — вещественная, радиально-симметричная функция.

В рассматриваемом положении формула (7.9) дает

$$F(x_1, x_2; x_1', x_2') = 2\rho_0 \epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma_2)\,\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\,\Delta(\sigma_1'+\sigma_2')\varphi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\varphi(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2') + \\ + \sum_{(\omega)} 2\int d\mathbf{q}\,\omega_1(\omega, q)\varphi^*_{\omega,q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2;\sigma_1,\sigma_2)\varphi_{\omega,q}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2';\sigma_1',\sigma_2') \times \\ \times \exp i\mathbf{q}\left(\frac{\mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{2}\right) + \sum_{(j)} 2\int d\mathbf{p}\,d\mathbf{q}\,\omega_j(p, q) \times \\ \times \varphi^*_{p,q,j}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2;\sigma_1,\sigma_2)\varphi_{p,q,j}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2';\sigma_1',\sigma_2') \exp i\mathbf{q}\left(\frac{\mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{2}\right). \quad (8.2)$$

Здесь ρ_0 представляет собой плотность числа связанных пар, находящихся в конденсате. Заметим, что мы совершенно не касаемся вопроса о том, будут ли в действительности существовать связанные состояния, *не находящиеся в конденсате*. Если таких состояний нет, мы должны считать в (8.2), что тождественно $\omega_1(\omega, q) = 0$. Воспользуемся сейчас принципом ослабления корреляции. Разобьем аргументы функции

$$F(x_1, x_2; x_1', x_2') \quad (8.3)$$

на две группы:

$$(x_1, x_2), \quad (x_1', x_2') \quad (8.3')$$

— и будем неограниченно увеличивать расстояния между точками $\mathbf{r}$ из различных групп. Тогда благодаря (8.2) соответствующая асимптотическая форма F будет иметь следующий вид:

$$\Phi(x_1, x_2)\Phi(x_1', x_2'), \quad (8.4)$$

где

$$\Phi(x_1, x_2) = \sqrt{2\rho_0}\,\epsilon(\sigma_1)\,\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\varphi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \quad (8.5)$$

Покажем, как в такой ситуации ввести квазисредние. Рассмотрим для этого «многовременное» среднее, построенное из полевых функций в гейзенберговском представлении,

$$\langle \Psi^+(t_1, x_1)\Psi^+(t_2, x_2)\Psi(t_2', x_2')\Psi(t_1', x_1')\rangle, \quad (8.6)$$

которое совпадает с (8.3) при $t_1 = t_2 = t_1' = t_2'$. Фиксируем t_1, t_2, t_1', t_2' и будем неограниченно увеличивать расстояния между точками $\mathbf{r}$ из различных групп (8.3′). Допустим, что соответствующая асимптотическая форма будет следующей:

$$\Phi^*(t_1, x_1, t_2, x_2)\Phi(t_1', x_1', t_2', x_2'). \quad (8.7)$$

С другой стороны, среднее (8.6) инвариантно по отношению к временным

$$t_1 \to t_1 + \tau, \quad t_2 \to t_2 + \tau, \quad t_1' \to t_1' + \tau, \quad t_2' \to t_2' + \tau$$

и к пространственным трансляциям:

$$\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 + \xi, \quad \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + \xi, \quad \mathbf{r}'_1 \to \mathbf{r}'_1 + \xi, \quad \mathbf{r}'_2 \to \mathbf{r}'_2 + \xi.$$

Поэтому и асимптотическая форма (8.7) будет обладать такими же свойствами инвариантности. Отсюда вытекает, что

$$\Phi(t_1, x_1, t_2, x_2) = \Phi(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2) \exp i \left\{ \mathbf{p}_0 \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - E_0 t \right\}. \tag{8.8}$$

Но форма (8.7) должна совпадать с (8.4) при

$$t_1 = t_2 = t'_1 = t'_2.$$

Имеем, следовательно,

$$\Phi^*(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2)\Phi(0, \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2, \sigma'_1, \sigma'_2) \exp i \left\{ \mathbf{p}_0 \frac{\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} \right\} =$$

$$= \Phi(x_1, x_2)\Phi(x'_1, x'_2) =$$

$$= 2\rho_0 \epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma'_1)\, \Delta(\sigma_1 + \sigma_2)\, \Delta(\sigma'_1 + \sigma'_2)\varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\varphi(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2), \tag{8.9}$$

и потому

$$\mathbf{p} = 0.$$

Заметим, что функция $\Phi(t_1, x_1, t_2, x_2)$ определена лишь с точностью до фазового множителя. В частности, из (8.9) можем получить

$$\Phi(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2) = \mathrm{e}^{i\eta}\Phi(x_1, x_2).$$

Фиксируем здесь этот фазовый множитель, положив

$$\eta = 0,$$

так что

$$\Phi(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{2\rho_0}\ \epsilon(\sigma_1)\, \Delta(\sigma_1 + \sigma_2)\varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{8.10}$$

Покажем сейчас, что в формуле (8.8) $E_0 = 0$. Для этого воспользуемся спектральными представлениями

$$\langle \Psi^+(t, x_1)\Psi^+(t, x_2)\Psi(\tau, x'_2)\Psi(\tau, x'_1)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega; x_1, x_2, x'_1, x'_2)\mathrm{e}^{i\omega(t-\tau)}\, d\omega,$$

$$\langle \Psi(\tau, x'_2)\Psi(\tau, x'_1)\Psi^+(t, x_1)\Psi^+(t, x_2)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega; x_1, x_2, x'_1, x'_2)\mathrm{e}^{\omega/\theta}\mathrm{e}^{i\omega(t-\tau)}\, d\omega. \tag{8.11}$$

Фиксируем здесь t, τ и будем устремлять к бесконечности расстояния между точками $\mathbf{r}$ из различных групп (8.3′). Так как полевые функции Ψ^+, Ψ с неограниченно удаляющимися пространственными аргументами асимптотически точно антикоммутируют, мы видим, что обе асимптотические формы левых частей в (8.11) равны

$$\Phi^*(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2)\Phi(0, \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2, \sigma'_1, \sigma'_2)\mathrm{e}^{iE(t-\tau)}. \tag{8.12}$$

Но в силу спектральных представлений (8.11) эти асимптотические формы (8.12) должны были бы различаться на фактор $e^{E_0/\theta}$. Следовательно, $E_0 = 0$. Итак,

$$\Phi(t_1, x_1, t_2, x_2) = \Phi(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2), \tag{8.13}$$

и изучаемое асимптотическое выражение (8.7) для среднего (8.6) будет равно

$$\Phi^*(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2)\Phi(t_1' - t_2', \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2', \sigma_1', \sigma_2'). \tag{8.14}$$

Введем теперь квазисредние, положив по определению

$$\begin{aligned}\langle\Psi^+(t_1, x_1)\Psi^+(t_2, x_2)\rangle &= \Phi^*(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2),\\ \langle\Psi(t_2, x_2)\Psi(t_1, x_1)\rangle &= \Phi(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2).\end{aligned} \tag{8.15}$$

Мы используем здесь для квазисредних обычное обозначение $\langle\ldots\rangle$ и потому условимся для операторов, не сохраняющих N, иметь дело только с квазисредними.

Выразим эти квазисредние (8.15) через предел обычных средних от операторов, сохраняющих число частиц. Выберем систему неограниченно расширяющихся областей $\{\Omega\}$, охватывающих в пределе все пространство точек $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j'$, и построим функции $h_\Omega(\mathbf{r})$, равные 1, если $\mathbf{r}$ лежит внутри Ω, и 0, если $\mathbf{r}$ находится вне Ω.

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Omega}\int\langle\Psi^+(t_1, x_1)\Psi^+(t_2, x_2)\Psi(\tau, x_2')\Psi(\tau, x_1')\rangle \times\\ \times h_\Omega\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'}{2}\right)\Phi(0, \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2', \sigma_1', \sigma_2')\,dx_1'\,dx_2' =\\ = \sum_{(\sigma_1', \sigma_2')}\frac{\sqrt{2\rho_0}\,\epsilon(\sigma_1')\,\Delta(\sigma_1 + \sigma_2)}{\Omega}\int\langle\Psi^+(t_1, x_1)\Psi^+(t_2, x_2)\Psi(\tau, x_2')\Psi(\tau, x_1')\rangle \times\\ \times h_\Omega\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'}{2}\right)\varphi(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2')\,d\mathbf{r}_1'\,d\mathbf{r}_2'\end{aligned} \tag{8.16}$$

и найдем его предел при $\Omega \to \infty$.

Ввиду наличия под знаком интеграла (8.16) множителя

$$\frac{1}{\Omega}h_\Omega\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'}{2}\right)\varphi(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2')$$

можно заметить, что вклад любой области точек $(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2')$, в которой $|\mathbf{r}_1'|$ или $|\mathbf{r}_2'|$ остаются ограниченными, исчезает при $\Omega \to \infty$. Поэтому для нахождения искомого предела можно заменить под знаком интеграла среднее

$$\langle\Psi^+(t_1, x_1)\Psi^+(t_2, x_2)\Psi(\tau, x_2')\Psi(\tau, x_1')\rangle$$

на его асимптотическую форму (8.14):

$$\begin{aligned}\Phi^*(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2)\Phi(0, \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2', \sigma_1', \sigma_2') =\\ = \Phi^*(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \sigma_1, \sigma_2)\epsilon(\sigma_1')\,\Delta(\sigma_1' + \sigma_2')\varphi(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2')\sqrt{2\rho_0}\,.\end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\lim_{\Omega\to\infty}\Sigma\sqrt{2\rho_0}\,\epsilon(\sigma_1')\,\Delta(\sigma_1'+\sigma_2')\frac{1}{\Omega}\int\langle\Psi^+(t_1,x_1)\Psi^+(t_2,x_2)\Psi(\tau,x_2')\Psi(\tau,x_1')\rangle\times$$
$$\times h_\Omega\left(\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'}{2}\right)\varphi(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2')\,d\mathbf{r}_1'\,d\mathbf{r}_2'=\Phi^*(t_1-t_2,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\sigma_1,\sigma_2)\times$$
$$\times\sum_{(\sigma_1',\sigma_2')}\Delta(\sigma_1'+\sigma_2')2\rho_0\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int h_\Omega\left(\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'}{2}\right)\times$$
$$\times\varphi^2(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2')\,d\mathbf{r}_1'\,d\mathbf{r}_2'=\Phi^*(t_1-t_2,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\sigma_1,\sigma_2)4\rho_0\int\varphi^2(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'. \quad (8.17)$$

С другой стороны, с учетом (8.1) и (7.7) условие нормировки

$$2\int\varphi^2(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=1. \quad (8.18)$$

Отсюда на основании (8.15), (8.17) найдем

$$\langle\Psi^+(t_1,x_1)\Psi^+(t_2,x_2)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\rho_0}}\lim_{\Omega\to\infty}\sum_{(\sigma_1',\sigma_2')}\epsilon(\sigma_1')\,\Delta(\sigma_1'+\sigma_2')\times$$
$$\times\frac{1}{\Omega}\int\langle\Psi^+(t_1,x_1)\Psi^+(t_2,x_2)\Psi(\tau,x_2')\Psi(\tau,x_1')\rangle\times$$
$$\times h_\Omega\left(\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'}{2}\right)\varphi(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2')\,d\mathbf{r}_1'\,d\mathbf{r}_2' \quad (8.19)$$

и совершенно аналогично

$$\langle\Psi(t_2,x_2)\Psi(t_1,x_1)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\rho_0}}\lim_{\Omega\to\infty}\sum_{(\sigma_1',\sigma_2')}\epsilon(\sigma_1')\,\Delta(\sigma_1'+\sigma_2')\times$$
$$\times\frac{1}{\Omega}\int\langle\Psi^+(\tau,x_1')\Psi^+(\tau,x_2')\Psi(t_2,x_2)\Psi(t_1,x_1)\rangle\times$$
$$\times h_\Omega\left(\frac{\mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{2}\right)\varphi(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2')\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2. \quad (8.20)$$

Заметим, кстати, что ввиду сохранения спина средние, стоящие под знаком интеграла в (8.19), (8.20), равны нулю, если

$$\sigma_1+\sigma_2\neq\sigma_1'+\sigma_2',$$

суммирование же в этих формулах идет по спинам σ_1', σ_2', для которых

$$\sigma_1'+\sigma_2'=0.$$

Получим, следовательно

$$\langle\Psi(t_2,x_2)\Psi(t_1,x_1)\rangle=\langle\Psi^+(t_1,x_1)\Psi^+(t_2,x_2)\rangle,\quad\text{если}\quad\sigma_1+\sigma_2\neq0. \quad (8.21)$$

Мы определим сейчас квазисредние простейшего типа как пределы обычных средних от операторов, сохраняющих N.

Воспользовавшись логикой рассуждений § 1 и 2, мы могли бы обобщить это определение и распространить на квазисредние все необходимые свойства обычных средних.

Заметим также, что, как и для бозе-систем, в рассматриваемом случае возможен и другой, в сущности, эквивалентный способ введения квазисредних. Здесь мы имеем в виду способ, основанный на включении в исходный гамильтониан системы H_λ членов, соответствующих рождению и уничтожению «пар в S-состоянии».

Возьмем, например,

$$H_{\lambda,\nu} = H_\lambda - \nu\mathfrak{A}, \quad \nu > 0,$$
$$\mathfrak{A} = \sum_{(f)} u(f)\{a_f^+ a_{-f}^+ + a_{-f}a_f\}, \tag{8.22}$$
$$f = (\mathbf{k}, \sigma), \quad -f = (-\mathbf{k}, -\sigma), \quad u(f) = u(k)\epsilon(\sigma),$$

где $u(k)$ — вещественная радиально-симметричная функция импульса $\mathbf{k}$, существенно отличная от нуля; предполагается лишь, что $u(k)$ достаточно быстро стремится к нулю, когда $k \to \infty$. Как видно, члены

$$-\nu\mathfrak{A}$$

снимают вырождение средних, обусловленное законом сохранения числа частиц.

Определим квазисреднее динамической величины A для гамильтониана H_λ как предел

$$\lim_{\nu\to 0}\langle A\rangle_{H_{\lambda,\nu}}$$

соответствующих обычных средних, взятых для гамильтониана $H_{\lambda,\nu}$. Заметим также, что в результате рассмотрения гамильтониана $H_{\lambda,\nu}$ можно получить некий критерий для отбора решений [10]. Воспользуемся формулой

$$\langle A\rangle_{H_{\lambda,\nu}+d\nu} - \langle A\rangle_{H_{\lambda,\nu}} = 2\pi\left\langle\!\!\left\langle A, \frac{\partial H_{\lambda,\nu}}{\partial\nu}\right\rangle\!\!\right\rangle_{E=0} d\nu$$

и применим ее к оператору

$$A = \frac{\mathfrak{A}}{V}.$$

Получим

$$\frac{dS(\nu)}{d\nu} = -\frac{1}{V}\langle\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\rangle\rangle_{E=0},$$

где

$$S(\nu) = \frac{1}{V}\sum_{(f)} u(f)\langle a_f^+ a_{-f}^+ + a_{-f}a_f\rangle_{H_{\lambda,\nu}}. \tag{8.23}$$

Но $\mathfrak{A}$ является самосопряженным оператором. Поэтому всегда (см. (3.35), (3.50))

$$\langle\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\rangle\rangle_{E=0} < 0,$$

и мы имеем неравенство

$$\frac{dS}{d\nu} \geqslant 0. \tag{8.24}$$

Это неравенство и может быть использовано для отбрасывания «ложных решений». Напомним, что уравнения, полученные в теории сверхпроводимости, кроме решения, соответствующего сверхпроводящему состоянию, всегда имеют и так называемое «тривиальное решение», для которого связанных пар нет.

Если подойти к этому вопросу с точки зрения гамильтониана $H_{\lambda,\nu}$, то при достаточно малых ν мы опять будем иметь два решения — одно близкое к тривиальному, а другое близкое к «сверхпроводящему». Как было показано в работе [10], *условие* (8.24) *не удовлетворяется для решения, близкого к тривиальному*, ввиду чего это последнее является «ложным решением» и должно быть отброшено.

Скажем в заключение несколько слов по поводу физического смысла квазисреднего

$$\langle a_{-f} a_f \rangle.$$

Имеем

$$\Phi_{-\sigma,\sigma}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle \Psi(\mathbf{r}_2, -\sigma)\Psi(\mathbf{r}_1, \sigma)\rangle = \frac{1}{V}\sum_{(k)} \langle a_{-k,-\sigma} a_{k,\sigma}\rangle e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}$$

или, переходя от суммы к интегралу,

$$\Phi_{-\sigma,\sigma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle a_{-k,-\sigma} a_{k,\sigma}\rangle e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\, d\mathbf{k}. \tag{8.25}$$

С другой стороны, формулы (8.10), (8.15) показывают, что

$$\Phi_{-\sigma,\sigma}(\mathbf{r}) = \sqrt{2\rho_0}\, \epsilon(\sigma)\varphi(r). \tag{8.26}$$

Поэтому

$$\Phi_{-\sigma,\sigma}(\mathbf{r})$$

будет волновой функцией для квазимолекул, находящихся в конденсате, а квазисреднее $\langle a_{-k,-\sigma} a_{k,\sigma}\rangle$ — ее импульсным представлением.

С учетом (8.18) нормировочный интеграл для $\Phi_{-\sigma,\sigma}$

$$\int |\Phi_{-\sigma,\sigma}(\mathbf{r})|^2\, d\mathbf{r} - 2\rho_0 \int \varphi^2(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \rho_0 \tag{8.27}$$

будет равен плотности числа молекул, находящихся в конденсате.

§ 9. Теорема о $1/q^2$

В этом параграфе покажем, что если гамильтониан рассматриваемой динамической системы имеет вид

$$H_\lambda = \frac{1}{2m}\int \Psi^+(x) p^2 \Psi(x)\, dx + U(\Psi^+, \Psi), \qquad \mathbf{p} = -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tag{9.1}$$

и форма U является градиентно-инвариантной, то можно доказать теорему, аналогичную теореме о $1/q^2$, которую мы ранее установили для бозе-систем.

Повторим для этого дословно рассуждения § 6. Рассмотрим бесконечно малую вариацию гамильтониана

$$\delta H = \frac{1}{2m}\int \Psi^+(x)\left(\mathbf{p}\frac{\partial \delta x(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \delta x(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{p}\right)\Psi(x)\,dx,$$

где

$$\delta x(\mathbf{r}) = (e^{i\mathbf{qr}} + e^{-i\mathbf{qr}})\,\delta\xi.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \delta H &= \frac{q^2}{2m}\,S_q\,\delta\xi, \\ S_q &= -i\sum_{(k,\sigma)}\frac{(2\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{q}}{q^2}\,(a^+_{k+q,\sigma}a_{k,\sigma} - a^+_{k,\sigma}a_{k+q,\sigma}). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Возьмем какой-либо оператор $\mathfrak{A}$ и заметим, что среднее значение

$$\langle\mathfrak{A}\rangle_{H_\lambda+\delta H}$$

можно подсчитать двумя способами. Прямое вычисление дает

$$\langle\mathfrak{A}\rangle_{H_\lambda+\delta H} = \langle\mathfrak{A}'\rangle_{H_\lambda}, \tag{9.3}$$

где $\mathfrak{A}'$ получается из $\mathfrak{A}$ с помощью бесконечно малого градиентного преобразования

$$\Psi^+ \to \Psi^+ - i\Psi^+\,\delta\chi, \quad \Psi \to \Psi + i\Psi\,\delta\chi, \tag{9.4}$$

или в импульсном представлении

$$\begin{aligned} a_{k,\sigma} &\to a_{k,\sigma} + i(a_{k+q,\sigma} + a_{k-q,\sigma})\,\delta\xi, \\ a^+_{k,\sigma} &\to a^+_{k,\sigma} - i(a^+_{k+q,\sigma} + a^+_{k-q,\sigma})\,\delta\xi. \end{aligned}$$

То же среднее можно по общим правилам выразить через функцию Грина

$$\langle\mathfrak{A}\rangle_{H_\lambda+\delta H} - \langle\mathfrak{A}\rangle_{H_\lambda} = 2\pi\langle\langle\mathfrak{A}, \delta H\rangle\rangle_{E=0}. \tag{9.5}$$

Используем оба этих способа для вычисления среднего значения для оператора

$$\mathfrak{A} = S_q$$

и приравняем их результаты. Найдем

$$-\langle\langle S_q, S_q\rangle\rangle_{E=0} = \frac{4N_m}{\pi q^2}. \tag{9.6}$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\beta_q(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{V}}\int \Psi(x_2)\Psi(x_1)e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2}\vartheta(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2, \tag{9.7}$$

в котором

$$\vartheta(x_1,x_2) = \epsilon(\sigma_1)\,\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\vartheta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2).$$

Здесь $\vartheta(\mathbf{r})$ — произвольная вещественная функция, достаточно быстро стремящаяся к нулю при $r\to\infty$. Мы будем выбирать ее так, чтобы

$$\gamma = \int \vartheta(\mathbf{r})\varphi(r)\,d\mathbf{r} \neq 0. \tag{9.8}$$

Можем положить, например,

$$\vartheta(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}).$$

Оператор $\beta_q(\vartheta)$, очевидно, можем интерпретировать как оператор уничтожения пар с импульсом q; соответственно $\beta_q^+(\vartheta)$ — как оператор рождения таких пар. Построим среднее

$$\langle \beta_q(\vartheta) \rangle_{H_\lambda + \delta H}$$

с помощью прямого вычисления, основанного на формулах (9.3), (9.4). Получим

$$\langle \beta_q(\vartheta) \rangle_{H_\lambda + \delta H} = 4i\,\delta\xi \sqrt{2\rho_0 V} \int \vartheta(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) \cos\frac{\mathbf{qr}}{2}\, d\mathbf{r}.$$

С другой стороны, использовав формулы (9.2), (9.5), найдем

$$\langle \beta_q(\vartheta) \rangle_{H_\lambda + \delta H} = \frac{\pi q^2}{m}\,\delta\xi \langle\langle \beta_q(\vartheta), S_q \rangle\rangle_{E=0}.$$

Имеем, следовательно,

$$\langle\langle \beta_q(\vartheta), S_q \rangle\rangle_{E=0} = \frac{4im}{\pi q^2} \sqrt{2\rho_0 V} \int \vartheta(\mathbf{r})\varphi(r) \cos\frac{\mathbf{qr}}{2}\, d\mathbf{r}. \tag{9.9}$$

Применим теперь неравенство (3.51):

$$|\langle\langle \beta_q(\vartheta), S_q \rangle\rangle_{E=0}|^2 \leqslant \langle\langle \beta_q(\vartheta), \beta_q^+(\vartheta) \rangle\rangle_{E=0} \langle\langle S_q^+, S_q \rangle\rangle_{E=0}.$$

Но мы видим, что из (9.2) следует

$$S_q^+ = S_q.$$

Поэтому на основании (9.6), (9.9) получим

$$\begin{gathered} |\langle\langle \beta_q(\vartheta), \beta_q^+(\vartheta) \rangle\rangle_{E=0}| \geqslant \frac{\alpha^2(q)}{q^2}, \\ \alpha^2(q) = \frac{8m}{\pi}\,\frac{\rho_0}{\rho} \left| \int \vartheta(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) \cos\frac{\mathbf{qr}}{2}\, d\mathbf{r} \right|^2, \quad \rho = \frac{N}{V}, \end{gathered} \tag{9.10}$$

причем благодаря (9.8)

$$\alpha^2(0) = \frac{8m}{\pi}\,\gamma^2\frac{\rho_0}{\rho} > 0. \tag{9.11}$$

Таким образом, теорема о $1/q^2$ доказана. В рассматриваемом случае она, по-видимому, связана со свойствами коллективной ветви спектра. Воспользуемся здесь этой теоремой для получения оценки числа пар с импульсом $q \neq 0$. Примем во внимание спектральные формулы

$$\begin{gathered} -\langle\langle \beta_q(\vartheta), \beta_q^+(\vartheta) \rangle\rangle_{E=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\omega/\theta} - 1}{\omega}\, J(\omega)\, d\omega, \quad J(\omega) \geqslant 0, \\ \langle \beta_q(\vartheta)\beta_q^+(\vartheta) + \beta_q^+(\vartheta)\beta_q(\vartheta) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + e^{\omega/\theta}) J(\omega)\, d\omega. \end{gathered} \tag{9.12}$$

Учитывая, что

$$\frac{e^{\omega/\theta}-1}{\omega}=\frac{\operatorname{th}\frac{\omega}{2\theta}}{\omega}\left(1+e^{\omega/\theta}\right)<\frac{1+e^{\omega/\theta}}{2\theta},$$

можем написать

$$|\langle\langle\beta_q,\beta_q^+\rangle\rangle|\leqslant\frac{1}{4\pi\theta}\langle\beta_q\beta_q^+ +\beta_q^+\beta_q\rangle,$$

и потому на основании (9.10) получим

$$\langle\beta_q^+\beta_q+\beta_q\beta_q^+\rangle\geqslant\frac{4\pi\theta\alpha^2(q)}{q^2}. \tag{9.13}$$

Но из соотношения (9.7) убеждаемся, что

$$|\langle\beta_q\beta_q^+-\beta_q^+\beta_q|\leqslant C(q), \tag{9.14}$$

где *величина $C(q)$ остается конечной при $q\to 0$.*

Имеем, следовательно,

$$\langle\beta_q^+\beta_q\rangle\geqslant\frac{2\pi\theta\alpha^2(q)}{q^2}-C(q). \tag{9.15}$$

Заметим теперь, что

$$\langle\beta_q^+\beta_q\rangle=\sum\epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma_1')\,\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\,\Delta(\sigma_1'+\sigma_2')\times$$
$$\times\frac{1}{V}\int\langle\Psi^+(x_1)\Psi^+(x_2)\Psi(x_2')\Psi(x_1')\rangle\exp i\mathbf{q}\left(\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'}{2}\right)d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{r}_1'\,d\mathbf{r}_2'.$$

Подставим сюда разложение (7.5). Найдем

$$\langle\beta_q^+\beta_q\rangle=2\sum_{(\omega)}N_{\omega,q}V\left|\sum_{\sigma_1,\sigma_2}\epsilon(\sigma_1)\,\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\int\Psi_{\omega,q}(\mathbf{r}_1,\sigma_1,\sigma_2)\vartheta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\right|^2. \tag{9.16}$$

Но функции $\Psi_{\omega,q}$, входящие в указанное разложение, обладают при данном q следующими свойствами ортонормированности:

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2}V\int\Psi_{\omega_1,q}^+(\mathbf{r},\sigma_1,\sigma_2)\Psi_{\omega_2,q}^+(\mathbf{r},\sigma_1,\sigma_2)\,d\mathbf{r}=\Delta(\omega_1-\omega_2). \tag{9.17}$$

Поэтому, применяя неравенство Бесселя, получим

$$\sum_{(\omega)}V\left|\sum_{\sigma_1,\sigma_2}\epsilon(\sigma_1)\,\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\int\Psi_{\omega,q}(\mathbf{r},\sigma_1,\sigma_2)\vartheta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\sigma_1,\sigma_2}\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\int\vartheta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=2\int\vartheta^2(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

Отсюда на основании (9.16) находим

$$\langle\beta_q^+\beta_q\rangle\leqslant 4\max_{(\omega)}N_{\omega,q}\int\vartheta^2(\mathbf{r})\,d\mathbf{r},$$

и потому благодаря (9.15)

$$\max_{(\omega)} N_{\omega,q} \geqslant \left\{ \frac{2\pi\theta\alpha^2(q) - q^2C(q)/2}{4\int \vartheta^2(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}} \right\} \frac{1}{q^2}. \tag{9.18}$$

Пусть $\theta > 0$ и пусть ξ^2 будет некоторой положительной величиной, удовлетворяющей неравенству

$$\xi^2 < \frac{2m\gamma^2\theta}{\int \vartheta^2(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}} \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\pi\theta\alpha^2(\theta)}{2\int \vartheta^2(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}}. \tag{9.19}$$

Тогда *для достаточно малых* q получим

$$\xi^2 < \left\{ \frac{2\pi\theta\alpha^2(q) - q^2C(q)/2}{4\int \vartheta^2(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}} \right\} \leqslant q^2 \max_{(\omega)} N_{\omega,q}.$$

Итак, для любого достаточно малого импульса $\mathbf{q}$ существует такое парное состояние $(\tilde{\omega}, \mathbf{q})$, что среднее число пар частиц, находящихся в этом состоянии[1],

$$n_q = N_{\tilde{\omega},\mathbf{q}},$$

будет удовлетворять неравенству

$$n_q \geqslant \frac{\xi^2}{q^2}. \tag{9.20}$$

Как видно, неравенство это аналогично неравенству (6.29), установленному для случая бозе-систем.

§ 10. Функции Грина и массовый оператор

В настоящем параграфе мы будем рассматривать функции Грина, построенные на квазисредних. Ограничимся функциями Грина простейшего типа — «с двумя концами». Ввиду того что каждый из этих концов может соответствовать как a_f, так и a_f^+, удобно представлять функцию Грина как матрицу типа[2]

$$G(E,f) = \begin{vmatrix} G_{11}(E,f) & G_{21}(E,f) \\ G_{12}(E,f) & G_{22}(E,f) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle\langle a_f | a_f^+ \rangle\rangle_E & \langle\langle a_{-f}^+ | a_f^+ \rangle\rangle_E \\ \langle\langle a_f | a_{-f} \rangle\rangle_E & \langle\langle a_{-f}^+ a_{-f} \rangle\rangle_E \end{vmatrix}, \tag{10.1}$$

[1] Мы не можем здесь ответить на вопрос о том, является ли это состояние $(\tilde{\omega}, \mathbf{q})$ связанным или диссоциированным.

[2] Здесь учитывается сохранение импульса и спина. В более общей ситуации, например в пространственно неоднородном случае, функция Грина $G(E)$ уже не будет диагональной по f и ее надо тогда рассматривать как матрицу и по отношению к индексам f, f'. В теории сверхпроводимости с таким общим случаем приходится иметь дело при изучении влияния магнитного поля, когда в гамильтониан включаются пространственно неоднородные члены с вектор-потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

где

$$f=(\mathbf{k},\sigma),\quad -f=(-\mathbf{k},-\sigma).$$

Напомним определения *фермионных* функций Грина.

Имеем

$$\begin{aligned}
\langle\langle A(t),B(\tau)\rangle\rangle^{\mathrm{ret}} &= -i\theta(t-\tau)\langle A(t)B(\tau)+B(\tau)A(t)\rangle,\\
\langle\langle A(t),B(\tau)\rangle\rangle^{\mathrm{adv}} &= i\theta(\tau-t)\langle A(t)B(\tau)+B(\tau)A(t)\rangle,\\
\langle\langle A(t),B(\tau)\rangle\rangle^{\mathrm{c}} &= -i\langle T(A(t)B(\tau))\rangle =\\
&= -i\{\theta(t-\tau)\langle A(t)B(\tau)\rangle-\theta(\tau-t)\langle B(\tau)A(t)\rangle\}.
\end{aligned}\tag{10.2}$$

Их энергетическое представление определяется интегралами Фурье

$$\langle\langle A(t),B(\tau)\rangle\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\langle\langle A|B\rangle\rangle_E e^{-iE(t-\tau)}\,dE.\tag{10.3}$$

Основываясь на спектральных формулах

$$\begin{aligned}
\langle B(\tau)A(t)\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)e^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega,\\
\langle A(t)B(\tau)\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)e^{\omega/\theta}e^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega,
\end{aligned}\tag{10.4}$$

получаем

$$\begin{aligned}
\langle\langle A|B\rangle\rangle_E^{\mathrm{ret}} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\frac{(e^{\omega/\theta}+1)\,d\omega}{E-\omega+i\varepsilon},\\
\langle\langle A|B\rangle\rangle_E^{\mathrm{adv}} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\frac{(e^{\omega/\theta}+1)\,d\omega}{E-\omega-i\varepsilon},\\
\langle\langle A|B\rangle\rangle_E^{\mathrm{c}} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\left\{\frac{e^{\omega/\theta}}{E-\omega+i\varepsilon}+\frac{1}{E-\omega-i\varepsilon}\right\}d\omega.
\end{aligned}\tag{10.5}$$

Как видно, запаздывающая и опережающая функции Грина всегда являются граничными значениями функции комплексного переменного

$$\langle\langle A|B\rangle\rangle_E=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\frac{e^{\omega/\theta}+1}{E-\omega}\,d\omega.\tag{10.6}$$

Однако причинная функция Грина обладает этим свойством только в случае нулевой температуры. *Условимся теперь в матрице* (10.1) *принимать в качестве ее элементов*

$$\langle\langle A|B\rangle\rangle_E$$

или функции комплексного переменного (10.6), *или для вещественных* E *причинные функции.*

Заметим, что из соотношений (10.2), (10.3) следует, что

$$\langle\langle A|B\rangle\rangle_{-E} = -\langle\langle B|A\rangle\rangle_E.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} G_{22}(E, f) &= -G_{11}(-E, -f), \\ G_{\alpha\beta}(E, f) &= -G_{\alpha\beta}(-E, -f), \quad \text{если} \quad \alpha = \beta. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Учтем теперь свойства симметрии. Предположим, разумеется, что гамильтониан рассматриваемой динамической системы инвариантен по отношению к отражениям:

$$\mathbf{k} \to -\mathbf{k} \tag{10.8}$$

и

$$\sigma \to -\sigma. \tag{10.9}$$

Предположим также, что все коэффициенты при операторах a^+, a в гамильтониане H_λ вещественны, так что уравнения движения инвариантны по отношению к инверсии:

$$t \to -t, \quad i \to -i.$$

Заметим, что таким же свойством будет обладать тогда и вспомогательный гамильтониан $H_{\lambda,\nu}$, служащий для введения квазисредних.

Рассуждая, как и в § 5, убеждаемся, что спектральная интенсивность $J_f(\omega)$ в формуле

$$\langle a_f(t)a_{-f}(\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_f(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega$$

является вещественной.

Поэтому

$$\langle a^+_{-f}(t)a^+_f(\tau)\rangle = \langle a_f(t)a_{-f}(\tau)\rangle.$$

Отсюда следует

$$\langle\langle a^+_{-f}|a^+_f\rangle\rangle_E = \langle\langle a_f(t)|a_{-f}(\tau)\rangle\rangle_E. \tag{10.10}$$

Учтем теперь симметрию по отношению к комбинированному отражению:

$$f \to -f.$$

Очевидно, что при таком отражении

$$\langle a_{-f}(t)a_f(\tau)\rangle \quad \text{и} \quad \langle a_f(t)a_{-f}(\tau)\rangle$$

могут отличаться друг от друга лишь на фазовый множитель. Но так как соответствующие значения спектральной интенсивности

$$J_{-f}(\omega), \quad J_f(\omega)$$

должны быть вещественны, этот фазовый множитель будет равен ± 1. Однако мы знаем, что

$$\langle a_f(t)a_{-f}(t)\rangle = -\langle a_{-f}(t)a_f(t)\rangle.$$

Следовательно,

$$\langle a_f(t)a_{-f}(\tau)\rangle = -\langle a_{-f}(t)a_f(\tau)\rangle.$$

Отсюда видим, что

$$\langle\langle a_f|a_{-f}\rangle\rangle_E = -\langle\langle a_{-f}|a_f\rangle\rangle_E. \tag{10.11}$$

Замечая теперь, что

$$\langle a_f(t)a_f^+(\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} I_f(\nu)\mathrm{e}^{-i\nu(t-\tau)}\,d\nu,$$

$$\langle a_{-f}(t)a_{-f}^+(\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{-f}(\nu)\mathrm{e}^{-i\nu(t-\tau)}\,d\nu$$

и что значения спектральной интенсивности $I_f(\nu)$, $I_{-f}(\nu)$ *положительны*, получим

$$\langle a_f(t)a_f^+(\tau)\rangle = \langle a_{-f}(t)a_{-f}^+(\tau)\rangle,$$

и потому

$$\langle\langle a_f|a_f^+\rangle\rangle_E = -\langle\langle a_{-f}|a_{-f}^+\rangle\rangle_E. \tag{10.12}$$

Соберем теперь информацию, содержащуюся в соотношениях (10.7), (10.10)–(10.12). Убедимся тогда в справедливости следующих свойств симметрии у элементов функции Грина:

$$\begin{gathered} G_{2,2}(E,f) = -G_{1,1}(-E,f), \quad G_{\alpha,\alpha}(E,f) = G_{\alpha,\alpha}(E,-f), \\ G_{2,1}(E,f) = G_{1,2}(E,f), \\ G_{\alpha,\beta}(E,f) = G_{\alpha,\beta}(-E,f), \quad G_{\alpha,\beta}(E,-f) = -G_{\alpha,\beta}(E,-f), \quad \text{если} \quad \alpha \neq \beta. \end{gathered} \tag{10.13}$$

Введем теперь массовый оператор

$$\Sigma(E,f) = \frac{1}{2\pi}\,G^{-1}(E,f) \tag{10.14}$$

и заметим, что его элементы $\Sigma_{\alpha\beta}(E,f)$ должны обладать теми же свойствами симметрии (10.13). Из (10.14) имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}G_{11} + \Sigma_{12}G_{21} &= \frac{1}{2\pi}, \\ \Sigma_{21}G_{11} + \Sigma_{22}G_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Но

$$\Sigma_{22}(E,f) = -\Sigma_{11}(-E,f), \quad \Sigma_{21}(E,f) = \Sigma_{12}(E,f),$$

и потому

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(E,f)\langle\langle a_f|a_f^+\rangle\rangle_E + \Sigma_{12}(E,f)\langle\langle a_{-f}^+|a_f^+\rangle\rangle &= \frac{1}{2\pi}, \\ \Sigma_{12}(E,f)\langle\langle a_f|a_f^+\rangle\rangle_E - \Sigma_{11}(-E,f)\langle\langle a_{-f}^+|a_f^+\rangle\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned} &\Sigma_{11}(E,f) = \Sigma_{11}(E,-f), \quad \Sigma_{12}(E,f) = \Sigma_{12}(-E,f), \\ &\Sigma_{12}(E,-f) = -\Sigma_{12}(E,f). \end{aligned} \tag{10.16}$$

Учтем теперь инвариантность по отношению к отражению спина (10.9). Повторив ранее изложенные рассуждения, убедимся, что

$$\begin{aligned}\Sigma_{11}(E,k,\sigma)&=\Sigma_{11}(E,k,-\sigma),\\ \Sigma_{12}(E,k,\sigma)&=-\Sigma_{12}(E,k,-\sigma),\end{aligned}\tag{10.17}$$

и потому благодаря (10.16) получим

$$\begin{aligned}\Sigma_{11}(E,-k,\sigma)&=\Sigma_{11}(E,k,\sigma),\\ \Sigma_{12}(E,-k,\sigma)&=\Sigma_{12}(E,k,\sigma).\end{aligned}\tag{10.18}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\Sigma_{11}(E,k,+)&=\Sigma_{11}(E,k),\\ \Sigma_{12}(E,k,+)&=\Sigma_{12}(E,k).\end{aligned}\tag{10.19}$$

Тогда соотношения (10.15) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\Sigma_{11}(E,k)\langle\langle a_{k,+}|a^+_{k,+}\rangle\rangle+\Sigma_{12}(E,k)\langle\langle a^+_{-k,-}|a^+_{k,+}\rangle\rangle=\frac{1}{2\pi},\\ &\Sigma_{12}(E,k)\langle\langle a_{k,+}|a^+_{k,+}\rangle\rangle-\Sigma_{11}(-E,k)\langle\langle a^+_{-k,-}|a^+_{k,+}\rangle\rangle=0.\end{aligned}\tag{10.20}$$

Входящие сюда функции Σ_{11}, Σ_{12} обладают свойствами симметрии вида

$$\begin{aligned}\Sigma_{11}(E,-k)&=\Sigma_{11}(E,k),\\ \Sigma_{12}(E,-k)&=\Sigma_{12}(E,k)=\Sigma_{12}(-E,k).\end{aligned}\tag{10.21}$$

Из соотношений (10.20) получим также

$$\begin{aligned}\langle\langle a_{k,+}|a^+_{k,+}\rangle\rangle_E&=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\Sigma_{11}(-E,k)}{\Sigma_{11}(E,k)\Sigma_{11}(-E,k)+\Sigma^2_{12}(E,k)},\\ \langle\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle\rangle&=\langle\langle a^+_{-k,-}|a^+_{k,+}\rangle\rangle=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\Sigma_{12}(E,k)}{\Sigma_{11}(E,k)\Sigma_{11}(-E,k)+\Sigma^2_{12}(E,k)}.\end{aligned}\tag{10.22}$$

§ 11. Приближения для теории сверхпроводимости

Рассмотрим прежде всего «нормальный случай», когда

$$\Sigma_{12}\equiv 0.\tag{11.1}$$

Обозначим через $T_l(k)$ энергию элементарного фермионного возбуждения, нормированную на «поверхность Ферми»:

$$T_l(k)=0,\quad k\in F.$$

Тогда для $E\sim T_l(k)$ можем положить

$$\Sigma_{11}(E,k)\simeq\alpha(k)(E-T_l(k)).\tag{11.2}$$

В силу (10.21) здесь

$$\alpha(-k)=\alpha(k),\quad T_l(-k)=T_l(k).\tag{11.3}$$

Пренебрегая затуханием для импульсов, лежащих вблизи поверхности Ферми, мы должны считать $\Sigma_{11}(E,k)$ вещественной в этой области:

$$E\sim 0,\quad T_l(k)\sim 0.$$

Предположим, что и в случае сверхпроводимости массовый оператор $\Sigma_{11}(E,k)$ сохраняет форму (11.3) в рассматриваемой области. Мы считаем, таким образом, что включение слабых взаимодействий, обусловливающих сверхпроводимость, несколько изменяет лишь величины $\alpha(k)$, $T_l(k)$.

В таком случае (10.22) запишем в виде

$$\langle\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle\rangle = \frac{1}{2\pi\alpha(k)} \cdot \frac{\frac{\Sigma_{12}(E,k)}{\alpha(k)}}{T_l^2(k) + \frac{\Sigma_{12}^2(E,k)}{\alpha^2(k)} - E^2}. \tag{11.4}$$

Сделаем, наконец, допущение о том, что $\Sigma_{12}(E,k)/\alpha(k)$ мало и мало меняется в том узком слое около поверхности Ферми, где

$$T_l^2(k) \sim \frac{\Sigma_{12}^2(E,k)}{\alpha^2(k)} \sim E^2, \tag{11.5}$$

и что ее мнимой компонентой также можно пренебречь. В этом случае формулу (11.4) можно упростить, положив

$$\langle\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle\rangle = \frac{1}{2\pi\alpha(k)} \cdot \frac{\frac{\Sigma_{12}(E,k)}{\alpha(k)}}{\Omega^2(k) - E^2}, \tag{11.6}$$

где

$$\Omega(k) = +\sqrt{T_l^2(k) + c^2(k)}, \tag{11.7}$$

$$c(k) = \frac{\operatorname{Re}\Sigma_{12}(0,k)}{\alpha(k)}. \tag{11.8}$$

Так как величина (11.6) будет малой везде, кроме области (11.5), формулу (11.6) можем еще дополнительно упростить, положив

$$\langle\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle\rangle_E = \frac{1}{2\pi\alpha(k)} \cdot \frac{c(k)}{\Omega^2(k) - E^2}. \tag{11.9}$$

По поводу величины $\alpha(k)$ заметим, что в динамической модели, в которой все взаимодействие считается малым, $\alpha(k)$ должно быть ~ 1. Нетрудно видеть, что во всяком случае

$$\alpha(k) > 0.$$

Чтобы это показать, заметим, что в области (11.5)

$$\langle\langle a_{k,+}|a_{k,+}^+\rangle\rangle_E = -\frac{1}{2\pi\alpha(k)} \cdot \frac{T_l(k) + E}{\Omega^2(k) - E^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha(k)} \left\{ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{T_l(k)}{\Omega(k)}\right) \frac{1}{E - \Omega(k)} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{T_l(k)}{\Omega(k)}\right) \frac{1}{E + \Omega(k)} \right\},$$

и потому

$$\langle\langle a_{k,+}|a_{k,+}^+\rangle\rangle_{E-i\varepsilon} - \langle\langle a_{k,+}|a_{k,+}^+\rangle\rangle_{E+i\varepsilon} =$$

$$= \frac{i}{\alpha(k)} \left\{ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{T_l(k)}{\Omega(k)}\right) \delta(E - \Omega(k)) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{T_l(k)}{\Omega(k)}\right) \delta(E + \Omega(k)) \right\}. \tag{11.10}$$

Но, согласно основной спектральной формуле,

$$\langle\langle a_{k,+}|a_{k,+}^{+}\rangle\rangle_E = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} J(\omega)\frac{e^{\omega/\theta}+1}{E-\omega}\,d\omega,$$

где $J(\omega)$ — спектральная интенсивность в выражении

$$\langle a_{k,+}^{+}(\tau)a_{k,+}(t)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J(\omega)e^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega,$$

и потому

$$J(\omega) > 0,$$

ввиду чего

$$\frac{1}{i}\left\{\langle\langle a_{k,+}|a_{k,+}^{+}\rangle\rangle_{E-i\varepsilon} - \langle\langle a_{k,+}|a_{k,+}^{+}\rangle\rangle_{E+i\varepsilon}\right\} > 0.$$

Отсюда в силу (11.10) и следует, что

$$\alpha(k) > 0, \tag{11.11}$$

во всяком случае, вблизи поверхности Ферми, где мы можем пользоваться представлением (11.3).

Можно показать, что в принятом приближении, пренебрегая размазанностью спектральной интенсивности $J(\nu)$, мы должны принять, что $\alpha(k) \simeq 1$.

Действительно, из (11.10) следует, что

$$J(\nu) = \frac{1}{\alpha(k)}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{T_l(k)}{\Omega(k)}\right)\frac{\delta(\nu-\Omega(k))}{e^{\Omega(k)/\theta}+1} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{T_l(k)}{\Omega(k)}\right)\frac{\delta(\nu+\Omega(k))}{e^{-\Omega(k)/\theta}+1}\right\}. \tag{11.12}$$

Но

$$\begin{aligned}\langle a_{k,+}(t)a_{k,+}^{+}(t)\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\omega/\theta}J(\omega)\,\delta\omega,\\ \langle a_{k,+}^{+}(t)a_{k,+}(t)\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J(\omega)\,d\omega,\end{aligned} \tag{11.13}$$

и потому

$$1 = \langle a_{k,+}a_{k,+}^{+}\rangle + \langle a_{k,+}^{+}a_{k,+}\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J(\omega)(1+e^{\omega/\theta})\,d\omega.$$

Подставляя в это тождество δ-образную интенсивность, найдем

$$1 = \frac{1}{\alpha(k)}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{T_l}{\Omega}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{T_l}{\Omega}\right)\right\} = \frac{1}{\alpha(k)},$$

т. е.

$$\alpha(k) = 1$$

(в окрестности поверхности Ферми, ибо далеко от нее затухание, вообще говоря, может быть весьма существенным).

Возвратимся теперь к формуле (11.9). Имеем

$$\langle\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle\rangle_E = \frac{c(k)}{\alpha(k)2\pi 2\Omega(k)}\left\{\frac{1}{E-\Omega(k)} - \frac{1}{E+\Omega(k)}\right\}. \tag{11.14}$$

Откуда по спектральным формулам получим

$$\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle = -\frac{c(k)}{2\alpha(k)\Omega(k)}\left\{\frac{e^{\Omega(k)/\theta}}{e^{\Omega(k)/\theta}+1} - \frac{1}{e^{\Omega(k)/\theta}+1}\right\} =$$

$$= -\frac{c(k)}{2\alpha(k)\Omega(k)}\,\mathrm{th}\,\frac{\Omega(k)}{2\theta}. \tag{11.15}$$

В частности, для $\theta = 0$

$$\langle a_{k,+}a_{-k,-}\rangle = -\frac{c(k)}{2\Omega(k)\alpha(k)}. \tag{11.16}$$

Или, если положить здесь $\alpha = 1$,

$$\langle a_{k,+}a_{-k,-}\rangle = -\frac{c(k)}{2\Omega(k)}. \tag{11.17}$$

Тогда в r-представлении волновая функция квазимолекул, находящихся в конденсате, будет иметь вид

$$\Phi_+(r) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{c(k)}{2\Omega(k)}\,e^{i(k-r)}\,d\mathbf{k},$$

где

$$\int |\Phi_{+-}(r)|^2\,d\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \left|\frac{c(k)}{2\Omega(k)}\right|^2 e^{i(k-r)}\,d\mathbf{k}.$$

Ее нормировка

$$\int |\Phi_{+-}(r)|^2\,d\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \left|\frac{c(k)}{2\Omega(k)}\right|^2 d\mathbf{k} \tag{11.18}$$

представляет собой плотность числа квазимолекул. Для $\theta = 0$ это относительное число в принятом приближении будет иметь вид

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \left|\frac{c(k)}{2\Omega(k)}\,\mathrm{th}\,\frac{\Omega(k)}{2\theta}\right|^2 d\mathbf{k}.$$

Заметим еще, что в приближении $\alpha = 1$ из ранее приведенных формул (11.15), (11.12), (11.13) имеем

$$\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle = -\frac{c(k)}{2\Omega(k)}\,\mathrm{th}\,\frac{\Omega(k)}{2\theta}, \tag{11.19}$$

$$n_k = \langle a^+_{k,+}|a_{k,+}\rangle \equiv \langle a^+_{k,-}|a_{k,-}\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{T_l(k)}{\Omega(k)}\right)\frac{1}{e^{\Omega(k)/\theta}+1} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{T_l(k)}{\Omega(k)}\right)\frac{e^{\Omega(k)/\theta}}{e^{\Omega(k)/\theta}+1}. \tag{11.20}$$

Если ввести фермионы α посредством $(u-v)$-преобразования [11]:

$$a_{k,+} = u_k \alpha_{k,+} + v_k \alpha^+_{-k,-},$$
$$a_{k,-} = u_k \alpha_{k,-} - v_k \alpha^+_{k,+},$$

где

$$u^2 k = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{T_l(k)}{\Omega(k)}\right), \quad v_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{T_l(k)}{\Omega(k)}\right),$$
$$u_k v_k = \frac{c(k)}{2\Omega(k)},$$

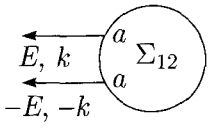
то полученные формулы дадут

$$\langle a^+_{k,+}|a_{k,+}\rangle \equiv \langle a^+_{k,-}|a_{k,-}\rangle = \frac{1}{e^{\Omega(k)/\theta}+1}, \qquad (11.21)$$
$$\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle = 0.$$

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о нахождении приближенных уравнений для определения функции $c(k)$. Мы сделали ряд допущений о характере поведения массовых операторов. Эти допущения можно оправдать *post factum* после исследования полученных уравнений и нахождения соответствующих условий применимости, обеспечивающих требуемое поведение массовых операторов.

Получение уравнений для определения функции $c(k)$

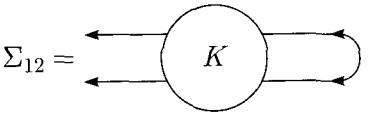
Мы воспользуемся техникой диаграмм Фейнмана и потому будем рассматривать случай $\theta = 0$. Чтобы получить искомое уравнение, мы должны выразить независимо $\Sigma_{12}(E,k)$ через функции Грина. Так как гамильтониан сохраняет число частиц, в диаграммах для $\Sigma_{12}(E,k)$ вида



обязательно должно содержаться по крайней мере одно «аномальное» спаривание:

$$\overbrace{a_{k,+}a}_{-k,-} = \langle T(a_{k,+}, a_{-k,-})\rangle.$$

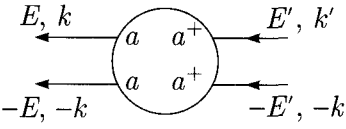
Учтем только одно такое спаривание. Графически



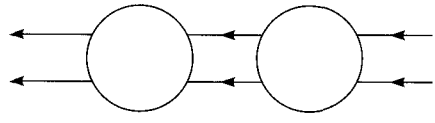
т. е.

$$\Sigma^c_{12}(E,k) = \sum_{(k')} 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} K(E,E';k,k')\langle T(a_{k',+}, a_{-k',-})\rangle_{E'}\, dE'. \qquad (11.22)$$

Ядро K в (11.22) представляет здесь сумму вкладов диаграмм следующего типа:



неприводимых в том смысле, что эти диаграммы нельзя разбить на две части вида



Заметим, что сформулированное сейчас приближение (11.22) представляет собой «четырехмерный» вариант приближения, использованного в § 5 коллективной монографии [12]. Учитывая определение причинной функции Грина

$$\langle\langle a_{k',+}|a_{-k',-}\rangle\rangle^{\mathrm{c}}_{E'} = -i\langle T(a_{k',+}, a_{-k',-})\rangle_{E'}, \tag{11.23}$$

представим (11.22) в следующей форме:

$$\Sigma^{\mathrm{c}}_{12}(E,k) = \sum_{(k')} 2\pi i \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(E,E';k,k')\langle\langle a_{k',+}|a_{-k',-}\rangle\rangle_{-E'}\, dE'. \tag{11.24}$$

Напомним спектральные формулы для $\theta = 0$:

$$\begin{aligned}
\langle\langle A|B\rangle\rangle^{\mathrm{ret}}_{E} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(\omega)\frac{d\omega}{E-\omega+i\varepsilon},\\
\langle\langle A|B\rangle\rangle^{\mathrm{adv}}_{E} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(\omega)\frac{d\omega}{E-\omega+i\varepsilon},\\
\langle\langle A|B\rangle\rangle^{\mathrm{c}}_{E} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(\omega)\frac{d\omega}{E-\omega+i\varepsilon(\omega)},
\end{aligned} \tag{11.25}$$

где I — спектральная интенсивность, входящая в представления

$$\begin{aligned}
\langle A(t)B(t')\rangle &= \int\limits_{0}^{\infty} I(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-ti)}\, d\omega,\\
\langle B(t')A(t)\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{0} I(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-t')}\, d\omega.
\end{aligned} \tag{11.26}$$

Подставляя (11.14) в (11.24), найдем

$$\Sigma^c 12(E,k)=\sum_{(k')} i\int_{-\infty}^{+\infty} K(E,E';k,k')\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{E'+\Omega(k')-i\varepsilon}-\frac{1}{E'-\Omega(k')+i\varepsilon}\right\}\frac{c(k')}{2\Omega(k')\alpha(k)}\,dE'. \quad (11.27)$$

Откуда в силу (11.8) получаем уравнение для определения $c(k)$ в форме

$$c(k)=\frac{1}{\alpha(k)}\sum_{(k')} i\int_{-\infty}^{+\infty} K(0,E';k,k')\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{E'+\Omega(k')-i\varepsilon}-\frac{1}{E'-\Omega(k')+i\varepsilon}\right\}\frac{c(k')}{2\Omega(k')\alpha(k')}\,dE'. \quad (11.28)$$

Заметим теперь, что, оставаясь в рамках принятого приближения, можно получить несколько иное уравнение вместо (11.28), а именно: вместо (11.8) мы могли бы с тем же успехом положить

$$c(k)=\frac{\operatorname{Re}\Sigma^c_{12}(\Omega(k),k)}{\alpha(k)}, \quad (11.29)$$

поскольку в пренебрежении «затуханием»

$$|\operatorname{Im}\Sigma^c_{12}(\Omega,k)|\ll|\operatorname{Re}\Sigma^c_{12}(\Omega,k)|. \quad (11.30)$$

Тогда из соотношений (11.27) и (11.29) получим вместо (11.28) уравнение вида

$$c(k)=\frac{1}{\alpha(k)}\operatorname{Re}\sum_{(k')} i\int_{-\infty}^{+\infty} K(\Omega(k),E';k,k')\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{E'+\Omega(k')-i\varepsilon}-\frac{1}{E'-\Omega(k')+i\varepsilon}\right\}\frac{c(k')}{2\Omega(k')\alpha(k')}\,dE'. \quad (11.31)$$

Можно получить еще одну возможную форму уравнения для функции $c(k)$. Выберем представление

$$i\int_{-\infty}^{+\infty} K(E,E';k,k')\left\{\frac{1}{E'+\Omega(k')-i\varepsilon}-\frac{1}{E'-\Omega(k')+i\varepsilon}\right\}dE'=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(Z\nu;k,k')}{E-\nu+i\varepsilon\epsilon(\nu)}\,d\nu. \quad (11.32)$$

Тогда из (11.27) найдем

$$\Sigma_{12}(E,k)=\sum_{(k')}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Z(\nu;k,k')}{E-\nu+i\varepsilon\epsilon(\nu)}\,d\nu\frac{c(k')}{2\Omega(k')\alpha(k')}. \quad (11.33)$$

Подставляя (11.33) в (11.6), получим

$$\langle\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle\rangle_E = \frac{1}{2\pi\alpha^2(k)}\sum_{(k')}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Z(\nu;k,k')}{E-\nu}\,d\nu\frac{1}{(\Omega^2(k)-E^2)}\,\frac{c(k')}{2\Omega(k')\alpha(k')} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha^2(k)}\sum_{(k')}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\nu\, Z(\nu;k,k')\left\{\left(\frac{1}{E-\nu}-\frac{1}{E-\Omega(k)}\right)\frac{1}{\Omega(k)-\nu}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{E-\nu}-\frac{1}{E+\Omega(k)}\right)\frac{1}{\Omega(k)+\nu}\right\}\frac{c(k')}{2\Omega(k')\alpha(k')}\,\frac{1}{2\Omega(k)}.$$

Откуда находим

$$\frac{\langle\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle\rangle_{E-i\varepsilon}-\langle\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle\rangle_{E+i\varepsilon}}{i} =$$

$$= \frac{2\pi}{2\pi\alpha^2(k)}\sum_{(k')}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\nu\, Z(\nu;k,k')\left[\{\delta(E-\nu)-\delta(E-\Omega(k))\}\frac{1}{\Omega(k)-\nu}+\right.$$

$$\left.+\{\delta(E-\nu)-\delta(E+\Omega(k))\}\frac{1}{\Omega(k)+\nu}\right]\frac{c(k')}{2\Omega(k')\alpha(k')}\,\frac{1}{2\Omega(k)},$$

с учетом чего

$$\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle = \frac{1}{\alpha^2(k)}\sum_{(k')}\int\limits_0^{\infty} dE\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\nu\, Z(\nu;k,k')\times$$

$$\times\left[\{\delta(E-\nu)-\delta(E-\Omega(k))\}\frac{1}{\Omega(k)-\nu}+\right.$$

$$\left.+\{\delta(E-\nu)-\delta(E+\Omega(k))\}\frac{1}{\Omega(k)+\nu}\right]\frac{c(k')}{2\Omega(k')\alpha(k')}\,\frac{1}{2\Omega(k)}.$$

Но

$$\int\limits_0^{\infty}\{\delta(E-\nu)-\delta(E-\Omega(k))\}\,dE = \begin{cases}-1, & \nu<0,\\ 0, & \nu>0;\end{cases}$$

$$\int\limits_0^{\infty}\{\delta(E-\nu)-\delta(E+\Omega(\nu))\}\,dE = \begin{cases}1, & \nu>0,\\ 0, & \nu<0,\end{cases}$$

и потому

$$\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle = \frac{1}{2\Omega(k)\alpha^2(k)}\sum_{(k')}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\nu\,\frac{Z(\nu;k,k')\epsilon(\nu)}{\Omega(k)+|\nu|}\,\frac{c(k')}{2\Omega(k')\alpha(k')}.$$

На основании формулы (11.16) получим окончательно

$$c(k) = -\frac{1}{\alpha(k)} \sum_{(k')} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{Z(\nu; k, k')\epsilon(\nu)}{\Omega(k) + |\nu|} \frac{c(k')}{2\Omega(k')\alpha(k')}. \tag{11.34}$$

Подчеркнем, что уравнения (11.28), (11.31), (11.34) совершенно равноценны с точностью до принятого приближения. Они должны давать одинаковое (с принятой точностью) решение. При наличии существенных расхождений между их решениями мы выходим из области применимости каждого из них. Заметим еще, что три приведенные формы, разумеется, далеко не исчерпывают всех возможностей. Можно было бы вообще не делать никаких аппроксимаций, кроме (11.22), и работать с учетом затухания, получив нелинейные интегральные уравнения для спектральной интенсивности.

Определение ядра K

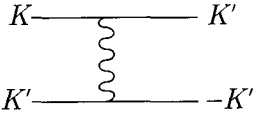
а) Возьмем гамильтониан с прямым взаимодействием:

$$\mathcal{H} = \sum_{(p,\sigma)} L(p) a^+_{p\sigma} a_{p\sigma} = \frac{1}{2V} \sum_{(k_1,k_2,k_1',k_2',\sigma_1,\sigma_2)} \delta(k_1 + k_2 - k_2' - k_1') \times$$
$$\times U(k_1, k_2; k_2', k_1') a^+_{k_1\sigma_1} a^+_{k_2\sigma_2} a_{k_2'\sigma_2} a_{k_1'\sigma_1} \tag{11.35}$$

обычного типа. Предполагается, что $L(p)$, $U(k_1, k_2; k_2', k_1')$ вещественны и симметричны по отношению к отражению импульса. Предполагаются также обычные условия симметрии:

$$U(k_1, k_2; k_2', k_1') = U(k_2, k_1; k_1', k_2') = U(k_1', k_2'; k_2, k_1).$$

Учтем в K лишь вклад первого порядка[1] по U:



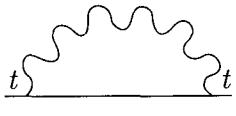
Так как «фактор распространения» в t-представлении имеет вид

$$\frac{1}{V} \delta(t - \tau) U,$$

получим

$$K(E, E'; k, k') = \frac{1}{2\pi V} U(k, -k; -k', k').$$

Отличие $\Sigma_{11}(E, k)$ от $E - L(k)$ в таком приближении дается графом



[1] Подход к вопросу о получении первого приближения в рассматриваемой задаче, основанный на функции Грина, был предпринят в работе [13].

который приводит к отклонению $T_l(k)$ от $J(k)$ на величины, исчезающие вместе с U; α остается еще равным 1 (вклад этого графа от E не зависит). Поэтому, не желая иметь дело с мнимой «сверхточностью», мы должны положить в изучаемых уравнениях $\alpha = 1$. Далее, так как в рассматриваемом приближении функция $\Sigma_{12}(E, k)$ не зависит от E вообще, уравнения (11.28), (11.32), (11.34) полностью совпадают и дают известное уравнение

$$c(k) + \frac{1}{V}\sum_{(k')} U(k, -k; -k', k')\frac{c(k')}{2\Omega(k')} = 0. \tag{11.36}$$

Заметим сейчас, что совершенно аналогичное уравнение мы можем получить для, казалось бы, совершенно иного случая, когда мы имеем газ малой плотности из ферми-частиц, образующих молекулы в S-состоянии (состоящие из пар частиц с противоположными спинами).

Мы предполагаем, что взаимодействие характеризуется не зависящей от спинов радиально-симметричной потенциальной функцией $\phi(r)$. Тогда в гамильтониане (11.36)

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{p^2}{2m} - \lambda, \\ U(k_1, k_2; k_2', k_1') &= \nu(k_1 - k_1'), \end{aligned} \tag{11.37}$$

где

$$\nu(k) = \int \phi(r) \mathrm{e}^{i(\mathbf{kr})}\, d\mathbf{k}.$$

Изложим сейчас ряд элементарных физических соображений, поясняющих возникающее здесь положение. Уравнение Шредингера для молекул в системе центра инерции будет иметь следующий вид:

$$\left\{-\frac{\Delta}{m} + \phi(r) - E\right\}\varphi(r) = 0,$$

или в p-представлении

$$2\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{E}{2}\right)\varphi(p) + \frac{1}{V}\sum_{(p')} U(p, -p; -p', p')\varphi(p') = 0. \tag{11.38}$$

Обозначим низший энергетический уровень через E_0; $E_0 < 0$. По предположению соответствующая функция $\varphi(r_1 - r_2)$ должна быть симметрична по отношению к замене $r_1 \leftrightarrows r_2$. Следовательно,

$$\varphi(p) = \varphi(-p).$$

При нулевой температуре молекулы образуют бозе-конденсат. Волновая функция молекулы (учитывая нулевой импульс) будет

$$\varphi(r_1 - r_2).$$

Если учитывать лишь главный член по плотности, то для полной энергии системы получим

$$E_0 \frac{N}{2},$$

где N — полное число частиц. Мы здесь отбрасываем высшие члены по плотности, обусловленные взаимодействием между молекулами. Таким образом,

$$\lambda = \frac{E_0}{2} = -\frac{|E_0|}{2} < 0.$$

Введем обычную нормировку, положив интеграл $\int \varphi^2(r)\, d\mathbf{r}$ равным плотности числа молекул. В данном случае

$$\int \varphi^2(r)\, d\mathbf{r} = \frac{n}{2},$$

где $n = N/V$.

Положим теперь

$$\varphi(p) = \frac{c(p)}{2\left(\frac{p^2}{2m} - \lambda\right)} - \frac{c(p)}{2\left(\frac{p^2}{2m} + |\lambda|\right)}.$$

Тогда уравнение Шредингера приводим к виду

$$c(p) + \frac{1}{V}\sum_{(p')} U(p, -p; -p', p')\frac{c(p')}{2\Omega(p')} = 0, \tag{11.39}$$

где

$$\Omega(p) = \frac{p^2}{2m} + |\lambda|. \tag{11.40}$$

Мы пришли здесь к уравнению вида (11.36), в котором вместо

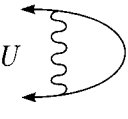
$$\Omega(p) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} + |\lambda|\right)^2 + c^2(p)}$$

подставлено (11.40). Такое отбрасывание $c^2(p)$ естественно в связи с тем, что $c(p)$ пропорционально плотности, а мы учитываем лишь главные члены.

Этот же результат мы могли бы получить из изложенной общей схемы. Возьмем формулы (10.22) и последовательно проведем приближение, в котором учитывается лишь главный член по степеням плотности. Тогда мы должны положить

$$\Sigma_{11}(E, k) = E - \left(\frac{p^2}{2m} - \lambda\right). \tag{11.41}$$

Выражение $\Sigma_{12}(E, k)$ возьмем из диаграммы

$\Sigma_{12} =$  (11.42)

Мы придем тогда прямо к уравнению (11.36), в котором в выражении

$$\Omega^2(p) = \left(\frac{p^2}{2m} - |\lambda|\right)^2 + c^2$$

следует отбросить член c^2 ввиду его малости по сравнению с λ^2. Как видно, здесь нами уже не приводятся рассуждения о малой окрестности поверхности

Ферми и т. п. (в данном случае $\lambda < 0$ и поверхности Ферми вообще не будет). Напишем также выражение для функции Грина $\langle\langle a_{k,+} | a^+_{k,+}\rangle\rangle_E$. Имеем

$$\langle\langle a_{k,+} | a^+_{k,+}\rangle\rangle_E = -\frac{1}{2\pi}\frac{\left(\frac{k^2}{2m}-\lambda\right)+E}{\left(\frac{k^2}{2m}-\lambda\right)^2 + c^2(k) - E^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\frac{k^2}{2m}-\lambda}{\Omega(k)}\right)\frac{1}{E-\Omega(k)} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{k^2}{2m}-\lambda}{\Omega(k)}\right)\frac{1}{E+\Omega(k)}\right\} \sim$$

$$\sim \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\frac{k^2}{2m}-\lambda}{\Omega(k)}\right)\frac{1}{E-\left(\frac{k^2}{2m}+|\lambda|\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{k^2}{2m}-\lambda}{\Omega(k)}\right)\frac{1}{E+\left(\frac{k^2}{2m}+|\lambda|\right)}\right\}, \quad (11.43)$$

$$\Omega(p) = \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m}-\lambda\right)^2 + c^2(k)}\,.$$

Мы здесь не можем везде выбросить c^2 из $\Omega(k)$, так как полюс при отрицательном E появляется лишь при $c \neq 0$, поскольку его вычет будет пропорционален

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{k^2}{2m}-\lambda}{\Omega(k)}\right).$$

При $c = 0$ функция Грина будет иметь вид, обычный для системы невзаимодействующих частиц:

$$\langle\langle a_{k,+} | a^+_{k,+}\rangle\rangle_E = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{E-\left(\frac{k^2}{2m}-\lambda\right)}.$$

В данном случае кроме этого полюса имеется еще дополнительный полюс с отрицательным аргументом E:

$$\langle\langle a_{k,+} | a^+_{k,+}\rangle\rangle_E \sim \frac{1}{2\pi}\frac{1}{E-\left(\frac{k^2}{2m}-\lambda\right)} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{k^2}{2m}-\lambda}{\Omega(k)}\right)\frac{1}{E+\left(\frac{k^2}{2m}-\lambda\right)}. \quad (11.44)$$

Только из-за него плотность числа частиц может быть отличной от нуля (при $\theta = 0$ особенности функции Грина при $E > 0$ не вносят вклад в $\langle a^+_k a_k\rangle$).

В результате имеем

$$n_k = \langle a_k^+ a_k \rangle = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\frac{k^2}{2m} - \lambda}{\Omega(k)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \lambda\right)^2 + c^2(k)} - \left(\frac{k^2}{2m} - \lambda\right)}{\sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \lambda\right)^2 + c^2(k)}}\right\} \sim \frac{c^2(k)}{4\left(\frac{k^2}{2m} - \lambda\right)} = \varphi^2(k). \quad (11.45)$$

Мы получаем естественный результат (ранее найденный в работе [14]), свидетельствующий о том, что в рассматриваемом случае при $\theta = 0$ плотность импульсного распределения частиц определяется квадратом импульсного образа волновой функции.

б) Возьмем гамильтониан Фрелиха

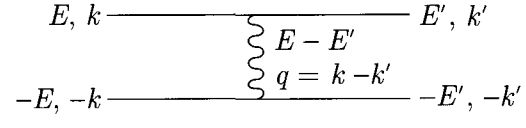
$$\mathcal{H} = \sum_{(k,\sigma)} \mathcal{L}(k) a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} + \sum_q \omega(q) b_q^+ b_q + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (11.46)$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \sum_{\substack{k_1, k_2, \sigma \\ k_1 - k_2 = q}} g(q) \left\{\frac{\omega(q)}{2V}\right\}^{1/2} a_{k_1\sigma}^+ a_{k_2\sigma} B_q,$$

$$B_q = b_q + b_{-q}^+, \quad (11.47)$$

$$\mathcal{L}(-k) = \mathcal{L}(k), \quad g(-k) = g(k), \quad \omega(-k) = \omega(k).$$

Учтем в ядре K лишь простейшую диаграмму обмена одним фононом (т. е. учтем лишь члены порядка g^2). Имеем



$$\langle\langle B_q; B_{-q}\rangle\rangle^{\text{c}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{E - \omega(q) + i\varepsilon} - \frac{1}{E + \omega(q) - i\varepsilon}\right\}.$$

Поэтому

$$K(E, E'; k, k') = \frac{g^2(q)\omega(q)}{2V} \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{E - E' - \omega(q) + i\varepsilon} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{E - E' + \omega(q) - i\varepsilon}\right\} \quad (q = k - k'). \quad (11.48)$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE'}{(E' - \Omega_1 + i\varepsilon S)(E' - \Omega_2 + i\varepsilon S)} = 0,$$

где $S=1$ или $S=-1$, Ω_1 и Ω_2 вещественны и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE'}{(E'-\Omega_1+i\varepsilon)(E'-\Omega_2+i\varepsilon)} = \frac{2\pi i}{\Omega_2-\Omega_1+2i\varepsilon} = \frac{2\pi i}{\Omega_2-\Omega_1-i\varepsilon}, \tag{11.49}$$

причем ε — бесконечно малое положительное число, его присутствие указывает лишь на направление обхода полюса. Поэтому ставить ли в этих формулах ε, или 2ε, или $\varepsilon/2$ и т. п. — все равно. В силу (11.49) получим

$$i\int_{-\infty}^{+\infty} K(E,E';k,k')\left\{\frac{1}{E'+\Omega(k')-i\varepsilon}-\frac{1}{E'-\Omega(k')+i\varepsilon}\right\}dE' =$$

$$= \frac{g^2(q)\omega(q)}{2V}\,\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{E'-E-\omega(q)+i\varepsilon}-\frac{1}{E'-E+\omega(q)-i\varepsilon}\right\}\times$$

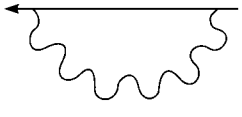
$$\times\left\{\frac{1}{E'+\Omega(k')-i\varepsilon}-\frac{1}{E'-\Omega(k')+i\varepsilon}\right\}dE' =$$

$$= \frac{g^2(q)\omega(q)}{2V}\left\{\frac{1}{E+\Omega(k')+\omega(q)-i\varepsilon}-\frac{1}{E-\omega(q)-\Omega(k')+i\varepsilon}\right\}. \tag{11.50}$$

Для написания уравнений (11.28), (11.31), (11.34) заметим, что в рассматриваемом приближении отличие

$$\Sigma_{11}(E,k)$$

от $E-L(k)$ обусловливается вкладом диаграммы



Таким образом, величина α может отклоняться от 1 лишь на величины, которые мы должны полагать малыми (ибо, если их не считать малыми, мы должны учесть в ядре K диаграммы более высокого порядка). Формально эти члены будут порядка g^2, а правые части уравнения для $c(k)$ сами пропорциональны g^2. Значит, в них мы должны положить $\alpha=1$.

Тогда уравнение (11.28) будет иметь вид

$$c(k) = \sum_{(q=k'-k)}{}' \frac{g^2(q)}{V}\,\frac{\omega(q)}{\omega(q)+\Omega(k')}\,\frac{c(k')}{2\Omega(k')}. \tag{11.51}$$

Уравнение (11.51) дает

$$c(k) = \sum_{q=k'-k}{}' \frac{g^2(q)}{V}\left\{\frac{\omega(q)}{\Omega(k)+\Omega(k')+\omega(q)}+\frac{\omega(q)}{\Omega(k')-\Omega(k)+\omega(q)}\right\}\frac{c(k')}{2\Omega(k')}. \tag{11.52}$$

Обозначение $\sum'$ указывает, что соответствующий (при $V \to \infty$) интеграл должен браться в смысле главного значения. Напишем еще для сравнения уравнения типа (11.34). Заметим из (11.50), что

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} K(E, E'; k, k') \left\{ \frac{1}{E' - \Omega(k') - i\varepsilon} - \frac{1}{E' - \Omega(k') + i\varepsilon} \right\} dE' = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z(\nu; k, k')}{E - \nu + i\varepsilon\epsilon(\nu)} d\nu,$$

где

$$Z(\nu; k, k') = -\epsilon(\nu)\{\delta(\nu - \omega(q) - \Omega(k')) + \delta(\nu + \Omega(k') + \omega(q))\} \frac{g^2(q)\omega(q)}{2V}.$$

Поэтому уравнение (11.34) примет вид

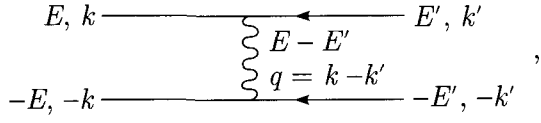
$$c(k) = \sum_{\substack{k' \\ (q=k-k')}} \frac{g^2(q)}{V} \frac{\omega(q)}{\Omega(k) + \Omega(k') + \omega(q)} \frac{c(k')}{2\Omega(k')}. \tag{11.53}$$

Любопытно отметить, что именно это уравнение получается при использовании метода компенсации опасных диаграмм [11].

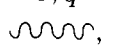
в) Рассмотрим гамильтониан Фрелиха с включением кулоновских сил. Тогда в (11.46) вместо (11.47) мы должны положить

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(k_1, k_2, k_2', k_1', \sigma_1, \sigma_2) \\ q = k_1 - k_1'}} \frac{e^2}{4\pi q^2 V} a^+_{k_1\sigma_1} a^+_{k_2\sigma 2} a_{k_2'\sigma_2} a_{k_1'\sigma_1} \delta(k_1 + k_2 - k_1' - k_2') + \\ + \sum_{\substack{(k_1, k_2, \sigma \\ k_1 - k_2 = q)}} g(q) \left\{ \frac{\omega(q)}{2V} \right\}^{1/2} a^+_{k_1\sigma} a_{k_2\sigma} B_q, \quad B_q = b_q + b^+_{-q}. \tag{11.54}$$

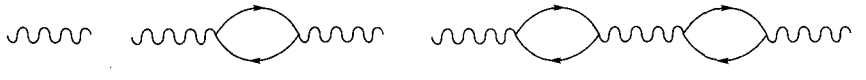
Учитывая соображения из известной работы Гелл-мана—Бракнера, возьмем в качестве ядра K сумму вкладов от диаграммы типа



где линия



представляет собой сумму цепочек типа



Здесь ∿∿∿ — линия кулоновского взаимодействия, или фононная линия, включающая два конца;

— электронная петля.

Пропагатор для ∿∿∿ обозначен через $D(D_c, D\varphi)$. Имеем на основании ранее сказанного

$$D_c = \frac{1}{2\pi V}\frac{4\pi e^2}{|q|^2},$$
$$D_\varphi = \frac{g^2(q)}{2\pi V}\frac{\omega^2(q)}{\varepsilon^2 - \omega^2(q)}. \tag{11.55}$$

(Мы не пишем здесь $i\varepsilon$, поскольку это ни к какому недоразумению не приведет.) Пусть пропагатор для электронной петли будет $S(\varepsilon, q)$ (S подсчитаем ниже).

Обозначим через G_{cc}, $G_{c\varphi}$, $G_{\varphi c}$, $G_{\varphi\varphi}$ суммы для цепочек рассматриваемого типа соответственно с кулоновским и фононным концами.

Тогда

$$K = G_{cc} + G_{c\varphi} + G_{\varphi c} + G_{\varphi\varphi}. \tag{11.56}$$

Для суммирования таких цепочек имеем уравнение в абстрактной форме:

$$G = D + (2\pi)^2 DSG, \tag{11.57}$$

или в конкретизованной, учитывая концы типа c и φ:

$$G_{cc} = D_c + (2\pi)^2 D_c S G_{cc} + (2\pi)^2 D_c S G_{\varphi c},$$
$$G_{\varphi c} = (2\pi)^2 D_\varphi S G_{\varphi c} + (2\pi)^2 D_\varphi S G_{cc},$$
$$G_{\varphi\varphi} = D_\varphi + (2\pi)^2 D_\varphi S G_{\varphi\varphi} + (2\pi)^2 D_\varphi S G_{c\varphi},$$
$$G_{c\varphi} = (2\pi)^2 D_c S G_{c\varphi} + (2\pi)^2 D_c S G_{\varphi\varphi}.$$

Отсюда следует, что

$$G_{cc} = \frac{D_c(1 - 4\pi^2 D_\varphi S)}{(1 - 4\pi^2 D_c S)(1 - 4\pi^2 D_\varphi S) - (4\pi^2)^2 D_c D_\varphi S^2} = \frac{D_c(1 - 4\pi^2 D_\varphi S)}{1 - 4\pi^2(D_c + D_\varphi)S},$$
$$G_{\varphi c} = \frac{4\pi^2 D_\varphi D_C S}{1 - 4\pi^2(D_c + D_\varphi)S} = G_{c\varphi}, \tag{11.58}$$
$$G_{\varphi\varphi} = \frac{D_\varphi(1 - 4\pi^2 D_c S)}{1 - 4\pi^2(D_c + D_\varphi)S},$$

и потому из (11.56) получим выражение

$$K = \frac{D_c + D_\varphi}{1 - 4\pi^2(D_c + D_\varphi)S}. \tag{11.59}$$

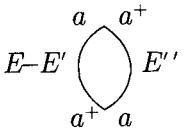
Нам остается сосчитать S (рисунок). Имеем

$$\sum_{\substack{\sigma,k,k'\\ k-k'=q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T(a_{k\sigma}|a^+_{k\sigma})\rangle_{E-E'} \langle T(a^+_{k'\sigma}|a_{k'\sigma})\rangle_E \, dE' =$$

$$= 2 \sum_{\substack{k,k'\\ k-k'=q}} \frac{i^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{E - E' - T_l(k) + i\varepsilon\epsilon(T_l(k))} \frac{dE'}{E' + T_l(k') - i\varepsilon\epsilon(T_l(k'))}. \tag{11.60}$$

Входящий сюда интеграл вычислим по формулам (11.45). Убедимся, что выражение (11.60) будет иметь вид

$$-\frac{i}{2\pi} F(E,q)V,$$



где

$$F(E,q) = \frac{2}{V} \sum_{\substack{k,k'\\ k-k'=q}} \frac{\theta(T_l(k')) - \theta(T_l(k))}{E + T_l(k') - T_l(k) + i\varepsilon\epsilon\{T_l(k) - T_l(k')\}}, \tag{11.61}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$S(E,q) = -\frac{1}{2\pi} V F(E,q). \tag{11.62}$$

Подставим в формулу (11.59) выражения (11.55), (11.62). Найдем

$$K(E,E';k,k') = K(\mathcal{E},q) \qquad (\mathcal{E} = E - E', \quad q = k - k'),$$

$$K(\mathcal{E},q) = \frac{1}{2\pi V} \frac{\frac{4\pi e^2}{|q|^2} + \frac{g^2(q)\omega^2(q)}{\mathcal{E}^2 - \omega^2(q)}}{1 + \left(\frac{4\pi e^2}{|q|^2} + \frac{g^2(q)\omega^2(q)}{\mathcal{E}^2 - \omega^2(q)}\right) F(\mathcal{E},q)}. \tag{11.63}$$

Мы будем рассматривать обычную ситуацию, когда

$$c \ll S, \quad \omega \ll E_F,$$

где c — скорость звука, S — скорость электронов на поверхности Ферми: E_F — энергия Ферми.

В этих условиях $F(\mathcal{E},q)$ весьма мало меняется при изменении $\mathcal{E}$ на величины порядка $\omega(q)$. Существенны же те $\mathcal{E}$, которые малы даже по сравнению с ω. В этих условиях допустимо пренебречь зависимостью $F(\mathcal{E},q)$ от $\mathcal{E}$ и заменить это выражение на

$$F(0,q) = f(q) = \frac{2}{V} \sum_{\substack{k,k'\\ k-k'=q}} \frac{\theta(T_l(k')) - \theta(T_l(k))}{T_l(k') - T_l(k)}. \tag{11.64}$$

Вместо (11.63) напишем

$$K(\mathcal{E},q)=\frac{1}{2\pi V}\frac{\frac{4\pi e^2}{|q|^2}+\frac{g^2(q)\omega^2(q)}{\mathcal{E}^2-\omega^2(q)}}{1+f(q)\left\{\frac{4\pi e^2}{|q|^2}+\frac{g^2(q)\omega^2(q)}{\mathcal{E}^2-\omega^2(q)}\right\}}.$$

Упрощая это выражение, найдем после некоторых преобразований

$$K(\mathcal{E},q)=\frac{1}{2\pi V}\left\{\frac{\frac{4\pi e^2}{|q|^2}}{1+\frac{4\pi e^2}{|q|^2}f(q)}+\frac{g_e^2(q)\omega_e^2(q)}{\mathcal{E}^2-\omega_e^2(q)}\right\}, \tag{11.65}$$

где

$$\omega_e^2(q)=\omega^2\left\{1-\frac{g^2(q)f(q)}{1+\frac{4\pi e^2}{|q|^2}f(q)}\right\},$$
$$g_e^2(\omega)=\frac{\left(\frac{\omega(q)}{\omega_e(q)}\right)^2}{\left(1+\frac{4\pi e^2}{|q|^2}f(q)\right)^2}g^2(q). \tag{11.66}$$

Как видно из формулы (11.65), фактор K представляет собой сумму двух членов типа случая *а* и случая *б*. Поэтому, например, уравнение (11.34) (при $\alpha=1$) принимает вид

$$c(k)=\frac{1}{V}\sum_{k-k'=q}{}'\left\{-\frac{\frac{4\pi e^2}{|q|^2}}{1+\frac{4\pi e^2}{|q|^2}f(q)}+g_e^2(q)\frac{\omega_e(q)}{\Omega(k)+\Omega(k')+\omega_e(q)}\right\}\times$$
$$\times\frac{c(k')}{2\Omega(k')}\Omega(k)=+\sqrt{T_l^2(k)+c^2(k)} \tag{11.67}$$

и т. д.

Отсюда видно, что роль кулоновского взаимодействия двоякая — прямое вхождение в экранированной форме и изменение эффективных величин $g_e(q)$ и $\omega_e(q)$.

Уравнение (11.67) было уже ранее получено методом «компенсации» опасных диаграмм [12, 15]. Напомним, что диаграммы с энергетическим знаменателем $\Omega(k)+\Omega(-k)=2\Omega(k)$ определялись как опасные (ввиду того что $\Omega(k)$ практически исчезает на поверхности Ферми), а диаграммы, энергетический знаменатель которых содержит хотя бы одно ω, например

$$\Omega(k)+\Omega(k')+\omega_e(k-k'),$$

считались при этом «нормальными».

Как видно, основным условием для такого различия, для самого понятия «опасной диаграммы» будет неравенство

$$|c|\ll\overline{\omega}_e.$$

Это же условие требуется и в теперешнем рассмотрении для обоснования законности «дельтовидной аппроксимации» спектральной интенсивности выражения $\langle\langle a_{k,+}|a_{-k,-}\rangle\rangle_E$. Если мы для ядра (11.65) напишем вместе с (11.67) еще уравнения типа (11.28), (11.31), то заметим, что их правые части отличаются на члены порядка $c/\overline{\omega}_e$.

Мы имеем здесь дело со случаем $\theta = 0$, но можно было бы обобщить полученные уравнения и для температур $\theta \ll \overline{\omega}_e$. Для таких малых температур естественно сделать следующие допущения (справедливость которых можно непосредственно проверить на ряде динамических моделей).

1) Продолжать пользоваться формулой (11.24), причем пренебречь зависимостью от θ ядра $K(E, E'; k, k')$ как аналитической функции комплексных переменных E, E'.

2) Пренебречь зависимостью от θ энергии $T_l(k)$. Тогда все отличие «температурного случая» будет состоять в том, что мы должны будем использовать спектральные представления, соответствующие данной температуре $\theta \neq 0$. Если при этом систематически удерживать лишь главные члены, то полученные уравнения будут отличаться от приводившихся выше только тем, что под знаком суммы по q выражение $c(k')/(2\Omega(k'))$ должно быть заменено на

$$c(k') \operatorname{th} \frac{\Omega(k')}{2\theta}.$$

В заключение мы хотели бы обратить внимание на весьма интересный методический вопрос о построении высших приближений. Здесь придется столкнуться с рядом осложняющих обстоятельств. Прежде всего, нельзя будет пользоваться дельтовидной аппроксимацией для спектральной интенсивности.

Кроме того, в высших приближениях должна сказаться сингулярность диаграммы с четырьмя концами при малых передачах импульса q (см. теорему о $1/q^2$). С физической точки зрения необходимо будет учесть взаимодействие фермионных возбуждений с коллективной ветвью, реальной (при отсутствии кулоновских сил) или виртуальной (пары с малым импульсом).

Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 138.
2. *Боголюбов Н.Н.* О принципе компенсации и методе самосогласованного поля. Препринт ОИЯИ Р-267. Дубна, 1958; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 424.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.;Л., 1951.
4. *Боголюбов Н.Н.* К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости. Препринт ОИЯИ Р-511. Дубна, 1960; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 222.
5. *Зубарев Д.Н.* // УФН. 1960. Т. 71, вып. 1. С. 71.
6. *Бонч-Бруевич В.Л., Тябликов С.В.* Метод функций Грина в статистической механике. М.: Физматгиз, 1961.
7. *Боголюбов Н.Н.* К теории сверхтекучести // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. С. 77; Вестн. МГУ. 1947. № 7. С. 43; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 307.
8. *Беляев С.Т.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 417; *Brueckner K.A., Sawada K.* // Phys. Rev. 1957. V. 106. P. 1117, 1128.

9. *Hugenholtz N., Pines D.* // Phys. Rev. 1959. V. 116. P. 489.
10. *Боголюбов Н.Н., Зубарев Д.Н., Церковников Ю.А.* Асимптотически точное решение для модельного гамильтониана теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 120; *Боголюбов Н.Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 209.
11. *Боголюбов Н.Н.* О новом методе в теории сверхпроводимости. I // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 77.
12. *Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В.* Новый метод в теории сверхпроводимости. М.: Изд-во АН СССР, 1958.; *Боголюбов Н.Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 530.
13. *Горьков Л.П.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 735.
14. *Тареева Е.Е.* // ДАН СССР. Т. 132, № 3. С. 568.
15. *Ширков Д.В.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 607; Т. 37. С. 179.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ*

В этом докладе я представлю мою недавнюю работу «К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости», только что опубликованную в виде препринта ОИЯИ. В нем простейшая динамическая система, описываемая хорошо известным редуцированным гамильтонианом, решается с помощью математически строгих методов. В заключение этого доклада мы намерены обсудить общую ситуацию в теории сверхпроводимости и сверхтекучести.

Итак, сначала рассмотрим простейшую модельную систему теории сверхпроводимости, описываемую хорошо известным редуцированным гамильтонианом вида

$$H = \sum_f T(f) a_f^\dagger a_f - \frac{1}{2V} \sum_{f,f'} \lambda(f)\lambda f' a_f^\dagger a_{-f}^\dagger a_{-f'} a_{f'}. \tag{1}$$

Квантовые операторы a_f и $a_f^\dagger$ уничтожают и создают соответственно свободную частицу с импульсом p и спином s и удовлетворяют обычным правилам коммутации для фермионов. Мы приняли следующие обозначения:

$$\lambda(f) = \begin{cases} J\epsilon(s), & \left|\dfrac{p^2}{2m} - \mu\right| < \Delta, \\ 0, & \left|\dfrac{p^2}{2m} - \mu\right| > \Delta, \end{cases} \tag{2}$$

$$f = (p, s), \quad -f = (-p, -s), \quad T(f) = \frac{p^2}{2m} - \mu, \quad \mu > 0.$$

Применение метода БКШ и нашего метода компенсации «опасных диаграмм» приводит в этом случае к одинаковым результатам.

Около двух лет назад Зубарев, Церковников и я обратили внимание на то, что эта модельная система представляет собой одну из тех редких моделей статистической механики, для которых могут быть получены асимптотически точные решения. В нашей краткой работе мы получили асимптотически точное (в пределе $V \to \infty$) выражение для свободной энергии. Этот результат был установлен следующим образом: гамильтониан H был разделен некоторым специальным способом на две части H_0 и H_1. Проблема с гамильтонианом H_0

* Physica. 1960. V. 26. Suppl. P. S1; Proc. Intern. Congress on Many-Particle Problems. Ultrecht, June, 1960; JINR Preprint E-568. Dubna, 1960; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 338.

была решена точно посредством $(u-v)$-преобразования. Для учета влияния H_1 была использована теория возмущений. Было показано, что любое n-е слагаемое соответствующего разложения асимптотически мало при $V \to \infty$. В связи с этим был сделан вывод о том, что влиянием H_1 можно пренебречь после предельного перехода $V \to \infty$.

Очевидно, что такой способ рассуждения нельзя считать математически вполне корректным. Однако следует подчеркнуть, что в задачах статистической механики используются куда более грубые подходы. Например, широко распространены приближенные методы, основанные на выборочном суммировании членов ряда теории возмущений, являющихся в определенном смысле «главными». Остальные члены ряда опускаются, хотя они и не стремятся к нулю в пределе $V \to \infty$.

Реальные сомнения в справедливости наших результатов, упомянутых выше, возникли, когда различные попытки использовать стандартную диаграммную технику Фейнмана потерпели неудачу. Когда я говорю о *стандартной* технике Фейнмана, я имею в виду диаграммную технику, в которой *аномальные* спаривания

$$\overbrace{a_f^\dagger a_{-f}^\dagger}, \overbrace{a_{-f} a_f} \tag{3}$$

не принимаются во внимание. Необходимость введения таких аномальных спариваний ясно видна, когда мы совершаем каноническое $(u-v)$-преобразование. И если мы допускаем введение таких спариваний, как это было сделано, например, в работах Беляева и Горькова, все становится правильным, и корректные результаты получаются незамедлительно.

Но если мы используем диаграммную технику Фейнмана традиционным способом, как в квантовой теории поля, мы должны положить спаривания вида (3) *равными нулю*.

Ввиду этого Зубарев, Церковников и я недавно исследовали полную бесконечную систему, или «цепочку», связанных уравнений для функций Грина, соответствующих гамильтониану H_0. Нам удалось показать, что функции Грина для гамильтониана H_0 удовлетворяют любому уравнению цепочки для точного гамильтониана H с ошибкой порядка $1/V$. Это подтверждает результаты нашей упомянутой выше работы, и становится ясно, что дополнительное слагаемое H_1 «несущественно».

Однако мы можем рассмотреть эту ситуацию с чисто математической точки зрения. Как только мы выбрали гамильтониан, скажем, в форме (1), мы имеем вполне определенную математическую проблему, которая должна быть решена строго без всяких «физических предположений». Тогда недостаточно того, что приближенные выражения удовлетворяют точным уравнениям вплоть до слагаемых порядка малости $1/V$, но мы должны оценить разницу между точными и приближенными выражениями. Чтобы полностью понять поведение модельной динамической системы, я решил эту проблему в препринте, который я упомянул в начале этого доклада, твердо следуя этой чисто математической точке зрения.

Главной целью этой работы было не только иметь вполне убедительное математическое доказательство уже известных результатов, но и получить более глубокое понимание ситуации с аномальными функциями Грина (3). Я должен подчеркнуть, что объяснения и доказательства стали весьма сложными из-за

отказа от так называемых «простых физических рассуждений» и использования взамен этого сложной математической техники оценок выражений сверху. Но я объясню здесь основные идеи, которые очень просты. Итак, мы будем рассматривать динамическую систему с гамильтонианом H в случае нулевой температуры $\Theta = 0$.

По методологическим причинам для нас было бы удобнее рассматривать несколько более общий гамильтониан, содержащий слагаемые, являющиеся источниками рождения и уничтожения пар:

$$H = \sum_f T(f) a_f^\dagger a_f - \nu \sum_f \frac{\lambda(f)}{2} (a_{-f} a_f + a_f^\dagger a_{-f}^\dagger) - \\ - \frac{1}{2V} \sum_{f,f'} \lambda(f)\lambda f' a_f^\dagger a_{-f}^\dagger a_{-f'} a_{f'}, \quad (4)$$

где ν — параметр, который мы будем считать неотрицательным: $\nu \geqslant 0$.

Заметим, что случай $\nu < 0$ не требует специального рассмотрения, так как он может быть сведен к случаю $\nu > 0$ простым калибровочным преобразованием ферми-операторов:

$$a_f \to i a_f, \quad a_f^\dagger \to -i a_f^\dagger.$$

Также подчеркнем, что случай $\nu > 0$ будет рассматриваться постольку, поскольку он интересен для понимания реальной ситуации, когда $\nu = 0$.

Для настоящего исследования нам не понадобятся конкретные свойства (2) упомянутых выше функций $\lambda(f), T(f)$. Будет вполне достаточным наложить следующие общие условия.

1) Функции $\lambda(f), T(f)$ вещественны, кусочно-непрерывны и имеют следующие свойства симметрии:

$$\lambda(-f) = -\lambda(f); \quad T(-f) = T(f).$$

2) $\left.\begin{matrix} |\lambda| \leqslant \text{const} \\ T(f) \to \infty \end{matrix}\right\}$ для $|f| \to \infty$.

3) $\frac{1}{V} \sum_f |\lambda(f)| \leqslant \text{const}$ при $V \to \infty$.

4) $\lim V \to \infty \frac{1}{2V} \sum_f \frac{\lambda^2(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)x + T^2(f)}} > 1$

для достаточно малых положительных x. Теперь представим H в форме

$$H = H_0 + H_1.$$

Здесь

$$H_0 = \sum_f T f a_f^\dagger a_f - \frac{1}{2} \sum_f \lambda(f) \left\{ (\nu + \sigma^*) a_{-f} a_f + (\nu + \sigma) a_f^\dagger a_{-f}^\dagger \right\} + \frac{|\sigma|^2}{2} V, \quad (5)$$

$$H_1 = -\frac{V}{2} \left(\frac{1}{V} \sum_f \lambda(f) a_f^\dagger a_{-f}^\dagger - \sigma^* \right) \left(\frac{1}{V} \sum_f \lambda(f) a_{-f} a_f - \sigma \right), \quad (6)$$

где σ — произвольное комплексное число.

Основываясь на этом представлении, можно легко получить выражение для верхнего предела наименьшего собственного значения E_H гамильтониана H.

Пусть $E_0(\sigma)$ есть наименьшее собственное значение H_0, рассматриваемое как функция параметра σ. Постольку $H_1 \leqslant 0$, мы сразу видим, что

$$E_0(\sigma) \geqslant E_h$$

для любого значения σ. Поэтому наилучшей оценкой будет

$$\min_{\sigma} E_0(\sigma) \geqslant E_H. \tag{7}$$

Для оценки левой части (7) достаточно заметить, что H_0 является квадратичной формой по ферми-операторам.

Таким образом, с помощью соответствующего канонического преобразования мы получаем следующее тождество:

$$H_0 = \sum_f \sqrt{\lambda^2(f)|\nu+\sigma|^2 + T^2(f)}\left(a_f^\dagger u_f + a_{-f} v_f^*\right)\left(a_f u_f + a_{-f}^\dagger v_f\right) + \\ + \frac{V}{2}\left(|\sigma|^2 - \frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{\lambda^2(f)|\nu+\sigma|^2+T^2(f)} - T(f)\right]\right), \tag{8}$$

где

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{T(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)|\nu+\sigma|^2+T^2(f)}}\right)^{1/2},$$

$$v_f = -\frac{\epsilon(f)}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{T(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)|\nu+\sigma|^2+T^2(f)}}\right)^{1/2}\frac{\nu+\sigma}{|\nu+\sigma|},$$

$$\lambda_f = (f)|\lambda(f)|.$$

Здесь очевидно, что $u(-f) = u(f)$ и $v(-f) = -v(f)$, функция u вещественна, функция v комплексна и $u^2 + |v|^2 = 1$. Отсюда следует, что операторные амплитуды

$$\alpha_f = a_f u_f + a_{-f}^\dagger v_f$$

будут фермионного типа. Поэтому наименьшее собственное значение $E_0(\sigma)$ гамильтониана H_0 достигается при числах заполнения

$$\alpha_f^\dagger \alpha_f = 0.$$

Таким образом, мы получаем

$$E_0(\sigma) = \frac{V}{2}\left(|\sigma|^2 - \frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{\lambda^2(f)|\nu+\sigma|^2+T^2(f)} - T(f)\right]\right).$$

Рассмотрим теперь задачу нахождения минимума: найти значение σ, для которого $E_0(\sigma)$ принимает наименьшее значение. Должны быть рассмотрены

два различных случая: $\nu=0$ и $\nu>0$. В первом случае, $\nu=0$, мы можем написать

$$E_0(\sigma)=\frac{V}{2}F(\sigma^*\sigma),$$

$$F(x)=x-\frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{\lambda^2(f)x+T^2(f)}-T(f)\right].$$

Мы видим, что $E_0(\sigma)$ не зависит от фазы σ, являясь функцией только абсолютного значения σ. По этой причине условие минимума позволяет нам найти только модуль параметра σ:

$$|\sigma|=\sqrt{x},$$

но не его фазу.

Исследование выражения $F(x)$ показывает, что благодаря условию 4 оно имеет только одну точку минимума $x_0>0$ в нужном нам интервале $x\geqslant 0$. Поэтому мы имеем неравенство

$$\frac{V}{2}F(x_0)\geqslant E_H.$$

Теперь обратимся к случаю $\nu>0$. Здесь не только модуль σ, но и его фаза полностью определяются из условия минимума для $E_0(\sigma)$.

Можно показать, что в этом случае σ должен быть *вещественным:*

$$|\sigma|=\sqrt{x_0}-\nu,$$

где значение $x=x_0>\nu^2>0$ определяется из условий минимума функции

$$F(x)=(\sqrt{x}-\nu)^2-\frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{\lambda^2(f)x+T^2(f)}-T(f)\right] \tag{9}$$

в интервале $x\geqslant 0$. Поэтому в обоих случаях мы имеем

$$\frac{V}{2}F(x_0)\geqslant E_H. \tag{10}$$

Чтобы доказать, что дополнительное слагаемое H_1 в гамильтониане H несущественно и что мы имеем асимптотическое равенство

$$\lim_{V\to\infty}\left\{\frac{E_H}{V}-\frac{1}{2}F(x_0)\right\}=0,$$

найдем *наилучшую оценку снизу для* E_H. Было бы весьма желательно избавиться от слагаемого

$$H_1=-\frac{V}{2}(L^\dagger-\sigma^*)(L-\sigma),$$

где

$$L=\frac{1}{V}\sum\lambda(f)a_{-f}a_f,$$

и получить таким образом тождество типа (8) для полного гамильтониана H. Этого можно было бы достичь, рассматривая σ не как c-число, а как оператор

$$\sigma=L.$$

Однако, к сожалению, перейти от фермионов a к фермионам α с помощью канонического преобразования невозможно, если σ является оператором. Тем

не менее мы всегда можем попытаться обобщить тождество (8) для полного гамильтониана H, полагая $\sigma = L$, с некими предписаниями о «правильном порядке» в произведениях операторов и добавляя дополнительные слагаемые, содержащие коммутаторы. Этим способом мы действительно получим тождество, которое мы теперь выпишем.

Сначала рассмотрим операторы

$$p_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{K\lambda^2(f) + T^2(f)} \right)^{1/2},$$

$$q_f = -\frac{\epsilon(f)}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{K\lambda^2(f) + T^2(f)} \right)^{1/2} K^{-1/2}(L+\nu),$$

$$K = (L+\nu)(L^\dagger + \nu) + \beta^2,$$

где β — произвольное вещественное число (в конечном счете мы положим $\beta \to 0$).

Тогда мы имеем тождество

$$H = \sum_f \left(a_f^\dagger p_f + a_{-f} q_f^\dagger \right) (p_f a_f + q_f a_{-f}) +$$

$$+ \frac{V}{2} \left\{ LL^\dagger - \frac{1}{V} \sum_f \left[\sqrt{\left(K^2 + \frac{2\bar{s}}{V} \right) \lambda^2(f) + T^2(f)} - T(f) \right] \right\} + V\mathfrak{K}, \quad (11)$$

где

$$\bar{s} \geqslant \frac{1}{V} \sum_f |\lambda(f)|^2.$$

Выражение $\mathfrak{K}$ содержит много слагаемых с коммутаторами. Заметим, что коммутаторы

$$\left| [a_f, L^\dagger] \right| = \frac{2}{V} \left| \lambda(f) a_{-f}^\dagger \right| \leqslant \frac{2|\lambda(f)|}{V},$$

$$\left| [L, L^\dagger] \right| = \frac{2}{V} \frac{1}{V} \sum_f |\lambda(f)|^2 \leqslant \frac{2\bar{s}}{V},$$

и т. д. порядка малости $1/V$.

Используя эти простые оценки и применяя нашу технику оценок, мы доказали, что

$$\langle \Phi^* \mathfrak{K} \Phi \rangle \geqslant \frac{D}{V}, \quad D = \text{const},$$

для любой нормированной волновой функции.

Таким образом, мы получаем неравенство

$$\langle \Phi^* H \Phi \rangle \geqslant -D + \frac{V}{2} \left\langle \Phi^* \left\{ LL^\dagger - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{V} \sum_f \left[\sqrt{\left((L+\nu)(L^\dagger + \nu) + \beta^2 + \frac{2\bar{s}}{V} \right) \lambda^2(f) + T^2(f)} - T(f) \right] \right\} \Phi \right\rangle +$$

$$+\left\langle \Phi^* \sum_f \left(a_f^\dagger p_f + a_{-f} q_f^\dagger\right)\left(p_f a_f + q_f a_{-f}\right)\Phi \right\rangle \geqslant -D + \frac{V}{2}\left\langle \Phi^* \left\{ LL^\dagger - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{1}{V}\sum_f \left[\sqrt{\left((L+\nu)(L^\dagger+\nu)+\beta^2+\frac{2\bar{s}}{V}\right)\lambda^2(f)+T^2(f)} - T(f)\right]\right\}\Phi\right\rangle, \quad (12)$$

которое является отправной точкой исследования.

В частности, это неравенство дает следующую наилучшую оценку снизу для E_H:

$$E_H \geqslant \frac{V}{2} F(x_0) - Z. \quad (13)$$

Здесь Z — константа в пределе $V \to \infty$.

Следовательно, благодаря (10) мы можем написать

$$\left|\frac{E_H}{V} - \frac{F(x_0)}{2}\right| \leqslant \frac{Z}{V} \to 0 \text{ при } V \to \infty. \quad (14)$$

Исследуя неравенства (10), (12), мы можем также получить информацию об асимптотическом поведении операторов $L, L^\dagger$. Так, в случае $\nu = 0$ имеем

$$\left\langle \Phi^* | L^\dagger L - C^2|^2 \Phi \right\rangle \leqslant \frac{J}{V},$$
$$\left\langle \Phi^* | LL^\dagger - C^2|^2 \Phi \right\rangle \leqslant \frac{J}{V}, \quad (15)$$
$$J = \text{const}, \quad C^2 = x_0,$$

где Φ — собственная волновая функция H, соответствующая E_H, или в более общем случае Φ — волновая функция, для которой

$$\langle \Phi^* H \Phi \rangle \geqslant J_1 = \text{const}. \quad (16)$$

Итак, для состояний со средней энергией, асимптотически близкой к наименьшей энергии E_H, оператор $L^\dagger L$ равен с асимптотической точностью c-числу $C^2 = x_0$. Такие состояния, однако, не обладают подобными свойствами для операторов $L^\dagger$ и L, взятых по отдельности.

Действительно, рассмотрим состояние Φ_H с наименьшей энергией E_H. Вообще говоря, может иметь место вырождение, так что мы будем иметь не одно Φ_H, а определенное линейное подпространство $\{\Phi_H\}$ возможных состояний с одной и той же наименьшей энергией E_H.

Поскольку в данном случае ($\nu = 0$) оператор

$$N = \sum_f a_f^\dagger a_f,$$

представляющий полное число частиц, коммутирует с H, в подпространстве $\{\Phi_H\}$ всегда можно найти такое состояние Φ'_H, для которого N принимает определенное значение, скажем N_0.

Тогда с очевидностью

$$\langle \Phi'^*_H L \Phi'_H \rangle = 0, \quad \left\langle \Phi'^*_H L^\dagger \Phi'_H \right\rangle = 0.$$

Следовательно, L не может принимать, даже приблизительно, какое-то определенное значение в состоянии Φ'_H, так как в противном случае оператор $L^\dagger L$ в этом состоянии был бы приблизительно равен нулю, а не $C^2 = x_0 > 0$.

Рассмотрим теперь линейное подпространство $\{\Phi\}$ состояний с энергией, асимптотически близкой к E_H. Поскольку $L, L^\dagger$ приблизительно коммутируют с H, естественно ожидать, что можно выбрать такое Φ в подпространстве $\{\Phi\}$, для которого оба оператора L и $L^\dagger$ принимают определенные значения с асимптотической точностью. Это предположение оказывается вполне верным. Именно это обстоятельство объясняет успешность приближенного метода, где мы заменяем гамильтониан H с точным законом сохранения для N гамильтонианом H_0, для которого N больше не является интегралом движения.

Теперь можно также показать, что приближенный метод мог бы быть сформулирован таким образом, что закон сохранения для N не нарушался бы даже формально. С этой целью мы можем ввести операторы

$$\alpha_f = u_f a_f + v_f \frac{L}{C} a^\dagger_{-f},$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям для ферми-амплитуд с асимптотической точностью. Эти операторы в некотором отношении аналогичны операторам

$$b_f = a^\dagger_0 N_0^{-1/2} a_f,$$

введенным мной более десяти лет назад в теории сверхтекучести.

Обратим теперь внимание на случай $\nu > 0$. В этом случае мы доказали более точные неравенства

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi^* (L^\dagger + \nu - C)(L + \nu - C)\Phi \right\rangle &\leqslant \frac{I_\nu}{V}, \\ \left\langle \Phi^* (L + \nu - C)(L^\dagger + \nu - C)\Phi \right\rangle &\leqslant \frac{I_\nu}{V}. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь I_ν — константа при $V \to \infty$ и положительное значение ν фиксировано.

Следовательно, когда мы вводим в гамильтониан слагаемые с источниками пар

$$-\nu \sum_f \frac{\lambda(f)}{2} (a_{-f} a_f + a^\dagger_f a^\dagger_{-f}), \tag{18}$$

сами операторы $L, L^\dagger$ асимптотически становятся c-числами, равными $C - \nu$ для состояний с энергиями, асимптотически близкими к E_H.

Мы видим, что здесь появляется аналогия с теорией ферромагнетизма в изотропной среде. Когда внешнее магнитное поле отсутствует, направление оси намагниченности не фиксировано. Если, однако, включено магнитное поле, сколь угодно слабое, действующее в определенном направлении, то тогда вектор намагниченности сразу ориентируется в том же направлении.

В задаче мы имеем, в сущности, ту же самую ситуацию. Если бы члены с источниками пар (18) в гамильтониане были заменены на слагаемые вида

$$-\nu \sum_f \frac{\lambda(f)}{2} (a_{-f} a_f e^{i\varphi} + a^\dagger_f a^\dagger_{-f} e^{-i\varphi}) \tag{19}$$

с фазой φ, тогда соотношение

$$L \sim C - \nu$$

перешло бы в

$$L \sim (C - \nu)\mathrm{e}^{-i\varphi}.$$

Наиболее просто этот результат может быть установлен, если мы заметим, что гамильтониан с источниками (19) может быть приведен к обычному виду (4) посредством калибровочного преобразования

$$a_f \to \mathrm{e}^{-i\varphi/2} a_f, \quad a_f^\dagger \to \mathrm{e}^{i\varphi/2} a_f^\dagger. \tag{20}$$

В нашем препринте мы также изучили средние от произведений операторов рождения и уничтожения в представлении Гейзенберга:

$$A_{f_1}(t_1) \dots A_{f_s}(t_s),$$

при этом $A_f(t)$ были равны $a_f(t)$ или $a_f^\dagger(t)$. Здесь уравнения движения

$$\begin{aligned} i\frac{da_f}{dt} &= T(f)a_f - \lambda(f)a_{-f}^\dagger(\nu + L), \\ i\frac{da_f^\dagger}{dt} &= -T(f)a_f^\dagger - (\nu + L^\dagger)a_{-f}\lambda(f) \end{aligned} \tag{21}$$

начинают играть наиболее важную роль. Мы видим, что разница между уравнениями движения для гамильтонианов H и H_0 заключается в том, что в случае H величина L является оператором, а в случае H_0 величина L заменяется c-числом $C - \nu$.

Сначала рассмотрим случай $\nu > 0$, когда применимы неравенства (17). Систематически используя их вместе с техникой оценок, мы смогли доказать, что

$$\lim_{V\to\infty} \left\{ \langle A_{f_1}(t_1) \dots A_{f_s}(t_s) \rangle_H - \langle A_{f_1}(t_1) \dots A_{f_s}(t_s) \rangle_{H_0} \right\} = 0. \tag{22}$$

Поскольку предел

$$\lim_{V\to\infty} \langle A_{f_1}(t_1) \dots A_{f_s}(t_s) \rangle_{H_0} \tag{23}$$

с очевидностью существует (и даже может быть легко вычислен аналитически), мы сразу видим, что предельное значение среднего

$$\langle A_{f_1}(t_1) \dots A_{f_s}(t_s) \rangle = \lim_{V\to\infty} \langle A_{f_1}(t_1) \dots A_{f_s}(t_s) \rangle_H$$

существует и равно (23).

Случай $\nu = 0$ несколько более сложен, ибо для него выполняются только более слабые неравенства (15). Удобнее изучить эту ситуацию, рассматривая операторы (16) и записывая уравнения движения для них. Этим способом мы доказали, что соотношения (22) по-прежнему верны, когда $\nu = 0$, при условии, что *число операторов рождения и уничтожения среди* $A_{f_1} \dots A_{f_s}$ *одинаково.*

Предположим в противоположность этому, что разница между числом операторов рождения и уничтожения в рассматриваемом произведении равна $n \neq 0$. Легко видеть, что в этом случае предел

$$\lim_{\substack{\nu>0\\ \nu\to 0}} \langle A_{f_1}(t_1)\dots A_{f_s}(t_s)\rangle_\nu = \lim_{\substack{\nu>0\\ \nu\to 0}} \lim_{V\to 0} \left\{\langle A_{f_1}(t_1)\dots A_{f_s}(t_s)\rangle_{H_\nu}\right\} =$$

$$= \lim_{\substack{\nu>0\\ \nu\to 0}} \lim_{V\to 0} \left\{\langle A_{f_1}(t_1)\dots A_{f_s}(t_s)\rangle_{H_{0\nu}}\right\} \quad (24)$$

также существует. Этот предел интерпретируется нами как «квазисреднее»:

$$\langle A_{f_1}(t_1)\dots A_{f_s}(t_s)\rangle .$$

Поэтому мы примем следующее определение квазисреднего:

$$\langle A_{f_1}(t_1)\dots A_{f_s}(t_s)\rangle = \lim_{\substack{\nu>0\\ \nu\to 0}} \langle A_{f_1}(t_1)\dots A_{f_s}(t_s)\rangle_\nu , \quad (25)$$

которое показывает, что в случае $n=0$ квазисреднее просто совпадает с обычным средним.

Интересно отметить, что если слагаемые с источниками (18) гамильтониана были бы заменены слагаемыми (19), значение квазисреднего домножилось бы на $e^{in\varphi/2}$. Мы имеем здесь некое «скрытое» вырождение, потому что оно не проявляется в тех средних, которые только и имеют физический смысл, т. е. для которых $n=0$.

Те же самые заключения справедливы, если мы рассмотрим средние от полевых операторов в $\mathbf{r}$-представлении:

$$\left\langle \dots \Psi^\dagger(t_j, \mathbf{r}_j, s_j)\dots \Psi(t_k, \mathbf{r}_k, s_k)\dots \right\rangle . \quad (26)$$

Здесь среднее

$$\langle \dots \rangle$$

определено как обычное среднее

$$\lim_{V\to\infty} \langle \dots \rangle_H = \lim_{V\to\infty} \langle \dots \rangle_{H_0}$$

для случая $\nu > 0$ или для случая $\nu = 0$, $n = 0$. Если $\nu = 0$, $n \neq 0$, то (26) должно быть определено как квазисреднее.

Исследование средних типа (26) может представлять некоторый интерес, поскольку у нас имеется очень редкая нетривиальная модель, для которой можно доказать «принцип ослабления корреляций» непосредственным вычислением.

Рассмотрим, например, среднее

$$\left\langle \Psi^\dagger(t_1, \mathbf{r}_1, s_1)\Psi^\dagger(t_2, \mathbf{r}_2, s_2)\Psi(t_2', \mathbf{r}_2', s_2')\Psi(t_1', \mathbf{r}_1', s_1')\right\rangle . \quad (27)$$

Зафиксируем значения t_1, t_2, t_2', t_1' и положим

$$|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta'| \to \infty, \quad \alpha = 1,2, \quad \beta = 1,2.$$

Тогда асимптотическая форма выражения (27) будет равна произведению

$$\left\langle \Psi^{\dagger}(t_1, \mathbf{r}_1, s_1)\Psi^{\dagger}(t_2, \mathbf{r}_2, s_2)\right\rangle \left\langle \Psi(t_2', \mathbf{r}_2', s_2')\Psi(t_1', \mathbf{r}_1', s_1')\right\rangle$$

обычных средних ($\nu > 0$) или квазисредних ($\nu = 0$). Подобные свойства дают возможность введения понятия квазисреднего не только с помощью добавления к данному гамильтониану бесконечно малых слагаемых с источниками, но и путем рассмотрения асимптотического поведения обычных средних.

Мы дали здесь описание данного исследования для случая $\Theta = 0$. Следует подчеркнуть, что те же самые результаты можно получить, и даже более простым способом, для случая в $\Theta > 0$, причем случай $\Theta = 0$ является наиболее сложным с математической точки зрения.

До сих пор изучалась только простейшая модельная система, характеризующаяся редуцированным гамильтонианом, зато все результаты были установлены математически строго.

Обратимся теперь к общему случаю в теории сверхпроводимости и сверхтекучести, отказавшись от требования полной математической строгости. Рассмотрим сначала понятие вырождения состояния статистического равновесия. Понятие вырождения хорошо известно в квантовой механике, и его смысл касается собственных функций операторов, например гамильтониана.

На первый взгляд может показаться, что любое состояние статистического равновесия всегда является невырожденным. Действительно, среднее заданной динамической переменной A

$$\langle A\rangle = \frac{\operatorname{Sp} A e^{-H/\Theta}}{\operatorname{Sp} e^{-H/\Theta}} \tag{28}$$

всегда однозначно определено.

Но в действительности ситуация не настолько проста. Чтобы получить представление о существующих трудностях, рассмотрим случай идеально изотропной ферромагнитной среды при температуре ниже точки Кюри.

Вектор намагниченности обозначим через $\mathbf{M}$. Если нет внешнего магнитного поля, среднее значение $\mathbf{M}$, вычисленное по формуле (28), с очевидностью равно нулю. Таким образом, мы видим, что обычные средние не являются наилучшим средством для описания подобных состояний статистического равновесия. Включим бесконечно малое магнитное поле $\nu\mathbf{e}$ ($\nu > 0$); тогда

$$\lim_{\substack{\nu>0\\ \nu\to 0}} \langle \mathbf{M}\rangle$$

будет равен $\mathbf{e}A$, где $A \neq 0$ (ибо температура ниже точки Кюри).

Здесь мы можем ввести *понятие квазисреднего*. Квазисреднее $\langle A\rangle_{\mathbf{e}}$ динамической переменной может быть определено как

$$\lim_{\substack{\nu>0\\ \nu\to 0}} \langle \mathbf{M}\rangle_{\nu\mathbf{e}},$$

где

$$\langle A\rangle_{\nu\mathbf{e}} = \frac{\operatorname{Sp} A e^{-H_{\nu\mathbf{e}}/\Theta}}{\operatorname{Sp} e^{-H_{\nu\mathbf{e}}/\Theta}}$$

и $\langle H\rangle_{\nu\mathbf{e}}$ — гамильтониан, содержащий слагаемые с внешним магнитным полем. Мы ясно видим, что квазисредние действительно зависят от $\mathbf{e}$ и мы имеем вырождение, связанное с группой вращений $\mathbf{e}$. Также очевидно, что физические свойства в рассматриваемом случае описываются наилучшим образом не обычными средними, а квазисредними; обычные средние дают только усредненное значение

$$\int \langle A\rangle_{\mathbf{e}}\, d\mathbf{e}$$

квазисреднего, взятого по всем возможным направлениям $\mathbf{e}$.

Мы можем снять вырождение, фиксируя $\mathbf{e}$, например, в направлении оси z, т. е. вводя бесконечно малое магнитное поле, приложенное вдоль этой оси. Такая процедура всегда используется в теории ферромагнетизма. Отдельное понятие квазисреднего не вводилось явным образом в эту теорию, возможно, из-за тривиальности ситуации.

Рассмотрим теперь случай кристаллического состояния. Тогда ожидается, что средняя локальная плотность

$$\left\langle \Psi^{\dagger}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\right\rangle \tag{29}$$

является периодической функцией координат. Но если мы применим соотношение (28), мы сразу получим для (29) постоянное значение благодаря инвариантности относительно группы трансляций. В импульсном представлении обычное среднее (28) должно удовлетворять соотношению

$$\left\langle a_k^{\dagger} a_{k'}\right\rangle = 0, \quad \mathbf{k}\neq\mathbf{k}'$$

благодаря сохранению импульса. Мы видим, что понятие квазисреднего должно быть введено и в этой ситуации.

Добавим к трансляционно-инвариантному гамильтониану H бесконечно малое слагаемое, зависящее от внешнего поля:

$$\nu\int U(\mathbf{r})\Psi^{\dagger}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \quad \nu>0, \tag{30}$$

где $U(\mathbf{r})$ — периодическая функция $\mathbf{r}$ с подходящим периодом. Основная роль таких слагаемых — избавиться от инвариантности относительно группы трансляций и *фиксировать местоположение кристаллической структуры.*

Мы определяем квазисреднее $\langle A\rangle$ как

$$\lim_{\nu\to 0}\langle A\rangle_{\nu}, \quad \langle A\rangle_{\nu}=\lim_{V\to\infty}\frac{\operatorname{Sp} A\mathrm{e}^{-H_{\nu}/\Theta}}{\operatorname{Sp}\mathrm{e}^{-H_{\nu}/\Theta}},$$

где $\langle H\rangle_{\nu}$ — гамильтониан, дополненный слагаемым (30). Тогда квазисреднее

$$\left\langle \Psi^{\dagger}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\right\rangle$$

больше не является постоянным; оно есть периодическая функция $\mathbf{r}$, представляющая в действительности распределение плотности в кристалле.

Квазисредние в импульсном представлении

$$\left\langle a_k^{\dagger} a_{k'}\right\rangle \tag{31}$$

не обязаны равняться нулю, даже когда $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$. Правила отбора, основанные на законе сохранения импульса, здесь не работают. Легко видеть, что квазисредние (31) определены с точностью до множителя $e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\xi}$ с произвольным ξ. Действительно, если мы заменим $U(\mathbf{r})$ на одинаково приемлемую функцию $U(\mathbf{r}+\xi)$, то (31) должно быть домножено на $e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\xi}$. Указанное вырождение снимается благодаря фиксации формы внешнего поля $U(\mathbf{r})$.

Обратим теперь внимание на наиболее общий случай статистического равновесия макроскопической динамической системы. Вначале рассмотрим обычные средние

$$\left\langle \dots \Psi^{\dagger}(t_\alpha, \mathbf{r}_\alpha, s_\alpha) \dots \Psi(t_\beta, \mathbf{r}_\beta, s_\beta) \dots \right\rangle = \lim_{V\to\infty} \frac{\operatorname{Sp}\left\{\Psi^{\dagger}(t_\alpha, \mathbf{r}_\alpha, s_\alpha) \dots \Psi(t_\beta, r_\beta, s_\beta) \dots e^{-H/\Theta}\right\}}{\operatorname{Sp} e^{-H/\Theta}} \tag{32}$$

или соответствующие величины в импульсном представлении

$$\left\langle \dots a^{\dagger}_{p_\alpha, s_\alpha}(t_\alpha) \dots a_{p_\beta, s_\beta}(t_\beta) \dots \right\rangle. \tag{33}$$

Как можно заметить, аддитивные законы сохранения приводят к правилам отбора для обычных средних. Например, закон сохранения полного числа частиц требует обращения в нуль всех тех средних (32), (33), для которых число операторов рождения не равно числу операторов уничтожения. Закон сохранения полного импульса требует обращения в нуль всех тех средних (33), для которых

$$\sum p_\alpha - \sum p_\beta \neq 0$$

и т. д.

Теперь мы сформулируем общее определение вырожденности и невырожденности состояния статистического равновесия.

Введем в заданный гамильтониан бесконечно малое внешнее поле или слагаемые с источниками, которые нарушают упомянутые законы сохранения, и обсудим влияние этих слагаемых на значения обычных средних. Мы будем говорить, что рассматриваемое состояние статистического равновесия не вырождено, если эти средние испытывают только бесконечно малые приращения. Мы будем говорить о вырождении состояния статистического равновесия, если некоторые из средних (32), (33) приобретают *конечные* приращения и *правила отбора нарушаются на конечные величины.*

Поскольку мы рассматриваем только стабильные системы, те комбинации средних, которые соответствуют физическим величинам, не зависящим от значений фаз, направлений и т. д., могут испытывать только бесконечно малые приращения даже в случае вырождения.

Для вырожденных состояний статистического равновесия понятие квазисреднего может быть введено так, как объяснялось выше: квазисреднее $\langle A \rangle$ является предельным значением обычного среднего $\langle A \rangle_\nu$, соответствующего гамильтониану $\langle H \rangle_\nu$ с бесконечно малыми дополнительными слагаемыми, снимающими вырождение.

Подчеркнем еще раз, что при определении квазисредних обычный предельный переход статистической механики $V \to \infty$ должен совершаться первым, перед тем как мы устремляем ν к нулю.

Рассмотрим, например, ситуацию в теории сверхпроводимости (ниже точки перехода), где вырождение происходит с физической точки зрения благодаря появлению конденсата связанных пар в s-состоянии. В таких случаях вырождение может быть снято с помощью включения в гамильтониан слагаемых с источниками вида

$$-\nu \sum_f w(f)(a_f^\dagger a_{-f}^\dagger + a_{-f} a_f), \tag{34}$$

где

$$\nu > 0, \quad f = (p, s), \quad -f = (-p, -s), \quad w(-f) = -w(f)$$

и $w(f)$ — вещественная функция. Эти слагаемые нарушают калибровочную симметрию

$$a_f \to a_f e^{i\varphi},$$

связанную с законом сохранения полного числа фермионов.

Мы уже обсудили влияние таких слагаемых в случае модельной системы, описываемой редуцированным гамильтонианом. В общем случае ситуация остается такой же[1]. В частности, квазисредние

$$\langle a_{-f} a_f \rangle$$

принимают вещественные ненулевые значения, несмотря на правила отбора. Отметим также, что в теории сверхтекучести бозе-систем слагаемые с источниками, снимающими вырождение, могут быть выбраны в форме

$$-\nu \sqrt{V}\,(a_0 + a_0^\dagger).$$

Из-за этих слагаемых мы можем рассматривать оба оператора a_0 и $a_0^\dagger$ как макроскопические c-числа, равные $\sqrt{N}$ с асимптотической точностью.

Общие понятия вырождения состояний статистического равновесия и квазисредних были введены здесь ввиду их приложения к теории возмущений в задачах статистической механики. Как хорошо известно, в последние годы были развиты варианты мощной техники, использующие методы частичного суммирования в рамках теории возмущений. Здесь мы имеем в виду диаграммную технику Фейнмана и ее различные модификации и обобщения. Среди некоторых более старых подходов мы также можем упомянуть метод Фока, который очень удобен для вычисления «первого приближения».

Тем не менее мы хотим указать сейчас на некоторые аспекты этих вариантов техники, которые должны быть прояснены. Поучительно заметить, например, что различные попытки использовать диаграммный подход Фейнмана в его традиционной форме потерпели в теории кристаллов неудачу, так же как и в теории сверхпроводимости. Под традиционной формой использо-

[1] Существует отличие от рассмотренного выше случая модельной системы. В том случае все упомянутые результаты были доказаны с полной математической строгостью, а в общем случае мы должны удовлетвориться аргументами более эвристического типа, принятыми при исследовании большинства проблем статистической механики.

вания диаграмм Фейнмана мы подразумеваем процедуру введения диаграмм, содержащих только те линии, которые разрешены всеми правилами отбора.

Ссылаясь на проведенное обсуждение, мы видим, что главная причина подобных трудностей заключается в том, что вырождение не было снято перед использованием теории возмущений. Мы можем теперь сформулировать в виде общего принципа следующее правило.

Чтобы использовать любую форму теории возмущений для изучения вырожденного состояния статистического равновесия, мы должны сначала снять вырождение или, что то же самое, мы должны работать не с обычными средними, удовлетворяющими всем правилам отбора, а с квазисредними, которые не удовлетворяют некоторым из них.

Следовательно, диаграммы должны содержать и «аномальные линии», которые также необходимо ввести (по крайней мере частично) в просуммированной форме. Такие линии соответствуют «опасным» диаграммам в том смысле, что они дают конечный вклад, несмотря на то что формально они появляются благодаря бесконечно малым слагаемым в гамильтониане.

Можно заметить, что эти бесконечно малые внешние поля или слагаемые с источниками могут быть опущены в реальных вычислениях. С чисто технической точки зрения их единственная роль состоит в предоставлении нам «разрешения» на использование аномальных функций Грина, основанных на соответствующих квазисредних.

Например, для того чтобы получить правильные результаты в теории кристаллического состояния, диаграммы должны содержать не только линии $\overbrace{a_p^\dagger a_p}$, «сохраняющие» импульс, но и аномальные линии $\overbrace{a_p^\dagger a_{p'}}$. В теории сверхпроводимости диаграммы должны содержать не только обычные линии $\overbrace{a_f^\dagger a_f}$, но также аномальные линии $\overbrace{a_{-f} a_f}$ $\overbrace{a_f^\dagger a_{-f}^\dagger}$ и т. д.

Основная причина успеха нашего $(u-v)$-преобразования при получении правильных результатов в теории сверхпроводимости была обусловлена тем, что оно позволило нам работать с квазисредними. По-прежнему открыт вопрос: имеет ли все это какое-либо значение для квантовой теории поля? Ввиду недавних замечаний Намбу мы можем представить возможность того, что в квантовой теории поля диаграммы Фейнмана также могут содержать больше линий, чем это разрешено правилами отбора.

К ВОПРОСУ О ГИДРОДИНАМИКЕ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ*

Введение

Целью наших лекций является вывод уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости исходя из уравнений движения системы одинаковых бозе-частиц и получение на этом пути «гидродинамического приближения» для функций Грина.

Для простоты изложения мы ограничимся здесь приближением идеальной жидкости.

Рассмотрим систему одинаковых бозе-частиц с парным взаимодействием, гамильтониан которой в представлении вторичного квантования имеет следующий вид[1]:

$$H = \frac{1}{2m}\int \nabla\psi^+(t,r)\nabla\psi(t,r)\,d\mathbf{r} - \lambda\int \psi^+(t,r)\psi(t,r)\,d\mathbf{r} + \\ + \frac{1}{2}\int \Phi(r-r')\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{r}' + \\ + \int\{\eta(t,r)\psi^+(t,r) + \eta^*(t,r)\psi(t,r) + U(t,r)\psi^+(t,r)\psi(t,r)\}\,d\mathbf{r}.$$

Здесь λ — постоянная; $\psi^+(t,r)$, $\psi(t,r)$ — бозе-операторы в представлении Гейзенберга с обычными перестановочными соотношениями.

Обратим сейчас внимание на то, что в форму гамильтониана мы ввели кроме обычных членов еще дополнительные члены с «источниками частиц» $\eta(t,r)$, $\eta^*(t,r)$ и с внешним полем $U(t,r)$; η, η^+, U — заданные c-функции t, r. Введение таких «внешних источников» нам нужно будет для того, чтобы брать по отношению к ним вариации от обычных гидродинамических средних и таким образом получать выражения для функций Грина.

§ 1. Предварительные тождества

Для получения уравнений гидродинамики нам потребуется ряд тождеств, выражающих производные по времени следующих «локальных величин»:

$$\rho(t,r) = \langle\psi^+(t,r)\psi(t,r)\rangle, \quad \phi(t,r) = \langle\psi(t,r)\rangle, \tag{1.1a}$$

---

* Препринт ОИЯИ Р-1395. Дубна, 1963; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 356.

[1] Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = 1$. Под знаком функциональной зависимости условимся писать вместо $\mathbf{r}$ просто r.

$$j_\alpha(t,r)=\frac{i}{2}\left\langle\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\alpha}\psi(t,r)-\psi^+(t,r)\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\alpha}\right\rangle,\quad \alpha=1,2,3, \tag{1.1б}$$

$$\rho(t,r)\epsilon(t,r)=-\frac{1}{4m}\langle(\Delta\psi^+(t,r))\psi(t,r)+\psi^+(t,r)(\Delta\psi(t,r))\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\int\Phi(r-r')\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle\,d\mathbf{r},$$

представляющих среднюю плотность числа частиц ρ, средний поток $\mathbf{j}$ и среднюю энергию на одну частицу ε.

Скобки $\langle\ \rangle$ в выражениях (1.1) обозначают средние, взятые с некоторым, вообще говоря, неравновесным статистическим оператором.

Чтобы найти производные по времени от величин (1.1), можно воспользоваться уравнениями движения, которые в рассматриваемом случае гамильтониана H имеют следующий вид:

$$i\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial t}=-\lambda\psi(t,r)-\frac{1}{2m}\Delta\psi(t,r)+$$
$$+\int\Phi(r-r')\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\,\psi(t,r)+U(t,r)\psi(t,r)+\eta(t,r), \tag{1.2}$$

$$i\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial t}=\lambda\psi^+(t,r)+\frac{1}{2m}\Delta\psi^+(t,r)-$$
$$-\psi^+(t,r)\int\Phi(r-r')\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'-U(t,r)\psi^+(t,r)-\eta^*(t,r).$$

Дифференцируя (1.1), получим

$$\frac{\partial\rho(t,r)}{\partial t}=\left\langle\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial t}\psi(t,r)+\psi^+(t,r)\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial t}\right\rangle=$$
$$=\frac{i}{2m}\langle-(\Delta\psi^+(t,r))\psi(t,r)+\psi^+(t,r)(\Delta\psi(t,r))\rangle+$$
$$+\int\Phi(r-r')\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)-$$
$$-\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\,d\mathbf{r}'+i\eta^*(t,r)\phi(t,r)-i\phi^*(t,r)\eta(t,r).$$

Но

$$\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left\langle\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\alpha}\psi(t,r)-\psi^+(t,r)\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\alpha}\right\rangle=$$
$$=\langle(\Delta\psi^+(t,r))\psi(t,r)-\psi^+(t,r)(\Delta\psi(t,r))\rangle.$$

Поэтому окончательно имеем

$$m\frac{\partial\rho(t,r)}{\partial r}+\sum_\alpha\frac{\partial j\alpha(t,r)}{\partial r_\alpha}=im[\eta^*(t,r)\phi(t,r)-\phi^*(t,r)\eta(t,r)]. \tag{1.3}$$

Точно так же получим для плотности тока[1]:

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{2}\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial r_\alpha} i\frac{\partial \psi^+}{\partial t}\right)\psi + \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha} i\frac{\partial \psi}{\partial t} - i\frac{\partial \psi^+}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} - \psi^+\left(\frac{\partial}{\partial r_\alpha} i\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{i}{4m}\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\Delta\psi^+\right)\psi - \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha}(\Delta\psi) - (\Delta\psi^+)\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} + \psi^+\left(\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\Delta\psi\right)\right\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\int \Phi(r-r')\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\right)\psi(t,r) -\right.$$

$$- \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha}\int \Phi(r-r')\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\,\psi(t,r) +$$

$$+ \psi^+\left(\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\int \Phi(r-r')\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\,\psi(t,r)\right) -$$

$$\left. + \int \Phi(r-r')\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\frac{\partial \psi(t,r)}{\partial r_\alpha}\right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha}\eta - \frac{\partial \eta^*}{\partial r_\alpha}\psi + \eta^*\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} - \psi^+\frac{\partial \eta}{\partial r_\alpha}\right\rangle -$$

$$- \langle\psi^+\psi\rangle\frac{\partial U}{\partial r_\alpha} + \frac{1}{2}\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\lambda\psi^+\right)\psi - \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha}\lambda\psi - \lambda\psi^+\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} + \psi^+\left(\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\lambda\psi\right)\right\rangle.$$

Используя введенные нами величины и производя некоторые упрощения, получим

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{4m}\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\Delta\rho - \frac{1}{2m}\sum_\beta\left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} + \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle -$$

$$- \int \frac{\partial \Phi(r-r')}{\partial r_\alpha}\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\,d\mathbf{r}' +$$

$$+ \rho\frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\lambda - U) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r_\alpha}\eta + \frac{\partial \phi}{\partial r_\alpha}\eta^* - \phi^*\frac{\partial \eta}{\partial r_\alpha} - \phi\frac{\partial \eta^*}{\partial r_\alpha}\right).$$

Удобно ввести новую величину $D_t(r, r-r')$:

$$\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle \equiv D_t(r, r'-r) = D_t(r', r-r') =$$

$$= \frac{1}{2}\{D_t(r', r-r') + D_t(r, r'-r)\}.$$

С помощью этой величины последнее соотношение после перехода к новой переменной интегрирования $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ может быть записано в виде

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{4m}\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\Delta\rho - \frac{1}{2m}\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} + \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle -$$

[1] В дальнейшем аргументы t, r, y, ψ, ψ^+ и т. д. будут опускаться, за исключением случаев, когда это может привести к недоразумениям.

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}\{D_t(r,-R)+D_t(r-R,R)\}\,d\mathbf{R}+$$
$$+\rho\frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\lambda-U)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial r_\alpha}\eta+\eta^*\frac{\partial\phi}{\partial r_\alpha}-\phi^*\frac{\partial\eta}{\partial r_\alpha}-\frac{\partial\eta^*}{\partial r_\alpha}\phi\right). \quad (1.4)$$

Введем последнее тождество:

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t}=-\frac{1}{4m}\left\langle\left(\Delta\frac{\partial\psi^+}{\partial t}\right)\psi+(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi^+}{\partial t}\Delta\psi+\psi^+\left(\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\int\Phi(r-r')\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle\,d\mathbf{r}'.$$

Займемся вычислением в нем последнего слагаемого:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle=$$
$$=\frac{1}{2m}\langle(\Delta\psi^+(t,r))\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle+$$
$$+\frac{1}{2m}\langle\psi^+(t,r)(\Delta\psi^+(t,r'))\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle-$$
$$-\frac{1}{2m}\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')(\Delta\psi(t,r'))\psi(t,r)\rangle+$$
$$+\frac{1}{2m}\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')(\Delta\psi(t,r))\rangle-$$
$$-\int\Phi(r-r_1)\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r_1)\psi(t,r_1)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle\,d\mathbf{r}_1+$$
$$+\int\Phi(r-r_1)\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi^+(t,r_1)\psi(t,r_1)\psi(t,r)\rangle\,d\mathbf{r}_1-$$
$$-\int\Phi(r'-r_1)\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi^+(t,r_1)\psi(t,r_1)\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle\,d\mathbf{r}_1+$$
$$+\int\Phi(r'-r_1)\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi^+(t,r_1)\psi(t,r_1)\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle\,d\mathbf{r}_1+$$
$$+\eta(t,r)\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\rangle-\eta^*(t,r)\langle\psi^+(t,r')\psi(t,r)\psi(t,r)\rangle+$$
$$+\eta(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r)\rangle-\eta^*(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle.$$

Пользуясь перестановочностью операторов $\psi^+(t,r)\psi(t,r)$ и $\psi^+(t,r')\times$ $\times\psi(t,r')$, получим отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle=\frac{i}{2m}\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\times$$
$$\times(\Delta\psi(t,r'))\psi(t,r)+\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')(\Delta\psi(t,r))-$$
$$-(\Delta\psi^+(t,r))\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)-\psi^+(t,r)(\Delta\psi^+(t,r'))\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle+$$
$$+i\eta^*(t,r)\langle\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle+i\eta^*(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle-$$
$$-i\eta(t,r)\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\rangle-i\eta(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r)\rangle.$$

Подставляя это равенство в правую часть первого тождества, получим с учетом уравнений движения

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = \frac{i}{8m^2}\langle(\Delta\Delta\psi^+)\psi - (\Delta\psi^+)(\Delta\psi) + (\Delta\psi^+)(\Delta\psi) - \psi^+(\Delta\Delta\psi)\rangle +$$
$$+ \frac{i}{4m}\left\langle - \left(\Delta\int \Phi(r-r')\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\right)\psi(t,r) + \right.$$
$$+ \int \Phi(r-r')[(\Delta\psi^+(t,r))\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r) -$$
$$- \psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')(\Delta\psi(t,r))]\,d\mathbf{r}' +$$
$$\left. + \psi^+(t,r)\left(\Delta\int \Phi(r-r')\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\,d\mathbf{r}'\right)\right\rangle +$$
$$+ \frac{i}{4m}\int \Phi(r-r')\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')(\Delta\psi(t,r'))\psi(t,r) +$$
$$+ \psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')(\Delta\psi(t,r)) - (\Delta\psi^+(t,r))\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r) -$$
$$- \psi^+(t,r)(\Delta\psi^+(t,r'))\psi(t,r')\psi(t,r)\,d\mathbf{r}' +$$
$$+ \frac{i}{2}\int \Phi(r-r')\{\eta^*(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle +$$
$$+ \eta^*(t,r)\langle\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle -$$
$$- \langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\rangle\eta(t,r) - \langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r)\rangle\eta(t,r')\}\,d\mathbf{r}' -$$
$$- \frac{i}{4m}\langle(\Delta\eta^*)\psi + \eta^*\,\Delta\psi - (\Delta\psi^+)\eta - \psi^+(\Delta\eta)\rangle -$$
$$- \frac{i}{2m}\sum_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial r_\alpha}(U-\lambda)\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_a}\psi - \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle\right]. \quad (*)$$

Заметим теперь, что

$$\sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial r_\beta}\Delta\psi^+\right)\psi - \Delta\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta} - \psi^+\frac{\partial}{\partial r_\beta}\Delta\psi + \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\Delta\psi\right\} =$$
$$= (\Delta\Delta\psi^+)\psi - \psi^+(\Delta\Delta\psi) =$$
$$= \sum_\beta \frac{\partial^2}{\partial r_\beta^2}\{(\Delta\psi^+)\psi - \psi^+(\Delta\psi)\} - 2\sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\{(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta} - \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}(\Delta\psi)\right\}.$$

Преобразуем далее члены, содержащие Φ:

$$- \left(\Delta\int \Phi(r-r')\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\right)\psi(t,r) +$$
$$+ (\Delta\psi^+(t,r))\int \Phi(r-r')\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\,\psi(t,r) +$$
$$+ \psi^+(t,r)\left(\Delta\int \Phi(r-r')\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\right)\psi(t,r) -$$
$$- \int \Phi(r-r')\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\,(\Delta\psi(t,r)) =$$

$$= -2\sum_\beta \int \frac{\partial\Phi(r-r')}{\partial r_\beta}\,\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\,\psi(t,r) +$$

$$+ 2\sum_\beta \int \frac{\partial\Phi(r-r')}{\partial r_\beta}\,\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\,\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta}.$$

Кроме того,

$$\int \Phi(r-r')\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\,\Delta\psi(t,r) -$$

$$- \int \Phi(r-r')(\Delta\psi^+(t,r))\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\mathbf{r}'\,\psi(t,r) =$$

$$= \sum_\beta \int \Phi(r-r')\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\{\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\right\} d\mathbf{r}' =$$

$$= \sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}\int \Phi(r-r')\left\{\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\right\} d\mathbf{r}' -$$

$$- \sum_\beta \int \frac{\partial\Phi(r-r')}{\partial r_\beta}\left\{\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\partial\psi(t,r)\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\right\} d\mathbf{r}'.$$

Аналогично получим равенство

$$\int \Phi(r-r')\psi^+(t,r)\{\psi^+(t,r')(\Delta\psi(t,r')) - (\Delta\psi^+(t,r'))\psi(t,r')\}\psi(t,r)\,d\mathbf{r}' =$$

$$= \sum_\beta \int \frac{\partial\Phi(r-r')}{\partial r_\beta}\,\psi^+(t,r)\left\{\psi^+(t,r')\frac{\partial\psi(t,r')}{\partial r'_\beta} - \frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r'_\beta}\,\psi(t,r)\right\} d\mathbf{r}'.$$

Подставляя полученные равенства в формулу (*), будем иметь окончательно следующее уравнение:

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = \frac{i}{8m^2}\,\Delta\langle(\Delta\psi^+)\psi - \psi^+(\Delta\psi)\rangle +$$

$$+ \frac{i}{4m}\sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\{-\frac{1}{m}\left\langle(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta} - \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\,(\Delta\psi)\right\rangle +\right.$$

$$+ \int \Phi(r-r')\left\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta} -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\right\rangle d\mathbf{r}'\right\} +$$

$$+\frac{i}{4m}\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(r-r')}{\partial r_\beta}\left\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta}-\right.$$

$$-\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)+$$

$$\left.+\psi^+(t,r)\left[\psi^+(t,r')\frac{\partial\psi(t,r')}{\partial r'_\beta}-\frac{\partial\psi^+(t,r')}{\partial r'_\beta}\psi(t,r')\right]\psi(t,r)\right\rangle d\mathbf{r}'-$$

$$-\frac{1}{m}\sum_\beta j_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(U-\lambda)+\frac{i}{4m}(\eta\,\Delta\phi^*-\eta^*\,\Delta\psi+\phi^*\,\Delta\eta-\phi\,\Delta\eta^*)+$$

$$+\frac{i}{2}\int\Phi(r-r')\{\eta^*(t,r)\langle\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle+$$

$$+\eta^*(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle-$$

$$-\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r)\rangle\eta(t,r')-\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\rangle\eta(t,r)\}\,d\mathbf{r}'.$$

Если ввести величину

$$G_t^{(\alpha)}(r,r'-r)=$$

$$=\frac{i}{4m}\left\{\psi^+(t,r')\left(\psi^+(t,r)\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\alpha}-\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\alpha}\psi(t,r)\right)\psi(t,r')\right\\rangle \tag{1.5}$$

и в некоторых интегралах ввести новую переменную интегрирования $\mathbf{R}=\mathbf{r}'-\mathbf{r}$, то полученное тождество принимает вид

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t}=\frac{i}{8m^2}\Delta\langle(\Delta\psi^+)\psi-\psi^+(\Delta\psi)\rangle+$$

$$+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\{\frac{i}{4m^2}\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\Delta\psi-(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle+\int\Phi(R)G_t^{(\beta)}(r,R)\,d\mathbf{R}\right\}+$$

$$+\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}\{G_t^{(\beta)}(r,-R)+G_t^{(\beta)}(r-R,R)\}\,d\mathbf{R}-\frac{1}{m}\sum_\beta j_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(U-\lambda)+$$

$$+\frac{i}{4m}(\Delta\phi^*\eta-\eta^*\Delta\phi+\phi^*\Delta\eta-\eta^*\phi\Delta)+\frac{i}{2}\int\Phi(r-r')\times$$

$$\times[\eta^*(t,r)\langle\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle+\eta^*(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle-$$

$$-\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r)\rangle\eta(t,r')-\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\rangle\eta(t,r)]\,d\mathbf{r}'. \tag{1.6}$$

§ 2. Уравнения гидродинамики нормальной жидкости

Приступим теперь к выводу уравнений гидродинамики для случая нормальной несверхтекучей жидкости.

Заметим, что этот вопрос уже был исследован в работах К. П. Гурова [1], и мы им здесь будем заниматься только в целях дальнейшего обобщения на случай сверхтекучей жидкости.

Для поставленной в этом параграфе цели источники η, η^* несущественны, и мы поэтому положим здесь

$$\eta = \eta^* = 0.$$

Рассмотрим прежде всего состояние статистического равновесия нормальной жидкости. Это состояние характеризуется обычными параметрами: плотностью числа частиц ρ, температурой θ, скоростью $\mathbf{v}$ движения жидкости как целого.

Зависимость от скорости $\mathbf{v}$ тривиальна. Посредством преобразования операторных функций

$$\psi \to \mathrm{e}^{im\mathbf{v}\mathbf{r}}$$

для состояния статистического равновесия покоящейся жидкости мы можем выразить значения средних

$$\langle \dots \rangle_{\rho,\theta,\mathbf{v}}$$

через значения средних

$$\langle \dots \rangle_{\rho,\theta,0}.$$

Имеем, например,

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= m\rho\mathbf{v}, \\ \epsilon &= \epsilon^0 + \frac{mv^2}{2} = \epsilon(\rho,\theta) + \frac{mv^2}{2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\epsilon(\rho,\theta)$ будет средней энергией, отнесенной к одной частице, для состояния статистического равновесия покоящейся частицы.

В дальнейшем нам придется иметь дело со средними типа

$$\mathcal{U} = \langle (\mathcal{D}_1\psi^+(t,r))(\mathcal{D}_2\psi(t,r)) \rangle_{\rho,\theta,\nu},$$
$$\mathcal{B} = \langle (\mathcal{D}_1\psi^+(t,r))(\mathcal{D}_2\psi^+(t,r'))(\mathcal{D}_3\psi(t,r'))(\mathcal{D}_4\psi(t,r)) \rangle_{\rho,\theta,\nu},$$

где $\mathcal{D}_\nu$ — линейные комбинации из постоянных и операторов дифференцирования по пространственным переменным (см., например, выражения для функций $\mathcal{D}_t$ и $G_t^{(a)}$ в § 1); в частности, $\mathcal{D}_\nu$ может быть просто равна единице.

Благодаря полной пространственной однородности жидкости в состоянии статистического равновесия нетрудно заметить, что

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho,\theta,v),$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\rho,\theta,v/(r-r')).$$

Заметим также, что если имеется *постоянное* внешнее поле

$$U(t,r) = U = \mathrm{const},$$

то ни $\mathcal{U}$, ни $\mathcal{B}$ от такой постоянной U зависеть не будут, поскольку зависимость от U исключается градиентным преобразованием

$$\psi \to \mathrm{e}^{iUt}\psi$$

(а $\mathcal{U}$ и $\mathcal{B}$ инвариантны относительно этих преобразований).

Перейдем теперь к рассмотрению изучаемых в гидродинамике неравновесных процессов, для которых неравновесные величины типа

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(t,r) &= \langle(\mathcal{D}_1\psi^+(t,r))(\mathcal{D}_2\psi(t,r))\rangle,\\ \mathcal{B}(t,r,r-r') &= \langle(\mathcal{D}_1\psi^+(t,r))(\mathcal{D}_2\psi^+(t,r'))(\mathcal{D}_3\psi(t,r'))(\mathcal{D}_4\psi(t,r))\rangle,\end{aligned} \tag{2.2}$$

а также, разумеется, и внешнее поле $U(t,r)$ при временных и пространственных трансляциях меняются достаточно медленно.

Предполагаем, что отклонения от статистического равновесия асимптотически затухают, так что можно определить хотя бы по порядку величины время релаксации T и длину свободного пробега l. Мы, таким образом, будем рассматривать такие неравновесные процессы, для которых величины (2.2) и $U(t,r)$ меняются достаточно мало при трансляциях

$$t \to t+t_0, \quad r \to r+r_0, \quad r' \to r'+r'_0, \quad |t_0| \approx T, \quad |r_0| \approx l$$

и в окрестности каждой точки $(t,\mathbf{r})$ имеются лишь малые отклонения от «локального статистического равновесия».

Говоря более детально, будем предполагать, что величины типа (2.2) достаточно мало отличаются от соответствующих равновесных величин

$$\mathcal{U}(\rho(t,r),\theta(t,r),v(t,r)), \quad \mathcal{B}(\rho(t,r),\theta(t,r),v(t,r)/(r-r')) \tag{2.3}$$

(тем меньше, чем меньше градиенты ρ, θ, v, U), где $\theta(t,r)$, $\mathbf{v}(t,r)$ определяются уравнениями (2.1), т. е. выражаются через поток $\mathbf{j}$ и среднюю энергию ϵ в данной точке.

Заметим, что предположение о том, что для процессов с достаточно малыми градиентами ρ, θ, v, U в каждой малой области приближенно имеется локальное статистическое равновесие, весьма существенно для возможности перехода к уравнениям гидродинамики.

Так, например, возьмем случай, когда в данной динамической системе взаимодействие полностью отсутствует — система состоит из невзаимодействующих бозе-частиц.

Тогда мы, конечно, можем рассматривать процессы со сколь угодно малыми градиентами ρ, j, ϵ, ... и формально ввести локальные $\mathbf{v}$ и θ. Только при этом величины типа (2.2), вообще говоря, не будут даже приближенно выражаться их «квазиравновесными» значениями (2.3). Именно в силу такого положения уравнения гидродинамики не будут верны для систем полностью невзаимодействующих частиц.

Заметим еще, что обычный вывод уравнений гидродинамики (Гильберта—Чепмена—Энскога) для газов из уравнения Больцмана как раз основан на том, что это уравнение имеет решения, близкие к решению в локально равновесном состоянии, и потому допускающие разложения по степеням градиентов.

После сделанных замечаний возвратимся к используемым предположениям о характере рассматриваемых неравновесных процессов.

Чтобы сформулировать их в виде, удобном для расчетов, целесообразно ввести некоторый малый параметр μ, характеризующий степень медленности процесса и отступления от изотропии. Средние типа (2.2) и внешнее поле

будем представлять в следующем виде:

$$\begin{aligned} &U(t,r)=\widetilde{U}(\mu t,\mu r)=U(r,\xi),\\ &\mathcal{U}(t,r)=\widetilde{\mathcal{U}}(\mu t,\mu r;\mu)=\widetilde{\mathcal{U}}(r,\xi;\mu),\\ &\mathcal{B}(t,r)=\widetilde{\mathcal{B}}(\mu t,\mu r,r-r';\mu)=\widetilde{\mathcal{B}}(\tau,\xi,R;\mu),\\ &\tau=\mu t,\quad \boldsymbol{\xi}=\mu\mathbf{r},\quad \mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В частности, можем написать также

$$\rho(t,r)=\widetilde{\rho}(\tau,\xi),\quad \mathbf{j}(t,r)=\widetilde{\mathbf{j}}(\tau,\xi),\quad \epsilon(t,r)=\widetilde{\epsilon}(\tau,\xi).$$

Представления (2.4) оформляют допущение о медленности изменения во времени и слабом отступлении от локальной изотропии.

Чтобы выразить допущение о слабом отклонении от локального статистического равновесия, напишем

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathcal{U}}(\tau,\xi;\mu)=\widetilde{\mathcal{U}}^{(0)}(\tau,\xi)+\mu\widetilde{\mathcal{U}}^{(1)}(\tau,\xi)+\mu^2\widetilde{\mathcal{U}}^{(2)}(\tau,\xi)+\dots,\\ &\widetilde{\mathcal{B}}(\tau,\xi,R;\mu)=\widetilde{\mathcal{B}}^{(0)}(\tau,\xi,R)+\mu\widetilde{\mathcal{B}}^{(1)}(\tau,\xi,R)+\mu^2\widetilde{\mathcal{B}}^{(2)}(\tau,\xi,R)+\dots,\\ &\widetilde{\mathcal{U}}^{(0)}(\tau,\xi)=\mathcal{U}(\widetilde{\rho}(\tau,\xi),\widetilde{\theta}(\tau,\xi),\widetilde{v}(\tau,\xi)),\\ &\widetilde{\mathcal{B}}^{(0)}(\tau,\xi,R)=\mathcal{U}(\widetilde{\rho}(\tau,\xi),\widetilde{\theta}(\tau,\xi),\widetilde{v}(\tau,\xi)|R), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\widetilde{\theta}$ и $\widetilde{v}$ определены соотношениями

$$\begin{aligned} &\theta\mathbf{v}=\frac{1}{m\widetilde{\rho}}\widetilde{\mathbf{j}},\\ &\widetilde{\epsilon}=\epsilon(\widetilde{\rho},\widetilde{\theta})+\frac{m\widetilde{v}^2}{2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Далее, $\widetilde{\mathcal{U}}^{(1)}$, $\widetilde{\mathcal{B}}^{(1)}$ должны быть линейными формами по отношению к градиентам $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{\theta}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{U}$ и т. д.

Таким образом, пользуясь (2.5), мы предполагаем, что величины типа $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}$ можно разлагать по градиентам ρ, v, θ, U.

Фактически такое разложение мы получим, если будем иметь кинетическое уравнение типа Больцмана.

Перейдем теперь непосредственно к установлению уравнений гидродинамики. Мы будем иметь дело с функциями $\mathcal{D}_t(r,R)$, $G_t^{(\alpha)}(r,R)$, принадлежащими к типу $\mathcal{B}$. Положим поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t(r,R)&=\widetilde{\mathcal{D}}_\tau(\xi,R;\mu),\\ G_t^{(\alpha)}(r,R)&=\widetilde{G}_\tau^{(\alpha)}(\xi,R;\mu), \end{aligned}$$

или в более сокращенной записи

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^{(\alpha)}(r,R)&=\widetilde{\mathcal{D}}_\tau^{(\alpha)}(\xi,R),\\ G_t^{(\alpha)}(r,R)&=\widetilde{G}_\tau^{(\alpha)}(\xi,R). \end{aligned}$$

Перейдем в тождествах предыдущего параграфа от переменных $(t,\mathbf{r})$ к переменным $(\tau,\boldsymbol{\xi})$.

Тогда из уравнений (1.1), (1.2), (1.6) получим

$$m\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\tau}+\sum_{\beta}\frac{\partial\widetilde{j}_{\beta}(\tau,\xi)}{\partial\xi_{\beta}}=0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial\widetilde{j}_{\alpha}(\tau,\xi)}{\partial\tau}=\frac{1}{2m}\sum_{\beta}\frac{\partial}{\partial\xi_{\beta}}\left\{\delta_{\alpha\beta}\mu^{2}\frac{\Delta\xi}{2}\,\widetilde{\rho}(\tau,\xi)-\left\langle\frac{\partial\psi^{+}}{\partial r_{\alpha}}\frac{\partial\psi}{\partial r_{\beta}}+\frac{\partial\psi^{+}}{\partial r_{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial r_{\alpha}}\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\mu}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_{\alpha}}\left\{\widetilde{\mathcal{D}}_{\tau}(\xi,-R)+\widetilde{\mathcal{D}}_{\tau}(\xi-\mu R,R)\right\}d\mathbf{R}\right\}-\widetilde{\rho}(\tau,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_{\alpha}}\widetilde{U}(\tau,\xi), \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial(\widetilde{\rho\epsilon})}{\partial\tau}=\frac{i\mu}{8m^{2}}\Delta_{\xi}\langle(\Delta\psi^{+})\psi-\psi^{+}(\Delta\rho)\rangle+$$

$$+\sum_{\beta}\frac{\partial}{\partial\xi_{\beta}}\left\{\frac{i}{4m^{2}}\left\langle\frac{\partial\psi^{+}}{\partial r_{\beta}}\Delta\psi-(\Delta\psi^{+})\frac{\partial\psi}{\partial r_{\beta}}\right\rangle+\int\Phi(R)\widetilde{G}_{\tau}^{(\beta)}(\xi,R)\,d\mathbf{R}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\mu}\sum_{\beta}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_{\beta}}\{\widetilde{G}_{\tau}^{(\beta)}(\xi,-R)+\widetilde{G}^{(\beta)}(\xi-\mu R,R)\}\,d\mathbf{R}+\frac{1}{m}\sum_{\beta}\widetilde{j}_{\beta}\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\xi_{\beta}}. \tag{2.9}$$

Заметим, что в уравнение (2.8) входит величина $\widetilde{\mathcal{D}}_{\tau}(\xi-\mu R,R)$ с быстро убывающим при увеличении $|\mathbf{R}|$ множителем $\partial\Phi(R)/\partial R_{\alpha}$.

Разлагая ее по степеням μR, получим для соответствующего члена в уравнении (2.8) равенство

$$\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_{\alpha}}\left\{\widetilde{\mathcal{D}}_{\tau}(\xi,-R)+\widetilde{\mathcal{D}}_{\tau}(\xi,R)-\mu\sum_{\beta}R_{\beta}\frac{\partial\widetilde{D}_{\tau}(\xi,R)}{\partial\xi_{\beta}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu^{2}}{2}\sum_{\beta,\gamma}R_{\alpha}R_{\beta}\frac{\partial^{2}\widetilde{\mathcal{D}}_{\tau}(\xi,R)}{\partial\xi_{\beta}\,\partial\xi_{\gamma}}+O((\mu R)^{3})\right\}d\mathbf{R}=$$

$$=-\mu\sum_{\beta}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_{\alpha}}R_{\beta}\frac{\partial\widetilde{D}_{\tau}(\xi,R)}{\partial\xi_{\beta}}\,d\mathbf{R}+O(\mu^{3}).$$

Мы воспользовались здесь тем, что $(\widetilde{\mathcal{D}}_{\tau}(\xi,-R)+\widetilde{\mathcal{D}}\tau(\xi,R))$ является четной функцией R, и, кроме того, сама $\widetilde{\mathcal{D}}_{\tau}(\xi,R)$ является четкой функцией R с точностью до величин порядка μ. В результате, оставляя только члены порядка μ, получим уравнение

$$\frac{\partial\widetilde{j}_{\alpha}}{\partial\tau}=\frac{1}{2m}\sum_{\beta}\frac{\partial}{\partial\xi_{\beta}}\left\{-\left\langle\frac{\partial\psi^{+}}{\partial r_{\alpha}}\frac{\partial\psi}{\partial r_{\beta}}+\frac{\partial\psi^{+}}{\partial r_{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial r_{\alpha}}\right\rangle\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\beta}\frac{\partial}{\partial\xi_{\beta}}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_{\alpha}}R_{\beta}\widetilde{\mathcal{D}}_{\tau}(\xi,R)\,d\mathbf{R}-\widetilde{\rho}\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\xi_{\alpha}},$$

или

$$\frac{\partial\widetilde{j}_{\alpha}}{\partial\tau}=\sum_{\beta}\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\xi_{\beta}}-\widetilde{\rho}\frac{\partial U}{\partial\xi_{\alpha}}, \tag{2.10}$$

где

$$T_{\alpha\beta}(\tau,\xi)=-\frac{1}{2m}\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}+\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle+\frac{1}{2}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta\widetilde{\mathcal{D}}_\tau(\xi,R)\,d\mathbf{R}. \quad (2.11)$$

Производя аналогичное разложение по μ для величины $\widetilde{G}_\tau^{(\beta)}(\xi-\mu R,R)$ в уравнении (2.9), находим с точностью до членов порядка μ включительно

$$\frac{\partial(\widetilde{\rho\epsilon})}{\partial\tau}=\frac{i}{8m^2}\mu\,\Delta\xi\langle(\Delta\psi^+)\psi-\psi^+(\Delta\psi)\rangle+\sum_\beta\frac{\partial I_\beta}{\partial\xi_\beta}-\frac{i}{m}\sum_\beta\widetilde{J}_\beta\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\xi_\beta}. \quad (2.12)$$

Здесь величина I_α дается выражением

$$I_\alpha=-\frac{i}{4m^2}\left\langle(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}-\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}(\Delta\psi)\right\rangle-\int\Phi(R)\widetilde{G}_\tau^{(\alpha)}(\xi,R)\,d\mathbf{R}-$$
$$-\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}R_\alpha G_\tau^{(\beta)}(\xi,R)\,d\mathbf{R}+\frac{\mu}{2}\sum_{\beta,\gamma}\frac{\partial}{\partial\xi_\gamma}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}R_\alpha R_\gamma\widetilde{G}_\tau^{(\beta)}(\xi,R)\,d\mathbf{R}. \quad (2.13)$$

Заметим теперь, что формы $T_{\alpha\beta}$, I_α составлены из величин типа $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}$ (2.2), и потому их можно представить разложениями (2.5).

Получим

$$T_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}^{(0)}+\mu T_{\alpha\beta}^{(1)}+\ldots,$$
$$I_\alpha=I_\alpha^{(0)}+\mu I_\alpha^{(1)}+\ldots, \quad (2.14)$$

где

$$T_{\alpha\beta}^{(0)}=T_{\alpha\beta}(\widetilde{\rho},\widetilde{\theta},\widetilde{v}),\quad I_\alpha^{(0)}=I_\alpha(\widetilde{\rho},\widetilde{\theta},\widetilde{v}), \quad (2.15)$$

причем $T_{\alpha\beta}(\widetilde{\rho},\widetilde{\theta},\widetilde{v})$, $I_\alpha(\widetilde{\rho},\widetilde{\theta},\widetilde{v})$ получаются из выражений (2.11), (2.13) в результате замены неравновесных средних

$$\langle\ldots\rangle$$

соответствующими равновесными средними

$$\langle\ldots\rangle_{\rho,\theta,v}.$$

Учет членов порядка μ в разложениях (2.14) соответствует приближению вязкой жидкости. Поскольку мы здесь ограничиваемся лишь приближением идеальной жидкости, нам достаточно будет иметь дело только с $T_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $I_\alpha^{(0)}$.

Преобразуем эти выражения к более удобному виду. Целесообразно прежде всего выразить

$$\langle\ldots\rangle_{\rho,\theta,v}$$

через

$$\langle\ldots\rangle_{\rho,\theta,0}.$$

Совершим поэтому преобразование

$$\psi\to\mathrm{e}^{im\mathbf{v}r}.$$

Находим

$$\left\langle \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}+\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{\rho,\theta,v}=\left\langle\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}-imv_\alpha\psi^+\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}+imv_\beta\psi\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}-imv_\beta\psi^+\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}+imv_\alpha\psi\right)\right\rangle_{\rho,\theta,0}=$$
$$=\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}+\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{\rho,\theta,0}+2m^2v_\alpha v_\beta\rho,$$

так как члены, содержащие только одну производную, пропадают в равновесном состоянии при $v=0$ из-за инвариантности при замене $\mathbf{r}\to-\mathbf{r}$.

Таким образом, замечая, что при $v=0$ величина $T_{\alpha\beta}$ может быть только изотропным тензором, получим

$$T_{\alpha\beta}(\rho,\theta,v)=-m\rho v_\alpha v_\beta-\delta_{\alpha\beta}\mathcal{P}(\rho,\theta),\tag{2.16}$$

и при любом $\alpha=1,2,3$

$$-\mathcal{P}(\rho,\theta)=-\frac{1}{m}\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{\rho,\theta,0}+\frac{1}{2}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\alpha\mathcal{D}(R|\rho,\theta)\,d\mathbf{R},\tag{2.17}$$

где

$$\mathcal{D}(r-r'|\rho,\theta)=\langle\psi^+(r)\psi^+(r')\psi(r')\psi(r)\rangle_{\rho,\theta,0}.$$

Допустим, что $F(\rho,\theta)$ обозначает свободную энергию, приходящуюся на одну частицу. Покажем, что (N — число частиц)

$$\mathcal{P}(\rho,\theta)=-\frac{\partial NF\left(\frac{N}{V},\theta\right)}{\partial V}=\rho^2\frac{\partial F(\rho,\theta)}{\partial\rho},\tag{2.18}$$

т. е. что величина $\mathcal{P}$ имеет смысл обычного термодинамического давления.

Чтобы установить это соотношение, удобно подвергнуть объем V линейному расширению только по одной, например α-й, оси координат: $r_\alpha\to Lr_\alpha$, $r_\beta\to r_\beta$ $(\alpha\neq\beta)$.

Пусть H_L будет соответствующим гамильтонианом «растянутой системы»:

$$H_L=\frac{1}{2m}\int\psi^+(r)p_L^2\psi(r)\,d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\int\Phi_L(r-r')\psi^+(r)\psi^+(r')\psi(r')\psi(r)\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{r}',$$

где

$$p_L^2=-\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial r_\alpha^2}-\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{\partial^2}{\partial r_\beta^2}$$

и $\Phi_L(R)$ получается из $\Phi(R)$ путем замены $R_\alpha\to LR_\alpha$, $R_\beta\to R_\beta$ $(\alpha\neq\beta)$.

Тогда

$$\frac{\partial NF}{\partial V}=\frac{1}{V}\left\langle\left(\frac{\partial H_L}{\partial L}\right)_{L=1}\right\rangle_{\rho,\theta,0},$$

или, взяв явно выражение,

$$\frac{\partial NF}{\partial V} = \frac{1}{m}\left\langle \psi^+(r)\frac{\partial^2}{\partial r_\alpha^2}\psi(r)\right\rangle_{\rho,\theta,0} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\alpha \mathcal{D}(R|\rho,\theta)\,d\mathbf{R} =$$

$$= -\frac{1}{m}\left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{\rho,\theta,0} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial \Phi}{\partial R_\alpha} R_\alpha \mathcal{D}(R|\rho,\psi)\,d\mathbf{R},$$

что и доказывает справедливость соотношения (2.18).

Подставив (2.14)–(2.16) в уравнение (2.10), найдем

$$\frac{\partial \tilde{j}_\alpha}{\partial \tau} = -\sum_\beta \frac{\partial}{\partial \xi_\beta}\left(m\tilde{\rho}\tilde{v}_\alpha\tilde{v}_\beta + \delta_{\alpha\beta}\mathcal{P}(\tilde{\rho},\tilde{\theta})\right) - \tilde{\rho}\frac{\partial U}{\partial \xi_\alpha}. \tag{2.19}$$

Аналогично можно преобразовать уравнение энергии (2.12).

Заметим прежде всего, что

$$G^{(\alpha)}(r-r'|\rho,\theta,v) =$$

$$= \frac{i}{4m}\langle \psi^+(r')[\psi^+(r)imv_\alpha\psi(r) + \psi^+(r)imv_\alpha\psi(r)]\psi(r')\rangle_{\rho,\theta,0} =$$

$$= -\frac{v_\alpha}{2}\mathcal{D}(r-r_\alpha|\rho,\theta).$$

Преобразуем еще первый член в выражении (2.13) для I_α^0, учитывая, что среднее берется по состоянию статистического равновесия, аналогично тому, как мы это делали, преобразовывая $T_{\alpha\beta}^0$:

$$-\frac{i}{4m}\left\langle \sum_\beta\left(\frac{\partial^2\psi^+}{\partial r_\beta^2}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial^2\psi}{\partial r_\beta^2}\right)\right\rangle_{\rho,\theta,v} =$$

$$= -\frac{m}{2}v_\alpha\sum_\beta v_\beta^2\langle\psi^+\psi\rangle_{\rho,\theta,0} - \frac{1}{2m}\sum_\beta v_\beta\left\langle \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta} + \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{\rho,\theta,0} +$$

$$+ \frac{1}{4m}v_\alpha\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\langle \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\psi + \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{\rho,\theta,0} - \frac{1}{2m}v_\alpha\sum_\beta\left\langle \frac{\partial\rho}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{\rho,\theta,0} =$$

$$= -\rho v_\alpha\frac{mv^2}{2} - \frac{v_\alpha}{m}\left\langle \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{\rho,\theta,0} - \frac{v_\alpha}{2m}\sum_\beta\left\langle \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{\rho,\theta,0}.$$

Таким образом, получим

$$I_\alpha(\rho,\theta,v) = -\rho v_\alpha\frac{mv^2}{2} - \frac{v_\alpha}{m}\left\langle \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{\rho,\theta,0} - \frac{v_\alpha}{2m}\sum_\beta\left\langle \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{\rho,\theta,0} -$$

$$- \frac{v_\alpha}{2}\int\Phi(R)\mathcal{D}(R|\rho,\theta)\,d\mathbf{R} + \frac{v_\alpha}{2}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\alpha\mathcal{D}(R|\rho,\theta)\,d\mathbf{R}.$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{1}{2m}\sum_{\beta}\left\langle\frac{\partial\psi^{+}}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{\rho,\theta,0}+\frac{1}{2}\int\Phi(R)\mathcal{D}(R|\rho,\theta)\,d\mathbf{R}=$$

$$=\rho\epsilon(\rho,\theta)=\rho\left\{F(\rho,\theta)-\theta\frac{\partial F(\rho,\theta)}{\partial\theta}\right\},$$

и потому, принимая во внимание (2.17), получим

$$I_\alpha(\rho,\theta,v)=-v_\alpha\left\{\rho\left(\epsilon(\rho,\theta)+\frac{mv^2}{2}\right)+\mathcal{P}(\rho,\theta)\right\}.$$

Таким образом, из (2.12) в рассматриваемом приближении найдем

$$\frac{\partial(\widetilde{\rho\epsilon})}{\partial t}=-\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\widetilde{v}_\alpha\left\{\rho\left(\epsilon(\widetilde{\rho},\widetilde{\theta})+\frac{m\widetilde{v}^2}{2}\right)+\mathcal{P}(\widetilde{\rho},\widetilde{\theta})\right\}-\frac{1}{m}\sum_{\alpha}\widetilde{j}_\alpha\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\xi_\alpha},\qquad(2.20)$$

причем по определению локальной скорости и температуры имеем соотношения (2.6). Введем энтропию

$$S(\rho,\theta)=-\frac{\partial F(\rho,\theta)}{\partial\theta}.$$

Тогда, комбинируя ранее полученные уравнения, нетрудно получить вместо (2.20) уравнение для энтропии

$$\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial r}+\sum_{\alpha}\widetilde{v}_\alpha\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\xi_\alpha}=0.\qquad(2.21)$$

Возвратимся теперь в полученных уравнениях (2.7), (2.10), (2.21) к первоначальным переменным t, $\mathbf{r}$.

Как видно, для этого достаточно в этих уравнениях просто заменить τ, ξ на t, $\mathbf{r}$ и снять знак «$\sim$» с входящих в них величин.

Мы приходим, таким образом, к обычной системе уравнений идеальной жидкости.

§ 3. Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости

Сверхтекучая жидкость характеризуется наличием величины $\langle\psi(t,r)\rangle=$ $=\phi(t,r)\neq0$ даже при исчезающе малых источниках. Поэтому наряду с уравнениями для введенных нами ранее локальных величин необходимо также рассматривать отдельное уравнение для величины ϕ. Это уравнение получается в результате усреднения уравнения для ψ и имеет вид

$$i\frac{\partial\phi(t,r)}{\partial t}=-\lambda\phi(t,r)-\frac{1}{2m}\Delta\phi(t,r)+$$

$$+\int\phi(r-r')\langle\psi^{+}(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle\,d\mathbf{r}'+U(t,r)\phi(t,r)+\eta(t,r).$$

В этом уравнении ϕ является комплексной величиной. Далее будет удобнее пользоваться вещественными величинами: фазой и модулем ϕ, так что мы

положим $\phi = a\exp(i\chi)$. Уравнения для этих величин получаются непосредственной подстановкой этого выражения в уравнение для ϕ:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} = \lambda + \frac{\Delta a}{2ma} - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\chi}{d\mathbf{r}}\right) - U(t,r) + \frac{\zeta^* + \zeta}{2a} - \\ - \frac{1}{2a^2}\int \Phi(R)\{X_t(r,R) + X^*(r,R)\}\,d\mathbf{R}, \quad (3.1)$$

где

$$X_t(r, r'-r) = \langle\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle\phi^*(t,r),$$
$$\zeta(t,r) = \eta(t,r)\mathrm{e}^{-i\chi(t,r)},$$

и уравнение для $a(t,r)$:

$$i\frac{\partial a^2}{\partial t} = -\frac{i}{m}\left\{a^2\,\Delta\chi + 2\sum_\beta \frac{\partial\chi}{\partial r_\beta}\frac{\partial a}{\partial r_\beta}a\right\} + \\ + \int \Phi(R)[X_t(r,R) - X_t^*(r,R)]\,d\mathbf{R} + a(\zeta - \zeta^*). \quad (3.2)$$

В дальнейшем мы будем часто использовать сверхтекучую скорость $v_s^\alpha = \frac{1}{m}\frac{\partial\chi}{\partial r_\alpha}$, уравнение для которой, согласно (3.1), будет следующим:

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\Delta a}{2ma_\alpha} - \frac{mv_s^2}{2} - U - \frac{\zeta^* + \zeta}{2a} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2a^2}\int \Phi(R)[X_t(r,R) - X_t^*(r,R)]\,d\mathbf{R}\right\}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим прежде всего случай статистического равновесия сверхтекучей жидкости при $U = 0$, $\eta = 0$.

В отличие от случая статистического равновесия нормальной жидкости, которое характеризовалось кроме ρ, θ лишь одной скоростью $\mathbf{v}$, здесь мы имеем, вообще говоря, состояния с двумя скоростями, например со скоростью движения конденсата $\mathbf{v}_s$ и со скоростью «нормальной компоненты» $\mathbf{v}_n$.

Средние для такого состояния статистического равновесия условимся обозначать символом

$$\langle\ldots\rangle_{v_s, v_n}.$$

При этом для сокращения обозначений мы не будем в индексах выписывать параметры ρ, θ. Средние указанного типа будет удобно выражать через средние

$$\langle\ldots\rangle_{v_s', 0}, \quad \mathbf{v}_s' = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n,$$

соответствующие состоянию $\mathbf{v}_n' = 0$. Для этого, очевидно, можем воспользоваться галилеевским преобразованием операторов

$$\psi \to \psi\exp(im\mathbf{v}_n\mathbf{r}).$$

Начнем поэтому с рассмотрения состояния ρ, θ, v_s, у которого $v_n = 0$. Для него

$$a = \text{const} = a(\rho, \theta, u), \quad F = F(\rho, \theta, u), \quad u = \frac{v_s^2}{2}.$$

Химический потенциал также имеет вид

$$\frac{\partial(FN)}{\partial N} = F + \rho\frac{\partial F}{\partial \rho} = \Lambda(\rho, \theta, u).$$

Введем, кроме того, поток

$$j_\alpha = \rho\frac{\partial F}{\partial v_s^{(\alpha)}} = \rho\frac{\partial F}{\partial u}\, v_s^{(\alpha)}$$

и положим

$$\rho\frac{\partial F}{\partial u} = \rho_s m,$$

так что

$$j_\alpha = m\rho_s v_s^{(\alpha)}.$$

Очевидно, $\rho_s \leqslant \rho$.

Покажем, что определение потока j_α, введенное таким образом, совпадает с обычным определением потока. Для этого удобно перейти к системе координат, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_s$, причем одновременно при вычислении средних будем рассматривать усреднение только по состояниям с $\mathbf{v}_s = 0$, $\mathbf{v}_n = -\mathbf{v}_s$. В результате средние не меняются. Гамильтониан в новой системе координат как функция новых операторов ψ имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\int \sum_\alpha \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha} - imv_s^{(\alpha)}\psi^+\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} + imv_s^{(\alpha)}\psi\right) d\mathbf{r} + \\ + \int \Phi(r - r')\psi^+(r)\psi^+(r')\psi(r')\psi(r)\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'.$$

Вычислим в этом представлении $\rho\dfrac{\partial F}{\partial v_s^{(\alpha)}}$:

$$\rho\frac{\partial F}{\partial v_s^{(\alpha)}} = \frac{1}{V}\left\langle \frac{\partial H}{\partial v_s^{(\alpha)}}\right\rangle_{0,-v_s} = \\ = \frac{i}{2V}\int \left\langle \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha} - imv_s^{(\alpha)}\psi^+\right)\psi - \psi^+\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} + imv_s^{(\alpha)}\psi\right)\right\rangle_{0,-v_s} d\mathbf{r} = \\ = \frac{i}{2V}\int \left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha}\psi - \psi^+\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{v_s,0} d\mathbf{r} = \frac{i}{2}\left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha}\psi - \psi^+\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{v_s,0} = j_\alpha.$$

Мы получили выражение, совпадающее с обычным определением j_α. В состоянии термодинамического равновесия $X = X(r - r'|\rho, \theta, v_s)$. Из уравнения (3.1) получим

$$\frac{1}{2a^2}\int \Phi(R)\{X(R|\rho, \theta, v_s) + X^*(R|\rho, \theta, v_s)\}\, dR = \Lambda(\rho, \theta, u) - \frac{mv_s^2}{2}.$$

Отсюда, приняв во внимание уравнение (3.2), найдем

$$\frac{1}{a^2}\int \Phi(R)X(R|\rho,\theta,v_s)\,d\mathbf{R} = \frac{1}{a^2}\int \Phi(R)X^*(R|\rho,\theta,v_s)\,d\mathbf{R} = \Lambda(\rho,\theta,u) - \frac{mv_s^2}{2}. \tag{3.4}$$

Займемся теперь вычислением тензора $T_{\alpha\beta}$ в состоянии равновесия $(v_s, 0)$. Из общих соображений о тензорном характере величин следует, что, поскольку единственным выделенным направлением является направление $\mathbf{v}_s$, величина $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta}(\rho,\theta,v_s) = -\frac{1}{2m}\left\langle \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta} + \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{v_s,0} + \\ + \frac{1}{2}\int \frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \mathcal{D}(R|\rho,\theta,v_s)\,d\mathbf{R},$$

имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = A(\rho,\theta,u)v_s^{(\alpha)}v_s^{(\beta)} + \delta_{\alpha\beta}B(\rho,\theta,u),$$

где A, B — скалярные величины. Согласно доказательству, приведенному ранее в § 2, величина $T_{\alpha\alpha}$ равна производной

$$\frac{1}{V}\frac{\partial(NV)}{\partial L}\Big|_{L=1},$$

где зависимость F от L получается в результате растяжения α-й оси «в L раз».

Поэтому

$$\rho\frac{\partial F}{\partial L}\Big|_{L=1} = T_{\alpha\alpha} = A(v_s^{(\alpha)})^2 + B.$$

С другой стороны,

$$\rho\frac{\partial F}{\partial L}\Big|_{L=1} = -\rho^2\frac{\partial F}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial F}{\partial u}(v_s^{(\alpha)})^2 = -\mathcal{P}(\rho,\theta,u) - m\rho_s(v_s^{(\alpha)})^2.$$

Таким образом,

$$A = -m\rho_s, \quad B = -\mathcal{P}(\rho,\theta,u),$$

и окончательно находим

$$T_{\alpha\beta} = -m\rho_s v_s^{(\alpha)}v_s^{(\beta)} - \delta_{\alpha\beta}\mathcal{P}(\rho,\theta,u). \tag{3.5}$$

Перейдем к рассмотрению состояния с двумя скоростями $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_n$. Заметим прежде всего, что выражения

$$X(r-r'|\rho,\theta,v_s,v_n) = \langle\psi^+(r')\psi(r')\psi(r)\rangle_{v_s,v_n}\langle\psi^+(r)\rangle_{v_s,v_n},$$
$$\mathcal{D}(r-r'|\rho,\theta,v_s,v_n) = \langle\psi^+(r)\psi^+(r')\psi(r')\psi(r)\rangle_{v_s,v_n}$$

— инварианты при галилеевских преобразованиях

$$\psi \to \psi\exp(im\mathbf{vr}),$$

и потому

$$X(r-r'|\rho,\theta,v_s,v_n) = X(r-r'|\rho,\theta,v_s-v_n),$$
$$\mathcal{D}(r-r'|\rho,\theta,v_s,v_n) = \mathcal{D}(r-r'|\rho,\theta,v_s-v_n).$$

Возьмем далее выражение j_α. Имеем

$$j_\alpha = \frac{i}{2}\left\langle \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\psi - \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{v_s,v_n} =$$

$$= \frac{i}{2}\left\langle \left(\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha} - im v_n^{(\alpha)}\psi^+\right)\psi - \psi^+\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha} + im v_n^{\alpha()}\psi\right)\right\rangle_{v_s-v_n,0} =$$

$$= m v_n^{(\alpha)}\rho + m\rho_s(v_s^{(\alpha)} - v_n^{(\alpha)}) = m\rho_s v_s^{(\alpha)} + m\rho_n v_n^{(\alpha)}.$$

Мы ввели здесь плотность нормальной компоненты $\rho_n = \rho - \rho_s$. Подсчитаем теперь тензор напряжений

$$T_{\alpha\beta}(\rho,\theta,v_s,v_n) = \frac{1}{2}\int \frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \mathcal{D}(R|\rho,\theta,v_s,v_n)\,d\mathbf{R} -$$

$$- \frac{1}{2m}\left\langle \left(\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha} - im v_n^{(\alpha)}\psi^+\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta} + im v_n^{(\beta)}\psi\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta} - im v_n^{(\beta)}\psi^+\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha} + im v_n^{(\alpha)}\psi\right)\right\rangle_{v_s-v_n,0} =$$

$$= -\frac{1}{2m}\left\langle \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta} + \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{v_s-v_n,0} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \mathcal{D}(R|\rho,\theta,v_s-v_n)\,d\mathbf{R} +$$

$$+ \frac{i v_n^{(\alpha)}}{2}\left\langle \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta} - \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\psi\right\rangle_{v_s-v_n,0} - \frac{i v_n^{(\beta)}}{2}\left\langle \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\psi - \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle_{v_s-v_n,0} -$$

$$- m\rho v_n^{(\alpha)} v_n^{(\beta)} = -\delta_{\alpha\beta}\mathcal{P}(\rho,\theta,u) - m\rho_s v_s^{(\alpha)} v_s^{(\beta)} - m\rho_n v_n^{(\alpha)} v_n^{(\beta)}.$$

Здесь и в дальнейшем $u = (v_s - v_n)^2/2$.

Преобразуем выражение для средней энергии

$$\rho\epsilon(\rho,\theta,v_s,v_n) = \frac{1}{2}\int \Phi(R)\mathcal{D}(R|\rho,\theta,v_s-v_n,0)\,d\mathbf{R} -$$

$$- \frac{1}{4m}\left\langle \left[\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - im\mathbf{v}_n\right)^2\psi\right]\psi + \psi^+\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} + im\mathbf{v}_n\right)^2\psi\right]\right\rangle_{v_s-v_n,0} =$$

$$= \rho E(\rho,\theta,u) + \frac{m_\rho v_n^2}{2} + m\rho_s(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n. \quad (3.6)$$

Здесь, как и обычно, $E(\rho,\theta,u) = F - \theta\dfrac{\partial F}{\partial\theta}$.

Нам понадобится также вектор I_α, вычисленный для случая статистического равновесия при наличии $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$.

Заметим, что

$$G(\alpha)_=(r'-r|\rho,\theta,v_s,v_n) =$$

$$= \frac{i}{4m}\left\langle \psi^+(t,r')\left\{\psi^+(t,r)\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\alpha}\psi(t,r)\right\}\psi(t,r')\right\rangle_{v_s,v_n} =$$

$$= \frac{i}{4m}\left\langle \psi^+(t,r')\left\{\psi^+(t,r)\left(\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\alpha} + imv_n^{(\alpha)}\psi(t,r)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\alpha} - imv_n^{(\alpha)}\psi^+(t,r)\right)\psi(t,r)\right\}\psi(t,r')\right\rangle_{v_s-v_n,0} =$$

$$= G^{(\alpha)}(r'-r|\rho,\theta,v_s-v_n) - \frac{v_n^{(\alpha)}}{2}\mathcal{D}(r'-r|\rho,\theta,v_s-v_n).$$

Для самого вектора I_α будем иметь следующее выражение:

$$I_\alpha(\rho,\theta,v_s,v_n) = -\frac{i}{4m^2}\left\langle(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}(\Delta\psi)\right\rangle_{v_s,v_n} +$$

$$+\int\Phi(R)G^{(\alpha)}(R|\rho,\theta,v_s,v_n)\,d\mathbf{R} - \sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}R_\beta G^{(\beta)}(R|\rho,\theta,v_s,v_n)\,d\mathbf{R} =$$

$$= -\frac{i}{4m^2}\left\langle\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - im\mathbf{v}_n\right)^2\psi^+\right]\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha} + imv_n^{(\alpha)}\psi\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha} - imv_n^{(\alpha)}\psi^+\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} + im\mathbf{v}_n\right)^2\psi\right]\right\rangle_{v_s-v_n,0} +$$

$$+\int\Phi(R)G^{(\alpha)}(R|\rho,\theta,v_s-v_n)\,d\mathbf{R} - \frac{v_n^{(\alpha)}}{2}\int\Phi(R)\mathcal{D}(R|\rho,\theta,v_s-v_n)\,d\mathbf{R} -$$

$$- \sum_\beta\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}R_\alpha G^{(\beta)}(R|\rho,\theta,v_s-v_n)\,d\mathbf{R} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}R_\alpha v_n^{(\beta)}\mathcal{D}(R|\rho,\theta,v_s-v_n)\,d\mathbf{R} =$$

$$= -\frac{i}{4m^2}\left\langle(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}(\Delta\psi)\right\rangle_{v_s-v_n,0} + \int\Phi(R)G^{(\alpha)}(R|\rho,\theta,v_s-v_n)\,d\mathbf{R} -$$

$$- \sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}R_\alpha G^{(\beta)}(R|\rho,\theta,v_s-v_n)\,d\mathbf{R} +$$

$$+\frac{i}{4m^2}v_n^{(\alpha)}\langle(\Delta\psi^+)\psi + \psi^+(\Delta\psi)\rangle_{v_s-v_n,0} -$$

$$- \frac{1}{2m}\sum_\beta v_n^{(\beta)}\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{v_s-v_n,0} +$$

$$+\sum_\beta v_n^{(\beta)}\int\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}R_\alpha\mathcal{D}(R|\rho,\theta,v_s-v_n)\,d\mathbf{R} -$$

$$- \frac{v_n^{(\alpha)}}{2}\int\Phi(R)\mathcal{D}(R|\rho,\theta,v_s-v_n)\,d\mathbf{R} - \frac{mv_n^2}{2}\rho v_n^{(\alpha)} -$$

$$- \frac{i}{2}v_n^{(\alpha)}\sum_\beta v_n^{(\beta)}\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\psi - \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{v_s-v_n,0} + \frac{i}{4}v_n^2\left\langle\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\psi\right\rangle_{v_s-v_n,0}.$$

Пользуясь определением I_α, формулами (3.6), (3.5) и определением j_α, получим

$$I_\alpha(\rho,\theta,v_s,v_n)=I_\alpha(\rho,\theta,v_s-v_n,0)-v_n^{(\alpha)}\rho E(\rho,\theta,u)+$$
$$+\sum_\beta v_n^{(\beta)}T_{\alpha\beta}(\rho,\theta,v_s-v_n,0)-\sum_\beta v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)}m\rho_s(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})-$$
$$-\frac{mv_n^2}{2}\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})-\frac{mv_n^2}{2}v_n^{(\alpha)}\psi=$$
$$=I_\alpha(\rho,\theta,v_s-v_n,0)-v_n^{(\alpha)}\left[\rho E+\frac{mv_n^2}{2}\rho+\mathcal{P}+m\rho_s\mathbf{v}_n(\mathbf{v}_s-\mathbf{v}_n)\right]-$$
$$-m\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\left(\mathbf{v}_s\mathbf{v}_n-\frac{v_n^2}{2}\right). \quad (3.7)$$

Положим

$$I_\alpha(\rho,\theta,v_s-v_n,0)=[-\Lambda(\rho,\theta,u)\rho_s+A(\rho,\theta,u)](v^{(s\alpha)}-v_n^{(\alpha)}). \quad (3.8)$$

Позже мы докажем, что $A\equiv 0$.

До сих пор мы считали, что $U=0$. Те же выражения для j_α, X, $T_{\alpha\beta}$, I_α мы получили бы и в случае $U=\text{const}$, поскольку все эти величины инвариантны по отношению к градиентному преобразованию

$$\psi\to e^{-iUt}\psi.$$

После предварительных преобразований различных величин для состояний статистического равновесия перейдем к вопросу о получении уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости, для чего воспользуемся, с естественным обобщением, схемой, изложенной в § 2.

Введем параметр μ, характеризующий степень малости:

$$\xi=\mu\mathbf{r},\quad \tau=\mu t.$$

Положим

$$\rho(t,r)=\tilde\rho(\tau,\xi),\quad \mathbf{j}(t,r)=\tilde{\mathbf{j}}(\tau,\xi),\quad \epsilon(t,r)=\tilde\epsilon(\tau,\xi),$$

а также

$$U(t,r)=\tilde U(\tau,\xi),$$
$$\mathbf{v}_s(t,r)=i\frac{\frac{\partial}{\partial r}\langle\psi(t,r)\rangle}{m\langle\psi(t,r)\rangle}=\tilde{\mathbf{v}}_s(\tau,\xi),$$
$$a(t,r)=\sqrt{\langle\psi^+(t,r)\rangle\langle\psi(t,r)\rangle}=|\langle\psi(t,r)\rangle|=\tilde a(\tau,\xi)\neq 0.$$

Подчеркнем, что, делая допущение о том, что $\mathbf{v}_s$ является медленно меняющейся функцией t, $\mathbf{r}$ (и связанное с этим допущение о том, что знаменатель в выражении v_s не обращается в нуль: $a\neq 0$), мы тем самым ограничиваемся рассмотрением безвихревого сверхтекучего течения

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_s=0.$$

Случай, когда $\langle\psi(t,r)\rangle$ может обращаться в нуль, был предметом исследования в работе [2]. Заметим, что для получения выражений функций Грина нам понадобятся уравнения гидродинамики только в «акустическом случае», когда все вышеприведенные величины лишь бесконечно мало отличаются от своих равновесных значений.

Но в этом случае

$$\mathbf{v}_s = \delta\mathbf{v}_s = -\frac{i}{m\langle\psi\rangle_{v_s,v_n}}\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle, \quad a = a_0 + \delta a,$$

и потому всегда

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_s = 0, \quad a \neq 0.$$

Таким образом, для вычисления функции Грина указанное ограничение автоматически выполняется.

Заметим далее, что, поскольку градиенты $\partial/\partial t$, $\partial/\partial r$ от ρ, v_s, ... являются величинами первого порядка малости по отношению к μ, мы должны считать в силу уравнений (1.1) η или, что то же самое, ζ пропорциональным μ.

Положим поэтому

$$\zeta(t,r) = \mu\tilde{\zeta}(\tau,\xi).$$

Для сокращения обозначений условимся с этого момента более не выписывать верхний индекс «$\sim$» над функциями от τ, $\boldsymbol{\xi}$, поскольку это не приведет к недоразумению.

Введем сейчас, исходя из выражений для $\rho(\tau,\xi)$, $\mathbf{j}(\tau,\xi)$, $\epsilon(\tau,\xi)$, $\mathbf{v}_s(\tau,\xi)$, величины $\theta(\tau,\xi)$, $v_n(\tau,\xi)$, которые вместе с $\rho(\tau,\xi)$, $\mathbf{v}_s(\tau,\xi)$ характеризуют «локальное квазиравновесное состояние».

Возьмем функции

$$\epsilon(\rho,\theta,v_s,v_n), \quad \rho_s(\rho,\theta,u) = \frac{1}{m}\rho\frac{\partial F(\rho,\theta,u)}{\partial u},$$

$$u = \frac{(v_n - v_s)^2}{2}, \quad \rho_n(\rho,\theta,u) = \rho - \rho_s(\rho,\theta,u),$$

выражающие ϵ, ρ_s, ρ для статистического равновесия, и определим функции

$$\theta(\tau,\xi), \quad \mathbf{v}_n(\tau,\xi) \tag{3.9}$$

из соотношений

$$\begin{aligned}&\epsilon(\tau,\xi) = \epsilon(\rho,\theta,v_s,v_n),\\ &\mathbf{j}(\tau,\xi) = \rho_s(\rho,\theta,\mu)\mathbf{v}_s + \rho_n(\rho,\theta,u)\mathbf{v}_n.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Введя таким образом функции (3.9), мы можем также ввести $\rho_s(\tau,\xi)$, $\rho_n(\tau,\xi)$, положив по определению

$$\rho_s(\tau,\xi) = \rho_s(\rho,\theta,\mu), \quad \rho_n(\tau,\xi) = \rho_n(\rho,\theta,u).$$

Сформулируем теперь наше предположение о том, что для рассматриваемого неравновесного процесса локальное состояние лишь слабо отличается от локального квазиравновесного состояния.

Следуя схеме § 2, напишем

$$a(\tau,\xi) = a(\rho,\theta,u) + \mu a^{(1)}(\tau,\xi) + \ldots, \tag{3.11a}$$

$$X_\tau(\xi, R) = X(R|\rho, \theta, v_s, v_n) + \mu X^{(1)}(\tau, \xi) + \ldots = \\ = X(R|\rho, \theta, v_s - v_n) + \mu X^{(1)}(\tau, \xi) + \ldots,$$

$$T_{\alpha\beta}(\tau, \xi) = T_{\alpha\beta}(\rho, \theta, v_s, v_n) + \mu T^{(1)}_{\alpha\beta}(\tau, \xi) + \ldots, \tag{3.11б}$$

$$I_\alpha(\tau, \xi) = I_\alpha(\rho, \theta, v_s, v_n) + \mu I^{(1)}_\alpha(\tau, \xi) + \ldots$$

и подставим эти разложения вместе с (3.10) в уравнения[1] (1.1), (1.2), (1.4), (3.3), преобразованные к переменным τ, ξ. Ограничиваясь приближением идеальной жидкости, будем пренебрегать поправочными членами порядка μ.

Возьмем, например, уравнение (3.3). Имеем

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left\{\mu^2 \frac{\Delta \xi a}{2ma} - \frac{m v_s^2}{2} - U - \mu\frac{\zeta^* + \zeta}{2a} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2a^2}\int \Phi(R)[X_\tau(\xi, R) + X^*_\tau(\xi, R)]\, d\mathbf{R}\right\},$$

и потому в рассматриваемом приближении

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left\{\frac{m v_s^2}{2} + U + \right. \\ \left. + \frac{1}{2a^2(\rho, \theta, u)}\int \Phi(R)[X(R|\rho, \theta, v_s - v_n) + X^*(R|\rho, \theta, v_s - v_n)]\, d\mathbf{R}\right\}.$$

Откуда с помощью (3.4) получим окончательно

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left\{\frac{m v_s^2}{2} - \frac{m}{2}(v_s - v_m)^2 + \Lambda(\psi, \theta, u) + U\right\}, \\ u = \frac{(v_s - v_n)^2}{2}. \tag{3.12}$$

Таким же образом из соотношений (1.1), (1.2), (1.4), (3.8) найдем

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \sum_\alpha \frac{\partial(\rho_s v_s^{(\alpha)} + \rho_n v_n^{(\alpha)})}{\partial \xi_\alpha} = ia(\zeta^* - \zeta), \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho_s v_s^{(\alpha)} + \rho_n v_n^{(\alpha)}) = \sum_\beta \frac{\partial T_{\alpha\beta}(\rho, \theta, v_s, v_n)}{\partial \xi_\beta} + im v_s^{(\alpha)}(\zeta^* - \zeta)a - \rho\frac{\partial U}{\partial \xi_\alpha}, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial \rho\epsilon(\rho, \theta, v_s, v_n)}{\partial \tau} = \sum_\beta \frac{\partial I_\beta(\rho, \theta, v_s, v_n)}{\partial \xi_\beta} - \sum_\beta(\rho_s v_s^{(\beta)} + \rho_n v_n^{(\beta)})\frac{\partial U}{\partial \xi_\beta} + \\ + ia(\zeta^* - \zeta)\left\{\frac{m}{2}v_s^2 + \Lambda(\rho, \theta, \mu) - \frac{(v_s - v_n)^2}{2}m\right\}. \tag{3.15}$$

[1] Уравнения (1.2), (1.4) преобразуем к виду, аналогичному (2.10), (2.12).

Подставляя в уравнения (3.14), (3.15) выражения (3.5)–(3.8) для $T_{\alpha\beta}(\rho,\theta,v_s,v_n)$, $\epsilon(\rho,\theta,v_s,v_n)$, $I_\alpha(\rho,\theta,v_s,v_n)$, будем иметь

$$m\left\{\frac{\partial(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})}{\partial\tau}+\sum_\beta\frac{\partial(\rho_s v_s^{(\alpha)}v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)})}{\partial\xi_\alpha}\right\}=$$

$$=-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\xi_\alpha}-\rho\frac{\partial U}{\partial\xi_\alpha}+ima v_s^{(\alpha)}(\zeta^*-\zeta), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\rho E(\rho,\theta,u)+\frac{m\rho v_n^2}{2}+m\rho_s(\mathbf{v}_s-\mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n\right\}+$$

$$+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\left\{v_n^{(\beta)}\left[\frac{\rho m v_n^2}{2}+\rho_s m\mathbf{v}_n(\mathbf{v}_s-\mathbf{v}_n)+\rho E+\mathcal{P}\right]+\right.$$

$$\left.+(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})\rho_s\left[\Lambda+m\left(\mathbf{v}_s\mathbf{v}_n-\frac{v_n^2}{2}\right)\right]\right\}+$$

$$+\sum_\beta\frac{\partial U}{\partial\xi_\beta}(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})-ia(\zeta^*-\zeta)\left[\Lambda+m\left(\mathbf{v}_s\mathbf{v}_n-\frac{v_n^2}{2}\right)\right]=$$

$$=-\sum_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})A. \quad (3.17)$$

Перейдем теперь в уравнениях (3.12), (3.13), (3.16), (3.17) от вспомогательных переменных τ, $\boldsymbol{\xi}$ к первоначальным переменным t, $\mathbf{r}$. Получим, таким образом, систему уравнений гидродинамики в виде

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left\{m\left(v_s v_n-\frac{v_n^2}{2}\right)+\Lambda+U\right\}=0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_\beta\frac{\partial(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})}{\partial r_\beta}-ia(\zeta^*-\zeta)=0,$$

$$m\left\{\frac{\partial(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})}{\partial\tau}+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho_s v_s^{(\alpha)}v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)})\right\}+$$

$$+\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r_\alpha}+\rho\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}-ima(\zeta^*-\zeta)v_s^{(\alpha)}=0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho E+\frac{m\rho v_n^2}{2}+m\rho_s(\mathbf{v}_s-\mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n\right\}+$$

$$+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\{v_n^{(\beta)}\left[\frac{m\rho v_n^2}{2}+m\rho_s(\mathbf{v}_s-\mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n+\rho E+\mathcal{P}\right]+\right.$$

$$\left.+(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})\rho_s\left[\Lambda+m\left(\mathbf{v}_s\mathbf{v}_n-\frac{v_n^2}{2}\right)\right]\right\}+\sum_\beta(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})\frac{\partial U}{\partial r_\beta}-$$

$$-ia(\zeta^*-\zeta)\left[\Lambda+m\left(\mathbf{v}_s\mathbf{v}_n-\frac{v_n^2}{2}\right)\right]=-\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})A.$$

Напомним, что здесь

$$a=a(\rho,\theta,u),\quad A=A(\rho,\theta,u),\quad u=\frac{(v_s-v_n)^2}{2},\quad \rho_s=\frac{1}{m}\,\rho\frac{\partial F(\rho,\theta,u)}{\partial u},$$

$$\rho_n=\rho-\rho_s,\quad E=F(\rho,\theta,u)-\theta\frac{\partial F(\rho,\theta,u)}{\partial\theta},$$

$$\mathcal{P}=\rho^2\frac{\partial F(\rho,\theta,u)}{\partial\rho},\quad \Lambda=F(\rho,\theta,u)+\rho\frac{\partial F(\rho,\theta,u)}{\partial\rho},$$

$$\zeta(t,r)=\eta(t,r)\mathrm{e}^{-i\chi(t,r)}=\eta\mathrm{e}^{-im\Theta},$$

где $\Theta(t,r)$ — потенциал скоростей сверхтекучего движения

$$v_s^{(\alpha)}=\frac{\partial\Theta}{\partial r_\alpha}.$$

Упростим последнее из уравнений (3.18), для чего введем энтропию

$$S=-\frac{\partial F}{\partial\theta}.$$

Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho E+\frac{m\rho v_n^2}{2}+m\rho_s(\mathbf{v}_n\mathbf{v}_s-\mathbf{v}_n^2)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(E-\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)-\frac{m\rho v_n^2}{2}+m\mathbf{v}_s(\rho_s\mathbf{v}_s+\rho_n\mathbf{v}_n)\right]=$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(F+\rho\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)-\theta\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)+m\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})}{\partial t}-$$

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{mv_n^2}{2}-(\rho_s+\rho_n)mv_n^{(\alpha)}\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}mv_n^{(\alpha)}(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})=$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(\Lambda-\frac{mv_n^2}{2}\right)-\theta\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)+m\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})}{\partial t}-$$

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{mv_n^2}{2}-(\rho_s+\rho_n)mv_n^{(\alpha)}\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}mv_n^{(\alpha)}(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})=$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(\Lambda-\frac{mv_n^2}{2}\right)-\theta\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+m\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})}{\partial t}-$$

$$-(\rho_s+\rho_n)mv_n^{(\alpha)}\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t}+(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})m\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t}-$$

$$-mv_n^{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left[v_n^{(\alpha)}(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})+\rho_s v_s^{(\beta)}(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\right]-$$

$$-v_n^{(\alpha)}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r_\alpha}-(\rho_s+\rho_n)v_n^{(\alpha)}\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}+imv_n^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}a(\zeta^*-\zeta)=$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(\Lambda-\frac{mv_n^2}{2}\right)-\theta\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)+m\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t}-$$

$$- mv_n^{(\alpha)}v_n^{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho_s v_s^{(\beta)} + \rho_n v_n^{(\beta)}) - mv_n^{(\alpha)}(\rho_s v_s^{(\beta)} + \rho_n v_n^{(\beta)})\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial r_\beta} -$$

$$- mv_n^{(\alpha)}(v_s^{(\alpha)} - v_n^{(\alpha)})\frac{\partial \rho_s v_s^{(\alpha)}}{\partial r_\beta} - m\rho_s v_n^{(\alpha)}v_s^{(\beta)}\frac{\partial (v_s^{(\alpha)} - v_n^{(\alpha)})}{\partial r_\beta} -$$

$$- v_n^{(\alpha)}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r_\alpha} - (\rho_s + \rho_n)v_n^{(\alpha)}\frac{\partial U}{\partial r_\alpha} + iv_n^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}a(\zeta^* - \zeta) =$$

$$= -\theta\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) - \left(\Lambda + \frac{mv_n^2}{2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho_s v_s^{(\beta)} + \rho_n v_n^{(\beta)}) - ia(\zeta^* - \zeta)\right] +$$

$$+ m\rho_s(v_s^{(\alpha)} - v_n^{(\alpha)})\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} - m\rho_n v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)}\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial r_\beta} - m\rho_s v_s^{(\beta)}v_n^{(\alpha)}\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial r_\beta} -$$

$$- mv_n^{(\alpha)}(v_s^{(\alpha)} - v_n^{(\alpha)})\frac{\partial \rho_s v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} + ima(\zeta^* - \zeta)(v_n^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)} - v_n^2) -$$

$$- v_n^{(\alpha)}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r_\alpha} - (\rho_s + \rho_n)v_n^{(\alpha)}\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}.$$

Величина $\frac{\partial}{\partial r_\beta}(v_n^{(\beta)}\rho E)$ в последнем уравнении (3.18) может быть также преобразована:

$$\frac{\partial}{\partial r_\beta}(v_n^{(\beta)}\rho E) = \Lambda\frac{\partial \rho v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta} - \mathcal{P}\frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta} -$$

$$- \theta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left(\rho v_n^{(\beta)}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + m\rho_s v_n^{(\beta)}(v_s^{(\alpha)} - v_n^{(\alpha)})\frac{\partial (v_s^{(\alpha)} - v_n^{(\alpha)})}{\partial r_\beta}.$$

Перепишем теперь левую часть последнего уравнения (3.8), сразу группируя однотипные члены:

$$- \theta\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) - \theta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left(\rho v_n^{(\beta)}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) +$$

$$+ \rho_s(v_s^{(\alpha)} - v_n^{(\alpha)})\left[m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(\Lambda + m\left(\mathbf{v}_s\mathbf{v}_n - \frac{v_n^2}{2}\right) + U\right)\right] -$$

$$- \left[\rho_s(v_s^{(\alpha)} - v_n^{(\alpha)})\frac{\partial U}{\partial r_\alpha} + (\rho_s + \rho_n)v_n^{(\alpha)}\frac{\partial U}{\partial r_\alpha} - (\rho_s v_s + \rho_n^{(\alpha)}v_n^{(\alpha)})\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}\right] +$$

$$+ \Lambda\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta} + \frac{\partial \rho_s(v_s^{(\beta)} - v_n^{(\beta)})}{\partial r_\beta} - ia(\zeta^* - \zeta)\right] +$$

$$+ ia(\zeta^* - \zeta)\left[\Lambda + m(v_n^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)} - v_n^2) - \Lambda - m\left(v_s^{(\alpha)}v_n^{(\alpha)} - \frac{v_n^2}{2}\right) + \frac{mv_n^2}{2}\right] -$$

$$- \frac{mv_n^2}{2}\frac{\partial}{\partial r_\beta}[\rho_s v_s^{(\beta)} + \rho_n v_n^{(\beta)} - 2\rho_s v_s^{(\beta)} - \rho_n v_n^{(\beta)} - \rho_s v_n^{(\beta)} + 2\rho_s v_n^{(\beta)} + \rho_s v_s^{(\beta)} -$$

$$- \rho_s v_n^{(\beta)}] - mv_n^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial r_\beta}[\rho_s v_s^{(\beta)} - \rho_s v_n^{(\beta)} - \rho_s(v_s^{(\beta)} - v_n^{(\beta)})] -$$

$$- m\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial r_\beta}[\rho_n v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)} + \rho_s v_n^{(\beta)}(v_s^{(\alpha)} - v_n^{(\alpha)}) - \rho_s v_n^{(\beta)}v_n^{(\alpha)} - \rho_n v_n^{(\beta)}v_n^{(\alpha)} -$$

$$-\rho_s v_n^{(\beta)} v_s^{(\alpha)} + 2\rho_s v_n^{(\beta)} v_n^{(\alpha)}] - m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial r_\beta}[\rho_s v_n^{(\alpha)} v_s^{(\beta)} - \rho_s v_n^{(\beta)}(v_s^{(\alpha)} - v_n^{(\alpha)}) -$$

$$-\rho_s v_n^{(\alpha)} v_n^{(\beta)}] + \frac{\partial(\mathcal{P} v_n^{(\beta)})}{\partial r_\beta} - v_n^{(\beta)}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r_\beta} - \mathcal{P}\frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta} =$$

$$= m\rho_s v_n^{(\alpha)} v_s^{(\beta)}\left(\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial r_\beta} - \frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial r_\alpha}\right) + \theta\left[\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho v_n^{(\beta)} S)\right] =$$

$$= \theta\left[\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho v_n^{(\beta)} S)\right].$$

В результате придем к следующему уравнению для плотности энтропии:

$$\theta\left[\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho v_n^{(\beta)} S)\right] = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}[(v_s^{(\beta)} - v_n^{(\beta)}) A(\rho, \theta, u)]. \tag{3.19}$$

Пользуясь полученными уравнениями, покажем, что

$$A(\rho, \theta, u) = 0. \tag{3.20}$$

Для этого рассмотрим случай статистического равновесия, когда внешнего поля нет, а η является данной функцией $\mathbf{r}$:

$$U = 0, \quad \zeta = \zeta(r), \quad \theta = \text{const}, \quad \rho = \rho(r), \quad \mathbf{v}_n = 0, \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s(r).$$

Тогда из уравнения (3.19) получим

$$\sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta} v_s^{(\beta)} A\left(\rho, \theta, \frac{v_s^2}{2}\right) = 0, \tag{3.21}$$

а из уравнения неразрывности (3.18) —

$$\sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho_s v_s^{(\beta)}) = ia(\zeta^* - \zeta). \tag{3.22}$$

Кроме того, из (3.18) имеем также

$$\frac{\partial}{\partial r_\alpha} \Lambda\left(\rho, \theta, \frac{v_s^2}{2}\right) = 0. \tag{3.23}$$

Принимая во внимание, что

$$\mathbf{v}_s = \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{r}},$$

сразу можно заметить, что неизвестных функций две, а уравнений (3.21)–(3.23) для их определения больше. Именно этот факт и лежит в основе утверждения о справедливости равенства (3.20).

Рассмотрим сначала случай, когда η, $\mathbf{v}_s$ и отклонение ρ от постоянной являются бесконечно малыми.

Тогда, пренебрегая бесконечно малыми 2-го порядка, будем иметь

$$\sum_\beta \frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = \frac{ia}{\rho_s}(\zeta^* - \zeta), \quad A(\rho, \theta, 0) \sum_\beta \frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = 0,$$

откуда и следует, что

$$A(\rho, \theta, 0) = 0.$$

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда

$$\mathbf{v}_s(r) = \mathbf{w} + \delta\mathbf{v}_s, \quad \rho = \rho + \delta\rho(r), \quad \mathbf{w} \neq 0,$$

где δv, $\delta\rho$ и ξ — бесконечно малые величины.

Тогда из формул (3.21), (3.22) найдем

$$A\sum_\beta \frac{\partial \delta v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} + \sum_\beta w^{(\beta)} \left(\frac{\partial A}{\partial \rho}\frac{\partial \delta\rho}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial u}\sum_\gamma w^{(\gamma)} \frac{\partial \delta v_s^{(\gamma)}}{\partial r_\beta} \right) = 0,$$

$$\rho_s \sum_\beta \frac{\partial \delta v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} + \sum_\beta w^{(\beta)} \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial \rho}\frac{\partial \delta\rho}{\partial r} + \frac{\partial \rho_s}{\partial u}\sum_\gamma w^{(\gamma)} \frac{\partial \delta v_s^{(\gamma)}}{\partial r_\beta} \right) = ia(\zeta^* - \zeta). \tag{3.24}$$

Пусть

$$\zeta(r) = \mathrm{e}^{i(\mathbf{kr})}\,\delta G, \quad G = \mathrm{const}.$$

Тогда, очевидно, следует положить

$$\delta\mathbf{v}_s = \mathrm{e}^{i(\mathbf{kr})}\,\delta\mathbf{v} + \mathrm{e}^{-i(\mathbf{kr})}\,\delta\mathbf{v}^*,$$

$$\delta\rho = \mathrm{e}^{i(\mathbf{kr})}\,\delta\Gamma + \mathrm{e}^{-i(\mathbf{kr})}\,\delta\Gamma^*,$$

где $\delta\mathbf{v}$, $\delta\Gamma$ — бесконечно малые постоянные.

Произвольный вектор $\mathbf{k}$ выберем так, чтобы

$$\mathbf{kw} = 0.$$

При таком выборе $\mathbf{k}$ будем иметь

$$\sum_\beta w^{(\beta)} \frac{\partial \delta\rho}{\partial r_\beta} = 0, \quad \sum_\beta w^{(\beta)} \frac{\partial \delta v_s^{(\gamma)}}{\partial r_\beta} = 0,$$

и потому (3.24) можно представить в следующем виде:

$$A\sum_\beta \frac{\partial \delta v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = 0, \quad \rho_s \sum_\beta \frac{\partial \delta v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = ia(\zeta^* - \zeta),$$

откуда и следует справедливость сделанного утверждения (3.20).

Вместо последнего уравнения (3.18) можно теперь написать

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \sum_\beta \frac{\partial(\rho v_n^{(\beta)} S)}{\partial r_\beta} = 0. \tag{3.25}$$

Итак, система уравнений гидродинамики для сверхтекучей жидкости (в рассматриваемом приближении — идеальной жидкости) будет представлена уравнениями (3.18) (первые три) и уравнениями (3.25).

Подчеркнем, что в случае, когда

$$U = 0, \quad \eta = 0,$$

эту систему, исходя из феноменологических соображений, впервые получил Л. Д. Ландау [3].

§ 4. Уравнения в вариациях и функции Грина

Рассмотрим теперь с помощью полученных уравнений (3.18), (3.25) случай бесконечно малого отклонения от покоящегося состояния статистического равновесия.

Положим

$$\rho = \rho^0 + \delta\rho, \quad \mathbf{v}_s = \delta\mathbf{v}_s, \quad \mathbf{v}_n = \delta\mathbf{v}_n, \quad S = S^0 + \delta S, \quad U = \delta U, \quad \eta = \delta\eta.$$

Мы переходим, таким образом, от уравнений гидродинамики к линеаризованным «акустическим» уравнениям.

Так как в рассматриваемом случае с точностью до величин второго порядка малости

$$\eta = \zeta,$$

то упомянутые линеаризованные уравнения принимают следующий вид (верхний индекс 0 у величин ρ и S опускаем):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_s \sum_\beta \frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} + \rho_n \sum_\beta \frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = i\sqrt{\rho_0}\,(\eta^* - \eta),\\
&m\rho_s \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} + m\rho_n \frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{\partial\delta\mathcal{P}}{\partial r_\alpha} - \rho\frac{\partial U}{\partial r_\alpha},\\
&m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{\partial(\delta\Lambda + U)}{\partial r_\alpha},\\
&\rho\frac{\partial\delta S}{\partial t} + S\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho S\sum_\beta \frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$\sqrt{\rho_0} = \langle\psi\rangle_{0,0} = \langle\psi^+\rangle_{0,0},$$

$$\delta\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial\rho}\,\delta\rho + \frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}\,\delta\theta = -S\delta\theta + \frac{1}{\rho}\,\delta\mathcal{P}.$$

Прежде чем переходить к рассмотрению системы (4.1), выясним связь различных величин с функциями Грина. Член с источником в исходном гамильтониане можно рассматривать как вариацию гамильтониана (будем считать в дальнейшем $U = 0$), т. е. $H = H_0 + \delta H$, где

$$\delta H = \int \{\psi(t,r)\eta^*(t,r) + \psi^+(t,r)\eta(t,r)\}\,d\mathbf{r}.$$

Положим

$$\begin{aligned}
\eta(t,r) &= \mathrm{e}^{-i\omega t+\epsilon t+i\mathbf{kr}}\eta_k + \mathrm{e}^{i\omega t+\epsilon t-i\mathbf{kr}}\eta_{-k},\\
\eta^*(t,r) &= \mathrm{e}^{-i\omega t+\epsilon t+i\mathbf{kr}}\eta^*_{-k} + \mathrm{e}^{i\omega t+\epsilon t-i\mathbf{kr}}\eta^*_k,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где $\epsilon > 0$, $\epsilon \to 0$. В этом случае мы имеем адиабатическое включение δH.

Рассмотрим вариацию

$$\delta\phi = \delta\langle\psi(t,r)\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega t+\epsilon t}\,\delta\mathcal{U}(r) + \mathrm{e}^{i\omega t+\epsilon t}\,\delta\mathcal{B}(r),$$

$$\delta\phi^* = \delta\langle\psi^+(t,r)\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega t+\epsilon t}\,\delta\mathcal{B}^*(r) + \mathrm{e}^{i\omega t+\epsilon t}\,\delta\mathcal{U}^*(r).$$

По известной теореме о вариации средних при адиабатическом включении дополнительного малого члена в гамильтониан имеем, рассматривая только

вклад в δH, пропорциональный $e^{i\mathbf{kr}}$ (см., например, [5]):

$$\delta\mathcal{U}(r) = 2\pi \int e^{ikr'} \{\langle\langle\psi(r); \psi(r')\rangle\rangle_{\omega+i\epsilon}\eta^*_{-k} + \langle\langle\psi(r); \psi^+(r')\rangle\rangle_{\omega+i\epsilon}\eta_k\}\, d\mathbf{r}',$$

$$\delta\mathcal{B}^*(r) = 2\pi \int e^{ikr'} \{\langle\langle\psi^+(r); \psi(r')\rangle\rangle_{\omega+i\epsilon}\eta^*_{-k} + \langle\langle\psi^+(r); \psi^+(r')\rangle\rangle_{\omega+i\epsilon}\eta_k\}\, d\mathbf{r}',$$

$$\langle\langle\psi(r); \psi(r')\rangle\rangle_E = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle\langle a_q; a_{-q}\rangle\rangle_E e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\, d\mathbf{q}, \qquad (4.2')$$

$$\langle\langle\psi^+(r); \psi(r')\rangle\rangle_E = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle\langle a^+_{-q}; a_{-q}\rangle\rangle_E e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\, d\mathbf{q},$$

$$\langle\langle\psi^+(r); \psi^+(r')\rangle\rangle_E = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle\langle a^+_{-q}; a^+_q\rangle\rangle_E e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\, d\mathbf{q}.$$

Здесь $E = \omega + i\epsilon$, а величины $\langle\langle a_q; a_{-q}\rangle\rangle$ и т. д. обозначают фурье-компоненты соответствующих запаздывающих функций Грина. Используя (4.2) и (4.2'), найдем

$$\delta\mathcal{U}(r) = 2\pi\{\langle\langle a_k; a_{-k}\rangle\rangle_E\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k; a^+_k\rangle\rangle_E\eta_k\}e^{i\mathbf{kr}} = \delta\phi_k e^{i\mathbf{kr}},$$

$$\delta\mathcal{B}^*(r) = 2\pi\{\langle\langle a^+_{-k}; a_k\rangle\rangle_E\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k; a^+_k\rangle\rangle_E\eta_k\}e^{i\mathbf{kr}} = \delta\phi^*_{-k}e^{i\mathbf{kr}}.$$

С помощью введенных величин $\delta\phi_k$, $\delta\phi^*_k$ вариация $\delta\phi$ может быть записана в следующем виде:

$$\delta\phi(t, r) = e^{-i\omega t+\epsilon t+i\mathbf{kr}}\,\delta\phi_k + e^{i\omega t-i\mathbf{kr}+\epsilon t}\,\delta\phi_{-k},$$

$$\delta\phi^*(t, r) = e^{-i\omega t+\epsilon t+i\mathbf{kr}}\,\delta\phi^*_{-k} + e^{i\omega t+\epsilon t-i\mathbf{kr}}\,\delta\phi^*_k.$$

Величина $\delta\phi(t, r)$ в уравнение (4.1) непосредственно не входит, но она связана с $v_s(t, r)$. Используя определение v_s, легко получить выражение

$$v_s^{(\alpha)}(t, r) = \frac{i}{2m\sqrt{\rho_0}}\left(\frac{\partial\delta\phi^*(t, r)}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial\delta\phi(t, r)}{\partial r_\alpha}\right).$$

Введем фурье-компоненты $v_s^{(\alpha)}(\pm k)$:

$$v_s^{(\alpha)}(t, r) = e^{-i\omega t+\epsilon t+i\mathbf{kr}}v_s^{(\alpha)}(k) + e^{i\omega t+\epsilon t-i\mathbf{kr}}v_s^{(\alpha)}(-k),$$

для которых, согласно выражению для $v_s(\alpha)$ и определениям $\delta\phi_k$, будем иметь

$$v_s^{(\alpha)}(k) = \frac{\pi}{m\sqrt{\rho_0}}\,k^{(\alpha)}\{\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_E\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_k\rangle\rangle_E\eta_k\}. \qquad (4.3)$$

Кроме того, согласно определению,

$$a^2(t, r) = \phi^*(t, r)\phi(t, r),$$

откуда находим

$$\delta a = \frac{1}{2}\,[\delta\phi^*(t, r) + \delta\phi(t, r)] = \frac{\partial a}{\partial\rho}\,\delta\rho + \frac{\partial a}{\partial\theta}\,\delta\theta.$$

Снова переходя к фурье-компонентам и используя определение $\delta\phi_k$, получим

$$\delta a(t,r) = e^{-i\omega t+\epsilon t+i\mathbf{kr}}\,\delta a_k + e^{i\omega t+\epsilon t-i\mathbf{kr}}\,\delta a_{-k},$$
$$\delta a_k = \pi\{\langle\langle a_k + a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_E \eta^*_{-k} + \langle\langle a_k + a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_E \eta_k\}. \tag{4.4}$$

Формулы (4.3) и (4.4) связывают гидродинамические величины, получаемые из уравнения (4.1), с функциями Грина. Надо отметить, что так как уравнения гидродинамики справедливы лишь при «медленном» изменении гидродинамических величин, то такая связь носит асимптотический характер и верна только при $k \ll 1/l$ и $E \ll 1/T$, где l — длина свободного пробега, а T — время релаксации.

Для отыскания соответствующих решений и нахождения таким образом асимптотических выражений для функций Грина нужно только, как это обычно делается в акустике, подставить выражения (4.2) для η и η^* в (4.1) и искать решения, пропорциональные η_k и η^*_{-k}. Уравнения (4.1) могут быть переписаны в виде уравнений для фурье-компонент (мы полагаем, что $\delta U = U = 0$):

$$-E\,\delta\rho(k) + \rho_s \sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) + \rho_n \sum_\beta k^{(\beta)} v_n^{(\beta)}(k) = \sqrt{\rho_0}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k),$$
$$mE[\rho_s v_s^{(\alpha)}(k) + \rho_n v_n^{(\alpha)}(k)] = k^{(\alpha)}\left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\,\delta\rho(k) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}\,\delta\theta(k)\right],$$
$$mE v_s^{(\alpha)}(k) = k^{(\alpha)}\left[-S\,\delta\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\,\delta\rho(k) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}\,\delta\theta(k)\right], \tag{4.5}$$
$$E[\rho\,\delta S(k) + S\,\delta\rho(k)] = \rho S \sum_\beta k^{(\beta)} v_n^{(\beta)}(k),$$
$$\delta S(k) = \frac{\partial S}{\partial \theta}\,\delta\theta(k) + \frac{\partial S}{\partial \rho}\,\delta\rho(k).$$

Проанализируем некоторые предельные случаи. Рассмотрим сначала случай $E = 0$. Тогда из 2-го и 3-го уравнений (4.5) следует, что $\delta\rho(k) = \delta\theta(k) = 0$, а из 4-го уравнения получим $\sum_\beta k^{(\beta)} v_n^{(\beta)}(k) = 0$. Согласно первому уравнению, будем иметь отсюда

$$\rho_s \sum_\beta k^{(\beta)} v^{(\beta)}(k) = \sqrt{\rho_0}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k),$$

или, используя (4.3),

$$\frac{\pi\rho_s}{\rho_0 m}\,k^2\{\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_{E=0}\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k - a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_{E=0}\eta_k\} = \eta^*_{-k} - \eta_k.$$

Приравнивая коэффициенты при η^*_{-k}, η_k, получим

$$\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_{E=0} = \frac{m\rho_0}{\pi\rho_s}\,\frac{1}{k^2},$$
$$\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_{E=0} = -\frac{m\rho_0}{\pi\rho_s}\,\frac{1}{k^2}. \tag{4.6}$$

Кроме того, имеем

$$\delta a = \frac{\partial a}{\partial \rho}\,\delta\rho + \frac{\partial a}{\partial \theta}\,\delta\gamma,$$

или, согласно (4.4),

$$\langle\langle a_k + a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_{E=0}\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k + a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_{E=0}\eta_k = 0.$$

Откуда

$$\begin{aligned}\langle\langle a_k; a_{-k}\rangle\rangle_{E=0} &= -\langle\langle a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_{E=0},\\ \langle\langle a_k; a^+_k\rangle\rangle_{E=0} &= -\langle\langle a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_{E=0}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Подставляя эти соотношения в (4.6), получим

$$\langle\langle a_k; a_{-k}\rangle\rangle_{E=0} - \langle\langle a^+_{-k}; a_k\rangle\rangle_{E=0} = 2\langle\langle a_k; a_{-k}\rangle\rangle_{E=0} = \frac{m\rho_0}{\pi\rho_s}\,\frac{1}{k^2},$$

$$\langle\langle a_k; a^+_k\rangle\rangle_{E=0} - \langle\langle a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_{E=0} = 2\langle\langle a_k; a^+_k\rangle\rangle_{E=0} = -\frac{m\rho_0}{\pi\rho_s}\,\frac{1}{k^2}.$$

Таким образом, мы получили теорему о $1/k^2$ [4] для функций Грина с точным коэффициентом. Интересно отметить, что в коэффициент входит не только ρ_s, но и сама плотность частиц конденсата ρ_0.

Рассмотрим теперь случай $\theta = 0$. Необходимо отметить, что уравнения гидродинамики при $\theta = 0$ могут иметь только формальный смысл, так как времена релаксации становятся около $\theta = 0$ очень большими. Мы рассмотрим этот случай формально, чтобы посмотреть, что дают полученные выше формулы в пределе при $\theta \to 0$.

При этом все выражения значительно упрощаются, так как

$$\rho_s = \rho, \quad \rho_n = 0, \quad S = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\delta\Lambda = \frac{1}{\rho}\,\delta\mathcal{P} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\theta=0}\delta\rho.$$

Согласно (4.5), имеем

$$-E\,\delta\rho(k) + \rho\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) = \sqrt{\rho_0}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k),$$

$$Em\rho v_s^{(\alpha)}(k) = k^{(\alpha)}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\theta=0}\delta\rho(k),$$

или

$$\delta\rho(k) = \frac{E\rho}{k^2c^2}\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k); \quad C^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\theta 0}.$$

Подставляя $\delta\rho(k)$ в первое уравнение, получим

$$\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) = \frac{k^2\sqrt{\rho_0}\,c^2}{\rho(E^2 - c^2k^2)}\,(\eta_k - \eta^*_{-k}) =$$

$$= \frac{\pi}{m\sqrt{\rho_0}}\,k^2\{\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_E\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k - a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_E\eta_k\}.$$

Так как $\delta\rho(k)$ содержит лишний малый множитель E (нас интересует асимптотика функций Грина при малых E и $\mathbf{k}$), то по-прежнему справедливы в низшем порядке равенства (4.7). Поэтому, приравнивая коэффициенты при η^*_{-k} и η_k, получим

$$\langle\langle a_k; a_{-k}\rangle\rangle_E \approx -\frac{\rho_0 c^2 m}{2\pi\rho(E^2 - c^2k^2)},$$

$$\langle\langle a_k; a_k^+\rangle\rangle_E \approx \frac{\rho_0 c^2 m}{2\pi\rho(E^2 - c^2k^2)}.$$

Рассмотрим теперь общий случай ($\theta \neq 0$). Согласно второму и третьему уравнению (4.5), имеем

$$mE[\rho_s v_s^{(\alpha)}(k) + \rho_n v_n^{(\alpha)}(k)] = k^{(\alpha)}\,\delta\mathcal{P}(k),$$

$$mE(\rho_s + \rho_n)v_s^{(\alpha)}(k) = -k^{(\alpha)}\rho S\,\delta\theta(k) + k^{(\alpha)}\,\delta\mathcal{P}(k).$$

Вычитая одно из другого, получим

$$mE\rho_n[v_n^{(\alpha)}(k) - v_s^{(\alpha)}(k)] = \rho S k^{(\alpha)}\,\delta\theta(k). \tag{4.8}$$

Первое уравнение (4.5) может быть переписано в виде

$$-E\,\delta\rho(k) + \rho\sum_\beta k^{(\beta)}v_s^{(\beta)}(k) + \rho_n\sum_\beta k^{(\beta)}[v_n^{(\beta)}(k) - v_s^{(\beta)}(k)] = \sqrt{\rho_0}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k). \tag{4.9}$$

Исключая с помощью этого уравнения $\delta\rho(k)$ из последнего уравнения (4.5), получим

$$E\rho\,\delta S(k) + S\rho_s\sum_\beta k^{(\beta)}v_s^{(\beta)}(k) + S\rho_n\sum_\beta k^{(\beta)}v_n^{(\beta)}(k) - S\sqrt{\rho_0}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k) = S(\rho_s + \rho_n)\sum_\beta k^{(\beta)}v_n^{(\beta)}(k).$$

Выражая $\delta S(k)$ через $\delta\theta(k)$ и $\delta\rho(k)$ и снова исключая $\delta\rho(k)$, получим

$$E\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho\delta\theta(k) = \sqrt{\rho_0}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k)\left(S + \rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right) - \rho^2\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\sum_\beta k^{(\beta)}v_s^{(\beta)}(k) + \left(S\rho_s - \rho_n\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)\sum_\beta k^{(\beta)}[v_n^{(\beta)} - v_s^{(\beta)}(k)],$$

или, используя (4.8),

$$E\,\delta\theta(k) = -\frac{\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta}{\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)\rho}\sum_\beta k^{(\beta)}v_s^{(\beta)} + \frac{S\rho_s - \rho_n\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta}{\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho}\frac{\rho S k^2}{mE\rho_n}\,\delta\theta(k) + \sqrt{\rho_0}\,\frac{S + \rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta}{\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k).$$

Окончательно получим

$$\delta\theta(k)=\frac{-\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta mE}{\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho\left[mE^2-\frac{S\rho_s/\rho_n-\rho(\partial S/\partial\rho)_\theta}{(\partial S/\partial\theta)_\rho}Sk^2\right]}\sum_\beta k^{(\beta)}v_s^{(\beta)}(k)+$$
$$+\frac{\sqrt{\rho_0}\left(S+\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)mE}{\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho\left[mE^2\frac{S\rho_s/\rho_n-\rho(\partial S/\partial\rho)_\theta}{(\partial S/\partial\theta)_\rho}Sk^2\right]}(\eta^*_{-k}-\eta_k). \quad (4.10)$$

Выразим так же и $\delta\rho(k)$ через $v_s(k)$. Из уравнения (4.9) имеем

$$\delta\rho(k)=\frac{\rho}{E}\sum_\beta k^{(\beta)}v_s^{(\beta)}(k)+\frac{1}{mE^2}\rho Sk^2\,\delta\theta(k)-\frac{\sqrt{\rho_0}}{E}(\eta^*_{-k}-\eta_k).$$

Подставляя сюда выражение (4.10), находим

$$\delta\rho(k)=\frac{\rho}{E}\sum_\beta k^{(\beta)}v_s^{(\beta)}(k)-\frac{\rho^2k^2S\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta mE\sum\limits_\beta k^{(\beta)}v_s^{(\beta)}(k)}{mE^2\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho\left[mE^2-Sk^2\frac{S\rho_s/\rho_n-\rho(\partial S/\partial\rho)_\theta}{(\partial S/\partial\theta)_\rho}\right]}+$$
$$+\frac{\sqrt{\rho_0}}{E}\left\{\frac{Sk^2\left(S+\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)}{\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho\left[mE^2-Sk^2\frac{S\rho_s/\rho_n-\rho(\partial S/\partial\rho)_\rho}{(\partial S/\partial\theta)_\theta}\right]}-1\right\}(\eta^*_{-k}-\eta_k). \quad (4.11)$$

Подставляя выражения для $\delta\rho(k)$ и $\delta\theta(k)$ в уравнение для $v_s^{(\alpha)}(k)$, получим, умножая это уравнение на $k^{(\alpha)}$ и суммируя,

$$mE\sum_\alpha k^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}(k)=-Sk^2\,\delta\theta(k)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta k^2\,\delta\rho(k)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\right)_\rho k^2\,\delta\theta(k)=$$
$$=\left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\right)_\rho-S\right)\frac{k^2\sqrt{\rho_0}\left(S+\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)mE}{\rho\left[mE^2\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho-Sk^2\left(S\frac{\rho_s}{\rho_n}-\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)\right]}(\eta^*_{-k}-\eta_k)+$$
$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta k^2\left\{\frac{\rho}{E}-\frac{\rho^2Sk^2\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta}{E\left[\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho mE^2-Sk^2\left(S\frac{\rho_s}{\rho_n}-\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)\right]}\right\}\sum_\alpha k^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}(k)+$$
$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta k^2\frac{\sqrt{\rho_0}}{E}\left\{\frac{Sk^2\left(S+\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)}{mE^2\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho-Sk^2\left(S\frac{\rho_s}{\rho_n}-\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)}-1\right\}(\eta^*_{-k}-\eta_k)-$$

$$-\left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\right)_\rho - S\right)k^2\frac{\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta mE}{mE^2\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho - Sk^2\left(S\frac{\partial_s}{\partial_n} - \rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)}\sum_\alpha k^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}(k).$$

Разрешая это уравнение относительно $\sum\limits_\alpha k^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}(k)$, получим

$$\sum_\alpha k^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}(k) = \frac{k^2\Delta(k,E)\sqrt{\rho_0}}{m\Omega(k,E)}(\eta^*_{-k} - \eta_k) =$$

$$= \frac{\pi}{m\sqrt{\rho_0}}k^2\{\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_E\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k - a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_E\eta_k\}, \quad (4.12)$$

где

$$\Omega(k,E) = E^4 - \frac{1}{m}E^2k^2\left[S^2\frac{\rho_s}{\rho_n\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho} - \left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\right)_\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho} + \left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\right)_\rho\right] +$$

$$+\frac{1}{m^2}k^4\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta S^2\frac{\rho_s}{\rho_n\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho} = E^4 - E^2k^2\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_s + \frac{S^2\rho_s\theta}{\rho_n mC_v}\right] +$$

$$+\frac{k^4}{m}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta\frac{\rho_s\theta S^2}{m\rho_n C_v} = (E^2 - c_1^2k^2)(E^2 - c_0^2k^2), \quad (4.13)$$

причем скорость звука

$$c^2_{0,1} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_s + \frac{1}{2}\frac{S^2\rho_s\theta}{m\rho_n C_v} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_s + \frac{S^2\rho_s\theta}{\rho_n mC_v}\right]^2 - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta\frac{\rho_s\theta S^2}{\rho_n mC_v}} \quad (4.14)$$

и теплоемкость при постоянном объеме

$$C_v = \theta\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho.$$

Величина c_0 стремится к обычной скорости звука как при $\rho_s \to 0$, так и при $\theta \to 0$.

Величина c_1 является специфической для сверхтекучей жидкости скоростью «второго звука» и стремится к нулю при $\rho_s \to 0$.

Величина $\Delta(E,k)$ имеет вид

$$\Delta(E,k) = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta k^2\frac{S^2\theta}{\rho_n C_v} - E^2\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_s - \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho S^2\right)_\theta\frac{\theta}{\rho C_v}\right].$$

Легко показать, так же как мы это делали для случая $\theta = 0$, что $\delta\rho(k)$ и $\delta\theta(k)$ содержат лишний малый множитель порядка k по сравнению с $v_s(k)$. Поэтому равенства (4.7) в низшем порядке по-прежнему имеют место. Приравнивая

коэффициенты при η_k и η^*_{-k} и пользуясь (4.7), получим окончательно

$$\langle\langle a_k; a_{-k}\rangle\rangle_E \approx \frac{\Delta(E,k)\rho_0}{2\pi\Omega(k,E)}, \quad \langle\langle a_k; a_k^+\rangle\rangle_E \approx -\frac{\Delta(E,k)\rho_0}{2\pi\Omega(k,E)}. \tag{4.15}$$

Ясно, что в предельных случаях $\theta = 0$ или $E = 0$, отсюда вытекают ранее полученные результаты.

Видим далее, основываясь на формуле (3.13), что функции Грина имеют полюсы, соответствующие двум типам элементарных возбуждений:

$$E = c_0 k, \quad E = c_1 k.$$

В полученных формулах (4.15) не учтены эффекты затухания, что обусловлено рассматривавшимся приближением идеальной жидкости.

Было бы интересно улучшить асимптотическую точность (4.15), рассмотрев «приближение вязкости жидкости», для чего надо принять во внимание в уравнениях § 3 отброшенные там члены «порядка μ».

Эта задача существенно упрощается тем обстоятельством, что для построения функций Грина нам нужны не полные уравнения гидродинамики, а лишь линеаризованные акустические уравнения.

Мы получили бы таким образом уточненные выражения для функций Грина, содержащие члены затухания, составленные из кинетических коэффициентов (вязкости, теплопроводности и т. п.).

Список литературы

1. *Гуров К. П.* К квантовой гидродинамике // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 110; ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 279.
2. *Иорданский С. В.* О гидродинамике вращающейся бозе-системы ниже точки конденсации. Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. С. 74.
3. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1941. Т. 11. С. 592; ЖЭТФ. 1944. Т. 14. С. 112.
4. *Боголюбов Н. Н.* Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ Д-781. Дубна, 1961; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VI, 2006, с. 236.
5. *Зубарев Д. Н.* Двухвременные функции Грина в статистической физике // УФН. 1960. Т. 21, вып. 1. С. 71.

12.

О СВЕРХТЕКУЧЕЙ МОДЕЛИ ЯДРА*

Ядерная физика берет свое начало от установления периодического закона Менделеева. Таблица Менделеева отражает регулярность структуры атома и важность массового числа A и заряда Z ядра. В развитии ядерной физики периодический закон сыграл роль ведущей идеи.

Сложность, богатство и разнообразие свойств атомных ядер являются главными физическими причинами трудности построения теории ядра.

При построении теории ядра возникают две главные трудности. Во-первых, силы, действующие между нуклонами в ядрах, недостаточно изучены и очень сложны; во-вторых, даже когда делаются упрощающие предположения об этих силах, возникают значительные трудности при изучении свойств системы, состоящей из большого, но конечного числа сильновзаимодействующих частиц. Следует подчеркнуть, что в рассматриваемой системе нет малого параметра, по которому можно делать разложение для решения многочастичной проблемы с помощью теории возмущений.

Следовательно, при построении теории ядра физики должны направить свои усилия на разработку простых моделей.

На начальной стадии развития ядерной физики ядро описывалось моделью жидкой капли или моделью ферми-газа. В дальнейшем термин «модель» стал пониматься в более широком смысле слова. В современной теории ядра под моделью подразумевается приближенный метод изучения свойств ядра, согласно которому принимают во внимание наиболее важную часть ядерных сил.

Для развития ядерной физики наиболее важны модель оболочек и обобщенная ядерная модель. Так, используя модель оболочек, удалось объяснить не только особую стабильность магических ядер, но и большое количество экспериментальных данных, описывающих свойства основного и возбужденных состояний ядер и ряд особенностей их распада.

Феноменологическое описание структуры ядра совершается в рамках обобщенной модели. При феноменологическом описании структуры сложных ядер вводятся коллективные координаты и считается, что ядерные возбуждения возникают благодаря вращениям ядра как целого и колебаниям ядерной поверхности. Каждое ядро характеризуется несколькими параметрами. Энергия возбужденных состояний, их мультипольные моменты и вероятности электромагнитных переходов выражаются через эти параметры. Значения этих параметров определяются из соответствующих экспериментальных данных и характеризуют свойства данного ядра.

---

* On Superfluid Nuclear Model // Atti del convegno Mendeleeviano «Periodicita e simmetrie nella struttura elementare della matetia». Torino—Roma, 15-21 Sett., 1969. Torino, 1971. P. 263; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 327.

Развитие ядерной физики привело к появлению ряда экспериментальных данных, которые не могли быть объяснены ни оболочечной, ни обобщенной моделями. Это, например, появление щели в спектре возбужденных состояний благодаря изменению структуры четно-четных ядер и ее отсутствие в нечетно-массовых ядрах. Было найдено, что моменты инерции, вычисленные в модели независимых частиц, больше экспериментальных значений в два–три раза.

Моменты инерции нечетных ядер заметно больше, чем моменты ближайших четно-четных ядер. То, что эта разница многократно превышает вклад одного нуклона, показывает, что этот эффект обусловлен изменением свойств многочастичной системы.

Большие трудности возникли при объяснении равновесной формы ядра. Некоторые особенности α- и β-распадов не объяснены вообще.

Описание колебательных состояний требует существенного улучшения. Большой ряд необъясненных экспериментальных данных, существенные трудности чисто феноменологической теории и любые попытки объяснить колебательные состояния непосредственно на основе гамильтониана с нуклонным взаимодействием сделали необходимым развитие нового подхода в теории ядра, который обычно называют полумикроскопической моделью. Этот подход связан с выбором эффективного ядерного взаимодействия. Наиболее важная часть ядерных сил находится и математически описывается для каждого ядерного явления. Это полумикроскопическое направление является естественным развитием феноменологической модели. Его успех обусловлен тем, что при изучении структуры ядра мы ограничиваемся нижними возбужденными состояниями. Следовательно, проблема многих тел сводится к задаче с малым числом степеней свободы.

Этот подход вырос непосредственно из нашего понимания теории парных корреляций сверхпроводящего типа. Исследования в теории сверхтекучести [1] и сверхпроводимости [2–4] сыграли важную роль в развитии этого подхода.

Скажем несколько слов о сверхтекучести бозе-систем.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда взаимодействие отсутствует, так что все бозоны являются независимыми.

Как хорошо известно, при достаточно малых температурах идеальный бозе-газ допускает образование так называемого «конденсата», когда на нижнем энергетическом уровне все частицы имеют нулевой импульс.

Даже при отличной от нуля температуре Θ, меньшей некоторой критической $\Theta_{\text{сг}}$, конечная доля частиц находится в конденсате, оставаясь в состоянии покоя.

Такая система не обладает свойством сверхтекучести. Действительно, представим движение системы как целого с определенной скоростью вдоль трубки.

Ничто не препятствует частицам терять свой импульс, например, при столкновении со стенками, поэтому идеальный бозе-газ не может быть сверхтекучим.

Чтобы получить динамическую систему, проявляющую это свойство, мы рассмотрели около 23 лет назад систему взаимодействующих бозе-частиц. В случае взаимодействия ситуация может оказаться совершенно иной, даже если оно мало.

Конденсат по-прежнему существует, но низколежащие возбуждения не носят индивидуального характера.

Пусть

$$b_k, \quad b_k^\dagger$$

— квантовые бозе-операторы, описывающие уничтожение или рождение объектов с импульсом k.

Эти амплитуды описывают элементарные возбуждения в идеальном бозе-газе. Когда взаимодействие (в основном отталкивающее) принимается во внимание, удобно сделать преобразование квантовых операторов:

$$\beta_k = u_k b_k + v_k b_k^\dagger, \tag{1}$$

где u_k, v_k — вещественные числа, удовлетворяющие условию

$$u_k^2 - v_k^2 = 1,$$

которое гарантирует канонический характер преобразования, и определяемые некоторыми конкретными уравнениями.

Элементарные возбуждения описываются теперь не операторами b_k, $b_k^\dagger$, а β_k, $\beta_k^\dagger$. Энергия этих возбуждений имеет вид

$$E = E(K),$$

схематически изображенный на рис. 1. Нетрудно видеть, что в этой ситуации мы будем иметь свойство сверхтекучести. Действительно, представим себе, что рассматриваемая система движется как целое со скоростью n.

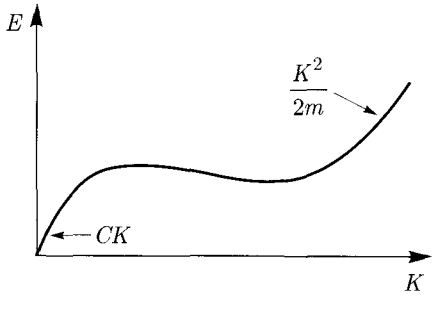


Рис. 1. C — скорость звука

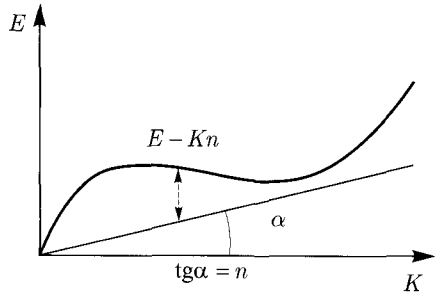


Рис. 2

Тогда элементарные возбуждения будут иметь энергию

$$E = E(K) - (\mathbf{Kn}).$$

Для достаточно малых значений n эти энергии будут положительными (рис. 2), и благодаря этому мы должны добавить энергию, чтобы создать элементарное возбуждение.

Следовательно, мы имеем свойство сверхтекучести — ток стабилен по отношению к созданию элементарных возбуждений. Полезно заметить, что для идеального бозе-газа

$$E(K) = \frac{K^2}{2m},$$

и элементарные возбуждения движущегося газа

$$E(K) - (\mathbf{Kn}) = \frac{K^2}{2m} - (\mathbf{Kn})$$

будут отрицательными для некоторого малого K, так что стабильность тока не будет гарантирована. Я хочу также упомянуть здесь еще одно свойство сверхтекучей системы. Когда система вращается, только ее часть («нормальная часть») принимает участие во вращении, другая «сверхтекучая» часть остается в покое.

По этой причине момент инерции рассматриваемой системы имеет меньшее значение, чем в «нормальном» случае.

До сих пор мы рассматривали только бозе-системы. Теперь обратимся к проблеме сверхтекучести систем фермионов.

Первое, наиболее важное приложение — случай электронов в металле: сверхтекучесть электронов проводимости и есть, в сущности, сверхпроводимость. Интересно отметить, что теорию сверхтекучести для систем фермионов можно было бы развить, используя тот же метод, что и для бозе-систем.

Пусть a_f, $a_f^\dagger$ — квантовые ферми-операторы уничтожения и рождения, соответствующие

$$f = (\mathbf{p}, \sigma),$$

где $\mathbf{p}$ — импульс и σ — спин.

Тогда все, что нам нужно сделать, — это ввести новые ферми-операторы

$$\begin{aligned} &\alpha_f, \alpha_f^\dagger, \\ &\alpha_f = u_f a_f + v_f a_f^\dagger, \end{aligned} \tag{2}$$

причем канонический характер преобразования гарантируется условием

$$|u_f|^2 + |v_f|^2 = 1.$$

Числа u_f, v_f могут быть найдены с помощью минимизации с использованием некоторой формы принципа компенсации опасных диаграмм.

Этим способом можно получить в первом приближении, по существу, те же самые результаты, что и в теории БКШ [2]. Теперь я хочу сказать несколько слов о физическом смысле рассматриваемой замены переменных.

Для рассматриваемых ферми-систем тоже существует *конденсат*, такой же, как для бозе-систем, образованный парами фермионов. Так как каждая из таких пар находится в покое, две частицы, образующие пару, имеют противоположные импульсы, и так как пара не имеет полного спина, спины этих частиц направлены друг против друга.

Я хочу подчеркнуть, что идея того, что система фермионов может стать сверхтекучей, когда существует возможность формирования конденсата из пар фермионов, имеет долгую историю. Насколько мне известно, она была впервые опубликована много лет назад профессором Шафротом [5].

Вообще говоря, эта идея вполне корректна. Но при развитии этой идеи был использован слишком упрощенный подход к представлению пар как молекул. Когда мы говорим о молекулах, мы должны помнить, что если возможно использование такой чрезмерно упрощенной и несколько наивной картины для составляющих пары, все время находящихся по отношению друг к другу

в связанном состоянии, то обмен между составляющими различных пар не принимается во внимание.

Мы рассматриваем совсем другую картину в сверхтекучих ферми-системах: в «конденсате» «пар» составляющие пар постоянно обмениваются своими энергиями.

С физической точки зрения обменная энергия здесь того же порядка, что и энергия связи. В действительности конденсат пар есть коллективное явление.

Рассматриваются два типа возбужденных состояний: возбуждения, которые разрушают пару, создавая две ферми-частицы (эти возбуждения имеют энергетическую щель), и коллективные возбуждения «фононного типа».

Также нужно отметить, что вращающаяся сверхтекучая система имеет меньший момент инерции, потому что только «нормальная часть» принимает участие во вращении, при этом «сверхтекучая часть» остается в покое.

В [6] было отмечено, что математические методы, разработанные при создании теории сверхтекучести, являются весьма общими. Они могут быть использованы для описания различных систем фермионов. На основе того, что свойства ядерной материи подобны свойствам электронного газа в металлах, в [6] была рассмотрена проблема сверхтекучести ядерной материи. О. Бор, Б. Моттельсон, Д. Пайнс, В. Г. Соловьев, С. Т. Беляев и др. [7–10] применили математические методы, развитые в теории сверхтекучести и сверхпроводимости, для исследования структуры ядра. Они показали, что парные корреляции сверхпроводящего типа очень важны для средних и тяжелых ядер.

Теперь мы опишем методы модели сверхтекучести и основные результаты, полученные В. Г. Соловьевым и его коллегами.

Рассмотрим систему взаимодействующих нуклонов с гамильтонианом

$$H = \sum_{f,f'} \{T(f,f') - \lambda\delta_{f,f'}\} a_f^\dagger a_{f'} - \frac{1}{4} \sum_{f_1,f_2,f_2',f_1'} G(f_1,f_2;f_2',f_1') a_{f_1}^\dagger a_{f_2}^\dagger a_{f_2'} a_{f_1'}. \quad (3)$$

Здесь a_{f_1} и $a_f^\dagger$ — операторы рождения и уничтожения нуклона; f — множество квантовых чисел, описывающих состояние нуклона, и λ обозначает химический потенциал.

Мы совершаем линейное каноническое преобразование ферми-операторов:

$$a_f = \sum_\nu \{u_{f\nu}\alpha_\nu + v_{f\nu}\alpha_\nu^\dagger\}. \quad (4)$$

Чтобы оно не нарушало перестановочных соотношений для операторов α_ν и $\alpha_\nu^\dagger$, функции $u_{f\nu}$ и $v_{f\nu}$ должны удовлетворять уравнениям, заданным в [11].

Основное состояние четно-четных ядер определяется как вакуум по отношению к операторам α_ν, а именно

$$\alpha_\nu|0\rangle = 0. \quad (5)$$

Введем функцию плотности $\varrho(f_1,f_2)$ и корреляционную функцию $\Phi(f_1,f_2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \varrho(f_1,f_2) &= \langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2}\rangle, \\ \Phi(f_1,f_2) &= \langle a_{f_1} a_{f_2}\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Эти функции не являются независимыми, но связаны соотношениями, выписанными в работе [11].

Мы находим среднее значение H по состоянию (5):

$$\langle H\rangle = \sum_{f,f'}\{T(f,f') - \lambda\delta_{f,f'}\}\varrho(f,f') -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{f_1,f_2,f_1',f_2'} G(f_1,f_2;f_2',f_1')\left\{\varrho(f_1,f_1')\varrho(f_2,f_2') + \frac{1}{2}\Phi^*(f_1,f_2)\Phi(f_1',f_2')\right\}. \quad (7)$$

Функции Φ и ϱ определяются из условия минимума $\langle H\rangle = \min$. В качестве результата мы получаем уравнения, которые запишем символически в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(f_1,f_2|\varrho,\Phi) &= 0,\\ \beta(f_1,f_2|\varrho,\Phi) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Химический потенциал λ определяется из закона сохранения в среднем числа частиц

$$N = \sum_f \langle a_f^\dagger a_f\rangle = \sum_f \varrho(f,f). \quad (9)$$

Упомянутый вариационный принцип является обобщением хорошо известного метода Хартри–Фока. Среди решений, полученных с помощью этого принципа, всегда находятся решения типа Хартри–Фока. Ядерные силы таковы, что минимум энергии соответствует решениям, полученным на основе обобщенного вариационного принципа, принимающего во внимание парные корреляции нуклонов. По этой причине применение этого принципа в теории ядра так эффективно.

В соответствии с теоремой Блоха–Мессиа [12] существует линейное унитарное преобразование, которое преобразует функцию $\Phi(f_1,f_2)$ к каноническому виду:

$$\Phi(f_1,f_2) = \Phi(f_1)\,\delta_{f_1,-f_2}. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что в этом случае функция $\varrho(f_1,f_2)$ диагональна, т. е.

$$\varrho(f_1,f_2) = \varrho(f_1)\,\delta_{f_1,f_2}. \quad (10')$$

Из двухчастичного потенциала, описывающего взаимодействие между нуклонами, выделены среднее ядерное поле и взаимодействие пары нуклонов в состояниях, сопряженных относительно обращения времени. Упомянутая процедура может рассматриваться как один из этапов обоснования модели независимых частиц. Выделение среднего поля не связано ни с величиной, ни с формой потенциала, описывающего взаимодействие между нуклонами. Ясно, что использованный выше метод является лишь приближенным.

Более того, в теории ядра постулируется, что среднее поле ядра соответствует такому представлению, когда матрица плотности $\varrho(f_1,f_2)$ диагональна для основного состояния четно-четных ядер. В этом представлении оставшиеся силы полностью сводятся к взаимодействию, ведущему к парным корреляциям сверхпроводящего типа. Следовательно, основное состояние можно рассматривать, не принимая во внимание взаимодействие между квазичастицами. Это представление таково, что для ряда возбужденных состояний матрицы ϱ и Φ также диагональны.

Эти утверждения лежат в основе математического аппарата, который позволяет учесть парные корреляции сверхпроводящего типа.

В соответствии со сверхтекучей моделью ядра основное состояние четно-четных ядер не содержит квазичастиц, возбужденные состояния содержат две, четыре и т. д. квазичастицы. Основное состояние и ряд возбужденных состояний нечетных ядер содержат одну квазичастицу, затем следуют состояния с тремя квазичастицами и т. д.

Поскольку силы, вызывающие парные корреляции нуклонов, являются короткодействующими, они могут быть приближенно представлены в δ-функциональной форме. В этом приближении они постоянны в импульсном пространстве. Следовательно, можно предположить, что матричные элементы этих сил по собственным волновым функциям потенциала среднего поля приближенно являются постоянными, т. е. значение $G(q+, q-; q'-, q'+)$ не зависит от q и q':

$$G(q+, q-; q'-, q'+) = \frac{\text{const}}{A} \equiv G. \tag{11}$$

Используются две постоянные: одна из них, G_N, для нейтронной системы, другая, G_Z, для протонной. Приближение (11) является достаточно хорошим. В [13] показывается, что одинаковые значения $G_N A$ и $G_Z A$ хорошо описывают энергии спаривания в широком интервале ядер, $150 < A < 250$.

Эффект блокировки имеет очень большое значение в теории ядра. Влияние неспаренных частиц на сверхтекучие свойства системы в каждом состоянии приписывается эффекту блокировки.

Взаимодействие между нуклонами в атомных ядрах приводит к размыванию поверхности Ферми. Необходимо отметить, что рассчитанная форма этого размывания хорошо подтверждается экспериментальными данными, полученными из однонуклонных реакций передачи.

Принимая во внимание парные корреляции сверхпроводящего типа, оказалось возможным объяснить большое количество экспериментальных данных, которые выходили за рамки используемых ранее моделей. Так, удалось объяснить не только появление щели в спектре четно-четных ядер и ее отсутствие в нечетно-нечетных и нечетно-массовых ядрах, но также дать количественное описание энергий возбужденных состояний с двумя квазичастицами. Энергии этих состояний для четно-четных ядер, рассчитанные В. Г. Соловьевым и его коллегами [14] в 1962–1964 гг., удивительно хорошо описывают новые экспериментальные данные. Показывается, что парные корреляции оказывают сильное влияние на вероятности α-, β и γ-переходов.

Основные утверждения сверхтекучей модели ядра показывают, что при правильном выборе параметров среднего поля, которые соответствуют представлению, согласно которому матрица плотности диагональна, существует надежная теоретическая основа для вычисления равновесных деформаций атомных ядер. Это делает возможным предсказание новых областей деформации для $50 < N$, $Z < 82$ и $28 < Z < 50$, $50 < N < 82$, так же как и возможного существования области долгоживущих элементов для $Z = 114$ и $N = 184$.

Для средних и тяжелых ядер существуют низколежащие возбужденные состояния трех типов: вращательные состояния, связанные с вращением деформированных ядер, квазичастицы и колебательные состояния. Важным успехом сверхтекучей модели является полумикроскопическое описание колебательных состояний. Основные уравнения могут быть получены методом

самосогласованного поля, посредством функций Грина и методом приближенного вторичного квантования.

В [11] был предложен математический подход для рассмотрения возбужденных состояний, соответствующих малым колебаниям. Эти возбужденные состояния образуются из-за когерентности взаимодействия многих частиц. Чтобы описать малые колебания, к матрице плотности и корреляционной функции добавляются бесконечно малые приращения недиагональных элементов $\delta\varrho(f_1, f_2)$ и $\delta\Phi(f_1, f_2)$ соответственно. Взаимодействие между квазичастицами ведет к тому, что волновая функция основного состояния четно-четного ядра перестает быть вакуумом квазичастиц. Бесконечно малые приращения $\delta\varrho(f_1, f_2)$ и $\delta\Phi(f_1, f_2)$ выражаются через функции $\mu(\nu_1, \nu_2) = \langle\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\rangle$ и $\mu^*(\nu_1, \nu_2)$, для которых выводятся основные уравнения. Среднее число квазичастиц в основном состоянии предполагается малым, поэтому используется приближение

$$\langle\alpha^\dagger_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\rangle = 0.$$

В качестве результата мы получаем интегральное уравнение, описывающее малые колебания в дырочно-частичном и частично-частичном каналах для взаимодействий весьма общего вида. В частном случае мы получаем уравнения теории конечных ферми-систем [15]. Используя мультиполь-мультипольное взаимодействие, мы приходим к секулярным уравнениям в приложении к сферическим ядрам (см., например, [16, 17]) и к деформированным ядрам [18]. Принимая во внимание спин-квадрупольное взаимодействие, получаем секулярные уравнения, выведенные ранее в работе [19].

При изучении колебательных состояний наиболее удобен метод приближенного вторичного квантования, с помощью которого находятся волновые функции однофононных состояний и рассчитываются вероятности α-, β- и γ-переходов и сечения рассеяния прямых ядерных реакций.

Волновые функции коллективных невращательных состояний являются суперпозицией состояний с двумя квазичастицами. Взаимодействие квазичастиц приводит к понижению энергии коллективных состояний по сравнению с состояниями с двумя квазичастицами, причем основной вклад дает частично-дырочное взаимодействие. Чем сильнее «коллективизация» состояний, тем сильнее понижение энергии. Из уравнений метода приближенного вторичного квантования можно получить как частные случаи уравнения метода Тамма–Данкова, уравнения обобщенной теории Хартри–Фока и решения для случая адиабатического приближения.

Особая роль приписывается возбужденным 0^+-состояниям. При изучении возбужденных состояний основные математические трудности были связаны, по-видимому, с этими 0^+-состояниями. Так, среди 0^+-состояний существуют ду́ховые состояния, для исключения которых используется взаимодействие между квазичастицами. Применяется математический метод, который отождествляет лишние однофононные 0^+-состояния с основным состоянием. Возбужденные 0^+-состояния имеют сложную структуру, которая возникает благодаря парным колебаниям, β-колебаниям, двухфононным состояниям и т. д.

Очень важным является развитие полумикроскопического описания колебательных состояний деформированных ядер [18, 20] на основе метода приближенного вторичного квантования.

В рамках этого подхода были объяснены такие до сих пор непонятные факты, как очень сильное уменьшение энергии октупольных состояний в изотопах тория, урана, плутония и понижение энергий γ-колебательных состояний ниже уровней энергий β-колебательных соединений в изотопах диспрозия, эрбия и т. д.

Эта теория корректно описывает энергии колебательных состояний, вероятности электромагнитных переходов, включая такие тонкие свойства этих состояний, как их компонентный состав. Наиболее важные результаты полумикроскопической теории колебательных состояний связаны, скорее, со свойствами симметрии взаимодействия, чем с его явным видом (например, с его зависимостью от радиуса).

Развитие полумикроскопического описания колебательных состояний является важным шагом в теории ядра. Оно связывает локализацию и структуру колебательных состояний с поведением одночастичных уровней среднего поля. С помощью полумикроскопического подхода было успешно описано изменение перехода от ядра к ядру.

Следующим шагом является конструкция математического аппарата, описывающего взаимодействие квазичастиц с фононами в деформированных ядрах [21, 22]. В нечетных ядрах взаимодействие квазичастиц с фононами ведет к появлению примесей в состояниях с одной квазичастицей, к коллективным невращательным состояниям и к появлению состояний со сложной структурой. Усложненная структура волновых функций проявляется в увеличении приведенных вероятностей $E2$- и $E3$-переходов, в спектроскопических факторах для прямых однонуклонных реакций передачи, в параметрах развязывания и т. д. Имеющиеся экспериментальные данные указывают на важность взаимодействия квазичастиц с фононами в деформированных ядрах. С увеличением энергии структура состояний становится более сложной.

Основная причина этого усложнения — взаимодействие вращения с внутренним движением, а также квазичастиц с фононами.

Необходимо подчеркнуть, что вычисления, выполненные на основе сверхтекучей ядерной модели, были в значительной степени стимулированы изучением структуры ядра. Объяснение большого количества экспериментальных данных, вышедших за рамки более ранних моделей, количественное описание многих характеристик деформированных ядер и предсказание энергий, структуры и особенностей возбуждений почти для всех низколежащих возбужденных состояний деформированных ядер внесли огромный вклад в исследование структуры деформированных ядер. Результаты вычислений являются путеводителем для экспериментаторов при постановке экспериментов и анализе экспериментальных данных.

Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н.* Лекции по квантовой статистике. Киев: Высшая школа, 1949; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VI, 2006, с. 9.
2. *Bardeen J., Cooper L., Schriffer J.* // Phys. Rev. 1957. V. 108. P. 1175.
3. *Боголюбов Н.Н.* О новом методе в теории сверхпроводимости. I // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58; 1958. Т. 34. С. 73; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 177.

4. *Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В.* Новый метод в теории сверхпроводимости. М.: Изд-во АН СССР, 1958; *Боголюбов Н.Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д.Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 530.
5. *Schafroth M.R.* // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 1442.
6. *Боголюбов Н.Н.* К вопросу об условии сверхтекучести в теории ядерной материи // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 1. С. 52; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д.Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 321.
7. *Bohr A., Mottelson B., Pines D.* // Phys. Rev. 1958. V. 110. P. 936.
8. *Соловьев В.Г.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 823; Nucl. Phys. 1958/1959. V. 9. P. 655.
9. *Beliaev S.T.* // Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 1959. V. 31, N 11; The Many-Body Problem. N. Y.: John Wiley & Sons, 1959.
10. *Соловьев В.Г.* Влияние парных корреляций сверхпроводящего типа на свойства атомных ядер. М.: Госатомиздат, 1963.
11. *Боголюбов Н.Н.* О принципе компенсации и методе самосогласованного поля // УФН. 1959. Т. 67, № 4. С. 549; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д.Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 424.
12. *Bloch C., Messiah A.* // Nucl. Phys. 1962. V. 39. P. 95.
13. *Малов Л.А., Соловьев В.Г., Христов И.Д.* // ЯФ. 1967. Т. 6. С. 118.
14. *Gallagher C.J., Soloviev V.G.* // Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 1962. V. 2, N 2; *Пятов Н.И., Соловьев В.Г.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1964. Т. 28. С. 11; 1964. Т. 28. С. 1617; *Soloviev V.G., Siklos T.* // Nucl. Phys. 1964. V. 59. P. 145.
15. *Мигдал А.Б.* Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М.: Наука, 1965.
16. *Baranger M.* // Phys. Rev. 1960. V. 120. P. 957.
17. *Arview R., Veneroni M.* // Compt. Rend. 1960. V. 250. P. 992; 1960. V. 250. P. 2155; *Kisslinger L.S., Sorenson R.A.* // Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 1960. V. 32, N 9; *Yoshida S.* // Nucl. Phys. 1962. V. 38. P. 380.
18. *Soloviev V.G.* // Atomic Energy Review. 1965. V. 3. P. 117.
19. *Pyatov N.I.* // Ark. Fys. 1967. V. 36. P. 667.
20. *Корнейчук А.А., Малов Л.А., Соловьев В.Г., Федотов С.И., Шульц Х.* // ЯФ. 1969. Т. 9. С. 750.
21. *Soloviev V.G.* // Phys. Lett. 1965. V. 16. P. 308; *Soloviev V.G., Vogel P.* // Nucl. Phys. A. 1967. V. 92. P. 449; *Bes D.R., Cho Yi-Chung.* // Nucl. Phys. 1966. V. 86. P. 581.
22. *Soloviev V.G.* Nuclear Structure. Dubna Symp. 1968. IAEA. Vienna, 1968. P. 101.

13.

О СПОНТАННОМ НАРУШЕНИИ СИММЕТРИИ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ*

В последнее время в квантовой теории поля уделялось много внимания проблемам спонтанного нарушения симметрии. Для описания ситуации, в которой такого рода нарушение проявляется явным образом, обычно вводят бозонное поле $\phi(x)$.

Благодаря свойствам симметрии лагранжиана вакуумное среднее поля

$$\langle\phi(x)\rangle$$

должно быть равно нулю, если только вакуумное состояние не вырождено. Для изучения нарушения симметрии полагают

$$\phi(x) = \sigma + \nu(x),$$

где σ является c-числом, а

$$\langle\nu(x)\rangle = 0.$$

Величина σ в этом случае входит в выражение для спектра соответствующих бозе-частиц.

Я хотел бы отметить, что совершенно аналогичная ситуация была впервые открыта в статистической механике при построении микроскопической теории сверхтекучести.

Хотелось бы напомнить, что в своей работе о сверхтекучести (1946) я рассмотрел задачу о системе слабо взаимодействующих бозе-частиц с гамильтонианом

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \tag{1}$$

где H_0 — обычный гамильтониан для бозе-газа невзаимодействующих частиц, а

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3x' \phi(|x - x'|)\psi^+(x)\psi^+(x')\psi(x)\psi(x').$$

Здесь $\psi(x)$ — оператор бозонного поля, выраженный через квазидискретные суммы бозе-амплитуд:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p b_p e^{i(px)}. \tag{2}$$

До тех пор, пока мы считаем взаимодействие $\phi(|x|)$ малым, пропорциональным некоторому малому параметру λ, у нас есть основания полагать следующее.

---

* On Spontaneous Violation of Symmetry in Statistical Mechanics // Physik. 1973. Plenarvortr. 37. Physikertag. 1973. Hamburg: Weinheim / Bergstr., 1973. S. 191; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VIII, 2007, с. 398.

Допустим, что температура θ системы близка к 0 К и мы имеем дело со слабо возбужденными состояниями системы. Тогда в случае полного отсутствия взаимодействия, т. е. при $\lambda = 0$, практически все частицы системы находятся в конденсате, т. е. в состояниях с нулевыми импульсами. Для достаточно малых λ естественно предположить, что число N_0 частиц в конденсате остается сравнительно близким к полному числу частиц N, так что

$$\frac{N - N_0}{N} \ll 1. \tag{3}$$

Рассматривая перестановочные соотношения

$$b_0 b_0^+ - b_0^+ b_0 = 1,$$

мы можем трактовать b_0 и b_0^+ просто как сопряженные c-числа, поскольку единица пренебрежимо мала по сравнению с макроскопическим значением $N_0 = b_0^+ b_0$. Тогда

$$\psi(x) = \sigma + \nu(x),$$

где

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p \neq 0} b_p e^{i(px)}, \quad \sigma = \frac{b_0}{\sqrt{V}}; \quad |\sigma|^2 = \frac{N_0}{V} \sim \frac{N}{V}. \tag{4}$$

Подставим данное выражение в гейзенберговское уравнение движения для рассматриваемого оператора поля:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) \psi + \int \phi(|x - x'|) \psi^+(x') \psi(x') \psi(x)\, d^3x'$$

(здесь μ — химический потенциал, m — масса частицы), а также учтем, что «дополнительное поле» $\nu(x)$ соответствует частицам вне конденсата и по этой причине может рассматриваться в некотором смысле как «малое».

Таким образом, сохраняя лишь члены, линейные по ν (т. е. пренебрегая квадратичными и кубическими членами по ν), получим следующие линейные уравнения, играющие роль уравнений движения в первом приближении:

$$\begin{aligned} i \frac{db_p}{dt} &= \left\{ \frac{p^2}{2m} + |\sigma|^2 \nu(p) \right\} b_p + \sigma^2 \nu(p) b_{-p}^+, \\ i \frac{db_{-p}^+}{dt} &= \left\{ \frac{p^2}{2m} + |\sigma|^2 \nu(p) \right\} b_{-p}^+ + \sigma^{*2} \nu(p) b_p, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\nu(p) = \int \phi(|x|) e^{-i(px)}\, dx = \nu(-p).$$

Эти уравнения диагонализуются путем введения новых бозе-амплитуд

$$\xi_p = u(p) b_p + v(p) b_{-p}^+, \tag{6}$$

где функции $u(p), v(p)$ подчинены условиям

$$|u(p)|^2 - |v(p)|^2 = 1, \quad u(-p) = u(p); \quad v(-p) = v(p), \tag{7}$$

гарантирующим канонический характер перехода от амплитуд b_p к амплитудам ξ_p.

Путем подходящего выбора функций $u(p)$ и $v(p)$ уравнения (5) приводятся к простейшему виду

$$i\frac{d\xi_p}{dt} = E(p)\xi_p, \tag{8}$$

где

$$E(p) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + 2|\sigma|^2\frac{p^2}{2m}\nu(p)}\,. \tag{8'}$$

Заметим также, что, подставляя представление (4) в выражение для гамильтониана H и пренебрегая членами третьего и четвертого порядка по ν, мы получим квадратичную форму из амплитуд b_p, b_p^+, которая после канонического преобразования (6) приобретет вид

$$H = E_0 + \sum_{p\neq 0} E(p)\xi_p^+\xi_p,$$

где E_0 — энергия основного состояния.

Таким образом, в используемом приближении слабо возбужденные состояния системы взаимодействующих бозе-частиц представлены как состояния идеального бозе-газа, состоящего из «элементарных возбуждений», или «квазичастиц», с энергией $E(p)$; операторные амплитуды ξ_p^+ и ξ_p являются операторами рождения и уничтожения этих «квазичастиц».

В упомянутой работе я рассмотрел «случай устойчивости», когда $v(p) > 0$. Как следует из уравнения (8'), в таком случае для малых импульсов

$$E(p) = c\cdot|p|,$$

где c — скорость звука и введенные квазичастицы оказываются фононами.

При больших p

$$E(p) \sim \frac{p^2}{2m}.$$

Поэтому

$$u^* \equiv \frac{E(p)}{|p|} > 0. \tag{9}$$

Понятно, что такой характер спектра квазичастиц автоматически наделяет рассматриваемую систему свойством сверхтекучести. На самом деле, выше мы имели дело с системой отсчета, в которой динамическая система в целом покоится.

Если теперь представить, что этот газ движется как целое со скоростью u, то, используя галилеевскую инвариантность, можно убедиться в том, что энергия элементарных возбуждений равна

$$E(p) + (\mathbf{pu}).$$

При $|u| < u^*$ эта энергия всегда положительна, и поэтому появление элементарных возбуждений, например, за счет взаимодействия со стенками будет скорее увеличивать, чем уменьшать энергию системы. По этой причине течение при достаточно малых скоростях будет устойчивым в отношении возбуждений. Это и есть свойство сверхтекучести.

Как было показано, здесь сверхтекучесть проявляется именно при малых скоростях. Позволим себе заметить, что, поскольку мы ограничились только первым приближением, мы нашли лишь одну ветвь энергетического спектра.

Однако имеются основания допустить, что при некоторых предположениях о характере взаимодействия можно найти, уже в рамках более высоких приближений, другую ветвь спектра, отделенную энергетической щелью.

Действительно, уже в рамках первого приближения можно заметить, что в конденсате, в дополнение к частицам, имеются также «пары», или «квазимолекулы».

Рассмотрим оператор

$$b_p^+ b_{-p}^+,$$

который описывает рождение бозонной пары с нулевым полным импульсом.

В таком случае его среднее

$$\langle b_p^+ b_{-p}^+ \rangle$$

может быть интерпретировано как импульсное представление волновой функции «пары» в конденсате. Прямые вычисления дают

$$\langle b_p^+ b_{-p}^+ \rangle = -u(p)v^+(p)\{\langle \xi_p \xi_p^+ \rangle + \langle \xi_p^+ \xi_p \rangle\} = -\frac{\sigma^{+2}\nu(p)}{2E(p)} \left\{ 1 + \frac{2}{e^{E(p)/\theta} - 1} \right\}, \quad (10)$$

так что относительное число пар в конденсате пропорционально малому параметру λ, характеризующему малость взаимодействия $\nu(p)$.

Тем не менее даже в случае малого взаимодействия уже из формул, полученных в первом приближении, видно, что в дополнение к конденсату, состоящему из частиц, мы имеем также конденсат, состоящий из пар таких частиц.

По этой причине можно ожидать, что в приближениях более высоких порядков будет также наблюдаться соответствующая ветвь энергетического спектра элементарных возбуждений, возникающая из-за возбуждений или диссоциаций таких пар.

Отметим, что схема из упоминавшейся работы 1946 г., основанная на каноническом преобразовании (6), применима и к изучению сверхтекучести ферми-систем. Наиболее важным здесь является случай сверхпроводимости, т. е. явления сверхтекучести электронов проводимости в металле.

В работе 1957 г. и в последующей серии статей мне удалось построить теорию сверхтекучести ферми-систем, обобщив для этой цели схему канонических преобразований указанного типа.

Пусть α_f^+ и α_f являются квантованными амплитудами рождения и уничтожения фермионов с индексом

$$f = (\mathbf{p}, \sigma),$$

где σ — спин фермиона.

Введем новые ферми-амплитуды a_f^+ и a_f, полагая

$$a_f = u(f)\alpha_f + v(f)\alpha_{-f}^+. \quad (11)$$

В таком случае функции u и v должны удовлетворять условиям

$$|u(f)|^2 + |v(f)|^2 = 1, \quad u(f) = u(-f), \quad v(f) = -v(-f),$$

которые обусловлены перестановочными соотношениями Ферми для α_f^+ и α_f.

Если при подходящем выборе функций u и v мы оказываемся в ситуации, когда в первом приближении квазичастицы, описываемые новыми ферми-операторами a^+ и a, образуют идеальный газ, то среднее

$$\langle a_f^+ a_{-f}^+ \rangle$$

отлично от нуля и пропорционально величине

$$u(f)v^*(f).$$

Тогда в рассматриваемой системе фермионов имеется конденсат, образованный «квазимолекулами», или «парами» фермионов.

Поскольку каждая из этих квазимолекул имеет нулевой импульс, две составляющие ее частицы должны иметь противоположные импульсы; если полный спин равен нулю, то спины этих частиц должны быть антипараллельны.

Именно подобные соображения послужили мотивацией для предложенной в (11) структуры преобразований u и v.

Здесь хотелось бы отметить, что идея о том, что система фермионов может обладать свойством сверхтекучести при возникновении условий для существования конденсата, состоящего из парных квазимолекул, была явным образом впервые высказана профессором Шафротом в 1954 г.

В теории, развитой в упомянутых статьях, функции u и v были определены из принципа компенсации «опасных диаграмм» или из обобщенных уравнений Хартри–Фока. Результаты, полученные в первом приближении, совпадают с результатами теории Бардина–Купера–Шриффера.

Метод $(u–v)$-преобразований и связанный с ним метод обобщенных уравнений Хартри–Фока были в свою очередь обобщены на более сложные случаи в теории ядерной материи и теории атомных ядер. Весьма важные и перспективные результаты в области такого рода «сверхтекучих» и «сверхпроводящих» моделей ядра были получены В. Г. Соловьевым. В частности, ему удалось теоретически предсказать целый ряд спектральных свойств, которые были затем подтверждены экспериментально.

Перейдем теперь к более внимательному анализу основного понятия статистической механики, т. е. понятия среднего любой динамической переменной, представленной некоторым оператором $\mathfrak{A}$.

Чаще всего принимается следующее известное определение:

$$\langle \mathfrak{A} \rangle = \lim_{V \to \infty} \frac{\mathrm{Sp}\, \mathfrak{A} \mathrm{e}^{-H/\theta}}{\mathrm{Sp}\, \mathrm{e}^{-H/\theta}}, \tag{12}$$

учитывающее обычный в статистической механике «больших систем» предельный переход $V \to \infty$.

Нетрудно заметить, что если гамильтониан H инвариантен в отношении некоторых канонических преобразований

$$H = U^+ H U \tag{13}$$

с унитарным оператором U, то

$$\langle \mathfrak{A} \rangle = \langle U^+ \mathfrak{A} U \rangle. \tag{14}$$

Вернемся теперь к гамильтониану (1), с которым мы имели дело в теории сверхтекучести. Поскольку здесь выполняется закон сохранения числа частиц, оператор H инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\psi(x) \to e^{i\phi}\psi(x),$$

т. е.

$$b_p \to e^{i\phi} b_p,$$

где ϕ — произвольный фазовый угол. Тогда из формул (13) и (14) следует

$$\langle \psi(x) \rangle = e^{i\phi} \langle \psi(x) \rangle,$$
$$\langle b_p^+ b_{-p}^+ \rangle = e^{-2i\phi} \langle b_p^+ b_{-p}^+ \rangle,$$

и соответственно

$$\sigma = \langle \psi(x) \rangle = 0, \quad \langle b_p^+ b_{-p}^+ \rangle = 0.$$

Совершенно аналогичным образом в теории сверхтекучести ферми-систем при рассмотрении гамильтониана, для которого выполняется закон сохранения числа частиц, находим

$$\langle a_f^+ a_{-f}^+ \rangle = 0.$$

Обычное определение среднего (12), как видно, приводит к противоречию с результатами, которые обсуждались нами до сих пор.

Для преодоления этой трудности мы ввели понятие квазисреднего. Следует подчеркнуть, что такое понятие достаточно давно использовалось в ряде задач статистической механики. Однако в тех задачах физическая ситуация была настолько ясна, что на тот факт, что вместо стандартных средних вычислялись квазисредние, не обращалось внимания.

Возьмем, например, модель Гейзенберга с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{f_1, f_2} J(f_1 - f_2)(\mathbf{S}_{f_1} \mathbf{S}_{f_2}), \tag{15}$$

где (f) — пространственные точки, соответствующие узлам кристаллической решетки (занимающей объем V); $\mathbf{S}_f$ — спиновые векторы с обычными перестановочными соотношениями и

$$J(f_1 - f_2) \geqslant 0$$

считаются положительными числами, когда, например, узлы f_1 и f_2 являются «ближайшими соседями».

Для такой динамической системы каждая из компонент вектора полного спина

$$\mathbf{S} = \sum_f \mathbf{S}_f$$

коммутирует с гамильтонианом H.

Из перестановочных соотношений между компонентами вектора $\mathbf{S}$ следует, в частности, что

$$i \operatorname{Sp}\left\{ S_z e^{-H/\theta} \right\} = \operatorname{Sp}\left\{ (S_x S_y - S_y S_x) e^{-H/\theta} \right\}.$$

Однако вследствие того, что оператор S_x коммутирует с H, получаем

$$\mathrm{Sp}\left\{S_y S_x \mathrm{e}^{-H/\theta}\right\} = \mathrm{Sp}\left\{S_y \mathrm{e}^{-H/\theta} S_x\right\} = \mathrm{Sp}\left\{S_x S_y \mathrm{e}^{-H/\theta}\right\},$$

и, таким образом,

$$\mathrm{Sp}\left\{S_z \mathrm{e}^{-H/\theta}\right\} = 0.$$

Подобным образом находим такие же соотношения и для других компонент вектора $\mathbf{S}$.

Вводя вектор намагниченности, относящийся к единичному объему

$$\mathfrak{M} = \mu \frac{1}{V} \mathbf{S},$$

получаем

$$\mathrm{Sp}\left(\mathfrak{M} \mathrm{e}^{-H/\theta}\right) = 0$$

и соответственно

$$\langle \mathfrak{M} \rangle = \lim_{V \to \infty} \frac{\mathrm{Sp}\, \mathfrak{M} \mathrm{e}^{-H/\theta}}{\mathrm{Sp}\, \mathrm{e}^{-H/\theta}}. \tag{16}$$

Иначе говоря, стандартное среднее вектора $\mathfrak{M}$ равно нулю, что очевидным образом соответствует изотропии данной динамической системы в отношении группы вращений спина.

Следует подчеркнуть, что соотношение (16) выполняется при всех температурах Θ, и в частности при температурах ниже точки Кюри.

Исследуем теперь более детально этот последний случай. Как известно, значение вектора намагниченности $\mathfrak{M}$ отлично от нуля, тогда как его направление может быть выбрано произвольным образом. В этом смысле состояние статистического равновесия такой системы является вырожденным. Теперь включим внешнее магнитное поле $B\mathbf{e}$ с индукцией B в направлении $\mathbf{e}$, заменив гамильтониан (15) на гамильтониан

$$H_{B\mathbf{e}} = H + B(\mathbf{e}\mathfrak{M})V. \tag{17}$$

Тогда, принимая во внимание характерное свойство изотропных ферромагнетиков при температурах ниже точки Кюри, видим, что

$$\langle \mathfrak{M} \rangle = \mathbf{e} M_B.$$

В таком случае при стремлении к нулю индукции B внешнего магнитного поля величина M_B будет стремиться к конечному ненулевому пределу. С формальной точки зрения мы имеем здесь дело с «неустойчивостью» стандартного понятия среднего: когда член $B(\mathbf{e}\mathfrak{M})V$ с бесконечно малым значением B добавляется к гамильтониану (15), среднее $\langle \mathfrak{M} \rangle$ получает конéчную ненулевую добавку

$$\mathbf{e} \lim_{B \to 0} M_B.$$

Подчеркнем, что, когда речь идет о бесконечно малом B, мы всегда понимаем под этим, что сначала мы осуществляем переход к пределу при $V \to \infty$, а затем позволяем B стремиться к нулю.

Введем понятие «квазисреднего» для данной динамической системы. Рассмотрим любую динамическую переменную, которая задается как линейная комбинация произведений вида

$$A = S_{f_1}^{\alpha_1}(t_1) \dots S_{f_2}^{\alpha_2}(t_2), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

и определим *квазисреднее* $\prec A \succ$ данной переменной:

$$\prec A \succ = \lim_{B \to 0} \langle A \rangle_{B\mathbf{e}}, \tag{18}$$

где $\langle A \rangle_{B\mathbf{e}}$ — обычное среднее величины A, вычисленное с помощью гамильтониана $H_{B\mathbf{e}}$ вида (17).

При таком подходе наличие вырождения напрямую отражается в зависимости квазисреднего от произвольного направления $\mathbf{e}$.

Также нетрудно видеть, что

$$\langle A \rangle = \int \prec A \succ d\mathbf{e}.$$

Теперь понятно, что для описания рассматриваемого случая квазисредние являются более удобными, более «физичными» (вырожденное состояние статистического равновесия), чем обычные средние. Последние уже усреднены по всем направлениям $\mathbf{e}$.

Далее заметим, что стандартные средние

$$\langle S_{f_1}^{\alpha_1}(t_1) \dots S_{f_r}^{\alpha_r}(t_r) \rangle$$

должны быть инвариантными в отношении группы вращений спина.

Соответствующие квазисредние

$$\prec S_{f_1}^{\alpha_1}(t_1) \dots S_{f_r}^{\alpha_r}(t_r) \succ \tag{19}$$

будут обладать лишь свойством ковариантности: если имеет место вращение спина, то аналогичное вращение должно быть произведено над вектором $\mathbf{e}$ таким образом, чтобы выражение (19) оставалось неизменным.

При таком подходе для квазисредних не будут иметь места правила отбора, которые для обычных средних зависят от их инвариантности в отношении группы вращений спина. Произвольное направление вектора $\mathbf{e}$, которое является направлением вектора намагниченности, характеризует вырожденность состояния статистического равновесия. Для снятия вырождения направление вектора $\mathbf{e}$ должно быть зафиксировано. Выберем в качестве такого направления ось z. Другими словами, внесем в гамильтониан H дополнительный неинвариантный член $B\mathfrak{M}_z V$ с бесконечно малым B, включающий внешнее магнитное поле вдоль оси z. В таком случае все квазисредние становятся определенными числами.

Рассмотрим теперь другой пример, в котором понятие квазисредних также имеет весьма очевидную природу, обратившись на этот раз к обычной модели кристаллического состояния. Обсудим динамическую систему бесспиновых частиц, обладающих бинарным радиально-симметричным взаимодействием.

Нетрудно видеть, что в силу закона сохранения полного импульса

$$\mathbf{P} = \sum_p \mathbf{p} a_p^+ a_p$$

Однако вследствие того, что оператор S_x коммутирует с H, получаем

$$\mathrm{Sp}\left\{S_y S_x \mathrm{e}^{-H/\theta}\right\} = \mathrm{Sp}\left\{S_y \mathrm{e}^{-H/\theta} S_x\right\} = \mathrm{Sp}\left\{S_x S_y \mathrm{e}^{-H/\theta}\right\},$$

и, таким образом,

$$\mathrm{Sp}\left\{S_z \mathrm{e}^{-H/\theta}\right\} = 0.$$

Подобным образом находим такие же соотношения и для других компонент вектора $\mathbf{S}$.

Вводя вектор намагниченности, относящийся к единичному объему

$$\mathfrak{M} = \mu \frac{1}{V} \mathbf{S},$$

получаем

$$\mathrm{Sp}\left(\mathfrak{M} \mathrm{e}^{-H/\theta}\right) = 0$$

и соответственно

$$\langle \mathfrak{M} \rangle = \lim_{V \to \infty} \frac{\mathrm{Sp}\, \mathfrak{M} \mathrm{e}^{-H/\theta}}{\mathrm{Sp}\, \mathrm{e}^{-H/\theta}}. \tag{16}$$

Иначе говоря, стандартное среднее вектора $\mathfrak{M}$ равно нулю, что очевидным образом соответствует изотропии данной динамической системы в отношении группы вращений спина.

Следует подчеркнуть, что соотношение (16) выполняется при всех температурах Θ, и в частности при температурах ниже точки Кюри.

Исследуем теперь более детально этот последний случай. Как известно, значение вектора намагниченности $\mathfrak{M}$ отлично от нуля, тогда как его направление может быть выбрано произвольным образом. В этом смысле состояние статистического равновесия такой системы является вырожденным. Теперь включим внешнее магнитное поле $B\mathbf{e}$ с индукцией B в направлении $\mathbf{e}$, заменив гамильтониан (15) на гамильтониан

$$H_{B\mathbf{e}} = H + B(\mathbf{e}\mathfrak{M})V. \tag{17}$$

Тогда, принимая во внимание характерное свойство изотропных ферромагнетиков при температурах ниже точки Кюри, видим, что

$$\langle \mathfrak{M} \rangle = \mathbf{e} M_B.$$

В таком случае при стремлении к нулю индукции B внешнего магнитного поля величина M_B будет стремиться к конечному ненулевому пределу. С формальной точки зрения мы имеем здесь дело с «неустойчивостью» стандартного понятия среднего: когда член $B(\mathbf{e}\mathfrak{M})V$ с бесконечно малым значением B добавляется к гамильтониану (15), среднее $\langle \mathfrak{M} \rangle$ получает конéчную ненулевую добавку

$$\mathbf{e} \lim_{B \to 0} M_B.$$

Подчеркнем, что, когда речь идет о бесконечно малом B, мы всегда понимаем под этим, что сначала мы осуществляем переход к пределу при $V \to \infty$, а затем позволяем B стремиться к нулю.

Введем понятие «квазисреднего» для данной динамической системы. Рассмотрим любую динамическую переменную, которая задается как линейная комбинация произведений вида

$$A = S_{f_1}^{\alpha_1}(t_1) \dots S_{f_2}^{\alpha_2}(t_2), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

и определим *квазисреднее* $\prec A \succ$ данной переменной:

$$\prec A \succ = \lim_{B \to 0} \langle A \rangle_{B\mathbf{e}}, \tag{18}$$

где $\langle A \rangle_{B\mathbf{e}}$ — обычное среднее величины A, вычисленное с помощью гамильтониана $H_{B\mathbf{e}}$ вида (17).

При таком подходе наличие вырождения напрямую отражается в зависимости квазисреднего от произвольного направления $\mathbf{e}$.

Также нетрудно видеть, что

$$\langle A \rangle = \int \prec A \succ d\mathbf{e}.$$

Теперь понятно, что для описания рассматриваемого случая квазисредние являются более удобными, более «физичными» (вырожденное состояние статистического равновесия), чем обычные средние. Последние уже усреднены по всем направлениям $\mathbf{e}$.

Далее заметим, что стандартные средние

$$\langle S_{f_1}^{\alpha_1}(t_1) \dots S_{f_r}^{\alpha_r}(t_r) \rangle$$

должны быть инвариантными в отношении группы вращений спина.

Соответствующие квазисредние

$$\prec S_{f_1}^{\alpha_1}(t_1) \dots S_{f_r}^{\alpha_r}(t_r) \succ \tag{19}$$

будут обладать лишь свойством ковариантности: если имеет место вращение спина, то аналогичное вращение должно быть произведено над вектором $\mathbf{e}$ таким образом, чтобы выражение (19) оставалось неизменным.

При таком подходе для квазисредних не будут иметь места правила отбора, которые для обычных средних зависят от их инвариантности в отношении группы вращений спина. Произвольное направление вектора $\mathbf{e}$, которое является направлением вектора намагниченности, характеризует вырожденность состояния статистического равновесия. Для снятия вырождения направление вектора $\mathbf{e}$ должно быть зафиксировано. Выберем в качестве такого направления ось z. Другими словами, внесем в гамильтониан H дополнительный неинвариантный член $B\mathfrak{M}_z V$ с бесконечно малым B, включающий внешнее магнитное поле вдоль оси z. В таком случае все квазисредние становятся определенными числами.

Рассмотрим теперь другой пример, в котором понятие квазисредних также имеет весьма очевидную природу, обратившись на этот раз к обычной модели кристаллического состояния. Обсудим динамическую систему бесспиновых частиц, обладающих бинарным радиально-симметричным взаимодействием.

Нетрудно видеть, что в силу закона сохранения полного импульса

$$\mathbf{P} = \sum_p \mathbf{p} a_p^+ a_p$$

стандартные средние

$$\langle a^+_{p+q} a_p \rangle \tag{20}$$

при $q = 0$ обращаются в нуль.

Но в таком случае для относительной плотности числа частиц находим

$$\rho(x) = \langle \psi^+(x)\psi(x) \rangle = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \sum_{k,q} \langle a^+_{k+q} a_k \rangle e^{-iqx} = \text{const}.$$

Однако известно, что, когда потенциал бинарного взаимодействия обладает определенными свойствами при достаточно низких температурах, возникает кристаллическое состояние, у которого плотность $\rho(x)$ становится периодической функцией от x с периодом кристаллической решетки. Величины (20) должны быть отличны от нуля для векторов обратной решетки q. Заметим, что такая же ситуация вследствие трансляционной инвариантности возникает и в рамках классической механики.

Тем не менее данная трудность легко преодолевается, если просто обратить внимание на тот факт, что для изучения свойств кристалла положение данного кристалла в пространстве должно быть фиксированным. На математическом языке это означает, что в гамильтониан следует ввести слабый внешний потенциал так, чтобы он только фиксировал положение кристалла в пространстве без изменения его физических свойств. В таком случае, допустив, что интенсивность потенциала стремится к нулю, можно определить квазисредние, например, в виде

$$\rho(x) = \prec \psi^+(x)\psi(x) \succ = \sum_q \rho_q e^{-iqx},$$

$$\rho_q = \frac{1}{V} \sum_k \prec a^+_{k+q} a_k \succ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle a^+_{k+q} a_k \rangle \, d\mathbf{k}, \quad V \to \infty,$$

где $\mathbf{q}$ — вектор обратной решетки.

В теории сверхтекучести мы также имеем дело со случаем вырождения состояния статистического равновесия. Действительно, наши предыдущие формулы содержат величину σ, фаза которой была выбрана совершенно произвольным образом. В отличие от случаев гейзенберговской модели ферромагнетика и теории кристаллов, вырождение здесь интуитивно не настолько очевидно. Соответствующей группой здесь является группа калибровочных преобразований

$$b_p \to e^{i\theta} b_p,$$

связанных с законом сохранения числа частиц.

Для снятия вырождения можно ввести в гамильтониан неинвариантный член, описывающий «источники частиц в конденсате»:

$$-\nu(b_0 + b_0^+)\sqrt{V}, \quad \nu > 0.$$

Тогда в наших формулах величина σ становится положительной ($\sim \sqrt{N/V}$). Квазисредние могут быть введены согласно

$$\prec A \succ = \lim_{\nu\to 0} \langle A \rangle_\nu.$$

Если в гамильтониане член с источниками выбрать в виде

$$-\nu(b_0 e^{i\alpha} + b_0^+ e^{-i\alpha})\sqrt{V},$$

где α — некоторая фиксированная фаза, то мы обнаружим, что

$$\sigma = |\sigma| e^{i\alpha}, \quad \prec b_p^+ b_{-p}^+ \succ_\alpha = e^{-2i\alpha} \prec b_p^+ b_{-p}^+ \succ_\alpha = 0$$

и т.д.

В нашей теории сверхтекучести мы имели дело в точности с такими квазисредними. Обычные средние выводятся из квазисредних путем последующего усреднения по углу α. Совершенно аналогичная ситуация имеет место и в теории сверхпроводимости. Для снятия вырождения здесь можно ввести в гамильтониан «источники пар в конденсате», например, в виде

$$-\nu \sum_f \{\lambda(f) a_f^+ a_{-f}^+ + \lambda^*(f) a_{-f} a_f\}.$$

Выше было исследовано некоторое число примеров вырождения состояний статистического равновесия. Во всех этих случаях вырождение наступало при температурах ниже некоторой критической температуры. Вырождение было связано с наличием аддитивных законов сохранения или, что то же самое, с наличием инвариантности в отношении соответствующих групп преобразований.

Подчеркнем, что не все законы сохранения в заданной системе приводят к вырождению. Так, в теории сверхтекучести и теории сверхпроводимости вырождение состояния статистического равновесия возникало только вследствие закона сохранения числа частиц. В соответствующих квазисредних нарушались только те правила отбора, которые задавались посредством именно этого закона.

Правила отбора, определяемые другими аддитивными законами сохранения, например, законом сохранения импульса, оставались нетронутыми.

Что касается второго примера (модели теории кристаллов), то вырождение в нем зависит только от закона сохранения импульса. Правила отбора, задаваемые, например, законом сохранения числа частиц, остаются справедливыми.

Рассмотрим теперь некоторую общую макроскопическую систему с гамильтонианом H. Добавим в H бесконечно малые члены, отвечающие внешним полям или источникам, которые нарушают законы сохранения. При этом мы получим некоторый гамильтониан H_ν $(\nu \to 0)$. Тогда, если средние $\langle A \rangle$, где

$$A = \ldots \psi^+(t_j, x_j) \ldots \psi(t_s, x_s) \ldots,$$

получают в результате только бесконечно малые добавки, то будем говорить, что рассматриваемое состояние статистического равновесия не вырождено. Напротив, если некоторые из этих средних изменяются на конечную величину при переходе от H к инфинитезимально измененному гамильтониану H_ν, то будем говорить, что состояние статистического равновесия вырождено.

Очевидно, что при этом мы ограничиваемся рассмотрением только устойчивых систем, поскольку только они имеют физический смысл.

Вследствие ранее сказанного инфинитезимальная вариация

$$\delta H = H_\nu - H$$

может приводить к инфинитезимальным изменениям только тех величин, которые действительно характеризуют реальные физические свойства макроскопической системы.

Для случаев вырождения вводим квазисредние

$$\prec A \succ = \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} \frac{\mathrm{Sp}\left\{A \mathrm{e}^{-H/\theta}\right\}}{\mathrm{Sp}\, \mathrm{e}^{-H/\theta}}.$$

Заметим, что при определении квазисредних следует сначала выполнить предельный переход $V \to \infty$, а затем позволить ν стремиться к нулю.

Как уже было продемонстрировано на ряде примеров, для квазисредних выполнение всех правил отбора, задаваемых аддитивными законами сохранения, не является обязательным. Для случаев вырождения полезно изменить определение различных функций Грина путем замены в них обычных средних по ансамблю Гиббса на квазисредние. Если в этом случае мы хотим использовать теорию возмущений в виде некоторой диаграммной техники, то должны учитывать в соответствующих диаграммах в дополнение к «нормальным линиям» аномальные линии, запрещенные обычными правилами отбора.

Так, например, в теории сверхпроводимости в дополнение к нормальным линиям

$$\overbrace{a_f^+ a_f}$$

сохраняющим число частиц, необходимо ввести аномальные линии

$$\overbrace{a_f^+ a_{-f}^+}, \overbrace{a_{-f} a_{-f}}$$

не сохраняющие это число.

В этой связи напомним, что авторы значительного числа статей, в которых использовалась обычная диаграммная техника, включающая только нормальные линии, не смогли получить правильные результаты.

Следует иметь в виду, что эти аномальные линии соответствуют «опасным» диаграммам в следующем смысле: их сумма дает в пределе конечный нетривиальный вклад, хотя само их наличие формально обусловлено инфинитезимальными добавочными членами в гамильтониане H_ν.

Вследствие этого обстоятельства такие линии должны вводиться в расчеты хотя бы в частично просуммированной форме.

В заключение заметим, что в случаях вырождения отдельные функции Грина обладают некоторыми характерными свойствами. Так, в своей статье по квазисредним[1] (1961) я в рамках теории сверхтекучести бозонных систем доказал следующее точное неравенство:

$$\langle\langle b_q^+ b_q \rangle\rangle_{E=0} \geqslant \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{m}{4\pi}\right) \frac{1}{q^2},$$

где величина

$$\langle\langle b_q^+ b_q \rangle\rangle_E$$

[1] См.: *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VI, 2006, с. 236.

является энергетическим представлением соответствующей двувременной функции Грина (ее фурье-преобразованием по временной переменной), m — масса частицы, ρ_0 — плотность частиц в конденсате, ρ — полная плотность. Из приведенного неравенства мгновенно следует, что

$$\overline{n}_q = \langle b_q^+ b_q \rangle \geqslant \frac{1}{2} \left\{ \frac{m\theta}{q^2} \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right\}.$$

Таким образом, плотность непрерывного распределения бозонов по импульсам при $q \to 0$ стремится к бесконечности, как $1/q^2$. Аналогичные неравенства (но уже для числа пар) были также доказаны мной для случая сверхтекучих ферми-систем. Далее теоремы (об особенностях) $1/q^2$ были обобщены некоторыми авторами на случаи ферромагнетизма, антиферромагнетизма и кристаллического состояния.

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ ГРИНА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ*

§ 1. В своем докладе я хотел бы рассказать о тех вопросах статистической механики, которыми я начал заниматься в конце тридцатых — первой половине сороковых годов, и о дальнейшем развитии, которое они потом получили.

Основная цель, которая была поставлена, состояла в том, чтобы вместо феноменологического подхода исходить непосредственно из уравнений механики. Так, в нашей работе [1], опубликованной еще в 1939 г., рассматривался вопрос о возникновении стохастического процесса в динамической системе, находящейся под слабым воздействием «большой» системы.

Для классических систем этот вопрос изучался на основе уравнения Лиувилля для функции распределения вероятности во всем фазовом пространстве, а для квантовых систем — на основе аналогичного уравнения для статистического оператора фон Неймана.

В данной работе был сформулирован метод, с помощью которого в первом приближении получаются уравнения типа Фоккера—Планка. В монографии [2], опубликованной в 1946 г., были уже найдены методы для изучения статистической механики «больших» динамических систем, в частности для построения кинетических уравнений.

В настоящем докладе я и сосредоточу внимание на проблемах, относящихся к этой монографии, обращая особое внимание на дальнейшее развитие исследований в области теории кинетических уравнений.

Рассмотрим в рамках классической механики динамическую систему Σ, изолированную от внешних влияний и состоящую из N идентичных частиц с массой m, находящихся в некотором объеме V.

Обозначим через $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{v}_j$ соответственно положение и скорость j-ой частицы.

Тогда точки $6N$-мерного пространства Σ могут быть представлены совокупностью фазовых точек данных частиц:

$$\Omega = (\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; \ldots; \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N).$$

Мы будем иметь дело с функцией распределения вероятности

$$D_t = D_t(\Omega) = D_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; \ldots; \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N)$$

---

* Институт физики АН Азербайджанской ССР. Препринт № 57. Баку. 1977; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 616.

с обычной нормировкой

$$\int D_t(\Omega)\, d\Omega = 1.$$

Закон изменения D_t во времени характеризуется известным уравнением

$$\frac{\partial D_t}{\partial t} = \mathcal{L} D_t, \tag{1}$$

в котором $\mathcal{L}$ представляет собой не зависящий явно от времени оператор Лиувилля.

Здесь, как обычно, условимся рассматривать случай, когда $\mathcal{L}$ состоит из суммы аддитивной части и бинарной части, характеризующей взаимодействие между частицами:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{L}(j) + \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant N} \mathcal{L}(j_1, j_2). \tag{2}$$

Например:

$$\mathcal{L}(j) = -\mathbf{v}_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j}, \tag{3}$$

$$\mathcal{L}(j_1, j_2) = \mathcal{L}^{(\Phi)}(j_1, j_2) = \frac{1}{m} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_{j_1} - \mathbf{r}_{j_2})}{\partial \mathbf{r}_{j_1}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{j_1}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{j_2}} \right),$$

где $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r)$ является радиально-симметричной функцией, представляющей потенциальную энергию взаимодействия между двумя частицами.

Ввиду идентичности частиц, принадлежащих к динамической системе Σ, мы всегда можем ограничиться случаем, когда распределение D_t будет инвариантным по отношению к перестановкам номеров частиц.

Возьмем некоторую динамическую переменную

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\Omega).$$

Ее выражение в момент времени t таково:

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}\{\Omega(t)\},$$

где

$$\Omega(t) = (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{v}_1(t); \ldots; \mathbf{r}_N(t), \mathbf{v}_N(t))$$

представляет собой решение соответствующих уравнений механики, совпадающее в начальный момент времени $t = 0$ с Ω:

$$\Omega(0) = \Omega.$$

Как известно, среднее значение

$$\langle \mathcal{U}(t) \rangle = \int \mathcal{U}(t) D_0(\Omega)\, d\Omega \tag{4}$$

может быть также представлено в виде

$$\langle \mathcal{U}(t) \rangle = \mathcal{U}(t) D_t(\Omega)\, d\Omega. \tag{4'}$$

Подчеркнем, что основным средством для исследования статистических свойств динамической системы Σ в монографии [2] являлось введение «при-

веденных функций распределения», которые можно определить, например, следующим образом:

$$
\begin{gathered}
F_1(t;1) = F_1(t;\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1) = V\int D_t\,d(2)\ldots d(N),\\
F_2(t;1,2) = F_2(t;\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{v}_2) = V^2\left(1-\frac{1}{N}\right)\int D_t\,d(3)\ldots d(N),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F_s(t;1,\ldots,s) = V^s\left(1-\frac{1}{N}\right)\ldots\left(1-\frac{s-1}{N}\right)\int D_t\,d(s+1)\ldots d(N),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d(j) = d\mathbf{r}_j\,d\mathbf{v}_j.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Заметим, что с помощью F_1 можно находить средние значения для динамических переменных аддитивного типа, с помощью F_2 — для динамических переменных бинарного типа и т. д.

Так, если мы имеем динамическую переменную аддитивного типа

$$
\mathcal{U} = \sum_{j=1}^{N} A(j) = \sum_{j=1}^{N} A(\mathbf{r}_j,\mathbf{v}_j),
$$

то на основании (4′), (5)

$$
\langle\mathcal{U}(t)\rangle = n\int A(1)F_1(t;1)\,d(1) = n\int A(\mathbf{r},\mathbf{v})F_1(t;\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{v}, \tag{6}
$$

где

$$
n = \frac{N}{V}.
$$

Аналогично для бинарной динамической величины

$$
\mathcal{U} = \sum_{(1\leqslant j_1<j_2\leqslant N)} A(j_1,j_2)
$$

получим

$$
\langle\mathcal{U}(t)\rangle = n^2\int A(1,2)F_2(t;1,2)\,d(1)\,d(2)
$$

и т. д.

Исходя из уравнения Лиувилля (1) нетрудно получить систему уравнений для приведенных функций распределения

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial F_1(t;1)}{\partial t} = Л(1)F_1(t;1) + n\int Л(1,2)F_2(t;1,2)\,d(2),\\
\frac{\partial F_2(t;1,2)}{\partial t} = \{Л(1)+Л(2)+Л(1,2)\}F_2(t;1,2) + \\
+ n\int\{Л(1,3)+Л(2,3)\}F_3(t;1,2,3)\,d(3),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}
\tag{7a}
$$

$$\frac{\partial F_s(t;1,\ldots,s)}{\partial t} = \left\{\sum_{j=1}^{s} Л(j) + \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant s} Л(j_1,j_2)\right\} F_s(t;1,\ldots,s) + \\ + n\int\left\{\sum_{j=1}^{s} Л(j,s+1))\right\} F_{s+1}(t;1,\ldots,s+1)\,d(s+1) \qquad (7б)$$

. . . . . .

Предполагается, что известный предельный переход статистической механики, когда

$$V\to\infty, \quad N\to\infty, \quad \frac{N}{V}=n=\text{const},$$

приводит к определенным предельным выражениям для приведенных функций распределения F_s, также удовлетворяющим цепочке уравнений (7).

Для *равновесного* распределения правильность такого допущения строго доказана для широкого класса физически допустимых форм короткодействующего потенциала $\Phi(\mathbf{r})$, соответствующего интенсивному отталкиванию на малых расстояниях, в случае *достаточно малой* плотности числа частиц n.

В данной ситуации доказывается также и аналитичность F_s как функции n. Этой тематике посвящен ряд работ [3], первая из которых была выполнена Б. И. Хацетом вместе со мной и опубликована в 1949 г.

Однако, насколько мне известно, поведение неравновесных F_s в процессе предельного перехода статистической механики пока еще не было предметом исследований на строго математическом уровне, и мы вынуждены ограничиться принятием сформулированного выше допущения.

Итак, перейдем к рассмотрению уравнений (7) в предельной ситуации. По своей форме уравнения эти линейны. Следует, однако, заметить, что фактическое положение здесь значительно более сложно. Дело в том, что не все их решения физически допустимы, поскольку надо принять во внимание тот факт, что корреляция между частицами должна ослабевать по мере их удаления друг от друга.

Возьмем, например, совокупность s частиц $(1,\ldots,s)$ и распределим их на l групп:

$$(1,\ldots,s)=([i_1],\ldots,[i_l]),$$

соответственно из s_1, ..., s_l частиц

$$s=s_1+\ldots+s_l.$$

Рассмотрим приведенную функцию распределения

$$F_s(t;1,\ldots,s)=F_s(t;[i_1],\ldots,[i_l]) \qquad (8)$$

в случае, когда расстояния между частицами из различных групп $[i]$ стремятся к бесконечности.

Тогда, основываясь на физической интуиции, естественно ожидать, что корреляция между частицами из различных групп должна в пределе исчезать и приведенная функция распределения (8) переходит в произведение функций F_{s_j}, соответствующих данным группам частиц,

$$F_s(t;1,\ldots,s)-F_{s_1}(t;[i_1])\ldots F_{s_1}(t;[i_l])\to 0 \qquad (9)$$

при

$$|\mathbf{r}_{j_p} - \mathbf{r}_{j_{p'}}| \to \infty, \quad j_p \in [i_p], \quad p \neq p'.$$

Эти условия «ослабления корреляции» можно рассматривать как своего рода «граничные условия» нелинейного характера, наложенные на приведенные функции распределения. Нелинейные граничные условия (9) примут линейную форму, если ввести, следуя [2], функции $G_s(t; 1, \ldots, s)$, $s \geqslant 2$, посредством следующих соотношений:

$$\begin{aligned} F_2(t; 1, 2) &= F_1(t; 1)F_1(t; 2) + G_2(t; 1, 2), \\ F_3(t; 1, 2, 3) &= F_1(t; 1)F_1(t; 2)F_1(t; 3) + F_1(t; 1)G_2(t; 2, 3) + \\ &+ F_1(t; 2)G_2(t; 1, 3) + F_1(t; 3)G_2(t; 1, 2) + G_3(t; 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда условия (9) будут эквивалентны линейным условиям, наложенным на G_s:

$$\begin{aligned} &G_2(t; 1, 2) \to 0, \quad \text{если} \quad |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty, \\ &G_3(t; 1, 2, 3) \to 0, \quad \text{если} \quad \max\{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|, |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|\} \to \infty \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Однако при этом цепочка уравнений для F_1, G_2, G_3, ... становится уже нелинейной:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1(t; 1)}{\partial t} = \mathit{Л}(1)F_1(t; 1) + n\int \mathit{Л}(1, 2)\{F_1(t; 1)F_1(t; 2) + G_2(t; 1, 2)\}\, d(2), \\ &\frac{\partial G_2(t; 1, 2)}{\partial t} = \\ &\quad = \{\mathit{Л}(1) + \mathit{Л}(2) + \mathit{Л}(1, 2)\}G_2(t; 1, 2) + \mathit{Л}(1, 2)F_1(t; 1)F_1(t; 2) + \\ &+ n\int \mathit{Л}(1, 3)\{F_1(t; 3)G_2(t; 1, 2) + F_1(t; 1)G_2(t; 2, 3) + G_3(t; 1, 2, 3)\}\, d(3) + \\ &+ n\int \mathit{Л}(2, 3)\{F_1(t; 3)G_2(t; 1, 2) + F_1(t; 2)G_2(t; 1, 3) + G_3(t; 1, 2, 3)\}\, d(3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь следует подчеркнуть, что с математической точки зрения не ясно, в каком «обобщенном» смысле следует понимать условия (9) или (11).

Укажем еще, что, как было отмечено в монографии [2], вместо приведенных функций распределения можно ввести «производящий функционал», подобно тому как, например, для изучения т. н. специальных функций пользуются производящей функцией.

Так, если рассмотреть производящий функционал вида

$$L_t(u) = \int \left\{ \prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{n}\, u(j)\right) \right\} D_t(\Omega)\, d\Omega, \tag{13}$$

в котором $u = u(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ будет «функциональным аргументом», то функциональные производные по u при $u \equiv 0$ будут представлять F_s:

$$F_s(t; 1, \ldots, s) = \left(\frac{\delta^s L_t(u)}{\delta u(1) \ldots \delta u(s)} \right)_{u=0}. \tag{14}$$

Исходя из уравнения Лиувилля нетрудно получить уравнение в функциональных производных

$$\frac{\partial L_t(u)}{\partial t} = \int u(1)\mathcal{J}(1)\frac{\delta L_t(u)}{\delta u(1)}\,d(1) + \\ + \frac{1}{2}\int\{u(1)u(2) + nu(1) + nu(2)\}\mathcal{J}(1,2)\frac{\delta^2 L_t(u)}{\delta u(1)\,\delta u(2)}\,d(1)\,d(2), \quad (15)$$

эквивалентное цепочке уравнений (7).

Если теперь ввести функционал $A_t(u)$, положив

$$L_t(u) = \mathrm{e}^{A_t(u)}, \quad (16)$$

то из (10), (14) следует, что

$$\left(\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(1)}\right)_{u=0} = F_1(t;1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

$$\left(\frac{\delta^s A_t(u)}{\delta u(1)\ldots\partial u(s)}\right)_{u=0} = G_s(t;1,\ldots,s); \quad s = 2,3,\ldots .$$

Сделав замену (16) в уравнении (15), получим уравнение в функциональных производных для $A_t(u)$

$$\frac{\partial A_t(u)}{\partial t} = \int u(1)\mathcal{J}(1)\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(1)}\,d(1) + \frac{1}{2}\int\{u(1)u(2) + nu(1) + nu(2)\}\times \\ \times\mathcal{J}(1,2)\left\{\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(1)}\,\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(2)} + \frac{\delta^2 A_t(u)}{\delta u(1)\,\delta u(2)}\right\}d(1)\,d(2), \quad (18)$$

которое, как легко убедиться, опять приводит к цепочке нелинейных уравнений (12). Использование функционалов $L_t(u)$, $A_t(u)$ может иногда быть полезным для различных преобразований уравнений ввиду простой формы записи уравнений (15), (18).

Заметим, что в квантовой теории поля, в задачах совершенно иного физического характера, теперь также используются уравнения в функциональных производных и преобразования функционалов типа (16).

§ 2. Перейдем теперь к вопросу о получении кинетических уравнений на основе использования различных приемов аппроксимации для цепочки уравнений (12).

Прежде всего рассмотрим случай, когда:

1. $\Phi(\mathbf{r})$ соответствует силам отталкивания и быстро стремится к нулю при возрастании r таким образом, что практически исчезает для $r > a$, где a — эффективный радиус действия сил между двумя частицами.
2. Плотность числа частиц[1] является достаточно малой:

$$na^3 \ll 1.$$

[1] Заметим, что если мы примем за единицу длины величину a и введем безразмерные пространственные векторы $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/a$, то тогда плотность числа частиц как раз и будет представлена произведением na^3.

В данной ситуации применим наши рассуждения из монографии [2] и получим кинетическое уравнение для $F_1(t;1)$ с точностью до величин первого порядка малости по плотности включительно.

Заметим, что, поскольку в первом из уравнений (12) функция G_2 стоит в интеграле, уже пропорциональном n, мы отбросим во втором из них, определяющем G_2, интегральный член, пропорциональный n.

Таким образом, вместо (12) получим приближенную систему уравнений в замкнутой форме

$$\frac{\partial F_1(t;1)}{\partial t} = \mathit{Л}(1)F_1(t;1) + n\int \mathit{Л}(1,2)\{F_1(t;1)F_1(t;2) + G_2(t;1,2)\}\,d(2), \tag{19}$$

$$\frac{\partial G_2(t;1,2)}{\partial t} = \{\mathit{Л}(1) + \mathit{Л}(2) + \mathit{Л}(1,2)\}G_2(t;1,2) + \mathit{Л}(1,2)F_1(t;1)F_1(t;2).$$

Эти уравнения хотя и являются приближенными, но тем не менее сохранили свойство обратимости по отношению к временному отражению.

Выберем в качестве начального условия для функции G_2 при $t=0$ условие ослабления корреляции в «сильном» смысле:

$$G_2(0;1,2) \textit{ быстро стремится к нулю при возрастании расстояния } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \textit{ таким образом, что она практически исчезает при } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > a. \tag{20}$$

Второе из уравнений (19) дает

$$G_2(t;1,2) = S_{-t}^{(2)}(1,2)G_2(0;1,2) + \int_0^t S_{-(t-\tau)}^{(2)}(1,2)\mathit{Л}(1,2)F_1(\tau;1)F_1(\tau;2)\,d\tau, \tag{21}$$

где $S_t^{(2)}(1,2)$ представляет собой оператор, определяемый решением задачи о движении двух частиц; этот оператор преобразует функции $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{v}_2$ соответственно в $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$.

Следует отметить, что полученное приближенное выражение (21) для функций G_2 уже не будет удовлетворять условию (20) при всех t. Фиксируем, например, две фазовые точки для наших двух частиц:

$$1'(\mathbf{r}_1', \mathbf{v}_1'); \quad 2'(\mathbf{r}_2', \mathbf{v}_2'),$$

таким образом, что

$$|\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'| \leqslant a, \tag{22}$$

и положим

$$(1,2) = S_t(1,2)(1',2').$$

Тогда, очевидно,

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

но тем не менее выражение

$$S_{-t}^{(2)}(1,2)G_2(0;1,2) = S_{-t}^{(2)}(1,2)S_t^{(2)}(1,2)G_2(0;1',2') = G_2(0;1',2')$$

оказывается неизменным и вообще отличным от нуля ввиду (22). Более тщательный анализ показывает, что правая часть формулы (21) все же удовлетворяет условию ослабления корреляции, хотя уже не в такой сильной форме, как (20).

Заметим теперь, что для получения уравнения для функции $F_1(t;1)$ мы должны подставить уравнение (21) в первое из уравнений (19). Так как перед функцией G_2 в этом уравнении стоит оператор Лиувилля $Л(1,2)$, являющийся эффективным лишь в области

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \leqslant a, \tag{23}$$

нам надо рассмотреть выражение (21) только в этой области. Но здесь

$$S_{-t}^{(2)}(1,2)G_2(0;1,2)$$

практически обращается в нуль для

$$t \gg \frac{a}{v_{\text{ср}}},$$

так как тогда

$$S_{-t}^{(2)}(1,2)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) > a.$$

Поэтому для таких t при подстановке уравнения (21) в первое из уравнений (19) мы можем пренебречь первым членом в правой части (21). Остается второй, интегральный член. По только что изложенным соображениям, интеграция в нем фактически совершается по интервалу τ:

$$t - t_0 < \tau < t, \tag{24}$$

где t_0 — величина порядка $a/v_{\text{ср}}$, поскольку для

$$t - \tau \gg \frac{a}{v_{\text{ср}}}$$

подынтегральный оператор $S_{-(t-\tau)}^{(2)}(1,2)Л(1,2)$ исчезает.

С другой стороны, для изучаемого случая газов малой плотности время t_0 много меньше среднего времени свободного пробега:

$$\frac{a}{v_{\text{ср}}} \ll \frac{1}{na^2 v_{\text{ср}}} = \frac{1}{na^3}\frac{a}{v_{\text{ср}}}.$$

Поэтому в интервале (24) мы можем выразить функции

$$F_1(\tau;1), \quad F_1(\tau;2)$$

соответственно через

$$F_1(t;1), \quad F_1(t;2),$$

учитывая в рассматриваемом уравнении (19) лишь главный инерционный член

$$Л(1)F_1(t;1).$$

Таким образом, мы заменим в исследуемом интеграле произведение

$$F_1(\tau;1)F_1(\tau;2)$$

на

$$e^{(\tau-t)\mathcal{J}(1)}e^{(\tau-t)\mathcal{J}(2)}F_1(t;1)F_1(t;2)=S^{(1)}_{t-\tau}(1)S^{(1)}_{t-\tau}(2)F_1(t;1)F_1(t;2).$$

В результате для области (23) найдем

$$G_2(t;1,2)=\int_0^t S^{(2)}_{-(t-\tau)}(1,2)\mathcal{J}(1,2)S^{(1)}_{(t-\tau)}S^{(1)}_{(t-\tau)}(2)\,d\tau\,F_1(t;1)F_1(t;2)=$$

$$=\int_0^t S^{(2)}_{-\tau}(1,2)\mathcal{J}(1,2)S^{(1)}_{\tau}(1)S^{(1)}_{\tau}(2)\,d\tau\,F_1(t;1)F_1(t;2), \quad (25)$$

$$t\gg\frac{a}{v_{\text{ср}}}.$$

Но, очевидно,

$$S^{(2)}_{-\tau}(1,2)\mathcal{J}(1,2)S^{(1)}_{\tau}(1)S^{1}_{\tau}(2)=$$

$$=e^{\tau\{\mathcal{J}(1)+\mathcal{J}(2)+\mathcal{J}(1,2)\}}\mathcal{J}(1,2)e^{-\tau\{\mathcal{J}(1)+\mathcal{J}(2)\}}=$$

$$=\frac{d}{dt}\,e^{\tau\{\mathcal{J}(1)+\mathcal{J}(2)+\mathcal{J}(1,2)\}}e^{-\tau\{\mathcal{J}(1)+\mathcal{J}(2)\}}=\frac{d}{dt}\,S^{(2)}_{-\tau}(1,2)S^{(1)}_{\tau}(1)S^{(1)}_{\tau}(2),$$

и поэтому

$$\int_0^t S^{(2)}_{-\tau}(1,2)\mathcal{J}(1,2)S^{(1)}_{\tau}(1)S^{1}_{\tau}(2)\,d\tau=S^{(2)}_{-t}(1,2)S^{(1)}_{t}(1)S^{(1)}_{t}(2)-1. \quad (26)$$

Введем предельный оператор

$$\sigma(1,2)=\lim_{t\to\infty}S^{(2)}_{-t}(1,2)S^{(1)}_{t}S^{(2)}_{t}. \quad (27)$$

Так как в интеграле (26) оператор

$$S^{(2)}_{-\tau}(1,2)\mathcal{J}(1,2)$$

исчезает для

$$\tau\gg\frac{a}{v_{\text{ср}}},$$

мы видим, что предел в (27) фактически достигается для

$$t\gg\frac{a}{v_{\text{ср}}},$$

т. е. как раз начиная с того момента времени, когда выполняется равенство (25).

Поэтому получим из уравнения (25)

$$G_2(t;1,2)=\{\sigma(1,2)-1\}F_1(t;1)F_1(t;2)\quad\text{для}\quad t\gg\frac{a}{v_{\text{ср}}}. \quad (28)$$

Подставив это выражение в первое из уравнений (19), мы и найдем искомое кинетическое уравнение первого порядка по плотности

$$\frac{\partial F_1(t;1)}{\partial t} = Л(1)F_1(t;1) + n\int Л(1,2)\sigma(1,2)F_1(t;1)F_1(t;2)\,d(2). \qquad (29)$$

Нетрудно заметить, что оператор $\sigma(1,2)$ сдвигает пространственные аргументы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ на величины порядка a. Порядка a будет и разность $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

Если пренебречь изменением такого порядка у функций $F_1(t;\mathbf{r},\mathbf{v})$, стоящих под знаком интеграла в уравнении (29), то оператор $\sigma(1,2)$ будет действовать лишь на скоростные аргументы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ произведения

$$F_1(t;\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)F_1(t;\mathbf{r}_2,\mathbf{v}_2).$$

В этой ситуации уравнение (29) переходит[1] в классическое уравнение Больцмана.

В нашей монографии был рассмотрен также случай идеально упругих шаров, который может быть формально включен в сформулированную выше схему бинарного взаимодействия, если в ней положить

$$\Phi(r) = +\infty, \quad r < a,$$
$$\Phi(r) = 0, \quad r > a,$$

где a — диаметр шара.

В этом случае уравнение (29) точно переходит в известное уравнение Больцмана—Энскога для газов малой плотности из упругих шаров.

Данное уравнение в современных обозначениях может быть записано в следующей форме:

$$\frac{\partial F_1(t;1)}{\partial t} = Л(1)F_1(t;1) + n\int \overline{T}(1,2)F_1(t;1)F_1(t;2)\,d(2), \qquad (30)$$

где

$$T(1,2) = a^2 \int\limits_{\mathbf{v}_{1,2}\boldsymbol{\sigma}>0} (\mathbf{v}_{1,2}\cdot\boldsymbol{\sigma})\{b_{1,2}(\boldsymbol{\sigma})\,\delta(\mathbf{r}_{1,2} - a\boldsymbol{\sigma}) - \delta(\mathbf{r}_{1,2} + a\boldsymbol{\sigma})\}\,d\boldsymbol{\sigma}, \qquad (31)$$

причем

$$\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

$\boldsymbol{\sigma}$ — единичный вектор, оператор $b_{1,2}(\boldsymbol{\sigma})$ преобразует скорости $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ согласно

$$\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1^* = \mathbf{v}_1 - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_{1,2}\boldsymbol{\sigma}), \quad \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2^* = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_{1,2}\boldsymbol{\sigma}). \qquad (32)$$

Заметим здесь, что в 60-х гг. было обнаружено [4], что для модели упругих шаров в цепочке уравнений (7) *можно положить*

$$Л(1,2) = \overline{T}(1,2), \qquad (33)$$

не совершая никакой аппроксимации.

Этот важный факт обусловлен мгновенностью соударений идеально упругих шаров в классической механике.

Разумеется, используя (33), мы должны исключить нефизические конфигурации, соответствующие перекрытию некоторых шаров.

[1] Детали вычислений см., например, в монографии [2].

Для исключения таких нефизических конфигураций мы, естественно, должны ограничиться рассмотрением только тех функций F_s, для которых в начальный момент времени $F_s(0; 1, \ldots, s) = 0$, если хотя бы для одной пары $|\mathbf{r}_{j_1} - \mathbf{r}_{j_2}| < a$.

С учетом структуры (31) оператора $\overline{T}$ отсюда вытекает, что и для последующих моментов времени

$$F_s(t; 1, \ldots, s) = 0, \tag{34}$$

если хотя бы для одной пары частиц $|\mathbf{r}_{j_1} - \mathbf{r}_{j_2}| < a$.

Кроме того, следует подчеркнуть, что сама форма (31) оператора $\overline{T}$ пригодна лишь для изучения временной эволюции функции распределения при возрастании времени ($t > 0$).

Если же мы пожелаем обратить направление времени ($t < 0$), то должна быть использована несколько другая форма оператора $\overline{T}$. Дело в том, что направление времени характеризуется здесь принятым соглашением о смысле скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^*$: или они являются соответственно скоростью до и после соударения, или этот порядок должен быть обращен. Для подробного пояснения данного вопроса см. работу [4].

Возвратимся теперь к проблеме построения кинетических уравнений. В 1946 г. нами было высказано предположение, что и кинетические уравнения высших приближений могут быть представлены в следующей форме, «локальной» по отношению к времени:

$$\frac{\partial F_1(t; 1)}{\partial t} = Л(1) F_1(t; 1) + n\mathcal{U}_1(1, F_1) + n^2\mathcal{U}_2(1, F_1) + n^3\mathcal{U}_3(1, F_1) + \ldots, \tag{35}$$

где $\mathcal{U}_j(1, F_1)$ — функционалы от F_1 как функции $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ в данный момент t.

Здесь первые два члена были фактически найдены в форме (29) и, кроме того, была предложена схема для нахождения высших $\mathcal{U}_j$ ($j \geqslant 2$). В своей известной работе [5] Чо и Уленбек исследовали такое кинетическое уравнение во втором приближении, содержащее член $n^2\mathcal{U}_2$.

На этой основе были впервые вычислены поправки к коэффициентам переноса — коэффициентам, которые ранее находились лишь из кинетических уравнений первого порядка.

Однако в 1965 г. Дорфман и Коэн [6] с помощью интуитивных физических соображений обнаружили, что выражения $\mathcal{U}_j$, начиная с $\mathcal{U}_3$, оказываются расходящимися.

Далее, после дискуссии, вызванной опубликованием в 1967 г. Адлером и Уэйнрайтом результатов их численного анализа модели упругих шаров на ЭВМ, выяснилось, что для уточнения кинетических уравнений необходимо учитывать взаимодействие частиц с коллективными движениями, обусловленными вязкостью, теплопроводностью и распространением звуковых волн.

Такое взаимодействие оказывается особенно существенным для изучения поведения корреляционных функций во временных интервалах, много больших среднего интервала времени свободного пробега частицы.

В этой связи интересно отметить, что в теории плазмы, где главную роль играют дальнодействующие кулоновские силы, значимость коллективных движений была установлена уже в начале 40-х гг., после появления основополагающих работ А. А. Власова [7].

В нашей монографии была также разработана схема для построения кинетических уравнений в теории плазмы. Имеется в виду дополнение уравнения самосогласованного поля Власова выражением, аналогичным «интегралу столкновений», входящему в уравнение Больцмана.

Изложим здесь вкратце основные положения этой схемы.

Возьмем для простоты случай классического электронного газа, находящегося в компенсирующем поле пространственно однородного распределения положительного заряда.

Здесь

$$\Phi(r) = \frac{e^2}{r}.$$

В данной ситуации можно ввести особый малый параметр следующим образом.

Будем исходить из известного определения радиуса Дебая

$$\frac{1}{r_d^2} = \frac{4\pi e^2 n}{\theta}.$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{n r_d^3}.$$

Такое ε, очевидно, можно считать малым параметром в случае, когда

$$\frac{1}{\varepsilon} = n r_d^3 = \left(\frac{\theta}{4\pi e^2 n^{1/3}}\right)^{3/2} \gg 1.$$

Вводя безразмерные пространственные векторы

$$\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{r_d}$$

и соответственно безразмерные скорости и время, видим, что

$$\frac{\Phi(r)}{\theta} = \varepsilon \frac{1}{r^*}, \tag{36}$$

т. е. что безразмерная потенциальная функция бинарного взаимодействия пропорциональна малому параметру. Рассматривая уравнения цепочки (12), заметим, что в интегральных членах параметр ε «нейтрализуется», поскольку

$$n\varepsilon\, d\mathbf{r} = n\varepsilon r_d^3\, d\mathbf{r}^* = d\mathbf{r}^*.$$

Как видно, малый параметр входит лишь в члены, содержащие операторы $Л(i, j)$, стоящие *вне* знака интеграла. Легко также заметить, что, условившись считать F_1 функциями «нулевого порядка», мы формально можем трактовать G_2 как функции, пропорциональные ε, а остальные G_3, ... — выражениями высшего порядка малости.

Поэтому, желая получить для функции F_1 уравнение, формально учитывающее первую степень малого параметра, мы здесь, в отличие от ранее рассматривавшегося случая газов малой плотности с короткодействующими силами, сохраняем в уравнении для функции G_2 интегральный член, отбросив в нем лишь G_3, а вне интегрального члена отбросим

$$Л(1, 2)G_2. \tag{37}$$

Таким образом, получим приближенную систему уравнений, которые, переходя опять к обычной «размерной» форме, напишем в следующем виде[1]:

$$\frac{\partial F_1(t;1)}{\partial t} = Л(1)F_1(t;1) + n\int Л(1,2)\{F_1(t;1)F_1(t;2) + G_2(t;1,2)\}\,d(2), \quad (38)$$

$$\frac{\partial G_2(t;1,2)}{\partial t} = \{Л(1)+Л(2)\}G_2(t;1,2) + Л(1,2)F_1(t;1)F_1(t;2) +$$
$$+ n\int Л(1,3)\{F_1(t;3)G_2(t;1,2) + F_1(t;1)G_2(t;2,3)\}\,d(3) +$$
$$+ n\int Л(2,3)\{F_1(t;3)G_2(t;1,2) + F_1(t;2)G_2(t;1,3)\}\,d(3). \quad (39)$$

Чтобы получить обычное, локальное по отношению к t, $\mathbf{r}$ кинетическое уравнение для функции $F_1(t;1)$, мы *пока решаем уравнение* (39), пренебрегая зависимостью F_1 от t, $\mathbf{r}$, положив[2] в (39)

$$F_1(t;1) = f(\mathbf{v}). \quad (41)$$

В монографии 1946 г. мы остановили наше изложение на этом пункте.

Уравнение (39) при условии (41) было решено в 1960 г. Ленардом [8] и в более общей форме Гернсейем [9], и, таким образом, ими было в явном виде получено локальное кинетическое уравнение, содержащее выражение, аналогичное интегралу столкновений в уравнении Больцмана.

С помощью другого метода, разработанного Пригожиным, Балеску [10] получил то же уравнение.

Здесь я не буду более детально касаться вопросов, относящихся к построению кинетических уравнений в теории плазмы. Мне хотелось бы лишь обратить внимание на весьма важное замечание, сделанное Дюпре [11].

Введем оператор $\mathcal{L}$, действующий на функции $\varphi(1)$:

$$\mathcal{L}(1)\varphi(1) = Л(1)\varphi(1) + n\int Л(1,3)\{f(\mathbf{v}_3)\varphi(1) + f(\mathbf{v}_1)\varphi(3)\}\,d(3).$$

Как видно, этот оператор может быть формально построен с помощью вариации правой части уравнения Власова около

$$F_1(t) = f(\mathbf{v}_1).$$

Имеем, действительно,

$$\delta\left\{Л(1)F_1(1) + n\int Л(1,3)F_1(1)F_1(3)\,d(3)\right\} = \mathcal{L}(1)\,\delta F_1(1). \quad (42)$$

---

[1] Заметим между прочим, что отброшенное в (39) выражение

$$Л(1,2)G_2(t;1,2) \quad (40)$$

для случая кулоновского взаимодействия существенно на малых расстояниях порядка $r \lesssim r_L$ $(e^2/(\theta r_L) = 1)$, поскольку на таких расстояниях это взаимодействие уже не является малым. Отсутствие (40) в (39) приводит к неправильному поведению G_2 на расстояниях указанного порядка. Поэтому, чтобы не получить трудности с расходимостью, надо «обрезать» $\Phi(r)$ при малых r, положив, например,

$$\Phi(r) = e^2\frac{1-e^{\lambda r}}{r}, \quad \lambda < \frac{1}{r_L}.$$

Другой более последовательный способ состоит в сохранении в (39) выражения (40).

[2] После нахождения $G_2(t;1,2)$ как функционала от $f(\mathbf{v})$ мы при подстановке G_2 в уравнение (38) опять формально заменим $f(\mathbf{v})$ на $F_1(t;\mathbf{r},\mathbf{v})$. Таким приближенным приемом обеспечивается локальность полученного кинетического уравнения по отношению к t и $\mathbf{r}$.

С помощью оператора $\mathcal{L}$ уравнение (39) в случае (41) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial G_2(t;1,2)}{\partial t} = \{\mathcal{L}(1)+\mathcal{L}(2)\}G_2(t;1,2)+\mathit{Л}(1,2)f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2). \tag{43}$$

Ясно, что операторы $\mathcal{L}(1)$, $\mathcal{L}(2)$ коммутируют, поскольку они действуют на различные аргументы (1) и (2), и, кроме того, они не зависят от времени.

Таким образом, уравнение (43) формально решается весьма просто.

Обобщим теперь вышеизложенное замечание Дюпре и введем явно зависящий от t оператор, также действующий на функцию $\varphi(1)$ фазы одной частицы:

$$\mathcal{L}(t;1)\varphi(1) = \mathit{Л}(1)\varphi(1) + n\int \mathit{Л}(1,3)\{F_1(t;3)\varphi(1)+F_1(t;1)\varphi(3)\}\,d(3). \tag{44}$$

Этот оператор также может быть получен вариацией правой части уравнения Власова, только в данном случае около неравновесной функции $F_1(t;1)$:

$$\delta\left\{\mathit{Л}(1)F_1(t;1)+n\int \mathit{Л}(1,3)F_1(t;1)F_1(t;3)\,d(3)\right\} = \mathcal{L}(t;1)\,\delta F_1(t;1). \tag{45}$$

Общее уравнение (39), как видно, эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial G_2(t;1,2)}{\partial t} = \{\mathcal{L}(t;1)+\mathcal{L}(t;2)\}G_2(t;1,2)+\mathit{Л}(1,2)F_1(t;1)F_1(t;2). \tag{46}$$

Здесь опять операторы $\mathcal{L}(t;1)$, $\mathcal{L}(t;2)$ коммутируют между собой.

Заметив это, перейдем к рассмотрению газа малой плотности из идеально упругих шаров.

Как об этом уже говорилось выше, для таких динамических систем в цепочках уравнений (7), (12) мы можем положить

$$\mathit{Л}(1,2) = \overline{T}(1,2). \tag{47}$$

Для изучения функций $F_1(t;\mathbf{r},\mathbf{v})$, медленно изменяющихся в пространстве $\mathbf{r}$ (в единицах свободного пробега) на весьма длительных (по сравнению со средним временем свободного пробега) временных интервалах, мы воспользуемся тут тем же типом аппроксимации, который применялся нами в случае плазмы.

Физической мотивировкой такой, казалось бы, совершенно парадоксальной аналогии может служить то обстоятельство, что в обоих случаях существенно как раз взаимодействие частицы с коллективными движениями. Кроме того, более тщательный анализ порядков величин различных членов в (12) также указывает в рассматриваемом случае на возможность использования сформулированного приближенного подхода.

Итак, мы приходим опять к уравнениям (38), (46), в которых только оператор $\mathit{Л}(1,2)$ заменен на $\overline{T}(1,2)$:

$$\frac{\partial F_1(t;1)}{\partial t} = \mathit{Л}(1)F_1(t;1)+n\int \overline{T}(1,2)\{F_1(t;1)F_1(t;2)+G_2(t;1,2)\}\,d(2), \tag{48}$$

$$\frac{\partial G_2(t;1,2)}{\partial t} = \{\mathcal{L}(t;1)+\mathcal{L}(t;2)\}G_2(t;1,2)+\overline{T}(1,2)F_1(t;1)F_1(t;2), \tag{49}$$

где $\mathcal{L}(t;1)$ — оператор, действующий на функции $\varphi(1)$, определенный соотношением

$$\mathcal{L}(t;1)\varphi(1) = \mathit{Л}(1)\varphi(1) + n\int \overline{T}(1,3)\{F_1(t;1)\varphi(3) + F_1(t;3)\varphi(1)\}\,d(3). \quad (50)$$

Заметим, что в случае плазмы, пренебрегая в уравнении (38) выражением, содержащим функцию G_2, мы получаем уравнение Власова. В рассматриваемом же случае пренебрежение функцией G_2 в уравнении (48) приводит к уравнению Больцмана—Энскога (30). Как это следует из самого определения (50), оператор $\mathcal{L}(t;1)$ соответствует вариации правой части такого уравнения:

$$\delta\left\{\mathit{Л}(1)F_1(t;1) + n\int \overline{T}(1,2)F_1(t;1)F_1(t;2)\,d(2)\right\} = \mathcal{L}(t;1)\,\delta F_1(t;1). \quad (51)$$

Напомним, что в обычной кинетической теории газов хорошо известно, что оператор, получающийся при линеаризации кинетического уравнения, характеризует в первом приближении коллективные движения, обусловленные вязкостью, теплопроводностью и звуковыми волнами, и позволяет найти явные выражения для коэффициентов переноса, фигурирующих в уравнениях Навье—Стокса.

В рассматриваемом случае газа из упругих сфер этим оператором и будет оператор $\mathcal{L}(t;1)$.

Заметим в заключение, что из уравнений (48), (49) можно получить нелинейные нелокальные уравнения гидродинамики, обобщающие уравнения Навье—Стокса.

§ 3. Перейдем теперь к вопросу о двувременны́х корреляционных функциях.

Такие корреляционные функции для состояния статистического равновесия вводятся следующим образом:

$$\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{B}(\tau)\rangle = \int \mathcal{U}\{\Omega(t)\}\mathcal{B}\{\Omega(\tau)\}D_{eq}(\Omega)\,d\Omega,$$

и с учетом стационарности равновесного распределения

$$\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{B}(\tau)\rangle = \langle \mathcal{U}(t-\tau)\mathcal{B}\rangle.$$

Напомним, что в квантовой статистике запаздывающие и опережающие функции Грина определяются соотношениями

$$G_{\text{ret}}(t-\tau) = \theta(t-\tau)\langle[\mathcal{U}(t);\mathcal{B}(\tau)]\rangle,$$
$$G_{\text{adv}}(t-\tau) = -\theta(\tau-t)\langle[\mathcal{U}(t);\mathcal{B}(\tau)]\rangle,$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t>0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$$

и где знак $[\ldots;\ldots]$ обозначает квантовые скобки Пуассона.

Н. Н. Боголюбов (мл.) и Б. И. Садовников [12] распространили понятие функций Грина и на классическую статистику. Их определение такое же, как и в квантовом случае, только квантовые скобки заменяются на обычные классические скобки Пуассона.

Исходя из представления Фурье

$$\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{B}(\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} J_{\mathcal{U},\mathcal{B}}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega, \tag{52}$$

эти авторы ввели функцию комплексного переменного ν

$$\langle\langle \mathcal{U},\mathcal{B}\rangle\rangle_{\nu} = \frac{1}{2\pi\theta}\int_{-\infty}^{\infty} J_{\mathcal{U},\mathcal{B}}(\omega)\frac{\omega}{\nu-\omega}\,d\omega, \tag{53}$$

являющуюся регулярной в комплексной плоскости ν, за исключением вещественной оси.

Эта функция определяет частотное представление запаздывающих и опережающих функций Грина

$$\langle\langle \mathcal{U},\mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega}^{r,a} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{r,a}(t)e^{i\omega t}\,dt$$

с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\langle\langle \mathcal{U},\mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega}^{r} &= \langle\langle \mathcal{U},\mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega+i0^+},\\ \langle\langle \mathcal{U},\mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega}^{a} &= \langle\langle \mathcal{U},\mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega-i0^+},\end{aligned} \tag{54}$$

из которых следует

$$J_{\mathcal{U},\mathcal{B}}(\omega) = i\frac{\theta}{\omega}\{\langle\langle \mathcal{U},\mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega+i0^+} - \langle\langle \mathcal{U},\mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega-i0^+}\}. \tag{55}$$

Следует подчеркнуть, что сначала должен быть проведен предельный переход статистической механики $V\to\infty$ и лишь после этого надо проводить предельный процесс приближения к вещественной оси.

Нетрудно заметить (см. [13]), что функция (53) может быть выражена через преобразование Лапласа от двувременны́х корреляционных средних

$$\begin{aligned}\langle\langle \mathcal{U},\mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega+i\eta} &= \frac{1}{2\pi\theta}\left\{z\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-zt}\langle\mathcal{U}(t)\mathcal{B}\rangle\,dt - \langle\mathcal{U}\mathcal{B}\rangle\right\},\\ \langle\langle \mathcal{U},\mathcal{B}\rangle\rangle_{\omega-i\eta} &= \frac{1}{2\pi\theta}\left\{z^*\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-z^*t}\langle\mathcal{B}(t)\mathcal{U}\rangle\,dt - \langle\mathcal{U}\mathcal{B}\rangle\right\},\end{aligned} \tag{56}$$

$$z = \eta - i\omega, \quad z^* = \eta + i\omega, \quad \eta > 0.$$

Чтобы подойти к проблеме нахождения временны́х корреляционных функций, рассмотрим общее уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial D_t}{\partial t} = \mathit{\Pi} D_t$$

с начальным распределением

$$t = 0, \quad D_0 = D_{eq} + \mathcal{B}(\Omega)D_{eq}\,\delta\xi,$$

бесконечно мало отличающимся от равновесного.

Тогда и

$$D_t = D_{eq} + \delta D_t,$$

причем

$$\frac{\partial \delta D_t}{\partial t} = Л\,\delta D_t, \quad \delta D_0 = \mathcal{B}(\Omega) D_{eq}\,\delta\xi.$$

Отсюда на основании (4), (4′) убеждаемся, что

$$\delta\langle \mathcal{U}(t)\rangle = \int \mathcal{U}\{\Omega(t)\}\mathcal{B}(\Omega) D_{eq}\,d\Omega\,\delta\xi = \int \mathcal{U}(\Omega)\,\delta D_t\,d\Omega.$$

Но

$$\int \mathcal{U}\{\Omega(t)\}\mathcal{B}(\Omega) D_{eq}\,d\Omega = \langle \mathcal{U}(t)\mathcal{B}\rangle,$$

и потому

$$\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{B}\rangle\,\delta\xi = \int \mathcal{U}(\Omega)\,\delta D_t\,d\Omega. \tag{57}$$

Заметим, что при нахождении рассматриваемых временных средних мы всегда можем ограничиться случаем, когда

$$\langle \mathcal{B}\rangle = 0, \tag{58}$$

так как очевидно, что

$$\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{B}\rangle = \langle \mathcal{U}(t)(\mathcal{B} - \langle \mathcal{B}\rangle)\rangle + \langle \mathcal{U}(t)\rangle\langle \mathcal{B}\rangle = \langle \mathcal{U}(t)(\mathcal{B} - \langle \mathcal{B}\rangle)\rangle + \langle \mathcal{U}\rangle\langle \mathcal{B}\rangle.$$

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{B}$ будут аддитивными динамическими переменными:

$$\mathcal{U}(\Omega) = \sum_{j=1}^{N} A(j), \tag{59}$$

$$\mathcal{B}(\Omega) = \sum_{j=1}^{N} B(j). \tag{60}$$

Чтобы удовлетворить условию (58), мы должны иметь дело с такими $\mathcal{B}$, для которых[1]

$$\int B(1)\Phi(v_1)\,d(1) = 0, \tag{61}$$

где $\Phi(v_1)$ — нормированное распределение Максвелла. Легко заметить, что δF_1, δG_j пропорциональны бесконечно малой величине $\delta\xi$. Удобно ввести следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \delta F_1(t;1) = \chi_1(t;1)\Phi(\mathbf{v}_1)\,\delta\xi, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta G_s(t;1,\ldots,s) = \chi_s(t;1,\ldots,s)\Phi(v_1)\ldots\Phi(v_s)\,\delta\xi. \end{gathered} \tag{62}$$

[1] Так как

$$F_1^{(eq)}(1) = \Phi(v_1).$$

Тогда, в частности, выражение (57) можно представить в виде

$$\left\langle \sum_{j=1}^{N} A\{\mathbf{r}_j(t), \mathbf{v}_j(t)\} \sum_{j=1}^{N} B\{\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j\} \right\rangle = n \int A(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \chi(t; \mathbf{r}, \mathbf{v}) \Phi(\mathbf{v})\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}. \quad (63)$$

Так как теперь

$$\delta D_0(\Omega) = \sum_{j=1}^{N} B(j) D_{eq}\, \delta\xi,$$

то для начальных значений χ_s с учетом (61) получаются [13] следующие представления:

$$\begin{aligned} \chi_1(0;1) &= B(1) + n \int g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) B(2) \Phi(v_2)\, d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{v}_2, \\ \chi_2(0;1,2) &= (B(1) + B(2)) g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ &\quad + n \int g_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) B(3) \Phi(\mathbf{v}_3)\, d\mathbf{r}_3\, d\mathbf{v}_3 \end{aligned} \quad (64)$$

.....

Здесь g_2, g_3, ... — пространственные факторы равновесных функций:

$$G_2^{(eq)}(1,2) = g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Phi(v_1) \Phi(v_2),$$

$$G_3^{(eq)}(1,2,3) = g_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \Phi(v_1) \Phi(v_2) \Phi v_3)$$

.....

Взяв цепочку нелинейных уравнений (12) и приравняв их, заметим, что δF_1, δG_2, ..., δG_3, ... удовлетворяют линейным «уравнениям в вариациях». Подставив в них выражения (62), видим, что и функции $\chi_1(t;1)$, $\chi_2(t;1,2)$, ... удовлетворяют цепочке *линейных* уравнений.

Таким образом, ограничившись приближенными уравнениями (48), (49), получим замкнутую систему линейных уравнений для определения $\chi_1(t;1)$ и $\chi_2(t;1,2)$, к которой может быть непосредственно применено преобразование Лапласа.

Если в начальных условиях (64) возьмем

$$B(1) = \varphi(\mathbf{v}_1),$$

то из указанной системы уравнений получим результаты работы [14], относящиеся к изучению поведения корреляционных средних от некоторых функций скорости на весьма длительном интервале времени.

Если же положим

$$B(1) = \varphi(\mathbf{v}_1) \mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}},$$

придем к результату работы [15].

Интересно отметить, что проблема нахождения двувременных равновесных корреляционных средних приводится к вопросу о решении линейных, явно не зависящих от времени уравнений с начальными условиями вида (64).

Список литературы

1. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Записки кафедры математической физики АН УССР. Киев: 1939. Т. 4. С. 5 / Рус. пер.: Избр. труды. Киев: Наук. думка, 1970. Т. 2. С. 5; *Боголюбов Н.Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д.Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 60.
2. *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1946; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д.Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 138.
3. *Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И.* Докл. АН СССР. 1949. Т. 66, № 3. С. 321; *Хацет Б.И.* Научные записки Житомирского педагогического института. Физ.-мат. серия. 1956. Т. 3, № 113. С. 139; *Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я., Хацет Б.И.*// ТМФ. 1969. Т. 1, № 2. С. 251; *Боголюбов Н.Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д.Суханов. М.: Наука, т. VI, 2006, с. 396, 432.
4. *Ernst M.H., Dorfman J.R., Hoegy W.R., Leeuwen I.M.I. van* // Physica. 1969. V. 45. P. 127.
5. *Choh S.T., Uhlenbeck G.E.* The Kinetic Theory of Dense Cases. Univ. of Michigan, 1958.
6. *Dorfman J.R., Cohen E.G.* // Phys. Lett. 1965. V. 16. P. 124.
7. *Власов А.А.* // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. С. 291; Теория многих частиц. М.: Гостехтеориздат, 1950.
8. *Lenard A.* // Ann. Phys. 1960. V. 10. P. 390.
9. *Guernsey R.* Dissertation. Univ. of Michigan, 1960.
10. *Balescu R.* // Phys. Fluids. 1960. V. 3. P. 52.
11. *Dupree T.* // Phys. Fluids. 1961. V. 4. P. 696.
12. *Боголюбов Н.Н. (мл.), Садовников Б.И.*// ЖЭТФ. 1962. Т. 43, № 8. С. 667.
13. *Bogolubov N.N.* On the Stochastic Processes in the Dynamical Systems. JINR Preprint E17-10514. Dubna, 1977 / Рус. пер.: ЭЧАЯ. 1978. Т. 9, № 4. С. 501; *Боголюбов Н.Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А.Д.Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 248.
14. *Dorfman I.R., Cohen E.G.D.* // Phys. Rev. 1972. V. A8, N 2. P. 776.
15. *Ernst M.H., Dorfman J.R.* // Physica. 1972. V. 61. P. 157.

15.

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОЙ СИСТЕМЫ*

§ 1. Введение

В настоящей работе будет рассмотрено взаимодействие электрона с фононным полем и внешним электрическим полем.

Мы выведем точные соотношения, которые после соответствующей аппроксимационной процедуры могут быть преобразованы в уравнения, описывающие кинетические свойства.

Гамильтониан рассматриваемой динамической системы (S, Σ) электрона (S), взаимодействующего с фононным полем (Σ), может быть записан в виде

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{E}(t)\mathbf{r} + \sum_{(\mathbf{k})} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{+} b_{\mathbf{k}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{(\mathbf{k})} \mathfrak{L}(\mathbf{k}) \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{i(\mathbf{kr})} (b_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^{+}), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{E}(t)$ — внешнее электрическое поле, умноженное на заряд e_c; $\omega_{\mathbf{k}}$, $\mathfrak{L}(\mathbf{k})$ — сферически-симметричные вещественные функции волнового вектора $\mathbf{k}$, например, для полярона Фрелиха:

$$\mathfrak{L}(\mathbf{k}) = \frac{g}{|\mathbf{k}|}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = \omega, \quad (1.2)$$

g — константа связи.

В этом выражении $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ означают координату и импульс электрона, V — объем рассматриваемой динамической системы, а $b_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}^{+}$ — фононные бозе-амплитуды, соответствующие вектору $\mathbf{k}$. Предполагается, что частоты $\omega_{\mathbf{k}}$ являются существенно положительными.

Суммирование по k производится по обычному квазидискретному спектру $\mathbf{k}$, переходящему в непрерывный в пределе $V \to \infty$.

В некоторых случаях будет удобно использовать понятие адиабатического выключения взаимодействия.

Для этой цели мы можем ввести фактор $\mathrm{e}^{\varepsilon t}$ $(\varepsilon > 0)$, позволяющий исключить взаимодействие при $t \to -\infty$; в окончательном результате мы положим $\varepsilon \to 0$.

* JINR Preprint E17-11822. Dubna, 1978; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 639.

Таким образом, мы можем начать с рассмотрения гамильтониана

$$H_t = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e^{\varepsilon t}\mathbf{E}(t)\mathbf{r} + \sum_{(\mathbf{k})} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + \\ + \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{B}} \sum_{(\mathbf{k})} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \mathfrak{L}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} (b_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^+). \quad (1.3)$$

Введем некоторые дополнительные обозначения.

Пусть $A(S)$ означает некую динамическую переменную, зависящую только от динамических переменных $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ электрона S и, следовательно, коммутирующую со всеми $b_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}^+$.

Точно так же $A(\Sigma)$ означает некую динамическую переменную, зависящую только от динамических переменных $\ldots b_{\mathbf{k}} \ldots b_{\mathbf{k}}^+ \ldots$ фононного поля Σ и, следовательно, коммутирующую с $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$.

Общую динамическую переменную можно обозначить через $A(S, \Sigma)$. Воспользовавшись этим, введем следующие обозначения:

$$\Gamma_t(S) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e^{\varepsilon t}\mathbf{E}(t)\mathbf{r}, \\ H(\Sigma) = \sum_{(\mathbf{k})} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}, \quad (1.4) \\ H_t' = H_t'(S, \Sigma) = \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{V}} \sum_{(\mathbf{k})} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \mathfrak{L}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} (b_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^+).$$

Тогда (1.3) принимает вид

$$H_t = \Gamma_t(S) + H(\Sigma) + H_t'(S, \Sigma). \quad (1.5)$$

Начнем с того, что используем уравнение Лиувилля для статистического оператора $\mathcal{D}_t$:

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{D}_t}{\partial t} = H_t \mathcal{D}_t - \mathcal{D}_t H_t \quad (1.6)$$

с начальным условием в некоторый момент времени t_0 в отдаленном прошлом

$$\mathcal{D}_{t_0} = \rho(S)\mathcal{D}(\Sigma), \quad (1.7)$$

где $\rho(S)$ является статистическим оператором системы S:

$$\operatorname*{Sp}_{(S)} \rho(S) = 1,$$

а $\mathcal{D}(\Sigma)$ описывает статистическое равновесие в выделенной системе Σ:

$$\mathcal{D}(\Sigma) = Z^{-1} e^{-\beta H(\Sigma)}, \quad Z = \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} e^{-\beta H(\Sigma)}, \\ \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} \mathcal{D}(\Sigma) = 1. \quad (1.8)$$

Таким образом, получаем обычную нормировку статистического оператора:

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \mathcal{D}_t = \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \mathcal{D}_{t_0} = \operatorname*{Sp}_{(S)} \rho(S) \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} \mathcal{D}(\Sigma) = 1. \quad (1.9)$$

Удобно ввести оператор $U(t, t_0)$:

$$i\hbar\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} = H_t U(t,t_0),$$
$$U(t_0,t_0) = 1. \tag{1.10}$$

Вследствие эрмитовости H_t имеем

$$-i\hbar\frac{-\partial \overset{+}{U}(t,t_0)}{\partial t} = \overset{+}{U}(t,t_0)H_t,$$
$$\overset{+}{U}(t_0,t_0) = 1.$$

Отсюда следует, что $U(t, t_0)$ является унитарным оператором:

$$\overset{+}{U}(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0). \tag{1.11}$$

Формальное решение уравнений (1.6), (1.7) с помощью этих операторов может быть записано в виде

$$\mathcal{D}_t = U(t,t_0)\mathcal{D}_{t_0}U^{-1}(t,t_0). \tag{1.12}$$

Рассмотрим динамическую переменную A. Ее среднее значение в момент времени t имеет вид

$$\langle A\rangle_t = \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} A\mathcal{D}_t. \tag{1.13}$$

С учетом (1.12) находим

$$\langle A\rangle_t = \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} AU(t,t_0)\mathcal{D}_{t_0}U^{-1}(t,t_0) = \operatorname{Sp} A(t)\mathcal{D}_{t_0}, \tag{1.14}$$

где

$$A(t) = \overset{+}{U}(t,t_0)AU(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0)AU(t,t_0),$$
$$A(t_0) = A. \tag{1.15}$$

Отсюда следует, что

$$\langle A\rangle_t = \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} A\mathcal{D}_t = \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} A(t)\mathcal{D}_{t_0}. \tag{1.16}$$

Из уравнения (1.15) вытекает, что $A(t)$ есть не что иное, как представление Гейзенберга оператора A.

Заметим, что если коммутатор A и B является c-числом:

$$[A,B] = AB - BA = c,$$

то такое же соотношение будет иметь место для представления Гейзенберга этих операторов:

$$[A(t),B(t)] = U^{-1}(t,t_0)[A,B]U(t,t_0) = c.$$

Рассмотрим теперь динамическую переменную типа $\Phi(S)$ и обозначим через $\Phi(S_t)$ ее представление Гейзенберга.

Из (1.16) имеем

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \Phi(S_t)\mathcal{D}_{t_0} = \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \Phi(S)\mathcal{D}_t = \operatorname*{Sp}_{(S)} \Phi(S)\{\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} \mathcal{D}_t\}.$$

Следовательно, с помощью приведенного статистического оператора

$$\rho_t(S) = \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} \mathcal{D}_t, \quad \operatorname*{Sp}_{(S)} \rho_t(S) = 1 \tag{1.17}$$

это соотношение принимает вид

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \Phi(S_t)\mathcal{D}_{t_0} = \operatorname*{Sp}_{(S)} \Phi(S)\rho_t(S). \tag{1.18}$$

В частном случае, когда

$$\Phi(S) = F(\mathbf{p}),$$

мы можем записать

$$\operatorname*{Sp}_{(S)} F(\mathbf{p})\rho_t(S) = \int F(\mathbf{p})w_t(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}, \tag{1.19}$$

где

$$w_t(\mathbf{p}_0) = \operatorname*{Sp}_{(S)} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\rho_t(S). \tag{1.20}$$

Пусть $\mathbf{p}(t)$ является оператором Гейзенберга импульса электрона. Тогда, согласно (1.18), имеем

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} F(\mathbf{p}(t))\mathcal{D}_{t_0} = \int F(\mathbf{p})w_t(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}. \tag{1.21}$$

Из (1.17) и (1.20) следует

$$\int w_t(\mathbf{p})\,d\mathbf{p} = 1,$$

откуда нетрудно видеть, что $w_t(\mathbf{p})$ можно интерпретировать как плотность вероятности импульса в момент времени t.

Вернемся теперь к динамической переменной типа $f(S)$, которая не зависит явно от времени.

Ее оператор Гейзенберга $f(S_t)$ удовлетворяет уравнению движения

$$ih\frac{\partial f(S_t)}{\partial t} = f(S_t)H(t) - H(t)f(S_t), \tag{1.22}$$

где $H(t)$ — гамильтониан H_t, выраженный через оператор Гейзенберга:

$$H(t) = \Gamma_t(S_t) + H(\Sigma_t) + H'(t). \tag{1.23}$$

Здесь

$$\Gamma_t(S_t) = \frac{p^2(t)}{2m} + e^{\varepsilon t}\mathbf{E}(t)\mathbf{r}(t),$$
$$H(\Sigma_t) = \sum_{(\mathbf{k})} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b^+_{\mathbf{k}}(t) b_{\mathbf{k}}(t),$$
$$H'(t) = \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{V}} \sum_{(\mathbf{k})} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \mathfrak{L}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} \{b_{\mathbf{k}}(t) + b^+_{-\mathbf{k}}(t)\} = \tag{1.24}$$
$$= \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{V}} \sum_{(\mathbf{k})} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \mathfrak{L}(\mathbf{k}) \{b_{\mathbf{k}}(t) + b^+_{-\mathbf{k}}(t)\} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)},$$

где $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{r}(t)$, $b_{\mathbf{k}}(t)$, $b^+_{\mathbf{k}}(t)$ — операторы Гейзенберга, удовлетворяющие уравнениям движения

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{1}{m}\mathbf{p}(t),$$
$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -e^{\varepsilon t}\mathbf{E}(t) - ie^{\varepsilon t}\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{(\mathbf{k})} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \mathfrak{L}(\mathbf{k})\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} (b_{\mathbf{k}}(t) + b^+_{-\mathbf{k}}(t)), \tag{1.25}$$
$$\frac{db_{\mathbf{k}}(t)}{dt} = -i\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}(t) - ie^{\varepsilon t}\frac{1}{\sqrt{V}} \mathfrak{L}(\mathbf{k}) \left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}(t),$$
$$\frac{db^+_{-\mathbf{k}}(t)}{dt} = i\omega_{\mathbf{k}} b^+_{-\mathbf{k}}(t) + ie^{\varepsilon t}\frac{1}{\sqrt{V}} \mathfrak{L}(\mathbf{k}) \left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}(t)$$

и начальным условиям

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}, \quad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}, \quad b_{\mathbf{k}}(t_0) = b_{\mathbf{k}}, \quad b^+_{-\mathbf{k}}(t_0) = b^+_{-\mathbf{k}}. \tag{1.26}$$

Подставим (1.23) в (1.22) с учетом того, что

$$[f(S_t), H(\Sigma_t)] = 0,$$

так как

$$[f(S), H(\Sigma)] = 0.$$

Тогда уравнение (1.22) может быть записано в виде

$$\frac{\partial f(S_t)}{\partial t} + \frac{\Gamma_t(S_t) f(S_t) - f(S_t)\Gamma_t(S_t)}{i\hbar} = \frac{f(S_t)H'(t) - H'(t)f(S_t)}{i\hbar}, \tag{1.27}$$

откуда следует

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \left\{ \frac{\partial f(S_t)}{\partial t} + \frac{\Gamma_t(S_t) f(S_t) - f(S_t)\Gamma_t(S_t)}{i\hbar} \right\} \mathcal{D}_{t_0} =$$
$$= \frac{1}{i\hbar} \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \{f(S_t)H'(t) - H'(t)f(S_t)\} \mathcal{D}_{t_0}. \tag{1.28}$$

Заметим, что, согласно (1.18), имеем

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\left\{\frac{\partial f(S_t)}{\partial t}+\frac{\Gamma_t(S_t)f(S_t)-f(S_t)\Gamma_t(S_t)}{i\hbar}\right\}\mathcal{D}_{t_0}=$$

$$=\operatorname*{Sp}_{(S)}\left\{f(S)\frac{\partial\rho_t(S)}{\partial t}+\frac{\Gamma_t(S)f(S)-f(S)\Gamma_t(S)}{i\hbar}\rho_t(S)\right\},$$

откуда получаем

$$\operatorname*{Sp}_{(S)}\left\{f(S)\frac{\partial\rho_t(S)}{\partial t}+\frac{\Gamma_t(S)f(S)-f(S)\Gamma_t(S)}{i\hbar}\rho_t(S)\right\}=$$

$$=\frac{1}{i\hbar}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{f(S_t)H'(t)-H'(t)f(S_t)\}.$$

С учетом (1.24) это равенство принимает вид

$$\operatorname*{Sp}_{(S)}\left\{f(S)\frac{\partial\rho_t(S)}{\partial t}+\frac{\Gamma_t(S)f(S)-f(S)\Gamma_t(S)}{i\hbar}\rho_t(S)\right\}=$$

$$=-ie^{\varepsilon t}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\mathfrak{L}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}f(S_t)e^{i\mathbf{kr}(t)}(b_{\mathbf{k}}(t)+b^+_{-\mathbf{k}}(t))\mathcal{D}_{t_0}+$$

$$+ie^{\varepsilon t}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\mathfrak{L}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}(b_{\mathbf{k}}(t)+b^+_{-\mathbf{k}}(t))e^{i\mathbf{kr}(t)}f(S_t)\mathcal{D}_{t_0}. \quad (1.29)$$

Полученное соотношение будет обсуждаться в следующем разделе.

§ 2. Исключение амплитуд фононного поля

Теперь мы приступим к исключению из соотношения (1.29) бозе-амплитуд $b_{\mathbf{k}}$, $b^+_{-\mathbf{k}}$ фононного поля. Нашей целью является вывод уравнения, в котором в явном виде фигурируют только координаты и импульсы электрона

$$\mathbf{r}(\tau),\quad \mathbf{p}(\tau),\quad t_0\leqslant\tau\leqslant t. \quad (2.1)$$

Уравнения (1.25) приводят к соотношениям

$$b_{\mathbf{k}}(t)=-ib_{\mathbf{k}}(t)+\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t),\quad b^+_{-\mathbf{k}}(t)=ib^+_{-\mathbf{k}}(t)+\tilde{b}^+_{-\mathbf{k}}(t), \quad (2.2)$$

где

$$B_{\mathbf{k}}(t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\mathfrak{L}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\int_{t_0}^{t}d\tau\,e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)+\varepsilon\tau}e^{-i\mathbf{kr}(\tau)},$$

$$B^+_{\mathbf{k}}(t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\mathfrak{L}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\int_{t_0}^{t}d\tau\,e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)+\varepsilon\tau}e^{-i\mathbf{kr}(\tau)} \quad (2.3)$$

и

$$\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)=e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t_0)}b_{\mathbf{k}},\quad \tilde{b}^+_{-\mathbf{k}}(t)=e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-t_0)}b^+_{-\mathbf{k}}. \quad (2.4)$$

Следовательно, (1.29) может быть представлено в виде

$$\operatorname*{Sp}_{(S)}\left\{f(S)\frac{\partial\rho_t(S)}{\partial t}+\frac{\Gamma_t(S)f(S)-f(S)\Gamma_t(S)}{i\hbar}\rho_t(S)\right\}=$$

$$=-ie^{\varepsilon t}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\mathfrak{L}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}f(S_t)e^{i\mathbf{kr}(t)}\times$$

$$\times\{\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)+\tilde{b}^{+}_{-\mathbf{k}}(t)-iB_{\mathbf{k}}(t)+iB^{+}_{-\mathbf{k}}(t)\}\mathcal{D}_{t_0}+$$

$$+ie^{\varepsilon t}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\mathfrak{L}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)+\tilde{b}^{+}_{-\mathbf{k}}(t)-$$

$$-iB_{\mathbf{k}}(t)+iB^{+}_{-\mathbf{k}}(t)\}e^{i\mathbf{kr}(t)}f(S_t)\mathcal{D}_{t_0}. \quad (2.5)$$

Здесь величины $B_{\mathbf{k}}(t)$, $B^{+}_{-\mathbf{k}}(t)$ явно зависят фактически только от $\mathbf{r}(\tau)$ $(t_0\leqslant\tau\leqslant t)$, но «свободные» бозе-амплитуды $\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)$, $\tilde{b}^{+}_{-\mathbf{k}}(t)$ все еще присутствуют в этих выражениях.

Чтобы избавиться от амплитуд $\tilde{b}_{\mathbf{k}}$, $\tilde{b}^{+}_{-\mathbf{k}}$, предлагаем доказать следующую **лемму**:

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)\mathcal{D}_{t_0}=\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)-\mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\}\mathcal{D}_{t_0}.$$

Доказательство. С учетом (1.7) и того факта, что $b_{\mathbf{k}}$ коммутирует с любым оператором типа $\Phi(S)$, имеем

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)\mathcal{D}_{t_0}=\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)\rho(S)\mathcal{D}(\Sigma)=$$

$$=\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)}\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\{\operatorname*{Sp}_{(S)}\mathcal{U}(S,\Sigma)\rho(S)\}\mathcal{D}(\Sigma),$$

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{D}_{t_0}=\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\rho(S)\mathcal{D}(\Sigma)=$$

$$=\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)}\{\operatorname*{Sp}_{(S)}\mathcal{U}(S,\Sigma)\rho(S)\}\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{D}(\Sigma).$$

Введем обозначение

$$\operatorname*{Sp}_{(S)}\mathcal{U}(S,\Sigma)\rho(S)=B(\Sigma).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)\mathcal{D}_{t_0}&=\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)}\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)B(\Sigma)\mathcal{D}(\Sigma),\\ \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{D}_{t_0}&=\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)}B(\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{D}(\Sigma).\end{aligned} \quad (2.6)$$

Напомним одно важное свойство равновесных средних статистической механики.

Рассмотрим изолированную динамическую систему, характеризуемую некоторым не зависящим от времени гамильтонианом и двумя динамическими

переменными A, B, которые соответствуют этой системе и не зависят явно от времени t.

Тогда для равновесных средних

$$\langle A(t)B\rangle_{\text{eq}} = \operatorname{Sp} A(t)B\mathcal{D}_{\text{eq}},$$
$$\langle BA(t)\rangle_{\text{eq}} = \operatorname{Sp} BA(t)\mathcal{D}_{\text{eq}},$$

в которых

$$A(t) = \mathrm{e}^{(i/\hbar)Ht}A\mathrm{e}^{-(i/\hbar)Ht},$$

имеем

$$\langle A(t)B\rangle_{\text{eq}} = \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,d\omega,$$

$$\langle BA(t)\rangle_{\text{eq}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta\omega\hbar}J(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,d\omega.$$

Перепишем эти соотношения в виде

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Sp}\left(\mathrm{e}^{(i/\hbar)H(t-t_0)}A\mathrm{e}^{-(i/\hbar)H(t-t_0)}B\mathcal{D}_{\text{eq}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)}\,d\omega,\\
&\operatorname{Sp}\left(B\mathrm{e}^{(i/\hbar)H(t-t_0)}A\mathrm{e}^{-(i/\hbar)H(t-t_0)}\mathcal{D}_{\text{eq}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta\omega\hbar}J(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)}\,d\omega.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Возьмем теперь в качестве этой системы систему Σ и положим

$$H = H(\Sigma), \qquad \mathcal{D}_{\text{eq}} = \mathcal{D}(\Sigma),$$
$$A = b_{\mathbf{k}}, \qquad B = B(\Sigma).$$

Заметим также, что в этом случае

$$\widetilde{b}_{\mathbf{k}}(t) = \mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t_0)}b_{\mathbf{k}} = \mathrm{e}^{(i/\hbar)(t-t_0)H}b_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-(i/\hbar)(t-t_0)H}.$$

Тогда (2.7) может быть приведено к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} \widetilde{b}_{\mathbf{k}}(t)B(\Sigma)\mathcal{D}(\Sigma) = \mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t_0)} \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} b_{\mathbf{k}}B(\Sigma)\mathcal{D}(\Sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} J_{\mathbf{k}}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)}\,d\omega,\\
&\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} B(\Sigma)\widetilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{D}(\Sigma) = \mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t_0)} \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} B(\Sigma)b_{\mathbf{k}}\mathcal{D}(\Sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}J_{\mathbf{k}}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)}\,d\omega.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Согласно этим соотношениям, $J_{\mathbf{k}}(\omega)$ пропорциональна $\delta(\omega-\omega_{\mathbf{k}})$:

$$J_{\mathbf{k}}(\omega) = I_{\mathbf{k}}\,\delta(\omega-\omega_{\mathbf{k}}),$$

откуда

$$\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}J_{\mathbf{k}}(\omega) = \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}J_{\mathbf{k}}(\omega).$$

Следовательно, из (2.8) также получим

$$\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} B(\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{D}(\Sigma) = \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} \tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)B(\Sigma)\mathcal{D}(\Sigma),$$

или с учетом (2.6)

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{D}_{t_0} = \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \operatorname{Sp} \tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)\mathcal{D}_{t_0},$$

что приводит к

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \{\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma) - \mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\}\mathcal{D}_{t_0} = (1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}) \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)\mathcal{D}_{t_0}.$$

Теперь мы видим, что

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)\mathcal{D}_{t_0} &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \{\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma) - \mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\}\mathcal{D}_{t_0}, \\
\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{D}_{t_0} &= \frac{\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \{\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma) - \mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\}\mathcal{D}_{t_0},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

и, таким образом, лемма доказана.

Введем обозначение

$$\frac{\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} = N_{\mathbf{k}}. \tag{2.10}$$

Тогда соотношения (2.9) могут быть выражены через эти равновесные средние чисел заполнения $N_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}}^{+}b_{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)\mathcal{D}_{t_0} &= (1+N_{\mathbf{k}}) \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \{\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma) - \mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\}\mathcal{D}_{t_0}, \\
\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{D}_{t_0} &= N_{\mathbf{k}} \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \{\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma) - \mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\}\mathcal{D}_{t_0}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Произведя в этих выражениях замену

$$\mathcal{U}(S,\Sigma) \to \overset{+}{\mathcal{U}}(S,\Sigma), \quad \mathbf{k} \to -\mathbf{k},$$

и проведя процедуру комплексного сопряжения, получим

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\mathcal{D}_{t_0} &= (1+N_{\mathbf{k}}) \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \{\mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t) - \tilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)\}\mathcal{D}_{t_0}, \\
\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \tilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)\mathcal{D}_{t_0} &= N_{\mathbf{k}} \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \{\mathcal{U}(S,\Sigma)\tilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t) - \tilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\mathcal{U}(S,\Sigma)\}\mathcal{D}_{t_0}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Воспользуемся теперь соотношениями (2.11) и (2.12) для частного случая

$$\mathcal{U}(S,\Sigma) = \Phi(S_t). \tag{2.13}$$

Здесь и далее $\Phi(S_t)$ означает оператор Гейзенберга, соответствующий динамической переменной $\Phi(S)$.

Следовательно, так как $b_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}^{+}$ коммутируют с $\Phi(S)$, операторы $b_{\mathbf{k}}(t)$, $b_{-\mathbf{k}}^{+}(t)$ также должны коммутировать с $\Phi(S_t)$:

$$\begin{aligned} &b_{\mathbf{k}}(t)\Phi(S_t) - \Phi(S_t)b_{\mathbf{k}}(t) = 0, \\ &\Phi(S_t)b_{-\mathbf{k}}^{+}(t) - b_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\Phi(S_t) = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

С учетом (2.2) получим

$$\begin{aligned} &\widetilde{b}_{\mathbf{k}}(t)\Phi(S_t) - \Phi(S_t)\widetilde{b}_{\mathbf{k}}(t) = i\{B_{\mathbf{k}}(t)\Phi(S_t) - \Phi(S_t)B_{\mathbf{k}}(t)\}, \\ &\Phi(S_t)\widetilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t) - \widetilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\Phi(S_t) = i\{B_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\Phi(S_t) - \Phi(S_t)B_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

При этом (2.11) и (2.12) приводят к

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{\widetilde{b}_{\mathbf{k}}(t) + \widetilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\}\Phi(S_t)\mathcal{D}_{t_0} = \\ &\quad = i(1+N_{\mathbf{k}})\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{B_{\mathbf{k}}(t)\Phi(S_t) - \Phi(S_t)B_{\mathbf{k}}(t)\}\mathcal{D}_{t_0} + \\ &\qquad + iN_{\mathbf{k}}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{B_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\Phi(S_t) - \Phi(S_t)B_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\}\mathcal{D}_{t_0}, \\ &\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\Phi(S_t)\{\widetilde{b}_{\mathbf{k}}(t) + \widetilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\}\mathcal{D}_{t_0} = \\ &\quad = iN_{\mathbf{k}}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{B_{\mathbf{k}}(t)\Phi(S_t) - \Phi(S_t)B_{\mathbf{k}}(t)\}\mathcal{D}_{t_0} + \\ &\qquad + i(1+N_{\mathbf{k}})\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{B_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\Phi(S_t) - \Phi(S_t)B_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\}\mathcal{D}_{t_0}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\Phi(S_t)\{\widetilde{b}_{\mathbf{k}}(t) + \widetilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t) - iB_{\mathbf{k}}(t) + iB_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\}\mathcal{D}_{t_0} = \\ &\quad = i\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{N_{\mathbf{k}}B_{\mathbf{k}}(t) + (1+N_{\mathbf{k}})B_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\}\Phi(S_t)\mathcal{D}_{t_0} - \\ &\qquad - i\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{(1+N_{\mathbf{k}})\Phi(S_t)B_{\mathbf{k}}(t) + N_{\mathbf{k}}\Phi(S_t)B_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\}\mathcal{D}_{t_0}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{\widetilde{b}_{\mathbf{k}}(t) + \widetilde{b}_{-\mathbf{k}}^{+}(t) - iB_{\mathbf{k}}(t) + iB_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\}\Phi(S_t)\mathcal{D}_{t_0} = \\ &\quad = i\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{N_{\mathbf{k}}B_{\mathbf{k}}(t) + (1+N_{\mathbf{k}})B_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\}\Phi(S_t)\mathcal{D}_{t_0} - \\ &\qquad - i\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{(1+N_{\mathbf{k}})\Phi(S_t)B_{\mathbf{k}}(t) + N_{\mathbf{k}}\Phi(S_t)B_{-\mathbf{k}}^{+}(t)\}\mathcal{D}_{t_0}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Положим в (2.16)

$$\Phi(S_t) = f(S_t)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, \tag{2.16a}$$

а в (2.17)

$$\Phi(S_t) = \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}f(S_t). \tag{2.17a}$$

Тогда с помощью выражений для $B_{\mathbf{k}}(t)$, $B^{+}_{-\mathbf{k}}(t)$ из (2.3) получим

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} f(S_t)\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}\{\widetilde{b}_{\mathbf{k}}(t)+\widetilde{b}^{+}_{-\mathbf{k}}(t)-iB_{\mathbf{k}}(t)+iB^{+}_{-\mathbf{k}}(t)\}\mathcal{D}_{t_0}=$$

$$=i\mathrm{e}^{\varepsilon t}\frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\mathfrak{L}(\mathbf{k})\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\,\mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)}\times$$

$$\times\{N_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}+(1+N_{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}\}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}(\tau)}f(S_t)\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}\mathcal{D}_{t_0}-$$

$$-i\mathrm{e}^{\varepsilon t}\frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\mathfrak{L}(\mathbf{k})\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\,\mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)}\times$$

$$\times\{(1+N_{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}+N_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}\}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}f(S_t)\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}\mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}(\tau)}\mathcal{D}_{t_0},\quad(2.18)$$

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{\widetilde{b}_{\mathbf{k}}(t)+\widetilde{b}^{+}_{-\mathbf{k}}(t)-iB_{\mathbf{k}}(t)+iB^{+}_{-\mathbf{k}}(t)\}\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}f(S_t)\mathcal{D}_{t_0}=$$

$$=i\mathrm{e}^{\varepsilon t}\frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\mathfrak{L}(\mathbf{k})\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\,\mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)}\times$$

$$\times\{N_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}+(1+N_{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}\}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}(\tau)}\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}f(S_t)\mathcal{D}_{t_0}-$$

$$-i\mathrm{e}^{\varepsilon t}\frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\mathfrak{L}(\mathbf{k})\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\,\mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)}\times$$

$$\times\{(1+N_{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}+N_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}\}\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}f(S_t)\mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}(\tau)}\mathcal{D}_{t_0}.$$

Подставляя эти соотношения в (2.5), находим

$$\operatorname*{Sp}_{(S)}\left\{f(S)\frac{\partial\rho_t(S)}{\partial t}+\frac{\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mathbf{E}(t)(\mathbf{r}f(S)-f(S)\mathbf{r})+\dfrac{\mathbf{p}^2}{2m}f(S)-f(S)\dfrac{\mathbf{p}^2}{2m}}{i\hbar}\rho_t(S)\right\}=$$

$$=\frac{1}{V}\mathrm{e}^{2\varepsilon t}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\,\mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)}\{N_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}+(1+N_{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}\}\times$$

$$\times\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{\mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}(\tau)}f(S_t)\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}-\mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}(\tau)}\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}f(S_t)\}\mathcal{D}_{t_0}+$$

$$+\frac{1}{V}\mathrm{e}^{2\varepsilon t}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\,\mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)}\{(1+N_{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}+N_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}\}\times$$

$$\times\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\{\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}f(S_t)\mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}(\tau)}-f(S_t)\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}\mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}(\tau)}\}\mathcal{D}_{t_0}.\quad(2.19)$$

Амплитуды фононного поля не входят явно в это выражение. Действительно, правая его часть зависит только от характеристик «траектории» электрона, т.е. от (2.1).

Однако следует отметить, что $\mathbf{r}(\tau)$, $\mathbf{p}(\tau)$ очень сложным образом зависят от начальных значений $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$, $\dots b_{\mathbf{k}}$, $\dots b_{\mathbf{k}}^{+} \dots$. Следовательно, чтобы получить из (2.19) явное выражение, необходимо прибегнуть к сложной аппроксимационной процедуре.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$f(S) = f(\mathbf{p})$$

и, следовательно,

$$f(S_t) = f(\mathbf{p}(t)).$$

Имеем

$$\mathbf{r}f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p})\mathbf{r} = i\hbar\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}.$$

Тогда из (1.19) следует

$$\operatorname*{Sp}_{(S)}\left\{f(\mathbf{p})\frac{\partial \rho_t(S)}{\partial t} + \mathrm{e}^{\varepsilon t}\mathbf{E}(t)\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\rho_t(S)\right\} =$$

$$= \int d\mathbf{p}\left\{f(\mathbf{p})\frac{\partial w_t(\mathbf{p})}{\partial t} + \mathrm{e}^{\varepsilon t}\mathbf{E}(t)\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}w_t(\mathbf{p})\right\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}},$$
$$f(\mathbf{p})\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}} = \mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}),$$

откуда следует

$$f\{\mathbf{p}(t)\}\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)} = \mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}f\{\mathbf{p}(t) + \hbar\mathbf{k}\},$$
$$\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}f\{\mathbf{p}(t)\} = f\{\mathbf{p}(t) - \hbar\mathbf{k}\}\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}(t)}.$$

Поскольку обе суммы по $(\mathbf{k})$ в правой части (2.19) инвариантны относительно преобразования

$$\mathbf{k} \to -\mathbf{k},$$

можно произвести такое преобразование в первой из этих сумм.

С учетом вышесказанного находим

$$\int d\mathbf{p}\, f(\mathbf{p})\left\{\frac{\partial w_t(\mathbf{p})}{\partial t} - \mathrm{e}^{\varepsilon t}\mathbf{E}(t)\frac{\partial w_t(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\right\} =$$

$$= \int d\mathbf{p}\left\{f(\mathbf{p})\frac{\partial w_t(\mathbf{p})}{\partial t} + \mathrm{e}^{\varepsilon t}\mathbf{E}(t)\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}w_t(\mathbf{p})\right\} =$$

$$= \mathrm{e}^{2\varepsilon t}\frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\int_{t_0}^{t} d\tau\, \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)}\{N_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)} + (1+N_{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}\} \times$$

$$\times \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} [e^{i\mathbf{kr}(t)} e^{-i\mathbf{kr}(\tau)} \{f(\mathbf{p}(t) - \hbar\mathbf{k}) - f(\mathbf{p}(t))\} \mathcal{D}_{t_0}] +$$

$$+ e^{2\varepsilon t} \frac{1}{V} \sum_{(\mathbf{k})} \frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-\varepsilon(t-\tau)} \{(1 + N_{\mathbf{k}}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)} + N_{\mathbf{k}} e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}\} \times$$

$$\times \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} [\{f(\mathbf{p}(t) - \hbar\mathbf{k}) - f(\mathbf{p}(t))\} e^{i\mathbf{kr}(t)} e^{-i\mathbf{kr}(\tau)} \mathcal{D}_{t_0}], \quad (2.20)$$

где

$$\mathcal{D}_{t_0} = \rho(S)\mathcal{D}(\Sigma). \quad (2.21)$$

В последующих разделах на основе этого точного соотношения будут получены приближенные уравнения.

§ 3. Кинетическое уравнение первого приближения для случая малых взаимодействий

Здесь мы рассмотрим случай, когда взаимодействия малы. Удобно характеризовать константу взаимодействия малым параметром, который будем обозначать через a, полагая, что $\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})$ пропорционально a.

Например, в модели полярона Фрелиха стандартный безразмерный параметр, характеризующий интенсивность электрон-фононного взаимодействия, в принятых нами обозначениях имеет вид

$$a = \frac{g^2}{4\pi\hbar\omega^2} \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}. \quad (3.1)$$

Внешнюю силу $\mathbf{E}$ мы также будем рассматривать как формально пропорциональную этому малому параметру.

Тогда в нулевом приближении, когда взаимодействиями полностью пренебрегают, можно записать

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}(t) - \frac{\mathbf{p}(t)}{m}(t - \tau). \quad (3.2)$$

При дальнейшем применении (2.20) мы будем пользоваться этим приближением только для членов, пропорциональных a.

В частности, мы введем (3.2) под знак шпура, воспользовавшись «нулевым приближением» следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{app}} &= \{ \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} e^{i\mathbf{kr}(\tau)} e^{-i\mathbf{kr}(t)} [f(\mathbf{p}(t) - \hbar\mathbf{k}) - f(\mathbf{p}(t))] \mathcal{D}_{t_0} \}_{\text{app}} = \\
&= \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} e^{i\mathbf{kr}_0(t,\tau)} e^{-i\mathbf{kr}(t)} [f(\mathbf{p}(t) - \hbar\mathbf{k}) - f(\mathbf{p}(t))] \mathcal{D}_{t_0}, \\
\mathcal{E}^*_{\text{app}} &= \{ \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} [f(\mathbf{p}(t) - \hbar\mathbf{k}) - f(\mathbf{p}(t))] e^{i\mathbf{kr}(t)} e^{-i\mathbf{kr}(\tau)} \mathcal{D}_{t_0} \}_{\text{app}} = \\
&= \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} [f(\mathbf{p}(t) - \hbar\mathbf{k}) - f(\mathbf{p}(t))] e^{i\mathbf{kr}(t)} e^{-i\mathbf{kr}_0(t,\tau)} \mathcal{D}_{t_0},
\end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\mathbf{r}_0(t,\tau) = \mathbf{r}(t) - \frac{\mathbf{p}(t)}{m}(t - \tau).$$

Следует отметить, что эти выражения умножаются на $\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})$ — величину, пропорциональную малому параметру.

Таким образом, мы вправе считать, что члены первого порядка по a в правой части (2.20) вычислены правильно. Это единственное приближение, которое нам нужно, а в дальнейшем нам необходимо лишь совершить предельные переходы $V \to \infty$, $t_0 \to -\infty$ и в заключение $\varepsilon \to 0$. Но сначала упростим выражения (3.3) для $\mathcal{E}_{\text{app}}$, $\mathcal{E}^*_{\text{app}}$.

С помощью коммутационных свойств компонент векторов $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ сразу находим

$$[\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t,\mathbf{r}), \mathbf{k}\mathbf{r}(t)] = \left[\mathbf{k}\left\{\mathbf{r}(t) - \frac{\mathbf{p}(t)}{m}(t-\tau)\right\}, \mathbf{k}\mathbf{r}(t)\right] = \frac{i\hbar\mathbf{k}^2}{m}(t-\tau).$$

Как хорошо известно, если коммутатор

$$[A, B]$$

является c-числом, то

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{[A,B]/2}\mathrm{e}^{A+B}.$$

Это позволяет нам записать

$$\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t,\tau)}\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} = \exp\left(\frac{i\hbar\mathbf{k}^2}{2m}(t-\tau)\right)\exp\left(-\frac{i\mathbf{k}\mathbf{p}(t)}{m}(t-\tau)\right),$$

что приводит к

$$\mathcal{E}_{\text{app}} = \exp\left(\frac{i\hbar\mathbf{k}^2}{2m}(t-\tau)\right) \times$$

$$\times \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \exp\left(-i(t-\tau)\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}(t)}{m}\right)[f(\mathbf{p}(t)-\hbar\mathbf{k}) - f(\mathbf{p}(t))]\mathcal{D}_{t_0}.$$

Вернемся к соотношению

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} F(\mathbf{p}(t)\mathcal{D}_{t_0}) = \int F(\mathbf{p})w_t(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}, \tag{1.21}$$

справедливому для произвольной функции импульса $F(\mathbf{p})$.

Выбрав

$$F(\mathbf{p}) = \exp\left(-i(t-\tau)\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{m}\right)[f(\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}) - f(\mathbf{p})],$$

получаем

$$\mathcal{E}_{\text{app}} = \int d\mathbf{p}\,\exp\left(i(t-\tau)\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{m}\right)\right)[f(\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}) - f(\mathbf{p})]w_t(\mathbf{p}) =$$

$$= \int d\mathbf{p}\,\exp\left(-i(t-\tau)\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{m}\right)\right)f(\mathbf{p})w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}) -$$

$$- \int d\mathbf{p}\,\exp\left(i(t-\tau)\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{m}\right)\right)f(\mathbf{p})w_t(\mathbf{p}). \tag{3.4}$$

Нетрудно увидеть, что $\mathcal{E}^*_{\text{app}}$ является величиной, комплексно-сопряженной величине $\mathcal{E}_{\text{app}}$. Следовательно,

$$\mathcal{E}^*_{\text{app}} = \int d\mathbf{p} \exp\left(i(t-\tau)\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{\mathbf{kp}}{m}\right)\right) f(\mathbf{p}) w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}) - \\ - \int d\mathbf{p} \exp\left(-i(t-\tau)\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} - \frac{\mathbf{kp}}{m}\right)\right) f(\mathbf{p}) w_t(\mathbf{p}). \quad (3.5)$$

Подставим теперь эти выражения в уравнение (2.20). Перейдем к пределу $V \to \infty$, который позволяет заменить суммы

$$\frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})} \dots$$

соответствующими интегралами

$$\frac{1}{(2\pi^3)} \int d\mathbf{k} \dots$$

В интегралах, содержащих $w_t(\mathbf{p})$, удобно произвести преобразование

$$\mathbf{k} \to -\mathbf{k}.$$

Кроме того, вместо τ введем новую временну́ю переменную

$$t - \tau = \xi,$$

так что

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \dots = \int_{0}^{t-t_0} d\xi.$$

В пределе

$$t_0 \to -\infty$$

эти интегралы принимают вид

$$\int_0^\infty d\xi \dots .$$

Таким образом, мы можем записать уравнение первого приближения в виде

$$\int d\mathbf{p}\, f(\mathbf{p}) \left\{ \frac{\partial w_t(\mathbf{p})}{\partial t} - \mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathbf{E}(t)\frac{\partial w_t(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right\} = \frac{\mathrm{e}^{2\varepsilon t}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}\, f(\mathbf{p}) \int d\mathbf{k} \frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}} A_\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{k}),$$

где

$$A_\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{k}) = \int_0^\infty d\xi\, \mathrm{e}^{-\varepsilon\xi}((1+N_{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{i\omega_{\mathbf{k}}\xi} + N_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}}\xi}) \times$$

$$\times \left\{ \exp\left(-i\xi\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{\mathbf{kp}}{m}\right)\right) w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}) - \exp\left(i\xi\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{\mathbf{kp}}{m}\right)\right) w_t(\mathbf{p}) \right\} +$$

$$+\int_0^\infty d\xi\, e^{-\varepsilon\xi}((1+N_{\mathbf{k}})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}\xi}+N_{\mathbf{k}}e^{i\omega_{\mathbf{k}}\xi})\times$$

$$\times\left\{\exp\left(i\xi\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m}+\frac{\mathbf{kp}}{m}\right)\right)w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})-\exp\left(-i\xi\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m}+\frac{\mathbf{kp}}{m}\right)\right)w_t(\mathbf{p})\right\}.$$

Так как $f(\mathbf{p})$ является произвольной функцией $\mathbf{p}$, имеем

$$\frac{\partial w_t(\mathbf{p})}{\partial t}-e^{\varepsilon t}\mathbf{E}(t)\frac{\partial w_t(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}=\frac{e^{2\varepsilon t}}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}A_\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{k}). \tag{3.6}$$

Перегруппировав члены в выражении $A_\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{k})$, находим

$$A_\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{k})=\{(1+N_{\mathbf{k}})w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})-N_{\mathbf{k}}w_t(\mathbf{p})\}\times$$

$$\times\left\{\int_0^\infty e^{-\varepsilon\xi}\exp\left(-i\xi\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m}+\frac{\mathbf{kp}}{m}-\omega_{\mathbf{k}}\right)\right)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty e^{-\varepsilon\xi}\exp\left(i\xi\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m}+\frac{\mathbf{kp}}{m}-\omega_{\mathbf{k}}\right)\right)d\xi\right\}+$$

$$+\{N_{\mathbf{k}}w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})-(1+N_{\mathbf{k}})w_t(\mathbf{p})\}\times$$

$$\times\left\{\int_0^\infty e^{-\varepsilon\xi}\exp\left(-i\xi\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m}+\frac{\mathbf{kp}}{m}+\omega_{\mathbf{k}}\right)\right)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty\exp\left(-i\varepsilon\xi+i\xi\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m}+\frac{\mathbf{kp}}{m}+\omega_{\mathbf{k}}\right)\right)d\xi\right\},$$

или

$$A_\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{k})=\frac{w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})-e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}w_t(\mathbf{p})}{1-e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}}\Delta_\varepsilon\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m}+\frac{\mathbf{kp}}{m}-\omega_{\mathbf{k}}\right)+$$

$$+\frac{w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}-w_t(\mathbf{p})}{1-e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}}\Delta_\varepsilon\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m}+\frac{\mathbf{kp}}{m}+\omega_{\mathbf{k}}\right),$$

где

$$\Delta_\varepsilon(z)=\int_{-\infty}^\infty e^{-\varepsilon|\xi|}e^{i\xi z}\,d\xi.$$

Отметим также, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Delta_\varepsilon\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m}+\frac{\mathbf{kp}}{m}\mp\omega_{\mathbf{k}}\right)=2\pi\delta\left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m}+\frac{\mathbf{kp}}{m}\mp\omega_{\mathbf{k}}\right)=$$

$$=2\pi\delta\left\{\frac{\frac{(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})^2}{2m}-\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\mp\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{\hbar}\right\}=2\pi\hbar\delta\left(\frac{(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})^2}{2m}-\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\mp\hbar\omega_{\mathbf{k}}\right).$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{k}) = \frac{2\pi\hbar}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}}}\{w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}) - \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}} w_t(\mathbf{p})\} \times$$
$$\times\,\delta\left(\frac{(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \hbar\omega_\mathbf{k}\right) + \frac{2\pi\hbar}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}}} \times$$
$$\times\,\{w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}} - w_t(\mathbf{p})\}\delta\left(\frac{(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})^2}{2m} + \hbar\omega_\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right).$$

Совершим последний шаг, положив $\varepsilon \to 0$ в уравнении (3.6). Тогда мы получаем искомое уравнение первого приближения в окончательном виде:

$$\frac{\partial w_t(\mathbf{p})}{\partial t} - \mathbf{E}(t)\frac{\partial w_t(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})}{2\omega_\mathbf{k}(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}})}\{w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}) - \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}} w_t(\mathbf{p})\} \times$$
$$\times\,\delta\left(\frac{(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \hbar\omega_\mathbf{k}\right) + \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})}{2\omega_\mathbf{k}(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}})} \times$$
$$\times\,\{w_t(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}} - w_t(\mathbf{p})\}\,\delta\left(\frac{(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \omega_\mathbf{k}\right). \quad (3.7)$$

Очевидно, что это уравнение есть не что иное, как обычное уравнение Больцмана. Интегральные члены в правой его части описывают соответственно однофононное излучение и поглощение. Такое уравнение Больцмана интенсивно изучалось при исследовании явлений переноса.

В стационарном случае, когда электрическое поле не зависит от времени, уравнение (3.7) переходит в следующее уравнение:

$$-\mathbf{E}\frac{\partial w(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})}{2\omega_\mathbf{k}(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}})} \times$$
$$\times\,\{w(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}) - \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}} w(\mathbf{p})\}\,\delta\left(\frac{(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \hbar\omega_\mathbf{k}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})}{2\omega_\mathbf{k}(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}})} \times$$
$$\times\,\{w(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_\mathbf{k}} - w(\mathbf{p})\}\,\delta\left(\frac{(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})^2}{2m} + \hbar\omega_\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right). \quad (3.8)$$

В случае низкой температуры, когда множителем

$$\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}$$

можно пренебречь, получающееся уравнение для модели полярона Фрелиха рассматривалось Девризом и Эвардом [1].

Они обнаружили очень сложное поведение функции распределения $w(\mathbf{p})$, предположив наличие существенной сингулярности, появляющейся при $E = 0$.

В заключение скажем несколько слов относительно одного чрезмерно упрощенного подхода к определению зависимости между приложенным электрическим полем и стационарной средней скоростью $\mathbf{v}$ электрона.

Умножим обе части уравнения (3.8) на $\mathbf{p}$ и проинтегрируем по всему пространству импульсов.

После некоторых тривиальных преобразований получим

$$-\mathbf{E}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})\hbar\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}})}\int d\mathbf{p}\,w(\mathbf{p})\,\delta\left(-\frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m}+\hbar\frac{\mathbf{kp}}{m}-\hbar\omega_{\mathbf{k}}\right)-$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})\hbar\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}(\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}-1)}\int d\mathbf{p}\,w(\mathbf{p})\,\delta\left(\frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m}+\hbar\frac{\mathbf{kp}}{m}-\hbar\omega_{\mathbf{k}}\right). \quad (3.9)$$

Здесь, согласно обозначению, принятому в разделе 1,

$$\mathbf{E}=-e_c\boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad (3.10)$$

где $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — внешнее электрическое поле.

Пока мы имеем дело с точным следствием уравнения Больцмана. Теперь сделаем грубое приближение, взяв в качестве пробной функции для $w(\mathbf{p})$ сдвинутое распределение Максвелла

$$w(\mathbf{p})=\rho_{\mathrm{M}}(\mathbf{p}-m\mathbf{v});\quad \rho_{\mathrm{M}}(\mathbf{p})=\left(\frac{\beta}{2m\pi}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\beta(p^2/2m)}$$

и подставив его в (3.9).

Это приводит к уравнению

$$e_c\boldsymbol{\mathcal{E}}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})\hbar\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}})}\times$$
$$\times\int d\mathbf{p}\,\rho_{\mathrm{M}}(\mathbf{p})\,\delta\left(-\frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m}+\frac{\hbar\mathbf{kp}}{m}-\hbar(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{kv})\right)-\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})\hbar\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}(\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}-1)}\times$$
$$\times\int d\mathbf{p}\,\rho_{\mathrm{M}}(\mathbf{p})\,\delta\left(\frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m}+\frac{\hbar\mathbf{kp}}{m}-\hbar(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{kv})\right). \quad (3.11)$$

Заметим, что

$$\delta\left(-\frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m}+\frac{\hbar\mathbf{kp}}{m}-\hbar(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{kv})\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\left[\frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m}-\frac{\hbar\mathbf{kp}}{m}+\hbar(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{kv})\right]\xi\right)d\xi,$$

$$\delta\left(\frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m}+\frac{\hbar\mathbf{kp}}{m}-\hbar(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{kv})\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\left[\frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m}+\frac{\hbar\mathbf{kp}}{m}-\hbar(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{kv})\right]\xi\right)d\xi$$

и

$$\int \rho_{\text{М}}(\mathbf{p}) \exp\left(-i\xi \frac{\hbar \mathbf{kp}}{m}\right) d\mathbf{p} = \exp\left(-\frac{(\hbar \mathbf{k})^2}{2m} \frac{\xi^2}{\beta}\right),$$

$$\int \rho_{\text{М}}(\mathbf{p}) \exp\left(i\xi \frac{\hbar \mathbf{kp}}{m}\right) d\mathbf{p} = \exp\left(-\frac{(\hbar \mathbf{k})^2}{2m} \frac{\xi^2}{\beta}\right).$$

Следовательно, из (3.11) получаем уравнение

$$e_c \boldsymbol{\mathcal{E}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k}) \hbar \mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \times$$

$$\times \left(\frac{e^{i\hbar(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{kv})\xi}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} - \frac{e^{-i\hbar(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{kv})\xi}}{e^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} - 1}\right) \exp\left(-\frac{(\hbar \mathbf{k})^2}{2m}\left(\frac{\xi^2}{\beta} - i\xi\right)\right) d\mathbf{k}. \quad (3.12)$$

Это приближенное уравнение было получено в статье Торнбера и Фейнмана [2] для случая малого взаимодействия[1]. Они обнаружили, что подвижность, выведенная из уравнения (3.12) в пределе слабой связи, не согласуется с подвижностью, полученной из стандартного подхода Больцмана.

Мы видим здесь, что это расхождение обусловлено неадекватной аппроксимацией, т. е. подстановкой сдвинутого распределения Максвелла в уравнение (3.9), которое само является точным следствием уравнения Больцмана.

Связь между формулой (3.12) и использованием в качестве пробной формы стационарной функции распределения сдвинутого распределения Максвелла была также отмечена Ж. Т. Девризом (частное сообщение).

§ 4. Формулировка линейной модели

Теперь мы хотим показать, что результаты статьи [2], а также предшествующей ей работы [3], содержащие расчет импеданса, могут быть получены непосредственно без привлечения метода интегрирования по траекториям.

Будем исходить из точного уравнения (2.20), в котором положим

$$f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}. \quad (4.1)$$

Обозначим средний импульс электрона через

$$\langle \mathbf{p} \rangle_t = \int \mathbf{p} w_t(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}.$$

[1] В принятой ими системе обозначений

$$\hbar = 1, \quad C_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \mathfrak{L}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{E} = e_c \boldsymbol{\mathcal{E}}$$

уравнение (3.12) имеет следующий вид:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sum_{(\mathbf{k})} |C_{\mathbf{k}}|^2 \mathbf{k} \left(\frac{e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{kv})\xi}}{1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{k}}}} - \frac{e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{kv})\xi}}{e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - 1}\right) \exp\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m}\left(\frac{\xi^2}{\beta} - i\xi\right)\right),$$

который совпадает с формулой (17) упомянутой статьи.

Воспользуемся также обозначением

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau)}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}\mathcal{D}_{t_0} = \Phi_{\mathbf{k}}(t,\tau,t_0). \tag{4.2}$$

Имеем

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau)}\mathcal{D}_{t_0} = \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} \{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau)}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}\}^{+}\mathcal{D}_{t_0} = \Phi^{*}_{\mathbf{k}}(t,\tau,t_0).$$

Тогда (2.20) с учетом (4.1) приводит к выражению

$$-\left\{\frac{d\langle\mathbf{p}\rangle_t}{dt} + e^{\varepsilon t}\mathbf{E}(t)\right\} = \frac{1}{V}e^{2\varepsilon t}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}(1-e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}})}\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t} d\tau\{e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)} + e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\}e^{-\varepsilon(t-\tau)}\Phi_{\mathbf{k}}(t,\tau,t_0) +$$

$$+\frac{1}{V}e^{2\varepsilon t}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{\mathfrak{L}^2(\mathbf{k})\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}(1-e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}})}\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-\varepsilon(t-\tau)}\{e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)} + e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)}e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}\}\Phi^{*}_{\mathbf{k}}(t,\tau,t_0). \tag{4.3}$$

Это уравнение еще является точным. Однако ясно, что для того, чтобы получить явные, пусть и приближенные, выражения для $\Phi_{\mathbf{k}}$, нам необходимо ориентироваться на некий подходящий модельный гамильтониан, который позволит прийти к точно решаемым уравнениям. Разумный подход должен быть основан на таком модельном гамильтониане, для которого эволюция $\mathbf{r}(t)$ в какой-то мере моделирует эволюцию $\mathbf{r}(t)$, соответствующую точному гамильтониану (1.1).

Рассмотрим сначала случай отсутствия внешнего поля

$$\mathbf{E} = 0 \tag{4.4}$$

и сосредоточим свое внимание на гамильтониане

$$H_L = \frac{p^2}{2m} + \frac{c^2r^2}{2} + \sum_{(\mathbf{k})}\hbar\nu(\mathbf{k})b^{+}_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}} +$$

$$+\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2}\text{Л}(\mathbf{k})(\mathbf{k}\mathbf{r})(b_{\mathbf{k}} + b^{+}_{-\mathbf{k}}), \tag{4.5}$$

где $\text{Л}(\mathbf{k})$ — сферически-симметричные функции от $\mathbf{k}$, функции $\nu(\mathbf{k})$ также сферически-симметричны, а кроме того, существенно положительны:

$$\nu(\mathbf{k}) > 0.$$

До совершения предельного перехода $V\to\infty$, когда V еще конечно, число $\mathfrak{N}_V$ членов в суммах по $(\mathbf{k})$ также предполагается конечным.

Тогда соответствующие уравнения Гейзенберга

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{p}(t)}{m},\\
&\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -c^2\mathbf{r}(t) - \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})\mathbf{k}(b_{\mathbf{k}}(t) + b^+_{-\mathbf{k}}(t)),\\
&\frac{db_{\mathbf{k}}(t)}{dt} = -i\nu(\mathbf{k})b_{\mathbf{k}}(t) - \frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{1}{2\hbar\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})(\mathbf{kr}(t)),\\
&\frac{db^+_{-\mathbf{k}}(t)}{dt} = i\nu(\mathbf{k})b^+_{-\mathbf{k}}(t) + \frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{1}{2\hbar\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})(\mathbf{kr}(t)),\\
&\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}, \quad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}, \quad b_{\mathbf{k}}(t_0) = b_{\mathbf{k}}, \quad b^+_{-\mathbf{k}}(t_0) = b^+_{-\mathbf{k}},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

образуют конечную линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая может быть точно решена.

Покажем теперь, что при соответствующем выборе постоянной c^2 гамильтониан (4.5) становится трансляционно-инвариантным.

Начнем с тождества

$$\begin{aligned}
\sum_{(k)} h\nu(\mathbf{k})&\left\{b^+_{\mathbf{k}} + \frac{1}{\sqrt{V}}\, i(\mathbf{kr})\frac{Л(\mathbf{k})}{\nu(\mathbf{k})\sqrt{2\hbar\nu(\mathbf{k})}}\right\}\times\\
&\times\left\{b_{\mathbf{k}} - \frac{1}{\sqrt{V}}\, i(\mathbf{kr})\frac{Л(\mathbf{k})}{\nu(\mathbf{k})\sqrt{2\hbar\nu(\mathbf{k})}}\right\} =\\
&= \sum_{(\mathbf{k})}\hbar\nu(\mathbf{k})b^+_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})(\mathbf{kr})b_{\mathbf{k}} -\\
&\quad - \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})(\mathbf{kr})b^+_{\mathbf{k}} + \frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})}{2\nu^2(\mathbf{k})}(\mathbf{kr})^2
\end{aligned}$$

и отметим, что вследствие сферической симметрии $Л(\mathbf{k})$, $\nu(\mathbf{k})$ имеем

$$\frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})}{\nu^2(\mathbf{k})}(\mathbf{kr})^2 = r^2\frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})}{3\nu^2(\mathbf{k})}\mathbf{k}^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
H_L = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + &\left(c^2 - \frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})}{3\nu^2(\mathbf{k})}\mathbf{k}^2\right)\frac{\mathbf{r}^2}{2} +\\
&+ \sum_{(\mathbf{k})}\hbar\nu(\mathbf{k})\left\{b^+_{\mathbf{k}} + \frac{1}{\sqrt{V}}(\mathbf{kr})\frac{Л(\mathbf{k})}{\nu(\mathbf{k})\sqrt{2\hbar\nu(\mathbf{k})}}\right\}\left\{b_{\mathbf{k}} - \frac{i}{\sqrt{V}}(\mathbf{kr})\frac{Л(\mathbf{k})}{\nu(\mathbf{k})\sqrt{2\hbar\nu(\mathbf{k})}}\right\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, если положить

$$c^2 = \frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})} \frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}^2}{3\nu^2(\mathbf{k})}, \tag{4.7}$$

то H_L становится инвариантным относительно группы трансляций

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{R}, \quad b_{\mathbf{k}} \to b_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\sqrt{V}}(\mathbf{kR})\frac{Л(\mathbf{k})}{\nu(\mathbf{k})(2\hbar(\mathbf{k}))^{1/2}}. \tag{4.8}$$

Такая инвариантность должна приводить к существованию сохраняющегося вектора $\boldsymbol{\mathcal{P}}$:

$$\frac{d\boldsymbol{\mathcal{P}}}{dt} = 0, \tag{4.9}$$

который можно интерпретировать как своего рода «полный импульс». Для вывода выражения для $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ заметим, что из (4.6) следует

$$\frac{d(b_{\mathbf{k}}(t) - b^+_{-\mathbf{k}}(t))}{dt} = -i\nu(\mathbf{k})(b_{\mathbf{k}}(t) + b^+_{-\mathbf{k}}(t)) - \frac{2}{\sqrt{V}}\left(\frac{1}{2\hbar\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})(\mathbf{kr}(t)),$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})} Л(\mathbf{k})\left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2}\frac{b_{\mathbf{k}}(t) - b^+_{-\mathbf{k}}(t)}{\nu(\mathbf{k})}\mathbf{k} =$$

$$= -i\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\left(\frac{1}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})\mathbf{k}\{b_{\mathbf{k}}(t) + b^+_{-\mathbf{k}}(t)\} -$$

$$- \frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})}{\nu^2(\mathbf{k})}(\mathbf{kr}(t))\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + c^2\mathbf{r}(t) - \frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})}{\nu^2(\mathbf{k})}(\mathbf{kr}(t))\mathbf{k}.$$

Но, согласно (4.7), имеем

$$\frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})}{\nu^2(\mathbf{k})}(\mathbf{kr}(t))\mathbf{k} = \mathbf{r}(t)\frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}^2}{3\nu^2(\mathbf{k})} = c^2\mathbf{r}(t).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left\{\mathbf{p}(t) - \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{\mathbf{k}Л(\mathbf{k})}{\nu(\mathbf{k})}\left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2}(b_{\mathbf{k}}(t) - b^+_{-\mathbf{k}}(t))\right\} = 0,$$

откуда следует, что искомый сохраняющийся вектор имеет вид

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \mathbf{p} - \frac{1}{\sqrt{V}}\sum\frac{\mathbf{k}Л(\mathbf{k})}{\nu(\mathbf{k})}\left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2}(b_{\mathbf{k}} - b^+_{-\mathbf{k}}). \tag{4.10}$$

Введем теперь внешнее поле, заменив гамильтониан H_L на

$$\widetilde{H}_L = H_L + \mathbf{E}(t)\mathbf{r}. \tag{4.11}$$

Поскольку H_L коммутирует с $\mathcal{P}$, а также в силу соотношений

$$[\mathcal{P}_\beta, r_\gamma] = [p_\beta, r_\gamma] = -i\hbar\delta_{\beta\gamma}, \quad \beta, \gamma = 1, 2, 3,$$

видим, что теперь

$$\frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} = -\mathbf{E}(t). \tag{4.12}$$

Можем заметить, что для гамильтониана (1.1) при условии (4.4) группа трансляций принимает вид

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r} + R, \quad b_{\mathbf{k}} \to b_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kR}}. \tag{4.13}$$

При этом полный импульс определяется в виде

$$\mathcal{P} = \mathbf{p} + \sum_{(\mathbf{k})} \hbar\mathbf{k} b^+_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}. \tag{4.14}$$

Когда включено внешнее поле, вектор $\mathcal{P}$ также удовлетворяет уравнению (4.12).

Рассмотрим гамильтониан (4.11) и соответствующие уравнения Гейзенберга

$$\begin{aligned}
&m^* \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{p}(t),\\
&\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -c^2\mathbf{r}(t) - \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{(\mathbf{k})} \left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})\mathbf{k}(b_{\mathbf{k}}(t) + b^+_{-\mathbf{k}}(t)) - \mathbf{E}(t),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{db_{\mathbf{k}}(t)}{dt} = -i\nu(\mathbf{k}) b_{\mathbf{k}}(t) - \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{1}{2\hbar\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})(\mathbf{kr}(t)),\\
&\frac{db^+_{-\mathbf{k}}(t)}{dt} = i\nu(\mathbf{k}) b^+_{-\mathbf{k}}(t) + \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{1}{2\hbar\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})(\mathbf{kr}(t)),
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}, \quad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}, \quad b_{\mathbf{k}}(t_0) = b_{\mathbf{k}}, \quad b^+_{-\mathbf{k}}(t_0) = b^+_{-\mathbf{k}},$$

откуда следует

$$b_{\mathbf{k}}(t) = b_{\mathbf{k}} e^{-i\nu(\mathbf{k})(t-t_0)} - \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{1}{2\hbar\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k}) \int_{t_0}^{t} e^{-i\nu(\mathbf{k})(t-\tau)} (\mathbf{kr}(\tau))\, d\tau,$$

$$b^+_{-\mathbf{k}}(t) = b^+_{-\mathbf{k}} e^{i\nu(\mathbf{k})(t-t_0)} + \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{1}{2\hbar\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k}) \int_{t_0}^{t} e^{i\nu(\mathbf{k})(t-\tau)} (\mathbf{kr}(\tau))\, d\tau.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (4.15) приводит к уравнению

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + c^2\mathbf{r}(t) + i\frac{1}{V} \sum_{(\mathbf{k})} \frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}}{2\nu\mathbf{k}} \int_{t_0}^{t} d\tau\, (\mathbf{kr}(\tau)) \{e^{i\nu(\mathbf{k})(t-\tau)} - e^{-i\nu(\mathbf{k})(t-\tau)}\} =\\
&\quad = -\frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{(\mathbf{k})} \left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})\mathbf{k}(b_{\mathbf{k}} e^{-i\nu(\mathbf{k})(t-t_0)} + b^+_{-\mathbf{k}} e^{i\nu(\mathbf{k})(t-t_0)}) - \mathbf{E}(t).
\end{aligned}$$

Проведем интегрирование по частям:

$$i\int_{t_0}^{t} d\tau\,(\mathbf{kr}(\tau))\{e^{i\nu(\mathbf{k})(t-\tau)} - e^{-i\nu(\mathbf{k})(t-\tau)}\} =$$

$$= -\frac{1}{\nu(\mathbf{k})}\int_{t_0}^{t}(\mathbf{kr}(\tau))\frac{d}{d\tau}\{e^{i\nu(\mathbf{k})(t-\tau)} + e^{-i\nu(\mathbf{k})(t-\tau)}\}\,d\tau =$$

$$= -2\frac{(\mathbf{kr}(t))}{\nu(\mathbf{k})} + 2\frac{(\mathbf{kr})}{\nu(\mathbf{k})}\cos\nu(\mathbf{k})(t-t_0) + \frac{2}{\nu(\mathbf{k})}\int_{t_0}^{t} d\tau\left(\mathbf{k}\frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau}\right)\cos\nu(\mathbf{k})(t-\tau),$$

и напомним, что

$$-\frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}}{\nu^2(\mathbf{k})}(\mathbf{kr}(t)) = -\frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}^2}{3\nu^2(\mathbf{k})}\mathbf{r}(t) = -c^2\mathbf{r}(t),$$

$$\frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}}{\nu^2(\mathbf{k})}\left(\mathbf{k}\frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau}\right)\cos\nu(\mathbf{k})(t-\tau) =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}^2}{3\nu^2(\mathbf{k})}\cos\nu(\mathbf{k})(t-\tau)\frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau}.$$

Тогда получим

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + \frac{1}{m^*}\int_{t_0}^{t} d\tau\,K(t-\tau)\mathbf{p}(\tau) = -\mathbf{r}K(t-t_0) - \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2}\times$$

$$\times Л(\mathbf{k})\mathbf{k}(b_{\mathbf{k}}e^{-i\nu(\mathbf{k})(t-t_0)} + b^{+}_{-\mathbf{k}}e^{i\nu(\mathbf{k})(t-t_0)}) - \mathbf{E}(t), \quad (4.17)$$

где

$$K(t-\tau) = \frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}^2}{3\nu^2(\mathbf{k})}\cos\nu(\mathbf{k})(t-\tau). \quad (4.18)$$

Рассмотрим усреднение этого уравнения по начальному статистическому оператору

$$\mathcal{D}_{t_0} = \rho(S)\mathcal{D}(\Sigma) \quad (4.19)$$

и введем обозначения

$$m^*\langle\mathbf{v}(t)\rangle = \langle p(t)\rangle = \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\mathbf{p}(t)\mathcal{D}_{t_0},$$

$$\langle\mathbf{r}\rangle = \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}\mathbf{r}\mathcal{D}_{t_0} = \operatorname*{Sp}_{(S)}\mathbf{r}\rho(S).$$

Так как

$$\langle b_{\mathbf{k}}\rangle = 0, \quad \langle b^{+}_{-\mathbf{k}}\rangle = 0,$$

уравнение (4.17) может быть приведено к виду

$$m^*\frac{d\langle \mathbf{v}(t)\rangle}{dt}+\int\limits_{t_0}^{t} d\tau\,\langle \mathbf{v}(\tau)\rangle K(t-\tau)=-\langle \mathbf{r}\rangle K(t-\tau)-\mathbf{E}(t). \tag{4.20}$$

Здесь $\langle \mathbf{v}(t)\rangle$ — усредненная скорость частицы.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\mathbf{E}(t)$ является периодической функцией t, умноженной на множитель $e^{\varepsilon t}$ ($\varepsilon>0$), соответствующий обращению в нуль внешнего электрического поля при $t\to-\infty$, и рассмотрим стационарное решение уравнения (4.20), т. е. решение в виде произведения множителя $e^{\varepsilon t}$ и периодической функции. Поскольку (4.20) является линейным уравнением, мы можем ограничиться простейшим выражением

$$\mathbf{E}(t)=\mathbf{E}_\omega e^{(-i\omega+\varepsilon)t}. \tag{4.21}$$

Действительно, если $\mathbf{E}(t)$ представляет собой сумму подобных членов с различными ω, то результирующее стационарное решение уравнения (4.20) будет суммой решений типа (4.21).

Итак, рассмотрим уравнение

$$m^*\frac{d\langle \mathbf{v}(t)\rangle}{dt}+\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau\langle \mathbf{v}(\tau)\rangle K(t-\tau)=-\mathbf{E}_\omega e^{(-i\omega+\varepsilon)t}.$$

Подставив сюда

$$\langle \mathbf{v}(t)\rangle=\mathbf{v}_\omega e^{(-i\omega+\varepsilon)t},$$

получим

$$\left\{m^*(-i\omega+\varepsilon)+\int\limits_0^\infty K(t)e^{(i\omega-\varepsilon)t}\,dt\right\}\mathbf{v}_\omega=-\mathbf{E}_\omega.$$

Определение (4.18) приводит к соотношению

$$\int\limits_0^\infty K(t)e^{(i\omega-\varepsilon)t}\,dt=\frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}^2}{6\nu^2(\mathbf{k})}\left\{\frac{1}{\varepsilon-i(\omega+\nu(\mathbf{k}))}+\frac{1}{\varepsilon-i(\omega-\nu(\mathbf{k}))}\right\}.$$

Введем обозначение

$$\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}^2}{6\nu^2(\mathbf{k})}\{\delta(\nu(\mathbf{k})-\Omega)+\delta(\nu(\mathbf{k})+\Omega)\}=I(\Omega). \tag{4.22}$$

Тогда

$$I(-\Omega)=I(\Omega);\quad I(\Omega)\geqslant 0,$$

$$\int\limits_0^\infty K(t)e^{(i\omega-\varepsilon)t}\,dt=i\int\limits_{-\infty}^{\infty}I(\Omega)\frac{d\Omega}{\omega+i\varepsilon-\Omega}. \tag{4.23}$$

Следовательно,

$$\left\{m^*(-i\omega+\varepsilon)+i\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(\Omega)\frac{d\Omega}{\omega+i\varepsilon-\Omega}\right\}\langle\mathbf{v}(t)\rangle=-\mathbf{E}_\omega e^{(-i\omega+\varepsilon)t}.$$

Однако, согласно (3.10),

$$\mathbf{E}_\omega=-e_c\boldsymbol{\mathcal{E}}_\omega$$

и, согласно определению тока,

$$\mathbf{j}_\omega(t)=-e_c\langle\mathbf{v}(t)\rangle.$$

Отсюда

$$\left\{m^*(-i\omega+\varepsilon)+i\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(\Omega)\frac{d\Omega}{\omega+i\varepsilon-\Omega}\right\}\mathbf{j}_\omega(t)=e_c^2\boldsymbol{\mathcal{E}}_\omega e^{(-i\omega+\varepsilon)t}. \tag{4.24}$$

Осуществим теперь предельный переход $V\to\infty$, полагая, что для любых вещественных ω и положительных ε

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(\Omega)\frac{d\Omega}{\omega+i\varepsilon-\Omega}\xrightarrow[V\to\infty]{}\int\limits_{-\infty}^{\infty} J(\Omega)\frac{d\Omega}{\omega+i\varepsilon-\Omega}. \tag{4.25}$$

После этого предельного перехода положим в уравнении (4.24) $\varepsilon\to 0$. Тогда получаем

$$\mathbf{j}_\omega(t)=\frac{1}{Z_+(\omega)}e_c\boldsymbol{\mathcal{E}}_\omega e^{-i\omega t},$$

где

$$Z_+(\omega)=-m^*i\omega+i\int\limits_{-\infty}^{\infty} J(\Omega)\frac{d\Omega}{\omega-\Omega+i0}. \tag{4.26}$$

Положив заряд электрона e_c равным единице, видим, что выражение (4.26) точно представляет собой импеданс, соответствующий частоте $-\omega$.

Ниже мы убедимся в том, что благодаря предельным переходам все необходимые нам выражения, включая (4.2), зависят только от функции $J(\Omega)$, но не от частного выбора $\nu(\mathbf{k})$, $Л(\mathbf{k})$.

Поэтому сначала мы должны найти подходящее выражение для $J(\Omega)$. Выберем $J(\Omega)$ следующим образом:

1) $J(\Omega)$ является аналитической функцией комплексной переменной, регулярной в полосе
$|Im\Omega|\leqslant\eta_0$;
2) $J(\Omega)=J(-\Omega)$; (4.27a)
3) $|J(\Omega)|\leqslant\dfrac{C}{|\Omega|^2}$ для $|\Omega|>\omega_0$; ω_0, $C=\text{const}$;
4) для вещественных Ω $J(\Omega)>0$.

Затем выберем выражения для $Л(\mathbf{k})$, $\nu(\mathbf{k})$ в такой форме, чтобы[1] было $\nu(\mathbf{k}) > 0$:

$$\frac{1}{V}\sum_{\nu(\mathbf{k})\geqslant\omega}\frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}^2}{6\nu^2(\mathbf{k})}\leqslant\frac{C_1}{\omega},\quad C_1=\text{const, не зависящая от } V, \tag{4.27б}$$

$$\frac{1}{V}\sum_{\nu(\mathbf{k})<\omega}\frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}^2}{6\nu^2(\mathbf{k})}\to\int\limits_0^\infty J(\Omega)\,d\Omega,\quad 0<\omega<\infty. \tag{4.27в}$$

В данном случае ясно, что соотношение (4.25) справедливо при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ и что здесь сходимость однородна относительно ω $(-\infty < \omega < \infty)$.

Введем функцию комплексного переменного w:

$$\Delta(w) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} J(\Omega)\frac{d\Omega}{w-\Omega}. \tag{4.28}$$

Видно, что она регулярна при

$$|\operatorname{Im} w| > 0.$$

В силу свойств (4.27) нетрудно убедиться в том, что

$$\Delta(w) = \lim_{V\to\infty} i\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(\Omega)\frac{d\Omega}{w-\Omega},\quad \operatorname{Im} w\neq 0. \tag{4.29}$$

Здесь ввиду (4.22)

$$i\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(\Omega)\frac{d\Omega}{w-\Omega} = i\sum_{(\mathbf{k})}\frac{Л^2(\mathbf{k})\mathbf{k}^2}{6\nu^2(\mathbf{k})}\left(\frac{1}{w-\nu(\mathbf{k})}+\frac{1}{w+\nu(\mathbf{k})}\right).$$

Отсюда следует, что эта функция аналитична во всей комплексной плоскости. Единственными ее особенностями являются полюсы на вещественной оси:

$$w = \pm\nu(\mathbf{k}).$$

Предельная функция, однако, имеет разрез по всей вещественной оси:

$$\Delta(\omega + i0) - \Delta(\omega - i0) = 2\pi J(\omega) > 0.$$

---

[1] Одним из путей получения подобных выражений для $Л(\mathbf{k})$, $\nu(\mathbf{k})$ может быть следующий. Возьмем

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi n_1}{L}, \frac{2\pi n_2}{L}, \frac{2\pi n_3}{L}\right),\quad L^3 = V,$$

где n_1, n_2, n_3 — целые числа, как положительные, так и отрицательные, удовлетворяющие условию

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \neq 0,$$

которое исключает нулевое значение $\mathbf{k}$ из суммы по $(\mathbf{k})$.

Далее положим

$$\nu(\mathbf{k}) = s|\mathbf{k}|,\quad Л^2(\mathbf{k}) = 2\pi^2\frac{s^3}{|\mathbf{k}|^2}J(s|\mathbf{k}|),$$

где s — положительная постоянная, не зависящая от V.

Таким образом, мы имеем две аналитические функции:

$$\Delta_+(w) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} J(\Omega)\frac{d\Omega}{w-\Omega} \quad \text{для } \operatorname{Im} w > 0,$$
$$\Delta_-(w) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} J(\Omega)\frac{d\Omega}{w-\Omega} \quad \text{для } \operatorname{Im} \leqslant 0. \tag{4.30}$$

С учетом условия 4 из (4.27а) эти функции связаны друг с другом простым соотношением

$$\Delta_-(w) = -\Delta_+(-w) \quad \text{для} \quad \operatorname{Im} w < 0. \tag{4.31}$$

Поэтому нам достаточно исследовать лишь одну из них, например $\Delta_+(w)$. Введем обозначения

$$\operatorname{Re} w = \omega, \quad \operatorname{Im} w = y > 0. \tag{4.32}$$

Далее, для любой фиксированной $\omega_1 > 0$

$$\Delta_+(\omega+iy) = i\int\limits_{|\Omega-\omega|>\omega_1} J(\Omega)\frac{d\Omega}{\omega+iy-\Omega} + i\int\limits_{\omega-\omega_1}^{\omega+\omega_1} J(\Omega)\frac{\omega-\Omega-iy}{(\omega-\Omega)^2+y^2}\,d\Omega.$$

Но

$$\int\limits_{\omega-\omega_1}^{\omega+\omega_1}\frac{\omega-\Omega}{(\omega-\Omega)^2+y^2}\,d\Omega = -\int\limits_{-\omega_1}^{\omega_1}\frac{\Omega}{\Omega^2+y^2}\,d\Omega = 0$$

и, следовательно,

$$\Delta_+(\omega+iy) = i\int\limits_{|\Omega-\omega|>\omega_1} J(\Omega)\frac{d\Omega}{\omega+iy-\Omega} +$$
$$+ i\int\limits_{\omega-\omega_1}^{\omega+\omega_1}\frac{J(\Omega)-J(\omega)}{(\omega-\Omega)^2+y^2}(\omega-\Omega)\,d\Omega + \int\limits_{\omega-\omega_1}^{\omega+\omega_1} J(\Omega)\frac{y}{(\omega-\Omega)^2+y^2}\,d\Omega. \tag{4.33}$$

Отсюда получаем

$$\Delta_+(\omega) = \lim_{y\to 0}\Delta_+(\omega+iy) = i\int\limits_{|\Omega-\omega|>\omega_1} J(\Omega)\frac{d\Omega}{\omega-\Omega} +$$
$$+ i\int\limits_{\omega-\omega_1}^{\omega+\omega_1}\frac{J(\Omega)-J(\omega)}{\omega-\Omega}d\Omega + \pi J(\omega). \tag{4.34}$$

Таким образом, $\Delta_+(\omega)$ является аналитической функцией также и на вещественной оси. С помощью (4.33) нетрудно показать, что

$$|\Delta_+(w)| \leqslant \frac{\text{const}}{|w|}, \quad |w| \to \infty. \tag{4.35}$$

Далее мы имеем

$$\Delta_+(\omega) = \Delta_-(\omega) + 2\pi J(\omega) = -\Delta_+(-\omega) + 2\pi J(\omega).$$

С учетом условия (1) из (4.27а) функция

$$-\Delta_+(-w) + 2\pi J(w)$$

аналитична при

$$0 > \operatorname{Im} w \geqslant -\eta_0. \tag{4.36}$$

Поскольку на вещественной оси она совпадает с $\Delta_+(w)$, видим, что функция $\Delta_+(w)$, ранее определенная для $\operatorname{Im} w > 0$, может быть аналитически продолжена в область (4.36).

Итак, мы можем написать

$$\Delta_+(w) = -\Delta_+(-w) + 2\pi J(w) \tag{4.37}$$

для $0 \geqslant \operatorname{Im} w \geqslant -\eta_0$.

Можно также установить, что неравенство (4.35) справедливо везде при

$$\operatorname{Im} w \geqslant -\eta_0. \tag{4.38}$$

Рассмотрим теперь импеданс

$$Z_+(w) = -im_w^* + \Delta_+(w)$$

в области (4.38) и заметим, что в верхней полуплоскости и на вещественной оси эта функция не имеет нулей, поскольку вследствие (4.33)

$$\operatorname{Re} Z_+(w) > 0 \quad \text{для} \quad \operatorname{Im} w \geqslant 0.$$

Следовательно, нули этой функции в рассматриваемой области (4.38), если они вообще существуют, все должны располагаться в области (4.36). Но

$$\Delta_+(w) \to 0, \quad |w| \to \infty,$$

в связи с чем нули функции $Z_+(w)$ могут оказаться только в ограниченной области

$$|\operatorname{Re} w| \leqslant \text{const}, \quad 0 > \operatorname{Im} w \geqslant -\eta_0. \tag{4.39}$$

Как хорошо известно, всякая аналитическая функция может иметь лишь конечное число нулей в такой ограниченной области. Если в области (4.39) нули действительно имеются, то надо взять $\eta > 0$, такое, чтобы $-\eta$ было больше, чем мнимая часть всех этих нулевых точек. Если же область (4.39) вообще не содержит нулей функции $Z_+(w)$, то положим $\eta = \eta_0$. В любом случае мы видим, что, выбрав соответствующее значение $\eta > 0$, можем добиться ситуации, при которой область

$$\operatorname{Im} w \geqslant -\eta \tag{4.40}$$

не содержала бы никаких нулей импеданса $Z_+(w)$.

Следовательно, функция восприимчивости

$$\frac{1}{Z_+(w)}$$

является регулярной аналитической функцией в области (4.40).

Ее поведение на бесконечности определяется соотношением

$$\frac{1}{Z_+(w)} = \frac{1}{-m^*iw + \Delta_+(w)} = -\frac{1}{m^*iw} + \frac{\Delta_+}{m^*iw(-m^*iw + \Delta_+(w))} = \\ = -\frac{1}{m^*iw} + O\left(\frac{1}{w^3}\right), \quad |w| \to \infty. \quad (4.41)$$

Приведем в заключение один пример. Возьмем

$$\Delta_+(w) = i\frac{\mathbf{k}_0^2}{2}\left\{\frac{1}{w - \nu_0 + i\gamma} + \frac{1}{w + \nu_0 + i\gamma}\right\}, \quad \gamma > 0, \quad \operatorname{Im} w > -\gamma,$$
$$\Delta_-(w) = -\Delta_+(-w) = i\frac{\mathbf{k}_0^2}{2}\left\{\frac{1}{w + \nu_0 - i\gamma} + \frac{1}{w - \nu_0 - i\gamma}\right\}, \quad \operatorname{Im} w < \gamma. \quad (4.42)$$

Тогда

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi}\{\Delta_+(\omega) - \Delta_-(\omega)\} = \frac{\mathbf{k}_0^2}{2}\left\{\frac{\gamma}{(\omega - \nu_0)^2 + \gamma^2} + \frac{\gamma}{(\omega + \nu_0)^2 + \gamma^2}\right\}. \quad (4.42a)$$

В этом примере выполнены все наши условия. Такую же ситуацию можно получить и в случае, когда вместо одного члена (4.42) рассматривается конечная сумма подобных выражений.

После вышеприведенного довольно затянувшегося обсуждения аналитичности импеданса и восприимчивости вернемся к фундаментальному уравнению (4.17), в котором положим

$$\mathbf{E}(t) = \sum_{(\omega)} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}. \quad (4.43)$$

Попытаемся решить его методом преобразования Лапласа. При этом обе части (4.17) умножаются на

$$e^{iwt}, \quad w = \Omega + i\delta \quad (4.44)$$

и интегрируются по t:

$$\int_{t_0}^{\infty} dt\, e^{iwt}\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + \frac{1}{m^*}\int_{t_0}^{\infty} dt\, e^{iwt}\int_{t_0}^{t} d\tau\, K(t-\tau)\mathbf{p}(\tau) = \\ = -\mathbf{r}\int_{t_0}^{\infty} dt\, e^{iwt}\, K(t - t_0) - \sum_{(\omega)}\mathbf{E}_\omega\int_{t_0}^{\infty} e^{i(w-\omega)t}\, dt - \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} \times \\ \times \text{Л}(\mathbf{k})\mathbf{k}\left\{b_{\mathbf{k}}\int_{t_0}^{\infty} dt\, e^{i(w-\nu(\mathbf{k}))t}e^{i\nu(\mathbf{k})t_0} + b_{-\mathbf{k}}^{+}\int_{t_0}^{\infty} dt\, e^{i(w+\nu(\mathbf{k}))t}e^{-i\nu(\mathbf{k})t_0}\right\}. \quad (4.45)$$

Но

$$\int_{t_0}^{\infty} dt\, e^{iwt}\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\mathbf{p}e^{iwt_0} - iw\int_{t_0}^{\infty} dt\, e^{iwt}\mathbf{p}(t),$$

$$\int_{t_0}^{\infty} dt\, e^{iwt} \int_{t_0}^{t} d\tau\, K(t-\tau)\mathbf{p}(\tau) = \int_{0}^{\infty} K(t)e^{iwt}\, dt \int_{t_0}^{\infty} e^{iwt}\mathbf{p}(t)\, dt,$$

следовательно,

$$\frac{1}{m^*}\left\{-im^*w + \int_0^\infty K(t)e^{iwt}\, dt\right\} \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{p}(t)e^{iwt}\, dt =$$

$$= \mathbf{p}e^{iwt_0} - \mathbf{r}e^{iwt_0} \int_0^\infty K(t)e^{iwt}\, dt + \sum_{(\omega)} \mathbf{E}_\omega \frac{e^{i(w-\omega)t_0}}{i(w-\omega)} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{(\mathbf{k})} \left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} Л(\mathbf{k})\mathbf{k} \left\{\frac{b_{\mathbf{k}}e^{iwt_0}}{w-\nu(\mathbf{k})} + \frac{b^+_{-\mathbf{k}}e^{iwt_0}}{w+\nu(\mathbf{k})}\right\}.$$

Здесь вследствие (4.23)

$$\int_0^\infty K(t)e^{iwt}\, dt = i \int_{-\infty}^{\infty} I(\nu)\frac{d\nu}{w-\nu}.$$

Введем обозначения

$$-im^*w + i\int_{-\infty}^{\infty} I(\nu)\frac{d\nu}{w-\nu} = Z^{(V)}(w),$$

$$i\int_{-\infty}^{\infty} I(\nu)\frac{d\nu}{w-\nu} = \Delta^{(V)}(w). \tag{4.46}$$

В результате получим

$$\int_{t_0}^{\infty} \mathbf{p}(t)e^{iwt}\, dt = \frac{m^*\mathbf{p}e^{iwt_0}}{Z^{(V)}(w)} - m^*\mathbf{r}\frac{\Delta^{(V)}(w)}{Z^{(V)}(w)}\, e^{iwt_0} - i\sum_{(\omega)} m^*\mathbf{E}_\omega \frac{e^{iwt_0}e^{-i\omega t_0}}{(w-\omega)Z^{(V)}(w)} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{(\mathbf{k})} m^* \left(\frac{\hbar}{2\nu(\mathbf{k})}\right)^{1/2} \frac{Л(\mathbf{k})\mathbf{k}e^{iwt_0}}{Z^{(V)}(w)} \left\{\frac{b_{\mathbf{k}}}{w-\nu(\mathbf{k})} + \frac{b^+_{\mathbf{k}}}{w+\nu(\mathbf{k})}\right\}. \tag{4.47}$$

Но, как хорошо известно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\delta-i\Omega)t} \left\{\int_{t_0}^{\infty} f(t)e^{(i\Omega-\delta)t}\, dt\right\} d\Omega,$$

$$t > t_0.$$

Поэтому, введя следующие обозначения:

$$\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(\delta-i\Omega)(t-t_0)}}{(\Omega+i\delta-\nu)Z^{(V)}(\Omega+i\delta)}\,d\Omega=f(\nu,\delta,t-t_0),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(\delta-i\Omega)(t-t_0)}}{Z^{(V)}(\Omega+i\delta)}\,d\Omega=\frac{1}{2\pi m^*}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{-\frac{1}{i\Omega-\delta}+\frac{\Delta^{(V)}(\Omega+i\delta)}{(i\Omega-\delta)Z^{(V)}(\Omega+i\delta)}\right\}\times$$

$$\times e^{(\delta-i\Omega)(t-t_0)}\,d\Omega=g_0(\delta,t-t_0), \tag{4.48}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta^{(V)}(\Omega+i\delta)}{Z^{(V)}(\Omega+i\delta)}e^{(\delta-i\Omega)(t-t_0)}\,d\Omega=g_1(\delta,t-t_0),$$

из уравнения (4.47) находим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}(t)=\mathbf{p}^{(S)}(t)+\mathbf{p}^{(E)}(t)+\mathbf{p}^{(\Sigma)}(t),\\
&\mathbf{p}^{(S)}(t)=m^*\mathbf{p}g_0(\delta,t-t_0)-m^*\mathbf{r}g_1(\delta,t-t_0),\\
&\mathbf{p}^{(E)}(t)=-m^*\sum_{(\omega)}\mathbf{E}_\omega f(\omega,\delta,t-t_0)e^{-i\omega t_0},\\
&\mathbf{p}^{(\Sigma)}(t)=-\frac{im^*}{\sqrt{V}}\sum_{(\mathbf{k})}\left(\frac{\hbar}{2\nu(\nu)}\right)^{1/2}\times\\
&\times Л(\mathbf{k})\mathbf{k}\{b_{\mathbf{k}}f(\nu(\mathbf{k}),\delta,t-t_0)+b^+_{-\mathbf{k}}f(-\nu(\mathbf{k}),\delta,t-t_0)\}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Необходимо подчеркнуть, что функция (4.48) существенно зависит от V.

В силу сделанного нами выбора, приведшего к условиям (1–4) из (4.27а), мы можем провести предельный переход $V\to\infty$. До этого δ могла быть произвольной положительной величиной.

Теперь мы зададим ее в виде

$$\delta=\frac{\eta}{2}. \tag{4.50}$$

С другой стороны, нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned}
&g_0(\delta,t-t_0)\to\psi_0(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(\delta-i\Omega)(t-t_0)}}{Z_+(\Omega+i\delta)}\,d\Omega,\\
&g_1(\delta,t-t_0)\to\psi_1(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_+(\Omega+i\delta)}{Z_+(\Omega+i\delta)}e^{(\delta-i\Omega)(t-t_0)}\,d\Omega,\\
&f(\nu,\delta,t-t_0)\to\phi(\nu,t-t_0)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(\delta-i\Omega)(t-t_0)}}{(\Omega+i\delta-\nu)Z^+(\Omega+i\delta)}\,d\Omega,\quad V\to\infty.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Вследствие тождества

$$\frac{1}{Z(\Omega+i\delta)}=\frac{1}{\delta-i\Omega}+\frac{\Delta(\Omega+i\delta)}{(i\Omega-\delta)Z(\Omega+i\delta)},$$

а также благодаря тому, что величина δ теперь фиксирована условием (4.50), можно показать, что сходимость

$$\begin{aligned} &|f(\nu,\delta,t-t_0)-\phi(\nu,t-t_0)|\to 0,\\ &\nu|f(\nu,\delta,t-t_0)-\phi(\nu,t-t_0)|\to 0, \quad V\to\infty \end{aligned} \tag{4.52}$$

однородна относительно вещественной ν, если

$$|t-t_0|\leqslant T,$$

где T — некоторая постоянная, не зависящая от V.

Перейдем теперь к изучению предельных функций ψ_0, ψ_1, ϕ при $(t-t_0)\to\infty$.

Имеет смысл напомнить, что функции

$$\Delta_+(\Omega+i\delta), \quad \frac{1}{Z_+(\Omega+i\delta)}$$

являются регулярными аналитическими функциями Ω в области, определяемой условием

$$\operatorname{Im}\Omega\geqslant -\delta-\eta=-3\delta.$$

Следовательно, интегрирование в выражениях для ψ_0, ψ_1 может быть сдвинуто с вещественной оси на ось

$$(-3i\delta-\infty,\,-3i\delta+\infty),$$

что осуществляется заменой переменной

$$\Omega\to\Omega-3i\delta.$$

Поэтому

$$\psi_1(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_+(\Omega-i\eta)}{Z_+(\Omega-i\eta)}\,\mathrm{e}^{-i\Omega(t-t_0)}\,d\Omega\,\mathrm{e}^{-\eta(t-t_0)},$$

$$\psi_0(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\Omega(t-t_0)}}{Z_+(\Omega-i\eta)}\,d\Omega\,\mathrm{e}^{-\eta(t-t_0)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_+(\Omega-i\eta)}{(\eta+i\Omega)Z_+(\Omega-i\eta)}\,\mathrm{e}^{-i\Omega(t-t_0)}\,d\Omega\,\mathrm{e}^{-\eta(t-t_0)},$$

так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\Omega(t-t_0)}}{\eta+i\Omega}\,d\Omega=0 \quad \text{при} \quad t>t_0.$$

Таким образом, с учетом введенных выше неравенств получим

$$\begin{aligned} &|\psi_1(t-t_0)|\leqslant K_1\mathrm{e}^{-\eta(t-t_0)},\\ &\qquad\qquad t>t_0,\\ &|\psi_0(t-t_0)|\leqslant K_0\mathrm{e}^{-\eta(t-t_0)}, \end{aligned} \tag{4.53}$$

где K_0, K_1 — постоянные.

Применим такую же процедуру к выражению $\phi(\nu, t-t_0)$. Необходимо только отметить, что в области

$$\operatorname{Im}\Omega + \delta \geqslant -\eta$$

функция, стоящая в (4.51) под знаком интеграла, имеет полюс

$$\Omega = \nu - i\delta.$$

Отсюда следует

$$\phi(\nu, t-t_0) = \frac{e^{-i\nu(t-t_0)}}{Z_+(\nu)} + \frac{i}{2\pi} e^{-\eta(t-t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\Omega(t-t_0)}}{(\Omega + i\delta - \nu) Z_+(\Omega - i\eta)} d\Omega =$$

$$= \frac{e^{-i\nu(t-t_0)}}{Z_+(\nu)} + \frac{i}{2\pi} e^{-\eta(t-t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_+(\Omega - i\eta) e^{-i\Omega(t-t_0)}}{(\Omega - i\eta - \nu)(i\Omega + \eta) Z_+(\Omega - i\eta)} d\Omega, \quad (4.54)$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\Omega(t-t_0)}}{(\Omega - i\eta - \nu)(\Omega - i\eta)} d\Omega = 0, \quad t > t_0.$$

Выражение (4.54) приводит к

$$\left| \phi(\nu, t-t_0) - \frac{e^{-i\nu(t-t_0)}}{Z_+(\nu)} \right| \leqslant K_2 e^{-\eta(t-t_0)},$$

$$t > t_0, \quad (4.55)$$

$$\left| \nu\phi(\nu, t-t_0) - \nu \frac{e^{-i\nu(t-t_0)}}{Z_+(\nu)} \right| \leqslant K_3 e^{-\eta(t-t_0)},$$

где K_2, K_3 — постоянные.

Вернемся теперь к начальному статистическому оператору

$$\mathcal{D}_{t_0} = \rho(S)\mathcal{D}(\Sigma).$$

Возьмем произвольное положительное число c, не зависящее от V, и заметим, что собственными значениями оператора

$$\mathbf{p}^2 + c^2\mathbf{r}^2 \quad (4.56)$$

являются

$$(2n_1 + 1)c\hbar + (2n_2 + 1)c\hbar + (2n_3 + 1)c\hbar,$$

где n_1, n_2, n_3 — неотрицательные целые числа.

Возьмем также еще одно положительное число K, не зависящее от V, так, чтобы

$$\mathbf{k}^2 \gg c\hbar.$$

Выберем в качестве $\rho(S)$ такой положительный оператор с обычной нормировкой

$$\operatorname*{Sp}_{(S)} \rho(S) = 1,$$

чтобы его собственные функции были ортогональны всем собственным функциям оператора (4.56), для которых

$$(2n_1+1)c\hbar+(2n_2+1)c\hbar+(2n_3+1)c\hbar>K^2.$$

Введем обозначение

$$\theta(z)=\begin{cases}1, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

Тогда видим, что

$$\operatorname*{Sp}_{(S)}\theta(K^2-\mathbf{p}^2-c^2\mathbf{r}^2)\rho(S)=1.$$

Поэтому оператор (4.56) можно рассматривать как ограниченный оператор

$$\mathbf{p}^2+c^2\mathbf{r}^2\leqslant K^2,$$

откуда

$$|\mathbf{p}|\leqslant K,\quad |\mathbf{r}|\leqslant\frac{K}{c}.$$

Здесь $|\ldots|$, как обычно, означает норму оператора.

Благодаря соотношениям (4.51), (4.53) имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{p}^{(S)}(t)\underset{V\to\infty}{\to}m^*\{\psi_0(t-t_0)\mathbf{p}-\psi_1(t-t_0)\mathbf{r}\},\\ &|\lim_{V\to\infty}\mathbf{p}^{(S)}(t)|\leqslant m^*K\left\{K_0+\frac{K_1}{c}\right\}\mathrm{e}^{-\eta(t-t_0)}.\end{aligned}\tag{4.57}$$

Отметим также, что вектор $\mathbf{p}^{(E)}(t)$ является обычным c-вектором и что вследствие соотношений (4.51), (4.55)

$$\begin{aligned}&|\lim_{V\to\infty}\mathbf{p}^{(E)}(t)-m^*\mathbf{v}(t)|<\sum_{(\omega)}|\mathbf{E}_\omega|K_2\mathrm{e}^{-\eta(t-t_0)},\\ &\mathbf{v}(t)=-\sum_{(\omega)}\frac{\mathbf{E}_\omega}{Z_+(\omega)}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}.\end{aligned}\tag{4.58}$$

Видно, что здесь $\mathbf{v}(t)$ есть не что иное, как средняя скорость, соответствующая стационарному состоянию.

Рассмотрим теперь вектор $\mathbf{p}^{(\Sigma)}(t)$ и обозначим его компоненты через $p_j^{(\Sigma)}(t)$, $j=1,2,3$.

Имеем

$$\operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)}p_j^{(\Sigma)}(t)p_{j'}^{(\Sigma)}(\tau)\mathcal{D}_{t_0}=\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)}p_j^{(\Sigma)}(t)p_{j'}^{(\Sigma)}(\tau)\mathcal{D}(\Sigma).$$

Здесь, как обычно,

$$\mathcal{D}(\Sigma)=\mathrm{const}\exp\left(-\beta\sum_{(\mathbf{k})}\hbar\nu(\mathbf{k})b_{\mathbf{k}}^+b_{\mathbf{k}}\right).\tag{4.59}$$

С учетом сферической симметрии функций Л($\mathbf{k}$), $\nu(\mathbf{k})$ получаем

$$\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)}p_j^{(\Sigma)}(t)p_{j'}^{(\Sigma)}(\tau)\mathcal{D}(\Sigma)=(m^*)^2\delta_{j,j'}F(t,\tau,t_0),\tag{4.60}$$

где

$$F(t,\tau,t_0)=\frac{1}{V}\sum_{(\mathbf{k})}\frac{\hbar}{6\nu(\mathbf{k})}\Pi^2(\mathbf{k})\mathbf{k}^2\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\nu(\mathbf{k})}}f(\nu(\mathbf{k}),\delta,t-t_0)f(-\nu(\mathbf{k}),\delta,\tau-t_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{e}^{-\beta\hbar\nu(\mathbf{k})}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\nu(\mathbf{k})}}f(-\nu(\mathbf{k}),\delta,t-t_0)f(\nu(\mathbf{k}),\delta,\tau-t_0)\right\},$$

$$\delta_{j,j'}=\begin{cases}1, & j=j',\\ 0, & j\neq j'.\end{cases}$$

Теперь из формулы (4.22) следует

$$F(t,\tau,t_0)=\int_0^\infty d\nu\, I(\nu)\frac{\hbar\nu}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\nu}}\{f(\nu,\delta,t-t_0)f(-\nu,\delta,\tau-t_0)+$$

$$+\mathrm{e}^{-\beta\hbar\nu}f(-\nu,\delta,t-t_0)f(\nu,\delta,\tau-t_0)\}.$$

С учетом соотношений (4.27), (4.51), (4.52) перейдем к пределу

$$F(t,\tau,t_0)\underset{V\to\infty}{\to}\int_0^\infty d\nu\, J(\nu)\frac{\hbar\nu}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\nu}}\{\phi(\nu,t-t_0)\phi(-\nu,\tau-t_0)+$$

$$+\mathrm{e}^{-\beta\hbar\nu}\phi(-\nu,t-t_0)\phi(\nu,\tau-t_0)\},$$

откуда в силу неравенств (4.55) получаем

$$|\lim_{V\to\infty}F(t,\tau,t_0)-F(t-\tau)|\leqslant\widetilde{K}(\mathrm{e}^{-\eta(t-t_0)}+\mathrm{e}^{-\eta(\tau-t_0)}),\quad \widetilde{K}=\mathrm{const},\qquad(4.61)$$

где

$$F(t-\tau)=\int_0^\infty d\nu\, J(\nu)\frac{\hbar\nu}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\nu}}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-i\nu(t-\tau)}+\mathrm{e}^{-\beta\hbar\nu+i\nu(t-\tau)}}{Z_+(\nu)Z_+(-\nu)}\right\}.\qquad(4.62\text{а})$$

Поскольку $J(\nu)=J(-\nu)$, это соотношение может быть также представлено в виде

$$F(t-\tau)=\int_{-\infty}^\infty d\nu\, J(\nu)\frac{\hbar\nu}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\nu}}\frac{\mathrm{e}^{-i\nu(t-\tau)}}{Z_+(\nu)Z_+(-\nu)}.\qquad(4.62\text{б})$$

Но

$$2\pi J(\nu)=\Delta_+(\nu)-\Delta_-(\nu)=Z_+(\nu)-Z_-(-\nu)=Z_+(\nu)+Z_+(-\nu),$$

откуда следует

$$\frac{1}{Z_+(\nu)Z_+(-\nu)}J(\nu)=\frac{1}{2\pi}\frac{Z_+(\nu)+Z_+(-\nu)}{Z_+(\nu)Z_+(-\nu)}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{Z_+(\nu)}-\frac{1}{Z_-(\nu)}\right\}.$$

Поскольку функция $J(\nu)$ вещественна и положительна, имеем

$$2\pi J(\nu) = \operatorname{Re} Z_+(\nu) + \operatorname{Re} Z_+(-\nu),$$
$$0 = \operatorname{Im} Z_+(\nu) + \operatorname{Im} Z_+(-\nu).$$

С другой стороны,

$$Z_+(\nu) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(\Omega)}{\Omega - \nu + i0}\, d\Omega,$$

откуда

$$\operatorname{Re} Z_+(\nu) = \pi J(\nu) = \operatorname{Re} Z_+(-\nu).$$

Следовательно,

$$Z_+(-\nu) = Z_+^*(\nu),$$
$$Z_+(\nu) Z_+(-\nu) = |Z_+(\nu)|^2,$$

благодаря чему можно написать

$$F(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) \frac{\hbar\nu}{1 - e^{-\beta\hbar\nu}} e^{-i\nu(t-\tau)}\, d\nu,$$
$$G(\nu) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{Z_+(\nu)} - \frac{1}{Z_-(\nu}\right\} = \frac{J(\nu)}{|Z_+(\nu)|^2}. \qquad (4.62в)$$

Интересно отметить, что равновесное среднее

$$\langle p_j(t) p_{j'}(\tau)\rangle_{\text{eq}} = \lim_{V\to\infty} \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} p_j(t) p_{j'}(\tau) \mathcal{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma),$$

где

$$\mathcal{D}_{\text{eq}}(S,\Sigma) = Z^{-1} e^{-\beta H_L}, \quad Z = \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} e^{-\beta H_L},$$

соответствующее гамильтониану (4.5), равно

$$\delta_{j,j'}(m^*) F(t-\tau),$$

или в другой форме:

$$\langle p_j(t) p_{j'}(\tau)\rangle_{\text{eq}} = \lim_{t_0\to-\infty} \lim_{V\to\infty} \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} p_j^{(\Sigma)}(t) p_{j'}^{(\Sigma)}(\tau) \mathcal{D}_{t_0} =$$
$$= \lim_{t_0\to-\infty} \lim_{V\to\infty} \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} p_j'(t) p_{j'}'(\tau) \mathcal{D}_{t_0}.$$

Рассмотрим теперь плотность вероятности распределения импульса частицы S для гамильтониана $\widetilde{H}_L$ вида (4.11) и воспользуемся общим соотношением (1.21).

Тогда

$$\int e^{-i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{p}} w_t(\mathbf{p})\, d\mathbf{p} = \operatorname*{Sp}_{(S,\Sigma)} e^{-i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{p}(t)} \mathcal{D}_{t_0}.$$

Поскольку величины $\mathbf{p}^{(\Sigma)}(t)$, $\mathbf{p}^{(E)}(t)$ определены соотношениями (4.49), получим

$$\int e^{-i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{p}} w_t(\mathbf{p})\, d\mathbf{p} = \operatorname*{Sp}_{(S)} \{ \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} e^{-i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{p}^{(\Sigma)}(t)} \mathcal{D}(\Sigma) \} e^{-i\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{p}^{(S)}(t)+\mathbf{p}^{(E)}(t))} \rho(S).$$

Из того факта, что $\mathbf{p}_j^{(\Sigma)}(t)$ представляют собой линейные формы по бозе-амплитудам, следует

$$\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} e^{-i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{p}^{(\Sigma)}(t)} \mathcal{D}(\Sigma) = e^{-(\langle \boldsymbol{\lambda}\mathbf{p}^{(\Sigma)}(t)\rangle^2)/2},$$

где

$$\langle \boldsymbol{\lambda}\mathbf{p}^{(\Sigma)}(t)\rangle^2 = \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{p}^{(\Sigma)}(t))^2 \mathcal{D}(\Sigma) - (m^*)^2 \lambda^2 F(t,t,t_0).$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{w}_t(\boldsymbol{\lambda}) = \int e^{-i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{p}} w_t(\mathbf{p})\, d\mathbf{p} =$$

$$= \operatorname*{Sp}_{(S)} \rho(S) \exp\left\{ -\frac{\lambda^2 (m^*)^2}{2} F(t,t,t_0) - i\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{p}^{(S)}(t) + \mathbf{p}^{(E)}(t)) \right\},$$

что дает

$$w_t(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{p}} \tilde{w}_t(\boldsymbol{\lambda})\, d\boldsymbol{\lambda} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi m^*}\right)^3 \left(\frac{2\pi}{F(t,t,t_0)}\right)^{3/2} \operatorname*{Sp}_{(S)} \rho(S) \exp\left\{ -\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{(S)}(t) - \mathbf{p}^{(E)}(t))^2}{2(m^*)^2 F(t,t,t_0)} \right\}.$$

Предельный переход $V \to \infty$ приводит к соотношению

$$\lim_{V\to\infty} w_t(\mathbf{p}) = \left(\frac{1}{2\pi m^*}\right)^3 \left(\frac{2\pi}{a(t,t_0)}\right)^{3/2} \times$$

$$\times \operatorname*{Sp}_{(S)} \rho(S) \exp\left\{ -\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_\infty^{(S)}(t) - \mathbf{p}_\infty^{(E)}(t))^2}{2a(t,t_0)(m^*)^2} \right\}, \quad (4.63)$$

где

$$a(t,t_0) = \lim_{V\to\infty} F(t,t,t_0),$$

$$\mathbf{p}_\infty^{(S)}(t) = \lim_{V\to\infty} \mathbf{p}^{(S)}(t),$$

$$\mathbf{p}_\infty^{(E)}(t) = \lim_{V\to\infty} \mathbf{p}^{(E)}(t).$$

Таким образом, из соотношений (4.57), (4.58), (4.61), (4.62в) теперь следует

$$\lim_{V\to\infty} w_t(\mathbf{p}) \to \left(\frac{1}{m^*}\right)^3 \left(\frac{1}{2\pi F(0)}\right)^{3/2} \exp\left\{ -\frac{(\mathbf{p} - m^*\mathbf{v}(t))^2}{2(m^*)^2 F(0)} \right\},$$

$$t - t_0 \to \infty, \quad (4.64)$$

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) \frac{\hbar\nu}{1 - e^{-\hbar\beta\nu}}\, d\nu.$$

Отсюда видим, что после совершения предельного перехода $V \to \infty$ функция распределения по импульсам проявляет необратимое поведение и стремится к стационарному виду при $(t - t_0) \to \infty$.

В частном случае $E = 0$ этот ее вид соответствует равновесному распределению

$$\left(\frac{1}{m^*}\right)^3 \left(\frac{1}{2\pi F(0)}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\mathbf{p}^2}{2(m^*)^2 F(0)}\right\}, \tag{4.65}$$

которое выглядит как «квазимаксвелловское». Мы говорим «квази», поскольку вместо температурного модуля $\theta = 1/\beta$ в показателе экспоненты (4.65) стоит

$$m^* \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) \frac{\hbar\nu}{1 - \mathrm{e}^{-\beta\hbar\nu}}\, d\nu.$$

Можно также отметить, что общее стационарное распределение получается из равновесной функции (4.65) в результате введения в нее дрейфовой скорости $\mathbf{v}(t)$. Когда

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E} = \text{const},$$

эта скорость также постоянна:

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{E}}{Z_+(0)} = -\frac{\mathbf{E}}{\pi J(0)}. \tag{4.66}$$

Перейдем теперь к нашей главной цели — вычислению выражения (4.2) для модели, основанной на гамильтониане $\widetilde{H}_L$.

Отметим сначала, что в этой модели уравнения Гейзенберга линейны, и нетрудно убедиться в том, что коммутаторы

$$[r_j(t), r_{j'}(\tau)], \quad j, j' = 1, 2, 3,$$

являются c-числами.

Поэтому

$$\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau)} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} = \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(\tau))} \exp \frac{[\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau), \mathbf{k}\mathbf{r}(t)]}{2} =$$

$$= \exp\left(-i\mathbf{k} \int_{\tau}^{t} \frac{\mathbf{p}(s)}{m^*}\, ds\right) \exp \frac{[\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau), \mathbf{k}\mathbf{r}(t)]}{2},$$

откуда следует

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t, \tau, t_0) = \left\{\exp\left(-i\mathbf{k} \int_{\tau}^{t} \frac{\mathbf{p}^{(E)}(s)}{m^*}\, ds\right) \exp \frac{[\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau), \mathbf{k}\mathbf{r}(t)]}{2}\right\} \times$$

$$\times \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} \exp\left(-i\mathbf{k} \int_{\tau}^{t} \frac{\mathbf{p}^{(\Sigma)}(s)}{m^*}\, ds\right) \mathcal{D}(\Sigma) \operatorname*{Sp}_{(S)} \exp\left(-i\mathbf{k} \int_{\tau}^{t} \frac{\mathbf{p}^{(S)}(s)}{m^*}\, ds\right) \rho(S). \tag{4.67}$$

Для расцепления коммутаторов воспользуемся тем, что

$$[r_j(t), r_{j'}(\tau)] = [r_j(t), r_{j'}(\tau) - r_{j'}(t)] = -\frac{1}{m^*} \int_{\tau}^{t} [r_j(t), p_{j'}(s)]\, ds.$$

Имеем далее

$$[r_j(t), p_{j'}(s)] = [r_j(t) - r_j(s), p_{j'}(s)] + i\hbar\delta_{j,j'} = i\hbar\delta_{j,j'} + \frac{1}{m^*}\int_s^t [p_j(\sigma), p_{j'}(s)]\, d\sigma$$

и, следовательно,

$$[r_j(t), r_{j'}(\tau)] = -i\hbar\delta_{j,j'}\frac{(t-\tau)}{m^*} - \left(\frac{1}{m^*}\right)^2 \int_\tau^t ds \int_s^t [p_j(\sigma), p_{j'}(s)]\, d\sigma =$$

$$= -i\hbar\delta_{j,j'}\frac{(t-\tau)}{m^*} - \left(\frac{1}{m^*}\right)^2 \int_\tau^t ds \int_s^t d\sigma\, [p_j^{(\Sigma)}(\sigma), p_{j'}^{(\Sigma)}(s)] -$$

$$- \left(\frac{1}{m^*}\right)^2 \int_\tau^t ds \int_s^t d\sigma\, [p_j^{(S)}(\sigma), p_{j'}^{(S)}(s)]. \quad (4.68)$$

Так как рассматриваемые коммутаторы являются c-числами, с учетом (4.60) мы можем записать:

$$[p_j^{(\Sigma)}(\sigma), p_{j'}^{(\Sigma)}(s)] = \operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} [p_j^{(\Sigma)}(\sigma), p_{j'}^{(\Sigma)}(s)]\mathcal{D}(\Sigma) =$$

$$= \delta_{j,j'}(m^*)^2\{F(\sigma, s, t_0) - F(s, \sigma, t_0)\}.$$

С другой стороны, (4.49) дает

$$\frac{1}{(m^*)^2}[p_j^{(S)}(\sigma), p_{j'}^{(S)}(s)] =$$

$$= i\hbar\delta_{j,j'}\{g_0(\delta, \sigma - t_0)g_1(\delta, s - t_0) - g_0(\delta, s - t_0)g_1(\delta, \sigma - t_0)\}.$$

Откуда получаем

$$[(\mathbf{kr}(t)), (\mathbf{kr}(\tau))] = -i\hbar\mathbf{k}^2\frac{(t-\tau)}{m^*} + \mathbf{k}^2\int_\tau^t ds \int_s^t d\sigma\, \{F(s, \sigma, t_0) - F(\sigma, s, t_0) +$$

$$+ i\hbar[g_0(\delta, s - t_0)g_1(\delta, \sigma - t_0) - g_0(\delta, \sigma - t_0)g_1(\delta, s - t_0)]\}. \quad (4.69)$$

Нетрудно также убедиться в том, что

$$\operatorname*{Sp}_{(\Sigma)} \exp\left(-i\mathbf{k}\int_\tau^t \frac{\mathbf{p}^{(\Sigma)}(S)\, ds}{m^*}\right) = \exp\left\{-\frac{\mathbf{k}^2}{2}\int_\tau^t ds \int_\tau^t d\sigma\, F(s, \sigma, t_0)\right\}. \quad (4.70)$$

Соотношения (4.69), (4.70) нужно подставить в выражение (4.67).

Взяв предел $V \to \infty$ и вычислив асимптотическую часть выражения (4.67) при $t_0 \to -\infty$, получим

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t, \tau, -\infty) = \exp\left(-i\int_\tau^t (\mathbf{kv}(s))\, ds\right) \exp \mathbf{k}^2 \left\{i\hbar\frac{t-\tau}{2m^*} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_\tau^t ds \int_s^t d\sigma\, (F(\sigma - s) - F(s - \sigma)) - \frac{1}{2}\int_\tau^t ds \int_\tau^t d\sigma\, F(s - \sigma)\right\}.$$

Однако вследствие (4.62в)

$$\frac{1}{2}\int_{\tau}^{t} ds \int_{\tau}^{t} d\sigma\, F(s-\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)\frac{\hbar\nu}{1-e^{-\beta\hbar\nu}}\,\frac{1-\cos\nu(t-\tau)}{\nu^2}\,d\nu,$$

$$F(\sigma-s)-F(s-\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)\hbar\nu e^{-i\nu(\sigma-s)}\,d\nu = -i\int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)\hbar\nu\sin\nu(\sigma-s)\,d\nu,$$

$$\int_{\tau}^{t} ds \int_{s}^{t} d\sigma\,\{F(\sigma-s)-F(s-\sigma)\} = i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)\left\{\frac{\sin\nu(t-\tau)}{\nu}-(t-\tau)\right\}d\nu.$$

Таким образом, мы приходим к выражению

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t,\tau,-\infty) = \exp\left(-i\int_{\tau}^{t}(\mathbf{k}\mathbf{v}(s))\,ds\right)\times$$

$$\times\exp\left\{i\hbar\mathbf{k}^2\left(\frac{t-\tau}{2m^*}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)\left[\frac{\sin\nu(t-\tau)}{\nu}-(t-\tau)\right]d\nu\right)-\right.$$

$$\left.-i\hbar\mathbf{k}^2\int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)\frac{h\nu}{1-e^{-\beta\hbar\nu}}\,\frac{1-\cos\nu(t-\tau)}{\nu^2}\,d\nu\right\}. \quad (4.71)$$

Это выражение нужно подставить в уравнение (4.3), в котором затем следует перейти к пределам

$$1)\ V\to\infty,\quad 2)\ t_0\to-\infty,\quad 3)\ \varepsilon\to 0.$$

Таким образом, мы приходим к общему уравнению, на основе которого могут быть получены результаты вышеупомянутых статей [2, 3]. Заметим, что в них $m^*=m$ и функция (4.42) используется при $\gamma\to 0$. Можно также отметить, что при подстановке $f(p)=p^2$ в (2.20) может быть получено уравнение для скорости изменения кинетической энергии электрона. Подобное уравнение далее может быть расцеплено в рамках линейной модели тем же образом, что и предыдущее, и может быть использовано для проверки результатов, вытекающих из соотношений (4.3) и (4.71).

Я хотел бы поблагодарить проф. Дж. Т. Девриза за стимулирующие дискуссии.

Список литературы

1. *Devreese J. T., Evard R.* Linear and Nonlinear Transport in Solids. Plenum Press, 1976. P. 91.
2. *Thornber K.K., Feynman R.P.* // Phys. Rev. B. 1970. V. 1. P. 4099.
3. *Feynman R.P. et al.* // Phys. Rev. 1962. V. 127. P. 1004.

Часть третья

НОВЫЕ МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МНОГИХ ТЕЛ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

16.

УРАВНЕНИЯ С ВАРИАЦИОННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОБЛЕМАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ*

Основной задачей статистической физики является изучение больших коллективов из взаимодействующих частиц. Рассматриваются ли при этом динамические системы, которые с достаточным приближением можно считать классическими, или речь идет о системах, квантовый характер которых является существенным, именно наличие в системе большого, в пределе бесконечного, числа частиц сообщает задачам статистической физики их типичную структуру. Интересно отметить, что к задачам подобного же математического типа приходят и в современной квантовой теории поля, в частности в квантовой электродинамике.

На первый взгляд может показаться, что замечаемые здесь определенные математические аналогии имеют чисто формальный характер и не имеют под собой более глубокой физической основы.

В самом деле, в типичных задачах квантовой теории поля мы имеем дело или с изучением поведения одной частицы, скажем, во внешнем поле, или с изучением процессов взаимодействия двух или, вообще говоря, сравнительно небольшого числа частиц. Казалось бы, поэтому характерные особенности задач статистической физики — наличие большого коллектива частиц или дискретность среды, в которой движется каждая отдельная частица, — здесь полностью отсутствует.

Рассуждая таким образом, мы, однако, упускаем из виду, что, согласно представлениям современной квантовой теории поля, каждая частица постоянно взаимодействует с вакуумом как со своего рода квантовой средой.

Это положение стали замечать сразу же после появления теории Дирака, подтвержденной последовавшим за ней открытием позитронов.

Начали тогда говорить о вакууме как о совокупности бесконечного числа частиц, заполняющих квантовые состояния отрицательной энергии. Несмотря на некоторую парадоксальность и, в сущности, если можно так выразиться, «псевдофизичность» такого понимания вакуума, оно до известной степени правильно указало на то, что вакуум — это не пустое пространство в обычном

---

* Вестн. Моск. ун-та. 1955. №4–5. Юбилейн. вып. С. 115–124; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. IX, 2007, с. 248.

вульгарном понимании слова «пустое», а имеет определенные свойства дискретной квантовой среды.

Роль вакуума особенно возросла после начавшегося в последнем десятилетии бурного развития квантовой теории поля в ее современной форме.

Реальность эффектов взаимодействия частиц с вакуумом после таких блестящих экспериментов, как эксперименты по аномальному магнитному моменту электрона и по смещению атомных уровней, получила теперь всеобщее признание.

Если попытаться подойти к задачам статистической физики квантовых систем и к задачам квантовой теории поля с точки зрения формального математического аппарата, используемого при их решении, мы сейчас же заметим, что общим для них является возможность применения метода вторичного квантования.

При этом вводятся операторы рождения и уничтожения частиц $\Psi^{(+)}(\mathbf{r})$, $\Psi^{(-)}(\mathbf{r})$, связанные между собой определенными перестановочными соотношениями, например:

$$\Psi^{(-)}(\mathbf{r})\Psi^{(+)}(\mathbf{r}') - \Psi^{(+)}(\mathbf{r}')\Psi^{(-)}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{1}$$

и через них выражаются оператор энергии системы и другие динамические величины.

Волновая функция в представлении вторичного квантования, называемая иногда амплитудой или вектором состояния, рассматривается обычно как функция от чисел заполнения квантовых уровней одной частицы:

$$\Phi = \Phi(\dots n_k \dots).$$

Можно также более явно связать волновые функции вторичного квантования с волновыми функциями обычного конфигурационного представления.

Пусть в самом деле Φ_0 будет амплитудой для состояния вакуума.

Тогда очевидно, что интеграл

$$\Phi(t) = \int \varphi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)\Psi^{(+)}(\mathbf{r}_1) \dots \Psi^{(+)}(\mathbf{r}_n)d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n\Phi_0 \tag{2}$$

дает выражение для амплитуды состояния, в котором имеется точно n частиц, а c-функция $\varphi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ является здесь их волновой функцией в конфигурационном представлении.

Поэтому амплитуду состояния в общем случае, когда число частиц не фиксировано, мы получим в силу основных принципов квантовой механики путем суперпозиции амплитуд состояния типа (2):

$$\Phi(t) = \sum_n \frac{1}{n!} \int \varphi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)\Psi^{(+)}(\mathbf{r}_1) \dots \Psi^{(+)}(\mathbf{r}_n)d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n\Phi_0. \tag{3}$$

Таким образом, оказывается, что амплитуда состояния полностью характеризуется цепочкой

$$\dots \varphi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \dots \tag{4}$$

волновых функций обычного типа.

Этот важный факт был установлен В. А. Фоком. Фоком также введено весьма интересное функциональное представление.

Пусть рассматриваемые поля соответствуют частицам со статистикой Бозе, с перестановочными соотношениями вида (1). Построим тогда функционал

$$\Phi_t(U)=\sum_n \frac{1}{n!}\int \varphi(t,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n)U(\mathbf{r}_1)U(\mathbf{r}_n)d\mathbf{r}_1\ldots d\mathbf{r}_n \qquad (5)$$

в каком-то классе произвольных функций $U(\mathbf{r})$.

Поскольку все волновые функции из серии (4) выражаются через вариационные производные этого функционала:

$$\varphi(t,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n)=\left\{\frac{\delta^n\Phi_t(U)}{\delta U(\mathbf{r}_1)\ldots\delta U(\mathbf{r}_n)}\right\}_{U=0},$$

мы видим, что амплитуда состояния полностью характеризуется формой $\Phi_t(U)$.

Интересно заметить, что в уравнении Шредингера

$$i\frac{\partial\Phi_t(U)}{\partial t}=H\Phi_t(U),$$

определяющем временную эволюцию формы фоковского функционала, выражение H получается из соответствующего выражения H метода вторичного квантования заменой операторов рождения $\Psi^{(+)}(\mathbf{r})$ на $U(\mathbf{r})$, а операторов уничтожения $\Psi^{(-)}(\mathbf{r})$ на $\delta/(\delta U(\mathbf{r}))$.

Такие «правила перехода» от представления вторичного квантования к представлению Фока, в сущности, совершенно очевидны.

Действительно, в представлении вторичного квантования та или иная «реализация» основных полевых операторных функций не имеет значения.

Существенно лишь то, чтобы между ними сохранялись принятые перестановочные соотношения.

Для операций же умножения на $U(\mathbf{r})$ и операций вариационного дифференцирования $\delta/(\delta U(\mathbf{r}))$ имеется то же перестановочное соотношение (1)

$$\frac{\delta}{\delta U(\mathbf{r})}U(\mathbf{r}')-U(\mathbf{r}')\frac{\delta}{\delta U(\mathbf{r})}=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

что и для операторов

$$\Psi^{(+)}(\mathbf{r}),\quad \Psi^{(-)}(\mathbf{r}).$$

Итак, в фоковском представлении уравнение Шредингера будет уравнением с вариационными производными.

Если теперь в это уравнение подставить формальное разложение функционала $\Phi_t(U)$ в ряд по степеням U и обычным путем сравнить в них коэффициенты при одинаковых степенях, получится, вообще говоря, бесконечная цепочка уравнений для определения волновых функций (2).

Именно в такой, «развернутой» форме метод Фока и получил широкое применение в последующих исследованиях (*упомянем*, например, работы по приближенному методу Тамма, по приближенному методу промежуточной связи Томонаги, работы Ю. М. Широкова и т. д.).

Уравнениям же в вариационных производных и определяемому ими функционалу $\Phi_t(U)$ не было уделено достаточного внимания, между тем как их непосредственное изучение технически гораздо более удобно.

В этой связи обратимся, например, к теории ряда специальных функций математической физики, где их изучение существенно облегчается с помощью введения «производящих функций», находящихся к исследуемым там специальным функциям точно в таком же отношении, в каком находится функционал Фока в отношении к цепочке волновых функций (2).

Уравнения в вариационных производных стали привлекать к себе все большее внимание лишь в самое последнее время, после появления работ Ю. Швингера по теории функций Грина.

Пусть мы имеем поле фермионов Ψ, взаимодействующее с полем бозонов φ. В соответствии с основной идеей Швингера добавим к лагранжиану взаимодействия

$$L(x) = g\varphi(x)\overline{\Psi}(x)\Gamma\Psi(x), \quad x = (t, \mathbf{r}),$$

член $\varphi(x)J(x)$, который можно интерпретировать как выражающий влияние классического источника $J(x)$ бозонного поля. Вводим функцию Грина для фермионов $G(x, y)$ и функцию Грина для бозонов $\mathfrak{G}(x, y)$, полагая

$$\begin{gathered} G(x,y) = i\frac{\langle T(\Psi(x)\overline{\Psi}(y)S)\rangle_0}{\langle S\rangle_0}, \\ \mathfrak{G}(x,y) = \frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{\langle T(\varphi(x)S)\rangle_0}{\langle S\rangle_0}, \\ S = T\left(e^{i\int L(x)dx}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Эти функции Грина, или гринианы (как их предлагает называть Д. Д. Иваненко), очевидно, являются функционалами от $J(x)$ как произвольной c-функции.

Через их значения и значения их вариационных производных по $J(x)$ при $J = 0$ непосредственно выражаются основные физические характеристики для процессов взаимодействия одного реального фермиона с одним или несколькими реальными бозонами.

Случай одновременного наличия нескольких реальных фермионов также поддается описанию с помощью гринианов аналогичной, правда несколько более сложной, структуры.

Для введенных гринианов (6) Швингером получены уравнения в вариационных производных типа

$$\begin{gathered} \left\{i\gamma\partial - \mu - g\left(\Phi(x) - i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\} G(x,y) = \delta(x-y), \\ (\Box + m^2)\mathfrak{G}(x,y) - ig\Gamma\frac{\delta}{\delta J(y)}G(x,y) = \delta(x-y); \quad \frac{\delta\Phi(x)}{\delta J(y)} = \mathfrak{G}(x,y). \end{gathered} \tag{7}$$

Интересно подчеркнуть, что они могут быть построены путем суммирования обычных разложений S-матрицы.

В связи с этим высказывается предположение, что на основе швингеровской теории проблема исключения бесконечностей может быть решена без привлечения стандартной теории возмущений и что тем самым будет открыт путь к построению аппроксимаций другой природы, например принадлежащих к типу «промежуточной» или «сильной» связи.

В таком направлении уже имеется ряд перспективных исследований, принадлежащих Эдвардсу, Ландау с сотрудниками и др.

По поводу формы уравнений (7) заметим еще, что входящие в них члены с вариационными производными соответствуют радиационным поправкам, или, что то же самое, взаимодействию с вакуумом.

Если эти члены отбросить, то получатся известные уравнения для свободных фермионов, находящихся во внешнем поле.

Швингеровские уравнения в вариационных производных нетрудно перестроить и привести к форме бесконечной цепочки зацепляющихся друг за друга уравнений для определения последовательности функций

$$\dots G_n(x, y, \xi_1, \dots, \xi_n) \dots,$$

соответствующих амплитудам рассеяния одного реального фермиона при взаимодействии с n реальными бозонами.

Для этого стоит лишь подставить в уравнения (7), как и в методе Фока, формальное разложение $G(x, y)$ в ряд по степеням J:

$$G(x, y) = G(x, y/J) = \sum_n \frac{1}{n!} \int G_n(x, y, \xi_1, \dots, \xi_n) J(\xi_1) \dots J(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Вообще говоря, более удобно иметь дело не с G_n, а с так называемыми вершинными частями $\Gamma_n(x, y, \xi_1, \dots, \xi_n)$:

$$\Gamma_n(x, y, \xi_1, \dots, \xi_n) = \left\{ \frac{\delta^n G^{-1}(x, y/J)}{\delta J(\xi_1) \dots \delta J(\xi_n)} \right\}_{J=0}.$$

Чтобы получить цепочку уравнений для таких Γ_n, достаточно перейти в уравнениях (7) от $G(x, y)$ к $G^{-1}(x, y)$ и воспользоваться разложением

$$G^{-1}(x, y) = \sum_n \frac{1}{n!} \int \Gamma_n(x, y, \xi_1, \dots, \xi_n) J(\xi_1) \dots J(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Построенная таким образом система уравнений, так же как и другие подобные ей системы, бесконечна.

Можно попытаться оборвать ее, придумав какую-либо приближенную формулу, выражающую данное Γ_n через предыдущие $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$.

Тогда система первых n уравнений цепочки сделается замкнутой. На такой путь встали в своих исследованиях Ландау, Абрикосов, Халатников, а также Н. Н. Мейман.

Следует подчеркнуть, что цепочки уравнений, получающиеся в методе Швингера, принципиально отличаются от соответствующих цепочек метода Фока своей четырехмерностью.

Но, так же как и метод Фока, метод Швингера тесно связан с представлением вторичного квантования.

На это важное обстоятельство до сих пор не обращалось внимания, хотя здесь мы можем прийти к весьма своеобразной и перспективной трактовке уравнений (7).

Условимся рассматривать

$$J(x), \quad \pi(x) = \frac{\delta}{\delta J(x)}$$

как операторы, связанные перестановочными соотношениями

$$[\pi(y);\ J(x)] = \delta(x-y). \tag{8}$$

Тогда уравнения (7) принимают «вторично квантованную» форму

$$\begin{gathered}\{i\gamma\partial - \mu - g\Gamma(\Phi(x) - i\pi(x))\}G(x,y) = \delta(x-y),\\ (\Box + m^2)\mathfrak{G}(x,y) - ig\Gamma\pi(y)G(x,y) = \delta(x-y)\end{gathered} \tag{9}$$

с перестановочными соотношениями

$$\begin{aligned}&[\Phi(x);\ J(y)] = 0,\\ &[\pi(y);\ \Phi(x)] = \mathfrak{G}(x,y).\end{aligned} \tag{10}$$

Интересно отметить, что уравнения (9), (10) образуют нелинейную систему, причем *четырехмерные* перестановочные соотношения (10) не фиксированы, а определяются всей совокупностью уравнений.

Здесь, по-видимому, мы естественно подходим к давно разыскиваемой принципиально нелинейной теории.

Заметим еще, что данная форма представления швингеровских уравнений весьма удобна для получения различного рода приближенных решений.

Рассмотрим, например, недавно предложенное нами «одночастичное приближение», когда, говоря языком диаграмм Фейнмана, мы пренебрегаем замкнутыми петлями и считаем фермионную линию связной.

Предполагается тем самым, что бозонную функцию Грина $\mathfrak{G}(x,y)$ можно приближенно заменить на ее значение для свободного поля, т. е. на обычную причинную функцию $D^c(x-y)$.

В таком «одночастичном приближении» система (9) делается линейной и сводится к одному уравнению

$$\{i\gamma\partial - \mu - \partial\Gamma\vartheta(x)\}G(x,y) = \delta(x-y), \tag{11}$$

в котором

$$\vartheta(x) = \Phi(x) - i\pi(x) = \int D^c(x-y)J(y)\,dy - i\pi(x).$$

Из (10) найдем

$$[\pi(y);\ \Phi(x)] = D^c(x-y) \tag{11'}$$

и потому благодаря симметрии $D^c(x-y)$ будем иметь

$$[\vartheta(x);\ \vartheta(y)] = 0. \tag{12}$$

Как видно, мы приходим к задаче, по форме совершенно подобной задаче о движении одной вторично неквантованной частицы в квантовом бозонном поле, изучавшейся еще задолго до появления современных представлений квантовой теории поля. Она, кстати сказать, до сих пор еще рассматривается при работе с методами сильной или промежуточной связи, поскольку эти методы пока не удавалось успешно применить к современным вариантам теории поля.

Аналогия делается еще более прямой, если от функции Грина $G(x,y)$ перейти к соответствующей волновой функции $\varphi(x)$. Мы получим тогда типично одночастичное уравнение

$$(i\gamma\partial - \mu - g\Gamma\vartheta(x))\varphi(x) = 0. \tag{13}$$

Единственное, правда весьма существенное, отличие нашего одночастичного приближения от обычного состоит в форме перестановочных соотношений (11′).

Если бы мы пожелали в нашей схеме полностью перейти к обычной одночастичной задаче, мы должны были бы заменить в (11′) причинную функцию $D^c(x-y)$ на

$$-D^{(+)}(x-y).$$

Действительно, тогда вместо (12) мы получили бы перестановочные соотношения

$$[\vartheta(x);\ \vartheta(y)] = -iD^{(+)}(x-y) - iD^{(-)}(x-y) = -iD(x-y)$$

с обычной функцией Паули–Йордана.

С физической точки зрения упомянутое различие в перестановочных соотношениях обусловлено тем, что в нашем приближении виртуальным рождением пар мы полностью не пренебрегаем, так как фермионная линия на фейнмановских диаграммах может идти по времени как «вперед», так и «назад».

Это различие не мешает, однако, перенесению методов, разработанных для обычного одночастичного приближения, на нашу схему.

Для такой цели удобно исключить из соответствующих уравнений (11), (13) координаты фермионов.

Воспользовавшись свойствами трансляционной инвариантности, положим

$$\begin{gathered} G(x, y/J) = (2\pi)^{-4} \int \mathrm{e}^{i(k, y-x)}, \quad G(k/T_x J)\, dk, \\ \varphi(x/J) = \mathrm{e}^{-i(k,x)} \varphi(T_x J), \end{gathered} \tag{14}$$

где T_x представляет трансляцию

$$J(\xi) \to J(\xi + x).$$

Получим тогда

$$\left\{\gamma\left(k + i\int pJ(p)\pi(p)dp\right) - \mu - g\Gamma(2\pi)^{-2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int D^c(p)J(p)dp - i\int \pi(p)dp\right)\right\}G(k/J) = 1 \tag{15}$$

и

$$\left\{\gamma\left(k + i\int pJ(p)\pi(p)dp\right) - \mu - g\Gamma(2\pi)^{-2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int D^c(p)J(p)dp - i\int \pi(p)dp\right)\right\}\varphi(J) = 0, \tag{16}$$

причем

$$\pi(k) = \frac{\delta}{\delta J(k)}.$$

Последнее уравнение (16) относится к задаче на собственные значения, а уравнение (15) определяет фурье-компоненты функции Грина. Характерно, что эти компоненты не перепутываются друг с другом и определяются индивидуально для каждого «значения» 4-вектора k.

Заметим в заключение, что к полученным уравнениям в форме (15), (16) можно непосредственно прилагать метод Блоха–Нордзика и методы сильной и промежуточной связи.

До сих пор мы говорили об уравнениях с вариационными производными применительно к вопросам квантовой теории. Сфера их эффективности, однако, значительно шире.

Рассмотрим, например, задачу о статистическом равновесии классической системы одинаковых частиц с взаимодействием бинарного типа — задачу, казалось бы весьма далекую от квантовой теории.

Будем основываться здесь на обычном каноническом распределении Гиббса

$$D(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = Q_N^{-1} \exp\left\{-\frac{U_N}{\Theta}\right\},$$

где

$$U = \sum \Phi(r_{ij}),$$

а Q_N — конфигурационный интеграл.

Как было показано в нашей работе[1] 1946 г. «Проблемы динамической теории в статистической физике», соответствующие функции распределения комплексов частиц

$$F_s(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_s) \tag{17}$$

удобно изучать с помощью «производящего функционала»

$$L(U) = \int \left\{\Pi\left(1 + \frac{V}{N} U(\mathbf{r}_j)\right)\right\} D(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_N. \tag{18}$$

Эти функции распределения выражаются через вариационные производные

$$F_s(r_1, \ldots, r_s) = \frac{\delta^s L(U)}{\delta U(\mathbf{r}_1) \ldots \delta U(\mathbf{r}_s)}.$$

Для $L(U)$ было получено уравнение в вариационных производных, которое непосредственно преобразуется также в форму цепочки уравнений для определения функций (17).

Заметим, между прочим, что для тех случаев, когда ни о каком малом параметре не может быть и речи (как, например, при изучении жидкого состояния), была предложена аппроксимация, выражающая F_n через предыдущие, например, F_3 через F_2. Тем самым достигается обрыв цепочки и возможность фактического решения получающихся уравнений. В настоящее время такую аппроксимацию успешно развивает Фишер.

Как видно, в классической теории статистического равновесия конденсированных систем вопрос о построении приближенных решений имеет большое сходство с аналогичным вопросом квантовой теории поля для случая, когда взаимодействие с вакуумом не является ни сильным, ни слабым.

[1] См.: *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 138.

Введенный нами функционал $L(U)$ не имеет непосредственной физической интерпретации.

Легко, однако, построить подобный же, но более «физически наглядный» функционал.

Воспользуемся для этого идеей включения внешнего поля, точно так же, как в швингеровской теории функций Грина.

Пусть данная совокупность частиц находится во внешнем поле. Тогда свободную энергию

$$F = -\Theta \ln \int \exp\left\{-\frac{1}{\Theta} U_N - \frac{1}{\Theta}\sum \varphi(\mathbf{r}_j)\right\} d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_N \tag{19}$$

можно рассматривать как функционал от внешнего поля:

$$F = F(\varphi).$$

Совершенно ясно, что через его вариационные производные по φ также можно выразить все функции распределения комплексов частиц.

Заметим, в частности, что

$$\frac{\delta F(\varphi)}{\delta \varphi(\mathbf{r})} = F_1(\mathbf{r}/\varphi)$$

и

$$F_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}'/\varphi) = \\ = \frac{N}{N-1} F_1(\mathbf{r}/\varphi) F_1(\mathbf{r}'/\varphi) - \frac{V}{N-1} F_1(\mathbf{r}/\varphi)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{V\Theta}{N-1}\frac{\delta F_1(\mathbf{r}/\varphi)}{\delta\varphi(\mathbf{r})}. \tag{20}$$

Здесь F_1, F_2 — функции распределения при наличии внешнего поля.

Примем теперь во внимание уравнение для F_1.

Имеем

$$\frac{\partial F_1(\mathbf{r}/\varphi)}{\partial r^\alpha} + \frac{1}{\Theta}\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial r^\alpha} F_1(\mathbf{r}/\varphi) + \frac{N-1}{V\Theta}\int \frac{\partial \Phi(r_{12})}{\partial r^\alpha} F_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}'/\varphi) d\mathbf{r}' = 0.$$

Подставляя сюда вместо функции F_2 ее выражение (20), получим следующее уравнение в вариационных производных:

$$\frac{\partial F_1(\mathbf{r})}{\partial r^\alpha} + \frac{1}{\Theta}\frac{\partial \vartheta(\mathbf{r})}{\partial r^\alpha} F_1(\mathbf{r}) = 0, \\ \vartheta(\mathbf{r}) = \int \Phi(r_{12}) \left\{\frac{N}{V} F_1(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \Theta\frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{r}')}\right\} d\mathbf{r}' + \varphi(\mathbf{r}), \tag{21}$$

для функции $F_1(\mathbf{r}) = F_1(\mathbf{r}/\varphi)$, представляющей собой обычную плотность числа частиц при наличии внешнего поля.

Мы обнаруживаем здесь весьма интересный факт: плотность $F_1(\mathbf{r})$ удовлетворяет точно такому же по форме уравнению, как и в случае, когда каждая частица движется независимо от других в заданном внешнем поле $\vartheta(\mathbf{r})$.

Наличие межчастичного взаимодействия сказывается лишь в том, что $\vartheta(\mathbf{r})$ — не обычная c-функция, а операторная, содержащая вариационное дифференцирование.

Создается положение, полностью аналогичное положению в задаче многих тел квантовой механики, когда, применяя метод вторичного квантования, мы

получаем по форме такое же уравнение, как и для одной индивидуальной частицы, но только с операторным «внешним полем».

Пренебрегая операторным характером $\vartheta(\mathbf{r})$, приходим к уравнению «самосогласованного поля», в классическом случае рассматривавшемуся А. А. Власовым.

Изложенные выше соображения могут быть использованы также и при изучении неравновесных состояний.

Итак, операторный метод типа вторичного квантования, метод уравнений с вариационными производными, приложим не только к квантовым, но и к классическим системам.

Эффективность его связана с наличием большой совокупности частиц (реальных или виртуальных), а не с квантовостью или классичностью изучаемых динамических систем.

Устанавливая связи между задачами из самых отдаленных, казалось бы, разделов теоретической физики, этот метод содействует перенесению способов их решения из одной области в другую и, несомненно, имеет широкие перспективы дальнейшего развития в последующих исследованиях.

17.

УСЛОВИЕ ПРИЧИННОСТИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ*

Дальнейшее развитие квантовой теории поля в ее современной локализуемой форме наталкивается, как известно, на большие трудности, особенно при попытках подхода к проблемам мезонно-нуклонного взаимодействия.

Создавшееся положение вызывает стремление многих исследователей выйти за рамки этой формы теории в самых разнообразных направлениях, например в направлении отказа от строгой локализуемости или от строгого выполнения закона причинности и т. п.

Желательно поэтому иметь такое представление квантовой теории поля, которое позволило бы с полной ясностью представить себе те основные физические положения, на которых она фактически всегда строится в ее современной форме, чтобы было видно, в каких направлениях допустимо их обобщать.

При обычном представлении квантовой теории поля, основанном на гамильтоновом формализме, этим положениям не уделяется достаточного внимания.

По нашему мнению, более целесообразно исходить из схемы, предложенной Штюкельбергом [1–3], в которой вводится обобщенная S-матрица без обращения к гамильтонову формализму. Его роль в деле конкретизации формы S-матрицы заменяют явно сформулированные физические условия, среди которых основным является условие причинности.

Однако Штюкельбергу не удалось добиться достаточно ясной и общей формулировки такого условия, в связи с чем его идеи и не получили широкого признания.

В направлении дальнейшего развития этих идей мы попытаемся в настоящей статье разработать новую формулировку условия причинности и основанного на ней метода построения квантовой теории поля.

Заметим прежде всего, что в нашем представлении квантовой теории поля, так же как и во всех других ее формах, приходится вводить в рассмотрение поля фиктивных, невзаимодействующих частиц и рассматривать взаимодействие как данный дополнительно фактор, изменяющий свойства динамической системы, фактор, который может «включаться» и «выключаться». Разумеется, с физической точки зрения такая трактовка взаимодействия между полями является весьма неудовлетворительной, и мы считаем поэтому желательным

---

* Изв. АН СССР. Сер. физ. 1955. Т. 19, № 2. С. 237–246; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. IX, 2007, с. 259.

специально подчеркнуть ту основную роль, которую она тем не менее фактически играет в современной теории поля.

Чтобы математически описать «операцию включения и выключения взаимодействия», введем, следуя Штюкельбергу, функцию $g(x)$ со значениями из интервала $(0, 1)$, представляющую степень интенсивности включения взаимодействия. Тогда в пространственно-временны́х областях, где $g(x) = 0$, взаимодействие отсутствует; в областях, где $g(x) = 1$, оно включено полностью, а при $0 < g(x) < 1$ оно включено лишь частично.

Пусть теперь $g(x)$ отлично от нуля лишь в некоторой конечной пространственно-временно́й области. В этом случае в достаточно отдаленных прошлом и будущем поля являются свободными, и потому, работая в представлении взаимодействия, мы можем начальные и конечные состояния динамической системы характеризовать постоянными амплитудами состояния $\Phi(-\infty)$, $\Phi(+\infty)$.

Они, очевидно, должны быть связаны между собой некоторым оператором $S(g)$, преобразующим $\Phi(-\infty)$ в $\Phi(+\infty)$ и зависящим от поведения функции $g(x)$. Фиксировав начальную амплитуду состояния

$$\Phi(-\infty) = \Phi,$$

мы можем рассматривать конечную амплитуду как функционал от g:

$$\Phi(g) = S(g)\Phi. \tag{1}$$

По данному определению $S(g)$ естественно интерпретируется как оператор рассеяния для того случая, когда взаимодействие включено с интенсивностью $g(x)$.

Реальный случай, когда взаимодействие включено полностью во всем пространстве-времени, должен рассматриваться в данной схеме при помощи предельного перехода, при котором область, где $g(x) = 1$, неограниченно расширяется и в пределе охватывает все пространство-время. Если при этом хотя бы для некоторых матричных элементов оператора $S(g)$ существуют предельные значения, то их и следует рассматривать как соответствующие элементы обычной матрицы рассеяния S.

Подчеркнем, что обобщенный S-оператор $S(g)$ дает более детальную информацию о поведении динамической системы, чем обычный S-оператор.

В самом деле, в $S(g)$ входит функция $g(x)$, которая позволяет выделять отдельные пространственно-временны́е области. В связи с этим можно будет показать, что и «гамильтониан системы» непосредственно выражается через $S(g)$.

Сформулируем теперь основные физические условия, которым должен удовлетворять оператор $S(g)$.

Так, для обеспечения ковариантности теории мы должны потребовать, чтобы он преобразовывался как скаляр, т. е. чтобы

$$S(Lg) = U_L S(g) U_L^*, \tag{2}$$

где $Lg = g(Lx)$; U_L — унитарный оператор, при помощи которого преобразуются квантованные волновые функции свободных полей при преобразованиях L из группы Лоренца и группы трансляций.

Далее, чтобы норма амплитуды состояния сохранялась при переходе (1) от начального к конечному состоянию, необходимо подчинить оператор $S(g)$ условию унитарности

$$S(g)\,S^*(g) = 1. \tag{3}$$

Примем теперь во внимание условие причинности, в соответствии с которым какое-либо событие, происшедшее в системе, может оказать влияние на ход эволюции системы лишь в будущем и не может повлиять на поведение системы в прошлом, во времена, предшествовавшие данному событию.

Мы должны поэтому потребовать, чтобы изменение закона взаимодействия в какой-либо пространственно-временно́й области могло изменить движение лишь в последующие моменты времени.

Чтобы математически сформулировать это условие, представим, что в бесконечно малой окрестности пространственно-временно́й точки y функция g получила бесконечно малое приращение δg.

Тогда предельная амплитуда состояния $\Phi(g)$ получит приращение

$$\delta\Phi(g) = \delta S(g)\Phi = [\delta S(g)S^*(g)]\Phi(g).$$

В соответствии с принципом причинности изменение g в бесконечно малой окрестности точки y может повлиять на процессы движения лишь для $x^0 > y^0$, и потому оператор

$$1 + \delta S(g)S^*(g),$$

переводящий $\Phi(g)$ в $\Phi(g+\delta g)$, не должен зависеть от поведения функции $g(x)$ при $x^0 < y^0$.

Следовательно, по соображениям ковариантности этот оператор не может зависеть от поведения функции $g(x)$ и при $x \sim y$ ($\sim$ — знак пространственной подобности интервала между точками x и y).

Таким образом, условие причинности формулируется в виде следующего равенства:

$$\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}S^*(g)\right) = 0 \quad \text{при} \quad y \gtrsim x. \tag{4}$$

Чтобы прийти к фактическому построению оператора $S(g)$, удовлетворяющего всем этим требованиям, воспользуемся формальным функциональным разложением по степеням g:

$$S(g) = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int S_n(x_1,\ldots,x_n)\,g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n, \tag{5}$$

в котором $S_n(x_1,\ldots,x_n)$ являются некоторыми полилокальными операторами, т. е. операторными выражениями вида

$$S_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum K_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x_1,\ldots,x_n)\Psi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\Psi_{\alpha_n}(x_n), \tag{6}$$

зависящими от полных полевых функций и их частных производных $\Psi_\alpha(x)$ в точках x. При этом для обеспечения скалярного характера S_n фермионы должны входить сюда лишь в четных комбинациях. Здесь K — неквантованные c-функции, которые мы будем называть коэффициентными функциями.

Следует подчеркнуть, что требование зависимости S_n от полевых функций в целом, а не от их отдельных положительно- и отрицательно-частотных частей представляет особое физическое условие. При его выполнении имеет место соотношение

$$[S_n(x_1, \ldots, x_n); S_m(y_1, \ldots, y_m)] = 0,$$

когда все точки x_i пространственноподобны любой точке y_j.

Поэтому если две функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ локализованы в пространственно-временны́х областях, таких, что любая точка одной области пространственноподобна всем точкам другой области, то $S(g_1)$ коммутирует с $S(g_2)$. Этим, в сущности, выражается тот факт, что сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света, и процессы включения взаимодействия во взаимно пространственноподобных областях не интерферируют друг с другом.

Заметим, что коэффициентные функции K оказываются, вообще говоря, всегда сингулярными.

Поэтому для обеспечения сходимости отдельных членов разложения (5) в классе функций $g(x)$, достаточно гладких и достаточно быстро убывающих на бесконечности, мы должны потребовать, чтобы функции K были определены как интегрируемые сингулярные функции, т. е. чтобы были заданы правила их интегрирования с функциями, достаточно гладкими и достаточно быстро убывающими на бесконечности.

Удобным средством для такого определения коэффициентных функций является несобственный предельный переход и сопоставление им линейных функционалов, заданных в соответствующем линейном пространстве достаточно регулярных функций.

Мы говорили сейчас об обеспечении сходимости отдельных членов разложения (5). Разумеется, сходимость отдельных членов этого ряда не имеет отношения к сходимости всего ряда в целом. В настоящее время в связи с появлением нескольких недавно опубликованных результатов существуют даже довольно веские основания ожидать, что разложение (5) окажется расходящимся.

В лучшем случае при малости взаимодействия можно надеяться, что, взяв некоторое небольшое число членов в разложении, мы получим приближение тем более точное, чем слабее взаимодействие.

Иначе говоря, в некоторых случаях можно рассматривать ряд (5) как источник асимптотических приближений.

Одним из таких случаев, важных в практическом отношении, является электродинамика.

Однако и при заведомо не слабом взаимодействии (например, мезонно-нуклонном взаимодействии) изучение рассматриваемого формального разложения представляет интерес, так как на этом пути мы сможем выяснить ряд свойств оператора $S(g)$, как качественных, так и количественных, с тем чтобы далее попытаться их установить на более строгой основе. К тому же такой подход наиболее полно соответствует современному фактическому состоянию теории поля, где до сих пор не удается избавиться от различных формальных разложений по степеням малости взаимодействия и где с их помощью и были получены все основные результаты.

Прежде чем приступить к последовательному определению полилокальных операторов S_n, свяжем первый член, S_1, с лагранжианом взаимодействия в духе принципа соответствия.

Пусть взаимодействие включено лишь с бесконечно малой интенсивностью. Тогда можно написать

$$S(g) = 1 + \int S_1(x)\, g(x)\, dx. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь аналогичное положение в классической теории. Введем действие A в классической системе, в случае, когда взаимодействие включено с бесконечно малой интенсивностью $g(x)$. Имеем

$$A = \int \{\mathcal{L}_0(x) + g(x)\mathcal{L}_{\text{int}}(x)\}\, dx, \tag{8}$$

где $\mathcal{L}_0(x)$ — лагранжиан свободного поля, $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$— лагранжиан взаимодействия.

Сюда подставлены полевые функции, удовлетворяющие соответствующим уравнениям движения.

В частности, если рассматривать $g(x)$ как бесконечно малую величину первого порядка, то эти полевые функции будут отличаться от свободных полевых функций также на бесконечно малые первого порядка. С другой стороны, поскольку уравнения свободных полей получаются из вариационного принципа

$$\delta \int \mathcal{L}_0(x)\, dx = 0,$$

отсюда следует, что если в интеграле

$$\int \mathcal{L}_0(x)\, dx$$

полевые функции взяты с ошибкой первого порядка малости, то сам интеграл будет отличаться от своего истинного значения на величины второго порядка малости. Далее, второй член в (8) будет первого порядка малости, и изменение в нем полевых функций на величины первого порядка вызывает ошибку второго порядка малости. Поэтому с точностью до величин второго порядка мы можем подставить в выражение классического действия (8) волновые функции свободных полей.

Таким образом, при включении взаимодействия с бесконечно малой интенсивностью $g(x)$ действие A получит приращение

$$\delta A = \int g(x)\, \mathcal{L}_{\text{int}}(x)\, dx,$$

в котором в лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$ введены в качестве полевых функций свободные полевые функции.

Теперь обратим внимание на то, что при переходе от классической теории к квантовой выражение e^{iA} должно заменяться на квантово-механическую волновую функцию, или, в терминологии теории поля, на амплитуду состояния. В силу этого принципа соответствия мы видим, что при включении взаимодействия с бесконечно малой интенсивностью амплитуда состояния

получает приращение

$$\left(e^{i\delta A}-1\right)\Phi = i\delta A\Phi = i\int g(x)\,\mathcal{L}_{\text{int}}(x)\,dx\,\Phi.$$

С другой стороны, на основании (7) это приращение в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\int S_1(x)\,g(x)\,dx\,\Phi.$$

Отсюда ясно, что

$$S_1(x) = i\mathcal{L}_{\text{int}}(x).$$

Таким образом, первый член разложения (5) определяется лагранжианом взаимодействия $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$.

Перейдем теперь к вопросу о последовательном определении полилокальных операторов $S_n(x_1,\ldots,x_n)$ для $n>1$.

Заметим прежде всего, что ввиду симметричности весового множителя $g(x_1)\ldots g(x_n)$, входящего в члены разложения (5), мы можем без ограничения общности считать эти операторные функции симметричными по отношению к аргументам $x_1,\ldots,x_n$.

Подставим теперь разложение (5) в соотношения (2)–(4), выражающие соответственно условия ковариантности, унитарности и причинности.

Таким путем найдем следующую систему условий для определения полилокальных операторов $S_n(x_1,\ldots,x_n)$:

$$S_n(Lx_1,\ldots,Lx_n) = U_L^* S_n(x_1,\ldots,x_n)U_L, \tag{9}$$

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)+S_n^*(x_1,\ldots,x_n)+ \\ +\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right) S_k(x_1,\ldots,x_k)\,S_{n-k}^*(x_{k+1},\ldots,x_n)=0, \tag{10}$$

$$S_{n+1}(x,x_1,\ldots,x_n)+ \\ +\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right) S_{k+1}(x,x_1,\ldots,x_k)\,S_{n-k}^*(x_{k+1},\ldots,x_n)=0, \tag{11}$$

если хотя бы для одного из $j=1,\ldots,n$ выполняется неравенство $x\gtrless x_j$.

Здесь

$$P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right)$$

обозначает симметризацию по всем возможным $n!/(k!(n-k)!)$ разбиениям совокупности n точек на две подсовокупности соответственно из k и $n-k$ точек.

Проанализируем сейчас, с какой степенью произвола эти условия позволяют определить оператор S_{n+1} исходя из уже известных выражений для операторов $S_1,\ldots,S_n$.

Заметим, что в силу условий (11) разность

$$\Delta S_{n+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) \tag{12}$$

двух возможных S_{n+1} при одних и тех же данных $S_1, \ldots, S_n$ обладает свойством

$$\Delta S_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0,$$

если хотя бы для одного $j = 2, \ldots, n+1$ выполняется неравенство $x_1 \gtrsim x_j$.

Так как, кроме того, разность (12) должна быть симметричной функцией всех аргументов $x_1, \ldots, x_{n+1}$, мы видим отсюда, что разность

$$\Delta S_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0, \tag{13}$$

если существует хотя бы одна пара неравных аргументов: $x_a \neq x_b$.

Условимся называть квазилокальными полилокальные операторы, обладающие этим свойством обращения в нуль везде, за исключением бесконечно малой окрестности точки полного совпадения всех аргументов.

Ввиду такого определения характерной особенностью квазилокальных операторов будет то, что их коэффициентные функции $K(x_1, \ldots, x_{n+1})$ являются выражениями типа

$$Z\Big(\ldots \frac{\partial}{\partial x} \ldots\Big)\delta(x_1 - x_2)\ldots\delta(x_1 - x_{n+1}),$$

где $Z\big(\ldots \partial/\partial x \ldots\big)$ — некоторые полиномы по отношению к операциям дифференцирования.

Именно в силу этого свойства квазилокальные операторы, так же как и локальные, фактически зависят от поведения полевых функций лишь в бесконечно малой окрестности одной точки.

Как мы только что установили (см. (13)), выражение S_{n+1} определяется условиями причинности (11) по полученным ранее выражениям $S_1, \ldots, S_n$ с точностью до произвольного квазилокального оператора.

Благодаря условиям симметрии и ковариантности этот квазилокальный оператор должен быть симметричным и преобразовываться как скаляр.

Обратимся теперь к условиям унитарности (10), из которых следует, что сумма

$$S_{n+1} + S_{n+1}^*$$

полностью определяется предыдущими выражениями $S_1, \ldots, S_n$. Отсюда вытекает, что упомянутый квазилокальный оператор должен быть антиэрмитов.

Итак, при помощи наших условий выражение для оператора S_{n+1} определяется выражениями $S_1, \ldots, S_n$ с точностью до аддитивного члена

$$i\Lambda_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}), \tag{14}$$

в котором Λ_{n+1} — скалярный квазилокальный оператор со свойствами симметрии и эрмитовости.

Если бы кроме упоминавшихся уже условий выражения для S_n должны были удовлетворять еще ряду добавочных условий, например условию градиентной инвариантности, то появились бы также соответствующие ограничения и на выбор Λ_n.

Возьмем некий скалярный, эрмитов, локальный оператор $L(x)$ и заметим, что выражения вида

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = i^n T\{L(x_1), \ldots, L(x_n)\}$$

с хронологически упорядоченным T-произведением формально удовлетворяют всем нашим условиям.

Такому виду операторов S_n отвечает выражение

$$S(g)=T\left\{\exp\left(i\int\mathcal{L}_{\text{int}}(x)\,g(x)\,dx\right)\right\}.$$

Рассмотрим теперь несколько более общую форму

$$S(g)=T\left\{\exp\left(i\int\mathcal{L}(x;g)\,g(x)\,dx\right)\right\}, \tag{15}$$

в которой

$$\mathcal{L}(x;g)=\mathcal{L}_{\text{int}}(x)+\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n+1)!}\int\Lambda_{n+1}(x,x_1,\ldots,x_n)\,g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n \tag{16}$$

и Λ_{n+1} — скалярные квазилокальные операторы со свойствами симметрии и эрмитовости.

Отвлекаясь, как везде в данной статье, от вопросов сходимости разложения по степеням g, например считая, что сумма (16) состоит из конечного числа членов, можно заметить, что $\mathcal{L}(x;g)$ будет таким же локальным оператором, как и $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$, только зависящим еще от «классического поля» $g(x)$. В силу этого обстоятельства выражение (15), точнее, его коэффициенты в разложении по степеням g также удовлетворяют принятым условиям (9)–(11).

Выполняя разложение по степеням g из (15), (16), найдем

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)=i^nT\big(\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1)\ldots\mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)\big)+$$
$$+\sum_{\substack{2\leqslant m\leqslant n-1\\ \sum\nu_j=n,\,\nu_j\geqslant 1}}\frac{i^m}{m!}P\big(x_1,\ldots,x_{\nu_1}|\ldots|\ldots x_n\big)T\big\{\Lambda_{\nu_1}(x_1,\ldots,x_{\nu_1})\ldots\Lambda_{\nu_m}(\ldots,x_n)\big\}+$$
$$+i\Lambda_n(x_1,\ldots,x_n);\quad \Lambda_1(x)=\mathcal{L}_{\text{int}}(x), \tag{17}$$

где

$$P\big(x_1,\ldots,x_{\nu_1}|\ldots|\ldots,x_n\big)$$

обозначает операцию симметризации по всем $n!/(\nu_1!\ldots\nu_m!)$ разбиениям совокупности n точек $x_1,\ldots,x_n$ на m систем по $\nu_1,\ldots,\nu_m$ точек.

Заметим, между прочим, что проверку выполнения условий (9)–(11) полученными выражениями (17) можно провести и непосредственно, без обращения к «производящему функционалу» $S(g)$ (15).

Далее, нетрудно видеть, что формулы (17) дают самое общее выражение для операторов S_n, совместимое с наложенными требованиями, поскольку здесь в S_n кроме $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1}$, входящих также и в $S_1,\ldots,S_{n-1}$, содержится еще аддитивный член типа (14), а мы ранее установили, что S_n определяется через $S_1,\ldots,S_{n-1}$ как раз с точностью до такого аддитивного члена.

Тем самым оказывается, что рассматриваемая динамическая система, по-видимому, характеризуется не одним лагранжианом, а цепочкой лагранжианов

$$\Lambda_1(x),\ldots,\Lambda_n(x_1,\ldots,x_n),\ldots;\quad \Lambda_1(x)=\mathcal{L}_{\text{int}}(x).$$

Однако по этому поводу необходимо заметить, что физический смысл имеет вообще только состояние полного включения взаимодействия, когда

$g = 1$. В этом же случае, как видно из (15),

$$S = T\left\{ \exp\left(i \int \mathcal{L}_{\text{eff}}(x)\, dx \right) \right\}, \tag{18}$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = \mathcal{L}_{\text{int}}(x) + \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{1}{\nu!} \int \Lambda_\nu(x, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, dx_1 \ldots dx_{\nu-1}. \tag{19}$$

Таким образом, настоящий оператор рассеяния S фактически определяется одним лагранжианом $\mathcal{L}_{\text{eff}}(x)$. В этом эффективном лагранжиане мы по произволу можем относить его части к членам различных порядков в сумме (19), изменяя тем самым лишь математические операции «включения и выключения взаимодействия», что не должно оказывать влияния на физические величины, характеризующие динамическую систему, поскольку они относятся к действительному состоянию полного включения взаимодействия.

Перейдем теперь к вопросу об интегрируемости получаемых полилокальных операторов $S_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Заметим, как в свое время уже указывалось Штюкельбергом, что обычное определение произведения $\mathcal{L}_{\text{eff}}(x)$ в S-операторе при помощи введения хронологического порядка следования операторов $\mathcal{L}_{\text{eff}}(x)$ эффективно лишь при отсутствии совпадения аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Ввиду сингулярности соответствующих коэффициентных функций «доопределение» их в областях совпадения аргументов непосредственно не проводится и представляет особую проблему.

Заметим далее, что вопрос состоит здесь, строго говоря, не в определении коэффициентных функций операторов $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ в областях, где $x_r = x_s$, а в установлении правил их интегрирования в бесконечно малых окрестностях таких областей, поскольку нам необходимо определить коэффициентные функции S_n не как обычные функции, а как интегрируемые сингулярные функции — «ядра» соответствующих функционалов [4].

Если не обращать внимания на данную трудность и формально воспользоваться теоремой Вика, то мы придем к выражениям вида

$$\prod_{a<b} D^c(x_a - x_b), \tag{20}$$

состоящим из произведений причинных D^c-функций.

Переходя здесь к представлению Фурье, получим интегралы с известными «ультрафиолетовыми» расходимостями.

В этом проявляется то, что произведение сингулярных причинных функций (20) не определено как интегрируемая сингулярная функция.

Интересно отметить, что подобных трудностей не возникает в том случае, когда мы имеем дело с обычным произведением операторов.

Так, например, коэффициентные функции обычного произведения неких локальных операторов

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \ldots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)$$

представляются произведениями

$$\prod_{a<b} D^{(-)}(x_a - x_b) \tag{21}$$

отрицательно-частотных частей D-функций и непосредственно определяются как интегрируемые сингулярные функции.

Здесь существенно то, что при переходе к представлению Фурье получающиеся интегралы для фурье-образов выражений (21) фактически берутся по конечной импульсной области и потому оказываются сходящимися.

В силу этого же обстоятельства устанавливается и более общая теорема о том, что если полилокальные операторы

$$A(x_1, \ldots, x_k), \quad B(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

с независимыми аргументами интегрируемы, то будет интегрируемым и полилокальный оператор, представляющий их обычное произведение

$$A(x_1, \ldots, x_k)\, B(x_{k+1}, \ldots, x_n). \tag{22}$$

Более того, в выражениях типа (22) можно проводить несобственный предельный переход.

Таким образом, «проблема доопределения» для обычных операторных произведений не возникает; ее появление обусловлено операцией хронологического упорядочения.

Решение этой проблемы для T-произведений может быть проведено следующим путем.

Регуляризуем D-функции, например, при помощи введения дополнительных масс M по методу Паули–Вилларса. Этим мы добиваемся того, что коэффициентные функции выражений

$$S_n^M = i^n \operatorname{reg}_M T(\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \ldots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)) \tag{23}$$

оказываются непрерывными. Тем самым при конечных, фиксированных M вопрос о доопределении T-произведений не ставится и данные полилокальные операторы (23) удовлетворяют всем нашим условиям.

Трудности появляются при переходе к процессу снятия регуляризации, когда дополнительные фиктивные массы устремляются к бесконечности.

Оказывается, что тогда коэффициентные функции операторов (22) не стремятся к пределу, даже в несобственном смысле, и потому нельзя определять S_n как

$$\lim_{M \to \infty} S_n^M(x_1, \ldots, x_n).$$

Можно, однако, показать, как для данного лагранжиана $L(x)$ построить цепочку квазилокальных операторов

$$\Lambda_2^M(x_1, x_2), \ldots, \Lambda_n^M(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$

с коэффициентами, зависящими от M таким образом, что выражения типа (17)

$$\begin{aligned} S_n^M(x_1, \ldots, x_n) = i^n \operatorname{reg}_M T(\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \ldots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)) + \\ + \sum_{\substack{2 \leqslant m \leqslant n-1 \\ \Sigma \nu_j = n,\ \nu_j \geqslant 1}} \frac{i^m}{m!} P(x_1, \ldots, x_{\nu_1} | \ldots | \ldots, x_n) \operatorname{reg}_M \times \\ \times T\{\Lambda_{\nu_1}^M(x_1, \ldots, x_{\nu_1}) \ldots \Lambda_{\nu_m}^M(\ldots, x_n)\} + i\Lambda_n^M(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{24}$$

являются уже сходящимися в несобственном смысле.

В силу этого обстоятельства мы и условимся определять операторы $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ как несобственный предел выражений (24) при $M \to \infty$.

Получаемые таким путем полилокальные операторы по определению являются интегрируемыми. Кроме того, они удовлетворяют всем условиям (9)–(11).

Действительно, выражения (24) удовлетворяют этим условиям при конечных M, возможность предельного перехода в соотношении (9) тривиальна, а в соотношениях (10), (11) она обеспечивается теоремой о свойствах обычного произведения двух полилокальных операторов с независимыми аргументами.

Данное принципиальное определение интегрируемых полилокальных операторов S_n практически реализуется на диаграммах Фейнмана как применение особой вычитательной процедуры [5], аналогичной обычной процедуре Дайсона–Салама.

Подчеркнем, что здесь возможны две совершенно, впрочем, эквивалентные точки зрения.

Так, можно считать, что указанным путем мы совершаем доопределение T-произведения в смысле Штюкельберга и получаем новое T'-произведение, автоматически приводящее к интегрируемым полилокальным операторам

$$S_n = i^n T'(\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)).$$

С этой точки зрения имеем символически

$$S = T'\left(\exp\left(i\int \mathcal{L}_{\text{int}}(x)\,dx\right)\right).$$

С тем же правом можем оставаться и при обычном определении T-произведения, имеющем полный смысл при работе с регуляризованными причинными функциями, до перехода к пределу.

Тогда символически

$$S = \lim_{M\to\infty} \operatorname{reg}_M T\left(\exp\left(i\int(\mathcal{L}_{\text{int}}(x) + \mathcal{L}_c(x))\,dx\right)\right),$$

где

$$\mathcal{L}_c(x) = \sum_{\nu\geqslant 2} \frac{1}{\nu!}\int \Lambda_\nu^M(x, x_1, \dots, x_{\nu-1})\,dx_1 \dots dx_{\nu-1}. \tag{25}$$

С этой точки зрения данный «затравочный» лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$ нужно дополнить «контрчленами» $\mathcal{L}_c(x)$. Их коэффициенты в разложении (25) конечны при фиксированных M, но вообще стремятся к бесконечности при $M \to \infty$.

Таким образом, расходимости в $\mathcal{L}_c(x)$ служат для компенсации расходимостей, появляющихся в операторе рассеяния от исходного лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$.

Список литературы

1. *Stueckelberg E. C. G., Rivier D.* // Helv. Phys. Acta. 1950. Vol. 23. Suppl. 3. P. 236.
2. *Stueckelberg E. C. G., Green T. A.* // Helv. Phys. Acta. 1951. Vol. 24. P. 153.
3. *Stueckelberg E. C. G., Petermann A.* // Helv. Phys. Acta. 1953. Vol. 26. P. 499.
4. *Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.* // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100, № 1. С. 25–28; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. IX, 2007. Приложение, с. 481.
5. *Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.* // Там же. № 3. С. 429–432; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. IX, 2007. Приложение, с. 486.

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Совместно с Б.В. Медведевым, М.К. Поливановым

§ 1. Введение[1]

В последнее время в квантовой теории поля наметилось новое направление, которое, как мы уверены, будет иметь большое будущее. Это направление связано с так называемыми дисперсионными соотношениями, т. е. с соотношениями между эрмитовой часть амплитуды рассеяния и определенного рода интегралом по энергии от ее антиэрмитовой части. В известной степени такие соотношения возникают независимо от конкретных деталей рассматриваемой теории; существенным для их получения оказывается в основном лишь требование микроскопической причинности, которое обычно формулируется (с учетом условий релятивистской инвариантности) в виде требования обращения в нуль коммутаторов полевых величин в пространственноподобных точках. Именно этот общий характер дисперсионных соотношений, с одной стороны, и то, что они связывают величины, поддающиеся непосредственному измерению (что нетривиально для квантовой теории поля), — с другой, обусловливают большой интерес, вызываемый подобными исследованиями не только со стороны теоретиков, но и со стороны экспериментаторов.

Литература по дисперсионными соотношениям насчитывает не один десяток названий, и уже сравниваются с опытом дисперсионные соотношения для ряда конкретных физических процессов. Однако до сих пор не был предложен способ получения этих соотношений, удовлетворяющий хотя бы обычному для физических работ уровню строгости. Уже одно обилие различных путей их получения, предлагаемых иногда одними и теми же авторами, указывает на неблагополучие в обосновании всего направления. Кроме того, до сих пор остается открытым вопрос о физических допущениях, реально необходимых для получения дисперсионных соотношений, и вопрос о том, в какой степени дисперсионные соотношения связаны с современной схемой квантовой теории поля или насколько можно обобщить теорию, не нарушив их справедливости.

Именно этим двум проблемам и посвящено настоящее исследование. Во втором разделе мы сформулируем те основные положения, которые следует, по нашему мнению, заимствовать у обычной теории, чтобы сделать возможным

[1] Этот манускрипт был написан не для публикации, а как материал по курсу лекций для студентов. Эти лекции воспроизведены осенью 1956 г. Институтом перспективных исследований (Принстон, США) с разрешения профессора Н. Н. Боголюбова.

вывод дисперсионных соотношений. В остальном построение теории может быть произвольным; в частности, нам не понадобится ни фиксировать вид лагранжиана (или вообще выписывать его явно), ни прибегать к гамильтонову подходу.

Основными величинами, с которыми мы будем работать, будут вариационные производные матрицы рассеяния по полям реальных частиц — так называемые радиационные операторы. Раздел 3 будет посвящен установлению некоторых общих соотношений между такими операторами. Изучение радиационных операторов тесно связано с изучением функций Грина для реальных частиц. Поэтому разделы 4 и 5 будут отведены новому выводу известных спектральных представлений Челлена–Лемана. Этот вывод будет основан на изучении свойств аналитичности вакуумных матричных элементов соответствующих радиационных операторов и обладает тем преимуществом, что нигде, даже на промежуточных этапах, не будут появляться расходящиеся выражения. Наконец, разделы 6 и 7 посвящены выводу дисперсионных соотношений.

Заметим, что сами по себе дисперсионные соотношения отнюдь не являются в физике чем-то новым, и различные их виды были известны еще до создания квантовой теории поля. Еще в 1926–1927 гг. Крониг и Крамерс в классической электродинамике получили дисперсионное соотношение между вещественной и мнимой частями показателя преломления

$$\mathrm{Re}[n(\omega)-n(0)]=P\int_0^\infty \frac{2\omega^2\,\mathrm{Im}\,n(\omega')}{\pi\omega'(\omega'^2-\omega^2)}\,d\omega, \tag{1.1}$$

также обусловленное тем обстоятельством, что сигналы не могут распространяться со скоростью, большей скорости света. В настоящее время различные формы дисперсионных соотношений широко используются в ряде разделов радиотехники.

Основным математическим средством для получения дисперсионных соотношений является известная интегральная теорема Коши. Поскольку в квантовой теории поля фактически приходится в ряде случаев иметь дело с обобщенными функциями, то, применяя эту теорему, нужно соблюдать определенную осторожность.

Пусть мы имеем функцию $f(E)$, аналитическую в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\ E>0$, со свойствами:

(а) для любого положительного δ можно указать такую постоянную $A(\delta)$, что

$$|f(E)|\leqslant\frac{A(\delta)}{E} \tag{1.2}$$

при $\mathrm{Im}\ E>0$;

(б) когда $\mathrm{Im}\ E\to 0$, функция $f(E)$ стремится в несобственном смысле к функции, интегрируемой в классе $C(q,\tau)$ (q — некоторое положительное целое число). Слова «функция $f(E)$ интегрируема в классе $C(q,\tau)$» означают, что $f(E)$ определена на вещественной оси как ядро линейного функционала

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(E')h(E')\,dE' \tag{1.3}$$

в линейном пространстве функций $h(E)$, которые удовлетворяют условиям

$$|E^s h^{(p)}(E)| < \text{const} \tag{1.4}$$

для $-\infty < E < +\infty$; $s = 0, 1, \ldots, \tau$; $p = 0, 1, \ldots, q$, а предел в несобственном смысле означает, что существует обычный предельный переход для соответствующего функционала[1].

Мы будем называть аналитическую функцию, которая удовлетворяет сформулированным выше условиям, регулярной на верхней полуплоскости.

Построим теперь замкнутый контур, образованный отрезком $(i\delta - R, i\delta + R)$ и полуокружностью радиуса R, лежащей в верхней полуплоскости. Так как в силу свойства (а) интеграл от $f(E')/(E - E')$ по этой полуокружности будет при $R \to \infty$ стремиться к нулю, то из теоремы Коши следует, что

$$f(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\delta-\infty}^{i\delta+\infty} \frac{f(E')}{E' - E}\, dE', \quad \text{Im } E > \delta > 0. \tag{1.5}$$

Приняв во внимание свойство (б), мы сможем сместить контур интегрирования на вещественную ось, устремив $\delta \to 0$, и написать

$$f(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(E')}{E' - E}\, dE', \quad \text{Im } E > 0. \tag{1.6}$$

Переведем теперь на вещественную ось также точку $E(\text{Im } E \to 0)$ и заметим, что для вещественных E и E' имеет место символическое тождество

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{E' - E - i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{E' - E}\right) + i\pi\delta(E' - E). \tag{1.7}$$

Мы получим тогда

$$f(E) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(E')}{E' - E}\, dE', \quad -\infty < E < \infty. \tag{1.8}$$

Если выделить в этой формуле вещественную часть, то мы придем к типичному «дисперсионному соотношению»

$$\text{Re } f(E) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } f(E')}{E' - E}\, dE'. \tag{1.9}$$

Однако использовать дисперсионное соотношение непосредственно в виде (1.9) в большинстве случаев не удается, так как во многих приложениях условия (а) и (б) оказываются слишком жесткими: реальные физические функции, фигурирующие в дисперсионных соотношениях, могут не только не убывать на бесконечности, но даже и возрастать, однако не быстрее некоторого полинома.

[1] Подробное определение интегрируемой функции и несобственных пределов дано в работе: *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* // УФН. 1955. Т. 55, вып. 2. Разд. 2. С. 164.

Покажем, что не составляет труда распространить проведенные рассуждения и на случай функций $f(E)$, аналитических в верхней полуплоскости, для которых вместо (а) и (б) выполняются менее жесткие условия:

(а′) имеется такое целое $m > 0$, что для любого $\delta > 0$ можно указать постоянные $A_j(\delta)$, такие, что

$$|f(E)| \leqslant A_0(\delta)|E|^m + \ldots + A_m(\delta) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}(E) > 0; \tag{1.10}$$

(б′) при $\operatorname{Im} E \to 0$ функция $f(E)$ стремится в несобственном смысле к функции, интегрируемой в некотором классе $C(q, \tau)$. Мы будем говорить, что такие аналитические функции обладают на бесконечности полюсом n-го порядка, где n — наибольшее из чисел $(m+1)$ и $(\tau - 2)$, или что они не имеют на бесконечности существенной особенности.

Чтобы свести этот случай к предыдущему, рассмотрим наряду с функцией $f(E)$ функцию

$$g(E) = \frac{f(E)}{(E' - E + i\varepsilon)^{n+1}}. \tag{1.11}$$

Ясно, что если $f(E)$ аналитична в верхней полуплоскости и обладает на бесконечности полюсом не выше n-го порядка, то функция $g(E)$ будет регулярной в верхней полуплоскости при любом вещественном E_0 и положительном ε. Следовательно, для $g(E)$ можно будет воспользоваться соотношением (1.8) и написать

$$f(E) = \frac{(E - E_0 + i\varepsilon)^{n+1}}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(E')\,dE'}{(E' - E_0)(E' - E_0 + i\varepsilon)^{n+1}}, \tag{1.12}$$

$$-\infty < E, E_0 < +\infty.$$

С помощью аналогичного (1.7) символического тождества

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{(E - E_0 + i\varepsilon)^{n+1}} = P\left\{\frac{1}{(E' - E_0)^{n+1}}\right\} - \frac{i\pi(-)^n}{n!}\,\delta^{(n)}(E' - E_0) \tag{1.13}$$

мы сможем опять разделить в интеграле (1.12) δ-образные части и главные значения и получить

$$\begin{aligned} f(E) &= \frac{(E - E_0)^{n+1}}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(E')\,dE'}{(E' - E_0)(E' - E_0)^{n+1}} + \\ &+ f(E_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(E_0)}{n!}(E - E_0)^n, \\ &-\infty < E, E_0 < +\infty. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Таким образом, и в рассматриваемом случае функций, обладающих на бесконечности полюсом не выше n-го порядка, опять можно записать соотношения типа (1.8). Они, однако, будут теперь 1) выполняться лишь с точностью до полиномов степени n и 2) обладать более сложным ядром, обеспечивающим сходимость интеграла (простой интеграл типа (1.8) был бы для растущей на бесконечности функции расходящимся).

Соотношению (1.14) можно придать и несколько более удобную форму.

Выберем для этого какие-либо вещественные c_j, E_j, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{(j)} c_j E_j^q = 0 \quad \text{при} \quad q = 0, 1, \ldots, n, \tag{1.15}$$

и определим операцию Σ в применении к любой функции $f(E)$, как

$$\Sigma f(E) = \sum_{(j)} c_j f(E_j). \tag{1.16}$$

Ясно, что в силу условий (1.15) операция Σ в применении к любому полиному от E степени не выше n дает нуль. Заметим теперь, что разность

$$\left\{ \frac{(E - E_0)^{n+1}}{(E' - E)(E' - E_0)^{n+1}} - \frac{1}{E' - E} \right\} \tag{1.17}$$

по отношению к E является полиномом n-й степени (при объединении обоих членов знаменатель $(E' - E)$ сократится). Поэтому

$$\Sigma \left\{ \ldots \frac{(E - E_0)^{n+1}}{(E' - E)(E' - E_0)^{n+1}} - \frac{1}{E' - E} \ldots \right\} =$$

$$= \sum_{(j)} c_j \left\{ \frac{(E_j - E_0)^{n+1}}{(E' - E_j)(E' - E_0)^{n+1}} - \frac{1}{E' - E_j} \right\} = 0. \tag{1.18}$$

Применяя операцию Σ к обеим частям (1.14), получаем немедленно

$$\sum_{(j)} c_j f(E_j) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} f(E') \sum_{(j)} \frac{c_j}{E' - E_j} dE', \tag{1.19}$$

поскольку все полиномы при этом уничтожаются.

Таким образом, можно сказать, что «простое» соотношение (1.8) сохраняется и по отношению к функциям $f(E)$, полиномиально возрастающим на бесконечности, стоит только применить к нему исключающую полиномы операцию Σ с соответствующим n.

Могло бы показаться, что для полиномиально возрастающих функций $f(E')$ правая часть (1.19) не имеет смысла из-за расходимости интегралов (как это было замечено в соотношении (1.8)). Однако это не так, поскольку из анализа вывода этого соотношения видно, что хотя интеграл от каждого отдельного члена в сумме по j и будет расходиться, но интеграл от входящей в формулу (1.19) линейной комбинации с c_j и E_j, удовлетворяющей условиям (1.15), должен быть сходящимся.

Окончательно, выделяя в обеих частях равенства (1.19) вещественные части, мы получаем соответствующее дисперсионное соотношение

$$\sum_{(j)} c_j \operatorname{Re} f(E_j) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} f(E') \sum_{(j)} \frac{c_j}{E' - E_j} dE. \tag{1.20}$$

Чтобы воспользоваться математическими дисперсионными соотношениями для изучения какого-либо процесса соударения частиц, необходимо предварительно убедиться, что соответствующая амплитуда рассеяния как функция

энергии может быть надлежащим образом продолжена на верхнюю полуплоскость. Чтобы сразу же пояснить связь, существующую между свойством аналитической продолжимости амплитуды рассеяния в верхнюю полуплоскость и условием причинности, рассмотрим чисто иллюстративный одномерный пример.

Представим себе, что амплитуда рассеяния $f(E)$ определена как интеграл

$$f(E)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)e^{iE\tau}d\tau. \tag{1.21}$$

Ниже в разделах 2 и 3 будет показано, что условие причинности приводит именно к соотношениям такого типа, где

$$F(\tau)=0, \quad \text{при} \quad \tau<0. \tag{1.22}$$

Переходя в верхнюю полуплоскость

$$E=x+iy, \quad y>0, \tag{1.23}$$

заметим, что множитель $e^{-y\tau}$ играет роль режущего фактора, обеспечивающего сходимость интеграла (1.21), поскольку при $\tau<0$, где $e^{-y\tau}$ возрастает, функция $F(t)$ равна нулю.

Можно показать, что даже если $F(\tau)$ будет сингулярной функцией, лишь бы она оставалась интегрируемой в смысле данного выше определения (1.16), все равно интеграл (1.21) будет сходиться и определять функцию без существенных особенностей на бесконечности.

Иное положение мы встретим, если $F(\tau)$ обращается в нуль лишь для $\tau<-a$, где a — некоторая «элементарная длина». Тогда, заменяя в (1.21)

$$\tau\to\tau-a, \tag{1.24}$$

увидим, что

$$f(E)=e^{-iaE}f_1(E). \tag{1.25}$$

Теперь только фактор $f_1(E)$ не обладает существенной особенностью на бесконечности, но фактор e^{-iaE} и, следовательно, функция $f(E)$ такой особенностью обладают. Поэтому в данном случае, чтобы получить функцию, для которой выполняются дисперсионные соотношения, необходимо умножить $f(E)$ на $e^{i\alpha E}$ с $\alpha\geqslant a$.

На самом деле ситуация будет значительно более сложной хотя бы потому, что интегрирование в формулах, заменяющих (1.21), будет выполняться по большому числу переменных. Однако, как мы увидим дальше, несмотря на необходимость существенного технического усовершенствования приведенного сейчас рассуждения, основа его сохранится неизменной.

Как уже упоминалось, аналитическому поведению амплитуды рассеяния было посвящено много работ. Прежде всего следует упомянуть фундаментальные работы Гейзенберга, наметившие программу непосредственного изучения матрицы рассеяния, преобразующей асимптотику падающей волны в асимптотику уходящей волны, и примыкающие к ним исследования Ху Нина, ван-Кампена, М. Г. Крейна. В последних рассматривался процесс упругого соударения двух частиц с точки зрения обычной квантовой механики, сво-

димый к задаче рассеяния одной частицы на неподвижном силовом центре. В качестве $f(E)$ здесь изучалась компонента амплитуды рассеяния, соответствующая парциальной волне с определенным моментом импульса, главным образом амплитуда s-волны.

Важным результатом, полученным в этом направлении, являются теоремы о возможности аналитического продолжения амплитуды s-рассеяния $f_s(E)$ на верхнюю полуплоскость для того случая, когда взаимодействие практически исчезает на расстояниях больших, чем радиус некоторой «сферы действия». При этом оказывается, однако, что, как это очевидно из приведенного выше иллюстративного примера, на бесконечности $f_s(E)$ может иметь существенную особенность, которая устраняется умножением на режущий фактор e^{iaE}. Поэтому регулярной в верхней полуплоскости будет только функция

$$f_s e^{iaE}, \tag{1.26}$$

для которой будет применимо дисперсионное соотношение (1.9).

Такого типа дисперсионное соотношение было недавно применено Гёбелем, Карплюсом, Рудерманом к упругому рассеянию пионов на нуклонах. Используя имеющиеся экспериментальные данные по амплитудам s-рассеяния, эти авторы пришли к тому интересному результату, что радиус пион-нуклонного взаимодействия должен быть больше, чем 0,1 комптоновской длины волны для пиона.

Стоит, однако, отметить, что эти работы исходят из схемы обычной квантовой механики, не учитывающей особенностей теории поля, в частности возможности процессов рождения и уничтожения частиц.

Дисперсионные соотношения для рассеяния бозонов в квантовой теории поля были предметом исследования другого направления, представленного работами Гелл-Мана, Гольдбергера, Тирринга, Карплюса, Рудермана, Миязавы, Оэме и др. В них в качестве $f(E)$ рассматривается амплитуда рассеяния вперед в лабораторной системе отсчета и изучается вопрос об ее аналитическом продолжении на верхнюю полуплоскость, причем считается, что ее особенность на бесконечности будет не сильнее полюса первого порядка.

Рассмотрение амплитуды рассеяния вперед особенно удобно в силу того обстоятельства, что по так называемой «оптической теореме» ее мнимая часть пропорциональна полному эффективному сечению, т. е. величине, которую опять-таки можно определить экспериментально. Оптическая теорема представляет собой следствие унитарности матрицы рассеяния и легко может быть доказана в самой общей форме.

Действительно, условимся обозначать индексами α и β совокупность всех квантовых чисел полной системы состояний. Тогда условие унитарности матрицы рассеяния запишется как

$$\sum_{\beta} S_{\alpha\beta} S^*_{\alpha\beta} = 1. \tag{1.27}$$

Положим

$$S_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + iT_{\alpha\beta}, \tag{1.28}$$

тогда $T_{\alpha\beta}$ будет пропорциональна амплитуде упругого рассеяния для процесса $\alpha \to \beta$. Подставляя $T_{\alpha\beta}$ в условие унитарности, найдем

$$i(T^*_{\alpha\alpha} - T_{\alpha\alpha}) = \sum_{(\beta)} |T_{\alpha\beta}|^2. \tag{1.29}$$

В этом соотношении слева стоит, очевидно, мнимая часть амплитуды упругого рассеяния на нулевой угол, а правая часть как раз пропорциональна полному сечению для всех возможных процессов.

В нормировке, принятой в теории столкновений частиц, полное сечение $\sigma_\tau(E)$ связано с $\operatorname{Im} f(E)$ равенством

$$\operatorname{Im} f(E) = 4\pi k \sigma(E), \tag{1.30}$$

где k — волновое число, соответствующее энергии E. Вещественная часть $f(E)$ определяется тогда из соотношения

$$[\operatorname{Re} f(E)]^2 + [4\pi k \sigma(E)]^2 = |f(E)|^2 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta=0}. \tag{1.31}$$

Первый вывод дисперсионных соотношений в формализме квантовой теории поля был предложен Гелл-Маном, Гольдбергером и Тирингом, которые воспользовались теоремой Коши, установив предварительно должные аналитические свойства амплитуды рассеяния вперед. Однако их доказательство аналитичности, во всяком случае для частиц с массой, отличной от нуля, не свободно от возражений, серьезность которых была признана самими авторами. Карплюс и Рудерман установили дисперсионное соотношение для процессов рассеяния нейтральных пионов на нуклонах, однако их вывод основывался на аналитичности амплитуды рассеяния как предварительном предположении. Это предположение может быть получено просто как следствие теорем о свойствах функций Грина, сформулированных Намбу. Однако их сколько-нибудь убедительное доказательство до сих пор не было предложено.

Наконец, недавно Гольдбергер попробовал вообще обойти вопрос об аналитическом продолжении амплитуды рассеяния в комплексную плоскость, рассматривая дисперсионные соотношения просто как некоторые тождества, чисто алгебраически следующие из определения дисперсивной и абсорбтивной частей (соответствующих разбиению выражения (1.7) на главное значение и δ-функцию) амплитуды рассеяния через сумму по полной системе промежуточных состояний. Однако легко заметить, что использованные им определения некорректны для $E < m$, так как при этом соответствующие интегралы расходятся.

Сделаем еще несколько замечаний относительно физического смысла величин, входящих в дисперсионные соотношения вида (1.9) или (1.20). В их левых частях стоит амплитуда упругого рассеяния вперед, а под интегралом справа — полное сечение. Обе эти величины наблюдаемы только для реальных состояний рассеяния, т. е. для энергий пиона положительных и больших, чем его масса m. В то же время интегрирование в правых частях этих соотношений распространяется на *все* значения энергии от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому, чтобы можно было практически использовать дисперсионные соотношения,

в них надо избавиться от интегрирования по отрицательным энергиям и «ненаблюдаемой» области $0 < E < m$.

Исключения интегрирования по отрицательным энергиям можно добиться за счет использования требования инвариантности относительно зарядового сопряжения (или для незаряженных полей вещественности), которое приводит к соотношению между амплитудой рассеяния от отрицательной энергии и сопряженной амплитудой для положительной энергии. Исключение отрицательных энергий с помощью такого приема возможно всегда, однако оно приводит к «впутыванию» в дисперсионные соотношения сечений для античастиц (противоположного заряда), что, например, в случае рассеяния нуклонов неудобно, поскольку сечения для антинуклонов пока экспериментально неизвестны.

Сложнее обстоит дело с «ненаблюдаемой» областью $E < m$, где, как мы выясним ниже, под интегралом возникают δ-функции $\delta(E - E_p)$ со значениями E_p, соответствующими возможным промежуточным связанным состояниям. Если такие связанные состояния (которые возможны в задаче) обладают дискретным спектром, то такие интегралы легко вычисляются в явном виде. Если же спектр промежуточных состояний хотя бы в какой-то части оказывается непрерывным, то ситуация становится менее благоприятной.

§ 2. Основные физические допущения

Как мы уже упоминали, обычно дисперсионные соотношения выводятся исходя из стандартной схемы квантовой теории поля. Говоря более конкретно, на примере псевдоскалярной мезонной теории, иногда даже применяются аргументы, вытекающие из теории возмущений. Однако мысль о том, что в действительности дисперсионные соотношения не связаны с обычным формализмом и должны получаться только из некоторых основных положений (которые, конечно, правомерны и в обычной теории), представляется почти тривиальной. Ввиду важности вопроса о применимости дисперсионных соотношений и возможности их обобщений мы хотим явно сформулировать те физические положения, которые необходимы для их вывода. Это представляется нам особенно важным, поскольку подробное изучение вводимых ниже радиационных операторов и установление соотношений между ними могли бы составить основу нового подхода к построению всей квантовой теории поля.

Современная схема квантовой теории поля базируется, в сущности, на трех основных допущениях — гамильтоновом формализме, применении теории возмущений и концепции адиабатического включения и выключения взаимодействия. Гамильтонов формализм приводит автоматически к выполнению строгого требования причинности (поскольку могущие нарушать это требование нелокальные варианты теории противоречат условию разрешимости уравнений). Однако в последнее время возникли сомнения в том, что внутренне непротиворечивую теорию вообще можно поместить в узкие рамки гамильтонова метода. Теория возмущений предоставляет нам возможность практического проведения вычислений, но соответствующие ряды, по-видимому, сходятся лишь асимптотически даже в случае слабой связи, не говоря уже о сильном взаимодействии, когда эта теория вообще неприменима. Достоинством концепции адиабатичности является кажущаяся простота соотношений

между реальными и свободными полями. Поскольку, однако, при этом в удаленном прошлом и удаленном будущем вместе со взаимодействием между частицами выключается и физически всегда существующее самодействие, эта концепция принципиально приводит к необходимости различать фиктивные и реальные свободные частицы, следовательно, в конечном счете ко всей перенормировочной идеологии.

Предложенная в 1943 г. Гейзенбергом общая схема построения матрицы рассеяния полностью отбросила гамильтонов формализм, по существу, не нуждалась в концепции адиабатичности и ничего не говорила о теории возмущений. Ввиду своей крайней общности предложенная постановка задачи не принесла, конечно, почти никаких конкретных результатов, и ее следует рассматривать скорее как программу для построения теории, чем как законченную схему. Подчеркнем, что, формулируя основные условия, которым должна подчиняться теория, Гейзенберг вовсе не рассматривал требование причинности, которому (хотя бы в виде условия макроскопической причинности) теория обязательно должна удовлетворять.

Разработанная недавно одним из авторов (Н. Н. Б.) и Ширковым теория матрицы рассеяния строилась исходя из гейзенберговских положений, которые были, однако, сильно сужены допущением разложения по постоянной связи, принятием концепции адиабатичности и, главное, тем, что к ним было присоединено требование причинности, сформулированное в виде строгого условия микроскопической причинности или локальности. Выяснилось, что эти допущения чрезвычайно сильно ограничивают теорию, приводят к схеме, по существу эквивалентной обычному гамильтонову методу и отличающейся от него лишь возможностью провести изложение с большей математической ясностью.

В последнее время проявляется стремление продолжить разработку первоначальной гейзенберговой программы. Прежде всего, здесь предпринимаются попытки уточнения основных определений, особенно существенные в свете необходимости ввести в теорию связанные состояния. Сюда относится важная работа Хаага, в которой уточняется ряд вопросов, связанных с математической формулировкой требований релятивистской инвариантности и процедуры вторичного квантования.

С точки зрения обычной теории поля способ введения связанных состояний в гейзенбергову схему не является очевидным. Если не прибегать к адиабатическому выключению взаимодействия, то образующие связанное состояние частицы находятся все время вблизи друг от друга, в то время как в гейзенберговой постановке задачи в начальном состоянии все частицы должны быть пространственно разнесены. Выход будет найден, если считать каждое конкретное связанное состояние частицей нового сорта и вместо образования связанного состояния говорить об уничтожении первоначальных элементарных частиц и рождении новой «составной частицы». Естественно, что при таком подходе возникает весьма сложная задача — понять, как описывать взаимодействие между этим большим числом вновь введенных в теорию составных частиц. Мы не собираемся останавливаться на этой проблеме.

Далее встает вопрос об описании начальных состояний пространственно разделенных частиц. Напомним, что в обычном изложении, когда возможно-

стью образования связанных состояний пренебрегают, можно разбить полный гамильтониан H на «кинетическую энергию» H_0 и взаимодействие V, причем начальные состояния, сколько бы свободных частиц в них ни было, являются собственными функциями H_0. Однако при таком разбиении из H_0 выбрасывается как самодействие (благодаря чему частицы в начальном состоянии оказываются не реальными, а фиктивными свободными частицами), так и та составляющая взаимодействия, которой обязаны своим существованием сами составные частицы (у H_0 таких частиц не будет). Мы хотим теперь так построить H_0, собственными функциями которого будут начальные состояния, чтобы избежать этих неприятностей. Этого можно будет добиться с помощью следующего построения.

Рассмотрим систему, описываемую полным гамильтонианом H (мы производим построение, руководствуясь принципом соответствия с обычной теорией). Обозначим через R_0 пространство, состоящее из единственного вектора, описывающего состояние вакуума. Обозначим через R_1 пространство всех одночастичных собственных состояний, т. е. таких состояний, в которых имеется только одна реальная элементарная частица. Если рассматриваемый гамильтониан допускает существование связанных состояний, то у него будут еще и собственные состояния, в которых имеется один связанный комплекс из $2, 3, \ldots$ реальных элементарных частиц. Натягивающиеся на такие состояния пространства обозначим через $R_2, R_3, \ldots$ соответственно. Заметим, что все базисные состояния, на которые натянуты пространства $R_1, R_2, \ldots$, можно охарактеризовать как одночастичные. Мы имеем при этом в виду две особенности таких состояний: 1) с точки зрения их наблюдения они обладают некоторой степенью локализации; 2) они являются стабильными.

Пространство, векторы которого можно будет рассматривать как функции, описывающие нужные нам начальные (или конечные) состояния, отвечающие любому числу реальных частиц, но между собой не взаимодействующих из-за пространственного разделения частиц, получится при этом очевидным образом, как прямое произведение всех пространств $R_1, R_2, \ldots$. При этом каждый из множителей может входить в это произведение произвольное число раз, в соответствии с тем, что в начальном состоянии может быть произвольное число частиц каждого сорта:

$$R = R_0 \times R_1 \times R_2 \times \ldots R_2 \times R_2 \times \ldots R_k \times \ldots \tag{2.1}$$

«Свободный» гамильтониан, собственными функциями которого являются функции, описывающие начальное состояние реальных невзаимодействующих друг с другом частиц, можно теперь построить так. Введем операторы проектирования гамильтониана H на пространства $R_0, R_1, \ldots, R_k, \ldots$ — операторы $P_0, P_1, \ldots, P_k, \ldots$ и определим «свободный» гамильтониан H_0 как прямую сумму:

$$H_0 = P_0 H P_0 + P_1 H P_1 + P_1 H P_1 + \ldots + P_2 H P_2 + P_2 H P_2 + \ldots . \tag{2.2}$$

Тогда полный гамильтониан H можно будет записать как

$$H = H_0 + V = H_0 + (H - H_0). \tag{2.3}$$

Гамильтониан взаимодействия V описывает теперь именно только взаимодействие частиц, но не самодействие, которое благодаря избранному методу построения полностью содержится в гамильтониане H_0. Точнее, V описывает только ту часть взаимодействия, которая ответственна за процессы рассеяния и рождения частиц, поскольку взаимодействие, удерживающее элементарные частицы в составе комплексов («составных частиц»), так же уже включено нами в H_0.

Поэтому при рассмотрении предельных переходов к начальному или конечному состоянию, $\tau \to \mp\infty$, мы можем распорядиться взаимодействием V без всякой осторожности, например просто использовать адиабатическое выключение; ни к исчезновению самодействия, ни к распаду связанных состояний это теперь не приведет.

Используемые в предыдущем построении ссылки на гамильтониан и обычную теорию носили, разумеется, чисто иллюстративный характер и преследовали лишь цели возможной простоты изложения и его связи с общепринятым. Это построение надо рассматривать лишь как пример того, как исходя из обычной теории можно достигнуть выполнения основных физических допущений, к формулировке которых мы сейчас переходим. Подчеркнем, что, хотя все эти допущения выполняются и в обычной теории, мы не считаем, что они полностью исчерпывают ее содержание. Мы оставим этот весьма интересный вопрос открытым. Равным образом мы не собираемся здесь решать и более общий вопрос о том, образуют ли наши допущения в какой-либо степени непротиворечивую полную и независимую систему аксиом; эти допущения надлежит рассматривать не как попытку создать такую систему в смысле, который вкладывается в это понятие математиками, а лишь как собрание предположений, которые потребовались нам для построения вывода дисперсионных соотношений.

Все наши допущения удобно разделить на две группы: общие свойства, обязательные, с нашей точки зрения, для весьма обширного класса возможных теорий, и специальные свойства, связанные с налагаемым нами требованием выполнения условия микроскопической причинности. С нашей точки зрения, последняя группа требований необходима, чтобы получить дисперсионные соотношения обычного вида.

§ 2.1. Общие свойства. 1. В соответствии со сказанным выше мы принимаем гейзенбергову постановку задачи: мы будем считать, что асимптотические состояния системы представляют собой совокупности некоторого числа бесконечно удаленных друг от друга элементарных и составных частиц. Взаимодействие между этими частицами равно нулю, и поэтому такие величины, как энергия, импульс и т. д., являются аддитивными. Такие состояния описываются амплитудами $|\ \rangle$, являющимися элементами линейного пространства, которое можно представить себе построенным с помощью приема, описанного выше.

2. Будем считать, что у нас имеется некоторая группа G преобразований L, которая включает в качестве подгруппы группу Лоренца $\mathcal{L}$ (G может включать и другие преобразования, например изотопические или калибровочные преобразования и т. п.). Под действием G амплитуды состояний пре-

образуются с помощью некоторого унитарного представления G с элементами U_L [1].

3. Если в состоянии $|p\rangle$ 4-вектор энергии-импульса p имеет определенное значение, то

$$U_{L_a}|p\rangle = \mathrm{e}^{-ipa}|p\rangle, \tag{2.4}$$

если L_a — трансляция $x \to x + a$. Существует состояние $|0\rangle$, для которого

$$U_{L_a}|0\rangle = |0\rangle, \tag{2.5}$$

так что $|0\rangle$ — это состояние вакуума.

Аналогичные свойства могут быть сформулированы и для других подгрупп G, в частности для представлений, соответствующих угловому моменту.

4. Существует система собственных амплитуд состояния 4-импульса, отвечающих неотрицательным значениям энергии, которая является полной, так что

$$\langle\alpha|AB|\beta\rangle = \langle\alpha|A|0\rangle\langle 0|B|\beta\rangle + \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_n \int d\mathbf{k}\langle\alpha|A|n\mathbf{k}\rangle\langle n\mathbf{k}|B|\beta\rangle. \tag{2.6}$$

Здесь n означает совокупность всех остальных дискретных и непрерывных квантовых чисел, которые в совокупности с $\mathbf{k}$ полностью характеризуют состояние.

5. Предметом теории является изучение вероятностей переходов между такими асимптотическими состояниями. Будем считать, что каждому переходу между состояниями $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ отвечает определенная вероятность, обычным образом выражающаяся через элементы $S_{\alpha\beta}$ некоторой унитарной матрицы

$$\sum_\beta S_{\alpha\beta}S^*_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma}. \tag{2.7}$$

Ее элементы рассматриваются как средние значения определенного оператора S:

$$S_{\alpha\beta} = \langle\alpha|S|\beta\rangle. \tag{2.8}$$

6. Поскольку мы считаем одночастичные состояния состояниями реальных частиц, то одночастичные состояния и вакуум будут стабильными, т. е.

$$S|\alpha\rangle = |\alpha\rangle, \tag{2.9}$$

если $|\alpha\rangle$ — вакуумное состояние одной элементарной частицы или одной составной частицы.

Прежде чем переходить к изложению специальных локальных свойств, сделаем некоторые замечания.

Очевидно, что наши асимптотические состояния, отвечающие наличию определенного числа n частиц определенных сортов α_i с определенным импульсом $\mathbf{p}_i$, можно получить, если ввести обычным образом операторы рождения $A^{(+)}_{\alpha_i}(\mathbf{p}_i)$ и уничтожения $A^{(-)}_{\alpha_i}(\mathbf{p}_i)$ частицы α_i-го сорта с импульсом $\mathbf{p}_i$

[1] В аналогии с рассуждениями Хаага заметим, что для одночастичных состояний U_L образуют неприводимое представление группы G. Далее, из выполненного выше элементарного построения можно было бы установить, что для всякого асимптотического состояния (поскольку оно всегда изображается вектором в прямом произведении пространств) инфинитезимальный оператор U_L будет прямой суммой инфинитезимальных операторов U'_L, соответствующих неприводимым представлениям. Отсюда, в частности, следовало бы тогда и сделанное выше утверждение об аддитивности интегралов движения.

и подействовать ими на вакуумное состояние:

$$|\alpha_1\mathbf{p}_1;\ldots;\alpha_n\mathbf{p}_n\rangle = A^{(+)}_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1)\ldots A^{(+)}_{\alpha_n}(\mathbf{p}_n)|0\rangle. \tag{2.10}$$

При этом из того обстоятельства, что наши пространственно разделенные частицы не взаимодействуют, будет следовать, что операторы $A^{(+)}, A^{(-)}$ удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned}[A^{(-)}_{\alpha}(\mathbf{p}), A^{(+)}_{\alpha'}(\mathbf{p}')] &= \delta_{\alpha\alpha'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'),\\ [A^{(-)}_{\alpha}(\mathbf{p}), A^{(-)}_{\alpha'}(\mathbf{p}')] &= 0.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Тогда из общего свойства 2 будет следовать, что при преобразовании L из G операторы $A^{\pm}_{\alpha}(\mathbf{p})$ переходят в

$$A^{(\pm)}_{\alpha}(\mathbf{p}) \to A^{(\pm)}_{L\alpha}(L\mathbf{p}) = U_L A^{(\pm)}_{\alpha}(\mathbf{p}) U_L^{+}. \tag{2.12}$$

Чтобы можно было сформулировать условие причинности (и вообще проводить какие-либо рассуждения о локальных свойствах теории), нам, очевидно, необходимо как-то научиться различать отдельные точки пространства-времени. Для этой цели мы построим из операторов рождения и уничтожения элементарных частиц обычные пространственно локализованные комбинации

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}}\left\{e^{ikx}A^{(+)}(\mathbf{k}) + e^{-ikx}A^{(-)}(\mathbf{k})\right\}, \tag{2.13}$$

$$k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2},$$

где мы, чтобы не загромождать изложение, выписали формулу, относящуюся к вещественному скалярному полю. Именно в этом пункте мы впервые сталкиваемся с различием между элементарными и составными частицами. Для последних хотя и можно было бы формально ввести определение типа (2.13), но физический смысл таких комбинаций был бы в достаточной степени темным.

Дальнейшее изложение в обычной теории можно было бы вести примерно следующим образом. Матрицу рассеяния S всегда можно мыслить в виде разложения по операторам рождения и уничтожения

$$S = \sum_{l,m=0}^{\infty}\int d\mathbf{k}_1\ldots d\mathbf{k}_l d\mathbf{k}'_1\ldots d\mathbf{k}'_m f^{l,m}(\mathbf{k};\mathbf{k}')A^{(-)}(\mathbf{k}_1)\ldots$$
$$\ldots A^{(-)}(\mathbf{k}_l)A^{(+)}(\mathbf{k}'_1)\ldots A^{(+)}(\mathbf{k}'_m) \tag{2.14}$$

(для простоты мы считаем временно, что работаем с частицами одного сорта). Такое разложение можно было бы с помощью формулы (2.13) превратить в разложение по нормальным произведениям полей $\varphi(x)$:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\int dx_1\ldots dx_n f^n(x_1\ldots x_n):\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n): \tag{2.15}$$

и определить после этого образование вариационной производной S-матрицы по полю $\varphi(x)$, т. е. $\dfrac{\delta S}{\delta\varphi(x)}$, с помощью следующий операции: берется сумма всех выражений, получающихся из каждого члена (2.15) последовательным вычеркиванием одного из $\varphi(x_i)$ с заменой на $\delta(x-x_i)$.

После этого матричные элемента матрицы рассеяния

$$S_{\omega\omega'} = \langle \mathbf{p}'_1\alpha'_1, .., \mathbf{p}'_\tau\alpha'_\tau | S | \mathbf{p}_1\alpha_1, \ldots, \mathbf{p}_s\alpha_s \rangle \tag{2.16}$$

можно было бы свести к вакуумным средним «радиационных операторов»

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta^n S}{\delta\varphi_{\alpha_1}(x_1) \ldots \delta\varphi_{\alpha_n}(x_n)} S^\dagger. \tag{2.17}$$

В самом деле, в силу (2.11) матричный элемент (2.16) можно переписать в виде

$$\langle 0 | A'^{(-)}_{\alpha_1}(\mathbf{p}'_1) \ldots A'^{(-)}_{\alpha_\tau}(\mathbf{p}'_\tau) S A^{(+)}_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1) \ldots A^{(+)}_{\alpha_s}(\mathbf{p}_s) | 0 \rangle. \tag{2.18}$$

Ограничиваясь для простоты опять случаем скалярных вещественных полей, заметим, что из формулы (2.11) и (2.13) получается

$$\begin{aligned} [\varphi_{\rho'}(x), A^{(+)}_\rho(\mathbf{p})] &= \frac{\delta_{\rho\rho'}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p^0}}, \\ [\varphi_{\rho'}(x), A^{(-)}_\rho(\mathbf{p})] &= \frac{\delta_{\rho\rho'}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2p^0}}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

откуда для перестановочных соотношений операторов рождения и уничтожения с матрицей рассеяния следует

$$\begin{aligned} [S, A^{(+)}_\rho(\mathbf{p})] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dx \frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p^0}}, \\ [S, A^{(-)}_\rho(\mathbf{p})] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dx \frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)} \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2p^0}}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

где опять

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Перетаскивая теперь в выражении (2.18) все операторы рождения налево, а операторы уничтожения направо, где, подействовав на вакуумную функцию, они дадут нуль, получим (мы предполагаем, что все импульсы $\mathbf{p}'_1, \ldots, \mathbf{p}'_\tau$ и $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_s$ различны, в противном случае возникли бы еще члены того же вида, но меньшей степени), что выражение (2.16) можно записать в виде

$$S_{\omega\omega'} = \frac{(-1)^s}{(2\pi)^{\frac{3(\tau+s)}{2}}} \int dx'_1 \ldots dx'_\tau \ldots dx_s \frac{e^{i(\sum x'_i p'_i - \sum p_i x_i)}}{2^{\frac{\tau+s}{2}} \sqrt{p'^0_1 \ldots p'^0_\tau p^0_1 \ldots p^0_s}} \times$$

$$\times \langle 0 | \frac{\delta^{s+\tau} S}{\delta\varphi_{\rho'_1}(x'_1) \ldots \delta\varphi_{\rho'_\tau}(x'_\tau) \delta\varphi_{\rho_1}(x_1) \ldots \delta\varphi_{\rho_s}(x_s)} | 0 \rangle, \tag{2.21}$$

где

$$p^0_i = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2}.$$

Под интегралом в формуле (2.21) стоят как раз вакуумные средние от только что определенных радиационных операторов (2.17). Действительно, в силу

условия стабильности вакуума 6 мы имеем

$$\left\langle 0\left|\frac{\delta^{\tau+s}S}{\delta\varphi_{\rho'}(x_1')\dots\delta\varphi_{\rho_s}(x_s)}\right|0\right\rangle = \left\langle 0\left|\frac{\delta^{\tau+s}S}{\delta\varphi_{\rho_1'}(x_1')\dots\delta\varphi_{\rho_s}(x_s)}S^+\right|0\right\rangle. \tag{2.22}$$

Заметим, однако, что этот вывод был сделан немного необдуманно и мы не следовали реальному смыслу операторов с достаточной мерой осторожности. Прежде всего, выражение (2.13), вообще говоря, нельзя разрешить относительно операторов $A^{(\pm)}$, поскольку это выражение определяет не произвольную $\varphi(x)$, а только $\varphi(x)$, обязательно удовлетворяющую уравнению

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0. \tag{2.23}$$

Поэтому из формулы (2.14) нельзя получить выражение (2.15) — функционал, определенный для более широкого класса операторных функций $\varphi(x)$, не обязательно удовлетворяющих уравнению (2.23). Далее, мы, казалось бы, произвольным образом назначили правило вариационного дифференцирования по $\varphi(x)$. Наконец, перестановочные соотношения (2.19) получаются из соотношений (2.11) и (2.13) опять-таки только для операторов $\varphi(x)$, удовлетворяющих уравнению (2.23), мы же пользовались ими для произвольных $\varphi(x)$.

Смысл проведенного преобразования сводится к тому, что мы фактически расширили определение S-матрицы, снимая в выражении (2.15) ограничение (2.23) и рассматривая матрицу рассеяния как функционал от произвольных, но коммутирующих (или, для фермионных полей, антикоммутирующих) операторов $\varphi(x)$[1]. При этом все, что нам потребуется для дальнейшего, — это перестановочные соотношения (2.19) этих функций с операторами рождения и уничтожения, позволяющие установить формулы (2.20) и тем самым правило для сведения любых матричных элементов матрицы рассеяния к вакуумным средним от радиационных операторов. Поэтому мы не будем более ссылаться на аналогию с обычной теорией, но просто потребуем выполнения следующих

§ 2.2. Локальных свойств. 1. Элементарные частицы характеризуются бозонными и фермионными полями $\varphi(x)$ с обычными трансформационными свойствами свободных полей. Оператор S обладает вариационными производными любого порядка по этим полям[2]. Радиационные операторы (2.17) и их

[1] Подчеркнем, что такое расширение никоим образом не выводит нас за рамки обычной теории. Действительно, в обычной теории поля $\varphi_\rho(x)$ играют двоякую роль: во-первых, сам оператор S мыслится как функционал от этих полей; во-вторых, соответствующие полям операторы рождения и уничтожения $A^{(\pm)}$ служат для вычисления матричных элементов этого оператора. При этом в первой из этих ролей поля всегда стоят под знаком хронологических или нормальных произведений и поэтому коммутируют (антикоммутируют) друг с другом. Кроме того, в этом случае при варьировании не налагается ограничений, связанных с тем, чтобы поля удовлетворяли каким-либо уравнениям. Фактически это эквивалентно утверждению, что S-матрица рассматривается как функционал от произвольных классических функций $\varphi_\rho(x)$, в точности коммутирующих (антикоммутирующих), которые обладают лишь трансформационными свойствами квантовых полей. Наоборот, при вычислении матричных элементов существенно, что $A^{(\pm)}$ являются операторами, обладающими свойствами (2.20).

[2] Вариационные производные имеют здесь все свои обычные свойства. Их трансформационный характер определяется трансформационным характером полей $\varphi(x)$. Производные матрицы S по бозонным полям коммутируют, а по фермионным полям антикоммутируют между собой.

произведения с независимыми оргументами являются интегрируемыми, т. е. все матричные элементы

$$\langle\omega|H(x_1,\ldots,x_n)\ldots H(z_1,\ldots,z_n)|\omega'\rangle \tag{2.24}$$

суть интегрируемые функции, принадлежащие одному из классов $C(q,r)$ (см. (1.1), (1.2)).

2. Выполняется условие причинности в форме

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)}S^{+}\right)=0 \qquad \text{для} \qquad x\lesssim y. \tag{2.25}$$

Это условие причинности совершенно аналогично использовавшемуся Боголюбовым и Ширковым (1955), куда мы и отсылаем читателя для объяснения его физического смысла.

3. Матричные элементы матрицы рассеяния можно преобразовать в вакуумные средние радиационных операторов, пользуясь формальными соотношениями

$$\begin{gathered}[\varphi_{\rho'}(x),A^{(+)}_{\rho}(\mathbf{p})]=\frac{\delta_{\rho'\rho}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p^0}},\\ [\varphi_{\rho'}(x),A^{(-)}_{\rho}(\mathbf{p})]=\frac{\delta_{\rho'\rho}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2p^0}},\\ p^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2},\end{gathered} \tag{2.26}$$

и аналогичными соотношениями для фермионов[1]

$$\begin{gathered}[b^{(-)}_{+S''}(\mathbf{p}''),\overline{\psi_{\lambda'}}(x')]_{+}=\frac{\overline{u^{+S''}_{\lambda'}}(\mathbf{p}'')}{(2\pi)^{3/2}}e^{ip''x'},\quad p''^0=\sqrt{\mathbf{p}''^2+M^2};\\ [b^{(-)}_{+S''}(\mathbf{p}''),\psi_{\lambda}(x)]_{+}=[b^{(+)}_{+S''}(\mathbf{p}),\overline{\psi}_{\lambda'}(x')]_{+}=0,\\ [\psi_{\lambda}(x),b^{(+)}_{+S}(\mathbf{p})]_{+}=\frac{u^{+S}_{\lambda}(\mathbf{p})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-ipx},\quad p^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}.\end{gathered} \tag{2.27}$$

Заметим в заключение, что для вычисления любых матричных элементов S-матрицы нам нужно было бы иметь какие-то аналогичные правила и для

[1] Приведем для справок основные формулы для спинорного поля, которые выполняются в обычной теории свободного поля в употребляемой нами нормировке. Для оператора поля $\psi_\lambda(x)$ мы пишем разложение

$$\psi_\lambda(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\left\{e^{ikx}u^{(-)\alpha s}_{\lambda}(\mathbf{k})b^{(+)}_{-\alpha s}(\mathbf{k})+e^{-ikx}u^{(+)\alpha s}_{\lambda}(\mathbf{k})b^{(-)}_{+\alpha s}(\mathbf{k})\right\}, \tag{2.28}$$

$$k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+M^2},$$

где $\pm,\alpha$ и s — квантовые числа, определяющие частицу, античастицу, спиновое и изотопическое состояния; $b^{(\pm)}$ — операторы рождения и уничтожения фермиона в соответствующем состоянии, $u^{\cdots}_{\lambda}$ — соответствующие спинорные амплитуды. Тогда для дираковски сопряженного оператора $\overline{\psi}_\lambda(x)$ получаем разложение

$$\overline{\psi}_\lambda(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\left\{e^{ikx}\overline{u^{(+)\alpha s}_{\lambda}}(\mathbf{k})b^{(+)}_{+\alpha s}(\mathbf{k})+e^{-ikx}\overline{u^{(-)\alpha s}_{\lambda}}(\mathbf{k})b^{(-)}_{-\alpha s}(\mathbf{k})\right\}, \tag{2.29}$$

$$k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+M^2}.$$

преобразования в радиационные операторы матричных элементов по состояниям, включающим составные частицы. Это весьма актуальная и важная задача, но она могла бы стать предметом самостоятельного исследования и здесь мы не будет ее касаться. Для вывода наиболее интересных дисперсионных соотношений мы с решением этого вопроса не будем иметь дела.

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$[b^{(-)}_{\pm\alpha s}(\mathbf{k}), b^{(+)}_{(\pm)'\alpha' s'}(\mathbf{k}')]_+ = \delta_{(\pm)(\pm')}\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{ss'}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'); \tag{2.30}$$

остальные антикоммутаторы равны нулю. Имеют место соотношения эрмитова сопряжения

$$(b^{(-)}_{+\alpha s}(\mathbf{k}))^* = b^{(+)}_{+\alpha s}(\mathbf{k}), \quad (b^{(+)}_{-\alpha s}(\mathbf{k}))^* = b^{(-)}_{-\alpha s}(\mathbf{k}). \tag{2.31}$$

Из того, что ψ_λ удовлетворяет уравнению Дирака

$$\left(i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - M\right)\psi(x) = 0, \tag{2.32}$$

следует, что амплитуды $u^{(\pm)\alpha s}$ удовлетворяют уравнениям в импульсном представлении

$$(\gamma k - M)u^{+\alpha s}(\mathbf{k}) = 0, \quad \overline{u^{+\alpha s}}(\mathbf{k})(\gamma k - M) = 0, \tag{2.33}$$

$$k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2},$$

и

$$(\gamma k - M)u^{-\alpha s}(-\mathbf{k}) = 0, \quad \overline{u^{-\alpha s}}(-\mathbf{k})(\gamma k - M) = 0, \tag{2.34}$$

$$k^0 = -\sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}.$$

Кроме разложений (2.28), (2.29) нам будет удобно использовать и фурье-преобразование

$$\psi_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ipx}\psi_\lambda(p)dp, \tag{2.35}$$

и

$$\overline{\psi}_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ipx}\overline{\psi}_\lambda(p)dp, \tag{2.36}$$

в которых не предполагается, что $\psi_\lambda(x)$ и $\overline{\psi}_\lambda(x)$ удовлетворяют каким-либо уравнениям и соответственно все черыре компоненты импульса считаются независимыми. Для функций, удовлетворяющих уравнению (2.32), операторы $\psi_\lambda(p)$ и $\overline{\psi}_\lambda(p)$ связаны с операторами $b^{(\pm)}(\mathbf{p})$ соотношениями

$$\psi_\lambda(p) = 2\pi(2\pi)^{3/2}\delta(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})u^{+S}_\lambda(\mathbf{p})b^{(-)}_{+S}(\mathbf{p}) + \\ + 2\pi(2\pi)^{3/2}\delta(p^0 + \sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})u^{-S}_\lambda(-\mathbf{p})b^{(+)}_{-S}(-\mathbf{p}) \tag{2.37}$$

и

$$\overline{\psi}_\lambda(p) = 2\pi(2\pi)^{3/2}\delta(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})\overline{u^{+S}_\lambda}(\mathbf{p})b^{(+)}_{+S}(\mathbf{p}) + \\ + 2\pi(2\pi)^{3/2}\delta(p^0 + \sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})\overline{u^{-S}_\lambda}(-\mathbf{p})b^{(-)}_{-S}(-\mathbf{p}). \tag{2.38}$$

Из разложений (2.28) и (2.29) и перестановок (2.30) непосредственно получаются постулированные в тексте антикоммутаторы (2.27). Выпишем еще формулы для перестановок операторов рождения и уничтожения частиц с матрицей рассеяния

$$[b^{(-)}_{+S''}(\mathbf{p}''), S]_- = \int dx[b^{(-)}_{+S''}(\mathbf{p}''), \overline{\psi}_\lambda(x)]_+ \frac{\delta S}{\delta\overline{\psi}_\lambda(x)}; \\ [S, b^{(+)}_{+S}(\mathbf{p})]_- = \int dx[\psi_\lambda(x), b^{(+)}_{+S}(\mathbf{p})]_+ \frac{\delta S}{\delta\psi_\lambda(x)}. \tag{2.39}$$

Заметим, что, в отличие от бозевских полей, когда формулы (2.20) были в равной степени применимы как к самой S-матрице, так и к *любой* ее вариационной производной, формулы (2.39) применимы только к самой S-матрице; для взятия последующих вариаций по фермионному полю нужные формулы приходится из-за антикоммутативности вариаций выводить заново.

§ 3. Соотношения между радиационными операторами

В предыдущем разделе мы ввели радиационные операторы различного порядка. Сейчас мы хотим исследовать их несколько подробнее. Прежде всего, для удобства рассмотрения ограничим себя выбором некоторых определенных полей. Учитывая то, что (как мы уже отмечали) в данный момент наиболее интересна мезонная теория, мы ограничимся случаем взаимодействия нуклонного и пионного полей. С целью сохранения наших доказательств настолько ясными, насколько это возможно, мы ограничим себя рассмотрением только зарядово-симметричного взаимодействия и не будет учитывать наличие электромагнитного и слабого взаимодействия с лептонами.

Как обычно, нуклонное поле мы будем описывать спинором

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_P(x)\\ \psi_N(x)\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Пионное поле мы будем рассматривать как поле с тремя вещественными псевдоскалярными компонентами $\varphi_\rho(x)$, образующими вектор в изотопическом пространстве. Как обычно принято, линейные комбинации

$$\varphi_+=\frac{\varphi_1+i\varphi_2}{2},\quad \varphi_-=\frac{\varphi_1-i\varphi_2}{2},\quad \varphi_0=\varphi_3 \tag{3.2}$$

будут соответствовать частицам $\pi^{(+)},\pi^{(-)}$ и $\pi^{(0)}$. Выбор вещественного представления (хотя принципиально и необязательный), несколько упростит дальнейшие рассуждения.

Мы будем считать, что группа G включает в себя (кроме группы Лоренца) вращения в изотопическом пространстве и калибровочные преобразования фермионных полей первого рода

$$\psi(x)\to e^{i\alpha}\psi(x),\quad \alpha=\text{const}. \tag{3.3}$$

Простейшими радиационными операторами будут операторы первого порядка. В силу выбора вещественных $\varphi_\rho(x)$ таких операторов будет три (вместо четырех в противном случае):

$$j_\rho(x)=i\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^+;\quad \overline{\cap}(x)=i\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}S^+;\quad \cap(x)=-i\frac{\delta}{\overline{\psi}(x)}S^+. \tag{3.4}$$

Мы будем называть эти три оператора токами, первый — бозевским током, два последних — фермиевскими токами[1].

Легко видеть, что в силу унитарности S и вещественности $\varphi_\rho(x)$ бозевский ток $j_\rho(x)$ эрмитов. Действительно, выполняя в первом из равенств (3.4) эрмитово сопряжение

$$j_\rho^+(x)=-iS\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)},$$

[1] Название «ток» основывается на аналогии с теорией возмущений, где первый из этих операторов в первом приближении будет пропорционален просто $\overline{\psi}\gamma_5\tau_\rho\psi$ — току невзаимодействующих фермиевских частиц. Однако слова «бозевские» и «фермиевские» мы употребляем здесь в несколько необычном смысле, отмечая ими, по какому полю проводилось варьирование.

в силу унитарности S-матрицы $SS^+ = 1$ получаем

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}S^+ = -S\frac{\delta S^+}{\delta\varphi_\rho(x)}.$$

По этой причине $j_\rho^+(x)$ совпадает с $j_\rho(x)$:

$$j_\rho^+(x) = j_\rho(x). \tag{3.5}$$

Вопрос об эрмитовских свойствах фермиевских токов будет рассмотрен в следующем разделе.

Существенно отметить, что вакуумные средние токов равны нулю:

$$\langle 0|j_\rho(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\overline{\cap}(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\cap(x)|0\rangle = 0. \tag{3.6}$$

Действительно, с помощью условия 6 и преобразования (2.3) (раздел 2) такие матричные элементы сводятся к матричным элементам типа

$$\langle 0|A^{(\pm)}|0\rangle, \tag{3.7}$$

которые очевидно равны нулю в силу определения вакуума[1]. (Здесь $A^{(\pm)}$ — операторы рождения или уничтожения для бозонов или фермионов.)

Радиационных операторов второго порядка в нашем случае можно написать шесть. Вакуумные средние четырех из них равны нулю на тех же основаниях:

$$\begin{aligned} &\left\langle 0\left|\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\delta\psi(y)}S^+\right|0\right\rangle = 0, \qquad \left\langle 0\left|\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\rho(x)\delta\bar\psi(y)}S^+\right|0\right\rangle = 0, \\ &\left\langle 0\left|\frac{\delta^2 S}{\delta\psi(x)\delta\psi(y)}S^+\right|0\right\rangle = 0, \qquad \left\langle 0\left|\frac{\delta^2 S}{\delta\bar\psi(x)\delta\bar\psi(y)}S^+\right|0\right\rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Конечно, тот же аргумент может быть непосредственно применен к смешанным бозонно-фермионным производным, так как после их преобразования в сумму матричных элементов произведений операторов рождения и уничтожения каждое слагаемое будет иметь один фермионный и один бозонный оператор, которые действуют в разных пространствах. По этой причине такие матричные элементы могут быть записаны в форме прямого произведения матричных элементов однократных операторов. Что касается двойных фермионных производных, то после их выражения через операторы рождения и уничтожения соответствующая сумма может содержать либо слагаемые с двумя операторами рождения или уничтожения, очевидно равные нулю, или слагаемые с двумя различными операторами. Но в последнем случае для матричных элементов (3.8) обязательно будет так, что из двух этих операторов один относится к частице, а второй — к античастице. Другими словами, они

[1] Здесь следует отметить, что уже при рассмотрении трансляционной инвариантности можно сделать вывод, что матричные элементы (3.6) должны быть постоянными. В нашем конкретном случае мы даже можем пойти дальше и заключить, что первый из этих матричных элементов равен нулю вследствие инвариантности, учитывающей калибровочные преобразования (3.3). Однако в случае, например, вариационной производной по нейтральному скалярному полю рассмотрение ковариантности не будет достаточным, чтобы сделать заключение, что матричные элементы (3.6) равны нулю.

также действуют, по существу, в различных пространствах, и снова наш аргумент остается справедливым.

Итак, если бы мы интересовались только вакуумными средними радиационных операторов, то нам осталось бы рассмотреть только два оператора —

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_{\rho}(y)}S^{+} \tag{3.9}$$

и

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}S^{+}. \tag{3.10}$$

Как мы увидим ниже, для нас будет достаточно (при выводе дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния) рассмотреть лишь радиационный оператор (3.9), точнее, его матричный элемент между двумя однонуклонными состояниями. Поэтому мы сосредоточим ниже свое внимание на рассмотрении именно этого оператора, имея в виду, что для других радиационных операторов второго порядка подобное исследование выглядело бы совершенно аналогично.

Чтобы пояснить идею планируемых выкладок, напомним (см. ниже и конец раздела 4), что вакуумное среднее от радиационного оператора (3.9) в существенном совпадает с функцией Грина для бозонов, т. е. с вакуумным средним от T-произведения двух операторов «настоящего» бозонного поля. С другой стороны, в теории свободного поля наряду с T-произведением оказывается весьма полезным рассматривать и различные другие произведения. Это приводит к введению наряду с причинной функцией и других сингулярных функций. Мы хотим проделать теперь то же самое здесь, т. е. ввести наряду с радиационным оператором (3.9) другие операторы, связанные с ним так же, как различные сингулярные функции свободного поля связаны с причинной. Введение таких операторов оказывается чрезвычайно полезным для дальнейшего.

Вычислим для этой цели вариационную производную от введенного выше оператора тока (3.4). Получаем

$$-i\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_{\rho}(y)} = \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_{\rho}(y)}S^{+} + \frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}\frac{\delta S^{+}}{\delta\varphi_{\rho}(y)}, \tag{3.11}$$

где один из членов справа как раз совпадает с радиационным оператором (3.9). Второй член справа можно выразить через произведение двух операторов тока, после чего приходим к соотношению

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_{\rho}(y)}S^{+} = -j_{\rho'}(x)j_{\rho}(y) - i\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_{\rho}(y)}. \tag{3.12}$$

Левая часть (3.12) симметрична относительно перестановки $\varphi_{\rho'}(x)$ и $\varphi_{\rho}(y)$. Поэтому, совершая такую перестановку, получим для того же оператора (3.9) еще и другое выражение:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_{\rho}(y)}S^{+} = -j_{\rho}(y)j_{\rho'}(x) - i\frac{\delta j_{\rho}(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}. \tag{3.13}$$

Отдельные члены в правых частях этих выражений являются некоторыми из новых радиационных операторов, которые мы вводим.

Нетрудно уловить смысл введенных операторов. Действительно, первые члены в правых частях формул (3.12) и (3.13) — это просто произведение токов, т. е. операторы, которые соответствуют сингулярным функциям D_+ и D_- теории свободного поля. Ниже, рассматривая их матричные элементы, мы увидим, в каком именно смысле они действительно содержат лишь частоты одинакового знака.

Чтобы выяснить смысл вторых членов в формулах (3.12) и (3.13), выразим их через S-матрицу и обратимся к условию причинности 2 из подраздела 2.2. Мы увидим тогда, что

$$-i\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)}=\frac{\delta}{\delta\varphi_\rho(y)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}S^+\right)=0,\quad \text{если}\quad y\lesssim x, \tag{3.14}$$

$$-i\frac{\delta j_{\rho}(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}=\frac{\delta}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho}(y)}S^+\right)=0,\quad \text{если}\quad x\lesssim y, \tag{3.15}$$

т. е. операторы

$$-i\frac{\delta j_{\rho'(x)}}{\delta\varphi_\rho(y)}\quad\text{и}\quad -i\frac{\delta j_{\rho(y)}}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}$$

ведут себя так же, как опережающая и запаздывающая функции Грина.

Если учесть теперь соотношения (3.14) и (3.15), то мы получим из формул (3.12) и (3.13), что

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_\rho(y)}S^+=\begin{cases}-j_{\rho'}(x)j_\rho(y) & \text{при}\quad x\gtrsim y,\\ -j_\rho(y)j_{\rho'}(x) & \text{при}\quad y\gtrsim x,\end{cases} \tag{3.16}$$

т. е.

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_\rho(y)}S^+=-T(j_{\rho'}(x)j_\rho(y)), \tag{3.17}$$

как мы ожидали с самого начала[1].

Наконец, выполняя над формулами (3.12) и (3.13) операцию антисимметризации и симметризации, мы придем к комбинациям, аналогичным сингулярным функциям D и $D^{(1)}$:

$$-i\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)}+i\frac{\delta j_\rho(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}=j_{\rho'}(x)j_\rho(y)-j_\rho(y)j_{\rho'}(x) \tag{3.18}$$

и

$$j_{\rho'}(x)j_\rho(y)+j_\rho(y)j_{\rho'}(x)=-2\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_\rho(y)}-i\frac{\delta j_\rho(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}-i\frac{\delta j_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)} \tag{3.19}$$

В частности, из формулы (3.18) следует, если учесть формулы (3.14) и (3.15), что

$$[j_{\rho'}(x),j_\rho(y)]=0\quad\text{для}\quad x\sim y,\ \text{т. е.}\ (x-y)^2<0. \tag{3.20}$$

Тем самым для радиационного оператора, аналогичного D-функции, сохраняется ее важнейшее свойство — обращаться в нуль вне светового конуса. Мы

[1] Подчеркнем, что формулы (3.16), являясь фактически определением фигурирующего в (3.17) T-произведения, определяют его лишь для $x\neq y$. Для $x=y$ значение выражения (3.17) остается неопределенным, что скажется ниже в возможности добавить к соответствующим фурье-образам некоторые произвольные полиномы.

хотели бы здесь подчеркнуть, что такая особенность обусловлена наложенным нами требованием причинности 2 из раздела 2. Более того, ряд авторов использовал именно это требование как условие причинности при выводе дисперсионных соотношений.

Для дальнейшего нам понадобится еще соотношение

$$-i\frac{\delta_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)}=\left(-\frac{\delta_{\rho'}(x)}{\delta\varphi_\rho(y)}\right)^+, \tag{3.21}$$

справедливость которого становится очевидной, если вспомнить, что как токи $j_{\rho'}(x)$, так и поля $\varphi_\rho(y)$ эрмитовы.

Перейдем теперь к установлению следствий, которые вытекают для матричных элементов радиационных операторов по любым состояниям из требования трансляционной инвариантности. Как хорошо известно, для матричных элементов операторов второго порядка по вакууму это требование приводит к тому, что матричные элементы могут зависеть только от разности $x-y$. Для матричных элементов по любым состояниям положение вещей несколько усложняется, хотя и не принципиально.

Достаточно, очевидно, ограничиться рассмотрением матричных элементов относительно состояний $|p;S\rangle$, имеющих определенный полный импульс p (остальные квантовые числа обозначаем через S), образующих, согласно допущению 1.4 в разделе 2, полную систему. Итак, рассмотрим, например, матричный элемент между состояниями $|p,S\rangle$ и $|p',S'\rangle$ радиационного оператора $\dfrac{\delta^2S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_\rho(y)}S^+$:

$$\left\langle p',S'\left|\frac{\delta^2S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_\rho(y)}S^+\right|p,S\right\rangle. \tag{3.22}$$

В силу трансляционной инвариантности

$$\begin{aligned}\left\langle p',S'\left|\frac{\delta^2S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_\rho(y)}S^+\right|p,S\right\rangle&=\\&=\left\langle p',S'\left|\mathrm{e}^{i\hat{p}a}\frac{\delta^2S}{\delta\varphi_{\rho'}(x-a)\delta\varphi_\rho(y-a)}S^+\mathrm{e}^{-i\hat{p}a}\right|p,S\right\rangle=\\&=\mathrm{e}^{i(p'-p)a}\left\langle p',S'\left|\frac{\delta^2S}{\delta\varphi_{\rho'}(x-a)\delta\varphi_\rho(y-a)}S^+\right|p,S\right\rangle,\end{aligned}$$

где $\hat{p}$ — оператор полного 4-импульса, собственными состояниями которого являются по допущению состояния $|p,S\rangle$ и $|p',S'\rangle$. Выбирая теперь a равным $\dfrac{x+y}{2}$, видим, что оператор под знаком матричного элемента оказывается зависящим только от разности $(x-y)$. Следовательно, можно записать:

$$\left\langle p',S'\left|\frac{\delta^2S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_\rho(y)}S^+\right|p,S\right\rangle=i\mathrm{e}^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)}F^{(c)}_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.23}$$

где множитель i добавлен из соображений соответствия с определением сингулярных функций для свободного поля. Тем же определяется и значок (c) у функции $F^{(c)}$.

Совершенно аналогично могут быть представлены матричные элементы и для других радиационных операторов второго порядка:

$$\left\langle p', S' \left| \frac{\delta j_\rho(y)}{\delta \varphi_{\rho'}(x)} \right| p, S \right\rangle = -\mathrm{e}^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.24}$$

$$\left\langle p', S' \left| \frac{\delta j_{\rho'}(y)}{\delta \varphi_\rho(x)} \right| p, S \right\rangle = -\mathrm{e}^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F^{\mathrm{adv}}_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.25}$$

$$\langle p', S' | j_{\rho'}(x) j_\rho(y) - j_\rho(y) j_{\rho'}(x) | p, S \rangle = -i\mathrm{e}^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.26}$$

$$\langle p', S' | j_{\rho'}(x) j_\rho(y) + j_\rho(y) j_{\rho'}(x) | p, S \rangle = \mathrm{e}^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F^{(1)}_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.27}$$

$$\left\langle p', S' \left| \frac{\delta j_\rho(y)}{\delta \varphi_{\rho'}(x)} + \frac{\delta j_{\rho'}(y)}{\delta \varphi_\rho(x)} \right| p, S \right\rangle = -\mathrm{e}^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} \overline{F}_{\alpha\omega}(x-y). \tag{3.28}$$

В уравнениях (3.24)–(3.28) ради краткости совокупность индексов ρ, p, S обозначена через α, а ρ', p', S' — через ω.

Для произведений токов можно, конечно, тоже с учетом трансляционной инвариантности выписать выражения

$$\langle p', S' | j_{\rho'}(x) j_\rho(y) | p, S \rangle = -i\mathrm{e}^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F^{(-)}_{\alpha\omega}(x-y), \tag{3.29}$$

$$\langle p', S' | j_\rho(y) j_{\rho'}(x) | p, S \rangle = i\mathrm{e}^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F^{(+)}_{\alpha\omega}(x-y). \tag{3.30}$$

Однако здесь можно пойти и дальше и выяснить структуру функции $F^{(-)}_{\alpha\omega}$ более подробно. Именно в силу допущения 1.2 из раздела 2 о полноте системы функций с определенными импульсами, матричный элемент в левой части (3.29) можно разложить в произведение матричных элементов тока

$$\langle p', S' | j_{\rho'}(x) j_\rho(y) | p, S \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\bar{k} \sum_n \langle p', S' | j_{\rho'}(x) | \bar{k} n \rangle \langle \bar{k} n | j_\rho(y) | p, S \rangle. \tag{3.31}$$

Теперь можно будет воспользоваться требованием трансляционной инвариантности для каждого из фигурирующих в (3.31) операторов тока, так что правая часть в нем примет вид

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_n \int d\bar{k} \langle p', S' | j_{\rho'}(0) | \bar{k} n \rangle \langle \bar{k} n | j_\rho(0) | p' S \rangle \mathrm{e}^{-ik_n(x-y)+ip'x-ipy}. \tag{3.32}$$

Сравнивая это выражение с (3.29), получаем явный вид функции $F^{(-)}_{\alpha\omega}$, выраженный теперь только через матричные элементы токов в начале координат:

$$F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) = i \sum_n \int d\mathbf{k} \langle p', S' | j_{\rho'}(0) | \mathbf{k}, n \rangle \langle \mathbf{k}, n | j_\rho(0) | p, S \rangle \times$$
$$\times \exp\left\{ -i \left(\sqrt{M_n^2 + \mathbf{k}^2} - \frac{p^0 + p^{0'}}{2} \right) x^0 + i \left(\mathbf{k} + \frac{\overline{p} + \overline{p}'}{2} \right) \overline{x} \right\}, \tag{3.33}$$

где $M_n^2 = k_n^2$, т. е. в состоянии $\mathbf{k}, n$: $k^{02} - \mathbf{k}^2 = M_n^2$.

Важность формулы (3.33) состоит в том, что, поскольку все радиационные операторы связаны друг с другом, то это дает возможность в принципе вы-

разить все радиационные операторы второго порядка через операторы первого порядка. Тем не менее, как мы продемонстрируем в следующем разделе на примере вакуумных матричных элементов, в силу сингулярного поведения радиационных операторов при совпадении аргументов необходима осторожность.

Из определений (3.23)–(3.30) и полученных ранее соотношений между радиационными операторами следует целый ряд соотношений между функциями $F^{(c)}, \ldots, F^{(+)}$. Прежде всего, переставляя x и y в (3.25) и (3.30) получим

$$F^{\mathrm{adv}}_{\alpha\omega}(x) = P_{\rho\rho'} F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(-x) \tag{3.34}$$

и

$$F^{(+)}_{\alpha\omega}(x) = -P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x), \tag{3.35}$$

где $P_{\rho\rho'}$ означает оператор перестановки индексов ρ и ρ'. Теперь из (3.12) и (3.13) получаем

$$F^{(c)}_{\alpha\omega}(x) = F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) + F^{\mathrm{adv}}_{\alpha\omega}(x) = F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) + P_{\rho\rho'} F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(-x), \tag{3.36}$$

$$F^{(c)}_{\alpha\omega}(x) = -F^{(+)}_{\alpha\omega}(x) + F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(x) = P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x) + F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(x). \tag{3.37}$$

Используя еще формулу (3.18), найдем, что

$$F_{\alpha\omega}(x) = -F^{\mathrm{adv}}_{\alpha\omega}(x) + F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(x) = F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) + F^{(+)}_{\alpha\omega}(x) \tag{3.38}$$

или

$$F_{\alpha\omega}(x) = F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) - P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x) = F^{ref}_{\alpha\omega}(x) - P_{\rho\rho'} F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(-x). \tag{3.39}$$

Сравнивая формулы (3.28), (3.29) и (3.30), видим, что

$$\overline{F}_{\alpha\omega}(x) = \frac{F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(x) + F^{\mathrm{adv}}_{\alpha\omega}(x)}{2} = \frac{F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(x) + P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x)}{2}. \tag{3.40}$$

Наконец, сравнивая формулы (3.27), (3.29) и (3.30) и учитывая формулу (3.19), обнаруживаем, что

$$F^{(1)}_{\alpha\omega}(x) = iF^{(-)}_{\alpha\omega}(x) - iF^{(+)}_{\alpha\omega}(x) = i(F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) + P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x)) \tag{3.41}$$

и

$$F^{(1)}_{\alpha\omega} = 2iF^{(c)}_{\alpha\omega}(x) - iF^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(x) - iF^{\mathrm{adv}}_{\alpha\omega}(x) = 2i(F^{(c)}_{\alpha\omega}(x) - \overline{F}_{\alpha\omega}(x)). \tag{3.42}$$

Выпишем еще соотношения эрмитова сопряжения. Выполняя в (3.33) комплексное сопряжение, найдем, что

$$F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) = -F^{*(-)}_{\omega\alpha}(-x). \tag{3.43}$$

Далее, из (3.21) легко получить, что

$$F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(x) = P_{\rho\rho'} F^{ret*}_{\omega\alpha}(x). \tag{3.44}$$

С помощью этих формул и выражений (3.39), (3.40) функций $F_{\alpha\omega}$ и $\overline{F}_{\alpha\omega}$ через $F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}$ легко получить и правила для сопряжения функций $F_{\alpha\omega}$ и $\overline{F}_{\alpha\omega}$:

$$F^{*}_{\omega\alpha}(x) = P_{\rho\rho'} F_{\alpha\omega}(x), \qquad \overline{F}^{*}_{\omega\alpha}(x) = P_{\rho\rho'} \overline{F}_{\alpha\omega}(x). \tag{3.45}$$

Однако полное эрмитово сопряжение должно включать в себя кроме комплексного сопряжения и перестановки индексов α и ω еще и замену x на $-x$ (перестановку x и y). Чтобы установить правила для такого сопряжения,

выясним свойства симметрии функций $F_{\alpha\omega}$ и $\overline{F}_{\alpha\omega}$, представляющие и самостоятельный интерес. Эти свойства совершенно очевидны из (3.39) и (3.40):

$$F_{\alpha\omega}(-x) = -P_{\rho\rho'}F_{\alpha\omega}(x); \qquad \overline{F}_{\alpha\omega}(-x) = P_{\rho\rho'}\overline{P}_{\alpha\omega}(x) \tag{3.46}$$

и отличаются от свойств симметрии соответствующих свободных сингулярных функций лишь появлением оператора $P_{\rho\rho'}$, вырождающегося в случае свободного поля в единичный.

С помощью (3.46) можно сразу написать

$$F^{+}_{\alpha\omega}(x) = F^{*}_{\omega\alpha}(-x) = -F_{\alpha\omega}(x), \qquad \overline{F}^{+}_{\alpha\omega}(x) = \overline{F}^{*}_{\omega\alpha}(-x) = \overline{F}_{\alpha\omega}(x), \tag{3.47}$$

т. е. матрица $F_{\alpha\omega}(x)$ антиэрмитова, а матрица $\overline{F}_{\alpha\omega}(x)$ эрмитова. Замечая теперь, что

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(x) &= \overline{F}_{\alpha\omega} + \frac{1}{2}F_{\alpha\omega}(x), \\ F^{ret*}_{\omega\alpha}(-x) &= \overline{F}_{\alpha\omega}(x) - \frac{1}{2}F_{\alpha\omega}(x), \end{aligned} \tag{3.48}$$

видим, что $\overline{F}_{\alpha\omega}(x)$ представляет собой эрмитову часть запаздывающей матрицы $F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}$, а $\dfrac{1}{2i}F_{\alpha\omega}(x)$ — соответственно антиэрмитову.

Возвращаясь теперь к свойствам симметрии (3.46), видим, что из эрмитовой и антиэрмитовой частей матрицы $F^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(x)$ можно образовать две четные относительно отображения $x \to -x$ комбинации

$$(1 - P_{\rho\rho'})F_{\alpha\omega}(-x) = (1 - P_{\rho\rho'})F_{\alpha\omega}(x) \tag{3.49}$$

и

$$(1 + P_{\rho\rho'})\overline{F}_{\alpha\omega}(-x) = (1 + P_{\rho\rho'})\overline{F}_{\alpha\omega}(x) \tag{3.50}$$

и две нечетные относительно этой операции комбинации

$$(1 + P_{\rho\rho'})F_{\alpha\omega}(-x) = -(1 + P_{\rho\rho'})F_{\alpha\omega}(x) \tag{3.51}$$

и

$$(1 - P_{\rho\rho'})\overline{F}_{\alpha\omega}(-x) = -(1 + P_{\rho\rho'})\overline{F}_{\alpha\omega}(x). \tag{3.52}$$

Эти свойства симметрии, переписанные в импульсном представлении, дадут нам возможность ниже, при выводе дисперсионных соотношений, избавиться от интегрирования по отрицательным значениям энергии.

Вернемся в заключение еще раз к обсуждению соотношений (3.17). Как мы уже подчеркивали, они выражают возникающую в теории весьма любопытную ситуацию: с одной стороны, (3.16) выражает радиационный оператор $\dfrac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_{\rho}(y)}S^{+}$ второго порядка через произведение двух токов, т. е. через радиационные *операторы первого порядка*. С другой стороны, такое сведение операторов второго порядка к операторам первого порядка не удается произвести полностью: формула (3.16) ничего не говорит о значении радиационного оператора второго порядка при совпадении точек x и y (точнее, конечно, о правилах интегрирования в окрестности $x = y$). Можно было бы сказать, что радиационный оператор второго порядка $\dfrac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_{\rho}(y)}S^{+}$ сводится к радиационным операторам первого порядка с точностью до произ-

вольного квазилокального оператора (определение квазилокального оператора см.: *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* УФН. 1955. Т. 55. С. 149; Т. 57. С. 3). При переходе к импульсному представлению этот квазилокальный оператор выразится в виде добавляющегося к фурье-образу произвольного полинома (ср. ниже дискуссию в разделе 4 после (4.48) и в разделе 6 после (6.19)). Этот результат весьма близок к полученному одним из авторов (Н.Н.Б.) и Ширковым при построении теории S-матрицы на основе разложения по малому параметру связи. Существенные отличия состоят, однако, в том, что, во-первых, эти авторы, имея в своем распоряжении лагранжиан, могли определить с его помощью степень произвольного полинома, и, во-вторых, в том, что входящие в произвольные полиномы при различных степенях постоянные удавалось в конце объединить в одном обобщенном лагранжиане. При нашем же пути построения теории вообще без использования лагранжиана степень полинома приходится вводить в теорию как некоторое новое требование, опираясь, естественно, на соответствие с экспериментом.

Возникающая для радиационных операторов второго порядка ситуация является не исключением, а правилом и для всех радиационных операторов высших порядков. Именно последовательным применением условия причинности (2.25) можно показать, что любой радиационный оператор $(l+m+n)$-го порядка сводится к хронологическому произведению токов:

$$\frac{\delta^{l+m+n}S}{\delta\overline{\psi}(x_1)\dots\delta\overline{\psi}(x_l)\delta\psi(y_1)\dots\delta\psi(y_m)\delta\varphi(z_1)\dots\delta\varphi(z_n)}\,S^+ = \\ = i^{l+3m+3n}T(\cap(x_1)\dots\cap(x_l)\overline{\cap}(y_1)\dots\overline{\cap}(y_m)j(z_1)\dots j(z_n)). \quad (3.53)$$

Отсюда, конечно, немедленно будет следовать, что любые матричные элементы такого оператора для всех различных аргументов $x_1,\dots,z_n$ будут выражаться через матричные элементы токов с помощью сумм, аналогичных (3.33). Однако при каждом совпадении каких-либо точек $x_1,\dots,z_n$ будет возникать связанный с недоопределенностью T-произведения произвол, который можно будет выразить добавлением произведения произвольного квазиловального оператора от совпавших точек на токи в остальных точках. Более подробное развитие этих идей вывело бы нас далеко за рамки вывода дисперсионных соотношений и, возможно, могло бы послужить основой нового подхода к построению квантовой теории поля.

§ 4. Вакуумные средние бозевских радиационных операторов второго порядка

В этом разделе мы займемся более подробным исследованием средних по вакууму от радиационных операторов (3.9), рассмотренных в разделе 3, и связанных с ними операторов. Очевидно, что в особом случае средних по вакууму все основные соотношения между матричными элементами (эти соотношения были описаны в разделе 3) будут законными. Средние по вакууму от радиационных операторов будут определяться формулами (3.23)–(3.30), в правых частях которых теперь выпадет множитель $e^{-i\frac{p-p'}{2}(x+y)}$, а индексы

α и ω превратятся просто в ρ и ρ', например

$$\left\langle 0\left|\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_{\rho}(y)}S^+\right|0\right\rangle = iF^{(c)}_{\rho\rho'}(x-y). \tag{4.1}$$

Далее, вследствие изотопической инвариантности зависимость от изотопических индексов станет диагональной, и мы будем писать

$$F^{(?)}_{\rho\rho'}(x) = \delta_{\rho\rho'} f^{(?)}(x), \tag{4.2}$$

где (?) означает один из значков $(c)\ldots(+)$.

Начнем с рассмотрения представления (3.33) для $F^{(-)}_{\alpha\omega}$ через матричные элементы токов, которое запишется теперь так:

$$\delta_{\rho\rho'} f^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\sum_n \int d\bar{k}\langle 0|j_{\rho'}(0)|\bar{k}, n\rangle\langle \bar{k}, n|j_{\rho}(0)|0\rangle e^{-ik^0_n x^0 + i\bar{k}\bar{x}}. \tag{4.3}$$

Покажем, что в сумме (4.3) первые члены отсутствуют. Действительно, член с $n=0$ (вакуум) обращается в нуль в силу (3.6). Будем считать, что в сумме (4.3) низшими энергетическими состояниями после вакуума являются состояниями с одним, двумя, тремя и т. д. пионами (т. е. будем считать, что не существует связанных комплексов пионов и нуклонов с массой, меньшей $3m$ — трех пионных масс). Тогда обратится в нуль и член (4.3) с $n=1$ пиону. Действительно, в соответствии с определением тока $\langle a'|j_{\rho'}(x)|a\rangle \sim \langle a'|\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}S^+|a\rangle$. Более того, $\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}S^+ \sim [\varphi, S]S^+$ и поэтому $\langle a'|j_{\rho'}(x)|a\rangle \sim \langle a'|[\varphi_{\rho'}(x), S]S^+|a\rangle$. Раскрывая коммутатор, получаем

$$\langle a'|j_{\rho'}(x)|a\rangle \sim \langle a'|\varphi_{\rho'}(x)|a\rangle - \langle a'|S\varphi_{\rho'}(x)S^+|a\rangle.$$

Если мы предположим, что состояния $|a'\rangle, |a\rangle$ суть вакуумное состояние $|0\rangle$ или одночастичное состояние $|1\rangle$, то в силу условий стабильности $S^+|a\rangle = |a\rangle$, $\langle a|S = \langle a|$ два слагаемых в коммутаторе сокращаются. Таким образом доказано, что матричные элементы типа $\langle 0|j_{\rho'}|1\rangle$ и $\langle 1|j_\rho|0\rangle$ суть нули. Наконец, вследствие псевдоскалярности пионов матричные элементы от токов между вакуумом и двупионными состояниями также будут равны нулю.

Итак, сумма в (4.3) начинается только с трехмпионных состояний, т. е. наименьшее значение k^0_n есть $3m$.

Перепишем сумму (4.3) в виде четырехмерного интеграла Фурье:

$$\delta_{\rho\rho'} f^{(-)}(x) = \\ = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\sum_{n\geqslant 3}\langle 0|j_{\rho'}(0)|n, \mathbf{k}\rangle\langle n, \mathbf{k}|j_\rho(0)|0\rangle e^{-ikx}\delta\left(k^0 - \sqrt{M_n^2 + \mathbf{k}^2}\right). \tag{4.4}$$

Вводя теперь фурье-образы для всех функций с помощью определения

$$f^{(?)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk e^{-ikx} g^{(?)}(k), \tag{4.5}$$

видим, что (в силу пропорциональности левой части (4.4) $\delta_{\rho\rho'}$ правая часть должна быть равна нулю при $\rho \neq \rho'$ и не зависеть от ρ для $\rho = \rho'$)

$$g^{(-)}(k) = 2\pi i \sum_{n\geqslant 3} |\langle 0|j_\rho(0)|n\mathbf{k}\rangle|^2 \delta\left(k^0 - \sqrt{M_n^2 + \mathbf{k}^2}\right). \tag{4.6}$$

Однако из псевдоскалярности $\varphi_\rho(x)$ следует, что функции $f^{(-)}(x)$, а следовательно, и $g^{(-)}(k)$ должны быть инвариантными относительно преобразований Лоренца, исключая отражения времени. Поэтому $g^{(-)}(k)$ может зависеть в действительности только от k^2 и знака k^0, т. е. от $\theta(k^0)$. Но из (4.6) видно, что она содержит только положительные частоты. Поэтому можно написать

$$g^{(-)}(k) = 2\pi i \theta(k^0) I(k^2), \tag{4.7}$$

где функция I зависит только от k^2. Сравнивая это выражение с (4.6), заметим, что (4.6) можно переписать как

$$g^{(-)}(k) = 2\pi i \sum_{n\geqslant 3} |\langle 0|j_\rho(0)|n\mathbf{k}\rangle|^2 2\sqrt{M_n^2 + k^2}\, \delta\left(k^2 - M_n^2\right) \theta(k^0). \tag{4.8}$$

Таким образом, мы представили $g^{(-)}(k)$, которая в силу (4.7) должна выражаться в виде произведения инвариантной функции на $\theta(k^0)$, в виде произведения $\theta(k^0)$ на функцию, явно зависящую от выбора направления времени. Тем самым мы можем утверждать, что

$$I(k^2) = \sum_{n\geqslant 3} |\langle 0|j_\rho(0)|n, \mathbf{k}\rangle|^2 2\sqrt{M_n^2 + \mathbf{k}^2}\, \delta\left(k^2 - M_n^2\right). \tag{4.9}$$

Из (4.9) следуют немедленно два основных свойства функции $I(k^2)$:

$$\begin{aligned} &1.\ I(k^2) = 0 \quad \text{для} \quad k^2 \leqslant (3m)^2, \\ &2.\ I(k^2) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Заметим еще, что в силу свойства 1 из (4.10) формулу (4.7) можно переписать в виде

$$g^{(-)}(k) = 2\pi i \theta(k^0) \int_{(3m)^2}^{\infty} \delta(k^2 - m^2) I(m^2) dm^2 = \int_{(3m)^2}^{\infty} g^{0(-)}(k, m^2) I(m^2) dm^2. \tag{4.11}$$

Это так называемое спектральное представление для функции, чрезвычайно просто связанной (см. ниже) с $g^{(-)}(k)$, было получено впервые Челленом и Леманом. Ими же были установлены и свойства (4.10).

Итак,

$$\langle 0|j_{\rho'}(x) j_\rho(y)|0\rangle = \frac{\delta_{\rho\rho'}}{(2\pi)^3} \int dk e^{-ik(x-y)} \theta(k^0) I(k^2). \tag{4.12}$$

Производя здесь замену $x \leftrightarrow y$, получим

$$\langle 0|j_\rho(y)j_{\rho'}(x)|0\rangle = \frac{\delta_{\rho\rho'}}{(2\pi)^3}\int dk e^{-ik(x-y)}\theta(-k^0)I(k^2). \tag{4.13}$$

Этим оправдываются введенные ранее значки $(-)$ и $(+)$: отрицательно-частотная функция действительно содержит только отрицательные, а положительно-частотная — только положительные частоты. Подчеркнем, что это обстоятельство показано только для вакуумных матричных элементов; для матричных элементов по произвольным состояниям это свойство может, вообще говоря и не выполняться.

Вспоминая теперь соотношения (3.36), (3.37), переходя в них к фурье-образам с помощью (4.5) и подставляя выражение (4.7) для $g^{(-)}(k)$ и выражение для

$$g^{(+)}(k) = -2\pi i\theta(-k^0)I(k^2), \tag{4.14}$$

которое следует из (4.13), получаем

$$\begin{aligned} &1.\ g^c(k) = 2\pi i\theta(k^0)I(k^2) + g^{\mathrm{adv}}(k), \\ &2.\ g^c(k) = 2\pi i\theta(-k^0)I(k^2) + g^{\mathrm{ret}}(k). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Из этих формул получается одно чрезвычайно важное следствие. Именно благодаря только что установленному свойству 1 из (4.15) спектральной функции $I(k^2)$, мы видим, что при малых импульсах $k^2 < (3m)^2$ фурье-образы всех трех функций $g^c, g^{\mathrm{adv}}, g^{\mathrm{ret}}$ совпадают:

$$g^c(k) = g^{\mathrm{adv}}(k) = g^{\mathrm{ret}}(k) \qquad \text{при} \qquad k^2 < (3m)^2. \tag{4.16}$$

Это обстоятельство послужит нам основой при установлении аналитических свойств функций $g^{(-)}(k)$, $g^{\mathrm{adv}}(k)$ и $g^{\mathrm{ret}}(k)$, которыми мы сейчас займемся.

Рассмотрим подробнее фурье-образ

$$g^{\mathrm{ret}}(k) = \int f^{\mathrm{ret}}(x)e^{ikx}dx,$$

в котором в силу условия причинности

$$f^{\mathrm{ret}}(x) = 0 \qquad \text{для} \qquad x \lesssim 0. \tag{4.17}$$

Покажем, что этот фурье-образ можно продолжить в область комплексных k, заменив

$$k \to k = p + i\Gamma, \quad p = \mathrm{Re}\, k, \quad \Gamma = \mathrm{Im}\, k,$$

если 4-вектор Γ удовлетворяет условию

$$\Gamma > 0, \tag{4.18}$$

а p произвольное. Имеем тогда

$$g^{\mathrm{ret}}(k) = \int f^{\mathrm{ret}}(x)e^{ipx}e^{-\Gamma x}dx = g^{\mathrm{ret}}(p + i\Gamma).$$

Ясно, что в этом интеграле экспонента $e^{-\Gamma x}$ будет режущим фактором, обеспечивающим его сходимость. Действительно, мы всегда можем в си-

лу (4.18) выбрать систему отсчета, в которой $\Gamma = 0$, следовательно, экспонента примет вид

$$e^{-\Gamma^0 x^0}.$$

Но, согласно (4.17), интегрирование производится фактически лишь по внутренности верхней половины светового конуса, где $x^0 \geqslant 0$ и $\mathbf{x}^2 \leqslant x_0^2$.

Следовательно, функция $h(x) = e^{ipx}e^{-\Gamma x}$ будет принадлежать некоторому классу $C(q, r)$, в котором

$$h_{mn} = \sup |x|^m \left| \frac{\partial^n h(x)}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_n}} \right| \leqslant \text{const}$$

для любых $m = 0, 1, \dots, r$; $n = 0, 1, \dots, q$.

С другой стороны, согласно условию 2.1 из раздела 2, функция $f^{\text{ret}}(x)$ должна быть интегрируемой, и потому интеграл

$$\int f^{\text{ret}}(x)h(x)dx = \int f^{ref}(x)e^{ipx}e^{-\Gamma x}dx \tag{4.19}$$

можно рассматривать как линейный функционал в пространстве функций $h(x)$. Следовательно, будут сходиться как сам интеграл (4.19), так и его производные по k:

$$i^S \int f^{\text{ret}}(x)x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_S}e^{ikx}dx < \infty, \quad S = 0, 1, \dots .$$

Таким образом, $g^{\text{ret}}(k)$ будет аналитической функцией k в области (4.18).

Заметим, что интеграл (4.19), будучи линейным функционалом в $C(q, r)$, должен быть тем самым ограничен по абсолютной величине линейной комбинацией величин h_{mh}. Поскольку производные от e^{ikx} по x пропорциональны степеням k, то мы видим отсюда, что функция $g^{\text{ret}}(k)$ возрастает на бесконечности не быстрее некоторого полинома по k (разумеется, мы имеем здесь дело с областью k, в которой неравенство (4.18) не ослабляется).

Фурье-образ $g^{\text{ret}}(k)$ для вещественного k мы можем теперь определить как несобственный предел интеграла (4.19):

$$\lim_{\substack{\Gamma \to 0 \\ \Gamma > 0}} g^{\text{ret}}(p + i\Gamma) = g^{\text{ret}}(p). \tag{4.20}$$

Совершенно аналогично показывается, что фурье-образ

$$g^{\text{adv}}(k) = \int f^{\text{adv}}(x)e^{ikx}dx \tag{4.21}$$

можно продолжить в комплексную плоскость с условием

$$\Gamma < 0 \tag{4.22}$$

и после этого интеграл (4.21) можно определить как несобственный предел:

$$\lim_{\substack{\Gamma \to 0 \\ \Gamma < 0}} g^{\text{adv}}(p + i\Gamma) = g^{\text{adv}}(p). \tag{4.23}$$

Таким образом, мы ввели две функции $g^{\text{ret}}(k)$ и $g^{\text{adv}}(k)$ и доказали их аналитичность в областях (4.18) и (4.22) соответственно.

Легко видеть, что соотношения между этими функциями следуют из соотношения четности (3.34), выведенного ранее. Между

$$g^{\mathrm{ret}}(k) = g^{\mathrm{ret}}(p+i\Gamma) - \int\limits_{\Gamma>0} f^{\mathrm{ret}}(x)\mathrm{e}^{ipx}\mathrm{e}^{-\Gamma x}\,dx,$$
$$g^{\mathrm{adv}}(k) = g^{\mathrm{adv}}(p+i\Gamma) - \int\limits_{\Gamma<0} f^{\mathrm{adv}}(x)\mathrm{e}^{ipx}\mathrm{e}^{-\Gamma x}\,dx \tag{4.24}$$

существует соотношение

$$g^{\mathrm{adv}}(-p-i\Gamma) = g^{\mathrm{ret}}(p+i\Gamma), \quad \Gamma>0. \tag{4.25}$$

Для дальнейших рассуждений фиксируем систему отсчета, выбрав ее так, чтобы $\Gamma=0$. В силу времениподобности Γ это всегда возможно и никак не ограничивает общности.

Сперва исследуем функцию g^{ret}; функцию g^{adv} всегда можно будет получить из нее с помощью соотношения (4.25). Из соображений релятивистской инвариантности $f^{\mathrm{ret}}(x)$ может зависеть только от x^2 и $\operatorname{sign} x^0$. Но тогда из (4.24) видно, что значения интеграла (4.24) для двух каких-либо значений k, связанных преобразованием Лоренца L^+, не включающих отражения времени, будут просто совпадать. Но любые два комплексных вектора k, для которых определен интеграл (4.24), обязательно связаны преобразованием L^+, поскольку только такие преобразования сохраняют условие $\Gamma>0$. Следовательно, левая часть (4.24) является для всех k, удовлетворяющих условиям $\Gamma^2>0, \Gamma^0>0$, функцией только от k^2. Итак, $g^{\mathrm{ret}}(p+i\Gamma)$ является некоторой аналитической функцией $G(k^2)$ только от k^2:

$$g^{\mathrm{ret}}(p+i\Gamma) = G(k^2), \tag{4.26}$$

определенной только для k, удовлетворяющих условиям

$$(\operatorname{Im} k)^2>0; \quad \operatorname{Im} k^0>0. \tag{4.27}$$

Чтобы найти область аналитичности этой функции на комплексной плоскости k^2, заметим, что в силу доказанной аналитичности функции $f^{\mathrm{ret}}(p+i\Gamma)$ в верхней полуплоскости по Γ^0 функция $G(k^2)$ будет, очевидно, аналитична в некоторой точке

$$k^2=\zeta=\xi+i\eta', \quad \xi=p^2-\Gamma^{02}, \quad \eta=2p^0\Gamma^0, \tag{4.28}$$

если только можно найти хотя бы один вектор $k=\{p_0+i\Gamma^0, \mathbf{p}\}$, удовлетворяющий (4.28), четвертая комплексная компонента которого лежала бы строго в верхней полуплоскости. Из связывающих $\zeta=\xi+i\eta$ и k формул (4.28) сразу видно, что это всегда можно сделать для любых точек комплексной плоскости $\zeta=\xi+i\eta$, исключая вещественную положительную полуось:

$$\eta=\operatorname{Im}(k^2)=0, \quad \xi=\operatorname{Re}(k^2)\geqslant 0. \tag{4.29}$$

Итак, функция $G(k^2)$ аналитична в комплексной плоскости k^2 всюду, исключая вещественную положительную полуось. Но функция $G(k^2)$ — это

функция одного скалярного переменного, и она «не знает», возведением в квадрат какого вектора возник этот аргумент. Поэтому сделанная после (4.26) оговорка теперь уже не нужна: $G(k^2)$ будет аналитической функцией для любых комплексных векторов k, квадрат которых не есть вещественное положительное число. Наконец, в силу замечания после формулы (4.19) на бесконечности $G(k^2)$ может возрастать не быстрее полинома.

Определим теперь две (вообще говоря, обобщенные) функции $G_+(p^2)$ и $G_-(p^2)$ как несобственные пределы:

$$G_+(p^2) = \lim_{\mathrm{Im}\, k^2 \to 0} G(k^2), \quad \mathrm{Im}(k^2) > 0, \quad \mathrm{Re}(k^2) > 0 \tag{4.30}$$

и

$$G_-(p^2) = \lim_{\mathrm{Im}^2\, k \to 0} G(k^2), \quad \mathrm{Im}(k^2) < 0, \quad \mathrm{Re}(k^2) > 0. \tag{4.31}$$

Сравнивая с помощью формул (4.28) предельный переход на вещественную ось в функциях $f^{\mathrm{ret}}(k)$ и $G(k^2)$ при условии $\mathrm{Re}(k^2) > 0$, видим, что

$$g^{\mathrm{ret}}(p) = \left\{ \begin{array}{ll} G_+(p^2), & p^0 > 0, \\ G_-(p^2), & p^0 < 0, \end{array} \right\} \quad p^2 > 0. \tag{4.32}$$

Свойство симметрии (4.25) дает нам теперь немедленно

$$g^{\mathrm{adv}}(p) = \left\{ \begin{array}{ll} G_-(p^2), & p^0 > 0, \\ G_+(p^2), & p^0 < 0, \end{array} \right\} \quad p^2 > 0. \tag{4.33}$$

Итак, мы получили выражение для обобщенных функций $g^{\mathrm{ret}}(p)$ и $g^{\mathrm{adv}}(p)$ в виде несобственных пределов некоторой одной аналитической функции $G(k^2)$. Обращаясь опять к (4.28), найдем, что предельные соотношения можно записать и в более простом и симметричном виде:

$$g^{\mathrm{ret}}(p) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} G(p^2 + i\varepsilon p^0) \tag{4.34}$$

и

$$g^{\mathrm{adv}}(p) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} G(p^2 - i\varepsilon p^0). \tag{4.35}$$

Замечая теперь еще, что в силу (4.15)

$$g^c(p) = \left\{ \begin{array}{ll} g^{\mathrm{adv}}(p), & p^0 < 0, \\ g^{\mathrm{ret}}(p), & p^0 > 0, \end{array} \right.$$

видим, что функцию $g^c(p)$ можно записать в виде несобственного предела

$$g^c(p) = G_+(p^2) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} G(p^2 + i\varepsilon). \tag{4.36}$$

Заметим при этом, что в формулах (4.34)–(4.36) мы опустили указание на времениподобность вектора p на том основании, что для $p^2 < 0$ функция $G(p^2)$ регулярна и, следовательно, способ предельного перехода просто безразличен.

Наконец, вычитая одну формулу (4.15) из другой, находим разность предельного значения на разрезе:

$$G_+(p^2) - G_-(p^2) = 2\pi i I(p^2). \tag{4.37}$$

Из установленного ранее свойства (4.10) спектральной функции $I(p^2)$ видно теперь, что линией разреза на комплексной плоскости k^2 для $G(k^2)$ будет не вся вещественная положительная полуось, а лишь ее часть:

$$\mathrm{Im}(k^2) = 0, \qquad \mathrm{Re}(k^2) \geqslant (3m)^2. \tag{4.38}$$

Установленные нами свойства аналитичности функции $G(\zeta)$ и то ее свойство, что она возрастает на бесконечности не быстрее некоторой степени полинома от ζ, позволяют нам (используя выведенные предельные формулы (4.34)–(4.36)) построить для функций $g^{\mathrm{c}}(k)$, $g^{\mathrm{ret}}(k)$ и $g^{\mathrm{adv}}(k)$ спектральные представления того же типа, что и полученное выше представление для $g^{(-)}(k)$. Для этой цели мы воспользуемся теоремой Коши, подробно обсужденной в разделе 1.

Будем считать, что функция $G(\zeta)$ возрастает на бесконечности не быстрее ζ^n. Тогда, согласно разделу 1, теорема Коши (если мы отбрасываем интегрирование по окружности большого круга) может быть применена к функции

$$h(\zeta) = \frac{G(\zeta)}{(\zeta - m)^{n+1}}, \tag{4.39}$$

которая будет обладать кроме разреза от $(3m)^2$ до ∞ еще и полюсом при $\zeta = m^2$. Поэтому контур интегрирования мы выберем следующим образом: выходя из начала координат, он пройдет несколько выше вещественной оси к $+\infty$, затем включит в себя окружность большого круга и возвратится в начало координат, проходя несколько ниже вещественной оси. В силу свойств функции $h(\zeta)$ интеграл по такому контуру сведется к разности интегралов по верхнему и нижнему берегу разреза и малому контуру C_m^- вокруг точки $\zeta = m^2$, проходимому в отрицательном смысле. Итак, мы можем написать:

$$G(\zeta) = \frac{(\zeta - m^2)^{n+1}}{2\pi i} \oint\limits_{C_m^-} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - m^2)^{n+1}} \frac{G(\zeta')}{\zeta' - \zeta} + \\ + \frac{(\zeta - m^2)^{n+1}}{2\pi i} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{G_+(\zeta') - G_-(\zeta')}{(\zeta' - \zeta)(\zeta' - m^2)^{n+1}} d\zeta'.$$

Вместо разности интегралов по верхнему и нижнему берегу разреза мы написали здесь (в соответствии с определениями (4.30), (4.31)) разность $G_+(\zeta) - G_-(\zeta)$. Интеграл по C_m^- дает

$$\frac{1}{2\pi i}(\zeta - m^2)^{n+1} \oint\limits_{C_m^-} \frac{d\zeta'\ G(\zeta')}{(\zeta' - m^2)^{n+1}(\zeta' - \zeta)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\zeta - m^2)^j}{j!} G^{(j)}(m^2), \tag{4.40}$$

и поэтому

$$G(k^2) = (k^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(\zeta)d\zeta}{(\zeta - m^2)^{n+1}(\zeta - k^2)} + \\ + \sum_{j=0}^{n} G^{(j)}(m^2)\frac{(p^2 - m^2)^j}{j!}. \quad (4.41)$$

Эту формулу можно рассматривать как спектральное представление для функции $G(k^2)$, в которой фигурирует та же спектральная функция $I(k^2)$.

Выполняя теперь соответствующие предельные переходы, получаем спектральные представления и для непосредственно интересующих нас функций $g^c(p^2)$, $g^{\mathrm{ret}}(p^2)$ и $g^{\mathrm{adv}}(p^2)$:

$$g^c(p) = G_+(p^2) = (p^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(\zeta)d\zeta}{(\zeta - m^2)^{n+1}(\zeta - p^2 - i\varepsilon)} + \\ + \sum_{j=0}^{n} G^{(j)}(m^2)\frac{(p^2 - m^2)^j}{j!}, \quad (4.42)$$

$$g^{ret,adv} = (p^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(\zeta)d\zeta}{(\zeta - m^2)^{n+1}(\zeta - p^2 \mp i\varepsilon)} + \\ + \sum_{j=0}^{n} G^{(j)}(m^2)\frac{(p^2 - m^2)^j}{j!}. \quad (4.43)$$

Установим теперь некоторые свойства, по существу, неопределенных коэффициентов $G^{(j)}(m^2), \ldots$, входящих в (4.41)–(4.43).

Покажем прежде всего, что коэффициент G^0 равен нулю. Рассмотрим для этого матричный элемент S-матрицы между двумя однопионными состояниями $|\overline{p}', \rho'\rangle$ и $|\overline{p}, \rho\rangle$. Согласно (2.10), он будет равен

$$\langle \overline{\mathbf{p}}', \rho' | S | \mathbf{p}, \rho \rangle = \langle 0 | b^{(-)}_{\rho'}(\overline{\mathbf{p}}') S b^{(+)}_{\rho}(\overline{\mathbf{p}}) | 0 \rangle.$$

Переставляя здесь амплитуды рождения налево, а амплитуды уничтожения направо с помощью перестановочных соотношений (2.26) и (2.11) и пользуясь определением функции $g^c(p)$, получим для этого матричного элемента

$$\langle \mathbf{p}', \rho' | S | \mathbf{p}, \rho \rangle = \langle 0 | b^{(-)}_{\rho'}(\mathbf{p}') b^{(+)}_{\rho}(\mathbf{p}) | 0 \rangle + \frac{i\pi\delta_{\rho\rho'}}{p^0}\,\delta(p' - p) g^c(p'). \quad (4.44)$$

С другой стороны, в силу стабильности одночастичных состояний (условие 1.6 из подраздела 2.1), этот матричный элемент равен лишь первому члену правой части (4.44). Итак,

$$g^c(p) = 0 \quad \text{при} \quad p^2 = m^2.$$

Отсюда следует, что

$$G^{(0)} = 0. \quad (4.45)$$

Покажем теперь, что все константы $G^{(1)}, \ldots, G^{(n)}$ должны быть вещественными. Это утверждение доказывается немедленно, если заметить, что из соотношения сопряжения

$$f^{\mathrm{ret}}(x) = f^{ret*}(x) \tag{4.46}$$

следует

$$g^{\mathrm{ret}}(k) = g^{ret*}(-k), \tag{4.47}$$

и интеграл (4.43) сам обладает этим свойством. Итак, фурье-образы всех трех «гринообразных» матричных элементов (запаздывающего, опережающего и причинного) имеют спектральное представление вида

$$g^c(p^2) = (p^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(\zeta)d\zeta}{(\zeta - m^2)^{n+1}(\zeta - p^2 - i\varepsilon)} + \\ + \sum_{i=1}^{n} G_i (m^2 - p^2)^i, \tag{4.48}$$

$$g^{ret,adv}(p^2) = (p^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(\zeta)d\zeta}{(\zeta - m^2)^{n+1}(\zeta - p^2 \mp i\varepsilon p^0)} + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} G_i (m^2 - p^2)^i \tag{4.49}$$

и G_i вещественны.

С помощью полученных в разделе 3 соотношений между радиационными операторами из спектральных представлений (4.48) можно получить спектральные представления и для вакуумных матричных элементов всех остальных радиационных операторов. Заметим, что при образовании линейных комбинаций, соответствующих всем «негринообразным» матричным элементам ($g^{(+)}, g^{(-)}, g$ и $g^{(1)}$), входящие в (4.48) неопределенные полиномы уничтожаются, а под интегралом возникают функции $\delta(\zeta - p^2)$, благодаря которым множитель $(p^2 - m^2)^n$ вне и внутри интегралов сокращается, и мы получаем представление в точности такого же вида, как найденное выше представление (4.11) для $g^{(-)}$. Для «гринообразной» функции $\overline{g}$ получится представление типа (4.48) с заменой $\dfrac{1}{\zeta - p^2 - i\varepsilon}$ на $P\dfrac{1}{\zeta - p^2}$.

Итак, мы выяснили, что по отношению к спектральным представлениям их вакуумных матричных элементов все радиационные операторы разделяются на две группы. Для матричных элементов «негринообразных» операторов получаются простые спектральные представления типа (4.11), в то время как для «гринообразных» — сложные представления типа (4.48). Эти последние были получены нами довольно громоздким путем через исследование аналитического поведения соответствующих функций.

Можно было бы попробовать поступить и иначе — непосредственно переходить от спектрального представления (4.11) для $g^{(-)}(k)$ и аналогичного для $g^{(+)}(k)$ к спектральным представлениям для «гринообразных» функций с помощью (например, для $g^c(k)$) формул типа (3.16), (3.17). Прямая выкладка

привела бы нас тогда к спектральному представлению «простого» типа

$$g^c(k) = \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{dm^2}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} I(m^2) \tag{4.50}$$

для g^c и таким же представлениям (отличающимся лишь способом обхода полюса при $m^2 = k^2$) для других «гринообразных» функций. Именно этот путь был избран в работе Лемана.

Однако в действительности эти простые представления оказались бы, вообще говоря (если не налагать жесткого ограничения на порядок роста спектральной функции на бесконечности), лишенными смысла, поскольку интеграл по m^2 будет расходиться. Действительно, для «негринообразных» функций ядра спектральных представлений обязательно содержат δ-функцию, почему интегрирование в формулах типа (4.11) фактически производится лишь в окрестности одной точки, и поведение $I(m^2)$ на бесконечности для сходимости интеграла несущественно. В спектральных представлениях типа (4.50) для «гринообразных» функций интегрирование, напротив, эффективно распространяется на весь интеграл $(-\infty, \infty)$, что приведет к расходимости при недостаточно быстром убывании функции $I(m^2)$ на ∞.

Причина этой разницы в поведении, по существу, ясна уже из формул (3.17). В самом деле, эти формулы определяют функцию $F^c_{\alpha\omega}(x-y)$ только для $x > y$ или $x < y$. Значение же ее при $x = y$ остается неопределенным. В силу же известной сингулярности всех F-функций на световом конусе это значение в отдельной точке является существенным для построения фурье-образов. Иными словами, для полного определения T-произведения недостаточно определить его лишь для $x > y$ и $x < y$, надо задать еще и правила его интегрирования в окрестности нуля. В противном случае выражения типа $T(j_{\rho'}(x) j_{\rho}(y))$ остаются недоопределенными, что и проявляется в возникновении бессмысленных расходящихся выражений при больших импульсах.

Возникший при интегрировании T-произведения вблизи нуля произвол проще всего выразить, добавляя к его определению в координатном пространстве некоторое число производных от $\delta(x-y)$ с неопределенными коэффициентами (см., например, работу Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова (1955)), что добавит к правой части (4.50) некоторый полином от k^2:

$$g^c(k) = \int\limits_{(3m)^2} \frac{I(z)}{z - k^2 - i\varepsilon} dz + P(k^2). \tag{4.51}$$

Коэффициенты (может быть расходящиеся) этого полинома как раз и призваны скомпенсировать расходимости в интеграле. Практически эта компенсация выполняется проще всего путем использования известной вычитательной процедуры.

Действительно, мы получили бы тогда

$$\frac{1}{z' - k^2} = \frac{1}{z' - m^2 - (k^2 - m^2)} =$$

$$= \frac{1}{z' - m^2} \left\{ 1 + \frac{k^2 - m^2}{z' - m^2} + \ldots + \left(\frac{k^2 - m^2}{z' - m^2} \right)^n \right\} + \frac{(k^2 - m^2)^{n+1}}{(z' - k^2)(z' - m^2)^{n+1}}, \tag{4.52}$$

и поэтому

$$g^c(k) = i(k^2 - m^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(z)dz}{(z-m^2)^{n+1}(z-k^2-i\varepsilon)} + \\ + \sum_{0\leqslant l\leqslant n} (k^2-m^2)^l \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(z)dz}{(z-m^2)^{l+1}} + P(k^2). \quad (4.53)$$

Выбирая здесь n достаточно большим, мы могли бы сделать первый интеграл в правой части (4.53) сходящимся; расходящиеся же члены в сумме, расположенные по степеням $k^2 - m^2$, можно было бы скомпенсировать за счет полинома $P(k^2)$, от которого остался бы тогда только конечный полином, как раз такой, что и в наших «сложных» спектральных представлениях типа (4.48).

Таким образом, в конце концов мы пришли бы и на этом пути к тем же соотношениям (4.48), вывод которых был бы, однако, менее убедительным из-за необходимости иметь «по дороге» дело с расходящимися выражениями. В нашем выводе с такой трудностью вовсе не приходится встречаться.

Покажем, как получается из наших спектральных представлений для вариационных производных матрицы рассеяния известный результат Челлена–Лемана, относящийся к спектральному представлению обычной функции Грина.

Функцию Грина обычно определяют как

$$G_{\rho\rho'}(x,y) = \delta_{\rho\rho'} G(x-y) = i\langle 0|T(\varphi_{\rho'}(x) S \varphi_\rho(y))|0\rangle. \quad (4.54)$$

Применяя для преобразования T-произведения в правой части теорему Вика, получаем

$$\delta_{\rho\rho'} G(x-y) = i\,\overbrace{\varphi_{\rho'}(x)\varphi_\rho}(y)\langle 0|S|0\rangle + i \sum_{\rho''\,\rho'''} \int dx'\,dy'\,\overbrace{\varphi_{\rho'}(x)\varphi_{\rho''}}(x') \times \\ \times \langle 0|\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho''}(x')\delta\varphi_{\rho'''}(y')}|0\rangle\,\overbrace{\varphi_{\rho'''}(y')\varphi_\rho}(y), \quad (4.55)$$

где

$$\overbrace{\varphi_{\rho'}(x)\varphi_\rho(y)} = -i\delta_{\rho'\rho} D^c(x-y)$$

— обычное хронологическое спаривание для невзаимодействующих операторов и

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx} D^c(k)\,dk, \quad D^c(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}.$$

Переходя в (4.55) к фурье-образам, находим

$$G(k) = \frac{1}{m^2-k^2-i\varepsilon} + \frac{1}{(m^2-k^2-i\varepsilon)^2} g^c(k), \quad (4.56)$$

откуда на основании (4.48)

$$G(k) = (1+C_1)(m^2-k^2-i\varepsilon)^{-1} + \sum_{2\leqslant i\leqslant n} C_i (m^2-k^2)^{i-2} + \\ + (m^2-k^2)^{n+1} \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{I(z)dz}{(m^2-z)^{n+1}(z-k^2-i\varepsilon)}. \quad (4.57)$$

Представление Челлена–Лемана получится теперь, если мы сделаем еще дополнительное предположение о том, что «степень роста» n равна единице. Тогда

$$G(k) = (1 + C_1)(m^2 + k^2 - i\varepsilon)^{-1} + \int\limits_{(3m)^2}^{\infty} \frac{J(z')dz'}{z' - k^2 - i\varepsilon}, \qquad J(k) = \frac{I(z)}{(z - m^2)^2}, \tag{4.58}$$

а множитель $(1 + C_1)$ может быть исключен с помощью конечной перенормировки

$$G(p) \to (1 + C_1)G(p). \tag{4.59}$$

§ 5. Вакуумные средние фермиевских радиационных операторов второго порядка[1]

В разделе 3 мы установили, что из всех радиационных операторов не выше второго порядка отличными от нуля вакуумными матричными элементами обладают лишь операторы типа (3.9) и (3.10). Первый из них был рассмотрен в предыдущем разделе. Сейчас мы займемся изучением вакуумных средних

$$\left\langle 0 \middle| \frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)} S^+ \middle| 0 \right\rangle = i\Theta^{(c)}(x - y). \tag{5.1}$$

При выполнении вариационного дифференцирования по фермиевским полям надо учитывать их антикоммутативность. Это приведет в первую очередь к тому, что левые и правые производные будут отличаться знаком, если дифференцируется четная в фермионных операторах величина. Для определенности мы будем работать всегда только с левыми производными. Далее, антикоммутативность полей приведет к антикоммутативности производных при многократном дифференцировании, например

$$\frac{\delta^2 A}{\delta\psi_1\delta\psi_2} = -\frac{\delta^2 A}{\delta\psi_2\delta\psi_1}. \tag{5.2}$$

Изменится и формула для дифференцирования произведения. В случае использования левых производных она примет вид

$$\frac{\delta(AB)}{\delta\psi} = \frac{\delta A}{\delta\psi}B + (-1)^{\eta_A} A\frac{\delta B}{\delta\psi}, \tag{5.3}$$

где η_A — число входящих мультипликативно в A ферми-операторов. Наконец, заметим, что при выполнении эрмитова сопряжения наши левые производные будут переходить в правые и для возвращения к стандартному порядку понадобится, если дифференцируется четное число в ферми-операторах выражение, добавочная перемена знака.

Как и в бозевском случае, мы будем устанавливать связь (5.1) с вакуумным ожиданием от произведения токов. Поэтому полезно выяснить сначала правила сопряжения для двух введенных выше токов $\cap(x)$ и $\overline{\cap}(x)$ (3.4). В силу

[1] Читатель, которому интересны только выводы дисперсионных соотношений, может опустить этот раздел.

унитарности матрицы рассеяния выражение для $\cap(x)$ можно записать в двух видах:

$$\cap(x) = -i\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}S^+ = iS\frac{\delta S^+}{\delta\bar{\psi}(x)}. \tag{5.4}$$

Выполняя дираковское сопряжение, находим

$$\bar{\cap}(x) = \cap^+(x)\beta = iS\left(\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^+\beta = -iS\left(\frac{S^+\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)\beta = \\ = -iS\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^+\beta S^+. \tag{5.5}$$

Чтобы выяснить смысл $\bar{\cap}(x)$, рассмотрим локальную вариацию

$$\delta_x S = \delta\bar{\psi}(x)\left(\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}\right) + \delta\psi(x)\left(\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}\right). \tag{5.6}$$

Теперь, выполняя эрмитово сопряжение, находим

$$\delta_x S^+ = \left(\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^+(\delta\bar{\psi}^+(x)) + \left(\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}\right)^+\delta(\psi(x))^+ = \\ = \left(\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^+\beta\delta\psi(x) + \left(\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}\right)^+\delta\bar{\psi}(x)\beta = \\ = \delta(x)\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^+\beta S^+ + \delta\bar{\psi}(x)\left(\frac{\delta}{\delta\psi(x)}\right)^+\beta S^+.$$

Но, с другой стороны,

$$\delta_x S^+ = \delta\bar{\psi}(x)\frac{\delta S^+}{\delta\bar{\psi}(x)} + \delta\psi(x)\frac{\delta S^+}{\delta\psi(x)}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)^+\beta = \frac{\delta}{\delta\psi(x)}, \qquad \left(\frac{\delta}{\delta\psi(x)}\right)^+\beta = \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}. \tag{5.7}$$

Поэтому для выражения, дираковски сопряженного к (5.4), получается

$$\bar{\cap}(x) = i\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}S^+ = -iS\frac{\delta S^+}{\delta\psi(x)}, \tag{5.8}$$

что оправдывает обозначения $\cap(x)$ и $\bar{\cap}(x)$.

Варьируя теперь выражение $\left(\dfrac{\delta S}{\delta\psi(y)}\right)S^+$ по $\bar{\psi}(x)$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}S^+ = \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\psi(y)}S^+\right) + \frac{\delta S}{\delta\psi(y)}\frac{\delta S^+}{\delta\bar{\psi}(x)} \tag{5.9}$$

и пользуясь определениями токов (5.4), (5.8) находим, что

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}S^+ = -i\frac{\delta\bar{\cap}(y)}{\delta\bar{\psi}(x)} - \bar{\cap}(y)\cap(x). \tag{5.10}$$

Точно так же получается

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}S^+ = -\frac{\delta^2 S}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(x)}S^+ = -i\frac{\delta\cap(x)}{\delta\psi(y)} + \cap(x)\bar{\cap}(y). \tag{5.11}$$

Из (5.10) и (5.11) сразу же следует

$$\cap(x)\bar{\cap}(y) + \bar{\cap}(y)\cap(x) = i\left(\frac{\delta\cap(x)}{\psi(y)} - \frac{\delta\bar{\cap}(y)}{\delta\bar{\psi}(x)}\right) \tag{5.12}$$

— аналог прежнего коммутационного выражения (3.18), где теперь слева коммутатор заменился на антикоммутатор. С другой стороны, пользуясь условиями причинности, получаем

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}S^+ = \begin{cases} \cap(x)\bar{\cap}(y), & x \gtrsim y \\ -\bar{\cap}(y)\cap(x), & x \lesssim y \end{cases} = T(\cap(x)\bar{\cap}(y)). \tag{5.13}$$

В полной аналогии с бозонным случаем мы определим матричные элементы по вакууму

$$\langle 0|T(\cap_\alpha(x)\bar{\cap}_\beta(y))|0\rangle = i\Theta^{(c)}_{\alpha\beta}(x,y), \tag{5.14}$$

$$\langle 0|\cap_\alpha(x)\bar{\cap}_\beta(y)|0\rangle = i\Theta^{(-)}_{\alpha\beta}(x,y), \tag{5.15}$$

$$\langle 0|\bar{\cap}_\beta(y)\cap_\alpha(x)|0\rangle = i\Theta^{(+)}_{\alpha\beta}(x,y), \tag{5.16}$$

$$\langle 0|\cap_\alpha(x)\bar{\cap}_\beta(y) + \bar{\cap}_\beta(y)\cap_\alpha(x)|0\rangle = i\Theta_{\alpha\beta}(x,y) = i(\Theta^{(-)}_{\alpha\beta} + \Theta^{(+)}_{\alpha\beta}(x,y)), \tag{5.17}$$

$$-i\left\langle 0\left|\frac{\delta\bar{\cap}_\beta(y)}{\delta\bar{\psi}_\alpha(x)}\right|0\right\rangle = \langle 0|\theta(x-y)[\cap_\alpha(x),\bar{\cap}_\beta(y)]_+|0\rangle = i\Theta^{\mathrm{ret}}_{\alpha\beta}(x,y), \tag{5.18}$$

$$-i\left\langle 0\left|\frac{\delta\cap_\alpha(x)}{\delta\psi_\beta(y)}\right|0\right\rangle = -\langle 0|\theta(y-x)[\cap_\alpha(x),\bar{\cap}_\beta(y)]_+|0\rangle = i\Theta^{\mathrm{adv}}_{\alpha\beta}(x,y), \tag{5.19}$$

$$\Theta^{(c)}(x,y) = \Theta^{\mathrm{ret}}(x,y) - \Theta^{(+)}(x,y),$$

$$\Theta^{(c)}(x,y) = \Theta^{\mathrm{adv}}(x,y) + \Theta^{(-)}(x,y), \tag{5.20}$$

$$\Theta^{\mathrm{ret}}(-x) = \Theta^{\mathrm{adv}}(x). \tag{5.21}$$

Запаздывающий и опережающий матричные элементы обладают, конечно, свойством

$$\Theta^{\mathrm{ret}}(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad x \lesssim y; \quad \Theta^{\mathrm{adv}}(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad x \gtrsim y. \tag{5.22}$$

Ясно, что ввиду трансляционной и изотопической инвариантности все введенные функции $\Theta^{(?)}$ должны иметь форму

$$\Theta^{(?)}(x,y) = \delta_{st}\Theta^{(?)}(x-y), \tag{5.23}$$

где s,t — изотопические (протон-нейтронные) матрицы, а $\Theta^{(?)}(x-y)$ — обычные спинорные индексы. Далее, в силу инвариантности относительно преобразований Лоренца ясно, что $\Theta^{(?)}(x-y)$ в свою очередь должны иметь структуру

$$\Theta^{(?)}(x) = i\hat{\partial}\theta^{(?)}_1(x) + \theta^{(?)}_2(x), \tag{5.24}$$

где $\theta_1^{(?)}$ и $\theta_2^{(?)}$ — скалярные функции. Подставляя получающиеся из (5.23), (5.24) выражения для $\Theta^{(?)}(x,y)$ через $\theta_1^{(?)}, \theta_2^{(?)}$ в (5.20), получаем немедленно соотношения между скалярными функциями $\theta_1^{(?)}$ и $\theta_2^{(?)}$:

$$\begin{aligned}\theta_{1,2}^{(c)} &= \theta_{1,2}^{\mathrm{ret}}(x) - \theta_{1,2}^{(+)}(x),\\ \theta_{1,2}^{(c)} &= \theta_{1,2}^{\mathrm{adv}}(x) + \theta_{1,2}^{(-)}(x).\end{aligned} \tag{5.25}$$

Рассмотрим теперь функцию $\Theta^{(-)}(x)$. Используя, как всегда, условия полноты и трансляционной инвариантности, можем написать для нее:

$$\Theta_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\sum_n \int d\mathbf{k}\langle 0|\cap_\alpha(0)|n,\mathbf{k}\rangle\langle n,\mathbf{k}|\overline{\cap}_\beta(0)|0\rangle e^{-ik(x-y)}. \tag{5.26}$$

В силу (3.4) вакуумный член с $n=0$ в сумме будет отсутствовать. Рассуждая так же, как в бозевском случае (после формулы (4.3)), убедимся, что в сумме будут отсутствовать и члены, соответствующие промежуточным состояниям с одним нуклоном или произвольным числом пионов. Таким образом, сумма в (5.26) должна начинаться с члена $n=2$, но притом не двупионного. При этом минимальная масса промежуточного состояния получится, если в нем присутствует один нуклон и один пион, т. е.

$$k^2 \geqslant (M+m)^2. \tag{5.27}$$

Записывая разложение (5.26) в виде четырехмерного интеграла Фурье и определяя фурье-образ $\sigma^{(?)}(k)$ функции $\Theta^{(?)}(x)$ нашим стандартным образом, видим, что

$$\Sigma^{(-)}(k) = -2\pi i\sum_n \langle 0|\cap_\alpha(x)|n,\mathbf{k}\rangle\langle n,\mathbf{k}|\overline{\cap}_\beta(0)|0\rangle\delta\left(k^0 - \sqrt{M_n^2+k^2}\right). \tag{5.28}$$

Ясно, что фурье-образ $\sigma^{(?)}(k)$ будет обладать матричной структурой, совершенно аналогичной матричной структуре $\Theta^{(?)}(x)$:

$$\sigma^{(?)}(k) = (\gamma k)\sigma_1^{(?)}(k) + \sigma_2^{(?)}(k), \tag{5.29}$$

где $\sigma_1^{(?)}$ и $\sigma_2^{(?)}$ — скалярные функции, причем как раз являющиеся фурье-образами скалярных функций $\theta_1^{(?)}$ и $\theta_2^{(?)}$.

Повторяя рассуждения раздела 4, мы видим, что функции $\sigma_1^{(-)}$ и $\sigma_2^{(2)}$ выражаются в виде

$$\sigma_{1,2}^{(-)}(k) = -2\pi i\theta(k^0)\rho_{1,2}(k^2), \tag{5.30}$$

где зависящие только от k^2 спектральные функции $\rho_1(k^2)$ и $\rho_2(k^2)$ определены условием

$$\begin{aligned}&\theta(k^0)\{(\gamma k)\rho_1(k^2) + \rho_2(k^2)\} =\\ &\quad = \sum_n \langle 0|\cap_\alpha(0)|n,\mathbf{k}\rangle\langle n\mathbf{k}|\overline{\cap}_\beta(0)|0\rangle\theta(k^0)2\sqrt{\mathbf{k}^2+M_n^2}\,\delta(k^2-M_n^2).\end{aligned} \tag{5.31}$$

Чтобы разделить в правой части члены, относящиеся к ρ_1 и к ρ_2, помножим (5.31) на γ^0, возьмем затем шпур и распишем дираковское сопряжение через эрмитово. Тогда

$$\theta(k^0)k^0\rho_1(k^2) = \frac{\theta(k^0)}{2}k^0\sum_{n,\alpha}|\langle 0|\cap_\alpha(0)|n,\mathbf{k}\rangle|^2\delta(k^2-M_n^2). \tag{5.32}$$

Множитель $\theta(k^0)k^0$ сокращается, так что остается

$$\rho_1(k^2) = \frac{1}{2}\sum_{n,\alpha}|\langle 0|\cap_\alpha(0)|n,\mathbf{k}\rangle|^2\delta(k^2-M_n^2), \tag{5.33}$$

откуда можно видеть

1. $\rho_1(k^2)\geqslant 0$,
2. $\rho_1(k^2)=0$ для $k^2\leqslant(M+m)^2$ (из (5.27)).

Чтобы найти выражение для $\rho_2(k^0)$, возьмем шпур непосредственно от (5.31):

$$\rho_2(k^2) = \frac{\theta(k^0)}{2}k^0\sum_{n,\alpha,\beta}\langle 0|\cap_\alpha(0)|n,\mathbf{k}\rangle\langle n,\mathbf{k}|\cap^*_\beta(0)|0\rangle\gamma^0_{\beta\alpha}\delta(k^2-M_n^2).$$

Используя представление для матриц Дирака с $\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, найдем

$$\theta(k^0)\rho_2(k^0) = \frac{\theta(k^0)k^0}{2}\sum_{n;\alpha=1,2}|\langle 0|\cap_\alpha(0)|n,\mathbf{k}\rangle|^2\delta(k^2-M_n^2) - \\ -\frac{\theta(k^0)k^0}{2}\sum_{n;\alpha=3,4}|\langle 0|\cap_\alpha(0)|n,\mathbf{k}\rangle|^2\delta(k^2-M_n^2). \tag{5.34}$$

Складывая и вычитая (5.32) и (5.34), придем к еще двум неравенствам:

$$\theta(k^0)[k^0\rho_1(k^2)+\rho_2(k^2)]\geqslant 0;\quad \theta(k^0)[k^0\rho_1(k^2)-\rho_2(k^2)]\geqslant 0.$$

Если теперь заметим, что

$$k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+M_n^2}=\sqrt{\mathbf{k}^2+k^2}\geqslant\sqrt{k^2}=|k|,$$

то мы увидим, что необходимым и достаточным условием выполнения полученных неравенств (которые должны иметь место в любой системе отсчета) будет

$$|k|\rho_1(k^2)+\rho_2(k^2)\geqslant 0,\quad |k|\rho_1(k^2)-\rho_2(k^2)\geqslant 0.$$

Таким образом, функция $\rho_2(k^2)$ должна удовлетворять условиям

1. $-|k|\rho_1(k^2)\leqslant\rho_2(k^2)\leqslant|k|\rho_1(k^2)$,
2. $\rho_2(k^2)=0$ при $k^2\leqslant(M+m)^2$.

Итак, мы нашли спектральное представление для функций $\sigma_1^{(-)}$ и $\sigma_2^{(-)}$

$$\sigma^{(-)}_{1,2}(k) = -2\pi i\int\limits_{(M+m)^2}^{\infty}\theta(k^0)\delta(k^2-M^2)\rho_{1,2}(M^2)dM^2 \tag{5.35}$$

совершенно аналогичное спектральному представлению (4.11) для функции $g^{(-)}(k)$.

Чтобы перейти отсюда к построению спектральных представлений для других функций $\sigma^{(?)}(k)$, нам надо будет установить сначала еще несколько соотношений между функциями различных верхних индексов, вытекающих из инвариантности по отношению к зарядовому сопряжению. Условия такой инвариантности можно записать в виде

$$\langle 0|\overline{\cap}_\beta(y)\cap_\alpha(x)|0\rangle = \langle 0|\overline{\cap}'_\beta(y)\cap'_\alpha(x)|0\rangle, \tag{5.36}$$

где зарядово-сопряженные операторы $\overline{\cap}', \cap'$ связаны с $\overline{\cap}, \cap$ известными соотношениями

$$\cap'(x) = C\overline{\cap}(x) = \overline{\cap}(x)C^T, \quad \overline{\cap}'(x) = C^{-1}\cap(x) \tag{5.37}$$

и для матрицы C выполняются условия

$$CC^+ = -1; \quad C^T = -C, \quad C^{-1}\gamma^k C = -(\gamma^k)^T. \tag{5.38}$$

Применяя условие (5.36) к произведению, стоящему в левой части (5.16), и используя (5.37) и (5.38), придем после несложных матричных преобразований к соотношению

$$\Theta^{(+)}(x) = -(C^{-1}\Theta^{(-)}(-x)C)^T, \tag{5.39}$$

которое устанавливает связь между отрицательно- и положительно-частотными функциями. Очевидные линейные соотношения между различными типами функций дают нам возможность немедленно вывести из (5.39) другие серии соотношений, из большого количества которых мы выпишем только следующее:

$$\Theta^{\mathrm{ret}}(x) = (C^{-1}\Theta^{\mathrm{adv}}(-x)C)^T, \tag{5.40}$$

которое понадобиться нам в дальнейшем.

Записывая с помощью (5.23), (5.24) функции $\Theta^{(?)}(x,y)$ через $\theta^{(?)}_{1,2}(x-y)$, используя (5.38), чтобы избавиться от матрицы C, и разделяя после этого части, содержащие и не содержащие матрицы γ (что можно сделать путем взятия соответствующих шпуров), получим из (5.39) и (5.40) соответствующие «соотношения четности» для скалярных функций $\theta^{(?)}_{1,2}$:

$$\theta^{(+)}_{1,2}(x) = -\theta^{(-)}_{1,2}(-x); \quad \theta^{\mathrm{adv}}_{1,2}(x) = \theta^{\mathrm{ret}}_{1,2}(-x).$$

Производя переход к фурье-образам, имеем

$$\sigma^{(+)}_{1,2}(k) = -\sigma^{(-)}_{1,2}(-k), \tag{5.41}$$

$$\sigma^{\mathrm{adv}}_{1,2}(k) = \sigma^{\mathrm{ret}}_{1,2}(-k). \tag{5.42}$$

Соотношение (5.41) дает нам возможность немедленно выписать спектральное представление для функций $\sigma^{(+)}_{1,2}(k)$:

$$\sigma^{(+)}_{1,2}(k) = 2\pi i\theta(-k^0)\rho_{1,2}(k^2) = \\ = 2\pi i \int\limits_{(M+m)^2}^{\infty} \theta(-k^0)\delta(k^2-M^2)\rho_{1,2}(M^2)dM^2. \tag{5.43}$$

Подставляя это спектральное представление, равно как и (5.30), в соотношения, получающиеся из (5.25) переходом к фурье-образам, получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2}^{(c)}(k) &= -2\pi i\theta(k^0)\rho_{1,2}(k^2) + \sigma_{1,2}^{\mathrm{adv}}(k),\\ \sigma_{1,2}^{(c)}(k) &= -2\pi i\theta(-k^0)\rho_{1,2}(k^2) + \sigma_{1,2}^{\mathrm{ret}}(k).\end{aligned} \tag{5.44}$$

Таким образом устанавливается, что (как и в бозонном случае) при малых импульсах $k^2 < (M+m)^2$ фурье-образы всех трех «гринообразных» функций совпадают:

$$\sigma^{(c)}(k) = \sigma^{\mathrm{ret}}(k) = \sigma^{\mathrm{adv}}(k), \quad \text{если} \quad k^2 < (M+m)^2. \tag{5.45}$$

Коль скоро установлены спектральные представления (5.30), (5.43), свойства спектральных функций $(\rho_1(k^2))$ и $(\rho_2(k^2))$, формулы (5.44) и соотношения (5.42), то дальнейшие рассуждения можно провести, дословно повторяя вывод в предыдущем разделе. Поэтому выпишем сразу «сложные» спектральные представления для «гринообразных» функций $\sigma_{1,2}^{(c)}, \sigma_{1,2}^{\mathrm{ret}}$ и $\sigma_{1,2}^{\mathrm{adv}}$:

$$\sigma_{1,2}^{(c)}(p) = -(p^2-\mu^2)^{n+1}\int\limits_{(M+m)^2}^{\infty}\frac{\rho_{1,2}(\zeta)d\zeta}{(\zeta-M^2)^{n+1}(\zeta-p^2-i\varepsilon)} + \sum_{j=0}^{n}\mathfrak{A}_j^{1,2}(p^2-M^2)^j, \tag{5.46}$$

$$\sigma_{1,2}^{(\mathrm{ret,adv})}(p) = -(p^2-\mu^2)^{n+1}\int\limits_{(M+m)^2}^{\infty}\frac{\rho_{1,2}(\zeta)d\zeta}{(\zeta-M^2)^{n+1}(\zeta-p^2\mp i\varepsilon)} + \sum_{j=0}^{n}\mathfrak{A}_j^{1,2}(p^2-M^2)^j. \tag{5.47}$$

На практике более удобно иметь спектральные представления, записанные в несколько ином виде. Введем вместо $\rho_{1,2}$ две неотрицательные в силу условия 2 подраздела 2.2 функции

$$J_1(\nu) = \frac{\rho_1(\nu^2) - \dfrac{\rho_2(\nu^2)}{\nu}}{2}, \qquad J_2(\nu) = \frac{\rho_1(\nu^2) + \dfrac{\rho_2(\nu^2)}{\nu}}{2}, \tag{5.48}$$

где $\nu = +\sqrt{k^2} = |k|$. Тогда

$$(k\gamma)\rho_1(\nu^2) + \rho(\nu^2) = (k\gamma-\nu)J_1(\nu) + (k\gamma+\nu)J_2(\nu)$$

(здесь ν рассматривается как переменная, не зависящая от k). Если мы построим комбинации

$$\Sigma^{(?)}(k) = (k\gamma)\sigma_1^{(?)}(k) + \sigma_2^{(?)}(k),$$

которые, как легко видеть, суть фурье-образы от $\Theta^{(?)}(x)$ (индекс $(?)$ обозначает (c), (adv) или (ret)), то для полной «гринообразной» функции $\Sigma^{(?)}(k)$ получим спектральное представление

$$\begin{aligned}\Sigma^{(?)}(k) = -(k^2-M^2)^{n+1}\int\limits_{(\mu+m)^2}^{\infty}&\frac{(\hat{k}-\nu)J_1(\nu)+(\hat{k}+\nu)J_2(\nu)}{(\nu^2-M^2)^{n+1}(\nu^2-k^2)}d\nu^2 +\\ &+ (\hat{k}\mathfrak{A}_0^{(1)} + \mathfrak{A}_0^{(2)}) + (\hat{k}\mathfrak{A}_1^{(1)} + \mathfrak{A}_1^{(2)})(k^2-M^2) + \dots .\end{aligned} \tag{5.49}$$

Если мы желаем установить спектральные представления для конкретных функций Σ^{c}, Σ^{ret} и Σ^{adv}, надо лишь выбрать соответствующее правило обхода полюса $k^2 = M^2$.

Чтобы привести представление (5.49) к еще более наглядному виду, заметим, что разности

$$\frac{(k^2-M^2)^{n+1}}{(\nu^2-M^2)^{n+1}}\frac{1}{\nu-\widehat{k}} - \frac{(\widehat{k}-M)^{2n+2}}{(\nu-m)^{2n+2}}\frac{1}{\nu-\widehat{k}}$$

и

$$\frac{(k^2-\mu^2)^{n+1}}{(\nu^2-\mu^2)^{n+1}}\frac{1}{\nu+\widehat{k}} - \frac{(\widehat{k}-\mu)^{2n+2}}{(\nu+\mu)^{2n+2}}\frac{1}{\nu+\widehat{k}}$$

являются по отношению к $\widehat{k}$ полиномами степени $2n+1$. Действительно, приводя оба члена такой разности к общему знаменателю и выделяя линейные множители перед различными степенями $(n+1)$ в числителе, мы найдем, что она с необходимостью содержит множитель $(\nu-\widehat{k})$ (или $(\nu+\widehat{k})$), который будет сокращать только множитель в знаменателе, который зависит от $\widehat{k}$. Поэтому, если образовать такие разности под интегралами в (5.49), то в каждом члене полинома множитель $\widehat{k}$ в соответствующей степени просто выйдет из-под знака интеграла и интегрирование по ν приведет к некоторому числу, т. е. интегрирование такой разности приведет просто к полиному степени $2n+1$ от $\widehat{k}$.

Это дает нам возможность преобразовать (5.49) к виду

$$\Sigma(k) = -(\widehat{k}-M)^{2n+2}\int\left\{\frac{I_1(\nu)}{\nu+\widehat{k}} + \frac{I_2(\nu)}{\nu-\widehat{k}}\right\}d\nu + \\ + B_0 + B_1(\widehat{k}-M) + \ldots + B_{2n+1}(\widehat{k}-M)^{2n+1}, \quad (5.50)$$

где введены новые спектральные функции

$$I_1(\nu) = \frac{2J_1(\nu)\nu}{(\nu+M)^{2n+2}} \quad \text{и} \quad I_2(\nu) = \frac{2J_2(\nu)\nu}{(\nu-M)^{2n+2}}. \quad (5.51)$$

Как и в бозевском случае, можно показать, что

$$B_0 = 0;$$

для этого стоит лишь рассмотреть матричный элемент от S между двумя однонуклонными состояниями, точно так же, как в разделе 4 мы рассматривали матричный элемент от S между двумя однопионными состояниями. Наконец, соотношение (5.21) приводит к тому следствию, что

$$\text{все} \quad B_m \quad \text{вещественны.} \quad (5.52)$$

Представление Челлена–Лемана для фермионной функции Грина можно было бы получить опять с помощью соображений, совершенно аналогичных использованным в предыдущем разделе, при дополнительном предположении, что степень роста $n=0$. Мы опять столкнулись здесь с тем интересным фактом, что при нашей системе условий (раздел 2) мы должны вместо формы лагранжиана задавать «степень роста» спектральной функции.

§ 6. Построение дисперсионных соотношений

Этот раздел посвящен выводу конкретных дисперсионных соотношений для определенного процесса — рассеяния пионов на нуклонах. Чтобы упростить доказательство, мы сперва получим их простым методом, который, по сути, полностью аналогичен методу, который использует большинство авторов. Несмотря на его простоту (или даже благодаря ей), этот метод имеет определенные дефекты, некоторые из них вынуждают выполнять математически некорректные операции. Эти места будут отмечены ниже, и в разделе 7 мы дадим строгий вывод дисперсионных соотношений, свободных от таких некорректных шагов. Подчеркнем, что при выводе дисперсионных соотношений мы нигде не будем ссылаться на обычную теорию, а будем исходить только из основных условий, сформулированных в разделе 2.

Таким образом, мы будем рассматривать проблему рассеяния пионов, описываемых вещественными полевыми операторами $\varphi_\rho(x)$ (ρ — изотопический индекс; мы рассматриваем зарядово-симметричную теорию), на нуклонах, описываемых спинорным полем $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_P(x) \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$. Предположим, что до рассеяния нуклон находится в определенном состоянии, характеризующемся импульсом p, спиновыми и изотопическими квантовыми числами, которые в целом обозначены S; значение тех же самых величин после столкновения обозначены штрихами: p', S'. Аналогично импульс и изотопический индекс пиона перед столкновением будут обозначаться как q и ρ, а после столкновения — как q' и ρ'.

Будет удобно выделить из общего числа квантовых чисел импульс мезона $q(q')$ и обозначить оставшиеся числа для начального (конечного) состояния одной буквой:

$$\alpha = (p, s, \rho), \quad w = (p', s', \rho'). \tag{6.1}$$

Предположим, что $q = q'$.

Тогда, если использовать обычную в теории рассеяния нормировку, матричный элемент перехода запишется в виде

$$S(\alpha, q; w, q') = (2\pi)^3 \langle \mathbf{p}', s', \mathbf{q}', \rho' | S | \mathbf{p}, s, \mathbf{q}, \rho \rangle =$$

$$= (2\pi)^3 \langle \mathbf{p}', s' | a^{(-)}_{\rho'}(\mathbf{q}) S a^{(+)}_{\rho}(\mathbf{q}) | \mathbf{p}, s \rangle, \tag{6.2}$$

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \ldots, q^0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}, \ldots,$$

где мы воспользовались (2.11). С помощью допущения 2.3 из раздела 2 мы можем, проводя преобразования типа (2.20)–(2.22), привести этот матричный элемент к форме

$$S(\alpha, q; w, q') = \int dx\, dy \frac{e^{i(q'x - qy)}}{\sqrt{2q'_0 q_0}} \left\langle p', s' \left| \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_{\rho'}(x) \delta \varphi_\rho(y)} S^+ \right| p, s \right\rangle, \tag{6.3}$$

$$p^0 = \sqrt{\overline{p}^2 + M^2}, \ldots, q^0 = \sqrt{\overline{q}^2 + m^2}, \ldots.$$

Вернемся к рассмотрению введенных в разделе 3 функций $F^{(c)}_{\alpha\omega}(x) - F^{(+)}_{\alpha\omega}(x)$. Однако теперь мы предполагаем, что состояния $|p, s\rangle$ и $|p', s'\rangle$, между

которыми берется матричный элемент, — это начальные и конечные состояния нуклона. Введем (совершенно так же, как и в разделе 4 (формула (4.5))) фурье-образы этих функций:

$$F^{(?)}_{\alpha\omega}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk e^{-ikx} T^{(?)}_{\alpha\omega}(k). \tag{6.4}$$

Подставляя теперь в (6.3) выражение (3.23) для матричного элемента причинного радиационного оператора и переходя в нем с помощью (6.4) к фурье-образу, получим

$$S(\alpha, q; \omega, q') = -\frac{i(2\pi)^2}{\sqrt{4q_0 q_0'}}\delta(q+p-q'-p')T^{c}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right), \tag{6.5}$$

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \ldots, q^0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}.$$

В дальнейшем нам будет удобно ввести вспомогательную функцию — «запаздывающий» матричный элемент

$$H(\alpha, q; \omega, q') = \int dx\, dy \frac{e^{i(q'x-qy)}}{\sqrt{4q^0 q^{0'}}}\langle p', s'|i\frac{\delta j_\rho(y)}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}|p, s\rangle =$$

$$= \frac{-i(2\pi)^4}{\sqrt{4q^0 q^{0'}}}\delta(q+p-q'-p')T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right). \tag{6.6}$$

Заметим теперь, что в силу (3.37)

$$T^{c}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) - T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \mathcal{P}_{\rho\rho'}T^{(-)}_{\alpha\omega}\left(-\frac{q+q'}{2}\right) =$$

$$= \int e^{-i\frac{q+q'}{2}x}\mathcal{P}_{\rho\rho'}F^{(-)}_{\alpha\omega}(x)\,dx. \tag{6.7}$$

Подставляя в (6.7) выражение (3.33) для $F^{(-)}_{\alpha\omega}(x)$ и выполняя интегрирование, мы получим для разности (6.7)

$$T^{c}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) - T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = 2\pi i\sum_n \delta\left(\sqrt{\mathbf{k}^2 + M_n^2} + \frac{q^0+q^{0'}}{2} - \frac{p^0+p^{0'}}{2}\right)\times$$

$$\times \langle \mathbf{p}', s'|j_\rho(0)|\mathbf{k}, n\rangle\langle \mathbf{k}, n|j_{\rho'}(0)|\mathbf{p}, s\rangle\Big|_{\mathbf{k}=\frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'-\mathbf{q}-\mathbf{q}'}{2}}. \tag{6.8}$$

Поэтому, если образовать разность $S - H$, в которой δ-функция $\delta(q+p-q'-p')$ выражает сохранение 4-импульса, то аргумент δ-функции в (6.8) окажется равным

$$\sqrt{M_n^2 + (\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} + q^0 - p^0,$$

или, если учесть выражение q^0 и p^0 через импульсы, равным

$$\sqrt{M_n^2 + (\mathbf{p}-\mathbf{q}')^2} + \sqrt{m^2 + \mathbf{q}^{2'}} - \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}. \tag{6.9}$$

Допустим, что система нуклон–пион не может иметь связанных состояний с массой, меньшей суммы масс нуклона и пиона: $M_n \geqslant M + m$. Тогда послед-

нее выражение существенно положительно и, следовательно, аргумент (6.9) δ-функции в (6.8) не может нигде быть нулем.

Итак, мы доказали, что если матричные элементы S и H взяты для реальных частиц с фиксированной величиной импульса, положительным знаком энергии и выполнен закон сохранения 4-импульса, то

$$T^{c}_{\alpha\omega}(k) = T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(k), \tag{6.10}$$

т.е. матричный элемент $S(\alpha, q; \omega, q')$ можно заменить матричным элементом $H(\alpha, q; \omega, q')$.

Рассмотрим более подробно функцию $T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(k)$. Сперва разделим ее на эрмитову и антиэрмитову части:

$$T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(k) = D_{\alpha\omega}(k) + iA_{\alpha\omega}(K), \tag{6.11}$$

и, сравнивая с (3.48), увидим, что

$$D_{\alpha\omega}(k) = \overline{T}_{\alpha\omega}(k), \quad A_{\alpha\omega}(k) = \frac{1}{2i} T_{\alpha\omega}(k). \tag{6.12}$$

Поэтому если перейдем к фурье-образам в соотношениях симметрии (3.49)–(3.52) для функций $\overline{F}(x)$ и $F(x)$, то немедленно установим свойства симметрии эрмитовой и антиэрмитовой частей функции $T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(k)$:

$$(1 + P_{\rho\rho'}) D_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = (1 + P_{\rho\rho'}) D_{\alpha\omega}\left(-\frac{q+q'}{2}\right), \tag{6.13}$$

$$(1 - P_{\rho\rho'}) D_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = -(1 - P_{\rho\rho'}) D_{\alpha\omega}\left(-\frac{q+q'}{2}\right), \tag{6.14}$$

$$(1 + P_{\rho\rho'}) A_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = -(1 + P_{\rho\rho'}) A_{\alpha\omega}\left(-\frac{q+q'}{2}\right), \tag{6.15}$$

$$(1 - P_{\rho\rho'}) A_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = (1 - P_{\rho\rho'}) A_{\alpha\omega}\left(-\frac{q+q'}{2}\right). \tag{6.16}$$

Установим, как можно найти функции $D_{\alpha\omega}$ и $A_{\alpha\omega}$, используя функцию $F^{(-)}(x)$, для которой мы имеет точное выражение (3.33). Для антиэрмитовой части соотношение (3.38) дает нам

$$A_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \frac{1}{2i} T_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \frac{1}{2i} \int \mathrm{e}^{i\frac{q+q'}{2}x} (F^{(-)}_{\alpha\omega} - P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x))\, dx. \tag{6.17}$$

Сравнивая (3.36), (3.37) и (3.38), видим, что благодаря условию причинности в форме (3.14), (3.15) $\overline{F}(x) = \frac{1}{2} F(x)$, когда $x > 0$, и $\overline{F}(x) = -\frac{1}{2} F(x)$, когда $x < 0$. Эти соотношения можно объединить:

$$\overline{F}_{\alpha\omega}(x) = \frac{\epsilon(x)}{2} F(x), \tag{6.18}$$

откуда мы наконец получим

$$D_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \overline{T}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^{i\frac{q+q'}{2}x} \epsilon(x) (F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) - P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x))\, dx. \tag{6.19}$$

Стоит обратить внимание на то, что здесь мы встретились с первой некорректностью обычного описания. Действительно, из (3.36), (3.37) и (3.38) мы способны получить соотношения между функциями D и $F^{(-)}$ только для $x>0, x<0$, но не для $x=0$. Но функция $F^{(-)}$ чрезвычайно сингулярна в нуле. Поэтому ее умножение на разрывную функцию $\epsilon(x)$ недопустимо, пока полностью не разработано правило для интегрирования таких выражений вблизи нуля. Отсутствие таких правил может приводить к расходимости. Здесь мы снова имеем такую же ситуацию, как было показано в (3.16) и (3.17) в форме T-произведения. Вспомним, что при проведении анализа матричных элементов в разделе 4 мы обнаружили, что такие ситуации возникают каждый раз, когда мы хотим перейти от «негринообразных» функций к «гринообразным» функциям, и что в этом случае действительно появляется определенный произвол, который может быть выражен добавлением к фурье-образу произвольного полинома. Таким образом, вместо (6.19) должно быть написано более аккуратное выражение

$$D_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right)=\frac{1}{2}\int e^{i\frac{q+q'}{2}x}\epsilon(x)\{F^{(-)}_{\alpha\omega}(x)-P_{\rho\rho'}F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x)\}\,dx+\mathcal{P}^n_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) \tag{6.20}$$

с произвольным полиномом $\mathcal{P}^n_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right)$ степени n.

Отметим, что происхождение этого полинома существенно связано с поведением $T_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right)$ при больших $\frac{q^0+q^{0'}}{2}$. Действительно, если $T_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right)$ уменьшается достаточно быстро при $\frac{q^0+q^{0'}}{2}\to\infty$, фурье-образ функции (6.17), будет определять достаточно регулярную функцию $F_{\alpha\omega}(x)$ и умножение на $\epsilon(x^0)$ не будет приводить к какому-либо произволу. Если, однако, $T_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right)$ стремится к бесконечности, то функция $F_{\alpha\omega}(x)$ становится сингулярной в нуле и ее умножение на $\epsilon(x)$ лишено всякого смысла. Мы вынуждены придать смысл такому произведению посредством определенной регуляризационной процедуры; это и есть причина появления полинома $\mathcal{P}_{\alpha\omega}$. Ясно, что степень полинома определяется степенью роста $T_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right)$, когда $\frac{q^0+q^{0'}}{2}$ стремится к ∞.

Для дальнейшего построения нам будет удобнее детализировать систему координат. Обычная система центра масс в этом случае оказывается неудобной, так как она приводит к дополнительным сингулярностям в зависимости от энергии. По этой причине мы будем пользоваться сейчас более подходящей системой, в которой сумма импульсов нуклона до и после рассеяния равна нулю:

$$\mathbf{p}+\mathbf{p}'=0. \tag{6.21}$$

Эта система переходит в лабораторную систему при рассмотрении рассеяния вперед. (Ниже мы будем иметь дело не с функциями от произвольных комбинаций импульсов нуклона и пиона, а только с функциями от импульса,

который удовлетворяет законам сохранения, в соответствии с δ-функцией в определениях $S(\alpha, q; \omega, q')$ и $H(\alpha, q; \omega, q')$.)

В выбранной системе $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}'^2$ и в силу закона сохранения энергии также $\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}'^2$. Из сохранения импульса мы получаем, что

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}' - \mathbf{q}}{2}, \qquad (\mathbf{q} + \mathbf{q}')\mathbf{p} = 0. \tag{6.22}$$

Поэтому можно положить

$$\frac{\mathbf{q}' + \mathbf{q}}{2} = \lambda \mathbf{e}, \tag{6.23}$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, нормальный к $\mathbf{p}$; $\mathbf{e}^2 = 1$; $\mathbf{e} \cdot \mathbf{p} = 0$. При заданном $\mathbf{p}$ вектор $\mathbf{e}$ может рассматриваться как фиксированный, а λ — некий скаляр. Тогда

$$\begin{gathered} \mathbf{q} = -\mathbf{p} + \lambda \mathbf{e}, \quad \mathbf{q}' = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{e}, \\ q^0 = q'^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 + \lambda^2}, \quad \mathbf{q}'^2 = \mathbf{q}^2 = \mathbf{p}^2 + \lambda^2. \end{gathered} \tag{6.24}$$

Вместо λ также можно использовать величину

$$E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 + \lambda^2}, \tag{6.25}$$

которая есть просто энергия пиона.

В выбранной системе отсчета выражения (6.17) и (6.19) для $A_{\alpha\omega}$ и $D_{\alpha\omega}$ имеют вид

$$D_{\alpha\omega}(E, \mathbf{e}) = \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^{i(Ex^0 - \lambda \mathbf{e}\mathbf{x})} \epsilon(x^0) g(x)\, dx \tag{6.26}$$

и

$$A_{\alpha\omega}(E, \mathbf{e}) = \frac{1}{2i} \int \mathrm{e}^{i(Ex^0 - \lambda \mathbf{e}\mathbf{x})} g(x)\, dx. \tag{6.27}$$

где мы положили

$$g(x) = F^{(-)}_{\alpha\omega}(x) - P_{\rho\rho'} F^{(-)}_{\alpha\omega}(-x). \tag{6.28}$$

Собственно говоря, функция $g(x)$ — функция не только от x, но и от импульсов нуклона $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. Однако так как в нашей системе координат $\mathbf{p}'$ зависит только от $\mathbf{p}$, мы можем рассматривать (при фиксированном $\mathbf{p}$) $g(x)$ как функцию только x. Выражения, стоящие в показателях экспонент в (6.26) и (6.27) и рассматриваемые как функции от E, в силу (6.25) будут иметь точки ветвления. Чтобы их избежать, введем операторы симметризации и антисимметризации относительно $\mathbf{e}$, деленные на λ, и положим для произвольной $f(\lambda, \mathbf{e})$

$$S_{\mathbf{e}} f(\lambda, \mathbf{e}) = f(\lambda, \mathbf{e}) + f(\lambda, -\mathbf{e}) \tag{6.29}$$

и

$$A_{\mathbf{e}} f(\lambda, \mathbf{e}) = \frac{1}{\lambda}(f(\lambda, \mathbf{e}) - f(\lambda, -\mathbf{e})). \tag{6.30}$$

Комбинируя выражения (6.26) и (6.27), получаем интегральное представление для T^{ret}:

$$T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(E, \mathbf{e}) = \int \mathrm{e}^{i(Ex^0 - \lambda \mathbf{e}\mathbf{x})} \Theta(x^0) g(x)\, dx. \tag{6.31}$$

Применяя к этому выражению операторы $S_{\mathbf{e}}$ и $A_{\mathbf{e}}$, получим два новых интегральных представления

$$S_{\mathbf{e}}T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e}) = 2\int \mathrm{e}^{iEx^0}\cos(\lambda\mathbf{ex})\Theta(x^0)g(x)dx \tag{6.32}$$

и

$$A_{\mathbf{e}}T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e}) = \frac{2}{i}\int \mathrm{e}^{iEx^0}\frac{\sin(\lambda\mathbf{ex})}{\lambda}\Theta(x^0)g(x)\,dx. \tag{6.33}$$

Эти интегральные представления будут служить базисом для вывода дисперсионных соотношений. Для этой цели рассмотрим два тождества

$$\mathrm{e}^{i\nu t}\cos\sqrt{\nu^2-\mu^2} = \frac{1}{i\pi}P\int\limits_{\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\omega t}\cos\sqrt{\omega^2-\mu^2}}{\omega-\nu}d\omega \tag{6.34}$$

и

$$\mathrm{e}^{i\nu t}\frac{\sin\sqrt{\nu^2-\mu^2}}{\omega^2-\mu^2} = \frac{1}{i\pi}P\int\limits_{\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\omega t}\sin\sqrt{\omega^2-\mu^2}}{(\omega-\nu)(\sqrt{\omega^2-\mu^2})}d\omega, \tag{6.35}$$

которые верны при условии

$$t > |\xi| > 0, \tag{6.36}$$

что легко проверить, вычислив интеграл справа по теории вычетов. В оценке (6.36) всегда возможно выбрать радиус полуокружности таким большим, что отрицательные слагаемые в экспоненте (которые происходят из $\mathrm{e}^{i\omega t}$) будут больше, чем возможные слагаемые, которые происходят из синуса или косинуса.

Подставим в правую часть (6.31) вместо $\mathrm{e}^{iEx^0}\cos(\lambda\mathbf{ex})$ его интегральное представление (6.34):

$$S_{\mathbf{e}}T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e}) = \frac{2}{i\pi}\int dx\Theta(x^0)g(x)P\int\limits_{-\infty}^{\infty}dE'\frac{\mathrm{e}^{iE'x^0\cos\sqrt{E'^2-\mu^2}}\cdot(\mathbf{ex})}{E'-E}. \tag{6.37}$$

Чем обоснована такая подстановка? Интегральное представление (6.34) законно, когда условие (6.36) выполняется, т. е. (так как модуль $|\mathbf{e}|$ равен единице) когда $x^0 > |\mathbf{x}| > 0$. Точки с отрицательным x^0 в интеграле (6.31) не встречаются благодаря функции $\Theta(x^0)$ под интегралом. Также нет точек $|\mathbf{x}| > x^0 > 0$, так как благодаря условию причинности (3.14), (3.15) функция $g(x)$ обращается в нуль вне светового конуса. Таким образом, «опасными» точками (в смысле обоснования интегрального представления (6.34)) в интеграле (6.37) по x остаются точки светового конуса, для которых $x^0 = |\mathbf{x}| > 0$.

При интегрировании по E в (6.37) такие точки представляют трудность, так как при $x^0 = |\mathbf{x}|$ этот интеграл по вещественной оси будет расходиться и, следовательно, возникают сомнения в правомерности использования интегрального представления (6.34). Однако мы можем представить, что для подынтегрального выражения в (6.37) была проведена вычитательная процедура типа той, которая объяснялась в разделе 1 (ниже мы действительно применим эту вычитательную процедуру). Даже повышения степени E' в знаменателе на единицу будет достаточно, чтобы сделать интеграл по E' сходящимся. Тогда по непрерывности его величина при $x^0 = |\mathbf{x}|$ будет совпа-

дать с пределом при $|\mathbf{x}| \to x^0$ того же самого интеграла, вычисленного при предположении, что при $|\mathbf{x}| < x^0$ контур замыкается в верхней полуплоскости. Присоединением (через использование вычитательной процедуры) больших степеней E' в знаменателе любая производная этого интеграла может быть сделана непрерывной. Итак, представление в (6.31) выражения $e^{iEx^0}\cos(\lambda \mathbf{ex})$ через его интегральное представление (6.34) законно (во всяком случае, если мы имеем в виду дальнейшее применение вычитательной процедуры).

Сменим в (6.37) порядок интегрирования по x и E':

$$S_{\mathbf{e}}T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e}) = \frac{1}{i\pi}P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dE'}{E'-E}\,2\int dx\Theta(x^0)g(x)e^{iE'x^0}\cos\sqrt{E'^2-\mu^2}\,\mathbf{ex}. \tag{6.38}$$

Такая замена порядка интегрирования, строго говоря, незаконна. Действительно, до этой процедуры в (6.37) и внутренний интеграл по E', и внешний интеграл по x были сходящимися, теперь интеграл по E' лежит в нефизической области $E'^2 < \mu^2$, а внутренний интеграл по x становится расходящимся. Для таких значений E' выражение в квадратном корне в аргументе косинуса становится мнимым, так что тригонометрические функции становятся гиперболическими и экспоненциально возрастают до бесконечности. Это основной дефект такого метода для вывода дисперсионных соотношений. В следующем разделе будет детально разработан метод вывода дисперсионных соотношений, который будет устранять эту «трудность в изменении порядка интегрирования».

Равенство (6.38) уже содержит желаемое дисперсионное соотношение. Отмечая, что с помощью (6.31) внутренний интеграл в нем равен $S_{\mathbf{e}}T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(E',\mathbf{e})$, мы снова получаем

$$S_{\mathbf{e}}T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e}) = \frac{1}{i\pi}P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{\mathbf{e}}T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(E',\mathbf{e})}{E'-E}\,dE' + P^n_{\alpha\omega}(E), \tag{6.39}$$

где $P^n_{\alpha\omega}(E)$ — те самые полиномы, которые появляются при замещении (6.20) на (6.19). Мы не будем точно выписывать форму этих полиномов в трех нижеследующих равенствах, а вернемся к ним в контексте вычитательной процедуры. Выделяя вещественную часть из (6.39), мы получим дисперсионное соотношение

$$S_{\mathbf{e}}D_{\alpha\omega}(E) = \frac{1}{\pi}P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{\mathbf{e}}A_{\alpha\omega}(E')}{E'-E}\,dE'. \tag{6.40}$$

Используя те же самые аргументы, мы получим из (6.33) с помощью интегрального представления (6.35) второе дисперсионное соотношение для смешанной комбинации функций, антисимметричной по $\mathbf{e}$:

$$A_{\mathbf{e}}D_{\alpha\omega}(E) = \frac{1}{\pi}P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{a_{\mathbf{e}}A_{\alpha\omega}(E')}{E'-E}\,dE'. \tag{6.41}$$

В силу замечания, сделанного после (6.37), интегралы (6.39)–(6.41) могут расходиться. Поэтому, если они вычислены посредством какого-либо предельного

процесса, с правой стороны будут появляться определенные дополнительные полиномы по E. Ниже, применяя вычитательную процедуру явно, мы придем к дисперсионным соотношениям, которые не будут требовать таких допущений.

В то же время, однако, заметим, что соотношения (6.40), (6.41) обладают тем недостатком, что интеграл в них распространяется на отрицательные энергии. Чтобы избавиться от этого недостатка, используем симметрию (6.13)–(6.16) с учетом замены аргумента E на $-E$. Тогда получим

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e}) &= \frac{2}{\pi}P\int_0^\infty \frac{S_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})E'A_{\alpha\omega}(E',\omega)}{E'^2-E^2}\,dE',\\
S_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e}) &= \frac{2}{\pi}P\int_0^\infty \frac{S_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})EA_{\alpha\omega}(E',\omega)}{E'^2-E^2}\,dE',\\
A_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e}) &= \frac{2}{\pi}P\int_0^\infty \frac{A_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})EA_{\alpha\omega}(E',\omega)}{E'^2-E^2}\,dE',\\
A_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e}) &= \frac{2}{\pi}P\int_0^\infty \frac{A_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})E'A_{\alpha\omega}(E',\omega)}{E'^2-E^2}\,dE'.
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

Теперь вернемся к вопросу улучшения сходимости интеграла. Предположим, что степень n полинома (6.39) равна единице. Это некоторое дополнительное предположение; в разделах 4 и 5 мы уже встречали такую ситуацию, когда мы были вынуждены постулировать (так как мы не ссылаемся на какой-либо конкретный лагранжиан) порядок роста матричных элементов на бесконечности. Мы можем устранить полином, используя вычитательную процедуру, развитую в разделе 1, которая в нашем случае приведет к следующим равенствам[1]:

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E)-S_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E_0)=\\
&\quad=\frac{2}{\pi}(E^2-E_0^2)P\int_0^\infty \frac{E'}{(E'^2-E^2)(E'^2-E_0^2)}\,S_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})A_{\alpha\omega}(E')\,dE',
\end{aligned}
\tag{6.43a}
$$

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E)-\frac{E}{E_0}S_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E_0)=\\
&\quad=2E(E^2-E_0^2)\frac{1}{\pi}P\int_0^\infty \frac{1}{(E'^2-E^2)(E'^2-E_0^2)}\,S_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})A_{\alpha\omega}(E')\,dE',
\end{aligned}
$$

[1] Если мы предположим, что интегралы в (6.43) сходятся, то предположение $n=1$ обязательно: высшие степени полинома не будут устранены вычитательной процедурой и будут приводить к степени возрастания $D_{\alpha\omega}(E)$ большей, чем линейная, что будет противоречить эксперименту.

$$A_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E)-\frac{E}{E_0}A_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E_0)=$$

$$=\frac{2}{\pi}E(E^2-E_0^2)P\int_0^\infty\frac{1}{(E'^2-E^2)(E'^2-E_0^2)}A_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})A_{\alpha\omega}(E')\,dE', \tag{6.43б}$$

$$A_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E)-A_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})D_{\alpha\omega}(E_0)=$$

$$=\frac{2}{\pi}(E^2-E_0^2)P\int_0^\infty\frac{1}{(E'^2-E^2)(E'^2-E_0^2)}A_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})A_{\alpha\omega}(E')E'\,dE',$$

где E_0 — произвольная энергия из физической области, такая, что $E_0\geqslant$ $\geqslant\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$.

Интегралы в (6.43) больше не содержат интегрирования по отрицательным энергиям, но они не исключают интегрирования по нефизической области $0<E<\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$, где

$$\lambda^2=E^2-m^2-\mathbf{p}^2<0, \tag{6.44}$$

следовательно, импульсы комплексные. Нашей задачей будет исключить эту часть из интеграла.

Вернемся к выражению (6.17) для $A_{\alpha\omega}\left(\frac{q'+q}{2}\right)$. Заменяя в нем суммы для $F^{(-)}(x)$ через (3.33) и выполняя интегрирование, получаем

$$A_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e})=$$

$$=\pi\sum_n\left(E-\sqrt{M_n^2+\lambda^2}+\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}\right)\langle p',s'|j_{\rho'}(0)|\lambda\mathbf{e}n\rangle\langle\lambda\mathbf{e},n|j_\rho(0)|p,s\rangle-$$

$$-\pi\sum_n\delta\left(E-\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}+\sqrt{M_n^2+\lambda^2}\right)\langle p',s'|j_\rho(0)|-\lambda\mathbf{e},n\rangle\times$$

$$\times\langle-\lambda\mathbf{e},n|j_{\rho'}(0)|p,s\rangle. \tag{6.45}$$

Для дальнейшего рассуждения удобно выделить член с $n=1$, для которого квантовое число n — просто спин-изотопический индекс s'' и $M_n=M$. Сумму по всем остальным состояниям обозначим через $B_{\alpha\omega}(E)$. Тогда

$$A_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e})=$$

$$=\pi\sum_{s''}\langle p',s'|j_{\rho'}(0)|\lambda\mathbf{e},s''\rangle\langle\lambda\mathbf{e},s''|j_\rho(0)|p,s\rangle\delta\left(E-\sqrt{M_n^2+\lambda^2}+\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}\right)-$$

$$-\pi\sum_{s''}\langle p',s'|j_\rho(0)|-\lambda\mathbf{e},s''\rangle\langle-\lambda\mathbf{e},s''|j_{\rho'}(0)|p,s\rangle\times$$

$$\times\delta\left(E+\sqrt{M_n^2+\lambda^2}-\sqrt{M^2+\mathbf{e}^2}\right)+B_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e}). \tag{6.46}$$

Вспомним, что в согласии с нашим предположением (6.9) система нуклон+пион не имеет связанных состояний с массой меньшей, чем $M+m$.

Кроме того, мы предположим, что мы находимся в области не слишком большого импульса рассеивателя, так что

$$\mathbf{p}^2 < \frac{Mm - m^2/2}{2}. \tag{6.47}$$

Легко видеть, что в нефизической области аргумент первой δ-функции в силу (6.44) существенно положителен и, таким образом, первая сумма в (6.46) исчезает. Во второй сумме условие, что аргумент δ-функции равен нулю, приводит к соотношению

$$E = \frac{m^2 + 2\mathbf{p}^2}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} = E_p. \tag{6.48}$$

Рассмотрим суммы, входящие в $B_{\alpha\omega}(E, \mathbf{e})$. В этом случае δ-функция и в первой и во второй сумме для каждого n будут приводить к равенству

$$E = E_{1,2} = \pm\frac{M_n^2 - M^2 - m^2 - 2\mathbf{p}^2}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}.$$

Но, согласно (6.9), числитель здесь больше или равен

$$(M + m)^2 - m^2 - M^2 - 2\mathbf{p}^2 = 2(Mm - \mathbf{p}^2).$$

Таким образом, в первой сумме для каждого n

$$E = E_1 = \frac{M_n^2 - M^2 - m^2 - 2\mathbf{p}^2}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} \geqslant \frac{Mm - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} > E_p,$$

где последнее верно в силу предположения (6.47). Однако во второй сумме для каждого n

$$E = E_2 = -\frac{M_n^2 - M^2 - m^2 - 2\mathbf{p}^2}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} \leqslant -\frac{Mm - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} < -E_p < 0.$$

Поэтому корень δ-функции будет вне интервала интегрирования, так что сумма будет равно нулю.

Таким образом, исследование области нефизических энергий показывает, что она разделяется на две подобласти:

$$\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} > E > \frac{Mm - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} \quad \text{и} \quad 0 < E < \frac{Mm - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} \tag{6.49}$$

во второй сумме, в которой

$$A_{\alpha\omega}(E, \mathbf{e}) = B_{\alpha\omega}(E, \mathbf{e}).$$

В то же время в первой сумме

$$A_{\alpha\omega}(E, \mathbf{e}) = -\pi \sum_{s''} \langle p', s' | j_\rho(0) | -\lambda\mathbf{e}, s'' \rangle \langle -\lambda\mathbf{e}, s'' | j_{\rho'}(0) | p, s \rangle \times$$

$$\times\, \delta\left(E + \sqrt{M^2 + E^2 - m^2 - \mathbf{p}^2} - \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}\right).$$

Преобразуя δ-функцию в $\delta(E-E_p)$, найдем, что в первой нефизической области

$$A_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e})=-\pi\frac{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}-E_p}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}\delta(E-E_p)\times$$
$$\times\sum_{s''}\langle p',s'|j_\rho(0)|-\lambda\mathbf{e},s''\rangle\langle-\lambda\mathbf{e},s''|j_{\rho'}(0)|p,s\rangle. \quad (6.50)$$

Для дальнейшего упрощения этого выражения рассмотрим матричный элемент тока между двумя однонуклонными состояниями

$$\langle p'',s''|j_\rho(0)|p,s\rangle.$$

В силу трансляционной инвариантности (см. (3.31) и ниже) и определения тока (3.4) можем написать

$$\mathrm{e}^{-i(p-p'')x}\langle p'',s''|j_\rho(0)|p,s\rangle=i\left\langle p'',s''\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}\right|p,s\right\rangle.$$

Заменяя вариацию по $\varphi_\rho(x)$ на вариацию по $\varphi_\rho(q)$ (этот фурье-образ для произвольного q связан с $\varphi_\rho(x)$ обычным соотношением

$$\varphi_\rho(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{e}^{-iqx}\varphi_\rho(q)dq),$$

приходим к уравнению

$$i\left\langle p'',s''\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(q)}\right|p,s\right\rangle=\langle p'',s''|j_\rho(0)|p,s\rangle\delta(q+p-p''). \quad (6.51)$$

Здесь мы будем вынуждены отказать себе (временно до следующего раздела) в спокойствии по поводу еще одного дефекта вариационной производной. Суть дела в том, что δ-функция в (6.51) возникает, как обычно, из интеграла $(2\pi)^4\int\exp\{-i(q+p-p'')\}\,dx$, который, естественно, имеет δ-подобные свойства только для вещественных компонент q,p,p'' и не имеет смысла для комплексных компонент. Однако в рассматриваемой нефизической области мы вынуждены использовать эту δ-функцию (см. (6.55)) для мнимых пространственных компонент векторов q и p''. Матричный элемент слева может быть преобразован с помощью формулы (2.3). Последующие замены коммутаторов операторов $b^{(+)}_{+S}(\mathbf{p})$ и $b^{(-)}_{+S''}(\mathbf{p}'')$ с оператором $\dfrac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(q)}$ на вариационные производные (с учетом антикоммутативности вариационных производных относительно спинорных полей и наличия левых и правых вариационных производных) дают нам

$$\left\langle\mathbf{p}'',s''\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(q)}\right|\mathbf{p},s\right\rangle=$$
$$=\sum_{\lambda,\lambda'}\int dx'\,dx[b^{(-)}_{+S''}(\mathbf{p}''),\overline{\psi}_{\lambda'}(x')]_+[\psi_\lambda(x),b^{(+)}_{+S}(\mathbf{p})]_+\left\langle0\left|\frac{\delta^3S}{\delta\psi_\lambda(x)\delta\varphi_\rho(q)\overline{\psi}_\lambda(x')}\right|0\right\rangle,$$

откуда, используя (2.30) и определения (2.28), (2.29) фурье-образов $\psi(x)$ и $\overline{\psi}(x)$, получаем

$$i\left\langle \mathbf{p}'', s''\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(q)}\right|\mathbf{p}, s\right\rangle =$$

$$= -2\pi i(2\pi)^4 \sum_{\lambda,\lambda'} \overline{U}^{+s''}_{\lambda'}(\mathbf{p}'')\left\langle 0\left|\frac{\delta^3 S}{\delta\overline{\psi}_{\lambda'}(p'')\delta\varphi_\rho(q)\delta\psi_\lambda(p)}\right|0\right\rangle U^{+s}_{\lambda}(\mathbf{p}), \quad (6.52)$$

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \quad p_0'' = \sqrt{\mathbf{p}''^2 + M^2}.$$

Рассмотрим матричные элементы третьей вариационной производной, которая сюда входит. Нетрудно видеть, что наиболее общее выражение для нее, удовлетворяющее требованиям трансляционной, лоренц- (включая отражения) и изотопической инвариантности, таково:

$$\left\langle 0\left|\frac{\delta^3 S}{\delta\overline{\psi}_{\lambda'}(p'')\delta\varphi_\rho(q)\delta\psi_\lambda(p)}\right|0\right\rangle =$$

$$= \sum_{w_1,w_2=0,1} [(p''\gamma)^{w_1}\gamma_5(p\gamma)^{w_2}]_{\lambda'\lambda}\tau^\rho_{t_1t_2} h_{w_1w_2}(p^2, p''^2, q^2)\delta(p+q-p''), \quad (6.53)$$

где $h_{w_1w_2}(p^2, p''^2, q^2)$ — произвольные скалярные функции, зависящие только от трех четырехмерных квадратов p^2, p''^2 и q^2.

Стоит отметить, что матричный элемент слева инвариантен по отношению к определению диракова сопряжения и перестановкам p и p''. После выполнения тех же преобразований над матричными элементами сперва мы приходит к равенству

$$\sum_{w_1,w_2=0,1} (p\gamma)^{w_1}\gamma_5(p''\gamma)^{w_2}\tau^\rho h_{w_1w_2}(p^2, p''^2, q^2) =$$

$$= \sum_{w_1,w_2=0,1} (p\gamma)^{w_2}\gamma_5(p''\gamma)^{w_1}\tau^\rho h^*_{w_1w_2}(p^2, p''^2, q^2).$$

Из него следуют правила для комплексного сопряжения скалярной функции $h_{w_1w_2}$:

$$h_{w_1w_2}(p^2, p''^2, q^2) = h^*_{w_1w_2}(p''^2, p^2, q^2). \quad (6.54)$$

В нашем специальном случае компоненты импульса p и p'' не произвольны, а фиксированы (так как они отражают состояния реальных частиц) соотношениями

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \quad p^0 = \sqrt{\mathbf{p}''^2 + M^2} = \sqrt{\lambda_p^2 + M^2}. \quad (6.55)$$

Компоненты вектора q определены δ-функцией в (6.53). Используя это определение, а также то, что $\mathbf{p}'' = -\lambda_p\mathbf{e}$, и привлекая (6.44), (6.47), найдем, что

$$q^{02} - \mathbf{q}^2 = q^2 = m^2. \quad (6.56)$$

В конечном счете спинорные амплитуды $\overline{U}^{+S''}(p'')$ и $U^{+S}(p)$ удовлетворяют (в силу (2.33), (2.34)) уравнению Дирака:

$$\overline{U}^{+S''}(\mathbf{p}'')(\gamma p'') = \overline{U}^{+S''}(\mathbf{p}'')M; \qquad (\gamma p)U^{+S}(p) = MU^{+S}(p). \quad (6.57)$$

Таким образом, если матричный элемент (6.53) стоит между двумя спинорными амплитудами $\overline{U}^{+S''}(p'')$ и $\overline{U}^{+S}(p)$ и условия (6.55) и (6.57) выполнены, то его можно представить в виде

$$\gamma_5\tau_\rho\delta(p+q-p'')\sum_{w_1,w_2=0,1}M^{w_1}M^{w_2}h_{w_1w_2}(M^2,M^2,q^2).$$

Введем обозначение

$$g(q^2)=-(2\pi)^5\sum_{w_1,w_2=0,1}M^{w_1}M^{w_2}h_{w_1w_2}(M^2,M^2,q^2). \tag{6.58}$$

Нетрудно видеть, используя правило комплексного сопряжения (6.54), что функция $g(q^2)$, введенная таким образом, вещественна. Очевидно, что ее значение $g(m^2)$ при $q^2=m^2$ будет совпадать в обычной теории с тем, что принято называть экспериментальным мезонным зарядом нуклона.

Возвращаясь к (6.52) и собирая полученные результаты, имеем

$$i\left\langle \mathbf{p}'',s'\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(q)}\right|\mathbf{p},s\right\rangle = ig\overline{U}^{+s''}(\mathbf{p}'')\gamma_5\tau^\rho U^{+s}(\mathbf{p})\delta(q+p-p'').$$

Если теперь вспомнить формулу (6.51), то

$$\langle \mathbf{p}'',s''|j_\rho(0)|\mathbf{p},s\rangle = ig\overline{U}^{+s''}(\mathbf{p}'')\gamma_5\tau^\rho U^{+s}(\mathbf{p}) \tag{6.59}$$

при $p+q-p'=0$, $p^2=p''^2=M^2$, $q^2=m^2$.

Разделим спин-изотопический индекс s на два индекса: спиновый индекс s и изотопический индекс t — и вернемся к нерелятивистскому случаю, оставляя только слагаемые до $\left(\frac{P^2}{M^2}\right)$ включительно и пренебрегая слагаемыми порядка $\left(\frac{m^2}{M^2}\right)$. Тогда обычное суммирование по спиновым индексам дает соотношение

$$\overline{U}^{s''+}(\mathbf{p}'')\gamma^5\tau^\rho U^{+s}(\mathbf{p})=-i\frac{\tau^\rho_{t''t}}{2M}\{\sigma(\mathbf{p}-\mathbf{p}'')\}_{s''s}, \tag{6.60}$$

в силу которого

$$\langle \mathbf{p}'',s''|j_\rho(0)|\mathbf{p},s\rangle = g\frac{\tau^\rho_{t''t}}{2M}\{\sigma(\mathbf{p}-\mathbf{p}'')\}_{s''s}. \tag{6.61}$$

Подставляя это выражение в матричный элемент, входящий в (6.50), переходя везде к нерелятивистскому пределу и выполняя очевидные суммирования с учетом изотопического и спинового индексов, для $A_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e})$ в первой нефизической области окончательно получим выражение

$$A_{\alpha\omega}(E,\mathbf{e})=\frac{\pi g^2}{4M^2}\delta(E-E_p)\{(\lambda^2-\mathbf{p}^2)\delta_{s',s}+2i\lambda(\mathbf{ep}\overline{\sigma}_{s',s})\}\times$$
$$\times\left\{\delta_{\rho\rho'}\delta_{t',t}-ie_{\rho'\rho\rho''}\tau^{\rho''}_{t',t}\right\}. \tag{6.62}$$

Применяя к этому выражению операции симметризации и антисимметризации (6.29) и (6.30) по $\mathbf{e}$ и операции симметризации и антисимметризации по заряду $[(1+P_{\rho\rho'})$ и $(1-P_{\rho\rho'})]$, получаем

$$S_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})A_{\alpha\omega}(\mathbf{e},E)=4\pi\left(\frac{g}{2M}\right)^2\delta(E-E_P)\delta_{SS'}(\lambda^2-\mathbf{p}^2)\delta_{\rho\rho'}\delta_{t't} \tag{6.63}$$

и

$$S_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})A_{\alpha\omega}(\mathbf{e},E)=-4\pi\left(\frac{g}{2M}\right)^2\delta(E-E_P)\delta_{SS'}(\lambda^2-\mathbf{p}^2)e_{\rho'\rho\rho''}\tau^{\rho''}_{t't}, \tag{6.64}$$

$$A_{\mathbf{e}}(1+P_{\rho\rho'})A_{\alpha\omega}(\mathbf{e},E)=8\pi\left(\frac{g}{2M}\right)^2\delta(E-E_P)\delta_{SS'}(\mathbf{ep}\overline{\sigma}_{s's})\delta_{\rho'\rho}\delta_{t't} \tag{6.65}$$

и

$$A_{\mathbf{e}}(1-P_{\rho\rho'})A_{\alpha\omega}(\mathbf{e},E)=8\pi\left(\frac{g}{2M}\right)^2\delta(E-E_P)(\mathbf{ep}\sigma_{s's})e_{\rho'\rho\rho''}\tau^{\rho''}_{t't}. \tag{6.66}$$

Подставляя эти выражения в дисперсионные соотношения (6.43) и выполняя отнюдь не сложное интегрирование, получаем дисперсионные соотношения, в которых нет больше необходимости интегрировать по первой нефизической области (6.49), ибо ее вклад выражен в определенном слагаемом, стоящем вне интеграла. Что касается второй нефизической области, то мы не преуспеем в вычислении ее вклада в интеграл и поэтому ее придется пока просто проигнорировать. Стоит отметить, что для рассеяния вперед, когда $\mathbf{p}=0$, эта область отсутствует, так как она сжимается в точку. Ее также не будет в приближении бесконечно тяжелых нуклонов.

Здесь мы не выписываем явной формы дисперсионных соотношений с членом, который учитывает вклад всей нефизической области. Мы хотим сперва перейти от рассмотрения амплитуды рассеяния, которая имеет определенные симметрии, к амплитудам, которые соответствуют рассеянию частиц в конкретных спиновых и зарядовых состояниях. Тогда мы выпишем в окончательной форме дисперсионные соотношения для амплитуд, которые имеют прямое отношение к эксперименту. Однако перед переходом к этой чисто технической задаче мы хотим посвятить следующий раздел описанию дисперсионных соотношений, которые свободны от дефектов, отмеченных выше.

§ 7. Строгий вывод дисперсионных соотношений

Перейдем теперь к строгому выводу дисперсионных соотношений. В предыдущем разделе мы имели дело с преобразованиями Фурье

$$T^{(?)}_{\alpha\omega}(E,e)=\int \mathrm{e}^{i(Ex^0-\lambda\mathbf{ex})}F^{(?)}_{\alpha\omega}(x)\,dx,$$

взятыми при

$$\lambda^2=E^2-(m^2+\mathbf{p}^2).$$

Теперь будет удобнее рассматривать эти выражения как функции двух переменных E и τ, где

$$\lambda^2=E^2-\tau. \tag{7.1}$$

Положим

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{ret}}(E,\tau)&=\int \mathrm{e}^{i(Ex^0-\sqrt{E^2-\tau}\,\mathbf{ex})}F^{\mathrm{ret}}(x)\,dx,\\ T^{\mathrm{adv}}(E,\tau)&=\int \mathrm{e}^{i(Ex^0-\sqrt{E^2-\tau}\,\mathbf{ex})}F^{\mathrm{adv}}(x)\,dx \end{aligned} \tag{7.2}$$

и

$$T(E,\tau)=T^{\mathrm{ret}}(E,\tau)-T^{\mathrm{adv}}(E,\tau)=\int \mathrm{e}^{i(Ex^0-\sqrt{E^2-\tau}\,\mathbf{ex})}F(x)\,dx. \tag{7.3}$$

Вектор $\mathbf{e}$ (перпендикулярный $\mathbf{p}$) здесь среди аргументов явно не выписан; подобным образом не выписаны индексы α и ω, поскольку в данном случае это не приведет к непониманию.

Чтобы не иметь дело с двумя знаками у квадратных корней, мы будем всегда (в данном разделе) рассматривать не сами функции T, а их симметризованные и антисимметризованные выражения

$$ST; \qquad S=\mathcal{S}_{\mathbf{e}},\mathcal{A}_{\mathbf{e}}.$$

Можно заметить, что

$$ST^{\mathrm{ret}}(E,\tau)$$

является аналитической функцией переменных E,λ, регулярной в области

$$\operatorname{Im} E>|\operatorname{Im}\lambda|,$$

и соответственно аналитической функцией переменных E,τ, регулярной в области

$$\operatorname{Im} E>|\operatorname{Im}\sqrt{E^2-\tau}\,|. \tag{7.4}$$

Совершенно аналогично функция

$$ST^{\mathrm{adv}}(E,\tau)$$

является аналитической функцией переменных E,τ, регулярной в области

$$\operatorname{Im} E<-|\operatorname{Im}\sqrt{E^2-\tau}\,|. \tag{7.5}$$

Сначала рассмотрим случай, когда значение τ фиксировано и равно вещественному отрицательному числу:

$$\tau<-\mathbf{p}^2. \tag{7.6}$$

В таком случае

$$|\operatorname{Im}\sqrt{E^2-\tau}\,|<|\operatorname{Im}E|, \quad \text{если} \quad \operatorname{Im}E\neq 0,$$

и поэтому

$$ST^{\mathrm{ret}}(E,\tau) \tag{7.7}$$

является аналитической функцией переменных E в области $\operatorname{Im} E>0$, равно как и

$$ST^{\mathrm{adv}}(E,\tau) \tag{7.8}$$

— в области $\operatorname{Im} E<0$.

Возьмем их разность $ST(E,\tau)$ для вещественных E и повторим аргументацию предыдущего раздела, которая, однако, более не будет содержать неподтвержденных элементов, поскольку в рассматриваемом случае не только E, но и $\lambda=\sqrt{E^2-\tau}$ всегда вещественны.

Находим

$$ST(E,\tau)=-2\pi\frac{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}-E_p(\tau)}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}\delta(E-E_p(\tau))\times$$
$$\times\sum_{S''}S\langle p's'|j_\rho(0)|-\lambda\mathbf{e}S''\rangle\langle-\lambda\mathbf{e}S''|j_{\rho'}(0)|p,s\rangle+$$
$$+2\pi i\frac{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}-E_p(\tau)}{M^2+\mathbf{p}^2}\delta(E+E_p(\tau))\times$$
$$\times\sum_{S''}S\langle p's'|j_\rho(0)|\lambda\mathbf{e}S''\rangle\langle\lambda\mathbf{e}S''|j_{\rho'}(0)|p,s\rangle, \quad (7.9)$$

$$E_p(\tau)=\frac{\sqrt{\tau+\mathbf{p}^2}}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}, \quad (7.10)$$

если

$$|E|<\frac{2Mm+m^2-\mathbf{p}^2-\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}. \quad (7.11)$$

Тогда, раскрывая выражение в правой части уравнения (7.9), получаем

$$ST(E,\tau)=Sf(E,\tau)+2\pi i\frac{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}-E_p(\tau)}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}\delta(E-E_p(\tau))g^2(\tau-\mathbf{p}^2)\times$$
$$\times\sum_{S''}S\left\{\overline{u^{+S'}}(-\mathbf{p})\gamma_5\tau_\rho u^{+S''}(-\lambda\mathbf{e})\right\}\left\{\overline{u^{+S'}}(-\lambda\mathbf{e})\gamma_5\tau_\rho u^{+S''}(\mathbf{p})\right\}-$$
$$-2\pi i\frac{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}-E_p(\tau)}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}\delta(E-E_p(\tau))g^2(\tau-\mathbf{p}^2)\times$$
$$\times\sum_{S''}S\left\{\overline{u^{+S'}}(-\mathbf{p})\gamma_5\tau_\rho u^{+S''}(\lambda\mathbf{e})\right\}\left\{\overline{u^{+S'}}(\lambda\mathbf{e})\gamma_5\tau_\rho u^{+S''}(\mathbf{p})\right\}, \quad (7.12)$$

где

$$Sf(E,\tau)=0, \quad \text{если} \quad |E|<\frac{2Mm+m^2-\mathbf{p}^2-\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}. \quad (7.13)$$

Уже из выражений (7.9), (7.10) видно, что функции (7.7), (7.8) являются одной и той же аналитической функцией $\widetilde{T}(E,\tau)$, регулярной в области $\operatorname{Im} E\neq 0$, с обрезаниями на вещественной оси при значениях

$$E<-\frac{2Mm+m^2-\mathbf{p}^2-\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}, \quad E>-\frac{2Mm+m^2-\mathbf{p}^2-\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}$$

и с полюсами первого порядка в точках $E=\pm E_p(\tau)$. Приближаясь к вещественной оси из верхней полуплоскости, получаем запаздывающую функцию, а из нижней полуплоскости приходим к опережающей функции.

Отталкиваясь от определений (7.2), замечаем, что в рассматриваемом случае, когда τ фиксировано, аналитическая функция $ST(E,\tau)$ растет на бесконечности (когда $|\operatorname{Im} E|>\delta>0$) медленнее, чем некоторые полиномы.

Таким образом, функция $S\tilde{T}(E,\tau)$ обладает свойствами, гарантирующими справедливость применения теоремы Коши:

$$S\tilde{T}(E,\tau)=\frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Sf(E',\tau)}{(E'-E_0)^{n+1}(E'-E)}\,dE'+\frac{g^2(\tau-\mathbf{p}^2)A(\tau)}{E-E_p(\tau)}+$$
$$+\frac{g^2(\tau-\mathbf{p}^2)B(\tau)}{E+E_p(\tau)}+\sum_{0\leqslant r\leqslant n}C_r(\tau)E^r, \quad (7.14)$$

где n — достаточно большое целое число; E_0 — произвольный вещественный параметр, который мы выбираем в интервале (7.11) так, что знаменатель $(E'-E_0)^{n+1}$ не обращается в нуль в вещественной области интегрирования выражения (7.14). Более того,

$$A(\tau)=-2\pi i\,\frac{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}-E_p(\tau)}{(M^2+p^2)^{1/2}}\times$$
$$\times\sum_{S''}S\left\{u^{+S'}(-\mathbf{p})\gamma_5\tau_\rho u^{+S''}(-\lambda\mathbf{e})\right\}\left\{u^{+S''}(-\lambda\mathbf{e})\gamma_5\tau_\rho u^{+S}(\mathbf{p})\right\}, \quad (7.15)$$

$$B(\tau)=2\pi i\,\frac{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}-E_p(\tau)}{(M^2+p^2)^{1/2}}\times$$
$$\times\sum_{S''}S\left\{u^{+S'}(-\mathbf{p})\gamma_5\tau_\rho u^{+S''}(\lambda\mathbf{e})\right\}\left\{u^{+S''}(\lambda\mathbf{e})\gamma_5\tau_\rho u^{+S}(\mathbf{p})\right\}.$$

Следует отметить, что мы установили дисперсионные соотношения (7.14) только для отрицательных значений τ, удовлетворяющих неравенству (7.6).

Следовательно, вещественные дисперсионные соотношения, о которых шла речь в предыдущем разделе, получаются непосредственно из выражения (7.14), если только оно справедливо и для $\tau=m^2+\mathbf{p}^2$.

Для расширения области значений τ, при которых выполняются соотношения (7.14), воспользуемся методом аналитического продолжения. Докажем, что функция $Sf(E,\tau)$ обладает следующим важным свойством представления в аналитическом виде:

$$Sf(E,\tau)=F_1\left\{2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+\tau;\tau\right\}+F_2\left\{-2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+\tau;\tau\right\}, \quad (7.16)$$

если все величины $E,\tau,\sqrt{E^2-\tau}$ являются вещественными и $\tau<(1+\rho)m^2+$ $+\mathbf{p}^2$. Функции $F_1(\xi,\tau),F_2(\xi,\tau)$ являются обобщенными функциями вещественной переменной ξ и аналитическими функциями комплексной переменной τ, регулярными в области

$$-\mathbf{p}^2+\operatorname{Re}\tau<(1+\rho)m^2,\quad |\operatorname{Im}\tau|<\rho m^2, \quad (7.17)$$

где ρ — некоторое положительное достаточно малое число.

Кроме того,

$$\left.\begin{aligned}F_1(\xi,\tau)&=0,\\F_2(\xi,\tau)&=0\end{aligned}\right\}\quad\text{для}\quad \xi<2Mm+m^2-\mathbf{p}^2. \quad (7.18)$$

Прежде чем переходить к доказательству представления (7.16), покажем, что из него непосредственно следует справедливость дисперсионных соотношений при требуемых значениях $\tau = m^2 + \mathbf{p}^2$.

С этой целью опять выберем отрицательное значение τ, удовлетворяющее неравенству (7.6). Для таких τ как представление (7.16) (как мы временно предполагаем, прежде чем докажем это), так и соотношение (7.14) справедливы. Далее, подставляя (7.16) в (7.14), находим

$$ST(E,\tau) = \Phi(E,\tau) + \frac{g^2(\tau-\mathbf{p}^2)A(\tau)}{E-E_p(\tau)} + \frac{g^2(\tau-\mathbf{p}^2)B(\tau)}{E+E_p(\tau)} + \sum_{0\leqslant r\leqslant n} C_r(\tau)E^r, \tag{7.19}$$

где

$$\Phi(E,\tau) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i}\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1\left\{2E'\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2};\tau\right\}dE'}{\left(E'-\dfrac{\tau}{2\sqrt{m^2-\mathbf{p}^2}}-E_0\right)^{n+1}\left(E'-\dfrac{\tau}{2\sqrt{m^2-\mathbf{p}^2}}-E\right)} + \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i}\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_2\left\{2E'\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2};\tau\right\}dE'}{\left(-E'+\dfrac{\tau}{2\sqrt{m^2-\mathbf{p}^2}}-E_0\right)^{n+1}\left(\dfrac{\tau}{2\sqrt{m^2-\mathbf{p}^2}}-E'+E\right)}. \tag{7.20}$$

Выберем произвольное значение E_0 в интервале

$$|E_0| < \frac{2(Mm-\rho m^2)}{2(M^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}}. \tag{7.21}$$

Тогда в силу указанных свойств функций F_1, F_2 уравнения (7.20) определяют аналитическую функцию переменных E, τ в области

$$-\mathbf{p}^2 + \operatorname{Re}\tau < (1+\rho)m^2, \quad |\operatorname{Im}\tau| < \rho m^2, \quad |\operatorname{Im}\tau| < 2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}\,|\operatorname{Im}E|. \tag{7.22}$$

С другой стороны, функция $S\widetilde{T}(E,\tau)$ является аналитической в областях (7.4), (7.5). Следовательно, аналитическая функция

$$S\widetilde{T}(E,\tau) - \Phi(E,\tau)(E^2 - E_p^2(\tau)) \tag{7.23}$$

регулярна в области

$$\begin{gathered} -\mathbf{p}^2 + \operatorname{Re}\tau < (1+\rho)m^2, \qquad |\operatorname{Im}\tau| < \rho m^2, \\ |\operatorname{Im}\tau| < 2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}\,|\operatorname{Im}E|, \quad |\operatorname{Im}\sqrt{E^2-\tau}\,| < |\operatorname{Im}E|. \end{gathered} \tag{7.24}$$

В соответствии с (7.19) функция (7.23), удовлетворяющая при отрицательных τ неравенству (7.6), совпадает с полиномом

$$g^2(\tau-\mathbf{p}^2)A(\tau)(E+E_p(\tau)) + g^2(\tau-\mathbf{p}^2)B(\tau)(E-E_p(\tau)) + (E^2-E_p^2(\tau))\sum_{0\leqslant r\leqslant n} C_r(\tau)E^r. \tag{7.25}$$

Поэтому она также должна быть полиномом по E для всей области регулярности (7.24).

Поскольку, с другой стороны, $A(\tau), B(\tau), E_p(\tau)$ являются аналитическими функциями τ в соответствии с определениями (7.10), (7.15), видно, что $g^2(\tau - \mathbf{p}^2)$ и $C_r(\tau)$ должны допускать аналитическое продолжение.

Возьмем любое значение $\tau = \tau^*$ из области (7.17), не лежащее на вещественной оси, $\operatorname{Im}\tau^* \neq 0$, и построим соответствующее $E = E^*$, полагая

$$E^* = E_r + iE_i,$$

где

$$2E_rE_i = \operatorname{Im}\tau^*, \quad E_r < M, \quad E_r^2 - E_i^2 - \operatorname{Re}\tau^* > 0.$$

Понятно, что такие значения E^*, τ^* принадлежат области (7.24), и поэтому значение τ^* находится в области аналитичности функций $g^2(\tau - \mathbf{p}^2)$, $C_r(\tau)$. На основании этого заключаем, что эти функции являются аналитическими в области (7.17) с возможной точкой обрезания, лежащей на вещественной оси. Покажем, что в действительности такой точки обрезания не существует, так что указанные функции будут регулярными во всей области (7.17).

Для этого рассмотрим вещественные значения переменной $\tau_r < (1+\rho) \times \times m^2 + \mathbf{p}^2$ и положим

$$\tau = \tau_\pm = \tau_r + i\eta, \quad \eta > 0, \quad E = E_\pm = E_r \pm \frac{i\eta}{2E_r}, \quad E_r > 0,$$

$$\mathbf{p}^2 + (1+\rho)m^2 < E_r^2 < M^2.$$

При достаточно малых η такие значения (E, τ) очевидным образом попадают в область (7.24). Теперь пусть η стремится к нулю. Из выражения (7.20) находим

$$\Phi(E_+, \tau_+) \to \Phi(E_r + i\varepsilon, \tau_r); \quad \Phi(E_-, \tau_-) \to \Phi(E_r - i\varepsilon, \tau_r) \tag{7.26}$$

и, принимая во внимание (7.16), получаем

$$\Phi(E_+, \tau_+) - \Phi(E_-, \tau_-) \to Sf(E_r, \tau_r) = S\widetilde{T}(E_r, \tau_r). \tag{7.27}$$

С другой стороны, в силу определений (7.2)

$$S\widetilde{T}(E_+, \tau_+) =$$

$$= \int \exp\left\{-\frac{\eta}{2E_2}x_0\right\} F^{\mathrm{ret}}(x) S \exp\left\{i\left(E_\tau x_0 - \mathbf{ex}\sqrt{E_r^2 - \tau_r - \left(\frac{\eta}{2E_r}\right)^2}\right)\right\} dx$$

и поэтому

$$S\widetilde{T}(E_+, \tau_+) \to ST^{\mathrm{ret}}(E_r, \tau_r).$$

Совершенно аналогичным образом

$$S\widetilde{T}(E_-, \tau_-) \to ST^{\mathrm{adv}}(E_r, \tau_r).$$

На основании этого имеем

$$\lim\{S\widetilde{T}(E_+, \tau_+) - \Phi(E_+, \tau_+)\} = \lim\{S\widetilde{T}(E_-, \tau_-) - \Phi(E_-, \tau_-)\}.$$

Поскольку для значений $E_\pm, \tau_\pm$ функция (7.23) равна полиному (7.25), то и для них получаются такие же соотношения. Таким образом, отсюда следует, что функции

$$g^2(\tau_r + i\eta - \mathbf{p}^2), \quad C_S(\tau_r + i\eta)$$

стремятся к тем же пределам, что и функции $g^2(\tau_r - i\eta - \mathbf{p}^2), C_S(\tau_r - i\eta)$. Таким образом, обрезаний для функций g^2, C_S не существует и они являются регулярными во всей области (7.17). Принимая во внимание этот факт, вернемся к соотношению (7.19), которое, как мы теперь видим, выполняется для точек (E, τ) из области (7.24).

Аналитическая функция комплексных переменных E, τ в правой части вышеупомянутого выражения является регулярной в более широкой области, а именно в области (7.22).

По этой причине можно продолжить аналитическую функцию $S\widetilde{T}(E, \tau)$ так, что она будет равна правой части (7.19) для всей области (7.22).

Для продолженной указанным способом аналитической функции $S\widetilde{T}(E, \tau)$ выполняются обычные соотношения с неправильными пределами

$$S\widetilde{T}(E + i\varepsilon, \tau) = ST^{\mathrm{ret}}(E, \tau), \tag{7.28}$$

$$S\widetilde{T}(E - i\varepsilon, \tau) = ST^{\mathrm{adv}}(E, \tau), \tag{7.29}$$

только если все E, τ и $\lambda = \sqrt{E^2 - \tau}$ являются вещественными, а также

$$\tau < (1 + \rho)m^2 + \mathbf{p}^2.$$

Действительно, из (7.19) видно, что

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} S\widetilde{T}(E + i\delta, \tau) = \lim S\widetilde{T}(E + i\delta, \tau + i\alpha E\delta), \quad \alpha = \left(1 + \left(\frac{E}{M}\right)^2\right)^{-1}.$$

Однако при достаточно малых δ точка

$$E_+ = E + i\delta, \qquad \delta_+ = \tau + i\alpha E\delta,$$

принадлежит области (7.24), в которой мы имеем право воспользоваться уравнением (7.2) и записать

$$S\widetilde{T}(E + i\delta, \tau + i\alpha E\delta) = S \int \exp\left\{-\delta x_0 + \mathbf{xe}\,\mathrm{Im}\sqrt{E_+^2 - \tau_+}\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{i\left(Ex_0 - \mathbf{xe}\,\mathrm{Re}\sqrt{E_+^2 - \tau_+}\right)\right\} F^{\mathrm{ret}}(x)\,dx, \quad |\,\mathrm{Im}\sqrt{E_+^2 - \tau_+}\,| < \delta.$$

В силу этого $\lim S\widetilde{T}(E + i\delta, \tau + i\alpha E\delta) = ST^{\mathrm{ret}}(E, \tau)$. Аналогичным образом проверяем и свойство (7.29). Итак, установлена справедливость соотношения (7.19) во всей области (7.22). Однако точка $\tau = m^2 + \mathbf{p}^2$ в совокупности с любым значением E, не лежащим на вещественной оси, принадлежит данной области. Поэтому соотношение (7.19) будет верным, когда

$$\mathrm{Im}\,E \neq 0, \quad \tau = m^2 + \mathbf{p}^2.$$

Обратной подстановкой переменной интегрирования преобразуем (7.19) к виду (7.14), где вместо $Sf(E', m^2+\mathbf{p}^2)$ будет стоять выражение

$$F_1\left\{2E'\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+m^2+\mathbf{p}^2; m^2+\mathbf{p}^2\right\}+ \\ +F_2\left\{-2E'\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+m^2+\mathbf{p}^2; m^2+\mathbf{p}^2\right\}, \quad (7.30)$$

совпадающее с ним в случае, когда $E'^2 > m^2+\mathbf{p}^2$. Выражение (7.30) равно нулю (так же как и $Sf(E', m^2+\mathbf{p}^2)$) для $|E'| < (Mm-\mathbf{p}^2)/(M^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}$. В интервале

$$\frac{Mm-\mathbf{p}^2}{(M^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}} < |E'| < \sqrt{m^2+\mathbf{p}^2} \quad (7.31)$$

прямое определение функции

$$Sf(E', m^2+\mathbf{p}^2) = ST(E', m^2+\mathbf{p}^2) \quad (7.32)$$

посредством интеграла (7.3) не имеет смысла, и выражение (7.30) можно рассматривать как ее подходящее продолжение в интервале (7.31) .

В итоге мы получили соотношение (7.14) для требуемых значений τ с продолженной функцией (7.32). Чтобы перейти в ней к вещественным E, у нас имеются уравнения (7.28), (7.29). Таким образом, справедливость дисперсионных соотношений из предыдущего раздела установлена.

Для завершения доказательства мы еще должны доказать допустимость представления (7.16).

С этой целью воспользуемся уравнением (3.26)

$$\exp\left\{i\frac{p'-p}{2}(x+y)\right\}F_{\alpha\omega}(x-y) = i\langle p's'|j_{\rho'}(x)j_\rho(y)-j_\rho(y)j_{\rho'}(x)|ps\rangle,$$

из которого получаем

$$T_{\alpha\omega}\left(\frac{p'-p}{2}+p_3\right)\delta(p'-p+p_3+p_4) = \\ = \frac{i}{(2\pi)^4}\int\langle p's'|j_{\rho'}(x_3)j_\rho(x_4)-j_\rho(x_4)j_{\rho'}(x_3)|ps\rangle e^{i(p_3x_3+p_4x_4)}\,dx_3\,dx_4.$$

Выразим здесь матричные элементы $\langle p's'|\ldots|ps\rangle$ через вакуумные средние при помощи локального свойства 3 из системы аксиом 2.2. Находим

$$T_{\alpha\omega}\left(\frac{p'-p}{2}+p_3\right)\delta(p'-p+p_3+p_4) = \frac{-i}{(2\pi)^7}\overline{u^{+S'}}(\mathbf{p}')\int e^{i(p'x_1-px_2+p_3x_3+p_4x_4)}\times \\ \times\left\langle 0\left|\frac{\delta}{\delta\bar\psi(x_1)}\frac{\delta}{\delta\psi(x_2)}\{j_{\rho'}(x_3)j_\rho(x_4)-j_\rho(x_4)j_{\rho'}(x_3)\}\right|0\right\rangle u^{+S}(\mathbf{p})\,dx_1\ldots dx_4. \quad (7.33)$$

Теперь введем удобное обозначение. Для любой трансляционно-инвариантной функции $F(x_1,..,x_4)$ 4-векторов ее $x_1,\ldots,x_4$ полный фурье-образ

пропорционален $\delta(p_1+\ldots+p_4)$. Условимся обозначать через $\widetilde{F}(p_1,\ldots,p_4)$ появляющийся здесь коэффициент и называть его фурье-образом F. Тогда имеем

$$\int F(x_1,\ldots,x_4)\mathrm{e}^{i(p_1x_1+\ldots+p_4x_4)}\,dx_1\ldots dx_4=\delta(p_1+\ldots+p_4)\widetilde{F}(p_1,\ldots,p_4)(2\pi)^4. \tag{7.34}$$

Используя это обозначение, перепишем соотношение (7.33) в виде

$$T_{\alpha\omega}(q)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\overline{u^{+S'}}(\mathbf{p}')\widetilde{\mathcal{D}}(p',-p,p_3,p_4)u^{+S}(\mathbf{p}), \tag{7.35}$$

где

$$q=\frac{p'-p}{2}+p_3,\quad p'-p+p_3+p_4=0 \tag{7.36}$$

и

$$\mathcal{D}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\langle 0|\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x_1)}\frac{\delta}{\delta\psi(x_2)}\{j_{\rho'}(x_3)j_\rho(x_4)-j_\rho(x_4)j_{\rho'}(x_3)\}|0\rangle. \tag{7.37}$$

Вычисляя вторую вариационную производную, находим

$$\mathcal{D}(x_1,\ldots,x_4)=\sum_{1\leqslant a\leqslant 8}D^a(x_1,\ldots,x_n), \tag{7.38}$$

где

$$\begin{aligned}
D^{(1)}(x_1,\ldots,x_4)&=\left\langle 0\left|\frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\bar{\psi}(x_1)}\frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)}\right|0\right\rangle,\\
D^{(2)}(x_1,\ldots,x_4)&=-\left\langle 0\left|\frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\psi(x_2)}\frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\bar{\psi}(x_1)}\right|0\right\rangle,\\
D^{(3)}(x_1,\ldots,x_4)&=-\left\langle 0\left|\frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\bar{\psi}(x_1)}\frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\psi(x_2)}\right|0\right\rangle,\\
D^{(4)}(x_1,\ldots,x_4)&=-\left\langle 0\left|\frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)}\frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\bar{\psi}(x_1)}\right|0\right\rangle,
\end{aligned} \tag{7.39}$$

$$\begin{aligned}
D^{(5)}(x_1,\ldots,x_4)&=\left\langle 0\left|\left\{\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x_1)}\frac{\delta}{\delta\psi(x_2)}j_{\rho'}(x_4)\right\}\right|0\right\rangle,\\
D^{(6)}(x_1,\ldots,x_4)&=\left\langle 0\left|j_{\rho'}(x_3)\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x_1)}\frac{\delta}{\delta\psi(x_2)}j_\rho(x_4)\right|0\right\rangle,\\
D^{(7)}(x_1,\ldots,x_4)&=-\left\langle 0\left|\left\{\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x_1)}\frac{\delta}{\delta\psi(x_2)}j_\rho(x_4)\right\}j_{\rho'}(x_3)\right|0\right\rangle,\\
D^{(8)}(x_1,\ldots,x_4)&=\left\langle 0\left|j_\rho(x_4)\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x_1)}\frac{\delta}{\delta\psi(x_2)}j_{\rho'}(x_3)\right|0\right\rangle.
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Возьмем выражение для $D^{(5)}$ и применим к нему условие полноты (2.4) из системы аксиом (см. подраздел 2.1). Получим

$$\begin{aligned}
D^{(5)}(x_1,\ldots,x_4)=&\left\langle 0\left|\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x_1)}\frac{\delta}{\delta\psi(x_2)}j_{\rho'}(x_3)\right|0\right\rangle\langle 0|j_\rho(x_4)|0\rangle+\\
&+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\sum_n\int d\mathbf{k}\left\langle 0\left|\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x_1)}\frac{\delta}{\delta\psi(x_2)}j_{\rho'}(x_3)\right|n\mathbf{k}\right\rangle\langle\mathbf{k}|j_\rho(x_4)|0\rangle.
\end{aligned}$$

С другой стороны, из той же системы аксиом следует, что

$$\begin{aligned}\langle 0|j_\rho(x_4)|0\rangle &= 0,\\ \langle n\mathbf{x}|j_\rho(x_4)|0\rangle &= \langle n\mathbf{k}|j_\rho(0)|0\rangle e^{i\{E_n(\mathbf{k})x_4^0-(\mathbf{k}\mathbf{x}_4)\}}.\end{aligned} \tag{7.41}$$

Более того, выражение $\langle n\mathbf{k}|j_\rho(0)|0\rangle$ равно нулю для одномезонного и двумезонного состояний, и, таким образом, лишь те состояния, для которых $E_n^2(k)-\mathbf{k}^2\geqslant(3m)^2$, могут давать вклад в сумму (7.41). Следовательно, $D^{(5)}$, рассматриваемая как функция от x_4, представляется суперпозицией экспонент $e^{i(p_4x_4)}$, где p_4 удовлетворяют неравенству $p_4^2\geqslant(3m)^2$. По этой причине

$$\widetilde{D}^{(5)}(p_1,\ldots,p_4)=0, \quad \text{если} \quad p_4^2<(3m)^2. \tag{7.42}$$

Совершенно аналогичным образом находим

$$\begin{aligned}\widetilde{D}^{(6)}(p_1,\ldots,p_4)&=0, \quad \text{если} \quad p_3^2<(3m)^2,\\ \widetilde{D}^{(7)}(p_1,\ldots,p_4)&=0, \quad \text{если} \quad p_3^2<(3m)^2,\\ \widetilde{D}^{(8)}(p_1,\ldots,p_4)&=0, \quad \text{если} \quad p_4^2<(3m)^2.\end{aligned} \tag{7.43}$$

Теперь вернемся к соотношению (7.35) и умножим обе его части на

$$\left\{\left(q+\frac{p+p'}{2}\right)^2-M^2\right\}\left\{\left(-q+\frac{p+p'}{2}\right)^2-M^2\right\}.$$

Получим

$$\begin{aligned}&\left\{\left(q+\frac{p+p'}{2}\right)^2-M^2\right\}\left\{\left(-q+\frac{p+p'}{2}\right)^2-M^2\right\}T_{\alpha\omega}(q)=\\ &\qquad=\frac{-i}{(2\pi)^4}\overline{u^{+S'}}(\mathbf{p}')\widetilde{M}(p',-p,p_3,p_4)u^{+S}(\mathbf{p})\end{aligned} \tag{7.44}$$

и заметим, что

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(p_1,p_2,p_3,p_4)&=\{(p_1+p_3)-M^2\}\{(p_1+p_4)^2-M^2\}\widetilde{D}(p_1,p_2,p_3,p_4),\\ M(x_1,\ldots,x_4)&=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_4}\right)^2\right\}D(x_1,\ldots,x_4).\end{aligned} \tag{7.45}$$

Кроме того, на основании (7.38), (7.42) и (7.43) можно записать

$$M(x_1,\ldots,x_4)=\sum_{1\leqslant a\leqslant 4}M^{(a)}(x_1,\ldots,x_4)+N(x_1,\ldots,x_4), \tag{7.46}$$

где

$$M^{(a)}(x_1,\ldots,x_4)=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_4}\right)^2\right\}D^{(a)}(x_1,\ldots,x_4). \tag{7.47}$$

Для определения аналитической структуры функций $M^{(1)}\ldots M^{(4)}$ воспользуемся следующей теоремой.

Теорема. *Пусть множество трансляционно-инвариантных обобщенных функций задается в виде*

$$F_{ij;\nu}(x_1,\dots,x_4) \quad c \quad i=r,a, \quad j=r,a, \quad \nu=1,\dots,N$$

и преобразуется линейно в отношении преобразований L из группы Лоренца

$$F_{ij;\nu}(Lx_1\dots Lx_4)=\sum_{1\leqslant\nu'\leqslant N} A_{\nu\nu'}(L)F_{i,j,\nu'}(x_1,\dots,x_4)$$

согласно представлению $A(L)$ данной группы, которое может быть любым из стандартных тензорных или спинорных представлений.

Кроме того, пусть эти функции удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
&F_{r,r,\nu}(x_1,\dots,x_4)=0, \quad x_3\lesssim x_1, \quad x_4\lesssim x_2;\\
&F_{a,r,\nu}(x_1,\dots,x_4)=0, \quad x_3\lesssim x_1, \quad x_4\lesssim x_2;\\
&F_{r,a,\nu}(x_1,\dots,x_4)=0, \quad x_3\lesssim x_1, \quad x_4\lesssim x_2;\\
&F_{a,a,\nu}(x_1,\dots,x_4)=0, \quad x_3\lesssim x_1, \quad x_4\lesssim x_2;
\end{aligned} \tag{7.48}$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{F}_{rj\nu}(p_1,\dots,p_4)-\widetilde{F}_{aj\nu}(p_1,\dots,p_4)=0, \quad p_1^2<(M+m)^2, \quad p_3^2<\sigma^2m^2,\\
&\widetilde{F}_{ir\nu}(p_1,\dots,p_4)-\widetilde{F}_{ia\nu}(p_1,\dots,p_4)=0, \quad p_2^2<(M+m)^2, \quad p_3^2<\sigma^2m^2,
\end{aligned} \tag{7.49}$$

где σ — некоторое число больше единицы,

$$F_{ij\nu}(p_1,\dots,p_4)=0, \quad (p_1+p_3)^2<(M+m)^2. \tag{7.50}$$

Тогда существует положительное число ρ_1 (зависящее только от σ), такое, что для $p_1,\dots,p_4$, принадлежащих области

$$\begin{gathered}
p_1+\dots+p_4=0,\\
p_1^2<M^2+\rho_1m^2, \quad p_3^2<(1+\rho_1)m^2,\\
p_2^2<M^2+\rho_1m^2, \quad p_4^2<(1+\rho_1)m^2, \quad (p_1+p_2)^2<\rho_1m^2,
\end{gathered}$$

имеет место представление

$$\widetilde{F}_{ij\nu}(p_1,\dots\text{бз}_4)=\sum p_{i_1}^{\alpha_1},\dots,p_{i_S}^{\alpha_S}\Phi_\omega\{p_1^2,p_2^2,p_3^2,p_4^2,(p_1+p_2)^2,(p_1+p_3)^2\} \quad \text{(A)}$$

с конечным числом слагаемых.

Здесь $\Phi_\omega(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)$ являются обобщенными функциями вещественной переменной z_6 и аналитическими функциями комплексных переменных $z_1,\dots,z_5$, регулярными в области

$$\begin{gathered}
\operatorname{Re}z_1<M^2+\rho_1m^2, \quad \operatorname{Re}z_3<(1+\rho_1)m^2, \quad \operatorname{Re}z_5<\rho_1m^2,\\
\operatorname{Re}z_2<M^2+\rho_1m^2, \quad \operatorname{Re}z_5<(1+\rho_1)m^2, \quad |\operatorname{Im}z_\gamma|<\rho_1m^2, \quad \gamma=1,\dots,5.
\end{gathered}$$

Кроме того,

$$\Phi_\omega(z_1,\dots,z_5,z_6)=0 \quad \text{для} \quad z_6<(M+m)^2.$$

Воспользуемся этой теоремой прежде всего для компонент функции $M^{(1)}(x_1,\dots,x_4)$. Положим

$$\begin{aligned}
D^{(1)}_{r,r}(x_1,\dots,x_4) &= D^{(1)}(x_1,\dots,x_4),\\
D^{(1)}_{a,r}(x_1,\dots,x_4) &= -\left\langle 0\left|\frac{\delta\cap(x_1)}{\delta\varphi_{\rho'}(x_3)}\frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)}\right|0\right\rangle,\\
D^{(1)}_{r,a}(x_1,\dots,x_4) &= \left\langle 0\left|\frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\bar\psi(x_1)}\frac{\delta\bar\cap(x_2)}{\delta\varphi(x_4)}\right|0\right\rangle,\\
D^{(1)}_{a,a}(x_1,\dots,x_4) &= -\left\langle 0\left|\frac{\delta\cap(x_1)}{\delta\varphi_{\rho'}(x_3)}\frac{\delta\bar\cap(x_2)}{\delta\varphi(x_4)}\right|0\right\rangle,
\end{aligned}\tag{7.51}$$

где в соответствии с определением фермиевских токов (3.4)

$$\cap(x)=-i\frac{\delta S}{\delta\bar\psi(x)}S^+;\quad \bar\cap(x)=i\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}S^+.$$

Вместе с тем полагаем

$$M^{(1)}_{ij}(x_1,\dots,x_4)=$$
$$=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2+M^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_4}\right)^2+M^2\right\}D^{(1)}_{ij}(x_1,\dots,x_4).$$

Функции $D^{(1)}_{ij}$ и соответственно $M^{(1)}_{ij}$ будут также трансляционно-инвариантными и преобразуются как произведения спиноров.

В силу условия причинности функции $D^{(1)}_{ij}, M^{(1)}_{ij}$ обладают свойствами (7.48).

Теперь проверим условия (7.49) при $\sigma=3, M=m$. Для этого начнем с тождеств

$$\begin{aligned}
\frac{\delta j(x_3)}{\delta\bar\psi(x_1)}+\frac{\delta\cap(x_1)}{\delta\varphi(x_3)} &= i[\cap(x_1)j(x_3)-j(x_3)\cap(x_1)],\\
\frac{\delta j(x_4)}{\delta\psi(x_2)}-\frac{\delta\bar\cap(x_3)}{\delta\varphi(x_4)} &= i[j(x_4)\bar\cap(x_2)-\bar\cap(x_2)j(x_4)],
\end{aligned}$$

которые следуют из свойства (3.4).

Например, имеем

$$D^{(1)}_{r,r}(x_1,\dots,x_4)-D^{(1)}_{a,r}(x_1,\dots,x_4)=$$
$$=i\left\langle 0\left|\cap(x_1)j(x_3)\frac{\delta j(x_4)}{\delta\psi(x_2)}\right|0\right\rangle-i\left\langle 0\left|j(x_3)\cap(x_1)\frac{\delta j(x_4)}{\delta\psi(x_2)}\right|0\right\rangle.$$

Применяя свойство полноты к первому члену выражения в правой части, находим, что его фурье-образ равен нулю при $p_1^2<(M+m)^2$. Фурье-образ второго члена в правой части равен нулю при

$$p_3^2<(3m)^2.$$

Следовательно,

$$\tilde D^{(1)}_{r,r}(p_1,\dots,p_4)-\tilde D^{(1)}_{a,r}(p_1,\dots,p_4)=0,\quad p_1^2<(M+m)^2,\quad p_3^2<(3m)^2,$$

и

$$\widetilde{M}^{(1)}_{r,r}(p_1,\ldots,p_4)-\widetilde{M}^{(1)}_{a,r}(p_1,\ldots,p_4)=0,\quad p_1^2<(M+m)^2,\quad p_3^2<(3m)^2.$$

Остальные условия данной группы проверяются таким же путем. Наконец перейдем к последнему условию (7.50). Имеем

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2+M^2\right\}D^{(1)}_{r,r}(x_1,\ldots,x_4)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_n\int d\mathbf{k}\langle 0|A(x_1,x_3)|n\mathbf{k}\rangle\langle n\mathbf{k}|B(x_2,x_4)|0\rangle,\quad (7.52)$$

где

$$A(x_1,x_3)=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2+m^2\right\}C(x_1,x_3),$$

$$C(x_1,x_3)=\frac{\delta j(x_3)}{\delta\bar{\psi}(x_1)};\quad B(x_2,x_4)=\frac{\delta j(x_3)}{\delta\psi(x_1)}.$$

Однако

$$\begin{aligned}\langle 0|C(x_1,x_3)|n\mathbf{k}\rangle&=\langle 0|C(x_1-x_3,0)|n\mathbf{k}\rangle e^{-i\{E_n(\mathbf{k})x_0^3-\mathbf{k}\mathbf{x}_3\}},\\ \langle n\mathbf{k}|B(x_2,x_4)|0\rangle&=\langle n\mathbf{k}|B(0,x_4-x_2)|0\rangle e^{i\{E_n(\mathbf{k})x_0^2-\mathbf{k}\mathbf{x}_2\}},\end{aligned}\quad (7.53)$$

и поэтому

$$\langle 0|A(x_1,x_3)|n\mathbf{k}\rangle=\langle 0|C(x_1-x_3,0)|n\mathbf{k}\rangle\{M^2-E_n^2(\mathbf{k})+\mathbf{k}^2\}e^{-i\{E_n(\mathbf{k})x_3^0-\mathbf{k}\mathbf{x}_3\}}.\quad (7.54)$$

С другой стороны, выражение

$$\left\langle n\mathbf{k}\left|\frac{\delta j(x_4)}{\delta\psi(x_2)}\right|0\right\rangle$$

равно нулю для состояний без нуклонов в соответствии с законом сохранения барионного числа. Для состояний n с единственным нуклоном

$$E_n^2(\mathbf{k})-\mathbf{k}^2=M^2,$$

в результате чего имеем

$$\langle 0|A(x_1,x_3)|n\mathbf{k}\rangle=0.$$

Таким образом, вклад в сумму (7.52) дают лишь те состояния, которые содержат хотя бы один нуклон и один мезон; для таких состояний

$$E_n^2(\mathbf{k})-\mathbf{k}^2>(M+m)^2.$$

Теперь на основании уравнений (7.52)–(7.54) заметим, что функция в правой части (7.52) является суперпозицией экспонент вида

$$\exp\left(i(q_1(x_1-x_3)+q_2(x_4-x_2)+k(x_2-x_3))\right),\quad k^2\geqslant(M+m)^2.$$

Вводя обычные 4-векторы

$$p_1=-q_1,\quad p_2=q_2-k,\quad p_3=q_1+k,\quad p_4=-q_2,$$

видим, что

$$(p_1+p_3)^2=k^2\geqslant(M+m)^2.$$

Отсюда следует, что фурье-образ левой части уравнения (7.52), а также в силу этого $M^{(1)}_{2,2}(p_1,\dots,p_4)$ равны нулю в случае, когда $(p_1+p_3)^2 < (M+m)^2$. Остальные условия из (7.50) проверяются тем же путем.

Теперь можно воспользоваться представлением А для $\widetilde{M}^{(1)}(p_1,\dots,p_4)$. Нетрудно показать, что представление такого же типа верно для $\widetilde{M}^{(4)}(p_1,\dots,p_4)$. Для функций $\widetilde{M}^{(2)}(p_1,\dots,p_4)$ и $\widetilde{M}^{(3)}(p_1,\dots,p_4)$ представления получаются из А подстановкой p_4 вместо p_3.

Таким образом, принимая во внимание (7.44) и (7.47), приходим к следующему результату.

Если

$$p^2 < M^2+\rho_1 m^2, \quad p'^2 < M^2+\rho_1 m^2,$$
$$\left(\frac{p-p'}{2}+q\right)^2 < (1+\rho_1)m^2, \quad \left(\frac{p-p'}{2}-q\right)^2 < (1+\rho_1)m^2, \tag{7.55}$$
$$(p-p')^2 < \rho_1 m^2$$

(ρ_1 — некоторое число меньше 8), то справедливо следующее представление:

$$\left\{\left(q+\frac{p+p'}{2}\right)^2 - M^2\right\}\left\{\left(-q+\frac{p+p'}{2}\right)^2 - M^2\right\} T_{\alpha\omega}(q) = \overline{u^{+S}}(\mathbf{p}')m(p,p',q)u^{+S}(\mathbf{p}), \tag{7.56}$$

$$m(p,p',q) = \sum_\nu \mathcal{P}_\nu(p,p',q)\phi_\nu \times \left\{p^2, p'^2, \left(\frac{p-p'}{2}+q\right)^2, \left(\frac{p-p'}{2}-q\right)^2, (p-p')^2, \left(\frac{p+p'}{2}+q\right)^2\right\} + \sum_\mu Q_\mu(p,p',q)\phi_\mu \times \left\{p^2, p'^2, \left(\frac{p-p'}{2}+q\right)^2, \left(\frac{p-p'}{2}-q\right)^2, (p-p')^2, \left(\frac{p+p'}{2}-q\right)^2\right\}, \tag{7.57}$$

где

$$\mathcal{P}_\nu(p,p',q), \quad Q_\mu(p,p',q)$$

являются полиномами по компонентам p, p', q, а $\phi(z_1,\dots,z_5,z_6)$ — обобщенные функции вещественной переменной z_6 и аналитические функции по комплексным переменным $z_1,\dots,z_5$, регулярные в области

$$\operatorname{Re} z_1 < M^2+\rho_1 m^2, \quad \operatorname{Re} z_3 < (1+\rho_1)m^2, \quad \operatorname{Re} z_5 < \rho_1 m^2,$$
$$\operatorname{Re} z_2 < M^2+\rho_1 m^2, \quad \operatorname{Re} z_4 < (1+\rho_1)m^2, \quad |\operatorname{Im} z_\nu| < \rho_1 m^2, \quad \nu = 1,\dots,5.$$

Кроме того, $\phi(z_1, \ldots, z_5, z_6) = 0$ для $z_6 < (M+m)^2$. Воспользуемся этим результатом в случае, когда

$$p^0 = p'^0 = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}, \quad \mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0, \quad (p - p')^2 = -4\mathbf{p}^2,$$
$$q^0 = E, \quad \mathbf{q} = \lambda \mathbf{e}, \quad \mathbf{ep} = 0,$$

принимая во внимание лишь зависимость от переменных E, λ. Поскольку при S-операции в выражениях (7.56) и (7.57) исчезают все нечетные степени λ, находим

$$\{(\tau + \mathbf{p}^2)^2 - 4E^2(M^2 + \mathbf{p}^2)\} ST(E, \tau) = \phi_1\left\{M^2 + \mathbf{p}^2 + \tau + 2E\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}, \tau\right\} +$$
$$+ \phi_2\left\{M^2 + \mathbf{p}^2 + \tau - 2E\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}, \tau\right\} \quad (7.58)$$

при $\tau - \mathbf{p}^2 < (1 + \rho_1)m^2$, $E^2 > \tau$. Здесь $\phi_1(\xi, \tau)$, $\phi_2(\xi, \tau)$ — обобщенные функции вещественной переменной ξ и аналитические функции комплексной переменной τ, регулярные в области

$$\operatorname{Re}\tau < (1 + \rho_1)m^2 + \mathbf{p}^2, \quad |\operatorname{Im}\tau| < \rho_1 m^2. \quad (7.59)$$

Кроме того,

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(\xi, \tau) &= 0, \\ \phi_2(\xi, \tau) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{если} \quad \xi < (M+m)^2. \quad (7.60)$$

Пусть $\mathbf{p}^2$ ограничено неравенством

$$\mathbf{p}^2 < \frac{Mm - (1/2 + \rho)m^2}{2}.$$

Тогда $2\tau + \mathbf{p}^2 - t < 0$, если $t + \mathbf{p}^2 < 2Mm + m^2$. В силу этого мы можем с помощью формул

$$F_1(t, \tau) = \frac{\phi_1(t + M^2 + \mathbf{p}^2, \tau)}{2\tau + \mathbf{p}^2 - t},$$
$$F_2(t, \tau) = \frac{\phi_2(t + M^2 + \mathbf{p}^2, \tau)}{2\tau + \mathbf{p}^2 - t}$$

определить две обобщенные функции от t, которые являются аналитическими по τ, регулярными в области (7.59), а также удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} F_1(t, \tau) &= 0, \\ F_2(t, \tau) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad t < 2Mm + m^2 - \mathbf{p}^2.$$

Поскольку $ST(E, \tau)$ совпадает с $Sf(E, \tau)$, когда

$$(\tau + \mathbf{p}^2)^2 - 4E^2(M^2 + \mathbf{p}^2) \neq 0,$$

из (7.58) получаем конечный результат

$$Sf(E, \tau) = F_1\left(2E\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2} + \tau, \tau\right) + F_2\left(-2E\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2} + \tau, \tau\right),$$

завершающий доказательство.

АСПЕКТЫ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

Совместно с Н.Н. Боголюбовым (мл.)

Метод вторичного квантования возник одновременно с окончательной формулировкой квантовой механики в работах Дирака [1], Вигнера [2] и Фока [3], однако активно развиваться он начал лишь в конце 1940-х гг. В этой связи фундаментальное значение имеет работа Боголюбова [4], посвященная методу вторичного квантования. Ряд математических вопросов метода вторичного квантования разработан в книге Березина [5], где используется естественная реализация пространства состояний как пространства функционалов от функций определенного числа переменных.

Такой подход позволяет рассматривать задачи вторичного квантования как задачи квантовой механики с бесконечным числом степеней свободы. В книге [5] описываются пространства состояний и простейшие операторы на них, устанавливается связь между векторами и функционалами, операторами и функционалами.

Настоящий подход, в отличие от известных ранее, обладает большей общностью, простотой доказательств и естественностью постановки задачи. В нем мы обсудим с единой точки зрения фундаментальные вопросы, возникающие при использовании метода вторичного квантования.

Отметим, что определенный интерес к такому последовательному изложению возник в связи с развитием метода аппроксимирующих гамильтонианов [6], который широко использует представление вторичного квантования. К тому же в большинстве учебных пособий по квантовой механике и статистической физике со ссылкой на громоздкость вычислений часто перечисляются некоторые результаты метода вторичного квантования, которые, как правило, выглядят формально и не затрагивают глубокой физической сущности этого важного метода.

В излагаемом здесь подходе уделяется должное внимание преобразованию динамических величин к представлению вторичного квантования (рассматриваются случаи представления аддитивных, бинарных и s-кратных величин). Изучаются системы, состоящие из нескольких сортов фермионов и бозонов. Обсуждаются уравнения движения для временной эволюции операторных функций и строятся уравнения типа «самосогласованного поля» в операторной форме.

Также подробно освещаются идеи, близкие методу вторичного квантования, применяемые в кинетической теории классического газа.

Глава I

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Введение

Рассмотрим динамическую систему из N одинаковых частиц, состояния которой характеризуются волновыми функциями

$$\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_N), \tag{1.1}$$

зависящими от переменных $x_1, \ldots, x_N$. Здесь x_j — совокупность пространственных координат и дополнительных квантовых чисел для j-й частицы:

$$x = (q, \nu), \quad q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}), \tag{1.2}$$

где $q^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ — декартовы координаты, а ν — квантовые числа, соответствующие «внутренним степеням свободы» частицы. Если такие степени свободы учитываются лишь заданием спина частицы, то в качестве ν можно взять проекцию спина на ось z. В этом случае для частицы со спином $1/2$ имеем $\nu = \pm 1/2$, для частицы со спином 1 $\nu = -1, 0, +1$ и т. д. Для бесспиновых частиц ν вообще не вводится, и для них $x = q$.

Совокупность параметров (1.2) будем иногда обозначать также буквами x, y с соответствующими индексами, указывающими «номер» частицы. Целесообразно будет ввести еще понятие «интегрирование по x», определив соответствующий интеграл как интеграл по всему пространству q вместе с суммированием по дискретному индексу ν:

$$\int (\ldots)\, dx = \sum_{\nu} \int (\ldots) dq, \quad dq = dq^{(1)} dq^{(2)} dq^{(3)}. \tag{1.3}$$

Введем также δ-функцию

$$\delta(x - x') = \delta(q - q')\delta(\nu - \nu'), \tag{1.4}$$

где $\delta(q)$ — трехмерная функция Дирака, $\delta(\nu)$ — символ Кронекера; мы везде будем использовать для символа Кронекера то же обозначение, что и для δ-функции Дирака. Это не приведет к недоразумению, так как у нас аргумент у символа Кронекера всегда дискретный, а у δ-функции Дирака — всегда непрерывный.

Иногда будет удобно обозначать всю систему переменных $(x_1, \ldots, x_N)$ одной буквой X, например

$$\varphi = \varphi(X), \quad \int (\ldots) dX = \int (\ldots)\, dx_1 \ldots dx_N. \tag{1.5}$$

§ 2. Свойства симметрии

Рассмотрим теперь уравнение Шредингера для волновых функций (1.1):

$$i\hbar\frac{\partial\varphi_t}{\partial t}=H\varphi_t. \tag{1.1}$$

Так как все частицы рассматриваемой динамической системы одинаковы, гамильтониан H не может зависеть от способа их нумерации, т. е. от того, какую частицу считать первой, какую — второй и т. д., ввиду чего оператор H должен быть симметричным (инвариантным) по отношению ко всем перестановкам P между частицами.

а) Перестановки. Скажем несколько слов о формальном определении свойства симметричности операторов по отношению к перестановкам P. Пусть $\mathcal{D}$ — некоторый оператор, матричное X-представление которого будет $\mathcal{D}(X,X')$. Тогда

$$(\mathcal{D}\varphi)_X=\int\mathcal{D}(X,X')\varphi(X')dX',$$

откуда

$$(\mathcal{D}P^{-1}\varphi)_X=\int\mathcal{D}(X,X')\varphi(P^{-1}X')dX'.$$

Совершим в интеграле, стоящем в правой части, замену переменных $X'\to PX'$, очевидно не меняющую dX'. Получим

$$(\mathcal{D}P^{-1}\varphi)_X=\int\mathcal{D}(X,PX')\varphi(X')dX'$$

и

$$(\{P\mathcal{D}P^{-1}\}\varphi)_X=\int\mathcal{D}(PX,PX')\varphi(X')dX'.$$

Таким образом, $\mathcal{D}(PX,PX')$ будет матричным X-представлением для оператора $P\mathcal{D}P^{-1}$ и наоборот:

$$P\mathcal{D}P^{-1}\rightleftarrows\mathcal{D}(PX,PX'). \tag{1.2}$$

Как видно, $\mathcal{D}(PX,PX')$ представляет собой выражение $\mathcal{D}(X,X')$ после того, как над номерами частиц 1, 2, 3,... совершена перестановка P.

Поэтому, для того чтобы оператор $\mathcal{D}$ не зависел от способа нумерации частиц, т. е. был симметричным по отношению к любым перестановкам P, надо потребовать, чтобы

$$\mathcal{D}(PX,PX')=\mathcal{D}(X,X').$$

Следовательно, ввиду (1.7) условие симметрии оператора $\mathcal{D}$ по отношению к перестановкам P принимает вид

$$P\mathcal{D}P^{-1}=\mathcal{D}\quad\text{или}\quad P\mathcal{D}=\mathcal{D}P. \tag{1.3}$$

Таким образом, гамильтониан H, будучи симметричным, должен коммутировать со всеми перестановками P:

$$PH-HP=0, \tag{1.4}$$

которые, следовательно, оказываются интегралами движения.

б) Симметричность и антисимметричность. Возьмем какую-либо транспозицию T, т.е. перестановку только между двумя несовпадающими аргументами волновой функции, например i-м и j-м. Рассмотрим два случая.

1) Допустимые волновые функции симметричны. Тогда для любой транспозиции T среди аргументов $x_1, \ldots, x_N$ будет $T\varphi = \varphi$. Поскольку любая перестановка P среди N аргументов получается последовательным применением транспозиций, в данном случае для любого P также имеем

$$P\varphi = \varphi. \tag{1.5}$$

2) Допустимые волновые функции антисимметричны. Тогда $T\varphi = -\varphi$, и потому для любого P

$$P\varphi = (-1)^P \varphi, \tag{1.6}$$

где $(-1)^P = 1$, если перестановка P четная, т.е. состоит из четного числа транспозиций, и $(-1)^P = -1$, если P — нечетная, т.е. состоит из нечетного числа транспозиций.

Поскольку перестановки P являются интегралами движения, то если соотношения (1.10) или соотношения (1.11) выполняются для какого-то одного момента времени, они останутся справедливыми всегда. Таким образом, свойство симметрии волновых функций и свойство антисимметрии их не изменяются с течением времени. Отсюда возникают две возможности: для некоторых частиц всегда реализуются лишь симметричные состояния, а для других — только антисимметричные состояния.

Эти две возможности приводят к различным статистикам — *статистике Бозе*, принимающей в качестве допустимых лишь симметричные состояния, и *статистике Ферми*, принимающей в качестве допустимых лишь антисимметричные состояния. Как теперь установлено, все до сих пор известные частицы являются или бозонами, т.е. подчиняются статистике Бозе, или фермионами, подчиняющимися статистике Ферми. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только указанных двух случаев — случая 1) симметричных волновых функций φ системы одинаковых частиц и случая 2) антисимметричных волновых функций φ.

§ 3. Симметричные операторы

Скажем несколько слов по поводу возможной конструкции симметричных операторов.

а) Симметричные одночастичные операторы. Возьмем некоторый оператор A, действующий на функцию $\varphi(x)$ одного аргумента x, и обозначим через $A(x, x')$ соответствующую матрицу в X-представлении. Введем оператор A_j, представляющий собой тот же оператор A, только действующий на j-й аргумент. Полное матричное X-представление для A_j мы получим, умножая $A(x_j, x'_j)$ на единичную матрицу, действующую на остальные аргументы:

$$A_j(X, X') = A(x_j, x'_j) \prod_{i \neq j} \delta(x_i - x'_i). \tag{1.1}$$

Нетрудно заметить, что если среди групп аргументов $(x_1, \ldots, x_N)$, $(x'_1, \ldots, x'_N)$ мы совершим одну и ту же перестановку P, заменяющую x_j, x'_j

соответственно на $x_i, x'_i\,(i = Pj)$, то из $A_j(X, X')$ получим в результате $A_i(X, X')$:

$$A_j(PX, PX') = A_{Pj}(X, X') \tag{1.2}$$

или ввиду (1.7)

$$PA_jP^{-1} = A_{Pj}.$$

Следовательно,

$$P \sum_{1\leqslant j\leqslant N} A_jP^{-1} = \sum_{1\leqslant j\leqslant N} A_{Pj}. \tag{1.3}$$

Но какова бы ни была данная перестановка P, когда индекс j пробегает N значений: $j = 1, 2, \ldots, N$, индекс Pj пробегает те же значения, только в другом порядке. Поэтому

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant N} A_{Pj} = \sum_{1\leqslant j\leqslant N} A_j,$$

и, таким образом, оператор

$$\mathfrak{A} = \sum_{1\leqslant j\leqslant N} A_j \tag{1.4}$$

удовлетворяет условию симметрии

$$P\mathfrak{A}P^{-1} = \mathfrak{A}. \tag{1.5}$$

Операторы $\mathfrak{A}$ вида (1.15) условимся называть симметричными аддитивными операторами.

б) Симметричные двухчастичные операторы. Возьмем некоторый оператор B, действующий на функцию $\varphi(x, y)$ двух аргументов, и обозначим через $B(x, y; y', x')$ соответствующее матричное представление. Будем рассматривать только случай симметричных B, когда

$$B(x, y; y', x') = B(y, x; x'y'). \tag{1.6}$$

Введем оператор B_{j_1,j_2}, являющийся оператором B, действующим на j_1-й и j_2-й аргументы волновой функции $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$. Благодаря (1.17) $B_{j_1,j_2} = B_{j_2,j_1}$. Поэтому бинарный оператор

$$\mathfrak{B} = \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant N} B_{j_1,j_2} \tag{1.7}$$

можно представить также в форме

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2} \sum_{1\leqslant j_1\neq j_2\leqslant N} B_{j_1,j_2}. \tag{1.8}$$

Возьмем полное матричное представление $B_{j_1,j_2}(X, X')$, получающееся умножением матрицы $B(x_{j_1}, x_{j_2}; x'_{j_2}, x'_{j_1})$ на единичную матрицу по отношению к аргументам $(\ldots, x_i, \ldots)$ для $i \neq j_1, j_2$:

$$B_{j_1,j_2}(X, X') = B(x_{j_1}, x_{j_2}; x'_{j_2}, x'_{j_1}) \prod_{i\neq j_1,j_2} \delta(x_i - x'_i). \tag{1.9}$$

Отсюда, как и в случае операторов A, следует, что

$$B_{j_1,j_2}(PX, PX') = B_{Pj_1,Pj_2}(X, X'), \tag{1.10}$$

т. е.

$$PB_{j_1,j_2}P^{-1} = B_{Pj_1,Pj_2}.$$

Суммируя здесь по всем различным j_1, $j_2 = 1, \ldots, N$, получим благодаря (1.19)

$$P\mathfrak{B}P^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant N; \\ j_1 \neq j_2}} B_{Pj_1,Pj_2}. \tag{1.11}$$

Но когда индексы j_1 и j_2 пробегают все свои различные $N(N-1)$ значений, индексы Pj_1, Pj_2 пробегают те же значения, только в другом порядке, и потому из (1.22) следует

$$P\mathfrak{B}P^{-1} = \mathfrak{B}. \tag{1.12}$$

Итак, бинарный оператор (1.18) является симметричным.

в) Симметричные s-кратные операторы. Нетрудно будет несколько обобщить описанные построения и ввести в рассмотрение симметричные операторы «s-кратного» типа.

Пусть S будет некоторым симметричным оператором, действующим на функции $\varphi(y_1, \ldots, y_s)$ от s аргументов. Обозначим через

$$S_{j_1,\ldots,j_s}, \quad \begin{matrix} j_1 = 1, 2, \ldots, N \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ j_s = 1, 2, \ldots, N \end{matrix}, \quad j_\alpha \neq j_\beta, \tag{1.13}$$

тот же оператор S, только действующий соответственно на j_1-й, ..., j_s-й аргументы волновой функции $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$. Введем s-кратный оператор $\mathfrak{S}^{(s)}$, положив

$$\mathfrak{S}^{(s)} = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leqslant N} S_{j_1,\ldots,j_s}. \tag{1.14}$$

Так как S является симметричным оператором, выражение $S_{j_1,\ldots,j_s}$ инвариантно по отношению к любой перестановке между индексами $j_1, \ldots, j_s$. Поэтому оператор $\mathfrak{S}^{(s)}$ можно привести к форме

$$\mathfrak{S}^{(s)} = \frac{1}{s!} \sum_{\substack{1 \leqslant j_\alpha \leqslant N \\ j_\alpha \neq j_\beta}} S_{j_1,\ldots,j_s}. \tag{1.15}$$

Обозначим через $S(y_1, \ldots, y_s; y'_s, \ldots, y'_1)$ принятое матричное представление оператора S. Тогда, как и ранее,

$$S_{j_1,\ldots,j_s}(X, X') = S(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}; x'_{j_s}, \ldots, x'_{j_1}) \prod_{\substack{i \\ i \neq i_1,\ldots,i_s}} \delta(x_i - x'_i), \tag{1.16}$$

откуда

$$S_{j_1,\ldots,j_s}(PX, PX') = S_{Pj_1,\ldots,Pj_s}(X, X') \tag{1.17}$$

или

$$PS_{j_1,\ldots,j_s}P^{-1} = S_{Pj_1,\ldots,Pj_s}.$$

Ввиду (1.26) отсюда получим

$$P\mathfrak{S}^{(s)}P^{-1}=\frac{1}{s!}\sum_{\substack{1\leqslant j_\alpha\leqslant N\\ j_\alpha\neq j_\beta}}S_{Pj_1,\ldots,Pj_s}=\mathfrak{S}^{(s)}. \tag{1.18}$$

Итак, s-кратная динамическая величина, представленная выражением типа (1.25), будет симметричным оператором. Как видно, при $s=1$ она переходит в аддитивную величину, при $s=2$ — в бинарную.

§ 4. Некоторые соотношения

Установим сейчас, основываясь на соотношении (1.28), одно важное тождество, которое будет использоваться в дальнейшем. Пусть $\theta(X),\varphi(X)$ — какие-то две волновые функции: или обе симметричные, или обе антисимметричные. Тогда, очевидно, в обоих случаях

$$\theta(PX)\varphi(PX)=\theta(X)\varphi(X). \tag{1.1}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\theta(X)(\mathfrak{S}^{(s)}\varphi)_X dX=\int\theta(X)\mathfrak{S}^{(s)}(X,X')\varphi(X')dX'dX$$

или, учитывая представление (1.25),

$$\int\theta(X)(\mathfrak{S}^{(s)}\varphi)_X dX=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_s\leqslant N}\int\theta(X)S_{j_1,\ldots,j_s}(X,X')\varphi(X')dX'dX. \tag{1.2}$$

Возьмем какой-нибудь отдельный член в этой сумме и совершим в интеграле замену переменных $X\to PX$; $X'\to PX'$. Получим

$$\int\theta(X)S_{j_1,\ldots,j_s}(X,X')\varphi(X')dX'dX=\int\theta(PX)S_{j_1,\ldots,j_s}(PX,PX')\varphi(PX')dX'dX.$$

Отсюда и на основании формул (1.28) и (1.30) имеем

$$\int\theta(X)S_{j_1,\ldots,j_s}(X,X')\varphi(X')dX'dX=\int\theta(X)S_{Pj_1,\ldots,Pj_s}(X,X')\varphi(X')dX'dX.$$

Здесь P — произвольная перестановка среди $(1,2,\ldots,N)$. Выберем ее для данных индексов $j_1,\ldots,j_s$ так, чтобы $Pj_1=1$, $Pj_2=2,\ldots,Pj_s=s$. Таким образом, убеждаемся, что все члены в сумме (1.31) одинаковы и равны

$$\int\theta(X)S_{1,2,\ldots,s}(X,X')\varphi(X')dX'dX.$$

Поскольку число различных $j_1,j_2,\ldots,j_s$, удовлетворяющих неравенствам $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_s\leqslant N$, есть $N(N-1)\ldots(N-s+1)/s!$, находим окончательно

$$\int\theta(X)(\mathfrak{S}^{(s)}\varphi)_X dX=\frac{N(N-1)\ldots(N-s+1)}{s!}\times$$
$$\times\int\theta(X)S_{1,2,\ldots,s}(X,X')\varphi(X')dX'dX. \tag{1.3}$$

Запишем это тождество в более развернутой форме. Учитывая выражение (1.27) для $S_{1,\dots,s}(X, X')$, имеем

$$\int \theta(x_1, \dots, x_N)(\mathfrak{S}^{(s)}\varphi)_{x_1,\dots,x_N}\, dx_1 \dots dx_N =$$
$$= \frac{N(N-1)\dots(N-s+1)}{s!} \int \theta(x_1, \dots, x_N) S(x_1, \dots, x_s; x'_s, \dots, x'_1) \times$$
$$\times \varphi(x'_1, \dots, x'_s; x_{s+1}, \dots, x_N)\, dx'_1 \dots dx'_s\, dx_1 \dots dx_N. \quad (1.4)$$

Отсюда, взяв $s = 1$, получим для аддитивных операторов

$$\int \theta(x_1, \dots, x_N)(\mathfrak{A}\varphi)_{x_1,\dots,x_N}\, dx_1 \dots dx_N =$$
$$= N \int \theta(x_1, \dots, x_N) A(x_1; x'_1) \varphi(x'_1; x_2, \dots, x_N)\, dx'_1\, dx_1 \dots dx_N. \quad (1.5)$$

При $s = 2$ для бинарных операторов будем иметь

$$\int \theta(x_1, \dots, x_N)(\mathfrak{B}\varphi)_{x_1,\dots,x_N}\, dx_1 \dots dx_N = \frac{N(N-1)}{2} \int \theta(x_1, \dots, x_N) \times$$
$$\times B(x_1, x_2; x'_2, x'_1) \varphi(x'_1, x'_2; x_3, \dots, x_N)\, dx'_1\, dx'_2\, dx_1 \dots dx_N. \quad (1.6)$$

Соотношения (1.33)–(1.35) будут использованы далее для преобразования динамических переменных к представлению вторичного квантования.

§ 5. Гамильтониан

Обратимся теперь к гамильтониану H. В обычных задачах квантовой механики гамильтониан H системы одинаковых частиц состоит из аддитивной симметричной суммы индивидуальных энергий частиц и бинарной симметричной суммы энергий взаимодействия различных пар частиц:

$$H = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} T_j + \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant N} U_{j_1, j_2}. \quad (1.1)$$

Матрицы

$$T(x_1, x'_1), \quad U(x_1, x_2; x'_2, x'_1), \quad (1.2)$$

определяющие одночастичный T и парный U операторы, должны обладать свойством самосопряженности:

$$T^*(x_1, x'_1) = T(x'_1, x_1), \quad U^*(x_1, x_2; x'_2, x'_1) = U(x'_1, x'_2; x_2, x_1),$$

обеспечивающим эрмитовость гамильтониана H.

Весьма важным часто рассматриваемым случаем является случай гамильтониана вида

$$H = -\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{q_j} + \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant N} \Phi(q_{j_1} - q_{j_2}), \quad (1.3)$$

состоящего из аддитивной суммы кинетических энергий частиц и из бинарной суммы не зависящих от спина потенциальных энергий пар. Эта потенциальная

энергия взаимодействия характеризуется вещественной функцией, инвариантной по отношению к отражению:

$$\Phi(q) = \Phi(-q). \tag{1.4}$$

Как видно, такой гамильтониан (1.38) является симметричным оператором рассмотренной выше конструкции, причем для него функциями (1.37) будут соответственно

$$T(x, x') = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_q \delta(x - x') = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_q \delta(q - q')\delta(\nu - \nu'),$$

$$U(x_1, x_2; x_2', x_1') = \Phi(q_1 - q_2)\delta(x_1 - x_1')\delta(x_2 - x_2') =$$

$$= \Phi(q_1 - q_2)\delta(q_1 - q_1')\delta(q_2 - q_2')\delta(\nu_1 - \nu_1')\delta(\nu_2 - \nu_2'). \tag{1.5}$$

Если такая динамическая система находится во внешнем поле, характеризуемом потенциальной энергией $U(q)$, то к выражению (1.38) надо добавить еще аддитивный член вида

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} U(q_j). \tag{1.6}$$

По поводу гамильтониана типа (1.36) заметим в заключение, что вообще было бы возможно ввести в него еще тройные, четверные и тому подобные взаимодействия, но этого обычно не делают, так как уже учет одних лишь бинарных взаимодействий приводит к исключительно трудным задачам, которые, как правило, пытаются решать лишь с помощью различных приближенных методов.

Глава II

ПЕРЕХОД ОТ НЕПРЕРЫВНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ К ДИСКРЕТНОМУ. ВВЕДЕНИЕ ЧИСЕЛ ЗАПОЛНЕНИЯ

§ 1. Представления волновых функций

а) Дискретное f-представление. Чтобы ввести понятие чисел заполнения более наглядным образом, целесообразно перейти для волновых функций

$$\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_N) \tag{2.1}$$

от непрерывного X-представления к дискретному.

Выберем для этого систему функций

$$\varphi_k(q), \tag{2.2}$$

заданных во всем трехмерном пространстве аргументов q, зависящую от дискретного индекса k и обладающую свойствами ортонормированности

и полноты:

$$\int \varphi_k^*(q)\varphi_{k'}(q)dq = \delta(k-k'), \tag{2.3}$$

$$\sum_k \varphi_k(q)\varphi_k^*(q') = \delta(q-q'). \tag{2.4}$$

В качестве системы (2.2) можно взять, например, систему собственных функций для трехмерного гармонического осциллятора. В этом случае индекс k характеризуется совокупностью трех целых чисел.

Рассмотрим теперь разложение Фурье для волновой функции $\varphi(x) = \varphi(q, \nu)$ одного аргумента x. Имеем

$$\varphi(x) = \sum_k \varphi_k(q) \int \varphi(q,\nu)\varphi_k^*(q)dq =$$

$$= \sum_{k,\sigma} \varphi_k(q)\delta(\nu-\sigma)\left\{\sum_\nu \int \varphi(q,\nu)\delta(\nu-\sigma)\varphi_k^*(q)dq\right\}. \tag{2.5}$$

Полагая

$$f = (k,\sigma); \quad \psi_f(x) = \varphi_k(q)\delta(\nu-\sigma), \tag{2.6}$$

получаем

$$\varphi(x) = \sum_f \psi_f(x) \int \varphi(x)\psi_f^*(x)\,dx. \tag{2.7}$$

Как видим, система (2.6) будет ортонормированной и полной:

$$\int \psi_f^*(x)\psi_{f'}(x)\,dx = \delta(f-f'), \tag{2.8}$$

$$\sum_f \psi_f(x)\psi_f^*(x') = \delta(x-x'). \tag{2.9}$$

Применяя разложение (2.7) к каждому из аргументов x_j волновой функции (2.1), будем иметь

$$\varphi(x_1,\ldots,x_N) = \sum_{f_1,\ldots,f_N} F(f_1,\ldots,f_N)\psi_{f_1}(x_1)\ldots\psi_{f_N}(x_N), \tag{2.10}$$

где

$$F(f_1,\ldots,f_N) = \int \varphi(x_1,\ldots,x_N)\psi_{f_1}^*(x_1)\ldots\psi_{f_N}^*(x_N)\,dx_1\ldots dx_N. \tag{2.11}$$

Ясно, что $F(f_1,\ldots,f_N)$ будет волновой функцией рассматриваемой динамической системы в дискретном «f-представлении». Из определения (2.11) нетрудно заключить также, что если φ симметрична, то и F симметрична, а если φ антисимметрична, то и F антисимметрична. Разложение (2.10) показывает справедливость и обратного утверждения: из симметрии F следует симметрия φ и из антисимметрии F вытекает антисимметрия φ. Таким образом, свойства симметрии и антисимметрии будут одинаковыми для обоих представлений волновой функции.

б) Дискретное импульсное представление. В ряде случаев, особенно для задач статистической механики динамических систем с гамильтонианом (1.38), оказывается удобным использовать дискретное импульсное представление. Чтобы сделать импульсное представление дискретным, прибегают к следующему искусственному приему. Рассматривается ситуация, в которой все частицы динамической системы находятся внутри конечного большого объема V:

$$-\frac{L}{2} < q^{(\alpha)} < \frac{L}{2}; \quad \alpha = 1,2,3, \quad V = L^3. \tag{2.12}$$

В качестве граничных условий выбирают так называемые циклические граничные условия, т. е. условия периодичности волновых функций (2.1) по каждой из пространственных координат с периодом L:

$$\mathcal{D}_j^{(\alpha)}\varphi = \varphi, \quad j = 1,2,\ldots,N, \quad \alpha = 1,2,3, \tag{2.13}$$

где $\mathcal{D}_j^{(\alpha)}$ — оператор, заменяющий $q_j^{(\alpha)}$ на $q_j^{(\alpha)} + L$ и оставляющий все остальные координаты в выражении φ неизменными.

Тогда в качестве системы функций (2.2) можно принять

$$\varphi_k(q) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(k\cdot q)}, \tag{2.14}$$

$$k = \left(\frac{2\pi n^{(1)}}{L}, \frac{2\pi n^{(2)}}{L}, \frac{2\pi n^{(3)}}{L}\right), \quad V = L^3, \tag{2.15}$$

где $n^{(\alpha)}$ — целые числа, принимающие все значения между $-\infty$ и $+\infty$. Полученная система функций (2.14) с дискретным импульсом $p = \hbar k$, очевидно, будет ортонормированной и полной в объеме V (2.12). Иначе говоря, в соотношениях (2.3) мы должны проводить интегрирование не по всему трехмерному пространству, а лишь по всему «основному объему» V. В соотношениях (2.4) мы должны теперь подразумевать, что точки q и q' лежат внутри V.

Вводя функции $\psi_f(x)$ по формуле (2.6), сделаем аналогичные замечания и в отношении равенств (2.8), (2.9), (2.11). Вообще подчеркнем, не оговаривая этого в дальнейшем, что в принятом дискретном импульсном представлении интегрирование по пространственным переменным совершается лишь по объему V.

в) Периодичность. Скажем еще несколько слов по поводу условий периодичности (2.13). Эти условия будут совместны с уравнением Шредингера, если H коммутирует со всеми $\mathcal{D}_j^{(\alpha)}$:

$$[\mathcal{D}_j^{(\alpha)}, H] = 0. \tag{2.16}$$

Действительно, в этом случае $\mathcal{D}_j^{(\alpha)}$ будут интегралами движения, и потому, если условия периодичности (2.13) выполняются в какой-то один момент времени, они будут выполняться и для всех t. Но оператор кинетической энергии

$$-\sum_{1\leqslant j\leqslant N} \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{q_j},$$

входящий в H, очевидно, коммутирует со всеми операторами трансляций координат. Если бы $\Phi(q)$ была периодической функцией координат с периодом L,

то, очевидно, и потенциальная энергия

$$U = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant N} \Phi(q_{j_1} - q_{j_2})$$

была бы периодической функцией координат $q_j^{(\alpha)}$ с периодом L. Но тогда, взяв любую функцию

$$\Phi = \Phi(q_1, \nu_1; q_2, \nu_2; \ldots; q_N, \nu_N),$$

мы получим

$$\mathcal{D}_j^{(\alpha)} U \Phi = U \mathcal{D}_j^{(\alpha)} \Phi,$$

т. е. $\mathcal{D}_j^{(\alpha)}$ коммутирует с U, а тем самым и с H, и условия (2.16) выполняются.

Здесь мы сталкиваемся с некоторой формальной трудностью. Дело в том, что на самом деле $\Phi(q)$ есть функция, стремящаяся к нулю при $|q| \to \infty$. Нам надо, следовательно, построить для $\Phi(q)$ аппроксимирующее ее при $L \to \infty$ выражение, которое при конечном L обладало бы указанным свойством периодичности.

Для этого возьмем интегральное представление Фурье:

$$\Phi(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(k \cdot q)} f(k) dk, \tag{2.17}$$

в котором

$$f(k) = \int \Phi(q) e^{-i(k \cdot q)} dq, \tag{2.17a}$$

причем интегрирование в (2.17а) производится по всему трехмерному пространству. Заменим теперь интеграл в формуле (2.17) суммой, взятой по решетке (2.15). Поскольку для нее

$$\Delta k^{(1)} \Delta k^{(2)} \Delta k^{(3)} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 = \frac{(2\pi)^3}{V},$$

напишем вместо (2.17)

$$\Phi(q) = \frac{1}{V} \sum_k e^{i(k \cdot q)} f(k). \tag{2.18}$$

Это выражение уже будет периодической функцией координат $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$ с периодом L.

г) Термодинамический предел. Квазидискретное представление. Итак, чтобы сделать наложенные условия периодичности для волновых функций совместными с уравнением Шредингера, следует заменить интегральное представление (2.17) для потенциальной функции $\Phi(q)$ соответствующей дискретной суммой (2.18). Чтобы устранить искусственность такой замены, как и вообще нефизичность требования периодичности волновых функций, всегда следует иметь в виду предельный переход $V \to \infty$, когда объем V (2.12) распространяется на все трехмерное пространство и дискретная сумма (2.18) переходит в правильное интегральное представление (2.17) для потенциальной функции.

Подчеркнем, что при $V \to \infty$ следует устремить к бесконечности также и число частиц N таким образом, чтобы плотность числа частиц на единицу

объема в пределе была конечной величиной, отличной от нуля:

$$V \to \infty, \quad N \to \infty, \quad \rho = \frac{N}{V} \to \text{const}. \tag{2.19}$$

Так как в процессе этого предельного перехода спектр волновых векторов k приближается к непрерывному, рассматриваемое импульсное представление называется также *квазидискретным представлением*.

Отметим, что предельный переход (2.19) в задачах статистической механики следует всегда иметь в виду . В этих задачах физический смысл имеют, как правило, лишь величины, вычисляемые в пределе (2.19), который здесь мы будем называть *термодинамическим пределом*.

§ 2. Числа заполнения

а) Определения. После этих замечаний рассмотрим волновые функции $F(f_1, \ldots, f_N)$ в дискретном f-представлении в любом из случаев — или в случае истинного дискретного представления, или в случае квазидискретного импульсного представления, но в этом последнем — до перехода к пределу $V \to \infty$. В обоих этих случаях f характеризуется конечным набором целых чисел, например тремя целыми числами и спиновым индексом ν.

Множество $(\ldots, f, \ldots)$ всех f является, как говорят в математике, счетным множеством. Поэтому можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и натуральным рядом

$$f \leftrightarrow \lambda, \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.1}$$

Короче говоря, счетное множество можно занумеровать одним индексом $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Отсюда вытекает, что можно полностью упорядочить множество f, т. е. так определить понятие «больше» (>) или «меньше» (<), что для любых двух $f \neq f'$ будет или $f > f'$, или $f < f'$. Именно будем говорить, что $f > f'$, если для соответствующих по (2.20) λ будет $\lambda > \lambda'$, и, наоборот, $f < f'$ при $\lambda < \lambda'$. Разумеется, такое упорядочение зависит от способа нумерации f и потому неоднозначно. Нам, однако, достаточно иметь дело с упорядочением, основанным на какой-то данной фиксированной системе соответствия (2.20).

Как уже отмечалось, волновые функции в f-представлении будут или симметричными (для случая системы одинаковых бозонов), или антисимметричными (для случая системы одинаковых фермионов). В обоих этих случаях вместо аргументов $f_1, \ldots, f_N$ введем набор чисел заполнения $(\ldots, n_f, \ldots)$, положив

$$n_f = 0, \text{ если } f \text{ отсутствует среди } f_1, f_2, \ldots, f_N,$$

$$n_f = m, \text{ если } f \text{ встречается } m \text{ раз среди } f_1, \ldots, f_N.$$

Так как всего f_j в наборе $(f_1, \ldots, f_N)$ будет N, то

$$\sum_f n_f = N. \tag{2.2}$$

В случае фермионов функция $F(f_1, \ldots, f_N)$ вследствие свойства антисимметрии обращается в нуль, если среди $(f_1, \ldots, f_N)$ будет хотя бы одна пара

равных f_j. Следовательно, в этом случае мы можем считать, что все $f_1, \ldots, f_N$ различны между собой. Но тогда какое-либо значение f_j может встречаться среди $f_1, \ldots, f_N$ не более одного раза, ввиду чего

$$n_{f_j} = 0, 1 \quad \text{(ферми-статистика)}. \tag{2.3}$$

В случае же статистики Бозе функция $F(f_1, \ldots, f_N)$ является симметричной, и потому надлежит рассматривать произвольные наборы $(f_1, \ldots, f_N)$, в том числе и такие, у которых некоторые из f_j равны между собой. Следовательно, здесь числа заполнения могут принимать произвольные значения, согласующиеся с (2.21):

$$n_{f_j} = 0, 1, 2, 3, \ldots, N \quad \text{(бозе-статистика)}. \tag{2.4}$$

Ясно, что задание набора $(f_1, \ldots, f_N)$ однозначно определяет соответствующий набор чисел заполнения $(\ldots, n_f, \ldots)$, удовлетворяющий условию (2.21). Возьмем теперь, наоборот, некоторый набор чисел заполнения $(\ldots, n_f, \ldots)$, удовлетворяющий условию (2.21), и рассмотрим все те наборы $(f_1, \ldots, f_N)$, для которых

$$(f_1, \ldots, f_N) \backsim (\ldots, n_f, \ldots), \tag{2.5}$$

т. е. для которых $(\ldots, n_f, \ldots)$ является соответствующим набором чисел заполнения.

Возьмем все те f_j, для которых n_{f_j} отличны от нуля: $f_j = g_1, \ldots, g_s$; нумерацию здесь выберем «в порядке возрастания g», т. е. $g_1 < \ldots < g_s$. Таким образом, $n_{g_j} \geqslant 1$, $j = 1, 2, \ldots, s$; из (2.21) видим, что $s \leqslant N$.

Как следует из самого определения чисел заполнения, в наборе $f_1, \ldots, f_N$ из (2.24) n_{g_1} элементов будут равны g_1, а, например, n_{g_s} элементов будут равны g_s. Любое распределение N элементов $f_1, \ldots, f_N$ по s группам $g_1, g_2, \ldots$ соответственно из $n_{g_1}, n_{g_2}, \ldots$ элементов приводит к тому же набору чисел заполнения $(\ldots, n_f, \ldots)$. Таким образом, данный набор чисел заполнения $(\ldots, n_f, \ldots)$ определяет $(f_1, \ldots, f_N)$ с точностью до перестановок между N элементами по s группам из $n_{g_1}, \ldots, n_{g_s}$ элементов, и потому число $\mathfrak{N}(\ldots, n_f, \ldots)$ всех возможных $(f_1, \ldots, f_N)$, соответствующих $(\ldots, n_f, \ldots)$, равно

$$\mathfrak{N}(\ldots, n_f, \ldots) = \sum_{(f_1, \ldots, f_N) \backsim (\ldots, n_f, \ldots)} 1 = \frac{N!}{n_{g_1}! \ldots n_{g_s}!}. \tag{2.6}$$

Поскольку $0! = 1!$, можно написать также

$$\mathfrak{N}(\ldots, n_f, \ldots) = \frac{N!}{\prod_f n_f!}. \tag{2.7}$$

б) Бозоны. В случае статистики Бозе функция $F(f_1, \ldots, f_N)$ не меняется от перестановок между $(f_1, \ldots, f_N)$ и, следовательно, ее значения однозначно задаются набором чисел заполнения. Можно поэтому ввести в рассмотрение волновые функции как функции $C(\ldots, n_f, \ldots)$ от чисел заполнения. Определим их следующим образом:

а) для $\sum_f n_f = N$

$$C(\ldots, n_f, \ldots) = \sqrt{\mathfrak{N}(\ldots, n_f, \ldots)}\, F(f_1, \ldots, f_N), \tag{2.27a}$$

где $(f_1, \ldots, f_N) \backsim (\ldots, n_f, \ldots)$;

б) для $\sum_f n_f \neq N$

$$C(\ldots, n_f, \ldots) = 0. \tag{2.27б}$$

Заметим прежде всего, что благодаря условию *б* числа $\ldots, n_f, \ldots$ можно рассматривать как независимые аргументы, способные принимать любые значения из натурального ряда $n_f = 0, 1, 2, \ldots$. Ясно далее, что симметричная функция $F(f_1, \ldots, f_N)$ полностью определяет функцию $C(\ldots, n_f, \ldots)$ и, наоборот, любая функция C от чисел заполнения, удовлетворяющая условию (2.27б), однозначно определяет симметричную функцию $F(f_1, \ldots, f_N)$. Такое взаимно однозначное соответствие будем записывать для краткости в форме $F \leftrightarrow C$.

Заметим, наконец, что нормировочный множитель $\sqrt{\mathfrak{N}}$ введен в определение (2.27а), чтобы сохранить скалярное произведение при переходе от F к C, поскольку число различных наборов $(f_1, \ldots, f_N)$, соответствующих одному данному набору чисел заполнения, как раз и равно $\mathfrak{N}$. В самом деле, перестроив сумму по $(f_1, \ldots, f_N)$ в скалярном произведении

$$(F_1, F_2) = \sum_{f_1, \ldots, f_N} F_1^*(f_1, \ldots, f_N) F_2(f_1, \ldots, f_N) \tag{2.28}$$

к сумме по наборам чисел заполнения:

$$\sum_{f_1, \ldots, f_N} = \sum_{\substack{\ldots, n_f, \ldots \\ \sum n_f = N}} \sum_{(f_1, \ldots, f_N) \backsim (\ldots, n_f, \ldots)}, \tag{2.29}$$

видим, учитывая (2.27а), что все члены в сумме

$$\sum_{\substack{f_1, \ldots, f_N \\ (f_1, \ldots, f_N) \backsim (\ldots, n_f, \ldots)}} \tag{2.30}$$

равны произведению

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{N}}}\right)^2 C_1^*(\ldots, n_f, \ldots) C_2(\ldots, n_f, \ldots),$$

где C_1, C_2 — соответствующие функциям F_1, F_2 волновые функции в представлении чисел заполнения, а число таких членов в (2.30) равно $\mathfrak{N}$. Таким образом, число $\mathfrak{N}$ компенсирует квадрат множителя $1/\sqrt{\mathfrak{N}}$ и, следовательно,

$$(F_1, F_2) = (C_1, C_2). \tag{2.31}$$

Итак, видно, что введение нормировочного множителя в определение (2.27а) действительно обеспечивает неизменность скалярного произведения при переходе от волновых функций F к соответствующим волновым функциям C.

в) Фермионы. Рассмотрим теперь случай статистики Ферми. Как уже отмечалось, в этом случае числа заполнения могут принимать значения 0, 1. Поэтому $\mathfrak{N} = N!$. Возьмем какой-либо набор чисел заполнения, для которого

$$\sum_f n_f = N, \tag{2.32}$$

и рассмотрим те f, для которых $n_f > 0$, т. е. $n_f = 1$. Их число благодаря (2.20) будет равно N. Занумеруем эти f «в порядке возрастания»:

$$f = g_1, g_2, \ldots, g_N, \quad g_1 < g_2 < g_3 < \ldots < g_N. \tag{2.33}$$

Ясно, что не только данный набор чисел заполнения $(\ldots, n_f, \ldots)$ (с условием (2.20)) однозначно определяет набор (2.33), но и наоборот, так что

$$(g_1 < \ldots < g_N) \leftrightarrow (\ldots, n_f, \ldots). \tag{2.34}$$

По аналогии со случаем статистики Бозе введем волновые функции в представлении чисел заполнения, положив по определению:

а) для $\sum\limits_f n_f = N$

$$C(\ldots, n_f, \ldots) = \sqrt{N!}\, F(g_1, \ldots, g_N), \tag{2.35а}$$

где $(g_1 < \ldots < g_N) \leftrightarrow (\ldots, n_f, \ldots)$;

б) для $\sum\limits_f n_f \neq N$

$$C(\ldots, n_f, \ldots) = 0. \tag{2.35б}$$

Благодаря условию *б* мы можем рассматривать $\ldots, n_f, \ldots$ как независимые аргументы, способные принимать два значения: 0, 1.

Точно так же, как и в случае статистики Бозе, в рассматриваемом случае статистики Ферми нетрудно убедиться, что из-за включения в (2.35а) нормировочного множителя $\sqrt{\mathfrak{N}} = \sqrt{N!}$ скалярное произведение остается неизменным при переходе от функций F к соответствующим функциям C. Все дело в том, что произведение двух антисимметричных функций является симметричной функцией, так что

$$F_1^*(f_1, \ldots, f_N) F_2(f_1, \ldots, f_N) = F_1^*(g_1, \ldots, g_N) F_2(g_1, \ldots, g_N)$$

для

$$(f_1, \ldots, f_N) \backsim (\ldots, n_f, \ldots) \leftrightarrow (g_1, \ldots, g_N).$$

Глава III

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ БОЗОНОВ И ФЕРМИОНОВ

Чтобы преобразовать динамические переменные, представленные операторами, действующими на обычные волновые функции, к операторам, действующим на волновые функции $C(\ldots, n_f, \ldots)$, целесообразно ввести в рассмотрение так называемые квантованные амплитуды Бозе или Ферми.

§ 1. Случай статистики Бозе

а) Операторы a, $\overset{+}{a}$. При исследовании задач об одномерном гармоническом осцилляторе вводятся операторы $a, \overset{+}{a}$, действующие на волновые функции $f(n)$ от целочисленного аргумента $n = 0, 1, 2, \ldots$, по формулам

$$(af)_n = \sqrt{n+1}\, f(n+1), \quad (\overset{+}{a} f)_n = \sqrt{n}\, f(n-1). \tag{3.1}$$

В матричном представлении

$$(a)_{n,n'} = \sqrt{n+1}\,\delta(n+1-n') = \sqrt{n'}\,\delta(n'-1-n),$$
$$(\overset{+}{a})_{n,n'} = \sqrt{n'+1}\,\delta(n'+1-n) = \sqrt{n}\,\delta(n-1-n'). \tag{3.2}$$

Рассмотрим волновую функцию $f_m(n)$, для которой оператор $n = \overset{+}{a}, a$ имеет определенное фиксированное собственное значение m:

$$(n-m)f_m(n) = 0.$$

Имеем тогда

$$f_m(n) = \mathcal{K}\delta(n-m),$$

где $\mathcal{K}$ — некоторая постоянная. Поэтому ввиду (3.1)

$$(af_m)_n = \sqrt{n+1}\,\mathcal{K}\delta(n+1-m) = \sqrt{n+1}\,f_{m-1}(n),$$
$$(\overset{+}{a}f_m)_n = \sqrt{n}\,\mathcal{K}\delta(n-1-m) = \sqrt{n}\,f_{m+1}(n).$$

Таким образом, оператор a уменьшает число m на единицу, а оператор $\overset{+}{a}$ увеличивает это число на единицу. Нетрудно заметить также, что всегда

$$(a\overset{+}{a}f)_n = (n+1)f(n),$$
$$(\overset{+}{a}af)_n = nf(n)$$

или

$$\overset{+}{a}a = n, \tag{3.3}$$

$$a\overset{+}{a} - \overset{+}{a}a = 1. \tag{3.4}$$

Выберем волновую функцию

$$f_0(n) = \delta(n), \tag{3.5}$$

соответствующую нулевому собственному значению оператора $\overset{+}{a}a = n$. На основании (3.1) имеем

$$(af_0)_n = \sqrt{n+1}\,\delta(n+1),$$

т. е.

$$af_0 = 0. \tag{3.6}$$

Далее, благодаря (3.1) имеем

$$\overset{+}{a}f_0 = \sqrt{n}\,\delta(n-1) = \delta(n-1),$$
$$(\overset{+}{a})^2 f_0 = \sqrt{n}\,\sqrt{n-1}\,\delta(n-2) = \sqrt{2}\,\delta(n-2), \tag{3.7}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\overset{+}{a})^m f_0 = \sqrt{m!}\,\delta(n-m).$$

б) Квантовые бозе-операторы a_f, $\overset{+}{a}_f$. После этих предварительных замечаний перейдем к рассмотрению волновых функций

$$C(\ldots, n_g, \ldots), \tag{3.8}$$

зависящих от набора чисел заполнения $(\ldots, n_g, \ldots)$. Введем операторы a_f, $\overset{+}{a}_f$, являющиеся теми же операторами a, $\overset{+}{a}$, действующими *только на f-е число* заполнения n_f. Поэтому на основании (3.3), (3.4) имеем

$$\overset{+}{a}_f a_f = n_f, \tag{3.9}$$

$$a_f \overset{+}{a}_f - \overset{+}{a}_f a_f = 1. \tag{3.10}$$

Заметим далее, что a_f, $\overset{+}{a}_f$ и $a_{f'}$, $\overset{+}{a}_{f'}$ при $f \neq f'$ действуют на разные аргументы волновой функции C, и потому они коммутируют между собой. Таким образом,

$$a_f a_{f'} - a_{f'} a_f = 0, \quad \overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{f'} - \overset{+}{a}_{f'} \overset{+}{a}_f = 0. \tag{3.11}$$

Поскольку эти равенства тривиальны при $f = f'$, они имеют место для всех f, f'. Далее, a_f коммутирует с $\overset{+}{a}_{f'}$ при $f \neq f'$, а при $f = f'$ имеем (3.10). Следовательно,

$$a_f \overset{+}{a}_{f'} - \overset{+}{a}_{f'} a_f = \delta(f - f'). \tag{3.12}$$

Введенные операторы с перестановочными соотношениями (3.11), (3.12) называются *квантовыми бозе-операторами*. Так как $\overset{+}{a}_f$ увеличивает значение n_f на единицу, а a_f уменьшает это значение на единицу, $\overset{+}{a}_f$ можно называть *амплитудами рождения*, а a_f — *амплитудами уничтожения*.

в) Волновые функции. Рассмотрим вакуумную волновую функцию

$$C_{\text{vac}} = \prod_g \delta(n_g), \quad (C_{\text{vac}}, C_{\text{vac}}) = 1 \tag{3.13}$$

или, в обозначениях Дирака,

$$C_{\text{vac}} = |0\rangle. \tag{3.14}$$

Как видно, для C_{vac} все n_f имеют значения, равные нулю. Ввиду (3.6) ясно, что для всех f будет

$$a_f C_{\text{vac}} = 0. \tag{3.15}$$

Учитывая (3.7), видим также, что

$$(\overset{+}{a}_f)^m C_{\text{vac}} = \sqrt{m!}\, \delta(n_f - m) \prod_{g \neq f} \delta(n_g). \tag{3.16}$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\overset{+}{a}_{f_1} \ldots \overset{+}{a}_{f_N} C_{\text{vac}} \tag{3.17}$$

и обозначим через $(\ldots, n'_f, \ldots)$ набор чисел заполнения, соответствующий набору $(f_1, \ldots, f_N)$:

$$(\ldots, n'_f, \ldots) \backsim (f_1, \ldots, f_N), \quad \sum_f n'_f = N. \tag{3.18}$$

Так как все операторы $\overset{+}{a}_{f_j}$ коммутируют между собой, выражение (3.17) инвариантно по отношению ко всем перестановкам между $(f_1, \ldots, f_N)$, и тем самым можно представить (3.17) в виде

$$\overset{+}{a}_{f_1} \ldots \overset{+}{a}_{f_N} C_{\text{vac}} = \left\{ \prod_f (\overset{+}{a}_f)^{n'_f} \right\} C_{\text{vac}}. \tag{3.19}$$

Умножение здесь совершается по тем f, которые встречаются среди $f_1, \ldots, f_N$. Но для остальных f будет $n'_f = 0$, и оператор $(\overset{+}{a}_f)^{n'_f}$ оказывается единичным. Поэтому мы можем распространить умножение в (3.19) вообще на все f. Тогда благодаря (3.16) имеем

$$\overset{+}{a}_{f_1} \ldots \overset{+}{a}_{f_N} C_{\text{vac}} = \left\{ \prod_f \sqrt{n'_f!} \right\} \prod_g \delta(n_g - n'_g). \tag{3.20}$$

С помощью этого тождества можно представить выражения (2.27) для функции C через $F(f_1, \ldots, f_N)$ как линейную комбинацию из выражений вида (3.20). Действительно, учитывая (2.27б), имеем

$$C(\ldots, n_f, \ldots) = \sum_{\substack{\ldots, n'_f, \ldots \\ \sum_f n'_f = N}} C(\ldots, n'_f, \ldots) \prod_g \delta(n_g - n'_g),$$

т. е.

$$C(\ldots, n_f, \ldots) = \sum_{\substack{\ldots, n'_f, \ldots \\ \sum_f n'_f = N}} \frac{C(\ldots, n'_f, \ldots)}{\prod_f \sqrt{n'_f!}} \overset{+}{a}_{f_1} \ldots \overset{+}{a}_{f_N} C_{\text{vac}}, \tag{3.21}$$

$$(f_1, \ldots, f_N) \backsim (\ldots, n_f, \ldots).$$

Перестроим здесь суммирование по $(\ldots, n'_f, \ldots)$ в суммирование по $f_1, \ldots, f_N$. Так как число различных наборов $(f_1, \ldots, f_N)$, соответствующих одному и тому же набору чисел заполнения $(\ldots, n'_f, \ldots)$, равно

$$\mathfrak{N}(\ldots, n'_f, \ldots) = \frac{N!}{\prod_f n'_f!},$$

то на основании (2.27а) можно представить (3.21) в форме

$$C(\ldots, n_f, \ldots) = \sum_{f_1, \ldots, f_N} \frac{1}{\mathfrak{N}(\ldots, n'_f, \ldots)} \frac{\sqrt{\mathfrak{N}(\ldots, n'_f, \ldots)}}{\prod_f \sqrt{n'_f!}} \times$$

$$\times F(f_1, \ldots, f_N) \overset{+}{a}_{f_1} \ldots \overset{+}{a}_{f_N} C_{\text{vac}},$$

где с учетом формулы (2.26)[1]

$$\frac{1}{\mathfrak{N}(\ldots, n'_f, \ldots)} \frac{\sqrt{\mathfrak{N}(\ldots, n'_f, \ldots)}}{\sqrt{\prod_f n'_f!}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{N}(\ldots, n'_f, \ldots)} \sqrt{\prod_f n'_f!}} = \frac{1}{\sqrt{N!}}.$$

Таким образом, получим окончательное выражение для волновой функции в представлении чисел заполнения через волновую функцию в «f-представлении»:

$$C(\ldots, n_f, \ldots) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{f_1, \ldots, f_N} F(f_1, \ldots, f_N) \overset{+}{a}_{f_1} \ldots \overset{+}{a}_{f_N} C_{\text{vac}}. \tag{3.22}$$

§ 2. Случай статистики Ферми

а) Операторы σ, $\overset{+}{\sigma}$. Как известно, при рассмотрении состояний со спином $1/2$ вводятся матрицы $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, действующие на двухкомпонентный вектор, или, что то же самое, на функцию $f(n)$ аргумента n, принимающего только два значения: $n = 0$, $n = 1$.

Обозначим соответствующие операторы через σ, $\overset{+}{\sigma}$:

$$(\sigma)_{n,n'} = \delta(n) \cdot \delta(n' - 1), \quad (\overset{+}{\sigma})_{n,n'} = \delta(n - 1) \cdot \delta(n'). \tag{3.1}$$

Из такого определения сразу следует, что

$$\sigma(-1)^n + (-1)^n \sigma = 0, \quad \overset{+}{\sigma}(-1)^n + (-1)^n \overset{+}{\sigma} = 0. \tag{3.2}$$

Далее, из формул (3.23) видим, что

$$(\sigma f)_n = \delta(n) \cdot f(1), \quad (\overset{+}{\sigma} f)_n = \delta(n - 1) \cdot f(0). \tag{3.3}$$

Поэтому, если выбрать волновую функцию

$$f_0(n) = \delta(n),$$

для которой число n равно нулю, то

$$\sigma f_0 = 0, \quad \overset{+}{\sigma} f_0 = \delta(n - 1). \tag{3.4}$$

Если же выбрать волновую функцию

$$f_1(n) = \delta(n - 1),$$

для которой число n равно единице, то

$$\sigma f_1 = \delta(n), \quad \overset{+}{\sigma} f_1 = 0.$$

[1] Так как для бозе-газа $\mathfrak{N}(\ldots, n_f, \ldots) = N! / \prod_f n_f!$.

Таким образом, оператор σ уменьшает число n на единицу, а оператор $\overset{+}{\sigma}$ увеличивает его на единицу.

Из (3.25) следует, что

$$\sigma^2 = 0, \quad (\overset{+}{\sigma})^2 = 0, \tag{3.5}$$

а также

$$\overset{+}{\sigma}\sigma f(n) = \delta(n-1)\cdot f(n) = n\cdot f(n),$$

т. е.

$$\overset{+}{\sigma}\sigma = n. \tag{3.6}$$

Совершенно аналогично $\sigma\overset{+}{\sigma} = 1 - n$, и потому

$$\sigma\overset{+}{\sigma} + \overset{+}{\sigma}\sigma = 1. \tag{3.7}$$

б) Операторы Паули. Перейдем к рассмотрению волновых функций $C(\ldots, n_g, \ldots)$, зависящих от набора чисел заполнения $(\ldots, n_g, \ldots)$, причем каждое из n_g может принимать лишь два значения: 0 или 1. Введем в рассмотрение операторы b_f, $\overset{+}{b}_f$, являющиеся теми же операторами σ, $\overset{+}{\sigma}$, только действующими лишь на f-е число заполнения n_f. Поэтому b_f уменьшает это число на единицу, а $\overset{+}{b}_f$ увеличивает его на единицу. Из (3.27)–(3.29) видим, что

$$b_f^2 = 0, \quad (\overset{+}{b}_f)^2 = 0, \quad \overset{+}{b}_f b_f = n_f; \quad b_f\overset{+}{b}_f + \overset{+}{b}_f b_f = 1. \tag{3.8}$$

Нетрудно заметить далее, что, поскольку b_f, $\overset{+}{b}_f$ действуют только на n_f, оба этих оператора коммутируют с n_g при $g \neq f$. Учитывая (3.24), получаем поэтому

$$\begin{aligned} &b_f(-1)^{n_f} + (-1)^{n_f} b_f = 0, \quad \overset{+}{b}_f(-1)^{n_f} + (-1)^{n_f}\overset{+}{b}_f = 0, \\ &b_f(-1)^{n_g} = (-1)^{n_g} b_f, \; \overset{+}{b}_f(-1)^{n_g} = (-1)^{n_g}\overset{+}{b}_f \text{ для } g \neq f. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Введенные операторы b_f, $\overset{+}{b}_f$ называются иногда *операторами Паули*.

Пусть $f \neq f'$. Тогда операторы Паули с индексами f и f' действуют на разные аргументы функции C и потому коммутируют между собой:

$$b_f b_{f'} - b_{f'} b_f = 0, \quad \overset{+}{b}_f\overset{+}{b}_{f'} - \overset{+}{b}_{f'}\overset{+}{b}_f = 0, \quad b_f\overset{+}{b}_{f'} - \overset{+}{b}_{f'} b_f = 0 \tag{3.10}$$

при $f \neq f'$.

Рассмотрим вакуумную волновую функцию

$$C_{\text{vac}} = \prod_g \delta(n_g), \tag{3.11}$$

для которой все n_f имеют значения, равные нулю. Имеем, очевидно,

$$(C_{\text{vac}}, C_{\text{vac}}) = 1.$$

Кроме того, на основании (3.26)

$$b_f C_{\text{vac}} = 0, \quad \overset{+}{b}_f C_{\text{vac}} = \delta(n_f - 1) \prod_{\substack{g \\ g \neq f}} \delta(n_g). \tag{3.12}$$

Перестановочные соотношения (3.30), (3.32) для операторов Паули представляют, однако, определенные неудобства при работе с ними: они не сохраняются при унитарных преобразованиях вида

$$B_\lambda = \sum_f U_{\lambda f} b_f,$$

где λ — также дискретный индекс, а матрица $U_{\lambda f}$ удовлетворяет соотношениям унитарности

$$\sum_f U_{\lambda f} U^*_{\lambda' f} = \delta(\lambda - \lambda'), \quad \sum_\lambda U_{\lambda f} U^*_{\lambda f'} = \delta(f - f').$$

Для преобразованных амплитуд B_λ, $\overset{+}{B}_\lambda$ нельзя даже утверждать, что хотя бы одно соотношение

$$B_\lambda \overset{+}{B}_\lambda + \overset{+}{B}_\lambda B_\lambda = 1$$

остается справедливым для произвольного преобразования только что упомянутого типа.

Имеем, действительно,

$$B_\lambda \overset{+}{B}_\lambda + \overset{+}{B}_\lambda B_\lambda = \sum_{f,f'} U_{\lambda f} U^*_{\lambda f'} (b_f \overset{+}{b}_{f'} + \overset{+}{b}_{f'} b_f) =$$

$$= \sum_f U_{\lambda f} U^*_{\lambda f} (b_f \overset{+}{b}_f + \overset{+}{b}_f b_f) + \sum_{\substack{f,f' \\ f \neq f'}} U_{\lambda f} U^*_{\lambda f'} (b_f \overset{+}{b}_{f'} + \overset{+}{b}_{f'} b_f),$$

т. е.

$$B_\lambda \overset{+}{B}_\lambda + \overset{+}{B}_\lambda B_\lambda = 1 + \sum_{\substack{f,f' \\ f \neq f'}} U_{\lambda f} U^*_{\lambda f'} (b_f \overset{+}{b}_{f'} + \overset{+}{b}_{f'} b_f).$$

в) Операторы Ферми a, $\overset{+}{a}$. Поскольку, однако, в силу (3.32) амплитуды b_f, $\overset{+}{b}_{f'}$ (при $f \neq f'$) не антикоммутируют, а коммутируют, то присутствующая здесь сумма, дополняющая единицу, не обязана исчезать и соотношения (3.30) для преобразованных амплитуд не обязаны всегда выполняться. Как видно, такие соотношения были бы автоматически выполнены, если бы b_f и $\overset{+}{b}_{f'}$ антикоммутировали ($f \neq f'$). Отсюда возникает идея о целесообразности перехода от операторных амплитуд Паули к так называемым *операторам Ферми*, для которых в соотношениях, заменяющих (3.32), в левой части вместо знака минус стоит знак плюс.

Для такого изменения знака воспользуемся свойством (3.31), выражающим антикоммутирование $(-1)^{n_f}$ с операторными амплитудами b_f, $\overset{+}{b}_f$. Чтобы

построить операторные амплитуды Ферми, домножим b_f, $\overset{+}{b}_f$ на знакопеременный множитель

$$(-1)^{\sum\limits_{g<f} n_g}. \tag{3.13}$$

Благодаря (3.31) этот множитель можно ставить и слева и справа от b_f, $b_{f'}$, поскольку он с ними коммутирует.

Итак, положим

$$\begin{aligned} a_f &= (-1)^{\sum\limits_{g<f} n_g} b_f = b_f (-1)^{\sum\limits_{g<f} n_g}, \\ \overset{+}{a}_f &= (-1)^{\sum\limits_{g<f} n_g} \overset{+}{b}_f = \overset{+}{b}_f (-1)^{\sum\limits_{g<f} n_g}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Тогда из (3.30) следует, что

$$\overset{+}{a}_f a_f = n_f \tag{3.15}$$

и

$$a_f^2 = 0, \quad (\overset{+}{a}_f)^2 = 0, \quad a_f \overset{+}{a}_f + \overset{+}{a}_f a_f = 1. \tag{3.16}$$

Из определения (3.36) ясно, что про операторы a_f, $\overset{+}{a}_f$ уже нельзя говорить, что они действуют только на аргумент n_f функции C, ибо они действуют и на все «предыдущие» аргументы n_g при $g < f$.

Чтобы рассмотреть свойства коммутирования, возьмем два произвольных индекса f, f', причем положим для определенности

$$f < f'. \tag{3.17}$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_f \overset{+}{a}_{f'} + \overset{+}{a}_{f'} a_f &= b_f (-1)^{\sum\limits_{g<f} n_g} (-1)^{\sum\limits_{g<f'} n_g} \overset{+}{b}_{f'} + \overset{+}{b}_{f'} (-1)^{\sum\limits_{g<f'} n_g} (-1)^{\sum\limits_{g<f} n_g} b_f = \\ &= b_f (-1)^{\sum\limits_{f\leqslant g<f'} n_g} \overset{+}{b}_{f'} + \overset{+}{b}_{f'} (-1)^{\sum\limits_{f\leqslant g<f'} n_g} b_f. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Примем во внимание соотношение (3.31). Так как величина

$$(-1)^{\sum\limits_{f\leqslant g<f'} n_g} = (-1)^{n_f} (-1)^{\sum\limits_{f<g<f'} n_g} \tag{3.19}$$

содержит множитель $(-1)^{n_f}$, антикоммутирующий с b_f, и множитель $(-1)^{\sum\limits_{f<g<f'} n_g}$, коммутирующий с b_f, мы видим, что

$$b_f (-1)^{\sum\limits_{f\leqslant g<f'} n_g} = -(-1)^{\sum\limits_{f\leqslant g<f'} n_g} b_f.$$

Далее, множитель (3.41) состоит из произведений $(-1)^{n_g}$ при $f \leqslant g < f'$ и потому коммутирует с $\overset{+}{b}_{f'}$. Следовательно, из (3.40), учитывая (3.32), находим

$$a_f \overset{+}{a}_{f'} + \overset{+}{a}_{f'} a_f = (-1)^{\sum\limits_{f\leqslant g<f'} n_g} (-b_f \overset{+}{b}_{f'} + \overset{+}{b}_{f'} b_f) = 0. \tag{3.20}$$

Как видно, при $f < f'$ (см. (3.39)) операторы a_f и $\overset{+}{a}_{f'}$, антикоммутируют. Переходя в (3.42) к сопряженным операторам, находим

$$\{a_f \overset{+}{a}_{f'} + \overset{+}{a}_{f'} a_f\}^+ = a_{f'} \overset{+}{a}_f + \overset{+}{a}_f a_{f'} = 0.$$

Отсюда заключаем, что (3.42) справедливо не только для $f < f'$, но и для $f' < f$, т. е. оно выполняется при любых $f \neq f'$. Приняв во внимание (3.38), мы можем написать для всех f, f':

$$a_f \overset{+}{a}_{f'} + \overset{+}{a}_{f'} a_f = \delta(f - f'). \tag{3.21}$$

Рассуждая совершенно аналогично, убеждаемся, что a_f, $a_{f'}$ между собой антикоммутируют, а также что $\overset{+}{a}_f$, $\overset{+}{a}_{f'}$ антикоммутируют при $f \neq f'$. Но при $f = f'$ квадраты a_f и $\overset{+}{a}_f$ исчезают в силу (3.38). Поэтому всегда

$$a_f a_{f'} + a_{f'} a_f = 0, \quad \overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{f'} + \overset{+}{a}_{f'} \overset{+}{a}_f = 0. \tag{3.22}$$

Полученные перестановочные соотношения называются *перестановочными соотношениями Ферми.*

г) Волновые функции. Благодаря определению (3.36) можно называть операторы a_f квантовыми *амплитудами уничтожения*, а $\overset{+}{a}_f$ — квантовыми *амплитудами рождения*, поскольку a_f, $\overset{+}{a}_f$ соответственно уменьшают и увеличивают n_f на единицу.

Заметим далее, что на основании (3.34), (3.36)

$$a_f C_{\text{vac}} = 0 \tag{3.23}$$

и

$$\overset{+}{a}_f C_{\text{vac}} = \overset{+}{b}_f (-1)^{\sum\limits_{g<f} n_g} C_{\text{vac}} = \overset{+}{b}_f C_{\text{vac}} = \delta(n_f - 1) \prod_{\substack{g \\ g \neq f}} \delta(n_g).$$

Пусть $f' < f$, тогда

$$\overset{+}{a}_{f'} \overset{+}{a}_f C_{\text{vac}} = \overset{+}{b}_{f'} (-1)^{\sum\limits_{g<f'} n_g} \delta(n_f - 1) \prod_{\substack{g \\ g \neq f}} \delta(n_g) =$$

$$= \delta(n_f - 1)\delta(n_{f'} - 1) \prod_{\substack{g \\ g \neq f, f'}} \delta(n_g).$$

Продолжая увеличивать число операторов $\overset{+}{a}_f$, действующих на C_{vac}, находим

$$\overset{+}{a}_{g_1} \ldots \overset{+}{a}_{g_N} C_{\text{vac}} = \delta(n_{g_1} - 1) \ldots \delta(n_{g_N} - 1) \prod_{\substack{g \\ g \neq g_1, \ldots, g_N}} \delta(n_g), \tag{3.24}$$

если $g_1 < g_2 < \ldots < g_N$.

С помощью тождества (3.46) нетрудно выразить волновую функцию $C(\ldots, n_f, \ldots)$ в случае статистики Ферми с помощью такой же суммы (3.22), что и для случая статистики Бозе. Рассмотрим, в самом деле, сумму

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{f_1,\ldots,f_N} F(f_1, \ldots, f_N) \overset{+}{a}_{f_1} \ldots \overset{+}{a}_{f_N} C_{\text{vac}} \tag{3.25}$$

и заметим, что ее можно представить в форме

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\substack{\ldots,n'_f,\ldots \\ \sum_f n'_f = N}} \sum_{(f_1 \ldots f_N) \smile (\ldots, n'_f, \ldots)} F(f_1, \ldots, f_N) \overset{+}{a}_{f_1} \ldots \overset{+}{a}_{f_N} C_{\text{vac}}. \tag{3.26}$$

Напомним здесь, что набор $(f_1 \ldots f_N)$, соответствующий данному допустимому набору чисел заполнения $(\ldots, n'_f, \ldots)$, определен с точностью до $N!$ перестановок между $(f_1, f_2, \ldots, f_N)$.

Сумма

$$\sum_{\substack{f_1,\ldots,f_N \\ (f_1 \ldots f_N) \smile (\ldots, n'_f, \ldots)}} F(f_1, \ldots, f_N) \overset{+}{a}_{f_1} \ldots \overset{+}{a}_{f_N} C_{\text{vac}}, \tag{3.27}$$

входящая в выражение (3.48), содержит, следовательно, $N!$ членов, причем все они оказываются равными, поскольку произведение $F(f_1, \ldots, f_N) \overset{+}{a}_{f_1} \ldots \overset{+}{a}_{f_N} C_{\text{vac}}$ двух антисимметричных функций $(f_1, \ldots, f_N)$, а именно $F(f_1, \ldots, f_N)$ и $\overset{+}{a}_{f_1} \ldots \overset{+}{a}_{f_N} C_{\text{vac}}$, является инвариантным по отношению ко всем перестановкам между $(f_1, \ldots, f_N)$.

Выберем среди учитываемых в сумме (3.49) наборов «упорядоченную последовательность»

$$(g_1 < g_2 < \ldots < g_N) \leftrightarrow (\ldots, n'_g, \ldots). \tag{3.28}$$

Тогда выражение (3.49) будет равно

$$N! F(g_1, \ldots, g_N) \overset{+}{a}_{g_1} \ldots \overset{+}{a}_{g_N} C_{\text{vac}},$$

и потому убеждаемся, что рассматриваемая сумма (3.47) может быть представлена в форме

$$\sqrt{N!} \sum_{\substack{\ldots n'_g \ldots \\ \sum_f n'_f = N}} F(g_1, \ldots, g_N) \overset{+}{a}_{g_1} \ldots \overset{+}{a}_{g_N} C_{\text{vac}}.$$

Но ввиду условия (3.50)

$$n'_g = 0, \quad \text{если} \quad g \neq g_1, \ldots, g_N,$$
$$n'_g = 1, \quad \text{если} \quad g = g_j, \; j = 1, \ldots, N.$$

Поэтому благодаря равенству (3.46) можно написать

$$\overset{+}{a}_{g_1} \ldots \overset{+}{a}_{g_N} C_{\text{vac}} = \prod_g \delta(n_g - n'_g).$$

С другой стороны, учитывая (3.50), имеем, по определению (2.35а)

$$\sqrt{N!}\,F(g_1,\ldots,g_N)=C(\ldots,n'_g,\ldots).$$

Видим, следовательно, что выражение (3.47) будет равно

$$\sum_{\substack{\ldots,n'_f,\ldots\\ \sum_f n'_f=N}} C(\ldots,n'_f,\ldots)\left\{\prod_g \delta(n_g-n'_g)\right\}.$$

Отсюда ясно, что это выражение равно нулю, если $\sum_f n_f \neq N$, и равно $C(\ldots,n_f,\ldots)$ в случае, когда $\sum_f n_f = N$.

§ 3. Сравнение волновых функций бозонов и фермионов

Итак, для рассматриваемой системы фермионов, так же как и для ранее рассматривавшейся системы бозонов, волновая функция в представлении чисел заполнения выражается формально идентичным образом с помощью амплитуд рождения

$$C=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{f_1,\ldots,f_N} F(f_1,\ldots,f_N)\overset{+}{a}_{f_1}\ldots\overset{+}{a}_{f_N}C_{\text{vac}}. \tag{3.1}$$

Отличие состоит в том, что в случае бозонов (см. (3.22)) здесь $F(f_1,\ldots,f_N)$ — симметричная функция $(f_1,\ldots,f_N)$, $\overset{+}{a}_f$ — бозе-амплитуды, числа заполнения могут принимать любые значения натурального ряда: $n_f=0,1,2,\ldots$. В случае же фермионов $F(f_1,\ldots,f_N)$ — антисимметричная функция $(f_1,\ldots,f_N)$, $\overset{+}{a}_f$ — ферми-амплитуды, числа заполнения могут принимать значения лишь 0 или 1. В обоих случаях вакуумная волновая функция C_{vac} характеризуется равенствами

$$a_f C_{\text{vac}}=0, \tag{3.2}$$

справедливыми для всех f.

§ 4. Представление вторичного квантования

Будем теперь рассматривать форму (3.22), (3.51) сразу для обоих случаев — статистик Бозе и Ферми. Подставим в нее выражение для $F(f_1,\ldots,f_N)$ через волновую функцию в X-представлении, данное формулой (2.11). Получим

$$C=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{f_1,\ldots,f_N}\int \varphi(x_1,\ldots,x_N)\Psi^*_{f_1}(x_1)\ldots\Psi^*_{f_N}(x_N)\,dx_1\ldots dx_N\overset{+}{a}_{f_1}\ldots\overset{+}{a}_{f_N}C_{\text{vac}}. \tag{3.1}$$

Введем операторные функции

$$\psi(x)=\sum_f a_f\Psi_f(x),\quad \overset{+}{\psi}(x)=\sum_f \overset{+}{a}_f\Psi^*_f(x). \tag{3.2}$$

Тогда выражение (3.53) приведется к виду так называемого *фоковского представления*:

$$C = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \varphi(x_1, \ldots, x_N) \overset{+}{\psi}(x_1) \ldots \overset{+}{\psi}(x_N)\, dx_1 \ldots\, dx_N C_{\text{vac}}; \tag{3.3}$$

при этом на основании равенств (3.52) имеем для всех x

$$\psi(x) C_{\text{vac}} = 0 \tag{3.4}$$

и, кроме того,

$$(C_{\text{vac}}, C_{\text{vac}}) = 1.$$

Рассмотрим теперь перестановочные соотношения между введенными операторными функциями (3.54). Чтобы не повторять вычисления отдельно для случаев статистики Бозе и Ферми, введем символ $[A, B]_{\mp}$, в котором A, B — некоторые операторы. Этот символ определяем как коммутатор

$$[A, B]_- = AB - BA$$

для случая статистики Бозе и как антикоммутатор

$$[A, B]_+ = AB + BA$$

для случая статистики Ферми. Как видно, для операторных амплитуд выполняются перестановочные соотношения

$$[a_f, \overset{+}{a}_{f'}]_{\mp} = \delta(f - f'), \quad [a_f, a_{f'}]_{\mp} = 0, \quad [\overset{+}{a}_f, \overset{+}{a}_{f'}]_{\mp} = 0. \tag{3.5}$$

Поэтому имеем

$$[\psi(x), \overset{+}{\psi}(x')]_{\mp} = \left[\sum_f a_f \Psi_f(x), \sum_{f'} \overset{+}{a}_{f'} \Psi^*_{f'}(x')\right]_{\mp} =$$

$$= \sum_{f,f'} \Psi_f(x) \Psi^*_{f'}(x') [a_f, \overset{+}{a}_{f'}]_{\mp} = \sum_f \Psi_f(x) \Psi_f(x'),$$

откуда благодаря равенству (2.9)

$$[\psi(x), \overset{+}{\psi}(x')]_{\mp} = \delta(x - x'). \tag{3.6}$$

Далее,

$$[\psi(x), \psi(x')]_{\mp} = \left[\sum_f a_f \Psi_f(x), \sum_{f'} a_{f'} \Psi_{f'}(x)\right]_{\mp} =$$

$$= \sum_{f,f'} \Psi_f(x) \Psi_{f'}(x') [a_f, a_{f'}]_{\mp} = 0 \tag{3.7}$$

и совершенно аналогично

$$[\overset{+}{\psi}(x), \overset{+}{\psi}(x')]_{\mp} = 0. \tag{3.8}$$

Итак, рассматриваемые операторные функции $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (3.58)–(3.60), причем в случае статистики Бозе следует брать (−), а в случае статистики Ферми — (+).

Заметим между прочим, что если бы a_f, $\overset{+}{a}_f$ были не операторами, а c-числами, то $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$, заданные суммами (3.54), можно было бы рассматривать как обычные сопряженные волновые функции одной частицы.

Напомним: чтобы вообще ввести волновые функции для частицы, следует перейти от классической механики к квантовой — совершить, так сказать, одно (или «первичное») квантование. Таким образом, когда мы переходим от обычных волновых функций к операторным функциям $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$ с перестановочными соотношениями (3.58)–(3.60), мы как бы совершаем еще одно, «вторичное» квантование. Поэтому метод, основанный на введении вместо волновых функций $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ волновых функций C, и называется методом *вторичного квантования*. Волновая функция C называется тогда *волновой функцией в представлении вторичного квантования*.

В теории квантованных полей, когда классические полевые (волновые) функции заменяются операторными функциями с соответствующими перестановочными соотношениями, волновые функции C, чтобы не спутать их с операторными волновыми функциями, называются обычно амплитудами состояния или векторами состояния (state vectors).

§ 5. Оператор числа частиц

В заключение скажем несколько слов относительно представления C как функций от чисел заполнения n_f — собственных значений операторов $\overset{+}{a}_f a_f$:

$$C = C(\ldots, n_f, \ldots). \tag{3.1}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{N} = \int \overset{+}{\psi}(x)\psi(x)\,dx = \sum_f \overset{+}{a}_f a_f, \tag{3.2}$$

для которого

$$\mathcal{N}C = \sum_f n_f C.$$

Поэтому на основании соотношений (2.27а, б), (2.35а, б) будем иметь

$$(\mathcal{N} - N)C = 0. \tag{3.3}$$

Таким образом, рассматриваемые N-частичные волновые функции в представлении вторичного квантования будут собственными функциями оператора $\mathcal{N}$, соответствующими его собственному значению, равному N. Этот оператор $\mathcal{N}$ представляет, следовательно, число частиц в системе.

Конкретное представление (3.61) зависит, очевидно, от выбора полной ортонормированной системы $\Psi_f(x)$. Такая зависимость, однако, исчезает в особом случае, когда для всех x

$$\psi(x)C_0 = 0. \tag{3.4}$$

Тогда на основании (3.62)

$$\mathcal{N}C_0 = 0, \tag{3.64a}$$

и мы видим, что C_0 соответствует вакуумному состоянию — состоянию, в котором нет частиц.

Из выражения (3.62) следует, что для любой ортонормированной полной системы $\Psi_f(x)$ для всех f будет

$$n_f C_0 = 0.$$

Поэтому

$$C_0 = \mathcal{K}C_{\text{vac}}, \quad \mathcal{K} = \text{const}, \tag{3.5}$$

где

$$C_{\text{vac}} = \prod_f \delta(n_f), \quad (C_{\text{vac}}, C_{\text{vac}}) = 1 \tag{3.6}$$

и где $\mathcal{K}$ — нормировочный множитель, который можно вынести за знак скалярного произведения:

$$(C, C_0) = \sum_{\ldots, n_f, \ldots} C^*(\ldots, n_f, \ldots) C_0(\ldots, n_f, \ldots) = \mathcal{K}(C, C_{\text{vac}}).$$

Взяв $C = C_{\text{vac}}$, получим

$$\mathcal{K} = (C_{\text{vac}}, C_0). \tag{3.7}$$

Итак, C_0 определено соотношением (3.64) с точностью до нормировочного множителя (3.67). Как видно, понятие вакуумного состояния представляет специфическое понятие метода вторичного квантования, играющее в нем важную роль: через такое «пустое» состояние, как C_{vac}, выражаются с помощью формул (3.51) или (3.55) реальные N-частичные состояния.

Глава IV

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Введение

Рассуждения в гл. 2, 3 показали, что можно ввести волновые функции в представлении вторичного квантования, положив

$$C = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \varphi(x_1, \ldots, x_N) \overset{+}{\psi}(x_1) \ldots \overset{+}{\psi}(x_N)\, dx_1 \ldots dx_N C_{\text{vac}}. \tag{4.1}$$

Вакуумное состояние C_{vac} здесь нормировано:

$$(C_{\text{vac}}, C_{\text{vac}}) = 1 \tag{4.2}$$

— и характеризуется соотношением

$$\psi(x) C_{\text{vac}} = 0, \tag{4.3}$$

справедливым для всех x. Такое представление (4.1) имеет место и для статистики Бозе, и для статистики Ферми.

В случае статистики Бозе $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ есть симметричная функция $x_1, \ldots, x_N$, а операторные функции $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям Бозе:

$$\begin{aligned} \psi(x)\overset{+}{\psi}(x') - \overset{+}{\psi}(x')\psi(x) &= \delta(x - x'), \\ \psi(x)\psi(x') - \psi(x')\psi(x) &= 0, \\ \overset{+}{\psi}(x)\overset{+}{\psi}(x') - \overset{+}{\psi}(x')\overset{+}{\psi}(x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

В случае же статистики Ферми $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ является антисимметричной функцией $x_1, \ldots, x_N$, а операторные функции $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям Ферми:

$$\begin{aligned} \psi(x)\overset{+}{\psi}(x') + \overset{+}{\psi}(x')\psi(x) &= \delta(x - x'), \\ \psi(x)\psi(x') + \psi(x')\psi(x) &= 0, \\ \overset{+}{\psi}(x)\overset{+}{\psi}(x') + \overset{+}{\psi}(x')\overset{+}{\psi}(x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Займемся преобразованием динамических величин, рассматривавшихся в гл. 1, и в частности преобразованием гамильтониана динамической системы H к представлению вторичного квантования.

При этом нами будут использованы лишь представление (4.1), свойства (4.2), (4.3) вакуумной функции, свойства симметрии обычной волновой функции $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ и перестановочные соотношения для операторных функций в форме (4.4) для случая статистики Бозе или в форме (4.5) для случая статистики Ферми.

Подчеркнем здесь, что *мы вообще можем забыть все сказанное в гл.* 2 *и* 3 *и рассматривать равенство* (4.1) *при только что перечисленных свойствах просто как определение волновой функции в представлении вторичного квантования.*

§ 2. Лемма

Чтобы преобразовать динамические величины к представлению вторичного квантования, не прибегая при этом к громоздким преобразованиям, докажем следующую лемму для двух случаев.

а) *Случай статистики Бозе.* Операторные функции $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям Бозе, обычная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ является симметричной.

б) *Случай статистики Ферми.* Операторные функции $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям Ферми, обычная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ является антисимметричной.

Тогда в обоих случаях имеет место тождество

$$\int \psi(x')\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N =$$

$$= N\int \overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\delta(x'-x_1)\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N. \quad (4.1)$$

а) Доказательство. Чтобы единообразно провести доказательство этой леммы для обоих случаев, введем число $\varepsilon=\pm 1$, положив

$$\begin{aligned}&\varepsilon=1 \quad (\text{для случая } а),\\ &\varepsilon=-1 \quad (\text{для случая } б).\end{aligned} \quad (4.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\psi(x')\overset{+}{\psi}(x_j)=\delta(x'-x_j)+\varepsilon\overset{+}{\psi}(x_j)\psi(x'),\\ &\overset{+}{\psi}(x_{j_1})\overset{+}{\psi}(x_{j_2})=\varepsilon\overset{+}{\psi}(x_{j_2})\overset{+}{\psi}(x_{j_1}).\end{aligned} \quad (4.3)$$

Далее, обозначая через T_{j_1,j_2} транспозицию

$$x_{j_1}\to x_{j_2},\quad x_{j_2}\to x_{j_1},\quad j_1\neq j_2,$$

будем иметь также в обоих рассматриваемых случаях

$$T_{j_1,j_2}\varphi=\varepsilon\varphi. \quad (4.4)$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\psi(x')\overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}$$

и будем передвигать $\psi(x')$ вправо, пользуясь перестановочными соотношениями (4.8). Найдем последовательно

$$\psi(x')\overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}=$$

$$=\delta(x'-x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}+\varepsilon\overset{+}{\psi}(x_1)\psi(x')\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}=$$

$$=\delta(x'-x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}+\varepsilon\delta(x'-x_2)\overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_3)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}+$$

$$+\varepsilon^2\overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\psi(x')\overset{+}{\psi}(x_3)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}=\dots.$$

Учитывая, что по свойству (4.3)

$$\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\psi(x')C_{\text{vac}}=0,$$

в итоге будем иметь

$$\psi(x')\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}=$$

$$=\delta(x'-x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}+$$

$$+\sum_{2\leqslant j\leqslant N}\varepsilon^{j-1}\delta(x'-x_j)\{\overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\}^{(j)}C_{\text{vac}}, \quad (4.5)$$

где

$$\{\overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\}^{(j)} \tag{4.6}$$

получается из «полного» произведения $\overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)$ в результате вычеркивания из него $\overset{+}{\psi}(x_j)$. Если мы поместим в (4.11) $\overset{+}{\psi}(x_1)$ на вакантное место, занимавшееся $\overset{+}{\psi}(x_j)$, то получим выражение, в которое переходит произведение $\overset{+}{\psi}(x_2)\overset{+}{\psi}(x_3)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)$ после замены x_j на x_1. Но чтобы поставить в (4.11) $\overset{+}{\psi}(x_1)$ на указанное место, необходимо провести этот оператор через произведение $(j-2)$ операторов $\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_{j-1})$, ввиду чего появится множитель ε^{j-2}.

Таким образом,

$$\{\overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\}^{(j)} = \varepsilon^{j-2}\{\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\}_{x_j\to x_1}.$$

Подставим найденный результат в (4.10) и заметим, что $\varepsilon^{j-1}\varepsilon^{j-2} = \varepsilon^{2j-4}\varepsilon = \varepsilon$. Получим

$$\psi(x')\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}} =$$
$$= \delta(x'-x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}} +$$
$$+ \sum_{2\leqslant j\leqslant N}\varepsilon T_{1,j}\{\delta(x'-x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\}C_{\text{vac}}.$$

Помножим обе части данного тождества на $\varphi(x_1,\dots,x_N)$ и проинтегрируем по $x_1,\dots,x_N$. Найдем

$$\int\psi(x')\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N =$$
$$= \int\delta(x'-x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N +$$
$$+ \sum_{2\leqslant j\leqslant N}\varepsilon\int T_{1,j}\{\delta(x'-x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\}C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N. \tag{4.7}$$

Рассмотрим член суммы $\sum\limits_{2\leqslant j\leqslant N}$:

$$\varepsilon\int T_{1,j}\{\delta(x'-x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\}C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N \tag{4.8}$$

и совершим в этом интеграле замену переменных: $x_1\to x_j$, $x_j\to x_1$. Видим тогда, что выражение (4.13) будет равно

$$\varepsilon\int T_{1,j}^2\{\delta(x'-x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\}C_{\text{vac}}T_{1,j}\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N.$$

Но

$$T_{1,j}^2 = 1, \quad T_{1,j}\varphi = \varepsilon\varphi, \quad \varepsilon^2 = 1.$$

Таким образом, выражение (4.13) равно

$$\int \delta(x' - x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1, \dots, x_N)\,dx_1 \dots dx_N,$$

и мы убеждаемся, что все $(N-1)$ членов суммы $\sum\limits_{2\leqslant j\leqslant N}$, входящей в (4.12), равны первому члену правой части этого тождества.

Итак,

$$\int \psi(x')\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1, \dots, x_N)\,dx_1 \dots dx_N =$$

$$= N\int \overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\delta(x' - x_1)\varphi(x_1, \dots, x_N)\,dx_1 \dots dx_N,$$

и тем самым лемма доказана.

б) Следствия леммы. I. Рассмотрим выражение

$$\int \psi(x_2')\psi(x_1')\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1, \dots, x_N)\,dx_1 \dots dx_N \tag{4.9}$$

при условиях леммы. Применяя эту лемму, видим, что выражение (4.14) равно

$$N\int \psi(x_2')\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\delta(x_1' - x_1)\varphi(x_1, \dots, x_N)\,dx_1 \dots dx_N. \tag{4.10}$$

Воспользуемся еще раз леммой для выражения (4.15), содержащего $(N-1)$ операторных функций $\overset{+}{\psi}$. Убедимся тогда, что

$$\int \psi(x_2')\psi(x_1')\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1, \dots, x_N)\,dx_1 \dots dx_N =$$

$$= N(N-1)\int \overset{+}{\psi}(x_3)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\delta(x_1' - x_1)\delta(x_2' - x_2)\times$$

$$\times \varphi(x_1, \dots, x_N)\,dx_1 \dots dx_N. \tag{4.11}$$

II. Последовательным s-кратным применением леммы придем к следующему тождеству:

$$\int \psi(x_s')\dots\psi(x_1')\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1, \dots, x_N)\,dx_1 \dots dx_N =$$

$$= N(N-1)\dots(N-s+1)\int \overset{+}{\psi}(x_{s+1})\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\times$$

$$\times \delta(x_1' - x_1)\dots\delta(x_s' - x_s)\varphi(x_1, \dots, x_N)\,dx_1 \dots dx_N \tag{4.12}$$

для $s < N$.

III. Применив рассматриваемую лемму N раз, найдем

$$\int \psi(x'_N)\dots\psi(x'_1)\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N =$$

$$= N!\int \delta(x'_1-x_1)\dots\delta(x'_N-x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N.$$

Взяв скалярное произведение от обеих частей этого равенства с вакуумной функцией C_{vac}, получим, учтя нормировку (4.2) для C_{vac},

$$\int(C_{\text{vac}},\psi(x'_N)\dots\psi(x'_1)\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}})\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N =$$

$$= N!\int \delta(x'_1-x_1)\dots\delta(x'_N-x_N)\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N = N!\varphi(x'_1,\dots,x'_N). \tag{4.13}$$

Поскольку, по определению скалярного произведения, всегда

$$(C, ABC) = (\overset{+}{A}C, BC),$$

где A, B — некоторые операторы, действующие на волновые функции C, тождество (4.18) можно также представить в форме

$$\int(\overset{+}{\psi}(x'_1)\dots\overset{+}{\psi}(x'_N)C_{\text{vac}},\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}})\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N =$$

$$= N!\int \delta(x'_1-x_1)\dots\delta(x'_N-x_N)\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N. \tag{4.14}$$

§ 3. Волновые функции

а) Обращение представления. Используем полученные тождества. Начнем с использования тождества (4.18) для обращения представления (4.1). Рассмотрим выражение

$$(C_{\text{vac}},\psi(x'_N)\dots\psi(x'_1)C)$$

и подставим в него представление (4.1). Получим

$$(C_{\text{vac}},\psi(x'_N)\dots\psi(x'_1)C) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\int(C_{\text{vac}},\psi(x'_N)\dots\psi(x'_1)\times$$

$$\times\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}})\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N,$$

откуда на основании (4.18) видим, что это выражение равно $\sqrt{N!}\,\varphi(x'_1,\dots,x'_N)$. Таким образом, получена формула обращения представления (4.1)

$$\varphi(x_1,\dots,x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}(C_{\text{vac}},\psi(x_N)\dots\psi(x_1)C). \tag{4.1}$$

Обозначим для краткости правые части (4.1), (4.20) соответственно через $C\{\varphi\}$, $\varphi\{C\}$. Видно, что имеется взаимно однозначное соответствие между рассматриваемыми обычными функциями φ и соответствующими волновыми

функциями C в представлении вторичного квантования: $\varphi \leftrightarrow C$, а именно: $C(\varphi)$ соответствует φ, а $\varphi(C)$ соответствует C.

б) Инвариантность скалярного произведения. Установим теперь сохранение скалярного произведения при переходе к вторичному квантованию. Возьмем две обычные волновые функции φ, φ_1 и соответствующие им функции C, C_1:

$$\varphi \to C = C(\varphi),$$
$$\varphi_1 \to C_1 = C(\varphi_1).$$

Тогда на основании (4.1) найдем

$$(C_1, C) = \frac{1}{N!}\int \varphi_1^*(x_1', \ldots, x_N')\varphi(x_1, \ldots, x_N)\times$$
$$\times (\overset{+}{\psi}(x_1')\ldots\overset{+}{\psi}(x_N')C_{\text{vac}}, \overset{+}{\psi}(x_1)\ldots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}})\, dx_1' \ldots dx_N' \, dx_1 \ldots dx_N,$$

и потому, воспользовавшись тождеством (4.19), получим

$$(C_1, C) = \int \varphi_1^*(x_1', \ldots, x_N')\varphi(x_1, \ldots, x_N)\delta(x_1' - x_1)\ldots$$
$$\ldots \delta(x_N' - x_N)\, dx_1' \ldots dx_N' \, dx_1 \ldots dx_N =$$
$$= \int \varphi_1^*(x_1, \ldots, x_N)\varphi(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N,$$

т. е.

$$(C_1, C) = (\varphi_1, \varphi) \quad \text{для} \quad \varphi \leftrightarrow C, \quad \varphi_1 \leftrightarrow C_1. \tag{4.2}$$

§ 4. Преобразование динамических величин в представление вторичного квантования

а) Построение преобразования. Перейдем к преобразованию динамических величин в представление вторичного квантования. Пусть $\mathcal{D}$ будет некоторой динамической величиной, которая в обычном представлении выражается суммой операторов типа $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{S}^{(s)}$, рассматривавшихся в гл. 1. В представлении вторичного квантования эта величина должна изображаться таким оператором $\widetilde{\mathcal{D}}$, действующим на волновые функции C, у которого все соответствующие матричные элементы $\mathcal{D}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}$ были бы равны

$$(\varphi_1, \mathcal{D}\varphi) = (C_1, \widetilde{\mathcal{D}}C) \quad \text{для} \quad \varphi_1 \leftrightarrow C_1, \quad \varphi \leftrightarrow C. \tag{4.1}$$

Ясно, что нам достаточно найти отдельные выражения для $\widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\mathfrak{B}}, \ldots, \widetilde{\mathfrak{S}}^{(s)}, \ldots$, так как, по определению (4.22), сумма типа

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \ldots + \mathfrak{S}^{(s)} + \ldots$$

в представлении вторичного квантования будет

$$\widetilde{\mathfrak{A}} + \widetilde{\mathfrak{B}} + \ldots + \widetilde{\mathfrak{S}}^{(s)} + \ldots .$$

Чтобы фактически построить изучаемое представление для операторов

$$\mathcal{D} = \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{S}^{(s)},$$

поступим следующим образом. Для произвольной рассматриваемой функции φ выберем соответствующее $C=C(\varphi)$. Выберем также C-функцию, соответствующую $\mathcal{D}\varphi$: $C'=C(\mathcal{D}\varphi)$, и подберем оператор $\widetilde{\mathcal{D}}$ так, чтобы он переводил C в C': $C'=\widetilde{\mathcal{D}}C$. Мы увидим тогда, что

$$\varphi \leftrightarrow C, \quad \mathcal{D}\varphi \leftrightarrow \widetilde{\mathcal{D}}C. \tag{4.2}$$

Возьмем еще некоторую волновую функцию φ_1 и соответствующее ей C_1:

$$\varphi_1 \leftrightarrow C_1. \tag{4.3}$$

Из (4.23), (4.24) на основании свойства сохранения скалярного произведения (4.21) и будет вытекать требуемое равенство (4.22) матричных элементов операторов $\mathcal{D}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}$.

б) Аддитивные динамические величины. Итак, перейдем к фактическому построению динамических величин в представлении вторичного квантования.

Начнем с рассмотрения аддитивной динамической величины, характеризуемой оператором типа

$$\mathfrak{A}=\sum_{1\leqslant j\leqslant N} A_j, \tag{4.4}$$

упоминавшимся в гл. 1. Имеем

$$C'=C(\mathfrak{A}\varphi)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\int \overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}(\mathfrak{A}\varphi)_{x_1,\dots,x_N}\,dx_1\dots dx_N. \tag{4.5}$$

Заметим, что в случае системы бозонов выражения

$$\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}, \quad \varphi(x_1,\dots,x_N) \tag{4.6}$$

симметричны по отношению к $x_1,\dots,x_N$. В случае системы фермионов выражения (4.27) являются антисимметричными функциями $x_1,\dots,x_N$. Поэтому в обоих рассматриваемых случаях можно применить к интегралу, стоящему в правой части (4.26), тождество (1.34), установленное в гл. 1.

Тогда получим

$$C'=\frac{N}{\sqrt{N!}}\int \overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}A(x_1,x_1')\varphi(x_1',x_2,\dots,x_N)\,dx_1'\,dx_1\dots dx_N.$$

Заменим переменные в этом интеграле: x_1 на x, а x_1' на x'; тогда имеем

$$C'=\frac{N}{\sqrt{N!}}\int \overset{+}{\psi}(x)A(x,x')\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\times$$
$$\times\,\varphi(x',x_2,\dots,x_N)\,dx\,dx'\,dx_2\dots dx_N. \tag{4.7}$$

Обратимся к тождеству (4.6) и заметим, что его можно записать в виде

$$N\int \overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x',x_2,\dots,x_N)\,dx_2\dots dx_N=$$
$$=\int \psi(x')\overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1,x_2,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N.$$

Подставив это тождество в правую часть (4.28), убеждаемся, что

$$C' = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \overset{+}{\psi}(x) A(x, x') \psi(x')\, dx\, dx' \int \overset{+}{\psi}(x_1) \ldots$$

$$\ldots \overset{+}{\psi}(x_N) C_{\text{vac}} \varphi(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N = \int \overset{+}{\psi}(x) A(x, x') \psi(x')\, dx\, dx' C.$$

Отсюда видим, что в представлении вторичного квантования рассматриваемая аддитивная динамическая величина изображается оператором

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \int \overset{+}{\psi}(x) A(x, x') \psi(x')\, dx\, dx'. \tag{4.8}$$

Выражения $\mathfrak{A}$ из (4.25) и $\widetilde{\mathfrak{A}}$ из (4.29) представляют одну и ту же динамическую величину, а сами формы (4.25), (4.29) ясно указывают, на волновые функции какого рода (обычные или функции вторичного квантования) действуют эти операторы. Поэтому мы не будем далее ставить знак «$\sim$» для обозначения того, что используется представление вторичного квантования.

Заметим еще, что равенство (4.29) может быть также записано в виде

$$\mathfrak{A} = \int \overset{+}{\psi}(x) \left\{ \int A(x, x') \psi(x')\, dx' \right\} dx = \int \overset{+}{\psi}(x) (A\psi)_x\, dx. \tag{4.9}$$

в) Плотность числа частиц. Возьмем в качестве примера пространственную плотность числа частиц. В обычном координатном представлении такая плотность в точке q имеет вид

$$\rho(q) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} \delta(q - q_j). \tag{4.10}$$

Этот оператор диагонален в координатном представлении и не действует на индексы ν_j. Рассмотрим формулу (4.30) и, чтобы не спутать данную фиксированную точку q с пространственной частью переменной интегрирования x, обозначим последнюю через q_1: $x = (q_1, \nu)$. Тогда в случае (4.31)

$$(A\psi)_{q_1, \nu} = \delta(q - q_1) \psi(q_1, \nu),$$

и потому благодаря (4.30) в представлении вторичного квантования будем иметь

$$\rho(q) = \sum_{\nu} \int \overset{+}{\psi}(q_1, \nu) \delta(q - q_1) \psi(q_1, \nu) dq_1 = \sum_{\nu} \overset{+}{\psi}(q, \nu) \psi(q, \nu). \tag{4.11}$$

г) Оператор числа частиц. Проинтегрировав плотность числа частиц по всему рассматриваемому пространству точек q, получим оператор, представляющий полное число частиц:

$$\mathcal{N} = \sum_{\nu} \int \overset{+}{\psi}(q, \nu) \psi(q, \nu) dq$$

или, более кратко,

$$\mathcal{N} = \int \overset{+}{\psi}(x) \psi(x)\, dx. \tag{4.12}$$

Очевидно, для рассматриваемых N-частичных функций C из (4.1)

$$(\mathcal{N}-N)C=0, \tag{4.13}$$

т. е. для них оператор $\mathcal{N}$ имеет собственное значение, равное N.

Рассмотрим выражение

$$\psi(x_1)\mathcal{N}=\int \psi(x_1)\overset{+}{\psi}(x)\psi(x)\,dx=\int \delta(x_1-x)\psi(x)\,dx+$$

$$+\varepsilon\int \overset{+}{\psi}(x)\psi(x_1)\psi(x)\,dx=\psi(x_1)+\varepsilon^2\int \overset{+}{\psi}(x)\psi(x)\,dx\psi(x_1),$$

где $\varepsilon=+1$ (Бозе), $\varepsilon=-1$ (Ферми). Имеем

$$\psi(x_1)(\mathcal{N}-1)=\mathcal{N}\psi(x_1), \quad \text{т. е.} \quad \psi(x_1)\mathcal{N}=(\mathcal{N}+1)\psi(x_1). \tag{4.14}$$

Выполнив здесь сопряжение и учитывая сопряженность $\mathcal{N}$, найдем также

$$(\mathcal{N}-1)\overset{+}{\psi}(x_1)=\overset{+}{\psi}(x_1)\mathcal{N}. \tag{4.15}$$

Пусть теперь C будет собственной функцией оператора $\mathcal{N}$ для собственного значения N. Иначе говоря, пусть имеет место равенство (4.34) $\mathcal{N}C=NC$. Умножим обе части этого равенства соответственно на $\psi(x_1)$ и $\overset{+}{\psi}(x_1)$:

$$\psi(x_1)\mathcal{N}C=N\psi(x_1)C, \quad \overset{+}{\psi}(x_1)\mathcal{N}C=N\overset{+}{\psi}(x_1)C$$

и воспользуемся соотношениями (4.35), (4.36). Получим

$$\mathcal{N}\psi(x_1)C=(N-1)\psi(x_1)C, \quad \mathcal{N}\overset{+}{\psi}(x_1)C=(N+1)\overset{+}{\psi}(x_1)C. \tag{4.16}$$

Таким образом, видно, что оператор ψ уменьшает число частиц на единицу, а оператор $\overset{+}{\psi}$ увеличивает это число на единицу. Можно поэтому называть операторные функции $\overset{+}{\psi}$, ψ соответственно операторными функциями рождения и уничтожения частиц.

д) Динамические величины бинарного типа. Перейдем к рассмотрению динамических величин бинарного типа

$$\mathfrak{B}=\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant N} B_{j_1,j_2} \tag{4.17}$$

и воспользуемся схемой рассуждения, изложенной выше для аддитивных величин. Имеем

$$C'=C(\mathfrak{B}\varphi)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\int \overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}(\mathfrak{B}\varphi)_{x_1,\dots,x_N}\,dx_1\dots dx_N.$$

Принимая во внимание, что выражения (4.27) или оба симметричны (случай Бозе), или оба антисимметричны (случай Ферми) по отношению к $x_1,\dots,x_N$,

мы можем здесь воспользоваться тождеством (1.35) и написать:

$$C' = \frac{N(N-1)}{2}\frac{1}{\sqrt{N!}}\int \overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\mathfrak{B}(x_1, x_2; x_2', x_1')\times$$
$$\times\,\varphi(x_1', x_2', x_3, \dots, x_N)\,dx_1'\,dx_2'\,dx_1\,dx_2\dots dx_N. \quad (4.18)$$

Сделаем замену переменных $x_1 \to \overline{x}_1$, $x_2 \to \overline{x}_2$. В новых обозначениях имеем

$$C' = \frac{1}{2\sqrt{N!}}N(N-1)\int \overset{+}{\psi}(\overline{x}_1)\overset{+}{\psi}(\overline{x}_2)B(\overline{x}_1, \overline{x}_2; x_2', x_1')\overset{+}{\psi}(x_3)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\times$$
$$\times\, C_{\text{vac}}\varphi(x_1', x_2', x_3, \dots, x_N)d\overline{x}_1 d\overline{x}_2\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3\dots dx_N. \quad (4.19)$$

Воспользуемся теперь тождеством (4.16), которое перепишем в виде

$$N(N-1)\int \overset{+}{\psi}(x_3)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1', x_2', x_3, \dots, x_N)\,dx_3\dots dx_N =$$
$$= \int \psi(x_2')\psi(x_1')\overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1, \dots, x_N)\,dx_1\dots dx_N.$$

На этом основании из (4.40) получаем

$$C' = \frac{1}{2\sqrt{N!}}\int \overset{+}{\psi}(\overline{x}_1)\overset{+}{\psi}(\overline{x}_2)B(\overline{x}_1, \overline{x}_2; x_2', x_1')\psi(x_2')\psi(x_1')\times$$
$$\times\, d\overline{x}_1 d\overline{x}_2\,dx_1'\,dx_2'\int \overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1, \dots, x_N)\,dx_1\dots dx_N,$$

т. е.

$$C' = \frac{1}{2}\int \overset{+}{\psi}(\overline{x}_1)\overset{+}{\psi}(\overline{x}_2)B(\overline{x}_1, \overline{x}_2; x_2', x_1')\psi(x_2')\psi(x_1')d\overline{x}_1 d\overline{x}_2\,dx_1'\,dx_2'C. \quad (4.20)$$

Таким образом, в представлении вторичного квантования динамическая величина бинарного типа изобразится оператором

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\int \overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)B(x_1, x_2; x_2', x_1')\psi(x_2')\psi(x_1')\,dx_1\,dx_2\,dx_1'\,dx_2'. \quad (4.21)$$

В более краткой форме можно записать:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\int \overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)(B_{1,2}\psi_2\psi_1)_{x_1,x_2}\,dx_1\,dx_2. \quad (4.22)$$

е) s-кратные операторы. Займемся теперь преобразованием s-кратных операторов, рассмотренных в гл. 1:

$$\mathfrak{S}^{(s)} = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\dots<j_s\leqslant N} S_{j_1, j_2, \dots, j_s}. \quad (4.44а)$$

Для этого воспользуемся принятой схемой. Имеем

$$C' = C(\mathfrak{S}^{(s)}\varphi) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\int \overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}(\mathfrak{S}^{(s)}\varphi)_{x_1,\dots,x_N}\,dx_1\dots dx_N, \quad (4.44б)$$

откуда, воспользовавшись тождеством (1.33), получим

$$C' = \frac{N(N-1)\dots(N-s+1)}{s!\sqrt{N!}} \int \overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\times$$
$$\times S(x_1,\dots,x_s;x'_s,\dots,x'_1)\varphi(x'_1,\dots,x'_s;x_{s+1},\dots,x_N)\,dx'_1\dots dx'_s\,dx_1\dots dx_N.$$

Переобозначим здесь $x_1 \to \overline{x}_1, \dots, x_s \to \overline{x}_s$. Тогда

$$C' = \frac{N(N-1)\dots(N-s+1)}{s!\sqrt{N!}} \int \overset{+}{\psi}(\overline{x}_1)\dots\overset{+}{\psi}(\overline{x}_s)\times$$
$$\times S(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_s;x'_s,\dots,x'_1)\overset{+}{\psi}(x_{s+1})\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\times$$
$$\times \varphi(x'_1,\dots,x'_s,x_{s+1},\dots,x_N)\,dx'_1\dots dx'_s d\overline{x}_1\dots d\overline{x}_s\,dx_{s+1}\dots dx_N. \quad (4.45)$$

Обратимся к тождеству (4.17) и запишем его в виде

$$N(N-1)\dots(N-s+1)\int \overset{+}{\psi}(x_{s+1})\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\times$$
$$\times \varphi(x'_1,\dots,x'_s,x_{s+1},\dots,x_N)\,dx_{s+1}\dots dx_N =$$
$$= \int \psi(x'_s)\dots\psi(x'_1)\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N.$$

Подставив это равенство в правую часть (4.45), получим

$$C' = \frac{1}{s!\sqrt{N!}} \int \overset{+}{\psi}(\overline{x}_1)\dots\overset{+}{\psi}(\overline{x}_s)S(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_s;x'_s,\dots,x'_1)\times$$
$$\times \psi(x'_s)\dots\psi(x'_1)d\overline{x}_1\dots d\overline{x}_s\,dx'_1\dots dx'_s\times$$
$$\times \int \overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N,$$

т. е.

$$C' = \frac{1}{s!} \int \overset{+}{\psi}(\overline{x}_1)\dots\overset{+}{\psi}(\overline{x}_s)S(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_s;x'_s,\dots,x'_1)\times$$
$$\times \psi(x'_s)\dots\psi(x'_1)d\overline{x}_1\dots d\overline{x}_s\,dx'_1\dots dx'_s C.$$

Итак, в представлении вторичного квантования рассматриваемая динамическая величина s-кратного типа дается оператором

$$\mathfrak{S}^{(s)} = \frac{1}{s!} \int \overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_s)S(x_1,\dots,x_s;x'_s,\dots,x'_1)\times$$
$$\times \psi(x'_s)\dots\psi(x'_1)\,dx_1\dots dx_s\,dx'_1\dots dx'_s \quad (4.46)$$

или, в более краткой записи,

$$\mathfrak{S}^{(s)} = \frac{1}{s!} \int \overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_s)\{S_{1,\dots,s}\psi_s\dots\psi_1\}_{x_1,\dots,x_s}\,dx_1\dots dx_s. \quad (4.47)$$

§ 5. Гамильтониан системы в представлении вторичного квантования

Можем теперь перейти к преобразованию гамильтониана рассматриваемой динамической системы в представление вторичного квантования. Возьмем гамильтониан в форме (1.36), введенный в гл. 1:

$$H = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} T_j + \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant N} U_{j_1, j_2}, \tag{4.1}$$

где для матричных элементов одночастичного оператора T и двухчастичного оператора U будем пользоваться обозначениями (1.37).

Поскольку такой гамильтониан состоит из суммы аддитивной и бинарной компонент, в представлении вторичного квантования будем иметь

$$H = \int \overset{+}{\psi}(x) T(x, x') \psi(x')\, dx\, dx' + \\ + \frac{1}{2} \int \overset{+}{\psi}(x_1) \overset{+}{\psi}(x_2) U(x_1, x_2; x_2', x_1') \psi(x_2') \psi(x_1')\, dx_1\, dx_2\, dx_1'\, dx_2'. \tag{4.2}$$

В частности, гамильтониан (1.38)

$$H = -\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{q_j} + \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant N} \Phi(q_{j_1} - q_{j_2}), \quad \Phi(q) = \Phi(-q), \tag{4.3}$$

для которого переход от (4.48) характеризуется формулами (4.49), в представлении вторичного квантования будет иметь вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \overset{+}{\psi}(x) \Delta_q \psi(x)\, dx + \\ + \frac{1}{2} \int\int \Phi(q_1 - q_2) \overset{+}{\psi}(x_1) \overset{+}{\psi}(x_2) \psi(x_2) \psi(x_1)\, dx_1\, dx_2. \tag{4.4}$$

Если в H из (4.50) необходимо учесть член, происходящий от внешнего поля $U_e(q)$:

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} U_e(q_j), \tag{4.5}$$

то в (4.51), очевидно, добавится выражение вида

$$\int U_e(q) \overset{+}{\psi}(x) \psi(x)\, dx. \tag{4.6}$$

§ 6. Временна́я эволюция операторных функций

а) Представление Гейзенберга. В рассматриваемом представлении уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial C_t}{\partial t} = H C_t, \tag{4.1}$$

но можно также воспользоваться подходом Гейзенберга. Как известно, в этом подходе какая-либо динамическая величина, которая в трактовке Шредингера

изображается оператором $\mathcal{D}$, представляется оператором, явно зависящим от времени по закону

$$\mathcal{D}(t) = e^{i(H/\hbar)t}\mathcal{D}\,e^{-i(H/\hbar)t}. \tag{4.2}$$

Введем, в частности, операторные функции

$$\psi(t,x) = e^{i(H/\hbar)t}\psi(x)\,e^{-i(H/\hbar)t}, \quad \overset{+}{\psi}(t,x) = e^{i(H/\hbar)t}\overset{+}{\psi}(x)\,e^{-i(H/\hbar)t}. \tag{4.3}$$

Заметим, что

$$e^{i(H/\hbar)t}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\ldots\mathcal{D}_l\,e^{-i(H/\hbar)t} = \\ = e^{i(H/\hbar)t}\mathcal{D}_1\,e^{-i(H/\hbar)t}e^{i(H/\hbar)t}\mathcal{D}_2e^{-i(H/\hbar)t}\ldots e^{i(H/\hbar)t}\mathcal{D}_l\,e^{-i(H/\hbar)t},$$

т. е.

$$e^{i(H/\hbar)t}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\ldots\mathcal{D}_l\,e^{-i(H/\hbar)t} = \mathcal{D}_1(t)\mathcal{D}_2(t)\ldots\mathcal{D}_l(t). \tag{4.4}$$

Вспомним далее, что на основании (4.29), (4.42), (4.46) рассматриваемые выше операторы типа $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{S}^{(s)}, \ldots$ выражаются через произведения операторных функций

$$\overset{+}{\psi}(x_1)\ldots\overset{+}{\psi}(x_s)\psi(x'_s)\ldots\psi(x'_1), \quad s = 1,2,3\ldots$$

Поэтому благодаря свойству (4.57) видим, что

$$\mathfrak{A}(t), \mathfrak{B}(t), \ldots, \mathfrak{S}^{(s)}(t)$$

представляются выражениями, получающимися из соответствующих выражений (4.29), (4.42), (4.46) просто заменой $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$ на $\psi(t,x)$, $\overset{+}{\psi}(t,x)$. Таким образом, задача нахождения зависящих от времени динамических величин в представлении Гейзенберга приводится к нахождению операторных функций $\psi(t,x)$, $\overset{+}{\psi}(t,x)$.

б) Перестановочные соотношения. Основываясь на равенствах (4.56), (4.57), видим, что

$$\{\psi(t,x)\overset{+}{\psi}(t,x') \pm \overset{+}{\psi}(t,x')\psi(t,x)\} = e^{i(H/\hbar)t}\{\psi(x)\overset{+}{\psi}(x') \pm \overset{+}{\psi}(x')\psi(x)\}e^{-i(H/\hbar)t},$$

$$\{\psi(t,x)\psi(t,x') \pm \psi(t,x')\psi(t,x)\} = e^{i(H/\hbar)t}\{\psi(x)\psi(x') \pm \psi(x')\psi(x)\}e^{-i(H/\hbar)t},$$

$$\{\overset{+}{\psi}(t,x)\overset{+}{\psi}(t,x') \pm \overset{+}{\psi}(t,x')\overset{+}{\psi}(t,x)\} = e^{i(H/\hbar)t}\{\overset{+}{\psi}(x)\overset{+}{\psi}(x') \pm \overset{+}{\psi}(x')\overset{+}{\psi}(x)\}e^{-i(H/\hbar)t}.$$

Отсюда вытекает, что операторные функции $\psi(t,x)$, $\overset{+}{\psi}(t,x)$ удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям (4.4) или (4.5), что и $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$.

а) *Случай статистики Бозе*:

$$\begin{aligned} &\psi(t,x)\overset{+}{\psi}(t,x') - \overset{+}{\psi}(t,x')\psi(t,x) = \delta(x-x'), \\ &\psi(t,x)\psi(t,x') - \psi(t,x')\psi(t,x) = 0, \\ &\overset{+}{\psi}(t,x)\overset{+}{\psi}(t,x') - \overset{+}{\psi}(t,x')\overset{+}{\psi}(t,x) = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

б) *Случай статистики Ферми*:

$$\psi(t,x)\overset{+}{\psi}(t,x')+\overset{+}{\psi}(t,x')\psi(t,x)=\delta(x-x'),$$
$$\psi(t,x)\psi(t,x')+\psi(t,x')\psi(t,x)=0, \tag{4.6}$$
$$\overset{+}{\psi}(t,x)\overset{+}{\psi}(t,x')+\overset{+}{\psi}(t,x')\overset{+}{\psi}(t,x)=0.$$

Подчеркнем, что такие перестановочные соотношения верны лишь для одновременных операторных функций $\psi(t,x)$, $\overset{+}{\psi}(t,x)$. Коммутационные соотношения при разных моментах времени, скажем $\psi(t_1,x_1)$ с $\overset{+}{\psi}(t_2,x_2)$, отсюда *никоим образом не вытекают*.

в) Временна́я эволюция операторных функций. Построим теперь уравнение для временно́й эволюции операторных функций. Так, из определения (4.56) имеем

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t}=\psi(t,x)H-H\psi(t,x),\quad \psi(0,x)=\psi(x). \tag{4.7}$$

Заметим далее, что, поскольку H является интегралом движения:

$$H=H(t)=\mathrm{e}^{i(H/\hbar)t}H\,\mathrm{e}^{-i(H/\hbar)t}$$

и это выражение не зависит от t, в представлении гамильтониана, например (4.49), можно заменить операторные функции $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$ соответственно на $\psi(t,x)$, $\overset{+}{\psi}(t,x)$ и затем, пользуясь перестановочными соотношениями (4.58) или (4.59), раскрыть коммутатор, стоящий в правой части уравнения (4.60).

Возьмем для примера случай гамильтониана (4.50), для которого в представлении вторичного квантования получено выражение (4.51). Ввиду только что сказанного это выражение будет равно

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\int\overset{+}{\psi}(t,x_1)\Delta_{q_1}\psi(t,x_1)\,dx_1+$$
$$+\frac{1}{2}\int\int\Phi(q_1-q_2)\overset{+}{\psi}(t,x_1)\overset{+}{\psi}(t,x_2)\psi(t,x_2)\psi(t,x_1)\,dx_1\,dx_2. \tag{4.8}$$

Используя перестановочные соотношения (4.58) или (4.59), нетрудно убедиться, что в обоих случаях справедливы следующие выражения для коммутаторов:

$$[\psi(t,x),\overset{+}{\psi}(t,x_1)\Delta_{q_1}\psi(t,x_1)]=\delta(x-x_1)\Delta_{q_1}\psi(t,x_1),$$
$$[\psi(t,x),\overset{+}{\psi}(t,x_1)\overset{+}{\psi}(t,x_2)\psi(t,x_2)\psi(t,x_1)]=$$
$$=\delta(x-x_1)\overset{+}{\psi}(t,x_2)\psi(t,x_2)\psi(t,x_1)+\delta(x-x_2)\overset{+}{\psi}(t,x_1)\psi(t,x_1)\psi(t,x_2).$$

Поэтому для коммутатора в правой части (4.60) ввиду (4.61) найдем

$$[\psi(t,x),H]=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_q\psi(t,x)+\frac{1}{2}\int\Phi(q-q_2)\overset{+}{\psi}(t,x_2)\psi(t,x_2)\,dx_2\psi(t,x)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\Phi(q-q_1)\overset{+}{\psi}(t,x_1)\psi(t,x_1)\,dx_1\psi(t,x).$$

Обозначим в первом интеграле правой части переменную x_2 через x', а во втором интеграле — переменную x_1 через x'. Получим

$$[\psi(t,x),H]=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_q\psi(t,x)+\int\Phi(q-q')\overset{+}{\psi}(t,x')\psi(t,x')\,dx'\psi(t,x)=$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_q\psi(t,x)+\sum_{\nu'}\int\Phi(q-q')\overset{+}{\psi}(t,q',\nu')\psi(t,q',\nu')dq'\psi(t,x).$$

Таким образом, в более развернутом виде, положив $x=q,\nu$, представим уравнение (4.60) в следующей форме:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,q,\nu)}{\partial t}=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_q+U_i(t,q)\right\}\psi(t,q,\nu),\tag{4.9}$$

где

$$U_i(t,q)=\int\Phi(q-q')\left\{\sum_{\nu'}\overset{+}{\psi}(t,q',\nu')\psi(t,q',\nu')\right\}dq'.\tag{4.10}$$

г) Обсуждение. Заметим на основании (4.32), что оператор, стоящий в выражении (4.63) в фигурных скобках, есть оператор, представляющий плотность числа частиц в момент времени t:

$$\sum_{\nu}\overset{+}{\psi}(t,q,\nu)\psi(t,q,\nu)=\rho(t,q),\tag{4.11}$$

и, следовательно, (4.63) эквивалентно выражению

$$U_i(t,q)=\int\Phi(q-q')\rho(t,q')dq'.\tag{4.12}$$

Как видно, по своей форме уравнение (4.62) аналогично обычному уравнению Шредингера, соответствующему движению частицы в поле потенциала U_i. Сам этот потенциал как бы вызывает распределение частиц с плотностью $\rho(t,q)$ (см. (4.65)).

Характерное отличие уравнения (4.62) от соответствующего «классического» нелинейного волнового уравнения состоит «лишь» в операторной природе ψ, $\overset{+}{\psi}$, т. е. в наличии перестановочных соотношений (4.58) или (4.59). Формально уравнение (4.62) получается как бы «вторичным» квантованием — квантованием волновых функций из «классического» уравнения Шредингера с «самосогласованным полем» $U_i(q)$. Слово «классический» мы ставим в кавычки, поскольку для получения такого уравнения уже требуется одно, так сказать «первичное», квантование. В теории поля имеется подобный подход: берут полевые уравнения, получаемые из некоторого лагранжиана, и затем на полевые функции накладывают соответствующие перестановочные соотношения, совместные с данным временны́м уравнением для полевых функций.

Можно также дать представление для статистического оператора комплекса s частиц (см. [4, формула (2.50)]):

$$R_s(x_1,\dots,x_s;x_1',\dots,x_s')=$$

$$=\frac{(N-s)!}{N!}\sum_{\substack{f_1,\dots,f_s\\f_1',\dots,f_s'}}\overline{\overset{+}{a}_{f_1}\dots\overset{+}{a}_{f_s}a_{f_s'}a_{f_1'}}\psi_{f_1'}(x_1)\dots\psi_{f_s'}(x_s)\psi^*_{f_1}(x_1')\dots\psi^*_{f_s}(x_s').\tag{4.66a}$$

Учитывая введенные операторные функции (3.54), имеем

$$R_s(x_1,\dots,x_s;x'_1,\dots,x'_s)=\frac{(N-s)!}{N!}\overline{\overset{+}{\psi}(x'_1)\dots\overset{+}{\psi}(x'_s)\psi(x_s)\dots\psi(x_1)}=$$
$$=\frac{(N-s)!}{N!}\langle\overset{+}{\psi}(x'_1)\dots\overset{+}{\psi}(x'_s)\psi(x_s)\dots\psi(x_1)\rangle. \quad (4.66б)$$

Здесь черта сверху (угловые скобки) означает усреднение по «переменным вторичного квантования». В случае усреднения по «чистому ансамблю» [4]

$$\overline{\sigma_s(1,\dots,s)}=(C,\sigma_s(1,\dots,s)C)=$$
$$=\sum_{\substack{\dots,n_f,\dots\\ \dots,n'_f,\dots}} C^*(\dots,n_f,\dots)\{\sigma_s(1,\dots,s)\}_{\dots,n_f,\dots;\dots,n'_f,\dots}C(\dots,n'_f,\dots).$$

В общем случае усреднения по «смеси»

$$\overline{\sigma_s(1,\dots,s)}=\operatorname*{Sp}_{\dots,n_f,\dots}\sigma_s\mathcal{D}=$$
$$=\sum_{\substack{\dots,n_f,\dots\\ \dots,n'_f,\dots}}\{\sigma_s(1,\dots,s)\}_{\dots,n_f,\dots;\dots,n'_f,\dots}\mathcal{D}(\dots,n'_f,\dots;\dots,n_f,\dots), \quad (4.67)$$

где $\mathcal{D}$ — полный статистический оператор системы в представлении вторичного квантования. Кроме того, согласно [4],

$$R_s(1,\dots,s)=\overline{\sigma_s(1,\dots,s)},$$

а $\sigma_s(1,\dots,s)$ является оператором «двойного действия», действующим, с одной стороны, на обычные волновые функции комплекса частиц, а с другой — на волновые функции вторичного квантования [4]. Указанное выше усреднение переводит его в обычный оператор

$$\overline{\sigma_s(1,\dots,s)}=\langle\sigma_s(1,\dots,s)\rangle,$$

действующий на обычные волновые функции комплекса s частиц.

Глава V

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К МЕТОДУ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

В этой главе мы сделаем ряд дополнительных замечаний по поводу метода вторичного квантования.

§ 1. Результаты, не зависящие от числа частиц системы

Прежде всего обратим внимание на то обстоятельство, что в представлении вторичного квантования форма операторов аддитивного, бинарного и т. д. типов, в частности и гамильтониан рассматриваемой динамической системы,

не зависит явно от числа частиц N. Это число войдет в выражение матричных элементов таких операторов посредством N-частичных волновых функций C. Указанное обстоятельство оказывается весьма удобным для задач статистической механики, в которых мы имеем дело с так называемым большим ансамблем Гиббса.

а) Большой канонический ансамбль. Большой ансамбль Гиббса характеризуется гамильтонианом

$$\Gamma = H - \mu\mathcal{N}, \tag{5.1}$$

содержащим параметр μ, называемый химическим потенциалом. Средние значения динамических величин берутся по статистическому оператору

$$\frac{1}{\Omega}\mathrm{e}^{-\Gamma/\theta}, \quad \Omega = \mathrm{Sp}\,\mathrm{e}^{-\Gamma/\theta}$$

большого ансамбля

$$\langle\mathcal{D}\rangle = \frac{\mathrm{Sp}\,\mathrm{e}^{-\Gamma/\theta}\mathcal{D}}{\mathrm{Sp}\,\mathrm{e}^{-\Gamma/\theta}}. \tag{5.2}$$

Существенное отличие такого ансамбля от обычного ансамбля Гиббса состоит в том, что шпуры в (5.2) берутся по состояниям с произвольным, а не с фиксированным значением числа частиц N.

Ввиду (5.2) среднее число частиц $\overline{N}$ будет

$$\overline{N} = \langle\mathcal{N}\rangle = \frac{\mathrm{Sp}\,\mathrm{e}^{-\Gamma/\theta}\mathcal{N}}{\mathrm{Sp}\,\mathrm{e}^{-\Gamma/\theta}} = f(\mu, \theta), \tag{5.3}$$

и мы можем рассматривать это соотношение как уравнение для определения химического потенциала μ по заданному значению $\overline{N}$.

б) Квазидискретное представление. Вообще, в статистической механике целесообразно рассматривать динамические системы, находящиеся в конечном объеме, и затем уже совершать предельный переход, расширяя этот объем на все пространство. Дело в том, что если имеем любое конечное число частиц в бесконечном пространстве, то их средняя плотность оказывается равной нулю. Поэтому, если мы желаем рассматривать динамическую систему сразу во всем бесконечном пространстве и вместе с тем обеспечить отличную от нуля плотность числа частиц, мы тем самым оказываемся вынужденными иметь дело с бесконечным числом частиц. Но тогда оператор $\mathcal{N}$, да и сам гамильтониан H, эффективно пропорциональный числу частиц, теряют смысл и становится необходимым проводить дополнительные исследования, связанные с переформулировкой постановки задачи. Чтобы избежать этой формальной трудности и иметь дело с конечным объемом, удобно воспользоваться методом квазидискретного представления, о котором говорилось в гл. 2.

В соответствии с основной идеей этого представления рассматриваем в качестве допустимого пространства точек конечную область, определенную неравенствами

$$-\frac{L}{2} < q^{(\alpha)} < \frac{L}{2}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{5.4}$$

с объемом $V = L^3$. Буквой V будем обозначать как область (5.4), так и ее объем. На волновые функции

$$\varphi(x_1, \ldots, x_N), \quad x = (q, \nu)$$

наложено условие периодичности с периодом L по каждой из пространственных координат $q_j^{(\alpha)}$. При этом, чтобы обеспечить выполнение такого условия периодичности для всех моментов времени t, берем для потенциальной энергии взаимодействия пары частиц вместо интеграла Фурье (2.17) вида

$$\Phi(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(k\cdot q)} f(k) dk, \quad (k\cdot q) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}), \tag{5.5}$$

дискретную сумму (2.18) вида

$$\Phi(q) = \frac{1}{V} \sum_k e^{i(k\cdot q)} f(k), \tag{5.6}$$

в которой в качестве k взято дискретное множество (2.15)

$$k = \left(\frac{2\pi n^{(1)}}{L}, \frac{2\pi n^{(2)}}{L}, \frac{2\pi n^{(3)}}{L} \right), \tag{5.7}$$

где $n^{(\alpha)}$ — целые числа, способные принимать любые отрицательные и положительные (а также нулевые) значения.

в) Базисные и операторные функции. Как отмечалось в гл. 2, дискретная сумма (5.6) переходит в интеграл Фурье (5.5) при $V \to \infty$. Ввиду периодичности волновых функций по отношению ко всем пространственным координатам система базисных функций взята в форме (2.6), (2.14):

$$\Psi_{k,\sigma}(q,\nu) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(k\cdot q)} \delta(\nu - \sigma) \tag{5.8}$$

с дискретным k из множества (5.7). Данная система (5.8), очевидно, будет полной и ортонормированной для области V.

Введем теперь операторные функции, положив

$$\begin{aligned} \psi(q,\nu) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(k\cdot q)} a_{k,\nu}, \\ \overset{+}{\psi}(q,\nu) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i(k\cdot q)} \overset{+}{a}_{k,\nu}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $a_{k,\nu}$, $\overset{+}{a}_{k,\nu}$ являются квантованными амплитудами Бозе или Ферми с соответствующими перестановочными соотношениями. Нетрудно заметить, что, поскольку

$$\frac{1}{V} \sum_k e^{ik\cdot(q-q')} = \delta(q - q')$$

для q и q', лежащих внутри области V, введенные операторные функции (5.9) удовлетворяют перестановочным соотношениям (4.4) и (4.5) внутри этой области, которая только и рассматривается.

г) Представление вторичного квантования для гамильтониана Г. Отсюда видно, что все рассуждения гл. 4 остаются верными и в данном случае, когда в качестве допустимого пространства точек q берется область V.

Получим поэтому для гамильтониана следующее представление вторичного квантования:

$$\Gamma = H - \mu\mathcal{N} = \sum_{\nu} \int_V \overset{+}{\psi}(q,\nu)\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_q - \mu\right\}\psi(q,\nu)dq +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\nu_1,\nu_2}\int_V \Phi(q_1-q_2)\overset{+}{\psi}(q_1,\nu_1)\overset{+}{\psi}(q_2,\nu_2)\psi(q_2,\nu_2)\psi(q_1,\nu_1)dq_1dq_2. \quad (5.10)$$

Для преобразования Γ к форме, составленной из квантованных амплитуд, нам остается только подставить соотношения (5.6), (5.9) в выражение (5.10). При вычислениях целесообразно иметь в виду соотношения ортонормированности с кронекеровской функцией

$$\int_V \mathrm{e}^{i(k-k')\cdot q}dq = V\delta_{\mathrm{Kr}}(k-k'). \quad (5.11)$$

Заметим, что связь между дираковской δ-функцией и кронекеровской δ такова:

$$\delta_{\mathrm{Dir}}(q) = (2\pi)^{-3}V\delta_{\mathrm{Kr}}(q),$$

$$\delta_{\mathrm{Dir}}(q) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{i(k\cdot q)}dk \simeq \frac{1}{V}\sum_k \mathrm{e}^{i(k\cdot q)}.$$

Запишем теперь

$$\overset{+}{\psi}(q_1,\nu_1)\overset{+}{\psi}(q_2,\nu_2)\psi(q_2,\nu_2)\psi(q_1,\nu_1) =$$

$$= \frac{1}{V^2}\sum_{k_1,k_2,k_1',k_2'} \overset{+}{a}_{k_1\nu_1}\overset{+}{a}_{k_2\nu_2}a_{k_2'\nu_2}a_{k_1'\nu_1}\exp\{-i(k_1-k_1')\cdot q_1 - i(k_2-k_2')\cdot q_2\},$$

и далее

$$\Phi(q_1-q_2)\overset{+}{\psi}(q_1,\nu_1)\overset{+}{\psi}(q_2,\nu_2)\psi(q_2,\nu_2)\psi(q_1,\nu_1) =$$

$$= \frac{1}{V^3}\sum_{k_1,k_2,k_1',k_2',k} f(k)\overset{+}{a}_{k_1\nu_1}\overset{+}{a}_{k_2\nu_2}a_{k_2'\nu_2}a_{k_1'\nu_1}\times$$

$$\times\exp\{i([k-(k_1-k_1')]\cdot q_1)\}\exp\{-i([k+(k_2-k_2')]\cdot q_2)\}.$$

Ввиду (5.11) интегрирование этого выражения по q_1 и q_2 дает множитель

$$V^2\delta(k-(k_1-k_1'))\delta(k+k_2-k_2') = V^2\delta(k-(k_1-k_1'))\delta(k_1+k_2-k_1'-k_2').$$

Таким образом, из (5.10) получим

$$\Gamma = \sum_{k,\nu}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu\right)\overset{+}{a}_{k,\nu}a_{k,\nu} +$$

$$+ \frac{1}{2V}\sum_{k_1,k_2,k_1',k_2'}\sum_{\nu_1,\nu_2} f(k_1-k_1')\delta(k_1+k_2-k_1'-k_2')\overset{+}{a}_{k_1\nu_1}\overset{+}{a}_{k_2\nu_2}a_{k_2'\nu_2}a_{k_1'\nu_1}. \quad (5.12)$$

В случае бесспиновых частиц индекса ν здесь совсем не будет. При рассмотрении частиц с половинным спином ν пробегает два значения: $\nu = \pm 1/2$.

д) Вектор импульса. Заметим между прочим, что гамильтониан (5.10) коммутирует с вектором импульса рассматриваемой динамической системы:

$$\mathbf{P} = -i\hbar \int_V \sum_\nu \overset{+}{\psi}(q,\nu)\nabla_q \psi(q,\nu)dq = \hbar \sum_\nu \mathbf{k} \overset{+}{a}_{k,\nu} a_{k,\nu}. \tag{5.13}$$

Действительно, коммутирование $\mathbf{P}$ с первой суммой в правой части (5.12) тривиально. В отношении же второй суммы достаточно заметить, что оператор $a_{k_2'\nu_2} a_{k_1'\nu_1}$ вызывает уменьшение $\mathbf{P}$ на $\mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_2'$, а оператор $\overset{+}{a}_{k_1\nu_1} \overset{+}{a}_{k_2\nu_2}$ вызывает увеличение $\mathbf{P}$ на $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Но этот вектор равен вектору $\mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_2'$ ввиду наличия кронекеровской δ-функции $\delta(k_1 + k_2 - k_1' - k_2')$. Таким образом, в принятой квазидискретной схеме импульс $\mathbf{P}$ является интегралом движения. В заключение подчеркнем еще раз, что при использовании квазидискретного представления необходимо всегда иметь в виду предельный переход

$$V \to \infty. \tag{5.14}$$

§ 2. Волновые функции в представлении вторичного квантования

В гл. 4 мы основывались на формуле (4.1), рассматривая ее как определение волновых функций в представлении вторичного квантования. При этом мы существенно использовали лишь перестановочные соотношения (4.4) или (4.5) для операторных функций $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$ и совершенно не нуждались в той конкретной специальной конструкции квантовых амплитуд, о которой говорилось в гл. 3.

а) Условия. Покажем, что представление (4.1) можно формально получить из следующих общих соображений:

а) Рассматриваем линейное пространство $\mathcal{L}$ векторов C, представляющих состояния изучаемой динамической системы, в котором определено скалярное произведение двух векторов

$$(C_1, C_2) \tag{5.1}$$

с обычными свойствами.

б) Пусть на векторы этого пространства действуют операторные функции $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$, удовлетворяющие перестановочным соотношениям (4.4) или (4.5), переводя их опять в векторы того же пространства. Таким образом, если C есть вектор из $\mathcal{L}$, то

$$\psi(x)C, \quad \overset{+}{\psi}(x)C \tag{5.2}$$

также будут векторами из $\mathcal{L}$.

в) В $\mathcal{L}$ существует нормированный вектор C_{vac}, для которого

$$(C_{\text{vac}}, C_{\text{vac}}) = 1$$

и для которого для всех x

$$\psi(x)C_{\text{vac}} = 0.$$

г) Если C_0 будет таким вектором в $\mathcal{L}$, что для всех x

$$\psi(x)C_0 = 0, \tag{5.3}$$

то

$$C_0 = \mathcal{K} \cdot C_{\text{vac}}, \tag{5.4}$$

где $\mathcal{K}$ — нормировочный множитель, который можно выносить за знак скалярного произведения:

$$(C, C_0) = \mathcal{K} \cdot (C, C_{\text{vac}}). \tag{5.5}$$

б) Замечания к условию *г*. Скажем сейчас несколько слов по поводу смысла этого условия, которое на первый взгляд может показаться тривиальным.

I. Ограничение на число сортов частиц. Возьмем динамическую систему, состоящую из двух подсистем: у первой подсистемы состояния нумеруются числами заполнения $(\ldots, n_f, \ldots)$, а состояния второй подсистемы нумеруются некоторыми независимыми величинами X. Представим волновые функции всей такой системы в виде

$$C = C(\ldots, n_f, \ldots; X) \tag{5.6}$$

и введем скалярное произведение, положив

$$(C_1, C_2) = \sum_X \sum_{\ldots, n_f, \ldots} C_1^*(\ldots, n_f, \ldots; X) C_2(\ldots, n_f, \ldots; X). \tag{5.7}$$

В случае если X непрерывны, заменяем естественным образом суммирование по X соответствующим интегрированием. Введем операторные функции $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$, оказывающие воздействие лишь на числа заполнения $(\ldots, n_f, \ldots)$ и не действующие на X. В таком случае из соотношения (5.17) будет вытекать, что

$$C_0(\ldots, n_f, \ldots; X) = \varphi(X) \prod_f \delta(n_f). \tag{5.8}$$

Но ввиду принятого определения (5.21) скалярного произведения входящий в (5.22) множитель $\varphi(X)$ уже нельзя выносить за знак скалярного произведения. Таким образом, условие *г* является, в сущности, условием того, что рассматриваемая динамическая система состоит из частиц одного сорта — бозонов или фермионов.

Наоборот, положим, как и везде ранее, что имеются лишь частицы одного сорта, и соответственно определим скалярное произведение как

$$(C_1, C_2) = \sum_{\ldots, n_f, \ldots} C_1^*(\ldots, n_f, \ldots) C_2(\ldots, n_f, \ldots).$$

Тогда если C и зависят от некоторых параметров X, не связанных с $(\ldots, n_f, \ldots)$, то в соотношении (5.22) $\varphi(X)$ будет множителем, который можно выносить за знак скалярного произведения. Примером C, зависящих от X, могут служить, например, выражения (5.16), в которых

$$X = x.$$

II. Выражения для $\mathcal{K}$ и C_0. Взяв в (5.19) $C = C_{\text{vac}}$, найдем $\mathcal{K} = (C_{\text{vac}}, C_0)$ и, подставив в (5.18), будем иметь

$$C_0 = C_{\text{vac}} \cdot (C_{\text{vac}}, C_0). \tag{5.9}$$

Таким образом, из условия *г* следует, что если (5.17) имеет место для всех x, то такое C_0 представимо в виде (5.23).

в) Вывод выражения для волновой функции. Основываясь на этих общих положениях, перейдем к получению представления (4.1).

Введем оператор

$$\mathcal{N} = \int \overset{+}{\psi}(x)\psi(x)\,dx. \tag{5.10}$$

Поскольку $\mathcal{N}$ представляется интегралом от произведения оператора $\psi(x)$ на сопряженный оператор $\overset{+}{\psi}(x)$, ясно, что $\mathcal{N}$ является самосопряженным оператором и что его собственные значения не могут быть отрицательны. Повторяя вычисления гл. 4, основанные только на перестановочных соотношениях, убеждаемся, что

$$\mathcal{N}\psi(x) = \psi(x)(\mathcal{N} - 1), \tag{5.11}$$

$$\mathcal{N}\overset{+}{\psi}(x) = \overset{+}{\psi}(x)(\mathcal{N} + 1). \tag{5.12}$$

Но из (5.25) вытекает

$$\mathcal{N}\psi(x_s)\dots\psi(x_1) = \psi(x_s)\dots\psi(x_1)(\mathcal{N} - s). \tag{5.13}$$

Основываясь на этом равенстве, нетрудно заметить, что собственные значения $\mathcal{N}$ целые. Действительно, возьмем некоторый собственный вектор C_n для $\mathcal{N}$, соответствующий собственному значению n:

$$(\mathcal{N} - n)C_n = 0.$$

Ввиду (5.27) будем иметь

$$\mathcal{N}\psi(x_s)\dots\psi(x_1)C_n = \psi(x_s)\dots\psi(x_1)(\mathcal{N} - s)C_n,$$

т. е.

$$\mathcal{N}\psi(x_s)\dots\psi(x_1)C_n = (n - s)\psi(x_s)\dots\psi(x_1)C_n. \tag{5.27a}$$

Таким образом, если вектор

$$\psi(x_s)\dots\psi(x_1)C_n \tag{5.14}$$

не обращается тождественно в нуль (не равен нулю при всех $x_1, \dots, x_s$), то он будет собственным вектором для $\mathcal{N}$, соответствующим собственному значению, равному $(n - s)$. Поскольку, однако, собственные значения $\mathcal{N}$ не могут быть отрицательными, отсюда следует, что начиная с некоторого s выражения (5.28) должны тождественно обращаться в нуль. Если (5.28) тождественно обращается в нуль уже при $s = 1$, то это значит, что на основании условия $г$ C_n пропорционально C_{vac} и, следовательно, $n = 0$. Пусть, далее, векторы вида (5.28) не обращаются тождественно в нуль при $s = 1, 2, \dots, l$, а для $s = l + 1$ данное выражение уже обращается тождественно в нуль. Стало быть, имеем

$$\psi(x_{l+1})\{\psi(x_l)\dots\psi(x_1)C_n\} = 0$$

для всех x_{l+1}, и потому

$$\mathcal{N}\{\psi(x_l)\dots\psi(x_1)C_n\} = 0.$$

Приняв во внимание (5.27а), убеждаемся, что $n = l$.

Итак, все собственные значения N оператора $\mathcal{N}$ являются целыми: $N = 0, 1, 2, \dots$. Возьмем состояние, для которого $N \geqslant 1$: $\mathcal{N}C_N = NC_N$, и попробуем представить его в виде (4.1). Чтобы построить такое представление,

введем, воспользовавшись формулой (4.20), функцию

$$\varphi(x_1,\dots,x_N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}(C_{\text{vac}},\psi(x_N)\dots\psi(x_1)C_N). \tag{5.15}$$

Если $N\geqslant 2$, то в случае статистики Бозе операторы $\psi(x_j)$ коммутируют между собой и $\varphi(x_1,\dots,x_N)$ оказывается симметричной функцией $x_1,\dots,x_N$. В случае статистики Ферми операторы $\psi(x_j)$ антикоммутируют между собой и $\varphi(x_1,\dots,x_N)$ оказывается антисимметричной функцией $x_1,\dots,x_N$.

Нам остается теперь показать, что в обоих случаях

$$C_N=\frac{1}{\sqrt{N!}}\int\varphi(x_1,\dots,x_N)\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\,dx_1\dots dx_N,\quad N\geqslant 1. \tag{5.16}$$

Чтобы доказать это равенство, заметим, что

$$\mathcal{N}\psi(x)\psi(x_N)\dots\psi(x_1)C_N=\psi(x)\psi(x_N)\dots\psi(x_1)\times$$
$$\times(\mathcal{N}-(N+1))C_N=-\psi(x)\psi(x_N)\dots\psi(x_1)C_N.$$

Так как $\mathcal{N}$ не имеет отрицательных собственных значений, отсюда вытекает, что при всех x

$$\psi(x)\{\psi(x_N)\dots\psi(x_1)C_N\}=0.$$

Применив условие $г$, видим, что

$$\psi(x_N)\dots\psi(x_1)C_N=C_{\text{vac}}(C_{\text{vac}},\psi(x_N)\dots\psi(x_1)C_N)=\sqrt{N!}\,C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_N), \tag{5.17}$$

и потому благодаря равенству (5.30) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{N!}}\int\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N=$$
$$=\frac{1}{N!}\int\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\psi(x_N)\dots\psi(x_1)C_N\,dx_1\dots dx_N. \tag{5.18}$$

Для вычисления интеграла по $x_1,\dots,x_N$ заметим, что

$$\int\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_s)\psi(x_s)\dots\psi(x_1)C_N\,dx_s=$$
$$=\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_{s-1})\mathcal{N}\psi(x_{s-1})\dots\psi(x_1)C_N=$$
$$=\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_{s-1})\psi(x_{s-1})\dots\psi(x_1)(N-s+1)C_N,$$
$$\int\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_s)\psi(x_s)\dots\psi(x_1)C_N\,dx_s=$$
$$=(N-s+1)\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_{s-1})\psi(x_{s-1})\dots\psi(x_1).$$

Отсюда получаем последовательно

$$\int\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_N)\psi(x_N)\dots\psi(x_1)\,dx_1\dots dx_NC_N=$$
$$=\int\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_{N-1})\psi(x_{N-1})\dots\psi(x_1)\,dx_1\dots dx_{N-1}C_N=$$
$$=2\int\overset{+}{\psi}(x_1)\dots\overset{+}{\psi}(x_{N-2})\psi(x_{N-2})\dots\psi(x_1)\,dx_1\dots dx_{N-2}C_N=\dots=N!C_N.$$

Подставив это тождество в формулу (5.32), мы и получим искомое представление (5.30). Поскольку

$$\mathcal{N}\overset{+}{\psi}(x_1)\ldots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}} = \overset{+}{\psi}(x_1)\ldots\overset{+}{\psi}(x_N)(\mathcal{N}+N)C_{\text{vac}} = N\overset{+}{\psi}(x_1)\ldots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}},$$

видим, что для выражения (5.30) оператор $\mathcal{N}$, действительно, принимает собственное значение, равное N. Ясно теперь, что оператор $\mathcal{N}$ в общей схеме также представляет число частиц.

Мы до сих пор имели дело с N-частичными собственными функциями C_N оператора числа частиц $\mathcal{N}$. В общем случае, если мы имеем дело с состояниями, в которых число частиц не фиксировано, можно написать

$$C = \sum_N C_N \tag{5.19}$$

или

$$C = \sum_N \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \varphi(x_1, \ldots, x_N)\overset{+}{\psi}(x_1)\ldots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}\,dx_1 \ldots dx_N, \tag{5.20}$$

причем φ определяется через C_N с помощью формул (5.29). Нетрудно заметить, что две функции C, соответствующие различным значениям N, будут ортогональны. Имеем, действительно,

$$N_1(C_{N_1}, C_{N_2}) = (\mathcal{N}C_{N_1}, C_{N_2}) = (C_{N_1}, \mathcal{N}C_{N_2}) = N_2(C_{N_1}, C_{N_2}),$$

т. е. $(N_1 - N_2)(C_{N_1}, C_{N_2}) = 0$, и потому

$$(C_{N_1}, C_{N_2}) = 0 \quad \text{для } N_1 \neq N_2.$$

Отсюда видим, что выражение

$$(C_{\text{vac}}, \psi(x_N)\ldots\psi(x_1)C_{N_1}) = (\overset{+}{\psi}(x_1)\ldots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}, C_{N_1})$$

равно нулю, если $N_1 \neq N$, поскольку $\overset{+}{\psi}(x_1)\ldots\overset{+}{\psi}(x_N)C_{\text{vac}}$ есть N-частичный вектор в $\mathcal{L}$. Поэтому, подставив (5.33) в (5.29) вместо C_N, мы не изменим результата. Итак,

$$\begin{gathered}\varphi = (C_{\text{vac}}, C),\\ \varphi(x_1) = (C_{\text{vac}}, \psi(x_1)C),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}(C_{\text{vac}}, \psi(x_N)\ldots\psi(x_1)C).\end{gathered} \tag{5.21}$$

Как видно, состоянию C с нефиксированным значением числа частиц соответствует цепочка обычных волновых функций; C играет роль как бы «производящего функционала». Особо важное значение такие C с нефиксированным числом частиц имеют для динамических систем, для которых оператор числа частиц не является интегралом движения.

Динамические системы, в которых частицы могут появляться и уничтожаться, весьма типичны для квантовой теории поля. Однако и в обычных, нерелятивистских задачах статистической механики иногда оказывается целесообразным рассматривать динамические системы с несохраняющимся оператором числа частиц $\mathcal{N}$.

§ 3. Динамическая система, состоящая из нескольких сортов фермионов и бозонов

До сих пор мы рассматривали динамические системы, состоящие из одинаковых частиц. Не представляет, однако, затруднений перенести все рассуждения и на более общий случай, когда мы имеем динамическую систему, состоящую из нескольких сортов бозонов и фермионов.

а) Обычные волновые функции. Возьмем для простоты изложения случай, когда имеем дело с двумя сортами частиц. Обычные волновые функции такой динамической системы представим в форме

$$\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_{N_1}; y_1, \ldots, y_{N_2}). \tag{5.1}$$

Здесь N_j — число частиц j-го сорта ($j = 1, 2$), x — переменные, параметризующие состояния одной частицы 1-го сорта, а y — 2-го сорта.

Поскольку все частицы данного сорта одинаковы, они являются бозонами или фермионами. Таким образом, если частицы 1-го сорта являются фермионами, то φ — антисимметричная функция $x_1, \ldots, x_N$, а если бозонами, то φ — симметричная функция тех же аргументов. Аналогичное утверждение относится и к свойствам симметрии φ по отношению к $y_1, \ldots, y_{N_2}$.

б) Операторные функции. Для перехода от обычного представления (5.36) к представлению вторичного квантования введем операторные функции[1]

$$\psi_1(x), \overset{+}{\psi}_1(x); \quad \psi_2(y), \overset{+}{\psi}_2(y) \tag{5.2}$$

со свойствами:

а) ψ_1, $\overset{+}{\psi}_1$ всегда коммутируют с ψ_2, $\overset{+}{\psi}_2$;

б) ψ_j, $\overset{+}{\psi}_j$ при данном $j = 1, 2$ удовлетворяют перестановочным соотношениям Бозе (если частицы этого сорта — бозоны) или Ферми (если частицы этого сорта — фермионы);

---

[1] Для конкретного построения таких операторных функций можно воспользоваться процедурой, подробно изложенной в гл. 2 и 3. А именно, возьмем полные ортонормированные системы $\Psi_f(x)$, $\theta_{f'}(y)$ и перейдем от x-, y-представления (5.36) волновых функций к их f-, f'-представлению:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{N_1}; y_1, \ldots, y_{N_2}) = \sum_{f_1, \ldots, f_{N_1}; f'_1, \ldots, f'_{N_2}} F(f_1, \ldots, f_{N_1}; f'_1, \ldots, f'_{N_2}) \Psi_{f_1}(x_1) \ldots \Psi_{f_{N_1}}(x_{N_1}) \theta_{f'_1}(y_1) \ldots \theta_{f'_{N_2}}(y_{N_2}).$$

Далее вводим две системы чисел заполнения $\ldots, n_f, \ldots; \ldots, m_{f'}, \ldots$ соответственно двум системам аргументов $f_1, \ldots, f_{N_1}; f'_1, \ldots, f'_{N_2}$ функции F. Указанным в гл. 3 способом строим амплитуды $a_{1,f}$, $\overset{+}{a}_{1,f}$; $a_{2,f}$, $\overset{+}{a}_{2,f}$, действующие соответственно на аргументы $\ldots, n_f, \ldots$ и $\ldots, m_{f'}, \ldots$ функции $C = C(\ldots, n_f, \ldots; \ldots, m_{f'}, \ldots)$. Таким путем получаем в качестве a_j, $\overset{+}{a}_j$ амплитуды Бозе или Ферми в зависимости от характера частиц j-го сорта. Во всяком случае, $(a_{1,f}, \overset{+}{a}_{1,f})$ всегда коммутируют с $(a_{2,f'}, \overset{+}{a}_{2,f'})$ как операторы, действующие на разные группы аргументов. С помощью квантованных амплитуд строим, наконец, и операторные функции

$$\psi_1(x) = \sum_f \Psi_f(x) a_{1,f}; \quad \psi_2(y) = \sum_f \theta_f(y) a_{2,f}.$$

в) имеется C_{vac} — функция «вакуумного состояния», для которой

$$(C_{\text{vac}}, C_{\text{vac}}) = 1$$

и для всех x и y

$$\psi_1(x)C_{\text{vac}} = 0, \quad \psi_2(y)C_{\text{vac}} = 0.$$

Тогда путем естественного обобщения применявшейся процедуры определим волновую функцию C в представлении вторичного квантования в виде

$$C = \frac{1}{\sqrt{N_1!N_2!}} \int \overset{+}{\psi}_1(x_1) \dots \overset{+}{\psi}_1(x_{N_1}) \overset{+}{\psi}_2(y_1) \dots \overset{+}{\psi}_2(y_{N_2}) C_{\text{vac}} \times$$

$$\times \varphi(x_1, \dots, x_{N_1}; y_1, \dots, y_{N_2})\, dx_1 \dots dx_{N_1}\, dy_1 \dots dy_{N_2}. \quad (5.3)$$

в) Преобразование динамических величин. Как было показано в гл. 4, преобразование динамических величин к представлению вторичного квантования целиком основывалось на лемме и ее следствиях I, II. Фактически такое представление непосредственно вытекало из равенств (4.6), (4.16) (следствие I) и (4.17) (следствие II), причем в равенстве (4.17) содержится и равенство (4.6) при $s = 1$, и равенство (4.16) при $s = 2$. Но если обратить внимание на доказательство леммы и ее следствий, то легко заметить, что при этом использовалось только одно свойство C_{vac}, а именно

$$\psi(x)C_{\text{vac}} = 0$$

при всех x. Так как

$$\psi_1(x)\overset{+}{\psi}_2(y_1) \dots \overset{+}{\psi}_2(y_{N_2})C_{\text{vac}} = 0$$

при всех x, то в рассматриваемом случае можно переписать (4.17) в виде

$$\int \psi_1(x'_s) \dots \psi_1(x'_1)\overset{+}{\psi}_1(x_1) \dots \overset{+}{\psi}_1(x_{N_1})\overset{+}{\psi}_2(y_1) \dots \overset{+}{\psi}_2(y_{N_2})C_{\text{vac}} \times$$

$$\times \varphi(x_1, \dots, x_{N_1}; y_1, \dots, y_{N_2})\, dx_1 \dots dx_{N_1}\, dy_1 \dots dy_{N_2} =$$

$$= N_1(N_1 - 1) \dots (N_1 - s + 1) \int \overset{+}{\psi}_1(x_{s+1}) \dots \overset{+}{\psi}_1(x_{N_1})\overset{+}{\psi}_2(y_1) \dots$$

$$\dots \overset{+}{\psi}_2(y_{N_2})C_{\text{vac}}\varphi(x_1, \dots, x_{N_1}; y_1, \dots, y_{N_2})\delta(x'_1 - x_1) \dots$$

$$\dots \delta(x'_s - x_s)\, dx_1 \dots dx_{N_1}\, dy_1 \dots dy_{N_2}. \quad (5.4)$$

Совершенно аналогично, изменив роли ψ_1, $\overset{+}{\psi}_1$, ψ_2, $\overset{+}{\psi}_2$ и учитывая их коммутирование, получим

$$\int \psi_2(y'_s) \dots \psi_2(y'_1)\overset{+}{\psi}_1(x_1) \dots \overset{+}{\psi}_1(x_{N_1})\overset{+}{\psi}_2(y_1) \dots \overset{+}{\psi}_2(y_{N_2})C_{\text{vac}} \times$$

$$\times \varphi(x_1, \dots, x_{N_1}; y_1, \dots, y_{N_2})\, dx_1 \dots dx_{N_1}\, dy_1 \dots dy_{N_2} =$$

$$= N_2(N_2 - 1) \dots (N_2 - s + 1) \int \overset{+}{\psi}_1(x_1) \dots \overset{+}{\psi}_1(x_{N_1})\overset{+}{\psi}_2(x_{s+1}) \dots$$

$$\dots \overset{+}{\psi}_2(y_{N_2})C_{\text{vac}}\varphi(x_1, \dots, x_{N_1}; y_1, \dots, y_{N_2})\delta(y'_1 - y_1) \dots$$

$$\dots \delta(y'_s - y_s)\, dx_1 \dots dx_{N_1}\, dy_1 \dots dy_{N_2}. \quad (5.5)$$

Если теперь приложим оператор $\psi_2(y'_{s_2})\dots\psi_2(y'_1)$ слева к обеим частям тождества (5.39) и учтем затем тождество (5.40), то будем иметь

$$\int \psi_2(y'_{s_2})\dots\psi_2(y'_2)\psi_1(x'_{s_1})\dots\psi_1(x'_1)\overset{+}{\psi}_1(x_1)\dots\overset{+}{\psi}_1(x_{N_1})\overset{+}{\psi}_2(y_1)\dots$$

$$\dots\overset{+}{\psi}_2(y_{N_2})C_{\text{vac}}\varphi(x_1,\dots,x_{N_1};y_1,\dots,y_{N_2})\,dx_1\dots dx_{N_1}\,dy_1\dots dy_{N_2}=$$

$$=\{N_1\dots(N_1-s_1+1)\}\{N_2\dots(N_2-s_2+1)\}\times$$

$$\times\int\overset{+}{\psi}_1(x_{s_1+1})\dots\overset{+}{\psi}_1(x_{N_1})\overset{+}{\psi}_2(y_{s_2+1})\dots\overset{+}{\psi}_2(y_{N_2})C_{\text{vac}}\times$$

$$\times\varphi(x_1,\dots,x_{N_1};y_1,\dots,y_{N_2})\delta(x'_1-x_1)\dots\delta(x'_{s_1}-x_{s_1})\delta(y'_1-y_1)\dots$$

$$\dots\delta(y'_{s_2}-y_{s_2})\,dx_1\dots dx_{N_1}\,dy_1\dots dy_{N_2}. \quad (5.6)$$

Основываясь на (5.39) и дословно повторяя рассуждения гл. 4, видим, что динамические величины аддитивного, бинарного, ..., s-кратного типов, относящиеся лишь к частицам 1-го сорта, в представлении вторичного квантования имеют ту же форму, что и в гл. 4, если взять там $\psi=\psi_1$. Благодаря (5.40) то же относится и к динамическим величинам этих типов, относящихся лишь к частицам 2-го сорта. Здесь в соответствующих формулах гл. 4 мы, естественно, должны положить $\psi=\psi_2$.

г) Динамические переменные «смешанного типа». Пусть теперь мы имеем дело с динамическими переменными «смешанного типа», являющимися s_1-кратными по отношению к частицам 1-го сорта и s_2-кратными по отношению к частицам 2-го сорта:

$$\mathcal{D}^{(1,2)}=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\dots<i_{s_1}\leqslant N_1\\ 1\leqslant j_1<\dots<j_{s_2}\leqslant N_2}}\mathcal{D}^{(1,2)}_{i_1,\dots,i_{s_1};j_1,\dots,j_{s_2}}. \quad (5.7)$$

Здесь

$$\mathcal{D}^{(1,2)}_{1,\dots,s_1;1,\dots,s_2} \quad (5.42a)$$

— оператор, действующий на переменные $x_1,\dots,x_{s_1};\ y_1,\dots,y_{s_2}$ рассматриваемых волновых функций φ, симметричных по отношению к перестановкам между индексами $1,\dots,s_1$ и по отношению к перестановкам между индексами $1,\dots,s_2$, соответствующими частицам 1-го и 2-го сортов. Аналогично $\mathcal{D}^{(1,2)}_{i_1,\dots,i_{s_1};j_1,\dots,j_{s_2}}$ — тот же оператор (5.42а), только действующий соответственно на переменные $x_{i_1},\dots,x_{i_{s_1}};\ y_{j_1},\dots,y_{j_{s_2}}$ функций φ.

Для приведения рассматриваемого (s_1,s_2)-кратного оператора (5.42) к представлению вторичного квантования воспользуемся рецептурой гл. 4. Выберем C, соответствующую φ, и построим

$$C'\leftrightarrow\mathcal{D}^{(1,2)}\varphi$$

по формуле (5.38).

Ввиду того, что оператор $\mathcal{D}^{(1,2)}$ симметричен по отношению к частицам каждого из сортов, можно написать с помощью простого обобщения формулы

(4.44б) соотношение

$$C' = \left\{\frac{N_1 \dots (N_1 - s_1 + 1)}{s_1!\sqrt{N_1!}}\right\}\left\{\frac{N_2 \dots (N_2 - s_2 + 1)}{s_2!\sqrt{N_2!}}\right\}\int \overset{+}{\psi}_1(x_1)\dots$$
$$\dots \overset{+}{\psi}_1(x_{N_1})\overset{+}{\psi}_2(y_1)\dots\overset{+}{\psi}_2(y_{N_2})C_{\text{vac}}\times$$
$$\times \{\mathcal{D}^{(1,2)}_{1,\dots,s_1;1,\dots,s_2}\varphi\}_{x_1,\dots,x_{N_1};y_1,\dots,y_{N_2}}\,dx_1\dots dx_{N_1}\,dy_1\dots dy_{N_2}. \quad (5.8)$$

Обозначим через $\mathcal{D}^{(1,2)}(\xi,\eta;\eta',\xi')$, где для краткости положено

$$\xi = (x_1,\dots,x_{s_1}),\quad \eta = (y_1,\dots,y_{s_2}),$$
$$\eta' = (y'_1,\dots,y'_{s_2}),\quad \xi' = (x'_1,\dots,x'_{s_1}), \quad (5.9)$$

матричное представление для оператора (5.42). Тогда, основываясь на тождестве (5.41) и почти дословном повторении рассуждений гл. 4, получим окончательно следующее выражение для рассматриваемого (s_1, s_2)-кратного оператора (5.42) в представлении вторичного квантования:

$$\mathcal{D}^{(1,2)} = \frac{1}{s_1!s_2!}\int \overset{+}{\psi}_1(x_1)\dots\overset{+}{\psi}_1(x_{s_1})\overset{+}{\psi}_2(y_1)\dots$$
$$\dots\overset{+}{\psi}_2(y_{s_2})\mathcal{D}^{(1,2)}(\xi,\eta;\eta',\xi')\psi_2(y'_{s_2})\dots\psi_2(y'_1)\psi_1(x'_{s_1})\dots$$
$$\dots\psi_1(x'_1)\,dx_1\dots dx_{s_1}\,dy_1\dots dy_{s_2}\,dy'_1\dots dy'_{s_2}\,dx'_1\dots dx'_{s_1}. \quad (5.10)$$

д) Отсутствие зависимости от числа частиц. Возьмем в качестве примера динамическую величину, аддитивную по отношению к частицам и одного и другого сорта ($s_1 = s_2 = 1$):

$$U^{(1,2)} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant N_1\\ 1\leqslant j\leqslant N_2}} U^{(1,2)}_{i,j},$$

и обозначим через $U^{(1,2)}(x_1,y_1;y'_1,x'_1)$ матрицу, соответствующую $U^{(1,2)}_{1,1}$. Тогда благодаря выражению (5.45) видим, что в представлении вторичного квантования

$$U^{(1,2)} = \int U^{(1,2)}(x,y;y',x')\overset{+}{\psi}_1(x)\overset{+}{\psi}_2(y)\psi_2(y')\psi_1(x')\,dx\,dx'\,dy\,dy' =$$
$$= \int U^{(1,2)}(x,y;y',x')\overset{+}{\psi}_2(y)\overset{+}{\psi}_1(x)\psi_1(x')\psi_2(y')\,dx\,dx'\,dy\,dy'.$$

Рассмотрим теперь случай приведения к форме вторичного квантования гамильтониана, содержащего член взаимодействия частиц разных сортов:

$$H = \sum_{1\leqslant i\leqslant N_1} T^{(1)}_i + \sum_{1\leqslant j\leqslant N_2} T^{(2)}_j + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant N_1} U^{(1,1)}_{i_1,i_2} +$$
$$+ \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant N_2} U^{(2,2)}_{j_1,j_2} + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant N_1\\ 1\leqslant j\leqslant N_2}} U^{(1,2)}_{i,j}. \quad (5.11)$$

Вводя принятые выше обозначения для соответствующих матричных элементов, получаем

$$H = \int \overset{+}{\psi}_1(x) T^{(1)}(x, x') \psi_1(x')\, dx\, dx' + \int \overset{+}{\psi}_2(y) T^{(2)}(y, y') \psi_2(y')\, dy\, dy' + \frac{1}{2} \int \overset{+}{\psi}_1(x_1) \overset{+}{\psi}_1(x_2) U^{(1,1)}(x_1, x_2; x_2', x_1') \psi_1(x_2') \psi_1(x_1')\, dx_1\, dx_2\, dx_1'\, dx_2' + \frac{1}{2} \int \overset{+}{\psi}_2(y_1) \overset{+}{\psi}_2(y_2) U^{(2,2)}(y_1, y_2; y_2', y_1') \psi_2(y_2') \psi_2(y_1')\, dy_1\, dy_2\, dy_1'\, dy_2' + \int \overset{+}{\psi}_1(x) \overset{+}{\psi}_2(y) U^{(1,2)}(x, y; y', x') \psi_2(y') \psi_1(x')\, dx\, dy\, dx'\, dy'. \quad (5.12)$$

Как видно, в рассматриваемом представлении получающиеся выражения не зависят от чисел частиц N_1, N_2. Эти числа войдут лишь в матричные элементы выражений посредством C, соответствующих конкретным значениям этих чисел:

$$(\mathcal{N}_1 - N_1)C = 0, \quad (\mathcal{N}_2 - N_2)C = 0,$$

где

$$\mathcal{N}_1 = \int \overset{+}{\psi}_1(x) \psi_1(x)\, dx, \quad \mathcal{N}_2 = \int \overset{+}{\psi}_2(y) \psi_2(y)\, dy.$$

Если нам приходится иметь дело с состояниями, для которых операторы чисел частиц $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ не имеют определенного собственного значения, то следует просуммировать выражения вида (5.38) по всем N_1, N_2.

Заметим, что все только что отмеченное тривиально распространяется и на случай, когда имеется любое число различных сортов частиц.

§ 4. Коммутационные соотношения для операторных функций

а) Коммутативность произвольного типа. В изложенном методе операторные функции, относящиеся к различным сортам частиц, коммутировали. Нетрудно, однако, сделать их антикоммутирующими. Пусть, например, имеем две пары рассмотренных выше операторных функций:

$$\psi_1, \overset{+}{\psi}_1; \psi_2, \overset{+}{\psi}_2. \quad (5.1)$$

Построим новые операторные функции, положив

$$\begin{gathered} \psi_1' = \psi_1, \quad \overset{+}{\psi}_1' = \overset{+}{\psi}_1, \\ \psi_2' = (-1)^{\mathcal{N}_1} \psi_2 = \psi_2 (-1)^{\mathcal{N}_1}; \quad \overset{+}{\psi}_2' = \overset{+}{\psi}_2 (-1)^{\mathcal{N}_1} = (-1)^{\mathcal{N}_1} \overset{+}{\psi}_2. \end{gathered} \quad (5.2)$$

Поскольку оператор $\mathcal{N}_1 = \int \overset{+}{\psi}_1(x)\psi_1(x)\,dx$ коммутирует с ψ_2 и $\overset{+}{\psi}_2$, ясно, что свойства коммутирования ψ', $\overset{+}{\psi}'$ из одной пары не изменятся. Возьмем, однако, две операторные функции (5.49), принадлежащие к различным парам:

$$\theta'_1,\ \theta'_2, \quad \text{где} \quad \theta'_1 = \psi'_1 \quad \text{или} \quad \overset{+}{\psi}'_1, \quad \text{а} \quad \theta'_2 = \psi'_2 \quad \text{или} \quad \overset{+}{\psi}'_2,$$

и заметим, что оператор $\theta'_1 = \theta_1$ при перестановке с $\mathcal{N}$ изменяет $\mathcal{N}_1$ на ± 1. Поэтому

$$\theta'_1\theta'_2 = \theta_1(-1)^{\mathcal{N}_1}\theta_2 = -(-1)^{\mathcal{N}_1}\theta_1\theta_2 = -(-1)^{\mathcal{N}_1}\theta_2\theta_1 = -\theta'_2\theta'_1.$$

Таким образом, θ'_1 будет антикоммутироватъ с θ'_2. Вместе с тем очевидно, что в формулах (5.45), (5.47) можно, не изменяя результата, заменить операторные функции (5.48) на операторные функции (5.49), поскольку возникающие знакопеременные множители $(-1)^{\mathcal{N}_1}$ взаимно компенсируются.

Сказанное непосредственно обобщается и на случай любого числа сортов. Пусть, действительно, имеем систему пар операторов

$$\psi_1,\ \overset{+}{\psi}_1;\ \psi_2,\ \overset{+}{\psi}_2;\ \psi_3,\ \overset{+}{\psi}_3;\ \ldots;\ \psi_s,\ \overset{+}{\psi}_s$$

таких, что любые два из них, относящиеся к различным сортам частиц, коммутируют. Соответствующую систему, у которой операторные функции, относящиеся к различным сортам частиц, антикоммутируют, получим, положив

$$\psi'_1 = \psi_1, \quad \psi'_2 = (-1)^{\mathcal{N}_1}\psi_2 = \psi_2(-1)^{\mathcal{N}_1},$$

$$\psi'_a = (-1)^{\mathcal{N}_1+\ldots+\mathcal{N}_{a-1}}\psi_a = \psi_a(-1)^{\mathcal{N}_1+\ldots+\mathcal{N}_{a-1}}, \quad a = 2, \ldots, s,$$

и приняв аналогичные выражения для $\overset{+}{\psi}'$.

б) Замечание о коммутативности. Таким образом, видим, что коммутирование или антикоммутирование операторных функций, относящихся к различным сортам, может быть выбрано произвольно — так сказать, по соглашению. Общепринятое соглашение — предписывать коммутирование для бозонных операторных функций как с различными бозонными операторными функциями, так и с фермионными операторными функциями. Между фермионными операторными функциями, относящимися к различным фермионам, обычно принимают соотношения антикоммутирования. Такой выбор удобен, в частности, тем, что позволяет объединить формально в один сорт фермионы различных сортов или бозоны различных сортов за счет дополнения спинового индекса ν индексом сорта a.

Пусть, действительно, имеем в рамках принятого соглашения систему операторных функций

$$\psi_a(x), \quad \overset{+}{\psi}_a(x), x = (a, \nu), \quad a = 1, \ldots, s,$$

для s сортов фермионов или для s сортов бозонов. Чтобы формально привести ее к случаю одного сорта, введем комбинированный индекс $\omega = (\nu, a)$ и новый символ $x = (q, \omega) = (q, \nu, a)$. Тогда если положить $\psi(x) = \psi_a(q, \nu)$, то легко

убедиться, что $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$ будут удовлетворять обычным перестановочным соотношениям Ферми или Бозе. Имеем, например,

$$[\psi(x), \overset{+}{\psi}(x')]_{\pm} = [\psi_a(q,\nu), \overset{+}{\psi}_{a'}(q',\nu')]_{\pm} =$$
$$= \delta(a-a')[\psi_a(q,\nu), \overset{+}{\psi}_a(q',\nu')]_{\pm} =$$
$$= \delta(a-a')\delta(\nu-\nu')\delta(q-q') = \delta(x-x').$$

Аналогично устанавливаем и остальные соотношения.

§ 5. Числа заполнения и f-представление (замечания к гл. 2)

Сделаем еще ряд дополнительных замечаний по поводу введенных в гл. 2 волновых функций в представлении чисел заполнения. Прежде всего заметим, что благодаря (2.10) и ортонормированности полной системы $\Psi_{f_1}(x_1), \ldots, \Psi_{f_N}(x_N)$ имеем

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (F_1, F_2),$$

где F_1, F_2 — f-представления, соответствующие φ_1, φ_2. Таким образом, на основании ранее сказанного

$$(C_1, C_2) = (\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{для} \quad C_1 \leftrightarrow \varphi_1, \quad C_2 \leftrightarrow \varphi_2. \tag{5.1}$$

Рассмотрим теперь равенство (2.10) и воспользуемся неоднократно применявшимся приемом перестройки суммы по индексам $f_1, \ldots, f_N$ в сумму по всем допустимым наборам чисел заполнения. Получим

$$\varphi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{\substack{\ldots, n_f, \ldots \\ \sum_f n_f = N}} \sum_{(f_1, \ldots, f_N) \backsim (\ldots, n_f, \ldots)} F(f_1, \ldots, f_N) \Psi_{f_1}(x_1) \ldots \Psi_{f_N}(x_N). \tag{5.2}$$

а) Бозоны. Рассмотрим сначала случай системы бозонов. Тогда благодаря (2.27) видим, что $F(f_1, \ldots, f_N)$, стоящую в (5.51) под знаком второй суммы, можно заменить на $\dfrac{1}{\sqrt{\mathfrak{N}(\ldots, n_f, \ldots)}} C(\ldots, n_f, \ldots)$. Следовательно,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{\ldots, n_f, \ldots} C(\ldots, n_f, \ldots) \varphi_{\ldots, n_f, \ldots}(x_1, \ldots, x_N), \tag{5.3}$$

где

$$\varphi_{\ldots, n_f, \ldots}(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{N}(\ldots, n_f, \ldots)}} \sum_{(f_1, \ldots, f_N) \backsim (\ldots, n_f, \ldots)} \Psi_{f_1}(x_1) \ldots \Psi_{f_N}(x_N). \tag{5.4}$$

Фиксируем какой-либо набор $(f_1', \ldots, f_N') \backsim (\ldots, n_f, \ldots)$ и рассмотрим произвольный набор $f_1, \ldots, f_N$, также соответствующий $(\ldots, n_f, \ldots)$. Как видно, всегда можно указать такую перестановку P, что $P(f_1, \ldots, f_N) = (f_1', \ldots, f_N')$. Суммирование в (5.53) можно поэтому рассматривать как суммирование по

всем $\mathfrak{N}(\ldots, n_f, \ldots) = N!/\prod_f (n_f!)$ различным перестановкам P (включая тождественную). Заметим далее, что если одновременно провести перестановку P над $(x_1, \ldots, x_N)$ и над $(f_1, \ldots, f_N)$, то произведение обычных c-функций $\Psi_{f_1}(x_1) \ldots \Psi_{f_N}(x_N)$ от этого не изменится. Следовательно, данное произведение равно $P\Psi_{f_1'}(x_1) \ldots \Psi_{f_N'}(x_N)$, причем здесь перестановка P действует на $(x_1, \ldots, x_N)$. Итак, выражение (5.53) можно представить в виде

$$\varphi_{\ldots, n_f, \ldots}(x_1, \ldots, x_N) = \sqrt{\frac{\prod_f (n_f!)}{N!}} \sum_P P\Psi_{f_1'}(x_1) \ldots \Psi_{f_N'}(x_N). \tag{5.5}$$

Нетрудно установить свойства ортонормированности таких симметризованных произведений. Действительно, из (5.52) видно, что

$$\varphi_{\ldots, n_f^{(1)}, \ldots}(x_1, \ldots, x_N) \leftrightarrow C_1 = \prod_f \delta_f(n_f - n_f^{(1)}).$$

Отсюда благодаря (5.50) находим

$$(\varphi_{\ldots, n_f^{(1)}, \ldots}, \varphi_{\ldots, n_f^{(2)}, \ldots}) = \sum_{\ldots, n_f, \ldots} \left\{ \prod_f \delta(n_f - n_f^{(1)}) \right\} \left\{ \prod_f \delta(n_f - n_f^{(2)}) \right\},$$

т. е.

$$(\varphi_{\ldots, n_f^{(1)}, \ldots}, \varphi_{\ldots, n_f^{(2)}, \ldots}) = \prod_f \delta(n_f^{(1)} - n_f^{(2)}). \tag{5.6}$$

Итак, в случае системы бозонов волновая функция в представлении чисел заполнения $C(\ldots, n_f, \ldots)$ является коэффициентом разложения симметричной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ в ряд по функциям (5.53), получающимся из произведения

$$\Psi_{f_1}(x_1) \ldots \Psi_{f_N}(x_N) \tag{5.7}$$

симметризацией и введением нормирующего множителя $1/\sqrt{\mathfrak{N}}$.

Здесь имеем существенное отличие представления чисел заполнения от обычного f-представления (2.10), в котором мы разлагаем симметричную функцию φ по полной системе, вообще говоря, несимметричных функций (5.56). В f-представлении имеем поэтому дополнительное условие симметрии, наложенное на волновые функции $F(f_1, \ldots, f_N)$, а в представлении чисел заполнения ввиду (5.52) условие симметрии волновых функций $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ автоматически выполнено при «произвольных» функциях $C(\ldots, n_f, \ldots)$.

б) Фермионы. Совершенно аналогичная ситуация возникает и в случае системы фермионов. Действительно, возвратимся опять к равенству (5.51) и среди наборов

$$(f_1, \ldots, f_N) \backsim (\ldots, n_f, \ldots) \tag{5.8}$$

выберем «упорядоченный» набор:

$$(g_1 < \ldots < g_N) \leftrightarrow (\ldots, n_f, \ldots). \tag{5.9}$$

Однако для каждого набора $(f_1, \ldots, f_N)$, удовлетворяющего (5.57), очевидно, можно найти такую перестановку P, что $P(f_1, \ldots, f_N) = (g_1, \ldots, g_N)$.

Тогда в (5.51)

$$F(f_1,\ldots,f_N)=(-1)^P F(g_1,\ldots,g_N)=(-1)^P\frac{1}{\sqrt{N!}}C(\ldots,n_f,\ldots),$$

и мы получим

$$\varphi(x_1,\ldots,x_N)=\sum_{\ldots,n_f,\ldots} C(\ldots,n_f,\ldots)\varphi_{\ldots,n_f,\ldots}(x_1,\ldots,x_N), \tag{5.10}$$

где

$$\varphi_{\ldots,n_f,\ldots}(x_1,\ldots,x_N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_P(-1)^P P\Psi_{g_1}(x_1)\ldots\Psi_{g_N}(x_N). \tag{5.11}$$

Повторяя рассуждения, только что использованные для случая системы бозонов, убеждаемся, что и эти антисимметризованные функции (5.60) обладают свойством ортонормируемости (5.55). Итак, в случае статистики Ферми волновая функция в представлении чисел заполнения является коэффициентом разложения антисимметричной функции φ в ряд по функциям (5.60), получающимся из произведения (5.56) с помощью антисимметризации и введения нормирующего множителя $1/\sqrt{N!}$.

Отметим в заключение, что правая часть (5.60) есть не что иное, как умноженный на этот множитель детерминант N-го порядка

$$\mathrm{Det}\,\|\Psi_{g_i}(x_i)\|. \tag{5.12}$$

Глава VI

НЕКОТОРЫЕ АНАЛОГИ МЕТОДА ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Рассмотрим некоторые аналоги метода вторичного квантования в классической механике. Возьмем для этого систему N одинаковых бесспиновых частиц с гамильтонианом, состоящим из суммы кинетических энергий частиц и потенциальной энергии бинарного взаимодействия, характеризуемого радиально-симметричной функцией $\Phi(r)$ (см. (1.38) гл. 1).

§ 1. Метод вторичного квантования

Как видно из изложения гл. 4, метод вторичного квантования в представлении Гейзенберга можно рассматривать как прием формального сведения уравнений динамики данной системы N частиц к уравнению одной частицы, движущейся в «самосогласованном» потенциальном поле. Это достигается за счет того, что волновая функция одной частицы $\psi(t,q)$ (и тем самым самосогласованный потенциал) становится операторной функцией, удовлетворяющей перестановочным соотношениям Бозе или Ферми (см. (4.58), (4.59)).

Рассмотрим какую-либо, например аддитивную, динамическую переменную:

$$\mathfrak{A}=\sum_{1\leqslant j\leqslant N} A_j. \tag{6.1}$$

Тогда в гейзенберговом представлении метода вторичного квантования будем иметь

$$\mathfrak{A}(t) = \int A(q_1, q_2)\overset{+}{\psi}(t, q_1)\psi(t, q_2)dq_1 dq_2, \tag{6.2}$$

причем операторные волновые функции удовлетворяют «одночастичному уравнению Шредингера»:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,q)}{\partial t} = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_q + U(t,q)\right\}\psi(t,q), \tag{6.3}$$

в котором

$$\begin{aligned} U(t,q) &= \int \Phi(q-q')\rho(t,q')dq', \\ \rho(t,q) &= \overset{+}{\psi}(t,q)\psi(t,q). \end{aligned} \tag{6.4}$$

а) Временна́я эволюция квантованного оператора Вигнера. Для выявления аналогии, или, говоря более осторожно, некоторого соответствия между квантовой и классической механикой одной частицы, находящейся во внешнем поле, Вигнером было разработано специальное преобразование, которым мы здесь воспользуемся в рассматриваемом случае квантованных волновых функций.

Возвратимся для этого к выражению (6.2) и совершим в нем замену переменных интегрирования:

$$q_1 = q + \xi/2, \quad q_2 = q - \xi/2. \tag{6.5}$$

Получим

$$\mathfrak{A}(t) = \int A(q+\xi/2,\ q-\xi/2)\overset{+}{\psi}(t, q+\xi/2)\psi(t, q-\xi/2)dqd\xi.$$

Введем смешанное, координатно-импульсное представление матрицы A, положив

$$A(q,p) = \int A(q+\xi/2,\ q-\xi/2)\,\mathrm{e}^{-i(p\xi/\hbar)}d\xi, \tag{6.6}$$

а также квантованный оператор Вигнера

$$f(t,q,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int \overset{+}{\psi}(t, q+\xi/2)\psi(t, q-\xi/2)\,\mathrm{e}^{i(p\xi/\hbar)}d\xi. \tag{6.7}$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{e}^{i(p(\xi-\xi')/\hbar)}dp = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{ik(\xi-\xi')}dk = \delta(\xi-\xi'), \tag{6.8}$$

видим, что выражение (6.2) можно представить в форме

$$\mathfrak{A}(t) = \int A(q,p)f(t,q,p)dqdp. \tag{6.9}$$

Из равенств (6.7), (6.8) ясно также, что входящая в определение (6.4) операторная плотность числа частиц будет представляться интегралом

$$\rho(t,q) = \int f(t,q,p)dp. \tag{6.10}$$

Заметим теперь, что, основываясь на уравнении (6.3), нетрудно получить уравнение для операторной функции (6.7). Имеем, действительно, благодаря соотношениям (6.3), (6.4)

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,q_2)}{\partial t}=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{q_2}\right\}\psi(t,q_2)+\int\Phi(q_2-q)\overset{+}{\psi}(t,q)\psi(t,q)\psi(t,q_2)dq,$$

откуда, проводя сопряжение, получим

$$-i\hbar\frac{\partial\overset{+}{\psi}(t,q_1)}{\partial t}=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{q_1}\right\}\overset{+}{\psi}(t,q_1)+\int\overset{+}{\psi}(t,q_1)\overset{+}{\psi}(t,q)\psi(t,q)\Phi(q_1-q)dq.$$

Таким образом, найдем

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial\overset{+}{\psi}(t,q_1)\psi(t,q_2)}{\partial t}&=\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_{q_1}-\Delta_{q_2})\overset{+}{\psi}(t,q_1)\psi(t,q_2)+\\&+\int\Phi(q_2-q)\overset{+}{\psi}(t,q_1)\overset{+}{\psi}(t,q)\psi(t,q)\psi(t,q_2)dq-\\&-\int\Phi(q_1-q)\overset{+}{\psi}(t,q_1)\overset{+}{\psi}(t,q)\psi(t,q)\psi(t,q_2)dq.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Если воспользоваться перестановочными соотношениями (4.58) или (4.59), то видно, что в обоих случаях

$$\begin{aligned}&\overset{+}{\psi}(t,q_1)\overset{+}{\psi}(t,q)\psi(t,q)\psi(t,q_2)=\\&\qquad=\overset{+}{\psi}(t,q)\psi(t,q)\overset{+}{\psi}(t,q_1)\psi(t,q_2)-\delta(q-q_1)\overset{+}{\psi}(t,q_1)\psi(t,q_2)\end{aligned}$$

и потому

$$\begin{aligned}&\int\Phi(q_2-q)\overset{+}{\psi}(t,q_1)\overset{+}{\psi}(t,q)\psi(t,q)\psi(t,q_2)dq-\\&\qquad-\int\Phi(q_1-q)\overset{+}{\psi}(t,q_1)\overset{+}{\psi}(t,q)\psi(t,q)\psi(t,q_2)dq=\\&\qquad=\{U(t,q_2)-U(t,q_1)-\Phi(q_2-q_1)+\Phi(0)\}\overset{+}{\psi}(t,q_1)\psi(t,q_2).\end{aligned}$$

Кроме того, благодаря формулам (6.5) имеем

$$\Delta_{q_1}-\Delta_{q_2}=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}+\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^2=2\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}.$$

Следовательно, уравнение (6.11) можно представить в форме

$$\begin{aligned}&i\hbar\frac{\partial\overset{+}{\psi}(t,q+\xi/2)\psi(t,q-\xi/2)}{\partial t}=\\&\qquad=\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}\overset{+}{\psi}(t,q+\xi/2)\psi(t,q-\xi/2)+\\&+\{U(t,q-\xi/2)-U(t,q+\xi/2)-\Phi(-\xi)+\Phi(0)\}\overset{+}{\psi}(t,q+\xi/2)\psi(t,q-\xi/2).\end{aligned}\tag{6.12}$$

Помножим обе части этого уравнения на $\frac{1}{(2\pi\hbar)^3 i\hbar} e^{i(p\xi/\hbar)}$ и проинтегрируем по ξ, а также воспользуемся фурье-разложением:

$$U(t, q \pm \xi/2) = \int \widetilde{U}(k)\, e^{ik(q\pm\xi/2)} dk, \quad \Phi(\xi) = \int \widetilde{\Phi}(k)\, e^{ik\xi} dk. \tag{6.13}$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3 i\hbar} \int e^{i(p\xi/\hbar)} \frac{\partial}{\partial \xi} \overset{+}{\psi}(t, q+\xi/2)\psi(t, q-\xi/2) d\xi =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi\hbar)^3 i\hbar} \int \overset{+}{\psi}(t, q+\xi/2)\psi(t, q-\xi/2) \frac{\partial}{\partial \xi} e^{i(p\xi/\hbar)} d\xi = -\frac{\mathbf{p}}{\hbar^2} f(t, q, p). \tag{6.14}$$

Имеем далее

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3 i\hbar} \int e^{i(p\xi/\hbar)} e^{\pm ik(\xi/2)} \overset{+}{\psi}(t, q+\xi/2)\psi(t, q-\xi/2) d\xi = \frac{1}{i\hbar} f\left(t, q, p \pm \frac{k\hbar}{2}\right). \tag{6.15}$$

Таким образом, учитывая (6.13)–(6.15), приходим к следующему уравнению для операторной функции f:

$$\frac{\partial f(t, q, p)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} f(t, q, p) -$$

$$- \frac{i}{\hbar} \int \left\{ e^{ikq} \widetilde{U}(k) \left[f\left(t, q, p - \frac{k\hbar}{2}\right) - f\left(t, q, p + \frac{k\hbar}{2}\right) \right] - \right.$$

$$\left. - \widetilde{\Phi}(k)[f(t, q, p - k\hbar) - f(t, q, p)] \right\} dk. \tag{6.16}$$

б) Предельный переход $\hbar \to 0$. Посмотрим, во что перейдет это уравнение, если совершить в нем формальный переход к пределу $\hbar \to 0$, не задумываясь пока над физическим смыслом такой процедуры. Получим

$$\frac{\partial f(t, q, p)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} f(t, q, p) + i \int \{ e^{ikq} \widetilde{U}(k)\mathbf{k} - \widetilde{\Phi}(k)\mathbf{k} \} dk \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(t, q, p).$$

Но из (6.13) имеем

$$i \int \mathbf{k}\, e^{ikq} \widetilde{U}(k) dk = \frac{\partial U(t, q)}{\partial \mathbf{q}} = \int \frac{\partial \Phi(q - q')}{\partial \mathbf{q}} \rho(t, q') dq',$$

$$i \int \mathbf{k} \widetilde{\Phi}(k) dk = \left(\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \int \frac{\partial \Phi(q - q')}{\partial \mathbf{q}} \delta(q - q') dq'.$$

Таким образом, формальный переход к пределу $\hbar \to 0$ приводит к уравнению вида

$$\frac{\partial f(t, q, p)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} f(t, q, p) +$$

$$+ \int \frac{\partial \Phi(q - q')}{\partial \mathbf{q}} \{ \rho(t, q') - \delta(q' - q) \} dq' \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(t, q, p). \tag{6.17}$$

в) Квантование и вторичное квантование. Сделав это замечание, возвратимся теперь к выражению (6.9). Если бы ψ, $\overset{+}{\psi}$ были обычными волновыми c-функциями одной частицы, то выражение (6.2), (6.9) представляло бы среднее значение динамической переменной $\mathfrak{A}$ в момент времени t. Соответственно $f(t,q,p)$ была бы зависящей от t обычной c-функцией в шестимерном фазовом пространстве точек (q,p), являясь квантово-механическим обобщением классической функции плотности распределения частицы в данном фазовом пространстве, предложенным Вигнером.

Однако поскольку мы имеем дело с операторными волновыми функциями в представлении Гейзенберга, выражение (6.9) задает саму динамическую *величину — оператор* $\mathfrak{A}(t)$, и функция $f(t,q,p)$ также является оператором, действующим на состояния рассматриваемой динамической системы из N частиц.

§ 2. Переход к классической механике

Возникает вопрос: как в такой ситуации перейти к классической механике? Ответ на него в какой-то степени тривиален. Квантово-механическим операторам, действующим на состояния динамической системы, соответствуют в классической механике функции состояния, характеризуемого совокупностью пространственных координат и импульсов:

$$q_1(t),\dots,q_N(t),\quad p_1(t),\dots,p_N(t).$$

Рассмотрим динамическую величину аддитивного типа, теперь уже в схеме классической механики:

$$\mathfrak{A}=\sum_{1\leqslant i\leqslant N}A(q_i,p_i).$$

Тогда

$$\mathfrak{A}(t)=\sum_{1\leqslant i\leqslant N}A(q_i(t),p_i(t)), \tag{6.1}$$

где $q_i=q_i(t)$, $p_i=p_i(t)$ как функции времени определяются известными уравнениями классической механики

$$\frac{d\mathbf{q}_j}{dt}=\frac{1}{m}\mathbf{p}_j,\quad \frac{d\mathbf{p}_j}{dt}=-\sum_{\substack{1\leqslant j_1\leqslant N\\ j_1\neq j}}\frac{\partial\Phi(q_j-q_{j_1})}{d\mathbf{q}_j}. \tag{6.2}$$

Из (6.18) легко убедиться, что

$$\mathfrak{A}(t)=\int A(q,p)f(t,q,p)dqdp, \tag{6.3}$$

где

$$f(t,q,p)=\sum_{1\leqslant j\leqslant N}\delta(q-q_j(t))\delta(p-p_j(t)). \tag{6.4}$$

Здесь, как всегда, $\delta(q-q_j)$, $\delta(p-p_j)$ — трехмерные δ-функции Дирака.

Итак, в классическом аналоге (6.20) квантово-механической формулы (6.9) выражение (6.21) для f естественно оказывается функцией состояния изучаемой динамической системы, т.е. функцией от совокупности аргументов

$q_j(t)$, $p_j(t)$. Как видно из (6.21), f представляет собой плотность числа точек (q, p) в фазовом пространстве. Заметим еще, что, как и в квантовом случае, через функцию (6.21) можно выразить бинарные, ..., s-кратные динамические величины.

а) Бинарная динамическая величина. Возьмем, например, бинарную величину

$$\mathfrak{B}(t) = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant N} B\{q_{j_1}(t), p_{j_1}(t); q_{j_2}(t), p_{j_2}(t)\}, \tag{6.5}$$

в которой B, разумеется, симметрична по отношению к перестановке обеих фазовых точек:

$$B\{q, p; q', p'\} = B(q', p'; q, p).$$

Имеем, очевидно,

$$\mathfrak{B}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leqslant j_1 \\ j_2 \leqslant N \\ j_1 \neq j_2}} B_{j_1, j_2} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\substack{1 \leqslant j_1 \\ j_2 \leqslant N}} B_{j_1, j_2} - \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant N} B_{j_1, j_1} \right\}. \tag{6.6}$$

Но

$$\sum_{\substack{1 \leqslant j_1 \\ j_2 \leqslant N}} B_{j_1, j_2} = \int B(q, p; q', p') \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant N} \delta(q - q_{j_1}(t)) \delta(p - p_{j_1}(t)) \times$$

$$\times \sum_{1 \leqslant j_2 \leqslant N} \delta(q' - q_{j_2}(t)) \delta(p' - p_{j_2}(t)) dq dp dq' dp' =$$

$$= \int B(q, p; q', p') f(t, q, p) f(t, q', p') dq dp dq' dp'$$

и

$$\sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant N} B_{j_1, j_1} = \int B(q, p; q, p) f(t, q, p) dq dp =$$

$$= \int B(q, p; q', p') f(t, q, p) \delta(q - q') \delta(p - p') dq dp dq' dp'.$$

Итак, учитывая (6.23), получим для бинарной динамической величины следующее выражение:

$$\mathfrak{B}(t) = \frac{1}{2} \int B(q, p; q', p') \{f(t, q', p') - \delta(q - q') \delta(p - p')\} \times$$

$$\times f(t, q, p) dq dp dq' dp'. \tag{6.7}$$

Совершенно такая же процедура непосредственно обобщается и на случай s-кратных динамических переменных. Все они могут быть подобным же образом выражены через функцию f.

б) Временна́я эволюция функции f. Составим теперь уравнение, характеризующее временну́ю эволюцию этой функции. Положим

$$f_j(t, q, p) = \delta(q - q_j(t)) \delta(p - p_j(t)), \tag{6.8}$$

так что

$$f(t,q,p)=\sum_{1\leqslant j\leqslant N} f_j(t,q,p). \tag{6.9}$$

Основываясь на уравнениях (6.19), видим, что

$$\frac{\partial f_j(t,q,p)}{\partial t}=\frac{\mathbf{p}_j}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j}\delta(q-q_j)\delta(p-p_j)-$$
$$-\sum_{\substack{1\leqslant j_1\leqslant N\\ j_1\neq j}}\frac{\partial\Phi(q_j-q_{j_1})}{\partial \mathbf{q}_j}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j}\delta(q-q_j)\delta(p-p_j),$$

или

$$\frac{\partial f_j(t,q,p)}{\partial t}=-\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\delta(q-q_j)\delta(p-p_j)+$$
$$+\sum_{\substack{1\leqslant j_1\leqslant N\\ j_1\neq j}}\frac{\partial\Phi(q_j-q_{j_1})}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\delta(q-q_j)\delta(p-p_j). \tag{6.10}$$

Здесь

$$\sum_{\substack{1\leqslant j_1\leqslant N\\ j_1\neq j}}\frac{\partial\Phi(q-q_{j_1})}{\partial \mathbf{q}}\delta(q-q_j)=$$
$$=\int\frac{\partial\Phi(q-q')}{\partial \mathbf{q}}\left\{\sum_{1\leqslant j_1\leqslant N}\delta(q'-q_{j_1})-\delta(q'-q_j)\right\}dq'\delta(q-q_j)=$$
$$=\int\frac{\partial\Phi(q-q')}{\partial \mathbf{q}}\left\{\sum_{1\leqslant j_1\leqslant N}\delta(q'-q_{j_1})-\delta(q'-q)\right\}dq'\delta(q-q_j).$$

Но, как видно из (6.21),

$$\sum_{1\leqslant j_1\leqslant N}\delta(q-q_{j_1})=\int f(t,q,p)dp=\rho(t,q), \tag{6.11}$$

причем это выражение, очевидно, представляет плотность числа частиц в трехмерном пространстве точек q. Следовательно,

$$\sum_{\substack{1\leqslant j_1\leqslant N\\ j_1\neq j}}\frac{\partial\Phi(q-q_{j_1})}{\partial \mathbf{q}}\delta(q-q_j)=\int\frac{\partial\Phi(q-q')}{\partial \mathbf{q}}\{\rho(t,q')-\delta(q'-q)\}dq'\delta(q-q_j),$$

и потому из формул (6.27), (6.25) найдем

$$\frac{\partial f_j(t,q,p)}{\partial t}=-\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}f_j(t,q,p)+$$
$$+\int\frac{\partial\Phi(q-q')}{\partial \mathbf{q}}\{\rho(t,q')-\delta(q'-q)\}dq'\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}f_j(t,q,p). \tag{6.12}$$

Отсюда, суммируя по всем j, получаем искомое уравнение для функции $f(t,q,p)$

$$\frac{\partial f(t,q,p)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} f(t,q,p) + \\ + \int \frac{\partial \Phi(q-q')}{\partial \mathbf{q}} \{\rho(t,q') - \delta(q'-q)\} dq' \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(t,q,p), \quad (6.13)$$

$$\rho(t,q') = \int f(t,q',p')dp'.$$

в) Уравнение Власова. Как видно, уравнение (6.30) полностью совпадает с уравнением (6.17), которое мы получили из квантового уравнения (6.16) с помощью формального предельного перехода при $\hbar \to 0$. Из только что приведенного вывода уравнения (6.30) ясно, что в выражении $\rho(t,q') - \delta(q'-q)$ второй член с δ-функцией обусловлен исключением «самодействия»: в уравнении для $\mathbf{d}p_j/dt$ в сумме по индексу j_1, стоящей в правой части, исключается член с индексом $j_1 = j$.

Если формально регуляризовать функцию $\Phi(r)$ хотя бы в сколь угодно малой окрестности $r \sim 0$, то ввиду ее радиальной симметрии

$$\int \frac{\partial \Phi(q-q')}{\partial \mathbf{q}} \delta(q-q')dq' = \left(\frac{\partial \Phi(r)}{\partial \mathbf{r}}\right)_{r=0} = 0, \quad (6.14)$$

и мы можем опустить упомянутый член с δ-функцией и написать уравнение (6.30) в форме

$$\frac{\partial f(t,q,p)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} f(t,q,p) + \int \frac{\partial \Phi(q-q')}{\partial \mathbf{q}} \rho(t,q')dq' \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(t,q,p). \quad (6.15)$$

Это уравнение было впервые открыто А. А. Власовым [7] и потому называется теперь *уравнением Власова*. Оно рассматривается обычно как приближенное уравнение для макроскопической (усредненной) плотности числа точек в шестимерном фазовом пространстве. Следует, однако, подчеркнуть, что именно сам А. А. Власов в своей монографии [8], изданной в 1950 г., также впервые опубликовал важное замечание о том, что его уравнение имеет и «микроскопические решения» (6.21), которые мы рассматривали выше, причем указал и на условие (6.31) для исключения «самодействия».

Аналогия между исследованием таких микроскопических решений и методом вторичного квантования обсуждалась в работах Ю. Л. Климонтовича [9, 15].

Уравнение Власова, выведенное для микроскопических решений, разумеется, может служить источником для получения приближенных уравнений для усредненных функций распределения (см. [16]). Возьмем, например, какую-либо плотность распределения начальных значений q_j, p_j в момент времени $t = 0$:

$$\mathcal{D}(q_1^0, p_1^0; \ldots; q_N^0, p_N^0)$$

в $6N$-мерном фазовом пространстве, нормированную на единицу:

$$\int \mathcal{D}(q_1^0, p_1^0; \ldots; q_N^0, p_N^0) dq_1^0 dp_1^0 \ldots dq_N^0 dp_N^0 = 1,$$

и условимся обозначать среднее значение какой-либо динамической величины $F(t) = F(t, q_1^0, p_1^0; \ldots; q_N^0, p_N^0)$,

$$\int F(t)\mathcal{D}(q_1^0, p_1^0; \ldots; q_N^0, p_N^0) dq_1^0 dp_1^0 \ldots dq_N^0 dp_N^0,$$

символом $\langle F(t)\rangle$. Тогда, если в качестве первого приближения принять

$$\langle \rho(t, q') \cdot f(t, q, p)\rangle = \langle \rho(t, q')\rangle \langle f(t, q, p)\rangle, \tag{6.16}$$

то, проводя усреднение в обеих частях уравнения (6.32), получаем приближенное уравнение Власова для усредненной функции распределения $\langle f(t, q, p)\rangle$ числа частиц в $6N$-мерном фазовом пространстве

$$\frac{\partial \langle f(t, q, p)\rangle}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\langle f(t, q, p)\rangle + \int \frac{\partial \Phi(q - q')}{\partial \mathbf{q}} \langle \rho(t, q')\rangle dq' \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \langle f(t, q, p)\rangle, \tag{6.17}$$

$$\langle \rho(t, q')\rangle = \int \langle f(t, q', p')\rangle dp'.$$

Как видно, уравнение (6.34) сохранило исходную форму (6.32). Можно также использовать вместо (6.33) и более точные приближения (см., например, монографию Ю. Л. Климонтовича [10]).

Заметим далее, что в классической механике системы из N одинаковых упругих шаров имеется еще одно уравнение — уравнение Больцмана–Энскога, считавшееся всегда лишь приближенным, но которое тем не менее имеет и микроскопические решения типа (6.21) (см. [11]).

§ 3. Система одинаковых упругих шаров

Формально случай упругих шаров можно свести к ранее исследовавшемуся случаю, в котором, однако, бинарная функция взаимодействия сингулярна:

$$\Phi(r) = +\infty, \quad r < a,$$
$$\Phi(r) = 0, \qquad r \geqslant a,$$

где a — диаметр шара. Такую потенциальную функцию, конечно, можно рассматривать как предел регулярной функции, например

$$\Phi(r) = b\left\{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}^2, \quad r < a,$$
$$\Phi(r) = 0, \qquad\qquad\qquad r \geqslant a,$$

при $b \to \infty$. Однако этот предельный переход нам не представляется удобным проводить непосредственно в уравнении (6.32) для функции (6.21), и мы будем здесь исходить прямо из известных классических законов соударения двух упругих шаров.

а) Система из двух одинаковых упругих шаров. Рассмотрим вначале ситуацию, когда рассматриваемая динамическая система состоит из двух таких шаров, положение центров которых обозначим через q_1, q_2, а импульсы — соответственно через p_1, p_2. Допустимыми будут, очевидно, лишь такие положения точек q_1, q_2, для которых

$$|q_1 - q_2| \geqslant a. \tag{6.1}$$

Рассмотрим функцию состояний изучаемой динамической системы $F(q_1, p_1; q_2, p_2)$ и будем строить выражение для

$$\frac{\partial}{\partial t} F(q_1(t), p_1(t); q_2(t), p_2(t)).$$

Возьмем бесконечно малое положительное приращение времени и составим разность

$$F(q_1^{\Delta t}, p_1^{\Delta t}; q_2^{\Delta t}, p_2^{\Delta t}) - F(q_1, p_1; q_2, p_2), \tag{6.2}$$

где для краткости положено $q_j = q_j(t)$, $p_j = p_j(t)$; $q_j^{\Delta t} = q_j(t + \Delta t)$, $p_j^{\Delta t} = p_j(t + \Delta t)$. Если бы в течение данного промежутка времени Δt соударение не произошло, то центры шаров двигались бы равномерно и прямолинейно, т.е. мы имели бы $q_j^{\Delta t} = q_j + \frac{p_j}{m}\Delta t$, $p_j^{\Delta t} = p_j$, $j = 1, 2$. В общем же случае представим исследуемую разность (6.36) в форме

$$F(q_1^{\Delta t}, p_1^{\Delta t}; q_2^{\Delta t}, p_2^{\Delta t}) - F(q_1, p_1; q_2, p_2) = \Delta_1 + \Delta_2, \tag{6.3}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= F(q_1^{\Delta t}, p_1^{\Delta t}; q_2^{\Delta t}, p_2^{\Delta t}) - F\left(q_1 + \frac{p_1}{m}\Delta t, p_1; q_2 + \frac{p_2}{m}\Delta t, p_2\right), \\ \Delta_2 &= F\left(q_1 + \frac{p_1}{m}\Delta t, p_1; q_2 + \frac{p_2}{m}\Delta t, p_2\right) - F(q_1, p_1; q_2, p_2). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Как видно, разность Δ_1 отлична от нуля, лишь если в промежутке времени Δt произойдет соударение обоих упругих шаров. Ясно, однако, что такое соударение фактически произойдет, если

$$|q_2 - q_1| \geqslant a, \quad \left|q_2 - q_1 + \frac{p_2 - p_1}{m}\Delta t\right| < a. \tag{6.5}$$

Положим для сокращения записи

$$q_2 - q_1 = \mathbf{r}, \quad |q_2 - q_1| = r, \quad \frac{q_2 - q_1}{|q_2 - q_1|} = \mathbf{e}, \quad \frac{p_2 - p_1}{m} = \mathbf{v}. \tag{6.6}$$

Тогда

$$\left|q_2 - q_1 + \frac{p_2 - p_1}{m}\Delta t\right| = |\mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t| = |r\mathbf{e} + \mathbf{v}\Delta t| =$$

$$= \sqrt{(r\mathbf{e} + \mathbf{v}\Delta t)^2} = \sqrt{r^2 + 2r(\mathbf{e}\cdot\mathbf{v})\Delta t + \Delta t^2 v^2}$$

или, так как Δt бесконечно мало,

$$\left|q_2 - q_1 + \frac{p_2 - p_1}{m}\Delta t\right| = r\sqrt{1 + 2\frac{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{v})}{r}\Delta t + \frac{\Delta t^2 v^2}{r^2}} = r + (\mathbf{e}\cdot\mathbf{v})\Delta t. \tag{6.7}$$

Отсюда сразу видно, что в области (6.39) ввиду положительности Δt имеет место неравенство

$$(\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}) < 0. \tag{6.8}$$

Далее можно заметить, что в области (6.39)

$$\theta(|q_2 - q_1| - a) - \theta\left(\left|q_2 - q_1 + \frac{p_2 - p_1}{m}\Delta t\right| - a\right) = 1, \quad \theta(-\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}) = 1. \tag{6.9}$$

Так как Δ_1, как уже отмечалось выше, может отличаться от нуля лишь в области (6.39), в которой справедливы соотношения (6.43), мы можем представить выражение Δ_1 с учетом (6.40), (6.41) в следующей форме:

$$\Delta_1 = \theta(-\mathbf{e}\cdot\mathbf{v})\{\theta(r-a)-\theta(r-a+\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}\Delta t)\}\times \\ \times\left\{F(q_1^{\Delta t},p_1^{\Delta t};q_2^{\Delta t},p_2^{\Delta t})-F\left(q_1+\frac{p_1}{m}\Delta t,p_1;q_2+\frac{p_2}{m}\Delta t,p_2\right)\right\}.$$

Введем одномерную δ-функцию[1] $\delta(x)$, локализованную в интервале $(0,+\infty)$:

$$\delta(x)=\lim_{\eta\to 0}\frac{\theta(x)-\theta(x-\eta)}{\eta}. \tag{6.44}$$

Тогда $\theta(r-a)-\theta(r-a+\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}\Delta t)=-\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}\Delta t\delta(r-a)$, поскольку $\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}\Delta t<0$. Разумеется, так как для фазовых точек из области (6.39) соударение шаров произошло, то $p_j^{\Delta t}=p_j^*$ $(j=1,2)$, где p_j^* обозначает импульсы после соударения. Далее, $q_j^{\Delta t}, q_j+(p_j/m)\Delta t$ будут лишь бесконечно мало отличаться от q_j. Таким образом, найдем, учитывая, естественно, лишь члены первого порядка малости по отношению к Δt:

$$\Delta_1=\Delta t|\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}|\theta(-\mathbf{e}\cdot\mathbf{v})\delta(r-a)\{F(q_1,p_1^*;q_2,p_2^*)-F(q_1,p_1;q_2,p_2)\}. \tag{6.47}$$

Найдем сейчас выражения для p_j^*, входящих в (6.45). Рассмотрим относительную скорость $\mathbf{v}$ (см. (6.40) и выделим в ней компоненту, параллельную $\mathbf{r}$ (т. е. параллельную $\mathbf{e}$), и компоненту, перпендикулярную к $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{v}=\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{v})+\mathbf{v}_\perp,\quad \mathbf{v}_\perp=\mathbf{v}-\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}). \tag{6.48}$$

Но после соударения величина $\mathbf{v}_\perp$ сохраняется, а $\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}$ меняет знак на обратный: $\mathbf{v}_\perp^*=\mathbf{v}_\perp$, $\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}^*=-\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}$. Поэтому, учитывая формулы (6.48),

$$\mathbf{v}^*=-\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{v})+\mathbf{v}_\perp=\mathbf{v}-2\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}),$$

т. е.

$$p_1^*-p_2^*=p_1-p_2-2\{(p_1-p_2)\mathbf{e}\}\cdot\mathbf{e}. \tag{6.49}$$

---

[1] Как видно из определения (6.44),

$$\delta(x)=0,\quad x\neq 0, \tag{6.45}$$

и

$$\int_0^\infty \delta(x)\,dx=1. \tag{6.46}$$

Заметим, что при обычном определении (6.45) функции $\delta(x)$ она также локализуется в бесконечно малой окрестности точки $x=0$, но не обязательно лишь в бесконечно малой окрестности положительных x. Поэтому ее условие нормировки будет

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(x)\,dx=1.$$

Как видно, δ-функция (6.44) формально может быть определена из обычной δ-функции с помощью соотношения $\lim \delta(x-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0)$. Таким образом, в (6.47), если считать входящую в правую часть δ-функцию обычной, надо заменить a на $a+0$, т. е. сделать замену $a\to a+\varepsilon$ и совершить предельный переход $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon>0$.

Но по закону сохранения суммарного импульса

$$p_1^* + p_2^* = p_1 + p_2. \tag{6.50}$$

Таким образом, из формул (6.49), (6.50) получим

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_1 - \mathbf{e}\{(p_1 - p_2)\mathbf{e}\}, \\ p_2^* &= p_2 + \mathbf{e}\{(p_1 - p_2)\mathbf{e}\}. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Как видно теперь, коэффициент при Δt в (6.45) является функцией вида $\delta(r-a)f(\mathbf{r}/r) = \delta(r-a)f(\mathbf{e})$, зависящей также от $q_1 + q_2, p_1, p_2, t$.

Установим сейчас одно полезное для нас тождество. Имеем

$$\delta(r-a)f\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{R})\delta(R-a)f\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right)d\mathbf{R}.$$

Введем орт σ — единичный вектор по направлению $\mathbf{R}$. Тогда $\mathbf{R} = R\sigma$, $d\mathbf{R} = R^2 dR d\sigma$, где, как обычно, $d\sigma$ обозначает бесконечно малый элемент телесного угла. Таким образом, найдем

$$\delta(r-a)f(\mathbf{e}) = \int \delta(\mathbf{r} - R\sigma)\delta(R-a)f(\sigma)R^2 dR d\sigma = a^2 \int \delta(\mathbf{r} - a\sigma)f(\sigma)d\sigma. \tag{6.52}$$

Это тождество мы используем для преобразования выражения Δ_1, задаваемого формулой (6.45).

Будет удобно ввести оператор $B_{1,2}(\sigma)$, действующий лишь на импульсы p_1, p_2, переводя их в «импульсы после соударения» (6.51):

$$B_{1,2}(\sigma)f(p_1, p_2) = f(p_1 - \sigma(p_{1,2}\cdot\sigma);\ p_2 + \sigma(p_{1,2}\cdot\sigma)), \quad p_{1,2} = p_1 - p_2. \tag{6.53}$$

Заметим, что из этого определения вытекает равенство

$$B_{2,1}(-\sigma) = B_{2,1}(\sigma). \tag{6.54}$$

Используя формулы (6.40), (6.52), (6.53), напишем для выражения (6.45) следующее представление:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta t}{m}a^2 \int \theta(p_{1,2}\cdot\sigma)|(p_{1,2}\cdot\sigma)|\delta(q_2 - q_1 - a\sigma)\{B_{1,2}(\sigma) - 1\}F(q_1, p_1; q_2, p_2)d\sigma.$$

Для Δ_2 из (6.38) находим непосредственно

$$\Delta_2 = \sum_{j=1,2} \frac{\mathbf{p}_j}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j}F(q_1, p_1; q_2, p_2)\Delta t.$$

Итак, на основании соотношения (6.37) получим окончательно

$$\frac{\partial F(q_1, p_1; q_2, p_2)}{\partial t} = \sum_{j=1,2} \frac{\mathbf{p}_j}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j}F(q_1, p_1; q_2, p_2) + T(1,2)F(q_1, p_1; q_2, p_2), \tag{6.55}$$

где $T(1,2)$ — оператор, действующий на функции двух фазовых точек,

$$T(1,2)F = \int a^2\theta(p_{1,2}\cdot\sigma)\frac{|(p_{1,2}\cdot\sigma)|}{m}\delta(q_2 - q_1 - a\sigma)\{B_{1,2}(\sigma) - 1\}\times$$
$$\times F(q_1, p_1; q_2, p_2)d\sigma. \tag{6.56}$$

В уравнении (6.55) величины $q_j = q_j(t)$, $p_j = p_j(t)$ представляют фазовую точку в момент времени t для центра j-й сферы.

Заметим между прочим, что из самого определения (6.56) вытекает, что

$$T(1,2) = T(2,1), \tag{6.57}$$

поскольку, переставив две фазовые точки, достаточно заменить переменную интегрирования — орт σ на $-\sigma$, — чтобы получить исходное выражение.

Заметим далее, что если в начальный момент времени

$$|q_1^0 - q_2^0| \geqslant a, \tag{6.58}$$

то и во все последующие моменты времени $t > 0$ будем иметь

$$|q_1 - q_2| \geqslant a, \tag{6.59}$$

поскольку, как только $|q_1 - q_2|$ станет равным a, произойдет соударение и это расстояние начнет увеличиваться. Подчеркнем, что условие (6.58) есть просто условие ограничения лишь физически допустимыми траекториями центров упругих шаров, чем выражается свойство непроницаемости шаров.

Однако само уравнение (6.55) никак не связано с областью (6.59) и формально может быть расширено. В частности, из определения (6.56) сразу же следует, что $T(1,2) = 0$ при $|q_1 - q_2| < a$. Таким образом, хотя уравнение (6.55) может быть тривиально расширено и на другие области определения, физически правильные результаты мы получим лишь для области (6.59). Поэтому оператор бинарного соударения $T(1,2)$ называется иногда *псевдооператором*.

Псевдооператоры бинарных соударений такого типа были введены рядом авторов (см., например, [12, 13]). Разумеется, они вводились этими авторами на основе использования подобного рода операторов для изучения динамических систем из N одинаковых упругих шаров, находящихся в макроскопическом объеме V, которые могут быть приняты в качестве классической модели газа. Перейдем к рассмотрению такой системы.

б) Система из N одинаковых упругих шаров. Так как соударения шаров в принятой схеме классической механики происходят мгновенно, вероятность того, что данный шар одновременно сталкивается с двумя и более шарами, бесконечно мала, и мы можем учитывать поэтому лишь бинарные столкновения.

Возьмем какую-либо функцию динамического состояния:

$$F = F(q_1, p_1; \ldots; q_N, p_N),$$

где

$$q_j = q_j(t), \quad p_j = p_j(t), \tag{6.60}$$

причем предполагается, что для начальных значений выполнены физические условия непроницаемости шаров:

$$|q_{j_1}^0 - q_{j_2}^0| \geqslant a \quad \text{при} \quad j_1 \neq j_2. \tag{6.61}$$

Тогда, поскольку движение частиц равномерно и прямолинейно в промежутках между бинарными соударениями, можем написать

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} \frac{\mathbf{p}_j}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} F + \sum_{\alpha} T_\alpha F. \tag{6.62}$$

Здесь $\sum_{\alpha}$ производится по всем парам частиц, причем каждая пара учитывается, конечно, один раз; выражение для T_α дается формулой (6.56), в которой вместо индексов $(1,2)$ поставлены индексы частиц, входящих в пару. Так как ввиду (6.57) $T_{i,j} = T_{j,i}$, то в уравнении (6.62)

$$\sum_{\alpha} T_\alpha F = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leqslant j_1 \leqslant N \\ 1 \leqslant j_2 \leqslant N \\ j_1 \neq j_2}} T_{j_1, j_2} F. \tag{6.63}$$

Применим теперь уравнение (6.62) к частному виду функции типа (6.25):

$$f_j(t, q, p) = \delta(q - q_j(t))\delta(p - p_j(t)). \tag{6.64}$$

Найдем

$$\frac{\partial f_j(t,q,p)}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}_j}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \delta(q - q_j)\delta(p - p_j) + \sum_{\substack{1 \leqslant j_1 \leqslant N \\ j_1 \neq j}} T(j, j_1) f_j, \tag{6.65}$$

поскольку

$$\frac{1}{2}\{T(j, j_1) + T(j_1, j)\} = T(j, j_1).$$

При этом

$$\frac{\mathbf{p}_j}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \delta(q - q_j)\delta(p - p_j) = -\frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} f_j(t, q, p). \tag{6.66}$$

Перейдем теперь к раскрытию второго члена в правой части уравнения (6.65). Имеем

$$T(j, j_1) f_j = \frac{a^2}{m} \int \theta(p_{j,j_1} \cdot \sigma) |(p_{j,j_1} \cdot \sigma)| \delta(q_{j_1} - q_j - a\sigma)\delta(q - q_j) \times$$
$$\times \{\delta(p - p_j + \sigma(p_{j,j_1} \cdot \sigma)) - \delta(p - p_j)\} d\sigma,$$

откуда, замечая, что

$$\int \delta(q' - q_{j_1})\delta(p' - p_{j_1} - \sigma(p_{j,j_1} \cdot \sigma)) dq' dp' = 1,$$

$$\int \delta(q' - q_{j_1})\delta(p' - p_{j_1}) dq' dp' = 1,$$

можем написать

$$T(j, j_1) f_j = \frac{a^2}{m} \int \theta(p_{j,j_1} \cdot \sigma) |(p_{j,j_1} \cdot \sigma)| \delta(q_{j_1} - q_j - a\sigma)\delta(q - q_j)\delta(q' - q_{j_1}) \times$$
$$\times \delta(p - p_j + \sigma(p_{j,j_1} \cdot \sigma))\delta(p' - p_{j_1} - \sigma(p_{j,j_1} \cdot \sigma)) dq' dp' d\sigma -$$
$$- \frac{a^2}{m} \int \theta(p_{j,j_1} \cdot \sigma) |(p_{j,j_1} \cdot \sigma)| \delta(q_{j_1} - q_j - a\sigma) \times$$
$$\times \delta(q - q_j)\delta(q' - q_{j_1})\delta(p - p_{j_1})\delta(p' - p_{j_1}) dq' dp' d\sigma. \tag{6.67}$$

Рассмотрим первый член в правой части (6.67), содержащий произведение трехмерных δ-функций,

$$\delta(p-p_j+\sigma(p_{j,j_1}\cdot\sigma)\delta(p'-p_j-\sigma(p_{j,j_1}\cdot\sigma)). \tag{6.68}$$

Заметим вообще, что если a есть какой-то трехмерный вектор, то, выделяя в нем компоненту $\sigma\cdot a$, параллельную σ, и компоненту $a_\perp$, перпендикулярную к этому орту, можем представить трехмерную δ-функцию $\delta(a)$ в виде $\delta(a)=\delta_1(a\cdot\sigma)\delta_2(a_\perp)$, где δ_1 — одномерная, а δ_2 — двумерная δ-функция. Применяя это замечание к произведению (6.68), найдем, что оно будет равно следующему выражению:

$$\delta_1((p-p_j)\cdot\sigma+(p_{j,j_1}\cdot\sigma))\delta_1((p'-p_{j_1})\cdot\sigma-(p_{j,j_1}\cdot\sigma))\delta_2(p^\perp-p_j^\perp)\delta_2(p'^\perp-p_{j_1}^\perp). \tag{6.69}$$

Но имеем тождественно

$$(p-p_j)\cdot\sigma+(p_j-p_{j_1})\cdot\sigma=p\sigma-p_{j_1}\sigma=p'\sigma+(p-p')\cdot\sigma-p_{j_1}\sigma,$$
$$(p'-p_{j_1})\cdot\sigma-(p_j-p_{j_1})\cdot\sigma=p'\sigma-p_j\sigma=p\sigma-(p-p')\cdot\sigma-p_j\sigma.$$

Поэтому (6.69) может быть записано в форме

$$\delta_1(p\sigma-(p-p')\cdot\sigma-p_j\sigma)\delta_1(p'\sigma+(p-p')\cdot\sigma-p_{j_1}\sigma)\delta_2(p^\perp-p_j^\perp)\delta_2(p'^\perp-p_{j_1}^\perp)=$$
$$=\delta(p-\sigma\{(p-p')\cdot\sigma\}-p_j)\delta(p'+\sigma\{(p-p')\cdot\sigma\}-p_{j_1}). \tag{6.70}$$

Таким образом, в первом члене правой части (6.67) выражение (6.68) может быть заменено на (6.70) и, как видно, $(p_{j_1,j}\sigma)=-(p-p')\cdot\sigma$. Поэтому этот член будет равен

$$\frac{a^2}{m}\int\theta\{(p'-p)\cdot\sigma\}|(p'-p)\cdot\sigma|\delta(q_{j_1}-q_j-a\sigma)\delta(q-q_j)\delta(q'-q_{j_1})\times$$
$$\times\,\delta(p-\sigma\{(p-p')\cdot\sigma\}-p_j)\delta(p'+\sigma\{(p-p')\cdot\sigma\}-p_{j_1})dq'dp'd\sigma. \tag{6.71}$$

Введем оператор $b(\sigma)$, действующий на функции импульсов p, p', определив его соотношением

$$b(\sigma)\psi(p,p')=\psi(p-\sigma\{(p-p')\cdot\sigma\},\ p'+\sigma\{(p-p')\cdot\sigma\}). \tag{6.72}$$

Тогда из (6.71) имеем

$$\frac{a^2}{m}\int\theta\{(p'-p)\cdot\sigma\}|(p'-p)\cdot\sigma|\delta(q'-q-a\sigma)\times$$
$$\times\,b(\sigma)\delta(q-q_j)\delta(p-p_j)\delta(q'-q_{j_1})\delta(p'-p_{j_1})dq'dp'd\sigma. \tag{6.73}$$

Обратимся теперь ко второму члену правой части (6.67). Здесь, очевидно, $(p_{j,j_1}\sigma)$ может быть заменено на $(p-p')\cdot\sigma$. Совершив над переменной интегрирования — ортом σ — замену $\sigma\to-\sigma$, представим данный член в виде

$$-\frac{a^2}{m}\int\theta\{(p'-p)\cdot\sigma\}|(p-p')\cdot\sigma|\delta(q_{j_1}-q_j+a\sigma)\delta(q-q_j)\delta(p-p_j)\delta(q'-q_{j_1})\times$$
$$\times\,\delta(p'-p_{j_1})dq'dp'd\sigma=-\frac{a^2}{m}\int\theta\{(p'-p)\cdot\sigma\}|(p'-p)\cdot\sigma|\delta(q'-q+a\sigma)\times$$
$$\times\,\sigma(q-q_j)\delta(p-p_j)\delta(q'-q_{j_1})\delta(p'-p_{j_1})dq'dp'd\sigma. \tag{6.74}$$

в) Уравнение Больцмана–Энскога. Заметим теперь, что, хотя в уравнении (6.65) суммирование по j_1 идет с исключением индекса $j_1 = j$, мы можем распространить его по всем j_1, поскольку, как это видно уже из (6.67), имеем тождественно

$$T(j,j)f_j = 0,$$

ибо так как $\sigma^2 = 1$, то $\delta(q_j - q_j - a\sigma) = 0$. Поэтому, полагая

$$\sum_{1\leqslant j_1\leqslant N} \delta(q - q_{j_1})\delta(p - p_{j_1}) = f(t,q,p) \tag{6.75}$$

и вспоминая, что на основании (6.64)

$$\delta(q - q_j)\delta(p - p_j) = f_j(t,q,p), \tag{6.76}$$

а также учитывая представления (6.73), (6.74) для членов правой части равенства (6.67), находим

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant N} T(j,j_1)f_j = \frac{a^2}{m}\int \theta\{(p'-p)\cdot\sigma\}|(p'-p)\cdot\sigma|\{\delta(q'-q-a\sigma)b(\sigma)-$$
$$-\delta(q'-q+a\sigma)\}f_j(t,q,p)f(t,q',p')dq'dp'd\sigma.$$

Подставив это выражение в уравнение (6.65), будем иметь

$$\frac{\partial f_j(t,q,p)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}f_j(t,q,p) +$$
$$+\frac{a^2}{m}\int \theta\{(p'-p)\cdot\sigma\}|(p'-p)\cdot\sigma|\{\delta(q'-q-a\sigma)b(\sigma)-$$
$$-\delta(q'-q+a\sigma)\}f_j(t,q,p)f(t,q',p')dq'dp'd\sigma$$

или, выполняя интегрирование по q', запишем

$$\frac{\partial f_j(t,q,p)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}f_j(t,q,p) +$$
$$+\frac{a^2}{m}\int \theta\{(p'-p)\cdot\sigma\}|(p'-p)\cdot\sigma|\{f_j(t,q,p^*)f(t,q+a\sigma,p^{*\prime})-$$
$$-f_j(t,q,p)f(t,q-a\sigma,p')\}dp'd\sigma, \tag{6.77}$$

где

$$p^* = p - \sigma\{(p-p')\cdot\sigma\}, \quad p^{*\prime} = p + \sigma\{(p-p')\cdot\sigma\}. \tag{6.78}$$

Просуммируем теперь обе части уравнения (6.77) по всем $j = 1,\ldots,N$. Тогда, учитывая (6.75), получим

$$\frac{\partial f(t,q,p)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}f(t,q,p) +$$
$$+\frac{a^2}{m}\int \theta\{(p'-p)\cdot\sigma\}|(p'-p)\cdot\sigma|\{f(t,q,p^*)f(t,q+a\sigma,p^{*\prime})-$$
$$-f(t,q,p)f(t,q-a\sigma,p')\}dp'd\sigma. \tag{6.79}$$

Нетрудно заметить, что это есть *уравнение Больцмана–Энскога*. Преобразуем его сейчас для удобства сравнения, введя общепринятую нормировку. Так, в кинетической теории газов в уравнении Больцмана–Энскога вместо импульсов обычно используются скорости. Имеем

$$p = mv, \quad p' = mv', \quad p_j(t) = mv_j(t),$$

так что

$$f(t,q,p) = \sum_{1\leqslant j\leqslant N} \delta(q - q_j(t))\delta(mv - mv_j(t)) = \\ = \frac{1}{m^3} \sum_{1\leqslant j\leqslant N} \delta(q - q_j(t))\delta(v - v_j(t)).$$

Далее,

$$\int \sum_{1\leqslant j\leqslant N} \delta(q - q_j(t))\delta(v - v_j(t))dqdv = N.$$

Поэтому, чтобы перейти к обычной нормировке

$$\frac{1}{V}\int_V dq \int dv F(t,q,v) = 1, \tag{6.80}$$

где V — макроскопический объем, в котором движутся рассматриваемые частицы, положим

$$F(t,q,v) = \frac{1}{n} \sum_{1\leqslant j\leqslant N} \delta(q - q_j(t))\delta(v - v_j(t)), \quad n = N/V. \tag{6.81}$$

Тогда в уравнении (6.79) будем иметь

$$f(t,q,p) = \frac{n}{m^3} F(t,q,v), \quad dp' = m^3 dv'$$

и, таким образом, приходим к стандартной форме уравнения Больцмана–Энскога

$$\frac{\partial F(t,q,v)}{\partial t} = -\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} F(t,q,v) + \\ + a^2 n \int_{(v'-v)\cdot\sigma\geqslant 0} |(v'-v)\cdot\sigma|\{F(t,q,v^*)F(t,q+a\sigma,v^{*\prime}) - \\ - F(t,q,v)F(t,q-a\sigma,v')\}dv'd\sigma, \tag{6.82}$$

в котором

$$v^* = v - \sigma((v-v')\cdot\sigma), \quad v^{*\prime} = v' + \sigma((v-v')\cdot\sigma). \tag{6.83}$$

г) Уравнение диффузии выделенной частицы в газе. Рассмотрим также функцию

$$W(t,q,v) = m^3 f_1(t,q,p) = \delta(q - q_1(t))\delta(v - v_1(t)) \tag{6.84}$$

с нормировкой

$$\int_V dq \int dv\, W(t,q,v) = 1, \tag{6.85}$$

где V — объем, v — скорость. Для нее из (6.77) при $j=1$ найдем

$$\frac{\partial W(t,q,v)}{\partial t} = -\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}W(t,q,v) + \\ + a^2 n \int\limits_{(v'-v)\cdot\sigma\geqslant 0} |(v'-v)\cdot\sigma|\{W(t,q,v^*)F(t,q+a\sigma,v^{*\prime}) - \\ - W(t,q,v)F(t,q-a\sigma,v')\}dv'd\sigma. \quad (6.86)$$

Как видно из определений (6.81), (6.84), $nF(t,q,v)dq\,dv$ представляет собой число точек в фазовом объеме $dq\,dv$, а $W(t,q,p)$ — плотность распределения точек в фазовом пространстве одной фиксированной «первой частицы». Подчеркнем, что в литературе уравнение Больцмана–Энскога всегда рассматривалось лишь как приближенное. Мы же показали выше, что оно имеет и микроскопические решения вида (6.81). Это было впервые получено в работе [11].

Из микроскопических уравнений (6.82), (6.86) можно получить и приближенные уравнения для усредненных макроскопических функций[1]

$$\langle F(t,q,v)\rangle, \quad \langle W(t,q,v)\rangle.$$

Если опять воспользоваться в качестве первого приближения приближением типа (6.33) для уравнения Власова, положив

$$\langle F(t,q',v')F(t,q,v)\rangle = \langle F(t,q',v')\rangle\langle F(t,q,v)\rangle$$

и

$$\langle W(t,q,v)F(t,q',v')\rangle = \langle W(t,q,v)\rangle\langle F(t,q',v')\rangle, \quad (6.90)$$

то для макроскопических усредненных функций распределения

$$\langle F(t,q,v)\rangle, \quad \langle W(t,q,v)\rangle \quad (6.91)$$

---

[1] Подчеркнем, что выражения (6.81), (6.84) для $F(t,q,v)$, $W(t,q,v)$ зависят от $q_j(t)$, $v_j(t)$ и тем самым являются функциями также начальных значений этих переменных:

$$F(t,q,v) = F(t,q,v;q_1^0,v_1^0;\ldots;q_N^0,v_N^0), \\ W(t,q,v) = W(t,q,v;q_1^0,v_1^0;\ldots;q_N^0,v_N^0). \quad (6.87)$$

Для усреднения используем какую-либо функцию распределения $\mathcal{D}(q_1^0,v_1^0;\ldots;q_N^0,v_N^0)$ с условием нормировки

$$\int \mathcal{D}(q_1^0,v_1^0;\ldots;q_N^0,v_N^0)dq_1^0dv_1^0\ldots dq_N^0dv_N^0 = 1,$$

и притом, разумеется, такую, которая обращается в нуль для нефизических состояний, когда шары «проникают» друг в друга, т. е.

$$\mathcal{D}(q_1^0,v_1^0;\ldots;q_N^0,v_N^0) = 0, \quad (6.88)$$

если хотя бы для одной пары двух различных частиц $|q_{j_1}^0 - q_{j_2}^0| < a$. Тогда используем следующие определения:

$$\langle F(t,q,v)\rangle = \int F(t,q,v)\mathcal{D}(q_1^0,v_1^0;\ldots;q_N^0,v_N^0)dq_1^0dv_1^0\ldots dq_N^0dv_N^0, \\ \langle W(t,q,v)\rangle = \int W(t,q,v)\mathcal{D}(q_1^0,v_1^0;\ldots;q_N^0,v_N^0)dq_1^0dv_1^0\ldots dq_N^0dv_N^0. \quad (6.89)$$

получим также уравнения (6.82), (6.86). Разумеется, для функций (6.91) они будут уже приближенными ввиду использования приближенного «расцепления» (6.90). Кстати, заметим, что если для $\langle F(t,q,v)\rangle$ выбрать равновесное максвелловское распределение

$$F(q,v)=\varphi(v)=\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-mv^2/2\theta}, \tag{6.92}$$

то, положив в приближенном уравнении (6.86) для $\langle W(t,q,v)\rangle$

$$\langle W(t,q,v)\rangle=\varphi(v)\psi(t,q,v) \tag{6.93}$$

и отметив, что тождественно $\varphi(v)\varphi(v')=\varphi(v^*)\varphi(v^{*\prime})$, получим приближенное уравнение

$$\frac{\partial\psi(t,q,v)}{\partial t}=-\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\psi(t,q,v)+$$
$$+a^2n\int\limits_{(v'-v)\cdot\sigma\geqslant 0}|(v'-v)\cdot\sigma|\{\psi(t,q,v^*)-\psi(t,q,v)\}\varphi(v')dv'd\sigma. \tag{6.94}$$

Это уравнение обычно используется в кинетической теории газов для изучения диффузии одной выделенной частицы в газе, находящемся в состоянии статистического равновесия.

Возвратимся теперь к уравнению (6.82). Мы уже видели, что кроме приближенных решений, основанных на аппроксимационной формуле (6.90), оно имеет и микроскопические решения (6.81). Естественно поэтому, что этим нелинейным уравнением можно воспользоваться и для получения более точных приближений, в принципе сколь угодно точных. Разумеется, существенные трудности весьма быстро возрастают при переходе к более точным формулам. В связи с этим отметим работу [14], в которой авторы, исходя из нелинейного уравнения Больцмана (получающегося из (6.82) заменой в аргументах F: $q+a\sigma\to q$, $q-a\sigma\to q$), сумели получить приближения, которые выходят за рамки общепринятых представлений о пределах применимости уравнений этого типа.

д) Бинарное взаимодействие. Заметим еще, что все вышеизложенные рассуждения непосредственно обобщаются и на тот случай, когда кроме непроницаемого ядра имеется и обычное бинарное взаимодействие:

$$\Phi(r)=\infty\quad(r<a/2),$$
$$\Phi(r)=\Phi_0(r)\quad(r\geqslant a/2),\quad \Phi_0'(r)=0\quad(r<a), \tag{6.95}$$

где $\Phi_0(r)$ — регулярная функция r в интервале (a,∞), т. е. на тот случай, когда между центрами упругих шаров имеются и регулярные бинарные взаимодействия. Тогда можно дословно повторить все предыдущие рассуждения, и все различие сведется к тому, что к выражению $T(1,2)$, заданному формулой (6.56), надо лишь добавить член

$$\frac{\partial\Phi(q_1-q_2)}{\partial\mathbf{q}_1}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_2}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_1}\right). \tag{6.96}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно только соответственно изменить выражения Δ_1, Δ_2 (6.38) для разности (6.37), положив

$$\Delta_1 = F(q_1^{\Delta t}, p_1^{\Delta t}; q_2^{\Delta t}, p_2^{\Delta t}) - F\left(q_1 + \frac{p_1}{m}\Delta t,\ p_1 - E\Delta t;\ q_2 + \frac{p_2}{m}\Delta t,\ p_2 + E\Delta t\right),$$

$$\Delta_2 = F\left(q_1 + \frac{p_1}{m}\Delta t,\ p_1 - E\Delta t;\ q_2 + \frac{p_2}{m}\Delta t,\ p_2 + E\Delta t\right) - F(q_1, p_1; q_2, p_2),$$

где $E = \dfrac{\partial\Phi(q_1 - q_2)}{\partial \mathbf{q}_1}$. Преобразование Δ_1 совершается точно так же, как и раньше, и приводит к тому же псевдооператору $T(1,2)$; от раскрытия же члена Δ_2 как раз и произойдет добавка (6.96).

Ввиду наличия дополнительного к $T(1,2)$ оператора (6.96) к уравнениям (6.82), (6.86) добавятся «власовские члены», и мы получим соответственно уравнения для функций (6.81), (6.84)

$$\frac{\partial F(t,q,v)}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}F(t,q,v) + a^2 n \int\limits_{(v'-v)\cdot\sigma\geqslant 0} |(v'-v)\cdot\sigma|\{F(t,q,v^*)F(t,q+a\sigma,v^{*\prime}) - F(t,q,v)F(t,q-a\sigma,v')\}dv'd\sigma + \int \frac{\partial\Phi_0(q-q')}{\partial \mathbf{q}}\rho(t,q')dq'\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}F(t,q,v), \quad (6.97)$$

$$\frac{\partial W(t,q,v)}{\partial t} = -\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}W(t,q,v) + \int \frac{\partial\Phi_0(q-q')}{\partial \mathbf{q}}\rho(t,q')dq'\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}W(t,p,q) + a^2 n \int\limits_{(v'-v)\cdot\sigma\geqslant 0} |(v'-v)\cdot\sigma|\{W(t,q,v^*)F(t,q+a\sigma,v^{*\prime}) - W(t,q,v)F(t,q-a\sigma,v')\}dv'd\sigma, \quad (6.98)$$

в которых

$$\rho(t,q) = n\int F(t,q,v)dv. \quad (6.99)$$

Подчеркнем в заключение, что все изложенные рассуждения, относившиеся к динамической системе из N упругих шаров, существенно основаны на мгновенности процесса бинарного соударения и потому не могут быть точно перенесены на случай квантовой механики, где процессы соударения упругих шаров совершаются за конечный промежуток времени (пропорциональный константе $\hbar$ Планка). Что же касается обобщения изложенных результатов в рамках классической механики на случай системы упругих шаров, принадлежащих к различным сортам, например на случай, когда имеется n различных систем одинаковых шаров, причем шары, принадлежащие к разным сортам, имеют разные диаметры и разные законы регулярных бинарных взаимодействий, то такое обобщение может быть проведено изложенным выше методом.

Список литературы

1. *Dirac P. A. M.* Theory of the Emission and Absorption of Radiation // Proc. Roy. Soc. 1927. V. A144. P. 243; *Дирак П. А. М.* Собр. науч. трудов: В 4 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Физматлит, т. II, 2003.
2. *Jordan P., Wigner E.* Über das Paulische Äquivalenzverbot // Z. Phys. 1928. Bd 47. S. 631.
3. *Vok W.* Konfigurationstraum und zweite Quantelung // Z. Phys. 1932. Bd 75. S. 622; Zur Quantenelektrodynamik // Sowiet Phys. 1934. V. 6. P. 425.
4. *Боголюбов Н. Н.* Лекции по квантовой статистике. Киев: Рад. шк., 1949. Гл. 2. С. 38–65; Избранные труды. Т. II. Киев: Наук. думка, 1970. С. 319–350; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. VI, 2006, с. 9.
5. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
6. *Боголюбов Н. Н.* (*мл.*). Метод исследования модельных гамильтонианов. М.: Наука, 1974; *Bogolubov N. N.* (*Jr.*). A Method for Studying Model Hamiltonians. Oxford; New York: Pergamon Press, 1972.
7. *Власов А. А.* // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 203; Изв. АН СССР. Сер. физ. 1944. Т. VIII, № 5.
8. *Власов А. А.* Теория многих частиц. М.: Гостехиздат, 1950. С. 92.
9. *Климонтович Ю. Л.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 982.
10. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М.: Изд-во МГУ, 1964.
11. *Боголюбов Н. Н.* Микроскопические решения уравнения Больцмана–Энскога в кинетической теории для упругих шаров // ТМФ. 1975. Т. 24, № 2. С. 242; *Он же.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. V, 2006, с. 608.
12. *Hopfield J. J., Bastin J. F.* // Phys. Rev. 1968. V. 168. P. 193.
13. *Sengers J. V., Cohen E. G. D.* // Physica. 1961. V. 27. P. 230; *Ernst M. H. et al.* // Physica. 1969. V. 45. P. 927.
14. *Ubbink J. T., Hauge E. H.* // Physica. 1973. V. 70. P. 297.
15. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
16. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.

20.

ВЫСТУПЛЕНИЕ ЛАУРЕАТА ПРЕМИИ им. А. П. КАРПИНСКОГО*

Разрешите мне поблагодарить кураториум фонда «Ф. Ф. С.» за высокую честь — присуждение премии имени Александра Петровича Карпинского. Я рассматриваю эту высокую награду не только как оценку моих личных заслуг, но и прежде всего как свидетельство признания выдающихся достижений советской школы теоретической и математической физики.

Из-за ограниченности времени я не смогу в этом выступлении остановиться на всех работах, за которые удостоен премии. Поэтому разрешите мне кратко осветить только некоторые эпизоды моей научной деятельности.

Свою научную работу я начал в 1923 г. в Киеве под руководством выдающегося советского математика и механика академика Николая Митрофановича Крылова. Мне приятно, что сегодня академик В. Е. Соколов напомнил, что одна из моих ранних работ, посвященная разработке прямых методов решения экстремальных задач, более пятидесяти лет назад получила премию Академии наук Болоньи.

В начале 1930-х гг. мы с Николаем Митрофановичем Крыловым приступили к разработке новой области математической физики — теории нелинейных колебаний, названной нами нелинейной механикой.

Исследования тех лет были направлены прежде всего на усовершенствование методов асимптотического интегрирования нелинейных уравнений, описывающих колебательные процессы.

Вопросы асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений с «малым» параметром изучались ранее, однако при этом рассматривались в основном консервативные системы. Нам удалось создать аппарат, способный эффективно описать поведение общих неконсервативных систем, и построить новые асимптотические методы нелинейной механики, а также дать их строгое математическое обоснование.

Следует сказать, что разработанные в те годы методы в дальнейшем нашли широкое (и даже порой неожиданное) применение в различных областях как науки, так и техники. Дело в том, что математические уравнения и методы их решения для многих явлений природы оказываются одинаковыми или очень близкими.

Так, нелинейная механика нашла применение при конструировании самолетов, изучении траекторий планет, выводе пучков ускорителей элементарных

---

* Alexander-Petrowitsch-Karpinskij-Preis. Hamburg, 1981. P. 33–41.

частиц, управлении электросетями и даже в экологических задачах типа задачи «охотник–жертва».

Приведенные выше примеры показывают единство математической структуры физических теорий, на первый взгляд далеких друг от друга, таких, как нелинейная механика, статистическая физика, астрономия. Это единство обусловливает взаимное проникновение и влияние методов и физических идей, возникающих в различных областях науки.

Новые методы исследования динамических систем в нелинейной механике позволили по-иному подойти к проблемам классической статистической физики, которой в дальнейшем я посвятил значительное число работ.

Но, может быть, наиболее рельефно такую взаимосвязь идей и методов я мог бы проследить, анализируя ту часть работ, которая посвящена развитию квантовой статистической физики и квантовой теории поля.

В октябре 1946 г. на собрании Отделения физико-математических наук АН СССР я выступил с докладом, в котором было дано объяснение явления сверхтекучести на микроскопическом уровне. Как известно, сверхтекучесть — это макроскопический эффект, экспериментально открытый в 1938 г. академиком П. Л. Капицей и состоящий в исчезновении вязкости гелия при сверхнизких температурах.

При разработке микроскопической теории этого явления были использованы два сравнительно простых с математической точки зрения приема. Это упрощение гамильтониана (переход к так называемому модельному гамильтониану, где осуществлен «сдвиг на константу» волновой функции) и решение задачи путем специфического преобразования переменных. Предложенные математические методы оказались весьма удобными и для физического понимания явления.

Выяснилась следующая картина движения сверхтекучей жидкости: в противоположность обычной жидкости или газу, в которых отдельные частицы перемещаются хаотично, сама сверхтекучая жидкость проявляет высокую степень упорядоченности. Это обусловлено взаимодействием друг с другом отдельных частиц сверхтекучей жидкости, причем особенно сильным оно оказывается для частиц с противоположно направленными скоростями. Именно правильный учет этого взаимодействия и составлял основную трудность при создании теории сверхтекучести. В сверхтекучей жидкости ввиду существенного взаимодействия пар частиц с равными и противоположно направленными скоростями образуется особый «конденсат». Находящиеся в нем частицы не могут отдавать свою энергию небольшими порциями, так что в целом сверхтекучая жидкость оказывается лишенной вязкости. «Конденсат» может образовываться лишь при низких температурах, и поэтому явление сверхтекучести наблюдается только вблизи абсолютного нуля.

Как удалось установить впоследствии, в 1957 г., при построении микроскопической теории сверхпроводимости (явления, обнаруженного еще в 1911 г. голландским ученым Г. Камерлинг-Оннесом) упомянутые выше математические методы нашли свое обобщение и оказались эффективным средством в изучении и этого явления природы. Выяснилось, что физическая природа сверхтекучести и сверхпроводимости почти одна и та же; между этими явлениями существует глубокая физическая и математическая аналогия. Характери-

зуя в немногих словах эту аналогию, можно сказать, что сверхпроводимость — это сверхтекучесть электронов в металле.

При построении микроскопической теории сверхпроводимости представление о коррелированной паре частиц с суммарным нулевым импульсом сыграло определяющую роль. Коррелированные пары протонов и нейтронов играют важную роль в структуре тяжелых ядер.

Отметим любопытную особенность упомянутых выше коррелированных пар частиц. В отличие от обычных корреляций классического типа в конфигурационном пространстве, когда два тела связаны между собой силами притяжения (Земля и Луна, протон и электрон в атоме водорода) и, так сказать, индивидуальным образом надолго (если не навсегда) приписаны друг к другу, в рассматриваемом случае необходимо принять, во-первых, во внимание квантовый принцип неразличимости тождественных частиц, а во-вторых, тот факт, что корреляции имеют импульсный, а не пространственный характер. Поэтому, во-первых, коррелированные пары непрерывно меняют «партнеров», а во-вторых, это мимолетное «партнерство» носит характер быстрого танца, во время которого «партнеры» находятся на значительном расстоянии друг от друга.

Интересно проследить влияние математических приемов, предложенных и разработанных при создании микроскопической теории сверхтекучести и сверхпроводимости, на последующее развитие квантовой физики, в том числе квантовой теории поля, являющейся основой наших представлений о физике микромира.

Например, операция «сдвига на константу» была использована в начале 1960-х гг. в ряде работ по так называемому спонтанному (или самопроизвольному) нарушению симметрии, происходящему в системах с вырожденным вакуумом (т. е. энергетически вырожденным низким состоянием). Это явление, широко используемое сейчас в квантовой теории поля, имеет механические аналогии, хорошо поясняющие суть дела и связанные с тем, что существование, например, неустойчивого равновесия может служить причиной спонтанного нарушения первоначальной симметрии задачи.

Общий аппарат изучения квантово-статистических систем с вырожденным вакуумом был развит мною в работах о квазисредних. Для анализа подобных систем в гамильтониан вводится добавка, пропорциональная малому параметру и формально снимающая вырождение. Система при этом обладает единственным вакуумом, что позволяет применить при ее изучении общепринятые методы.

В работе о квазисредних была доказана также фундаментальная теорема, согласно которой в квантовой системе при спонтанном нарушении непрерывной симметрии всегда наступает дальнодействие. Другими словами, имеет место появление безмассовых возбуждений — квантов типа фотона или фонона, обмен которыми и приводит к взаимодействию с бесконечно большим радиусом. Вскоре после этого аналогичный результат в квантовой теории поля был получен другими исследователями.

Впоследствии было замечено, что если объединить теорию так называемых калибровочных полей с теорией спонтанно нарушенной симметрии, то совокупность безмассового голдстоуновского бозона и безмассового калибро-

вочного бозона эквивалентна массивному калибровочному бозону. Этот факт был использован в конце 1960-х гг. при построении объединенной модели электромагнитных и слабых взаимодействий. Сейчас она считается весьма вероятным претендентом на роль реалистической теории.

Из приведенных примеров видно, как общность математических методов позволяет установить идейные и физические связи между различными явлениями природы, обусловливает взаимное влияние прогресса теории в различных областях знаний.

Теперь мне бы хотелось остановиться на еще одном примере из области теории элементарных частиц, который позволяет продемонстрировать те огромные возможности для формирования наших физических представлений, которые заложены в математике. Речь пойдет о доказательстве дисперсионных соотношений в квантовой теории поля, т. е. соотношений между вещественной и мнимой частями амплитуды рассеяния элементарных частиц. Различные виды дисперсионных соотношений были известны задолго до появления квантовой теории поля. Еще в середине 1920-х гг. в классической электродинамике было получено дисперсионное соотношение между вещественной и мнимой частью показателя преломления. Физической основой этого дисперсионного соотношения послужил тот факт, что сигналы не могут распространяться со скоростью, большей скорости света (принцип причинности).

В 1954–1955 гг. появились работы американских физиков, в которых предлагалось использовать дисперсионные соотношения для изучения рассеяния элементарных частиц. Однако оказалось, что задача строгого вывода дисперсионных соотношений в этом случае непростая. Для их доказательства необходимо было провести процедуру аналитического продолжения амплитуды, определенной лишь для вещественных значений энергии, в комплексную плоскость. К тому же амплитуда содержит сингулярности и с математической точки зрения является так называемой обобщенной функцией. Трудности корректного получения дисперсионных соотношений оказались настолько значительными, что появился ряд работ, содержащих недостаточно четкие рассуждения и вследствие этого порой приводящих к взаимно исключающим результатам.

Ясность в эту сложную ситуацию удалось внести в сентябре 1956 г. на международном съезде физиков-теоретиков в Сиетле (США). В доложенной мною работе был развит метод аналитического продолжения обобщенных функций. Важным элементом доказательства явилась предложенная новая формулировка условия причинности. В докладе был дан строгий вывод дисперсионных соотношений для рассеяния пионов на нуклонах. Стало ясно, что дисперсионные соотношения являются прямым следствием общих принципов квантовой теории поля — причинности, унитарности (сохранения вероятности), релятивистской инвариантности. Таким образом, проверка дисперсионных соотношений — одновременно и проверка этих общих принципов. Метод дисперсионных соотношений получил твердую основу и широкое применение в работах академиков А. А. Логунова, В. С. Владимирова, члена-корреспондента АН СССР Д. В. Ширкова, профессоров Б. В. Медведева, М. К. Поливанова

и др. Оказалось, что использованная система аксиом имеет более широкое значение и удобна для систематического построения квантовой теории поля.

Хотелось бы отметить еще один важный вывод, касающийся амплитуды рассеяния, которая является функцией двух кинематических переменных (связанных с энергией и углом рассеяния). В силу определенной симметрии математически родственных, но физически различающихся процессов эти переменные могут выступать равноправно. Таким образом, было введено понятие об амплитуде рассеяния как единой аналитической функции двух кинематических комплексных переменных, различные граничные значения которой описывают физически далекие процессы. Это понятие сыграло роль в получении строгих ограничений на асимптотическое поведение амплитуд рассеяния в области высоких энергий. В дальнейшем трудами академика А. А. Логунова и его школы из этого направления выросла новая ветвь — физика инклюзивных процессов.

Доказанные в работе 1956 г. сугубо математические теоремы нашли применение и в ряде других разделов квантовой теории поля. Сюда относится, например, проблема так называемых автомодельных асимптотик в глубоконеупругом рассеянии при высоких энергиях, которая была решена в совместных работах с академиком В. С. Владимировым и профессором А. Н. Тавхелидзе. Процессы глубоконеупругого рассеяния, т. е. рассеяния, сопровождающегося рождением многих других частиц, позволяют получить информацию о внутренней структуре элементарных частиц — адронов. Эксперименты показали, что асимптотическое поведение сечений рассеяния при больших энергиях таково, как если бы адроны состояли из точечноподобных объектов. Этот факт находится в полном согласии с так называемой кварковой моделью адронов (т. е. моделью, согласно которой элементарные частицы состоят из некоторых субчастиц, называемых кварками). В этой области мне совместно с профессором А. Н. Тавхелидзе и доктором Б. В. Струминским удалось получить интересный результат, заключающийся во введении в теорию нового квантового числа, названного впоследствии «цветом». Согласно кварковой модели, например, элементарная частица омега-минус-гиперон состоит из трех кварков одного сорта с одинаковым направлением спинов. Чтобы не нарушить принцип Паули, запрещающий существование таких систем, и было предложено новое квантовое число, принимающее три значения и делающее состояния этих кварков различными.

Гипотеза «цветных» кварков вместе с идеей так называемых калибровочных полей (т. е. полей, уравнения для которых инвариантны относительно некоторой локальной группы преобразований) привели к созданию новой теории — квантовой хромодинамики, претендующей в последнее время на роль теории сильных взаимодействий. При этом гипотеза «цвета», согласно которой кварк каждого сорта может находиться в трех различных состояниях, привела к появлению в теории сильных взаимодействий новой группы преобразований, «перепутывающей» цвета кварков. Требование локальности этой группы, согласно идее калибровочных полей, вынуждает ввести поля, кванты которых (глюоны, от слова glue — клей) «склеивают» кварки в адронах, таким образом, квантовое число «цвет» играет роль заряда в сильных взаимодействиях.

Теория цветных кварков, взаимодействующих посредством обмена глюонами, в последнее время достигла ряда серьезных успехов, и есть основание полагать, что в понимании законов микромира наметился существенный прогресс.

На этом разрешите закончить краткий обзор некоторых идей и методов, которые, с моей точки зрения, повлияли на развитие теоретической физики. Хочется выразить надежду, что они и в дальнейшем получат широкое применение и послужат прогрессу в познании и использовании свойств материи.

Приношу еще раз благодарность за присуждение премии имени выдающегося ученого Александра Петровича Карпинского. Это высокая оценка моего труда, который и в дальнейшем будет направлен на благо науки и прогресса, идеалов мира, гуманизма и взаимопонимания между народами.

Благодарю вас за внимание.

21.

ЦВЕТНЫЕ КВАРКИ — НОВАЯ СТУПЕНЬ ПОЗНАНИЯ МИКРОМИРА*

Будущее физики и успешное развитие опирающихся на ее достижения других отраслей естествознания в значительной степени зависят от прогресса в познании внутренней структуры и фундаментальных законов взаимодействия элементарных частиц.

Вопрос о природе материи является извечным вопросом естествознания. От атомистики древних до современных теорий элементарных частиц проходит идея о существовании истинно элементарных, фундаментальных составляющих материи. Около 220 лет назад великий русский ученый Михаил Васильевич Ломоносов в начатых незадолго до смерти трудах «Микрология» и «Системы всей физики» пытался создать целостную физическую картину мира на основе своей «корпускулярной философии» и развиваемых взглядов на природу материи, которой «исполнен океан всемирного пространства» и которая подчиняется «ненарушимым движения законам».

Нынешний век, ознаменовавшийся революционными сдвигами в наших представлениях о пространстве и времени, созданием релятивистской механики и квантовой теории, раскрытием структуры атома и атомного ядра и овладением ядерной энергией, открытием целого мира элементарных частиц и осознанием единства всех основных сил природы, вписал новую страницу в историю развития идей о природе материи.

Тесно связанный с развитием фундаментальных исследований процесс создания новой техники и технологии привел к качественно новой ступени познания структуры элементарных частиц и атомного ядра. Возникла новая наука — физика высоких энергий, имеющая в своем распоряжении мощные ускорители заряженных частиц высоких энергий и интенсивности, крупные уникальные физические установки, современные электронные приборы и быстродействующие ЭВМ.

В результате плодотворного объединения релятивистской и квантовой механики возникло новое мощное направление — теория квантованных полей, являющаяся в течение нескольких десятилетий теоретическим фундаментом физики высоких энергий и ядерной физики, основой теоретических построений в пограничных областях физики — квантовой статистике, физике твердого тела, биофизике и др.

Усилия многих выдающихся теоретиков, среди которых достойное место принадлежит советским ученым, привели к созданию стройного и мощного

---

*Вестник АН СССР. 1985. Т. 6. С. 54–62; *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. трудов: В 12 т. / Отв. ред.-сост. А. Д. Суханов. М.: Наука, т. XII, 2009, с. 406.

аппарата квантовой теории поля. Эта теория базируется на нескольких общих принципах, таких, как релятивистская инвариантность, локальность, микропричинность, сохранение полной вероятности и др., играющих ту же роль, что и системы аксиом в геометрии.

На основе идеи ренормализационной инвариантности и метода ренормгруппы в теории квантованных полей были успешно преодолены казавшиеся до тех пор непреодолимыми трудности, связанные с так называемыми ультрафиолетовыми расходимостями, потребовавшими критического пересмотра способа описания взаимодействующих квантованных полей на малых (даже в масштабе микромира) расстояниях.

Вбирая в себя все новые глубокие идеи, такие, как концепция локальной калибровочной инвариантности, представление о вырожденном вакууме, принцип спонтанного нарушения симметрии и др., квантовая теория поля все более раздвигает свои границы, превращаясь в мощное универсальное средство исследований от физики микромира до космологических моделей ранней Вселенной.

Интенсивные экспериментальные и теоретические исследования в области физики высоких энергий привели за последние десятилетия к значительным успехам в раскрытии фундаментальных законов микромира. Выяснилась принципиально важная роль пространственно-временных и так называемых внутренних симметрий, связанных с важнейшими законами сохранения в микромире. В результате развития этого, так сказать, симметрийного подхода в теории элементарных частиц 20 лет назад появилась чрезвычайно плодотворная составная кварковая модель сильновзаимодействующих частиц — мезонов и барионов, опирающаяся на представление о цветных кварках.

Идея цветных кварков — фундаментальных фермионов, обладающих специфическим квантовым числом — цветом и являющихся наравне с лептонами простейшими составляющими вещества, — лежит в основе современных представлений о мире элементарных частиц и атомных ядер.

В течение уже 20 лет модель цветных кварков служит языком теории элементарных частиц. С нею связаны многие достижения в физике высоких энергий. Без представления о цветных кварках как фундаментальных составляющих материи вряд ли были бы возможны прогресс в понимании эволюции ранней Вселенной, продвижение по пути реализации кардинальной идеи о единстве всех основных сил природы — электромагнитных, сильных, слабых и гравитационных.

В рамках одного доклада невозможно осветить все наиболее важные этапы развития теории цветных кварков, которая является ныне фундаментом или составной частью ряда магистральных направлений исследований в физике элементарных частиц и высоких энергий. Я попытаюсь рассказать лишь о некоторых основных моментах развития этой теории и прокомментировать наиболее важные, на наш взгляд, результаты, полученные на ее основе.

К началу 1960-х гг. число наблюдаемых состояний сильновзаимодействующих частиц и резонансов — мезонов и барионов, или, как физики их сейчас называют, адронов, — достигло многих десятков.

Многочисленные попытки найти ключ к объяснению закономерностей в этом необозримом море состояний, которые теория продолжала именовать элементарными частицами, а также описать разнообразные их свойства, такие,

как массы, времена жизни, квантовые числа, моды распада и т. д., привели к созданию составных моделей адронов. Начало было положено Э. Ферми и Ч. Янгом, высказавшими в 1949 г. гипотезу о том, что легчайшая из обнаруженных к тому времени сильновзаимодействующих частиц — пион является не элементарной частицей, а связанным состоянием нуклона и антинуклона. Эта гипотеза оказалась неудовлетворительной, однако поиски «самых элементарных» частиц продолжились.

Последующее развитие идеи составных частиц имело целью построение своего рода «таблицы Менделеева» для элементарных частиц. Важную роль в этом отношении сыграло обнаружение так называемой унитарной симметрии элементарных частиц, отражавшей приближенную независимость динамических свойств адронов, принадлежащих одному и тому же семейству (или унитарному мультиплету), от конкретного набора квантовых чисел — электрического заряда, изотопического спина, странности или, как говорят сейчас физики, «аромата» частиц.

Когда в 1964 г. М. Гелл-Манн и Дж. Цвейг высказали гипотезу кварков — гипотетических частиц, из которых могли быть построены все наблюдаемые сильновзаимодействующие частицы — мезоны и барионы, — кварки рассматривались скорее как сугубо математические модели, в терминах которых можно было наиболее экономным образом описывать свойства унитарной симметрии сильных взаимодействий. Обладавшие дробными электрическими и барионными зарядами и не наблюдаемые в свободном, изолированном состоянии, кварки не сразу получили необходимое физическое истолкование. На пути к этому стоял ряд принципиальных трудностей, заложенных в кварковой модели.

Во-первых, построение адронов из кварков, имеющих спин $j = 1/2$, приводило к противоречию с принципом Паули для систем частиц с полуцелыми спинами, который играет фундаментальную роль в квантовой механике и квантовой теории поля.

Во-вторых, оставался без ответа вопрос: почему в природе реализуются лишь системы, образованные кварк-антикварковыми парами (мезоны) или тройками кварков (барионы), и отсутствуют указания о существовании других многокварковых состояний?

И наконец, в-третьих, отсутствовало какое-либо объяснение того удивительного факта, что, несмотря на усиленные экспериментальные поиски, кварки не обнаружены в свободном, изолированном состоянии. Эта проблема получила известность как проблема конфайнмента, или невылетания кварков.

Анализ этих принципиальных проблем физики элементарных частиц привел к тому, что в 1965 г. в работе Б. В. Струминского, А. Н. Тавхелидзе и моей, выполненной в Дубне, а также независимо в работе М. Хана, Й. Намбу (США) и У. Миямото (Япония) была выдвинута гипотеза о наличии у кварков нового, неизвестного ранее квантового числа или заряда, названного впоследствии цветом.

Согласно этой гипотезе, кварки являются обычными фермионами и, следовательно, подчиняются статистике Ферми–Дирака. Однако для каждого типа кварков с заданными значениями изотопического спина, электрического заряда и странности (т. е. для каждого аромата кварков) существуют три

унитарно-эквивалентных состояния, различающиеся значениями нового квантового числа — цвета.

Таким образом, с введением цвета общее число кварков, из которых строятся адроны, утроилось, хотя число самих адронов, наблюдаемых в природе, должно было остаться прежним. Образно это можно выразить так: наблюдаемые адроны — мезоны и барионы, — в отличие от кварков, бесцветны. Другими словами, цвета кварков компенсируют друг друга внутри адронов аналогично тому, как электрические заряды ядра и окружающих его электронов компенсируют друг друга в нейтральных атомах химических элементов.

Это не означает, однако, что цвет никак не проявляет себя на опыте. Прекрасный пример прямого экспериментально наблюдаемого проявления цвета кварков дает измерение полной вероятности образования адронов в процессах аннигиляции сталкивающихся при высоких энергиях электрон-позитронных пар. В соответствии с предсказанием теории данная вероятность определяется числом кварковых цветов и величинами электрических зарядов кварков, образующихся в этих процессах.

Гипотеза цветных кварков оказалась той кардинальной идеей, которая открыла путь к решению упомянутых выше принципиальных проблем теории элементарных частиц и, следовательно, к развитию последовательной картины кваркового строения материи.

Как уже говорилось, главной проблемой, стоявшей на этом пути, было отсутствие кварков в свободном состоянии. Объяснение явления невылетания кварков из адронов — одна из наиболее принципиальных, узловых проблем современной физики элементарных частиц. Хотя очевидно, что окончательное решение проблемы невылетания остается все же за экспериментом, был предпринят ряд попыток дать логически непротиворечивое объяснение «вечного заключения» кварков внутри адронов.

Так, разработка динамической кварковой модели, которая началась в Дубне в 1965 г., опиралась на предположение о том, что кварки — весьма тяжелые объекты, связанные в адронах огромными силами, которые, с одной стороны, обусловливают большой дефект масс кварков в адронах, а с другой — препятствуют их вылету наружу. В этой модели удерживаемые стенками потенциальной ямы кварки оказывались внутри нее эффективно свободными, или квазинезависимыми. Такое поведение привело к концепции асимптотической свободы кварков на малых расстояниях, играющей важнейшую роль в физике адронов.

Динамическая кварковая модель позволила систематически описать как статически наблюдаемые характеристики элементарных частиц (магнитные моменты, аксиально-векторные константы слабых переходов и др.), так и формфакторы адронов. Эти исследования дали толчок развитию современных кварковых моделей элементарных частиц.

Принципиально новый шаг на пути развития динамической теории адронов сделал Й. Намбу, который впервые ввел в рассмотрение векторные поля — переносчики цветового взаимодействия — так называемые глюоны (от английского слова glue — клей). В соответствии с современными теоретическими воззрениями глюоны как бы «склеивают» кварки в адронах, препятствуя их разлету.

Взаимодействия двух цветовых зарядов, переносимые глюонами, по аналогии с электродинамическим взаимодействием двух электрических зарядов были названы хромодинамическими взаимодействиями, а описывающая их теория — квантовой хромодинамикой. В отличие от электродинамики с единственным фотоном в хромодинамике существуют восемь глюонных полей в соответствии с восемью различными способами переноса кварковых цветов. При этом оказывается, что глюоны обладают отличным от нуля цветом и, следовательно, сами являются источником хромодинамических взаимодействий.

Это важное отличие от электродинамики связывается с возможностью существования действующих между двумя цветовыми зарядами сил, которые не убывают с расстоянием. Другими словами, между разносимыми на большие расстояния кварками как бы натягивается струна, препятствующая их разлету. Струна может, однако, разорваться в результате рождения из вакуума новой кварк-антикварковой пары, приводя к образованию двух новых бесцветных систем, например двух мезонов.

Следует заметить, что квантовая хромодинамика, развитие которой мы наблюдаем в течение последних лет, возникла в результате объединения гипотезы цветных кварков и цветовой унитарной симметрии с принципом локальной калибровочной инвариантности Янга–Миллса. В связи с этим важно подчеркнуть, что высказанная в 1964 г. гипотеза Гринберга о параферми-статистике кварков не позволяет ввести калибровочную унитарную симметрию, лежащую в основе квантовой хромодинамики, и является, таким образом, физически неприемлемой альтернативой гипотезе цветных ферми-кварков.

Невозможно в нескольких словах осветить все достижения квантовой хромодинамики, развитие которой знаменует значительный прогресс в теории сильных взаимодействий.

С неабелевым, т. е. некоммутативным, характером цветовой калибровочной симметрии и нетривиальными топологическими свойствами вакуумных конфигураций поля в квантовой хромодинамике связываются надежды на последовательное теоретическое решение проблемы конфайнмента.

Важную роль в квантовой хромодинамике играют разработанные в работах А. А. Логунова, Д. В. Ширкова и моих методы ренормализационной группы в теории квантованных полей, которые легли в основу доказательства свойства асимптотической свободы и позволили развить эффективные методы расчета высших приближений теории возмущений квантовой хромодинамики. Эти методы, а также операторное разложение Вильсона и дисперсионные правила сумм квантовой хромодинамики служат в настоящее время надежной базой теоретического расчета многих важнейших характеристик в физике адронов.

Следует подчеркнуть, что объяснение закономерностей спектроскопии адронов само по себе еще не могло служить решающим аргументом в пользу гипотезы существования кварков. Необходимо было найти прямое динамическое проявление кварковой структуры адронов. Путь к этому лежал через исследование особенностей процессов взаимодействия частиц при высоких энергиях, что дает наиболее непосредственную информацию о внутреннем строении элементарных частиц и атомных ядер. Заметим, что еще в 1911 г. Э. Резерфорд в результате своих опытов по рассеянию заряженных α-частиц на тонкой фольге установил наличие плотного ядра в атомах химических

элементов, что привело к возникновению новой, так называемой планетарной модели атома.

Повышение энергии взаимодействующих частиц, связанное с продвижением в область все более малых расстояний, вскрыло удивительную по своему многообразию и сложности картину микромира.

Одна из характерных черт процессов, протекающих при столкновении двух частиц высоких энергий, — их сильная неупругость, связанная с возможностью образования новых, вторичных частиц. Чем выше энергия сталкивающихся частиц, тем большее количество новых частиц может родиться в результате такого столкновения. Из-за разнообразия и сложности описания конечных продуктов реакции при достаточно высоких энергиях традиционные методы их исследования оказываются непригодными.

В 1967 г. А. А. Логунов выдвинул принципиально новый подход к изучению процессов неупругого взаимодействия частиц при высоких энергиях. В основе этого подхода лежит концепция так называемого инклюзивного измерения или инклюзивной реакции (от английского inclusive — включающий в себя). Вместо слежения за всеми вновь образующимися частицами ставится задача изучения характеристик лишь одной или нескольких выделенных вторичных частиц заданного сорта, однако взятых по совокупности во всех возможных каналах реакции. Инклюзивный подход позволил рассмотреть все каналы реакции и на основе общих принципов квантовой теории поля дать модельно-независимое описание важнейших закономерностей многочастичных процессов при высоких энергиях.

Замечательно, что как адронные инклюзивные реакции, так и реакции глубоконеупругого рассеяния лептонов на нуклонах обнаруживают всеобщее свойство приближенной автомодельности (или самоподобия), универсальное для процессов сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий. Заключается это свойство в том, что все наблюдаемые характеристики соответствующих процессов оказываются зависящими лишь от безразмерных комбинаций больших кинематических переменных типа энергии, импульсов частиц и т. д. В определенном смысле здесь наблюдается близкая аналогия с явлением автомодельности в газо- и гидродинамике.

Явление автомодельности инклюзивных и глубоконеупругих процессов указывает на локальный, точечный (т. е. масштабно-инвариантный) механизм взаимодействия при высоких энергиях в полном соответствии с гипотезой о кварк-глюонной структуре адронов и свойством асимптотической свободы кварковой хромодинамики.

Теоретические исследования, проведенные мною совместно с В. С. Владимировым и А. Н. Тавхелидзе, а также А. А. Логуновым с сотрудниками, позволили строго обосновать автомодельное асимптотическое поведение в квантовой теории поля и установить ряд важнейших свойств глубоконеупругих и инклюзивных процессов. Отметим, что экспериментально масштабно-инвариантное поведение инклюзивных реакций сильного взаимодействия адронов было впервые обнаружено в 1969 г., сразу же после введения в строй протонного ускорителя Института физики высоких энергий в Серпухове, в то время крупнейшего в мире. Масштабно-инвариантное поведение процессов глубоконеупругого взаимодействия лептонов с адронами впервые наблюдалось в опытах на линейном ускорителе электронов в Стэнфорде (США).

Ярким примером динамического проявления кварковой структуры элементарных частиц в процессах взаимодействия при высоких энергиях являются установленные в 1973 г. В. А. Матвеевым, Р. М. Мурадяном и А. Н. Тавхелидзе на основе принципа автомодельности так называемые формулы кваркового счета, определяющие закон асимптотического поведения и сечений упругого рассеяния на большие углы, и формфакторы адронов в зависимости от числа составляющих их кварков. Формулы кваркового счета удивительно хорошо описывают многочисленные экспериментальные данные по рассеянию элементарных частиц, позволяя непосредственно из опыта извлекать информацию о кварковой структуре адронов и легчайших атомных ядер.

Следует отметить, что в последние годы идеи и представления теории цветных кварков начинают все более проникать в физику атомного ядра. Главная проблема здесь состоит в том, чтобы объяснить природу и основные закономерности ядерных сил исходя из фундаментальных хромодинамических взаимодействий кварков и глюонов. В работах последнего времени весьма интенсивно обсуждается проблема учета кварковых степеней свободы при описании структуры ядер и динамики ядерных взаимодействий на малых расстояниях, указывается на возможность существования нового типа высоковозбужденных состояний ядерной материи, характеризующихся наличием своеобразной внутренней цветовой поляризации — так называемого «скрытого» цвета.

В становлении этой новой области исследований, лежащей на стыке между физикой ядра и физикой элементарных частиц и называемой сейчас релятивистской ядерной физикой, большую роль сыграли инициированные много лет назад А. М. Балдиным широкие экспериментальные исследования на пучках релятивистских ядер синхрофазотрона в Дубне.

Как уже упоминалось, одна из главнейших закономерностей развития теории на современном этапе — тенденция к объединению в рамках единой теории всех основных сил природы — электромагнитных, сильных, слабых и гравитационных. Важное значение на пути реализации этой кардинальной идеи приобрели понятие вырожденного вакуума и принцип спонтанного нарушения симметрии, сыгравшие ключевую роль при разработке микроскопической теории явлений сверхтекучести и сверхпроводимости.

Недавнее открытие в Европейском центре ядерных исследований в Швейцарии так называемых Z^0- и W-промежуточных бозонов знаменовало крупный успех модели Глэшоу–Вайнберга–Салама, объединившей описание электромагнитных и слабых взаимодействий в рамках единой калибровочной теории электрослабых взаимодействий. На очереди задача разработки приемлемой теории «великого объединения», включающей в общую схему хромодинамические силы, действующие между цветными кварками и глюонами.

Наибольший интерес, на наш взгляд, вызывает при этом вопрос: цветовая симметрия является абсолютно точным или приближенным законом природы? С этой еще не решенной принципиальной проблемой теории элементарных частиц тесно связан вопрос о зарядах кварков. Заметим, что уже в первых работах, посвященных составным кварковым моделям, указывалось на возможность выбора целочисленных значений электрических и барионных зарядов цветных кварков. Введение целочисленных зарядов кварков, зависящих от их

цветового состояния, приводит, очевидно, к нарушению цветовой симметрии, по крайней мере в электромагнитных взаимодействиях частиц.

Исследование проблемы спонтанного нарушения цветовой симметрии привело в работах последнего времени к интересным и важным результатам, касающимся особенностей структуры вакуума в калибровочных теориях с цветными скалярными полями и вопроса о существовании легких скалярных кварков.

Подчеркнем, что гипотеза о целочисленности кварковых зарядов вместе с предположением о спонтанном нарушении цветовой и других калибровочных симметрий привела к представлению о нестабильных кварках и послужила исходным моментом построения первых объединенных калибровочных моделей элементарных частиц. Принципиальную роль на пути построения теории «великого объединения» играет идея симметрии между кварками и лептонами. Отражая достигнутый к настоящему времени уровень знаний об элементарных частицах, мир кварков и лептонов предстает перед нами в удивительно симметричной форме. Фермионные поля, соответствующие кваркам и лептонам, обычно группируются в дублеты — простейшие двумерные представления группы изотопического спина. Порядок, в котором расставлены кварки и лептоны, отвечает закону возрастания их массы. Очевидно, что это же обстоятельство определяет и хронологию их открытия: более тяжелые кварки и лептоны требуют для своего обнаружения больших энергий. Сообщение о возможном открытии наиболее тяжелого из известных, так называемого t-кварка появилось лишь около года назад.

Уместно спросить: исчерпывается ли уже известными кварками и лептонами мир фундаментальных частиц или этот ряд будет продолжен? Развитие физики высоких энергий позволит дать правильный ответ на этот далеко не схоластический вопрос.

Отметим значительное влияние, которое оказала на развитие теории элементарных частиц высказанная в 1957 г. М. А. Марковым и Б. М. Понтекорво и получившая впоследствии прямое экспериментальное подтверждение гипотеза о существовании двух типов нейтрино — электронного и мюонного. В настоящее время существуют основанные на данных астрофизики и космологии соображения о том, что число типов нейтрино — легчайших нейтральных лептонов — не может превышать трех-четырех. При этом большой интерес как теоретиков, так и экспериментаторов вызывает идея Б. М. Понтекорво об осцилляциях нейтрино, т. е. о возможности взаимных превращений нейтрино различных типов.

Попытки построения теории «великого объединения» приводят к наблюдаемым следствиям фундаментального значения — предсказанию возможной нестабильности протона, нейтрон-антинейтронных осцилляций, открывают путь к теоретической интерпретации факта барионной асимметрии Вселенной. Экспериментальная проверка предсказаний подобных теорий — одна из важнейших задач физики элементарных частиц, решением которой занимаются во многих крупнейших лабораториях мира, в том числе и у нас в стране.

Говоря о перспективах построения объединенной теории электромагнитных, сильных, слабых и, возможно, гравитационных взаимодействий, нельзя не подчеркнуть, что необходимость единого их описания диктуется всей

логикой развития теоретических представлений об элементарных частицах и свойствах их взаимодействий.

Поиск единства в описании свойств и фундаментальных взаимодействий элементарных частиц и их универсальных составляющих — кварков и лептонов — есть, по существу, поиск главных черт явлений микромира. Познание управляющих ими законов таит в себе огромные потенциальные возможности для развития не только самой науки, но и техники и технологии будущего.

Трудно сказать, насколько близки мы сейчас к решению этой грандиозной проблемы. Ясно, однако, что прогресс в данном направлении возможен лишь при интенсивном развитии всесторонних теоретических исследований и экспериментов на существующих и будущих ускорителях заряженных частиц и других крупных ядерно-физических установках.

ПРИЛОЖЕНИЯ

О КЛЮЧЕВЫХ ИДЕЯХ БОГОЛЮБОВСКИХ ЛЕКЦИЙ

А. Д. Суханов

В 2009 г. научное сообщество России и других стран торжественно отмечает столетие со дня рождения Николая Николаевича Боголюбова. Так уж случилось, что в его научной биографии можно выделить несколько этапов особого творческого подъема, многие из которых напрямую связаны с его работой на физическом факультете МГУ. Первый из них относится к 1943–1949 гг. (от возвращения из эвакуации из Уфы до начала работы над атомным проектом в Сарове), когда накопленный им в военные годы потенциал был реализован в нескольких фундаментальных работах, посвященных нелинейной и статистической механике. Следует подчеркнуть, что абсолютное большинство из них было представлено Н.Н. Боголюбовым как сотрудником кафедры теоретической физики МГУ.

В работах этого цикла получила воплощение концепция единства описания квантовых и тепловых явлений, сформулированная в лекциях Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова «Об уравнениях Фоккера–Планка», прочитанных в Киевском университете еще в 1939 г. Две из них — фундаментальные монографии «О некоторых статистических методах в математической физике» (1945) и «Проблемы динамической теории в статистической физике» (1946) — были написаны в обстановке творческой дискуссии с сотрудниками кафедры теоретической физики МГУ.

За эти монографии автор в 1947 г. был удостоен Сталинской премии I степени. Поскольку тираж первой из них, изданной во Львове, оказался незначительным, автор параллельно опубликовал основные главы этой книги, а также дополнение к ним — статью «Статистическая теория возмущений» в «Ученых записках МГУ» за 1945 г. В качестве краткого изложения второй из двух монографий в 1946 г. Н. Н. Боголюбов опубликовал в ЖЭТФ две статьи, посвященные равновесной и неравновесной статистической механике. Обе они были представлены им как сотрудником МГУ.

К этому же периоду относится одно из самых знаковых событий в теоретической физике XX в. — доклад Н. Н. Боголюбова на общем собрании Отделения физико-математических наук АН СССР «К теории сверхтекучести» (октябрь 1946 г.). В этом докладе, а также в ряде последующих статей, опубликованных в ЖЭТФ и в «Вестнике Московского университета», автор сформулировал основы квантовой теории конденсированного состояния материи, которые предопределили направление развития этой области физики на десятилетия вперед. В нем был также высказан ряд уникальных общефизиче-

ских идей, в числе которых — идея спонтанного нарушения симметрии и метод квазисредних. Эти идеи и сегодня обозначают передний край достижений как в экспериментальной, так и в теоретической физике.

Начало следующего этапа научной активности Н.Н. Боголюбова можно связать с его окончательным переездом в Москву в январе 1953 г. в связи с назначением заведующим кафедрой теоретической физики МГУ. В течение 1953–1960 гг. деятельность Н. Н. Боголюбова была в основном сконцентрирована на этой кафедре, что сыграло в дальнейшем решающую роль в формировании его школ в области теоретической и математической физики в Москве, Дубне, а позднее и в Киеве.

Характерный пример, показывающий огромную концентрацию новаторских идей, накопленных Н. Н. Боголюбовым за время работы в Сарове, демонстрируют события апреля 1954 г. Тогда в течение буквально одной недели (14–19 апреля) он выступает с тремя докладами — «О представлении функций Грина–Швингера при помощи функциональных интегралов» (на кафедре теоретической физики МГУ), «Уравнения с вариационными производными в проблемах статистической физики и квантовой теории поля» (на Ломоносовских чтениях в МГУ) и «Условие причинности в квантовой теории поля» (на общем собрании Отделения физико-математических наук АН СССР). Каждый из этих докладов породил в дальнейшем новое научное направление в теоретической и математической физике, развитие которых продолжается до сих пор. Тогда же (сентябрь 1956 г.) Н. Н. Боголюбов выступил с докладом на общем собрании Отделения физико-математических наук АН СССР, посвященном памяти выдающегося ученого Л. Больцмана, идеи которого в области кинетической теории получили фундаментальное развитие в его трудах по кинетике.

Сам Н. Н. Боголюбов в эти годы завершил построение теории матрицы рассеяния, включая создание последовательной теории перенормировок в квантовой теории поля (в соавторстве с О. С. Парасюком) и метода ренормализационной группы (в соавторстве Д. В. Ширковым). В дальнейшем эти результаты вошли в фундаментальную монографию Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова «Введение в теорию квантованных полей» (1957). В сентябре 1956 г. он выступил с докладом на Международном конгрессе по теоретической физике в Сиетле. В нем Н. Н. Боголюбов впервые представил доказательство теоремы «об острие клина», открывшей новую главу в теории функций многих комплексных переменных, и строгий вывод дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния, положившей начало развитию теории сильных взаимодействий элементарных частиц. Интересно отметить, что расширенный текст этого доклада был подготовлен в МГУ и затем издан сначала на английском языке в форме лекций в Институте высших исследований (Принстон, 1956 г.). В дальнейшем они вошли в известную монографию «Вопросы теории дисперсионных соотношений» (1958, в соавторстве с Б. В. Медведевым и М. К. Поливановым).

В эти же годы получили развитие и дальнейшее применение универсальные идеи Н. Н. Боголюбова из доклада 1946 г. о теории сверхтекучести. Им была сформулирована (параллельно и независимо от Бардина, Купера и Шриффера) теория сверхпроводимости для реалистической модели Фрёлиха. Полученные в этой теории результаты нашли отражение как в научных

статьях, так и в циклах лекций Н. Н. Боголюбова для студентов и аспирантов МГУ. К их числу относятся лекции «О принципе компенсации и методе самосогласованного поля» (1958), «О принципе ослабления корреляции и методе квазисредних» (1960), «К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости» (1963), а также его доклад «О некоторых проблемах теории сверхпроводимости» (1960) на Международных конгрессе по проблемам физики многих частиц в Утрехте. Еще одной новаторской идеей Н. Н. Боголюбова было предсказание им в 1958 г. явления сверхтекучести ядерной материи, играющего существенную роль в современной физике ядра. Наиболее развернутое изложение этих проблем было дано Н. Н. Боголюбовым позднее в докладе «О сверхтекучей модели ядра» (1969) на Международном Менделеевском конгрессе (Турин–Рим).

Нельзя не отметить, что все эти результаты, получение которых было тесно связано с активным взаимодействием Н. Н. Боголюбова с сотрудниками кафедры теоретической физики МГУ, Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР и лаборатории теоретической физики ОИЯИ (Дубна), в те же годы получили заслуженное признание. В частности, в 1957 г. он был удостоен Ломоносовской премии I степени МГУ за исследования по теории сверхпроводимости. В следующем, 1958 г., Н. Н. Боголюбову, первому из физиков-теоретиков, была присуждена Ленинская премия «за разработку новых методов в квантовой теории поля и статистической физике, приведших, в частности, к обоснованию теорий сверхтекучести и сверхпроводимости».

О многогранной научной деятельности Н. Н. Боголюбова в 60-е гг. и его внимании к научным открытиям коллег из МГУ может свидетельствовать такой факт. В начале 50-х гг. он формально отошел от систематических исследований в области нелинейной механики. Однако в последующем он не только принимал участие в научных конференциях по этим проблемам, но и активно реагировал на появление новых результатов у своих коллег-математиков, работавших на механико-математическом факультете МГУ. В частности, его внимание привлекли исследования А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда по проблеме устойчивости движения в небесной классической механике. Спустя некоторое время после их опубликования Н. Н. Боголюбов выступил с циклом лекций на Летней математической школе в Каневе «О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики» (1963).

В них им была предложена теория возмущений устойчивых квазипериодических решений неконсервативных систем дифференциальных уравнений, траектории которых образуют обмотку аналитического тора. При построении этой теории Н. Н. Боголюбов удачно объединил свой метод интегральных многообразий из монографии 1945 г. с итерационным методом, разработанным к тому времени А. Н. Колмогоровым для гамильтоновых систем. В результате им был создан метод «ускоренной сходимости» в нелинейной механике. Это позволило значительно расширить область применимости исходного метода интегральных многообразий и решить задачу о существовании квазипериодических решений для общего случая многомерных тороидальных многообразий.

Еще один этап исследований, связанный с активным сотрудничеством с МГУ, проявился в научном творчестве Н. Н. Боголюбова на рубеже

70–80-х гг., когда он вновь обратился к проблемам кинетики. К числу работ по этой проблематике можно отнести лекции в Международной школе в Баку «Кинетические уравнения и функции Грина в статистической физике» (1977), в которых было продолжено применение идей из монографии 1946 г. В этих лекциях было явно показано, что в модели упругих шаров кинетические уравнения могут иметь детерминистские решения. Тем самым в них нашла воплощение давняя идея Н. Н. Боголюбова о том, что одни лишь упругие столкновения без стохастического воздействия окружения не способны привести к стохастизации поведения рассматриваемой системы в целом. Наконец, в лекциях «Кинетические уравнения для электрон-фононной системы» (1978) в Международной школе в Дубне автор вернулся к своим прежним идеям, относящимся к проблеме взаимодействия индивидуального объекта, подчиняющегося законам механики и находящегося в тепловом равновесии с большой системой (термостатом). Дальнейшее развитие этих исследований нашло отражение в книге «Аспекты теории полярона» (1981) (в соавторстве с Н. Н. Боголюбовым (мл.)).

В эти же годы Н. Н. Боголюбов вернулся к своим основополагающим идеям в области квантовой статистической механики. Они впервые прозвучали в «Лекциях по квантовой статистике» (1949), изданных в Киеве на украинском языке. На новом этапе исследований он прочел в 1980 г. несколько циклов лекций на физфаке МГУ, вошедших в дальнейшем в монографию «Введение в квантовую статистическую механику» (1984), также написанную совместно с Н. Н. Боголюбовым (мл.). Среди них особый интерес сегодня представляет цикл лекций «Аспекты вторичного квантования». Усилиями Н. Н. Боголюбова этот метод, казавшийся исходно лишь неким техническим приемом, превратился в мощный универсальный инструмент исследования, применимый не только к квантовым, но и к классическим системам. При этом автором было показано, что этот метод имеет совершенно разный физический смыл для систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы.

К последним выступлениям Н. Н. Боголюбова по проблемам статистической механики относится доклад «О некоторых проблемах, связанных с обоснованием статистической механики» (1981), с которым он выступил на Международном симпозиуме в Дубне. Впоследствии этот доклад был опубликован в сборнике «История и методология естественных наук» (М.: Из-во МГУ, 1983). В связи с этим напомним, что сам Н. Н. Боголюбов в 30-е гг. уделял значительное внимание математической эргодической теории. Однако, по его мнению, свойства транзитивности и перемешиваемости, которые составляют основу этой теории, для реальных динамических систем, рассматриваемых в статистической механике, требуют выполнения слишком узких условий и потому не поддаются обоснованию. В итоге Н. Н. Боголюбов пришел к выводу, что для обоснования классической, а тем более квантовой, статистической механики математическая эргодическая теория является недостаточной.

Легендарным событием в истории физфака МГУ осталось чтение Н. Н. Боголюбовым цикла лекций по теории симметрии элементарных частиц (1966). На этих лекциях впервые обширная аудитория смогла познакомиться с возможностью построения систематики адронов в рамках теоретико-группового подхода на основе модели кварков. В них была

высказана фундаментальная общефизическая идея, согласно которой для сохранения стандартной формулировки принципа Паули кваркам, находящимся в симметричном состоянии по всем известным квантовым числам, следует приписать качественно новое трехзначное квантовое число, названное в дальнейшем цветом. Обзор представлений о кварковых моделях адронов, сформулированных в указанных лекциях, был сделан Н. Н. Боголюбовым в докладе «Цветные кварки — новая ступень в познании микромира» на общем собрании АН СССР (1984) в связи с награждением его золотой медалью им. М. В. Ломоносова.

Наконец, для исследователей научного творчества Н. Н. Боголюбова особую роль может сыграть ознакомление с содержанием двух его выступлений в связи с награждением золотой медалью М. Планка (1973) и получением премии им. А. П. Карпинского (1981). В этих докладах сам автор проанализировал важнейшие из идей, сформулированных им на протяжении 35–40 лет, и продемонстрировал их актуальность для современной науки. Среди них, бесспорно, центральное место занимает идея *спонтанного нарушения симметрии*, находящая все большее применение как в физике конденсированного состояния материи и теории элементарных частиц, так и в моделях ранней Вселенной и в описании ее эволюции.

Без всякого сомнения, духовное влияние Н. Н. Боголюбова сказывается на жизни Московского университета *и сегодня*. Еще 30 лет назад именно МГУ проявил инициативу и к 70-летию Н. Н. Боголюбова издал его «Избранные труды по статистической физике». К столетнему юбилею в МГУ подготовлено специальное издание «Избранные университетские лекции Н. Н. Боголюбова». В него включено большинство знаменитых лекций и докладов Н. Н. Боголюбова, ключевые идеи которых кратко прокомментированы в данном обзоре. Их изучение позволит современным студентам, аспирантам и преподавателям почувствовать биение творческой мысли великого ученого и *убедиться в том*, что фундаментальные научные идеи остаются нетленными. Одним из ярких проявлений этого тезиса может служить и тот факт, что учебник Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова «Квантовые поля» был отнесен к числу наиболее выдающихся учебников за всю историю МГУ и вышел третьим, исправленным и дополненным изданием в серии «Классические университетские учебники» к 250-летию МГУ.

Завершая анализ вклада Н. Н. Боголюбова в научную жизнь Московского университета, приведем главный завет, оставленный им будущим поколениям исследователей. В пленарном докладе «Математические проблемы квантовой теории поля и квантовой статистики» на 1-й Международной конференции по математической физике (декабрь 1972 г., Москва) Н. Н. Боголюбов говорил: «Последние 20–25 лет интенсивно идет становление нового научного направления — современной теоретической и математической физики как целостной науки, занимающей промежуточное положение между собственно теоретической физикой и математикой. Это направление вызвано к жизни, прежде всего, новыми задачами квантовой физики систем с *бесконечным* числом степеней свободы — нерелятивистской и релятивистской — и требует привлечения мощных современных математических средств...». С тех пор эта точка зрения получила широкое признание.

На долю Н. Н. Боголюбова выпала благородная миссия стать — одним из главных создателей этого направления — современной теоретической и математической физики как целостной науки о природе. Присущее ему органичное слияние математики, механики и теоретической физики позволяет поставить его имя в один ряд с именами мыслителей предыдущих веков, виртуозно проявивших себя в познании природы, не расчлененном на отдельные научные дисциплины.

Московский университет представляет собой как раз ту арену, на которой осуществление междисциплинарных, межкафедральных и межфакультетских проектов в области науки и образования имеет максимальные шансы на успех. Поэтому глубокое освоение универсальных идей Н. Н. Боголюбова студентами и аспирантами безусловно будет способствовать новым прорывам в науке и технологии в интересах развития современной цивилизации.

ОСНОВНЫЕ ДАТЫ ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Н. Н. БОГОЛЮБОВА (1909–1992)

1909, 21 августа	Родился в Нижнем Новгороде в семье магистра богословия.
1921	Окончил семилетнюю школу (село Великая Круча Полтавской губернии).
1922	Начинает посещать семинар основателя киевской алгебраической школы академика Д. А. Граве.
1923	Становится ученым секретарем семинара академика Н. М. Крылова.
1924	Пишет первую научную работу «О поведении решений линейных дифференциальных уравнений на бесконечности» под руководством академика Н. М. Крылова.
1925–1941	Аспирант, научный сотрудник кафедры математической физики АН УССР, Киев.
1930	Присуждена премия Академии наук Болоньи (Италия) за работу «О применении прямых методов к некоторым задачам вариационного исчисления». Присуждена ученая степень доктора наук без защиты диссертации.
1936	Присуждено ученое звание профессора. Избран членом Французского математического общества.
1936–1941	Заведующий кафедрой математического анализа Киевского государственного университета.
1939	Избран членом-корреспондентом Академии наук УССР.
1940	Член комиссии по реорганизации Черновицкого университета.
1941–1943	Сотрудник Объединенного института математики и физики АН УССР. Заведует кафедрами математического анализа Уфимского авиационного института и Уфимского педагогического института.
1943–1992	Профессор физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
1944	Награжден орденом «Знак Почета».
1945–1949	Декан механико-математического факультета, заведующий кафедрой математической физики Киевского государственного университета.

1945	Награжден орденом «Знак Почета» и медалью «За трудовую доблесть».
1946	Избран членом-корреспондентом АН СССР.
1947	Присуждена Сталинская премия первой степени за исследования в области нелинейной механики и статистической физики.
1948	Награжден орденом Трудового Красного Знамени.
	Избран действительным членом АН Украинской ССР.
1948–1950	Заведующий отделом теоретической физики в Институте химической физики АН СССР.
1949–1992	Старший научный сотрудник, заведующий отделом теоретической физики Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР.
1950–1953	Работа по оборонной тематике, заведующий отделом, сектором (Саров).
1953	Избран действительным членом Академии наук СССР.
	Награжден орденом Ленина.
	Присуждена Сталинская премия второй степени за выполнение специального задания правительства.
	Заведующий кафедрой теоретической физики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
1954	Награжден орденом Трудового Красного Знамени.
1956–1965	Основатель и первый директор лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований в Дубне.
1957	Присуждена Ломоносовская премия первой степени МГУ им. М. В. Ломоносова за исследования по теории сверхпроводимости.
1957–1960	Участник организации Института математики Сибирского отделения АН СССР.
1957–1991	Участник Пагуошского движения за мир.
1958	Присуждена Ленинская премия за разработку нового метода в квантовой теории поля и статистической физике, приведшего, в частности, к обоснованию теории сверхтекучести и сверхпроводимости.
	Присуждена степень почетного доктора наук Аллахабадского университета (Индия).
1959	Награжден орденом Ленина.
1960	Избран почетным членом Американской академии искусств и наук в Бостоне. Присуждена степень почетного доктора наук Берлинского университета им. А. Гумбольдта (ГДР).
1961	Избран иностранным членом Болгарской академии наук.
1962	Избран иностранным членом Польской академии наук.

1963–1988	Член президиума АН СССР, академик-секретарь отделения математики АН СССР. Член Комитета по Ленинским и Государственным премиям СССР.
1963–1992	Член президиума Высшей аттестационной комиссии.
1964	Научный руководитель Института физики высоких энергий, Серпухов.
1965–1989	Директор *Объединенного института ядерных исследований* в Дубне.
1965–1973	Основатель и первый директор Института теоретической физики АН УССР, член президиума АН УССР.
1966	Избран иностранным членом Академии наук ГДР. Присуждена премия им. Д. *Хайнеманна* Американского физического общества за исследования по математической физике.
1966–1992	Основатель и заведующий кафедрой квантовой статистики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.
1967	Награжден орденом Ленина. Присуждена степень почетного доктора наук Чикагского университета (США).
1968	Избран иностранным членом-корреспондентом Гейдельбергской академии наук (ФРГ).
1969	Присвоено звание Героя Социалистического Труда за выдающиеся заслуги в развитии советской науки. Награжден медалью им. Г. Гельмгольца Академии наук ГДР. Награжден орденом Кирилла и Мефодия первой степени (НРБ). Награжден медалью «Дружба» (Монголия). Избран иностранным членом Национальной академии наук США. Присуждена почетная степень доктора наук Туринского университета (Италия). Присуждена почетная степень доктора Краковской горно-металлургической академии (ПНР). Избран действительным членом Академии деи Линчеи.
1969–1971	Опубликованы избранные труды в трех томах (Киев: Наук. думка).
1969–1989	Основатель и главный редактор журнала «Теоретическая и математическая физика».
1970–1992	Основатель и главный редактор журнала «Физика элементарных частиц и атомного ядра».
1970	Награжден юбилейной медалью «*За доблестный труд*. В ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина».
1970	Присуждена почетная степень доктора наук Вроцлавского университета (ПНР). Присвоено звание «Заслуженный деятель науки УССР».
1970–1988	Депутат Верховного Совета СССР.
1971	Присуждена почетная степень доктора наук Бухарестского университета (СРР).

1972	Организатор 1-й Международной конференции по математической физике (Москва).
1973	Присуждена почетная степень доктора наук Хельсинкского университета (Финляндия).
	Награжден золотой медалью им. Макса Планка Физического общества ФРГ.
1974	Награжден золотой медалью им. Б. Франклина Института Б. Франклина (США).
	Присуждена почетная степень доктора наук Университета Улан-Батора (МНР).
1975	Награжден орденом Ленина.
	Награжден золотой медалью «За заслуги перед наукой и человечеством» Словацкой академии наук (ЧССР).
1976	Избран членом Международной ассоциации математической физики.
1977	Присуждена почетная степень доктора наук Варшавского университета (ПНР).
1978	Награжден командорским знаком «Орден за заслуги» (ПНР).
	Награжден медалью «За развитие дружбы и сотрудничества с ЧССР».
1979	Награжден орденом Ленина и второй золотой медалью «Серп и Молот» за выдающиеся заслуги в развитии математики, механики и теоретической физики, подготовке научных кадров.
	Избран почетным членом Венгерской академии наук.
1979–1988	Директор лаборатории теоретической физики ОИЯИ.
1980	Избран иностранным членом Чехословацкой академии наук.
1981	Присуждена премия им. А. П. Карпинского за выдающиеся достижения в развитии математической и теоретической физики (ФРГ).
1982	Награжден орденом Государственного Знамени первой степени КНДР.
1983	Избран иностранным членом Академии наук МНР. Избран иностранным членом Академии наук Индии.
	Присуждена золотая медаль им. М. А. Лаврентьева АН СССР за работу «О стохастических процессах в динамических системах». На родине дважды Героя Социалистического Труда Н. Н. Боголюбова (г. Горький) установлен бронзовый бюст.
1983–1989	Директор Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР.
1984	Избран почетным членом Академии наук Армянской ССР.
	Присуждена Государственная премия СССР в области науки и техники за цикл работ «Метод ренормализационной группы в квантовой теории полей» (совместно с А. А. Логуновым и Д. В. Ширковым).

1984	Награжден золотой медалью им. М. В. Ломоносова АН СССР за выдающиеся достижения в области математики и теоретической физики. Награжден орденом Октябрьской Революции. Награжден орденом «Звезда дружбы народов» ГДР.
1987	Ученый совет Международного центра теоретической физики в Триесте учредил премию им. Н. Н. Боголюбова за выдающиеся заслуги в деле развития научных исследований в области математики и физики твердого тела для ученых из развивающихся стран.
1988	Советник при президиуме АН СССР. Член Конституционной комиссии Верховного Совета СССР.
1989	Почетный директор Объединенного института ядерных исследований и почетный директор МИАН им. В. А. Стеклова АН СССР.
1990	Избран действительным членом Научно-технического общества им. Т. Г. Шевченко (г. Львов).
1990–1995	Опубликованы избранные труды в четырех томах на английском языке (серия «Классики советской математики». Gordon and Breach Publishers).
1992, 13 февраля	Скончался в Москве. Похоронен на Новодевичьем кладбище.
1992	Присуждена медаль им. П. Дирака, учрежденная Международным центром теоретической физики (Триест, Италия), за выдающиеся достижения в области теоретической физики (посмертно).
1992	Именем Н. Н. Боголюбова названы: лаборатория теоретической физики ОИЯИ (Дубна), Институт теоретической физики НАНУ (Киев), Институт теоретических проблем микромира МГУ им. М. В. Ломоносова.
1993	Национальная академия наук Украины учредила премию им. Н. Н. Боголюбова. ОИЯИ учредил премию им. Н. Н. Боголюбова.
1998	Российская академия наук учредила золотую медаль им. Н. Н. Боголюбова.
1999	ОИЯИ учредил премию им. Н. Н. Боголюбова для молодых ученых.
2005–2009	Опубликовано Собрание научных трудов в двенадцати томах (серия «Классики науки». М.: Наука).

СПИСОК
НАУЧНЫХ РАБОТ Н. Н. БОГОЛЮБОВА, ВКЛЮЧЕННЫХ В СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ В 12 ТОМАХ («КЛАССИКИ НАУКИ)*

Серия «Математика и нелинейная механика»**

Монографии

Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний **III** 8

Введение в нелинейную механику **II** 302

Метод интегральных многообразий в нелинейной механике **IV** 145

Новые методы в вариационном исчислении **I** 40

О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики **IV** 220

О некоторых статистических методах в математической физике **IV** 9

О некоторых формальных разложениях нелинейной механики **II** 26

Приближенные методы нелинейной механики в приложении к изучению возмущений периодических движений и различных относящихся к ним резонансных явлений **II** 197

Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний **II** 117

Статьи

Автобиография **I** 760

Аналитические методы в теории нелинейных колебаний **IV** 350

Аналитические методы теории нелинейных колебаний **I** 533

Арифметическая теорема и ее применение к теории почти периодических функций **I** 374

Асимптотические методы в нелинейной механике **IV** 392

Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней **II** 712

Математические проблемы квантовой теории поля **I** 716

Метод интегральных многообразий в теории дифференциальных уравнений **I** 554

Некоторые арифметические свойства почти периодов **I** 355

---

* М.: Наука, 2005–2009 (отв. редактор-составитель А.Д.Суханов).

** Ниже указываются номер тома и страница публикации в указанном Собрании.

Николай Митрофанович Крылов **II** 806

Об автомодельной асимптотике в квантовой теории поля. II **I** 727

Об аналитическом продолжении обобщенных функций **I** 638

Об асимптотических неравенствах, приложимых к некоторым вопросам статистической динамики систем с весьма большим числом степеней свободы **I** 308

Об исследовании квазипериодических режимов в нелинейных колебательных системах **IV** 364

Об одном методе В. Н. Челомея в теории колебаний **IV** 378

Об одном приложении теории положительно определенных функций **I** 365

Об умножении причинных функций в квантовой теории поля **I** 595

Общая теория меры в нелинейной механике **I** 475

Об эргодических свойствах уравнения Смолуховского **I** 391

О вероятностях цепных процессов **I** 400

О вычислении вынужденных колебаний, удовлетворяющих некоторым нелинейным дифференциальным уравнениям **I** 196

О вычитательном формализме при умножении причинных функций **I** 562

Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций **I** 683

Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы **IV** 279

О линеаризации транзитивных компактных групп преобразований **I** 200

О некоторых математических проблемах квантовой теории поля **I** 697

О некоторых проблемах эргодической теории стохастических систем **I** 405

О некоторых эргодических свойствах непрерывных групп преобразований **I** 454

О повторных итерациях с переменными параметрами **II** 767

О положительных вполне непрерывных операторах **I** 464

Определение максимальных значений некоторых величин **I** 262

О приближении функций тригонометрическими суммами **I** 337

О приближенном решении дифференциальных уравнений **I** 186

О приложении метода наименьшего спуска к доказательству некоторых асимптотических неравенств **I** 276

О применении прямых методов к некоторым задачам вариационного исчисления **I** 210]

О принципе Рэлея в теории дифференциальных уравнений математической физики и об одном эйлеровом методе в вариационном исчислении **I** 160

Основные проблемы нелинейной механики **II** 607

Ответ на доклад А. А. Маркова **II** 793

О тригонометрическом приближении функций на бесконечном интервале **I** 344

Применение методов нелинейной механики к исследованию влияния флуктуаций на колебательные системы **II** 778

Применение методов нелинейной механики к теории возмущений канонических систем **II** 655

Результат действия статистического изменения параметров на движение динамических консервативных систем **II** 730

Результат действия статистического изменения параметров на эргодические свойства динамических неконсервативных систем **II** 747

Символические методы нелинейной механики в их приложениях к исследованию резонанса в электронном генераторе **II** 629

Синхронизация релаксационных колебаний **IV** 324

Теория возмущений в нелинейной механике **IV** 294

Эргодические свойства вероятностных последовательностей **I** 403

Юрий Алексеевич Митропольский **IV** 419

Серия «Статистическая механика»

Монографии

Аспекты теории полярона **VII** 377

Введение в квантовую статистическую механику **VII** 11

Квазисредние в задачах статистической механики **VI** 236

Лекции о принципе ослабления корреляции и методе квазисредних **VIII** 9

Лекции по квантовой статистике. Вопросы статистической механики квантовых систем **VI** 9

Об уравнениях Фоккера–Планка. (Применение к классической и квантовой механике) **V** 60

О стохастических процессах в динамических системах **V** 248

Проблемы динамической теории в статистической физике **V** 138

Статьи

Асимптотически точное решение для модельного гамильтониана теории сверхпроводимости **VIII** 209

Вариационный принцип Боголюбова **VI** 388

Волновая функция нижнего состояния системы взаимодействующих бозе-частиц **VIII** 153

Вопросы теории сверхтекучести бозе- и ферми-систем **VIII** 289

Дмитрий Николаевич Зубарев. (К семидесятилетию со дня рождения) **V** 782

Запаздывающие и опережающие функции Грина в статистической физике **VI** 389

Исследования проблемы многих тел и их приложения в теории ядерной материи **VIII** 310

К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости **VIII** 356

К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости **VIII** 222

К вопросу о существовании сверхпроводимости в модели Хаббарда **VIII** 495

К вопросу об условии сверхтекучести в теории ядерной материи **VIII** 321

К теории высокотемпературной сверхпроводимости **VIII** 474

К теории сверхпроводимости в модели оксидных металлов **VIII** 466

К теории сверхпроводящего состояния **VIII** 189

К теории сверхтекучести **VIII** 107

К теории фазового перехода **VIII** 168

Кинетические уравнения **V** 360

Кинетические уравнения в квантовой механике **V** 375

Кинетические уравнения в теории сверхтекучести **VIII** 142

Кинетические уравнения для электрон-фононной системы **V** 639

Кинетическое уравнение для динамической системы, взаимодействующей с фононным полем **VII** 560

Людвиг Больцман **V** 709

Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля **VI** 401

Материальные и тепловые потоки в разнотемпературной магнитной плазме **V** 500

Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле **V** 476

Метод функциональных производных в статистической механике. Теория стационарных состояний **VI** 361

Микроскопические решения уравнения Больцмана–Энскога в кинетической теории для упругих шаров **V** 608

Некоторые замечания к теории полярона **VII** 626

Новый метод в теории сверхпроводимости **VIII** 530

О вычислении коэффициента теплопроводности плазмы в сильном магнитном поле с учетом тороидальности системы **V** 538

О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия **VI** 396

О некоторых проблемах теории сверхпроводимости **VIII** 338

О некоторых проблемах, связанных с обоснованием статистической механики **VI** 432

О новом методе в теории сверхпроводимости. I **VIII** 177

О новом методе в теории сверхпроводимости. III **VIII** 200

О принципе компенсации и методе самосогласованного поля **VIII** 424

О рассеянии электронов на медленных колебаниях изотермической плазмы **V** 448

О сверхтекучей модели ядра **VIII** 327

О спонтанном нарушении симметрии в статистической механике **VI** 346; **VIII** 398

О теории квазисредних **VI** 328

Об одном вариационном принципе в задаче многих тел **VIII** 411

Об одном вариационном принципе в проблеме многих тел **VIII** 419

Об устойчивости плазмы в магнитном поле **V** 460

Обобщенное кинетическое уравнение для динамической системы, взаимодействующей с фононным полем **V** 690

Основные принципы теории сверхтекучести и сверхпроводимости **VIII** 297

Предисловие к книге А. В. Шелест «Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений» **V** 785

Предисловие к книге В. Л. Бонч-Бруевича и С. В. Тябликова «Метод функций Грина в статистической механике» **VI** 479

Предисловие к русскому изданию книги Д. Рюэля «Статистическая механика. Строгие результаты» **VI** 498

Предисловие к сборнику статей «Теория сверхпроводимости» **VIII** 524

Разложения по степеням малого параметра в теории статистического равновесия **VI** 376

Сверхпроводимость в модели Хаббарда с отклонением от половинного заполнения **VIII** 513

Сверхпроводящее состояние модели Хаббарда **VIII** 488

Сергей Владимирович Тябликов **VI** 495

Статистическая теория возмущений **V** 330

Стационарные режимы МТР с учетом тормозного излучения и ядерных реакций **V** 555

Теория устойчивости объемных колебаний плазмы в магнитном поле. Колебания в постоянных внешних полях **V** 418

Уравнения гидродинамики в статистической механике **V** 395

Фоккер-планковские уравнения для плазмы **V** 491

Энергетические уровни неидеального бозе-эйнштейновского газа **VIII** 125

Серия «Квантовая теория»

Монографии

Введение в теорию квантованных полей **X** 8

Вопросы теории дисперсионных соотношений **IX** 18

Квантовые поля **X** 713

Общие принципы квантовой теории поля **XI** 9

Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. (Избранные главы) **XII** 212

Теория симметрии элементарных частиц **XII** 11

Цветные кварки **XII** 141

Статьи

Академику М. А. Маркову — 70 лет **XII** 484

Александр Михайлович Балдин. (К шестидесятилетию со дня рождения) **XII** 458

Анатолий Алексеевич Логунов. (К шестидесятилетию со дня рождения) **XII** 478

Бруно Максимович Понтекорво. (К семидесятилетию со дня рождения) **XII** 491

Василий Сергеевич Владимиров. (К шестидесятилетию со дня рождения) **XII** 469

Вводная статья к сборнику «Дисперсионные соотношения» **XI** 491

Взаимодействие элементарных частиц **XII** 502

Вопросы квантовой теории поля. I. Матрица рассеяния. § 3. Основные понятия теории взаимодействующих полей **IX** 273

Вступительная статья к сборнику «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях» **IX** 519

Выступление лауреата премии им. А. П. Карпинского **XII** 451

Динамические моменты локальных токов составных частиц в квантовой теории поля **XII** 395

Дисперсионные соотношения в случаях слабого взаимодействия **IX** 351

Дисперсионные соотношения для комптоновского рассеяния на нуклонах **IX** 345

Дмитрий Васильевич Ширков. (К шестидесятилетию со дня рождения) **XII** 495

Дмитрий Иванович Блохинцев. (К семидесятилетию со дня рождения) **XII** 462

Зарядовая ренормализационная группа в квантовой теории поля **IX** 306

Значение фундаментальных исследований в ядерной физике **XII** 437

К вопросу об индефинитной метрике в квантовой теории поля **IX** 371

К вопросу об основных уравнениях релятивистской квантовой теории поля **IX** 229

К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц **XII** 340

К инвариантному построению квантовой теории поля **IX** 224

К теории умножения причинных сингулярных функций **IX** 481

Математические проблемы квантовой теории поля и квантовой статистики **XII** 446

Метод дисперсионных соотношений и теория возмущений **IX** 355

Метод теории возмущений вырожденного уровня в полярной модели металла **IX** 450

Модель типа Ли в квантовой электродинамике **IX** 300

Некоторые проблемы квантовой теории поля **IX** 384

Об Исааке Яковлевиче Померанчуке **XII** 490

Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем **IX** 200

Об одном варианте теории с индефинитной метрикой **IX** 380

Об одном классе основных уравнений релятивистской квантовой теории поля **IX** 234

Об одном применении теории возмущений к полярной модели металла **IX** 427

Об устранении расходимости собственной энергии в нерелятивистской теории поля **IX** 192

О вычитательном формализме при умножении причинных сингулярных функций **IX** 486

О представлении функций Грина–Швингера при помощи функциональных интегралов **IX** 245

О ренормализационной группе в квантовой электродинамике **IX** 289

Остап Степанович Парасюк. (К шестидесятилетию со дня рождения) **XII** 488

Памяти Анатолия Александровича Власова **XII** 476

Памяти Эрнста Штюкельберга **IX** 473

Памяти Юрия Михайловича Широкова **XII** 498

Перспективы развития фундаментальных исследований в ядерной физике и их прикладное значение **XII** 416

Поля и кванты **XII** 291

Предисловие к книге А. А. Власова «Нелокальная статистическая механика» **XII** 503

Предисловие к книге «Некоторые аспекты теории полярона» **IX** 477

Представление функций Грина при помощи функциональных интегралов **IX** 479

Приближенные методы вторичного квантования в квантовой теории магнетизма **IX** 467

Приближенный метод нахождения низших энергетических уровней электронов в металле **IX** 434

Приложение ренормализационной группы к улучшению формул теории возмущений **IX** 295

Применение методов Н. И. Мусхелишвили в теории элементарных частиц **XII** 429

Применение методов Н. И. Мусхелишвили для решения сингулярных интегральных уравнений в квантовой теории поля **IX** 503

Проблемы и тенденции в теории элементарных частиц **XII** 311

Проблемы теории дисперсионных соотношений. Раздел 7. Строгий вывод дисперсионных соотношений **IX** 325

Релятивистски-инвариантные уравнения для составных частиц и формфакторы. I **XII** 351

Релятивистски-инвариантные уравнения для составных частиц и формфакторы. II **XII** 363

Релятивистски-инвариантные уравнения для составных частиц и формфакторы **XII** 373

Соотношение Адлера–Вайсбергера и дисперсионные правила сумм в теории сильных взаимодействий **XII** 388

Теоретико-полевые методы в физике **IX** 405

Теоретические аспекты физики частиц высоких энергий **XII** 323

Уравнения в вариациях квантовой теории поля **IX** 239

Уравнения с вариационными производными в проблемах статистической физики и квантовой теории поля **IX** 248

Условие причинности в квантовой теории поля **IX** 259

Условие причинности в применении к задачам рассеяния **IX** 480

Условие причинности и аналитическая структура матрицы рассеяния **IX** 286

Фундаментальные проблемы квантовой теории поля **IX** 395

Цветные кварки — новая ступень познания микромира **XII** 406

СОДЕРЖАНИЕ

Николай Николаевич Боголюбов. *В. А. Садовничий* 5

Часть первая. Математические проблемы нелинейной и статистической механики

1. **Об уравнениях Фоккера–Планка (применение к классической и квантовой механике).** *Совместно с Н. М. Крыловым* 11

2. **О некоторых статистических методах в математической физике** 77

Предисловие 77

Глава I. Принцип усреднения в нелинейной механике 78

Глава II. О некоторых предельных распределениях для сумм, зависящих от произвольных фаз 144

Глава III. О влиянии случайной силы на гармонический вибратор 151

Глава IV. Элементарный пример установления статистического равновесия в системе, связанной с термостатом 172

3. **Статистическая теория возмущений** 193

4. **Людвиг Больцман** 217

5. **О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики** 228

Введение 228

§ 1. Постановка задачи. Существование инвариантного многообразия 231

§ 2. Установление свойств аналитичности квазипериодических решений. 239

§ 3. Построение итерационного процесса с ускоренной сходимостью 250

§ 4. О зависимости квазипериодических решений от параметра. Асимптотические и сходящиеся разложения. 266

§ 5. Квазипериодические решения в системах второго порядка. 272

6. **О некоторых проблемах, связанных с обоснованием статистической механики** 277

Часть вторая. Общие проблемы теории конденсированной материи

7. **К теории сверхтекучести** 287

8. **О принципе компенсации и методе самосогласованного поля** 301

§ 1. Принцип компенсации 301

§ 2. Метод самосогласованного поля 309

§ 3. Представление с фиксированным числом частиц. 314

§ 4. Коллективные колебания 318

§ 5. Вопросы электродинамики сверхпроводящего состояния 332

9. **О принципе ослабления корреляции и методе квазисредних** 338

Глава I. Принцип ослабления корреляции 338

§ 1. Введение 338

§ 2. Общая формулировка. 340

Глава II. Бозе-системы . . . 352
§ 3. Квазисредние . . . 352
§ 4. Выделение конденсата . . . 365
§ 5. Свойства симметрии функций Грина . . . 373
§ 6. Теорема о $1/q^2$ и ее приложения . . . 377
Глава III. Ферми-системы . . . 386
§ 7. Состояния пар частиц . . . 386
§ 8. Квазисредние . . . 389
§ 9. Теорема о $1/q^2$ . . . 395
§ 10. Функции Грина и массовый оператор . . . 399
§ 11. Приближения для теории сверхпроводимости . . . 403
***10.* О некоторых проблемах теории сверхпроводимости** . . . 423
***11.* К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости** . . . 438
Введение . . . 438
§ 1. Предварительные тождества . . . 438
§ 2. Уравнения гидродинамики нормальной жидкости . . . 444
§ 3. Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости . . . 452
§ 4. Уравнения в вариациях и функции Грина . . . 466
***12.* О сверхтекучей модели ядра** . . . 474
***13.* О спонтанном нарушении симметрии в статистической механике** . . . 484
***14.* Кинетические уравнения и функции Грина в статистической механике** 496
***15.* Кинетические уравнения для электрон-фононной системы** . . . 515
§ 1. Введение . . . 515
§ 2. Исключение амплитуд фононного поля . . . 520
§ 3. Кинетическое уравнение первого приближения для случая малых взаимодействий . . . 527
§ 4. Формулировка линейной модели . . . 533

Часть третья. Новые методы квантовой теории многих тел и квантовой теории поля

***16.* Уравнения с вариационными производными в проблемах статистической физики и квантовой теории поля** . . . 559
***17.* Условие причинности в квантовой теории поля** . . . 569
***18.* Проблемы теории дисперсионных соотношений**. *Совместно с Б.В. Медведевым, М.К. Поливановым* . . . 580
§ 1. Введение . . . 580
§ 2. Основные физические допущения . . . 588
§ 3. Соотношения между радиационными операторами . . . 598
§ 4. Вакуумные средние бозевских радиационных операторов второго порядка 606
§ 5. Вакуумные средние фермиевских радиационных операторов второго порядка . . . 618
§ 6. Построение дисперсионных соотношений . . . 626
§ 7. Строгий вывод дисперсионных соотношений . . . 639

19. **Аспекты вторичного квантования**. *Совместно с Н. Н. Боголюбовым (мл.)* 654
Глава I. Матричное представление симметричных динамических операторов . . . 655
§ 1. Введение . . . 655
§ 2. Свойства симметрии . . . 656
§ 3. Симметричные операторы . . . 657
§ 4. Некоторые соотношения . . . 660
§ 5. Гамильтониан . . . 661
Глава II. Переход от непрерывного представления к дискретному. Введение чисел заполнения . . . 662
§ 1. Представления волновых функций . . . 662
§ 2. Числа заполнения . . . 666
Глава III. Представление вторичного квантования для волновых функций бозонов и фермионов . . . 669
§ 1. Случай статистики Бозе . . . 669
§ 2. Случай статистики Ферми . . . 673
§ 3. Сравнение волновых функций бозонов и фермионов . . . 679
§ 4. Представление вторичного квантования . . . 679
§ 5. Оператор числа частиц . . . 681
Глава IV. Представление вторичного квантования для динамических операторов 682
§ 1. Введение . . . 682
§ 2. Лемма . . . 683
§ 3. Волновые функции . . . 687
§ 4. Преобразование динамических величин в представление вторичного квантования . . . 688
§ 5. Гамильтониан системы в представлении вторичного квантования . . . 694
§ 6. Временна́я эволюция операторных функций . . . 694
Глава V. Общие замечания к методу вторичного квантования . . . 698
§ 1. Результаты, не зависящие от числа частиц системы . . . 698
§ 2. Волновые функции в представлении вторичного квантования . . . 702
§ 3. Динамическая система, состоящая из нескольких сортов фермионов и бозонов . . . 707
§ 4. Коммутационные соотношения для операторных функций . . . 711
§ 5. Числа заполнения и f-представление (замечания к гл. 2) . . . 713
Глава VI. Некоторые аналоги метода вторичного квантования в классической механике . . . 715
§ 1. Метод вторичного квантования . . . 715
§ 2. Переход к классической механике . . . 719
§ 3. Система одинаковых упругих шаров . . . 723
20. **Выступление лауреата премии им. А. П. Карпинского** . . . 736
21. **Цветные кварки — новая ступень познания микромира** . . . 742

Приложения

О ключевых идеях Боголюбовских лекций. *А. Д. Суханов* . . . 751
Основные даты жизни и деятельности Н. Н. Боголюбова (1909–1992) . . . 757
Список научных работ Н. Н. Боголюбова, включенных в Собрание научных трудов в 12 томах («Классики науки») . . . 762

CONTENTS

Nikolai Nikolaevich Bogoliubov. *V. A. Sadovnichiy* 5

Part I. Mathematical Problems of Nonlinier and Statistical Mechanics

1. **On the Fokker-Plank Equations (Application to Classical and Quantum Mechanics)** 11

2. **On Certain Statistical Methods in Mathematical Physics** 77

Preface 77
Chapter I. Averaging principle in Nonlinear Mechanics 78
Chapter II. On some limit distributions for sums dependent on arbitrary phases 145
Chapter III. On influence of a random force on the harmonic vibrator 151
Chapter IV. A simple example of relaxation to statistical equilibrium in a system connected with thermostat 172

3. **Statistical Perturbation Theory** 193

4. **Ludwig Boltzmann** 217

5. **On Quasiperiodic Solutions to Nonlinear Mechanics Problems** 228

Introduction 228
§ 1. A set of the problem. Existence of the invariant manifold 231
§ 2. Ascertainment of the analyticity properties for quasiperiodic solutions 239
§ 3. Construction of an iterative process with a speeded up convergence 250
§ 4. On dependence of quasiperiodic solutions on parameter. Asymptotic and convergent expansions 266
§ 5. Quasiperiodic solutions in the second order systems 272

6. **On some Problems connected with the Foundations of Statistical Mechanics** 277

Part II. General Problems of the Condensed Matter Theory

7. **On the Theory of Superfluidity** 287

8. **On the Compensation Principle and the Self-Consistent Field Method** 301

§ 1. *The compensation principle* 301
§ 2. The self-consistent field method 309
§ 3. Representation with a fixed number of particles 314
§ 4. The collective oscillations 318
§ 5. Problems of the electrodynamics of the superconducting state 332

9. **Principle of Correlation Relaxation and Quasiaverages Method** 338

Chapter I. *Principle of Correlation Relaxation* 338
§ 1. Introduction 338
§ 2. General formulation 340

Chapter II. Bose Systems 352
§ 3. Quasiaverages 352
§ 4. Separation of condensate 365
§ 5. Symmetry properties of Green's function of particles 373
§ 6. Theorem on $1/q^2$and its applications 377
Chapter III. Fermi Systems 386
§ 7. States of particles pairs 386
§ 8. Quasiaveragies 389
§ 9. Theorem on $1/q^2$ 395
§ 10. Green's function and the self-energy operator 399
§ 11. Approximation to the theory of superconductivity 403

***10.* On some Problems of the Theory of Superconductivity** 423

***11.* To the Problem of the Hydrodynamics of a Superfluid Liquid** 438
Introduction 438
§ 1. Preliminary identities 438
§ 2. Hydrodynamics equations for a normal liquid 444
§ 3. Hydrodynamics equations for a superfluid liquid 452
§ 4. Variations equations and Green's functions 466

***12.* On the Superfluid Model of Nuclei** 474

***13.* On Spontaneous Violation of Symmetry on Statistical Mechanics** 484

***14.* Kinetic Equations and Green Functions in Statistical Mechanics** 496

***15.* Kinetic Equations for the Electron-phonon System** 515
§ 1. Introduction 515
§ 2. Exclusion of the amplitudes of the phonon field 520
§ 3. First-order kinetic equation for weak interaction 527
§ 4. Formulation of the linear model 533

Part III. New Methods in Quantum Theory of Many Bodies and Quantum Field Theory

***16.* Variational Derivatives Equations in Problems of Statistical Physics and Quantum Field Theory** 559

***17.* Causality Condition in the Quantum Field Theory** 569

***18.* Problems of the Dispersion Relations Theory** 580
§ 1. Introduction 580
§ 2. Basic physical assumptions 588
§ 3. Relations between radiation operators 598
§ 4. Vacuum expectation values of boson radiation operators of the second order 606
§ 5. Vacuum expectation values of fermion radiation operators of the second order 618
§ 6. Construction of dispersion relations 626
§ 7. Rigorous derivation of the dispersion relations 639

19. Aspects of the Secondary Quantization 654
Chapter I. Matrix Representation of the Symmetrical Dynamical Operators . . . 655
§ 1. Introduction 655
§ 2. Some symmetry properties 656
§ 3. Some symmetrical operators 657
§ 4. Some relations 660
§ 5. Hamiltonian 661
Chapter II. Passage from the Continuous Representation to Discrete one. Introduction of the Occupation Numbers 662
§ 1. Representations of the wave functions 662
§ 2. Occupation numbers 666
Chapter III. Secondary Quantization Representation for the Wave Functions of Bosons and Fermions 669
§ 1. Case of the Bose statistics 669
§ 2. Case of the Fermi statistics 673
§ 3. Comparison of the bosons and fermions wave functions 679
§ 4. Secondary quantization representation 679
§ 5. Particle number operator 681
Chapter IV. Secondary Quantization Representation for the Dynamical Operators 682
§ 1. Introduction 682
§ 2. Lemma 683
§ 3. Wave functions 687
§ 4. Transformation of the dynamical quantities to the secondary quantization representation 688
§ 5. Hamiltonian of a system in the secondary quantization representation . . 694
§ 6. Time evolution of the operator functions 694
Chapter V. General Remarks to the Secondary Quantization Method 698
§ 1. Systems independent on the particles number 698
§ 2. Wave functions in the secondary quantization representation 702
§ 3. Dynamical system consisting from different sorts of fermions and bosons 707
§ 4. Commutation relations for the operator functions 711
§ 5. Occupation numbers and the n-representation (remarks to the chapter II) 713
Chapter VI. Some Analogues of the Secondary Quantization Method in the Classical Mechanics 715
§ 1. Secondary quantization method 715
§ 2. Passage to the classical mechanics 719
§ 3. System of identical hard spheres 723

20. Speech of the Laureate of the Karpinsky Prize 736

21. Colored Quarks — a New Step of the Microworld Cognition 742

Appendices

Some Key Ideas of Bogoliubov's Lectures *A.D. Sukhanov* 751

Main Dates of the N. N. Bogoliubov's Life and Activity (1909-1992) 757

List of N.N. Bogoliubov's Scientific Papers included in the Collection of his Scientific Works in 12 Volumes (Classics of Science) 762

Боголюбов Николай Николаевич

Избранные университетские лекции

Редактор-составитель *А. Д. Суханов*
Художник *А. М. Павлов*
Технический редактор *З. С. Кондрашова*
Корректор *Н. И. Коновалова*
Верстка *В. В. Затекин*

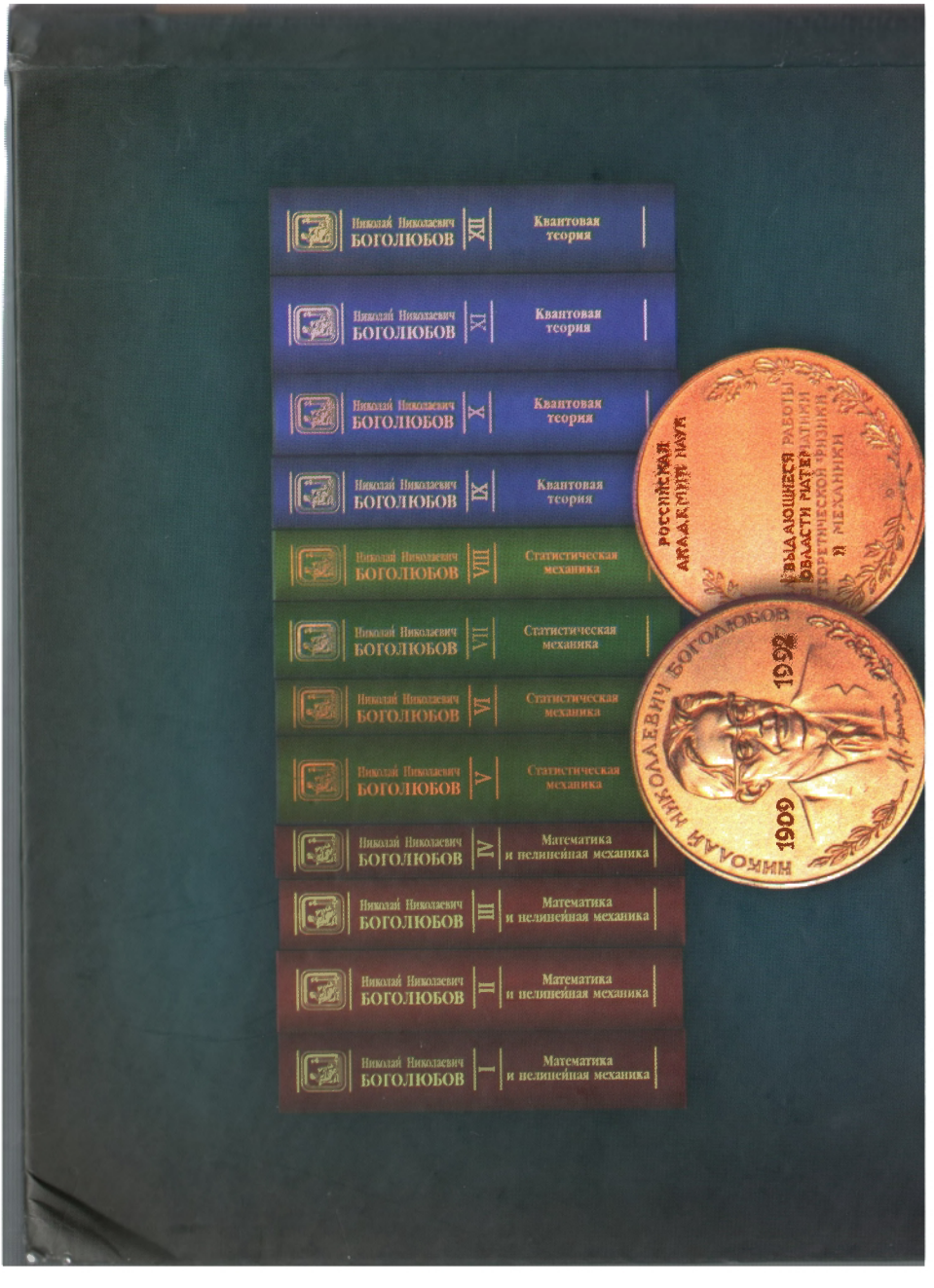
ISBN 978-5-211-05692-3

Подписано в печать 10.07.2009. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Таймс».
Усл. печ. л. 48,5. Уч.-изд. л. 52,0. Тираж 1000 экз.
Заказ № 1403 Изд. № 8880.

Ордена «Знак Почета»
Издательство Московского университета.

125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.
Тел.: 629-50-91. Факс: 697-66-71. 939-33-23 (отдел реализации).
E-mail: secretary-msu-press@yandex.ru

Типография МГУ
119991,ГСП-1,г. Москва,
Ленинские Горы, д.1,стр.15


Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
XIII Квантовая теория
Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
XII Квантовая теория
Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
X Квантовая теория
Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
IX Квантовая теория
Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
VIII Статистическая механика
Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
VII Статистическая механика
Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
VI Статистическая механика
Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
V Статистическая механика
Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
IV Математика и нелинейная механика
Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
III Математика и нелинейная механика
Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
II Математика и нелинейная механика
Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ
I Математика и нелинейная механика
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫДАЮЩИЕСЯ РАБОТЫ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ, ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И МЕХАНИКИ
НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ БОГОЛЮБОВ
1909
1992

интернет-магазин
OZON.ru
44279355