

Монопо́ль ДИРА́КА

539.12

М-88

Монопо́ль ДИРА́КА

МОНОПОЛЬ ДИРАКА

Сборник статей

*Перевод с английского
под редакцией Б. М. Болотовского
и Ю. Д. Усачева*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1970

Сборник посвящен проблеме магнитного заряда (монополя), существование которого предсказано крупнейшим английским физиком Дираком еще в 1931 г., но который до сих пор экспериментально не обнаружен. В последнее время интерес к этой проблеме значительно возрос — ведутся интенсивные теоретические исследования, проводятся эксперименты на ускорителях. Сборник открывается основополагающей статьей Дирака и содержит новейшие наиболее интересные публикации зарубежных физиков.

Сборник представляет интерес как для теоретиков, так и для экспериментаторов, работающих в области физики элементарных частиц.

Редакция литературы по физике

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ ¹⁾

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящий сборник посвящен одной из любопытных проблем современной теоретической физики. Она не относится к сколько-нибудь завершенным, скорее наоборот — работа здесь, возможно, только еще начинается. Речь идет о современной теории магнитного заряда.

Цель книги — познакомить читателей с основными направлениями этой теории. Именно этим обстоятельством и обусловлен отбор статей.

Первыми в сборнике помещены две статьи Дирака (статьи 1 и 2). Дирак — автор современной теории магнитного заряда, и его работы и идеи лежат в основе подавляющего большинства всех последующих работ других авторов.

Работа Малкуса (статья 3) являет собой не часто встречающийся сейчас образец синтеза теории и эксперимента. Автор теоретически рассмотрел вопрос о связи монополя Дирака с веществом и поставил первый эксперимент по его поискам.

Обстоятельный обзор Амальди и др. (статья 4) исчерпывающе описывает состояние как теории, так и эксперимента вплоть до 1963 г. Этот обзор был издан

¹⁾ Параграфы 1 и 2 вступительной статьи написаны Ю. Д. Усачевым, § 3 — Б. М. Болотовским. К этой статье примыкает довольно обширная (но не претендующая на полноту) библиография статей по магнитному заряду, где работы распределены по нескольким тематическим разделам. Пользуемся случаем поблагодарить А. С. Потупа, В. И. Стражева и Л. М. Томильчика за предоставление нам составленной ими библиографии. Мы дополнили ее работами, появившимися за последние 2—3 года.

Перевод выполнили: Ю. Д. Усачев — статьи 1 и 2 и приложение А к статье 4, М. Н. Якименко — статьи 3, 4 (кроме приложения А), 8 и 9, Ю. И. Окулов — статьи 5, 6 и 7.

лишь в качестве препринта. Последнее обстоятельство послужило одной из немаловажных причин включения его перевода в сборник.

Читатель, специально интересующийся методиками экспериментов по поискам монополей Дирака, сможет познакомиться с одной из них в работе Перселла и др. (статья 5), которая является одной из лучших в этой области.

Оригинальный подход к теории Дирака рассматривается в работе Голдхабера (статья 6). В ней, в частности, рассмотрены также некоторые вопросы классической и квантовой теории рассеяния на монополе Дирака.

Швингер (статья 7) анализирует некоторую модификацию теории Дирака, которая приводит автора к иному по сравнению со статьей 1 «условию квантования» для электрических и магнитных зарядов. В работе впервые достаточно полно проведено вторичное квантование электромагнитного поля при наличии магнитных зарядов.

Углублению физических представлений о монополе Дирака посвящена работа Вентцеля (статья 8).

Заключает сборник появившаяся недавно небольшая статья Переса (статья 9). Этой работой представлено некоторое самостоятельное направление в современной теории магнитного заряда — попытка получить «теорему квантования» для электрических и магнитных зарядов, не прибегая к сингулярным потенциалам Дирака или Швингера. Это важное направление в теории магнитного заряда отражено в сборнике всего лишь одной оригинальной работой только потому, что в приложении А обзора Амальди и др. (статья 4) читатель найдет достаточно полное изложение еще трех работ [39, 40, 52], которые также представляют это направление теории.

Знакомясь с работами, помещенными в сборнике, читатель, несомненно, заметит, что ряд вопросов, которые, казалось бы, должны составлять «основу основ» теории магнитного заряда, на самом деле являются предметом оживленной дискуссии. Так, например, Швингер модифицирует теорию Дирака в одном из основных ее пунктов; одновременно он полемизирует с дру-

ими авторами о возможности построения релятивистски инвариантной (!) теории магнитного заряда. В свою очередь Вентцель полемизирует со Швингером, отстаивая теорию Дирака, и т. д.

Сам факт подобного рода дискуссий хорошо иллюстрирует незавершенность теории магнитного заряда.

Примером может служить и точка зрения, которую пытается аргументировать в § 2 вступительной статьи один из авторов. Так, в § 2 подвергается сомнению неизбежность появления в теории магнитного заряда «теоремы квантования зарядов», т. е. исходной теоремы, современной теории монополя. (Сразу же следует оговориться, что подобная точка зрения дискуссионна и, естественно, должна восприниматься читателем критически, как и многое другое в сборнике.)

Среди большинства теоретиков, в особенности среди тех, кто не соприкасается непосредственно с проблематикой теории магнитного заряда, преобладает мнение, что в теории монополя «все уже сделано» и экспериментаторам остается только искать предсказанный теорией магнитный заряд. К сожалению, как это видно из сказанного выше, дело обстоит далеко не так благополучно — теория монополя не завершена. Одна из целей издания настоящего сборника — стимулировать развитие теории магнитного заряда.

§ 2. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА

Вопрос о существовании магнитного заряда (одиночного магнитного полюса, монополя) — один из самых давних в современной теоретической физике. Достаточно сказать, что первая публикация — работа Дирака — относится к 1931 г. Иными словами, эта проблема почти ровесница квантовой механики и квантовой электродинамики.

Однако за почти сорокалетний промежуток времени в библиографии по проблеме монополя едва ли найдется 150—160 работ, причем большинство из них появилось за последние 5—6 лет. Отдавая должное многим авторам и не желая умалить достоинств их работ, все-таки

следует заметить, что первая работа Дирака оказалась первым и по существу единственным принципиальным успехом теории.

Такое невнимание к проблеме магнитного заряда со стороны физиков имеет скорее субъективный, психологический подтекст и вовсе не свидетельствует о меньшей значимости этой физической проблемы по сравнению с другими, например с известной «проблемой бесконечностей». Подчеркнем, однако, существенную разницу в судьбе «проблемы бесконечностей» и проблемы магнитного заряда. Первая все время доставляла (а по существу и по сей день доставляет) массу серьезных неудобств теоретикам в их повседневной деятельности, стимулируя их азартно атаковать «бесконечности». Иное дело — магнитный заряд. Его отсутствие не причиняет пока теоретикам никаких неудобств. Скорее наоборот — его введение в теорию сопряжено, к сожалению, с немалыми трудностями.

Не претендуя на глубину раскрытия причин невнимания теоретиков к монополю, мы тем не менее хотим еще раз подчеркнуть один непреложный факт: проблема магнитного заряда является сейчас по существу «пасынком» теоретической физики.

В 1931 г. физики-теоретики встретились с новой открывающейся возможностью — магнитным зарядом, — которую Дирак защищал в присущем ему стиле: «Было бы удивительно, если бы Природа не использовала эту возможность».

Сильный ли это аргумент? К сожалению, судить об этом можно будет лишь после того, как монополь будет открыт экспериментально или, напротив, «закрыт» теоретически. А пока попытаемся развить аргументацию Дирака.

Не будет, по-видимому, сильным преувеличением сказать, что большая часть современной теоретической физики выросла из уравнений Максвелла. Понимание свойств и закономерностей электромагнитного поля сыграло существенную роль в построении теории поля, как классической, так и квантовой.

В этом случае любое изменение наших представлений об электромагнитном поле, введение новых его

источников — магнитных зарядов и токов — не может не отразиться на всем монументальном здании, называемом теорией поля. Можно надеяться, что доказательство факта существования магнитного заряда прольет свет на проблему структуры электрического заряда. Иной характер взаимодействия, который, вероятно, потребует для описания движения магнитного заряда в «обычном» электромагнитном поле (и обратно — движения электрического заряда в поле магнитных токов), откроет новую главу в теории взаимодействий. Наконец, необходимость введения специальной операции магнитного сопряжения модифицирует СРТ-теорему и откроет дополнительные возможности для анализа.

Здесь перечислено лишь незначительное число интересных возможностей, открывающихся при введении в теорию магнитного заряда. Ну, а если будет доказано, что магнитный заряд не существует?

Заметив попутно, что доказательство «несуществования», как и любого отрицательного положения, является (по крайней мере в физических науках) делом неизмеримо более сложным, чем доказательство «существования», отметим, что абсолютный запрет представлял бы собой также ценнейшую информацию.

Итак, мы видим, что открытие магнитного заряда представляло бы собой событие неизмеримо более важное, чем обнаружение очередного «рядового» резонанса или мезона. Обнаружение магнитного заряда могло бы сравниться по значимости лишь с открытиями протона, электрона и позитрона, важность которых нет необходимости комментировать.

Приведенный выше аргумент Дирака для введения в теорию магнитного заряда, разумеется, не является ни основным, ни единственным. Теория Дирака представляет собой четкий математический аппарат в рамках квантовой механики, развитие которого приводит автора к известному «соотношению Дирака», устанавливающему связь между величинами электрического e и магнитного g зарядов:

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{k}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1)$$

Читателю доставит эстетическое удовольствие проследить, как Дирак в своей первой работе (статья 1), казалось бы, «из ничего» извлекает свое соотношение (1). При зрелом размышлении читатель видит, что это «ничего» не так уж мало: использованы основные законы квантовой механики и свойства многозначных потенциалов. Эта работа Дирака — одна из красивейших работ в теоретической физике безотносительно к тому, что существуют аргументы и против нее [87].

Давая введение в теорию магнитных зарядов, мы не будем следовать логике Дирака, предоставляя это сделать самому читателю при чтении статьи 1. Изложим теорию монополей Дирака другим, несколько необычным путем для того, чтобы акцентировать внимание на трудностях теории.

Итак, каковы исходные посылки теории магнитных зарядов? Их две.

1. Покоящийся магнитный заряд является источником кулоновского магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \frac{g\mathbf{r}}{r^3} = -g \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2)$$

где g — магнитный заряд. Стремление полностью симметризовать свойства электрического и магнитного зарядов может быть выражено лишь с помощью соотношения (2).

2. На нерелятивистский электрон, движущийся в поле покоящегося магнитного заряда, действует сила Лоренца

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] = -\frac{eg}{c} \left[\mathbf{v} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right]. \quad (3)$$

Это соотношение отражает тот факт, что электрону «безразлично», в каком магнитном поле он движется — создаваемом ли обычными «электронными» токами и описываемом с помощью обычного вектора-потенциала A_μ , или же в поле монополя (2). Сила, выраженная через $\mathbf{H}$, в обоих случаях будет иметь один и тот же вид (3).

Из этих двух исходных посылок с помощью релятивистских соотношений можно получить общие уравнения

движения для релятивистского электрона, движущегося в поле, создаваемом заданным распределением электрических и магнитных токов и зарядов,

$$\frac{d\mathbf{p}^{(e)}}{dt} = e \left\{ \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}^{(e)} (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)] \right\}, \quad (4)$$

где $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ — электромагнитное поле, создаваемое электрическими токами и зарядами, а $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ — электромагнитное поле магнитных токов и зарядов. Аналогично для релятивистского магнитного заряда, движущегося в поле, создаваемом заданным распределением электрических и магнитных токов и зарядов, имеет место соотношение

$$\frac{d\mathbf{p}^{(g)}}{dt} = g \left\{ \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 - \frac{1}{c} [\mathbf{v}^{(g)} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)] \right\}. \quad (5)$$

Величины с индексом (e) относятся к электрону, а величины с индексом (g) — к магнитному заряду.

Следует подчеркнуть, что соотношения (2) и (3) являются постулатами теории. Они разумны в той мере, в какой мы хотим сохранить «равноправие» электрических и магнитных зарядов

Электродинамику без монополей, как известно, можно получить обычной вариационной процедурой из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{своб}} + \mathcal{L}_{\text{вз}},$$

где $\mathcal{L}_{\text{своб}}$ — лагранжиан свободного движения, а $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ — лагранжиан взаимодействия («минимальное» взаимодействие):

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = j_{\mu} A_{\mu}. \quad (6)$$

В этом случае, как легко видеть, уравнения движения, полученные с помощью обычной вариационной процедуры, с неизбежностью имеют вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left\{ -\text{grad } A_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \text{rot } \mathbf{A} \right] \right\}. \quad (7)$$

Отождествляя, как обычно, производные от потенциалов с полями

$$\mathbf{E}_1 = -\text{grad } \mathbf{A}_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (8a)$$

$$\mathbf{H}_1 = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (8б)$$

получаем обычную электродинамику без монополей, так как из (8б) имеем

$$\text{div } \mathbf{H}_1 = \text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0, \quad (9)$$

в то время как в электродинамике с монополями, согласно (2),

$$\text{div } \mathbf{H} = 4\pi g \delta(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Возникает вопрос: как, оставляя взаимодействие минимальным [т. е. сохраняя (6)], добиться выполнения (10)?

Дирак решает эту проблему, придавая A_μ специфический вид. В дальнейшем мы будем следовать логике статьи 1, так как релятивистское обобщение, проведенное Дираком в статье 2, не меняет сути дела, но сильно усложняет аппарат.

Попытаемся получить уравнения движения (3), где $\mathbf{H}$ определяется с помощью (2), вводя вместе с Дираком специфический вектор-потенциал

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r} \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{r}]}{r - \mathbf{n}\mathbf{r}}, \quad (11)$$

пригодный по Дираку для описания движения электрона в поле покоящегося в начале координат монополя. В выражении (11) $\mathbf{n}$ — единичный ненаблюдаемый вектор, направление которого произвольно и не влияет, согласно Дираку, на физические следствия теории.

Вычисляя $\text{rot } \mathbf{B}$ по компонентам с помощью обычных операций дифференцирования, получаем

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\frac{g}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = g \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (12)$$

Абсурдность полученного равенства очевидна. Это легко проверить, беря дивергенцию от обеих частей равенства. Несовпадение получается лишь в одной точке — в начале координат. Заметим, что потенциал $\mathbf{B}$ в (11)

сингулярен вдоль направления, задаваемого вектором $\mathbf{n}$ (вдоль «нити», как называет этот вектор Дирак). Поэтому правильно вычислить $\text{rot } \mathbf{B}$ в точках, бесконечно близких к «нити», можно только с помощью интегральной теоремы (теоремы Стокса):

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{N}' \cdot \text{rot } \mathbf{B}' \Delta S. \quad (13)$$

Здесь L — бесконечно малый контур, охватывающий «нить», S — произвольная площадь, опирающаяся на контур L , $d\mathbf{s}$ — элемент контура, $d\mathbf{S}$ — элемент площади, $\mathbf{N}'$ — единичный вектор нормали к площадке, а ΔS — ее абсолютная величина, последнее равенство записано на основании теоремы о среднем. Из (13) следует

$$\mathbf{N} \cdot \text{rot } \mathbf{B} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta S}. \quad (14)$$

Производя эти вычисления в частном случае, когда вектор $\mathbf{n}$ направлен вдоль положительной оси z , мы получаем (см. статью 8) в отличие от (12)

$$\text{rot } \mathbf{B} = g \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) + \mathbf{k} \cdot 4\pi g \theta(z) \delta(x) \delta(y). \quad (15)$$

В общем случае [87]

$$\text{rot } \mathbf{B} = g \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) + \mathbf{n} \cdot 2\pi g \theta(\mathbf{n}r) \delta(r^2 - (\mathbf{n}r)^2). \quad (16)$$

Магнитное поле, как видно из (16), делится на две части: кулоновское поле $g \cdot \text{grad}(1/r)$ и сингулярное поле в «нити». Полный поток такого поля через замкнутую поверхность, окружающую начало координат, равен нулю ($\text{div } \mathbf{H} \equiv 0$), так как поток поля, подводимого через нить, в точности компенсируется потоком кулоновского поля.

В качестве уравнений движения, получаемых с помощью вариационного принципа, из $\mathcal{L}_{\text{вз}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ имеет вид (11), находим

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e [\mathbf{v} \text{rot } \mathbf{B}] = eg \left[\mathbf{v} \left\{ \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) + 2\pi \mathbf{n} \theta(\mathbf{n}r) \delta(r^2 - (\mathbf{n}r)^2) \right\} \right]. \quad (17)$$

Если первый член в точности соответствует кулоновскому характеру искомого магнитного поля, то второй член приводит к нефизическим δ -образным «толчкам» в силе Лоренца.

Следующий этап в построении теории магнитного заряда заключается в попытке получить чисто кулоновский характер $\mathbf{H}$ для монополя, а заодно избавиться от нефизических членов в силе Лоренца. Это Дирак делает уже в рамках квантовомеханической схемы.

Введем вслед за Дираком специальный принцип («вето Дирака»), запрещающий электронам попадать на «нить», т. е. волновую функцию электрона на «нити» положим равной нулю:

$$\psi = 0 \text{ на «нити»}. \quad (18)$$

Чтобы реализовать эту программу, представим себе «нить» заключенной в бесконечно тонкий, непроницаемый для электронов цилиндр. В этом случае (18) имеет место. Если электроны «не чувствуют» магнитный поток, подводимый по «нити» к началу координат, то

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = g \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi g \delta(\mathbf{r}),$$

в том же случае, когда «нить» не заключена в бесконечно тонкий цилиндр, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = g \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) + \\ + 2\pi g \operatorname{div} \mathbf{n} \theta(\mathbf{nr}) \delta(r^2 - (\mathbf{nr})^2) \equiv 0. \end{aligned}$$

Как видно, условие (18) «исправляет» заодно и силу Лоренца, в которой при соблюдении требования (18) исчезают δ -образные толчки.

Сравним теперь исходное магнитное поле (16) с полем, исправленным с помощью условия (18). Поток магнитного поля через замкнутую поверхность, окружающую начало координат, очевидно, равен нулю, поскольку поток через сферу в точности компенсируется потоком через «нить» ($\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$). Поток магнитного поля через замкнутую поверхность, состоящую из сферы и вырезанного из нее бесконечно тонкого цилиндра, окружающего нить, отличен от нуля: $\operatorname{div} \mathbf{H} = 4\pi g \delta(\mathbf{r})$.

Выведем соотношение Дирака (1). Для этого воспользуемся требованием градиентной инвариантности теории. Пусть состояние электрона описывается уравнением Шредингера, в котором в гамильтониан взаимодействия включен вектор-потенциал (11). Замена вектора-потенциала (11), зависящего от единичного вектора $\mathbf{n}_1$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) = \frac{g}{r} \frac{[\mathbf{n}_1 \mathbf{r}]}{r - \mathbf{n}_1 \mathbf{r}} \quad (19)$$

на вектор-потенциал $\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$, таким же образом зависящий от единичного вектора $\mathbf{n}_2$ ($\mathbf{n}_2 \neq \mathbf{n}_1$), не должна изменить физические результаты градиентно инвариантной теории, если

$$\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2) = g \operatorname{grad} \chi. \quad (20)$$

В этом случае волновая функция, удовлетворяющая уравнению Шредингера с потенциалом (19) и описывающая состояние движения электрона в этом потенциале, должна измениться на фазовый множитель:

$$\psi(\mathbf{B}_1) = \exp\left(-\frac{ieg}{\hbar c} \chi\right) \psi(\mathbf{B}_2). \quad (21)$$

Подсчитаем величину $g\chi$, фигурирующую в (21), с помощью соотношения (20):

$$g[\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)] = \int_{(L)}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' [\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)]. \quad (22)$$

Здесь справа взят криволинейный интеграл по некоторому пути L с начальной точкой в $\mathbf{r}_0$ и конечной — в $\mathbf{r}$. Равенство (22) имеет место, конечно, лишь в том случае, если справедливо соотношение (20).

Теперь поставим вопрос: какова будет разность фаз χ в том случае, когда путь L замкнут, т. е. точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ совпадают? Другими словами, вычислим

$$g \Delta\chi = g[\chi_1(\mathbf{r}) - \chi_2(\mathbf{r})] = \oint [\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)] d\mathbf{r}', \quad (23)$$

где $\chi_1(\mathbf{r})$ и $\chi_2(\mathbf{r})$ — два значения фазы χ волновой функции в одной точке после обхода по замкнутой кривой и возвращения в первоначальную точку.

Воспользуемся сначала теоремой Стокса и формулой (16):

$$\oint_L [\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)] d\mathbf{r}' = \int_S \text{rot} [\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)] d\mathbf{S} =$$

$$= 2\pi g \int_S [\mathbf{n}_1 \theta(\mathbf{n}_1 \mathbf{r}) \delta(r - (\mathbf{n}_1 \mathbf{r})^2) - \mathbf{n}_2 \theta(\mathbf{n}_2 \mathbf{r}) \delta(r^2 - (\mathbf{n}_2 \mathbf{r})^2)] d\mathbf{S}. \quad (24)$$

Здесь L — замкнутый контур, а S — площадь, огибаемая на него. Из (24) видно, что в случае, когда контур L не охватывает ни одной из «нитей» $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$, разность фаз $\Delta\chi = 0$. В противном случае можно показать, что

$$|\Delta\chi| = 4\pi. \quad (25)$$

Из (24) видно, что (20) не соблюдается на «нитях» ($|\Delta\chi| \neq 0$), но имеет место повсюду вне их.

Можно было бы рассуждать и несколько иначе. Если мы, следуя Дираку, исключаем из рассмотрения области пространства, занятые нитями, то (20) повсюду имеет место. Но в этом случае χ является уже многозначным потенциалом в двухсвязной области. Подсчет разности фазы при обходе по замкнутой кривой дает те же результаты.

Математически оба варианта рассуждения эквивалентны.

Дирак ввел естественное предположение, согласно которому разность фаз волновой функции, возникающая при обходе по замкнутому контуру, всегда кратна 2π . Это означает, что возвращение по замкнутому контуру в исходную точку не меняет волновой функции. Так, при $\Delta\chi = 4\pi$

$$\exp\left(-\frac{ieg}{\hbar c} 4\pi\right) = \exp(-i2\pi k), \quad (26)$$

а отсюда уже легко получить соотношение Дирака (1) для «квантования» магнитного заряда

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{k}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Абсолютная величина k зависит от числа обходов по замкнутому контуру, а знак k — от направления обхода.

Резюмируем основные положения теории Дирака.

1 Для случая движения электрона в поле магнитного заряда используется сингулярный на «нити» вектор-потенциал $\mathbf{B}(\mathbf{n})$ (11). Это необходимо для того, чтобы с помощью обычной вариационной процедуры из лагранжиана взаимодействия $j\mathbf{B}(\mathbf{n})$ можно было получить правильное выражение для силы Лоренца хотя бы вне «нити».

2 Волновая функция электрона ψ на «нити» полагается равной нулю, чтобы получить чисто кулоновский характер магнитного поля и избавиться от нефизических членов в силе Лоренца.

3 Единичный вектор $\mathbf{n}$, определяющий положение «нити», является ненаблюдаемым (так же, как и сама нить).

Рассмотрим эти три положения с точки зрения их физической совместности.

Критика теорий с «нитеями». Если соотношение (24), вытекающее из (16), записать в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} [\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)] = 2\pi g [n_1 \theta(\mathbf{n}_1, \mathbf{r}) \delta(r^2 - (\mathbf{n}_1, \mathbf{r})^2) - n_2 \theta(\mathbf{n}_2, \mathbf{r}) \delta(r^2 - (\mathbf{n}_2, \mathbf{r})^2)], \quad (27)$$

то становится очевидным, что исходная посылка (20)

$$\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2) = g \operatorname{grad} \chi,$$

вообще говоря, не верна, поскольку правая часть (27) отлична от нуля в противоречии с (20) ($\operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi = 0$). Из (27) видно, что различие имеет место на «нитеях».

Итак, можно ли разность $\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$ представить в виде градиента? Ответ на этот вопрос чрезвычайно важен. Если будет дан положительный ответ, то второй и третий пункты теории Дирака непротиворечивы, «нить» ненаблюдаема, теория градиентно инвариантна, а соотношение Дирака (1) становится необходимым условием реализации всей программы. Что касается отрицательного ответа, то он ставит под сомнение некоторые из этих утверждений.

Подробный анализ этого вопроса выходит за рамки обзорной статьи. Заметим лишь, что возможность строгого представления разности $\mathbf{B}(\mathbf{n}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$ в виде

градиента от некоторой скалярной функции (20) вызывает сомнения. Кратко суть дела сводится к следующему. «Градиентное» преобразование (20) должно заменять потенциал $\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)$ на $\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$. Но при этом реальное магнитное поле, $\text{rot } \mathbf{B}$, должно также измениться: магнитное поле на «нити» $\mathbf{n}_1$ должно «исчезнуть» и «возникнуть» на «нити» $\mathbf{n}_2$. Ясно, что никакое градиентное преобразование не может изменить реального магнитного поля. Поэтому, если найдется такое преобразование, которое заменяет $\mathbf{B}(\mathbf{n}_1)$ на $\mathbf{B}(\mathbf{n}_2)$, то такое преобразование нельзя назвать градиентным; и наоборот, если справедливо (20), то при этом $\mathbf{n}_2$ должен совпадать с $\mathbf{n}_1$ ($\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$) [87].

Не останавливаясь на этом более подробно, проанализируем тот же вопрос с другой точки зрения.

«Вето» Дирака ($\psi = 0$ на «нитях») приводит к тому, что *наблюдаемая* величина $\psi^*\psi$ на «нитях» также обращается в нуль. Можно показать, что обращение в нуль $\psi^*\psi$ на «нитях» происходит плавно [87]. Поэтому в принципе эффект наблюдаем. Это означает, что изменение направления вектора $\mathbf{n}$ в $\mathbf{B}(\mathbf{n})$ приведет к изменению картины рассеяния электронов при различных положениях вектора $\mathbf{n}$. Иными словами, условие $\psi = 0$ на «нитях» приводит к наблюдаемости самих «нитей».

Во избежание недоразумения здесь следует оговориться о том, что в данном случае термин «наблюдаемость нитей» имеет два разных подтекста. «Вето» Дирака устраняет δ -образные толчки в силе Лоренца, делая тем самым «нить» *ненаблюдаемой* (что и требуется в теории Дирака). С другой стороны, условие $\psi = 0$ на «нитях» делает ту же «нить» *наблюдаемой* в смысле, разъясненном выше.

Казалось бы, прямой ответ о наблюдаемости «нитей» может дать решение задачи о рассеянии электронов на покоящемся монополе. Действительно, подобная задача решалась несколькими авторами (см., например, [36] и статью 6). Однако в работе [36], например, автор уже исходит из предпосылки, что «нить» ненаблюдаема и ее местоположение в пространстве не имеет существенного значения. Поэтому в целях упрощения математического решения проблемы автор располагает вектор $\mathbf{n}$ «нити» параллельно падающему пучку электронов. Естественно,

что в этом случае эффект рассеяния электронов на «нити», если он имеет место, замаскирован цилиндрической симметрией задачи.

Коль скоро появляются сомнения в вопросе о наблюдаемости «нитей», следовало бы поставить задачу рассеяния электронов на покоящемся монополе таким образом, чтобы «нить» монополя Дирака располагалась в пространстве *под углом* к падающему пучку электронов. Появление рассеяния в этом случае давало бы прямой ответ на вопрос о наблюдаемости «нитей».

Какие следствия повлек бы за собой эффект наблюдаемости «нитей»? Оставляя теорию Дирака математически непротиворечивой, наблюдаемость «нитей» привела бы к физическим противоречиям теории. Теория Дирака описывала бы скорее бесконечно длинный и бесконечно тонкий соленоид, один конец которого покоится, например, в начале координат, а другой — уходит в бесконечность. Теории магнитного заряда, как такового, не было бы.

Чтобы закончить изложение теории Дирака, сделаем еще одно замечание, касающееся «нитей». Необязательно представлять «нить» в виде прямой линии, уходящей на бесконечность из начала координат. «Нить» может иметь форму любой кривой линии. Однако в любом случае потенциал $\mathbf{B}$ на ней сингулярен и все сказанное о «нитях» выше применимо и в этом случае.

Своеобразное представление вектора-потенциала $\mathbf{B}$ приведено в статье 4 (приложение А):

$$B_\varphi = B_r = 0, \quad B_\theta = -\frac{g\varphi}{r} \sin \theta. \quad (28)$$

Из (28) видно, что $\mathbf{B}$ разрывен на полуплоскости. Именно поэтому

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} \neq g \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right),$$

а детальный анализ приводит к трудностям, сходным с теми, которые возникают при представлении $\mathbf{B}$ в виде (11), как это имеет место у Дирака.

Теория магнитного заряда Швингера. Некоторая модификация теории Дирака произведена в статье 7.

Швингер вводит потенциал $\mathbf{B}$ с двумя «нитями», который описывает движение электрона в поле монополя:

$$\mathbf{B} = \frac{g}{2r} \left\{ \frac{[\mathbf{n} \mathbf{r}]}{r - n\mathbf{r}} - \frac{[\mathbf{n} \mathbf{r}]}{r + n\mathbf{r}} \right\}. \quad (29)$$

Поскольку поток магнитного поля подводится к началу координат, где находится магнитный заряд, по двум «нитям» (направления $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$) и делится на две равные части, то Швингер получает формулу «квантования» магнитного заряда, отличающуюся от соотношения Дирака на $1/2$:

$$\frac{eg}{hc} = k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (30)$$

Минимальный магнитный заряд по Швингеру в 2 раза больше, чем у Дирака.

Теория Швингера по существу не меняет основных положений теории Дирака, если отвлечься от разницы в следствиях (30) и (1). Физические основы теории те же самые. Следует заметить, что с помощью потенциала, содержащего s «нитей» [87],

$$\mathbf{B} = \frac{g}{rs} \sum_{t=1}^s \frac{[\mathbf{n}_t \mathbf{r}]}{r - \mathbf{n}_t \mathbf{r}}, \quad (31)$$

который также удовлетворяет основному требованию теории Дирака — получить правильную силу Лоренца повсюду вне «нитей», мы можем получить любое «квантование» магнитного заряда. В самом деле, при $s = 1$ мы получаем теорию Дирака, при $s = 2$ и $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ — теорию Швингера. В общем случае (31) дает значение минимального магнитного заряда, в s раз большее, чем у Дирака. С помощью (31) можно получить и другие значения минимального заряда, если охватывать контуром то или иное количество нитей.

Нам кажется, что принципиальная возможность работать в теории Дирака с потенциалом (31) вместо (11) подчеркивает слабые стороны любых теорий, пользующихся образом монополя с «нитями».

Сохранится ли теорема квантования? В статье 4 (приложение А) авторы, отмечая некоторые трудности теории с «нитями», ставят два вопроса:

1. Можно ли построить теорию монополя без «нитей»?

2. Если такая теория будет построена, то сохранится ли в ней соотношение Дирака для «квантования» магнитного заряда?

По первому вопросу имеется несколько точек зрения. Что касается второго вопроса, то большинство авторов дают на него положительный ответ. В связи с этим нам хотелось бы привести некоторые аргументы в пользу отрицательного ответа на второй вопрос.

В теории Дирака соотношение для «квантования» магнитного заряда мы получили при следующих условиях: 1) использование сингулярного потенциала (11), 2) введение требования Дирака $\psi = 0$ на «нитях» и 3) переход при «градиентном» преобразовании (замена p_1 на p_2) к двусвязной области [см. (20)]. Таким образом, само соотношение (1) является по существу лишь следствием всех этих трех особенностей теории Дирака. В нашем выводе именно двусвязность области приводит к соотношению Дирака (1). Не будь ее, можно было бы думать, что соотношению (1) не из чего возникнуть. Иными словами: не будь «нитей», можно было бы думать, что не было бы и соотношения Дирака (1).

В связи с этим приобретают интерес попытки вывести соотношения (1) или (30) другим путем, не прибегая к сингулярным потенциалам. Из работ, представляющих это направление в теории магнитного заряда, отметим работы [39] и [40], которые подробно изложены в статье 4 (приложение А), а также одну из новейших работ, помещенную в настоящем сборнике (статья 9). Во всех этих работах выводятся соотношения типа (1) или (30).

Недостатком подобного рода доказательств соотношения (1) является отмеченный в статье 4 полуклассический характер рассуждений. В связи с этим подобные доказательства нельзя считать строгими и лучшим доказательством соотношения Дирака остается все-таки вывод самого Дирака.

Вопрос о том, останется ли соотношение Дирака в теории магнитного заряда, как нам кажется, следует считать открытым. Окончательное решение этого вопроса следует искать в варианте теории (если он возможен)

с потенциалом, не имеющим сингулярностей в иных областях пространства, кроме точки. Построив строгую квантовомеханическую схему, можно будет судить, останется ли (1) в теории или нет.

Вопрос о величине магнитного заряда, которая следует из соотношений (1) или (30), весьма важен для эксперимента. По существу единственной «привязкой» для экспериментов по поиску магнитного заряда является его величина. К обсуждению этого вопроса мы еще вернемся ниже.

Перечислим три основных направления в теории магнитного заряда.

1. Теория Дирака, Швингера, теория с сингулярным или разрывным в какой-либо области потенциалом. Подавляющее большинство работ в библиографии по теории магнитного заряда так или иначе связано с этим направлением. Сюда относятся работы, посвященные развитию этого направления (см., например, [34] и статью 6), расчеты конкретных эффектов (работа [36], статья 3 и т. д.). Сюда же можно отнести и некоторые работы, которые на первый взгляд не имеют прямого отношения к этому направлению. В качестве примера приведем недавнюю работу [69], посвященную классической формулировке специфического нелокального взаимодействия, описывающего движение электрона в поле монополя и монополя в поле электрона. Можно показать, что в работе [69] потенциал поля, создаваемого покоящимся монополем, выраженный с помощью некоторого нелокального взаимодействия, на самом деле совпадает с потенциалом (11) Дирака.

2. Теории без сингулярного на нити потенциала, о которых отчасти было упомянуто выше. Это, в частности, работы [39, 40] и статья 9. Среди других следует отметить также работу [52]. Эта работа довольно подробно изложена в статье 4 (приложения А). Попытка использовать формализм Мандельштама в теории монополя весьма интересна, но не решает главной задачи, так как не дает возможности сформулировать на лагранжевом и гамильтоновском языках взаимодействие, приводящее к правильной силе Лоренца. Подобная формулировка необходима, в частности, и потому, что только в этом

случае будет показана эквивалентность электродинамики Мандельштама и обычной электродинамики. В противном случае доказательство соотношения (1) в работе [52] имеет чисто постулативный характер. В числе прочих результатов этой работы отметим изящное решение основных классических уравнений электродинамики с монополями с помощью двух 4-потенциалов:

$$\begin{aligned}\partial_\nu F_{\mu\nu} &= j_\mu^{(e)}, \\ \partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} &= j_\mu^{(g)},\end{aligned}\tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho B_\sigma, \\ \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma};\end{aligned}\tag{33}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_\mu^{(e)}}{d\tau^{(e)}} &= e F_{\mu\nu} u_\nu^{(e)}, \\ \frac{dp_\mu^{(g)}}{d\tau^{(g)}} &= g \tilde{F}_{\mu\nu} u_\nu^{(g)}.\end{aligned}\tag{34}$$

Из (32), (33) и условий Лоренца $\partial_\mu A_\mu = 0$, $\partial_\mu B_\mu = 0$ следует

$$\begin{aligned}\square A_\mu &= j_\mu^{(e)}, \\ \square B_\mu &= j_\mu^{(g)}.\end{aligned}\tag{32'}$$

Здесь величины с индексами (e) относятся к электрически заряженным частицам, а с индексами (g) — к монополям. Система уравнений (32)—(34) составляет основную систему уравнений электродинамики с монополями.

Следует подчеркнуть, что обобщенные уравнения Максвелла (32) в принципе могут иметь в своих правых частях еще дополнительные токи. Такое «вторичное» обобщение, как можно показать, при определенных условиях не нарушит совместности уравнений (32)—(34). Не могут быть обобщены лишь силы Лоренца (34), которые являются исходными постулатами теории.

3. Дуальная инвариантность электродинамики и монополю. Поскольку работы, представляющие это направление, не вошли в сборник, остановимся на изложении

основных результатов этих работ несколько подробнее. Уже давно было известно, что свободные уравнения Максвелла инвариантны относительно дуальных преобразований

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} \cos \alpha + \mathbf{H} \sin \alpha, \\ \mathbf{H}' &= -\mathbf{E} \sin \alpha + \mathbf{H} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (35)$$

Наличие правых частей в обычных уравнениях Максвелла нарушает инвариантность уравнений относительно (35). Исправить ситуацию можно, предположив, например, что может существовать частица, несущая одновременно как электрический e , так и магнитный g заряды. В этом случае обычные уравнения Максвелла обобщаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} g \mathbf{J}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 4\pi g \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} e \mathbf{J}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e \rho, \end{aligned} \quad (36)$$

а сила Лоренца может быть записана в виде

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + g\mathbf{H} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} (e\mathbf{H} - g\mathbf{E}) \right]. \quad (37)$$

Вводя одновременно с (35) преобразования над зарядами e и g

$$\begin{aligned} q &= e \cos \alpha + g \sin \alpha, \\ p &= -e \sin \alpha + g \cos \alpha, \end{aligned} \quad (38)$$

мы можем систему уравнений (33) и (34) при определенном угле поворота α свести к системе, по форме напоминающей уравнения обычной электродинамики:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}' &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} q \mathbf{J}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}' &= 4\pi q \rho; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}'] \right), \quad (40)$$

причем при данном угле α

$$q^2 = e^2 + g^2. \quad (41)$$

Сущность подобного подхода, развитого в статьях [51, 53, 89] и др. (который мы излагаем здесь несколько упрощенно), сводится к анализу физических следствий упрощений (36), (37), с одной стороны, и уравнений (39), (40) — с другой. Предположим вместе с авторами работы [53], что абсолютно все заряженные (в обычном понимании) частицы на самом деле обладают двумя «затравочными» зарядами: электрическим e и магнитным g . Иными словами, как все «пробные» тела и частицы, так и все частицы, составляющие наши приборы, «устроены» одинаковым образом. Тогда физические следствия, получаемые из системы (36), (37), полностью аналогичны следствиям системы (39), (40), которая с точностью до обозначений совпадает с обычной электродинамикой. Как утверждает в работе [53], не существует ни одного физического опыта, который позволил бы различить системы (36), (37) и (39), (40). Это утверждение относится и к траекториям частиц, и ко всем другим измеримым параметрам, характеризующим электродинамическую систему. В работе [53] рассматриваются различные мыслимые опыты и анализируется измерительная процедура. Если системы (36), (37) и (39), (40) физически эквивалентны, то можно предположить, что на самом деле, анализируя обычные уравнения Максвелла, мы имеем дело с некоторым «эффективным», наблюдаемым на опыте зарядом q , который мы и называем условно «электрическим».

В рамках подобного подхода проблемы магнитного заряда фактически не существует. Более того, в некоторых работах, развивающих это направление, содержится утверждение о том, что магнитный заряд невозможно включить в электродинамику в качестве наблюдаемого физического объекта. С этим утверждением согласиться очень трудно. Формулировка проблемы магнитного заряда в форме системы (36), (37) представляет, на наш взгляд, скорее уход от проблемы, чем ее решение. Чтобы показать это, достаточно просто записать систему уравнений электродинамики для двух сортов частиц с

двумя эффективными значениями зарядов p и q (которые, естественно, оба наблюдаемы). Тогда сама возможность записи таких уравнений неопровержимо свидетельствует о том, что проблема магнитного заряда все-таки существует.

Сделать это несложно. Для этого достаточно в системе (32), (34) заменить $e \rightarrow q$, $g \rightarrow p$. Другими словами, ввести два различных заряда p и q (две силы Лоренца!), в которых «затравочные» заряды e и g «перемешаны» в различных пропорциях. В этом случае уже никаким дуальным поворотом нельзя «уничтожить» ни один из этих зарядов. Правда, здесь следует оговориться, что вопрос о дуальной инвариантности подобной системы уравнений остается, вообще говоря, открытым.

Заканчивая изложение проблем дуальной инвариантности электродинамики, мы хотели бы подчеркнуть, что сами по себе эти проблемы весьма интересны и можно ожидать много интересных идей и решений при дальнейшем развитии теории.

Проблематика теории магнитного заряда. Выше мы очень часто употребляли слова «проблема магнитного заряда». Однако до сих пор сущность этой проблемы и ее основные трудности в четкой форме еще не были раскрыты. Попытаемся это сделать ниже.

Основная трудность теории магнитного заряда связана с невозможностью в настоящий момент записать лагранжиан взаимодействия поля электрона с монополярными токами (термин «ток» имеет здесь, возможно, условный смысл) и поля монополя с соответствующими электронными токами. В настоящий момент нельзя даже сказать, является ли эта трудность принципиальной или, так сказать, технической. Критерием правильности формулировки лагранжианов взаимодействия является постулируемый априори вид силы Лоренца. Иными словами, в результате вариационной процедуры мы должны получить силу Лоренца в виде (3), а не в виде (7), как это неизбежно получается, если в качестве лагранжиана выбрать «минимальное» взаимодействие.

Лагранжиан, предложенный Дираком, выполняет поставленную задачу не полностью. Более того, появление

«нитей» может свидетельствовать о больших трудностях теории

Однако следует подчеркнуть, что других предложений, кроме дираковского, до сих пор не появилось. Несколько сделанных попыток либо сводятся по существу к дираковскому варианту, либо не учитывают основного требования теории, что сила Лоренца должна иметь вид (3).

Отыскание лагранжиана взаимодействия, по-видимому, даст возможность сразу же построить и квантово-механический аппарат теории, если только переход от лагранжевой формулировки теории к гамильтоновой не будет сопряжен с какими-либо дополнительными трудностями. И уже в рамках квантовой механики можно будет строго судить, останется ли соотношение Дирака (1) в теории или нет. Подобного рода анализ, несомненно, явится более строгим критерием для решения этого вопроса по сравнению с полуклассическим рассмотрением, проведенным, например, в работах [39, 40] и в статье 9.

Выводы для эксперимента. «Судьба» соотношения (1) или (30) в первую очередь затрагивает, конечно, методику эксперимента по поискам магнитного заряда. Из (1), например, следует, что магнитный заряд чудовищно велик:

$$g = 68,5 e, \quad (42)$$

а по Швингеру он еще в 2 раза больше. Естественно, что появление одиночного магнитного заряда такой величины не могло быть не замеченным экспериментаторами.

Однако если предположить на минуту, что величина g могла бы быть иной, например много меньшей, то это повлекло бы за собой подлинную революцию в методике эксперимента по поискам магнитного заряда. Такое предположение означало бы, что до сих пор поиск монополей велся «не там, где нужно»

Следствия, которые вытекают из подобного предположения, очень серьезны. Именно поэтому, сохраняя предельную осторожность и строгость в рассуждениях,

в первую очередь теоретики должны провести анализ соотношения (1).

О работах Эренхафта. Мало кому известно, что утверждение об экспериментальном обнаружении магнитного заряда было сделано Эренхартom еще в 1910 г. С тех пор вплоть до 1945 г. появилось, по-видимому, более двух десятков его работ [4, 6], посвященных этому вопросу, а также работ других экспериментаторов [5], проверявших его результаты. Величина магнитного заряда по Эренхафту много меньше величины, предсказываемой теорией Дирака.

Работы Эренхафта не получили общего признания. Трудно сказать, что при этом сыграло наибольшую роль — небезупречная ли экспериментальная методика, позволявшая интерпретировать наблюдавшийся эффект с помощью многочисленных возможных побочных явлений, или же высокий авторитет Дирака, согласно теории которого величина магнитного заряда предсказывалась равной $68.5 e$. Так или иначе, но работы Эренхафта в настоящий момент забыты.

§ 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА С ВЕЩЕСТВОМ

Отвлечемся теперь от вопроса о том, насколько последовательно можно ввести магнитный заряд в теорию. В конце концов, если монополь будет когда-нибудь обнаружен на опыте, этот факт придется учитывать во всех теоретических построениях. Зададим другой вопрос: если существует магнитный заряд, то каковы его свойства?

Прежде всего отметим, что электрическое поле не действует на покоящийся магнитный заряд, в полной аналогии с тем фактом, что постоянное магнитное поле не действует на покоящийся электрический заряд. Движущийся магнитный заряд испытывает в электрическом поле действие «магнитной силы Лоренца»

$$\mathbf{f}_m = - \frac{g}{c} [\mathbf{v}\mathbf{E}],$$

где g — величина магнитного заряда, v — его скорость. Это выражение аналогично выражению для обычной си-

ны Лоренца, действующей со стороны магнитного поля на движущийся электрический заряд.

Магнитное поле действует на магнитный заряд с силой

$$f = gH.$$

Поэтому, например, магнитный заряд можно ускорить, поместив его в соленоид. Рассмотрим теперь вопрос, как одиночный магнитный заряд (если он существует) взаимодействует с веществом. Этот вопрос тесно связан с другим: как обнаружить монополю? Действительно, обнаружить магнитный заряд можно только по его взаимодействию с веществом — по ионизационным потерям, по излучению Вавилова Черенкова и по другим процессам, которые могли бы служить для регистрации и выделения монополя от других частиц, могущих вызывать сходные эффекты.

Ниже мы отвлечемся от сил взаимодействия между монополями и атомами при малых энергиях (см. статьи 3 и 4) и будем считать, что энергия монополя достаточно велика. Тем самым мы отвлечемся от области дискретных значений энергии монополя (от связанных состояний монополь — атом). В этом случае, проходя через вещество, монополь будет тратить энергию на ионизацию атомов среды.

Ионизирующая способность монополя в ряде отношений отличается от ионизирующей способности электрического заряда. Чтобы это показать, рассмотрим грубо качественно процесс соударения двух заряженных частиц. Сначала будем считать, что обе эти частицы имеют только электрические заряды. Пусть частица с зарядом e_1 движется мимо покоящейся частицы с зарядом e_2 . Энергию движущейся частицы будем считать достаточно большой, чтобы в результате столкновения изменение этой энергии было относительно мало. Подсчитаем, какая энергия будет передана частице e_2 , которая до столкновения покоилась. Для этого оценим импульс I , переданный частице e_2 ,

$$I = Ft,$$

где F — сила, действующая на заряд e_2 во время пролета заряда e_1 , t — время соударения. Силу F и время соударения t оценим следующим образом:

$$F \approx \frac{e_1 e_2}{r^2}, \quad t \approx \frac{2\rho}{v}.$$

Здесь ρ — параметр пролета (расстояние частицы e_2 от линии движения частицы e_1), v — скорость частицы e_1 . Из этих оценок получаем выражение для импульса, переданного частице e_2 :

$$I = \frac{2e_1 e}{\rho v};$$

поэтому переданная энергия

$$E = \frac{I^2}{2m} = \frac{2e_1^2 e^2}{\rho^2 m v^2}, \quad (43)$$

где m — масса частицы e_2 .

Теперь можно определить потери энергии частицы e_1 , если она проходит через среду, состоящую из частиц e_2 , плотность которых равна $n \text{ см}^{-3}$. Полные потери энергии можно получить, умножив E на $n 2\pi \rho d\rho$ и проинтегрировав по всем параметрам соударения ρ . Легко видеть, что полученный интеграл логарифмически расходится и на верхнем и на нижнем пределах. Поэтому нужно определить имеющую физический смысл область интегрирования, заключенную между пределами $\rho_{\min}$ и $\rho_{\max}$. Мы не будем здесь уточнять значения верхнего $\rho_{\max}$ и нижнего $\rho_{\min}$ пределов интегрирования [23, 24]. Для наших целей существенно, что в результате для полных потерь энергии частицы e_2 на единицу пути получается выражение

$$W = n \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} E \cdot 2\pi \rho d\rho = \frac{4\pi n e_1^2 e^2}{m v^2} \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}. \quad (44)$$

Из этого выражения видна одна особенность потерь энергии электрического заряда на ионизацию: с падением скорости потери существенно возрастают. Если отвлечься от логарифмической зависимости (величины $\rho_{\max}$ и $\rho_{\min}$ под знаком логарифма могут зависеть от скорости v частицы e_1), то ионизация, вызываемая

электрическим зарядом, обратно пропорциональна квадрату его скорости. По мере торможения заряда плотность ионизации растет. Трек частицы в ядерной эмульсии к концу становится все плотнее.

Отметим здесь, что выражение (44) для потерь энергии на ионизацию мы вывели в предположении, что частицы, которым передается энергия (в реальной среде это электроны), свободны. На самом деле электроны в среде связаны. Тем не менее формула для потерь энергии на ионизацию имеет вид (44), если только интервал значений параметра пролета выбрать так, чтобы энергия, переданная электрону, превышала энергию связи.

Рассмотрим теперь ионизационные потери магнитного заряда. Для этого в ранее рассмотренной задаче следует считать, что пролетающая частица не имеет электрического заряда, но обладает магнитным зарядом g . Оценку ионизационных потерь монополя мы проведем аналогично тому, как это делалось для электрического заряда. Следует только помнить, что на покоящийся заряд e_2 действует теперь электрическое поле, созданное движущимся магнитным зарядом. Поэтому, вычисляя импульс, переданный заряду e_2 , мы будем пользоваться формулой $I = Ft$ с той разницей, что на этот раз

$$F \approx \frac{v}{c} \frac{ge_2}{r}, \quad t \approx \frac{2\rho}{v}, \quad (45)$$

т. е. если время соударения t имеет ту же величину, что и для случая, когда сталкиваются два электрических заряда, то сила F , с которой пролетающий магнитный заряд g действует на электрический заряд e_2 , оказывается меньше в отношении v/c . Оценка (45) для F следует из общих положений электродинамики.

Наличие множителя v/c в выражении для силы приводит к тому, что импульс, переданный заряду e_2 монополем, не зависит от скорости монополя

$$I = Ft = \frac{2ge}{rc}.$$

Вычисляя теперь энергию, переданную электрическому заряду e_2 , и переходя к ионизационным потерям

магнитного заряда на единицу пути в среде, получаем формулу

$$W = \frac{4\pi n g^2 e_2^2}{mc^2} \ln \frac{r'_{\text{макс}}}{r'_{\text{мин}}}. \quad (46)$$

Сравнивая потери на ионизацию электрического и магнитного зарядов в среде, отметим следующие различия: формулу (46) для потерь монополя можно получить из формулы (44) для ионизационных потерь электрического заряда, если:

- 1) заменить e на g ,
- 2) умножить (44) на v^2/c^2 и
- 3) заменить $r_{\text{мин}}$ и $r_{\text{макс}}$ на $r'_{\text{мин}}$ и $r'_{\text{макс}}$, которые, вообще говоря, могут отличаться от $r_{\text{мин}}$ и $r_{\text{макс}}$.

Если отвлечься опять от логарифмического множителя, то бросается в глаза, что ионизационные потери магнитного заряда не зависят от его скорости. Это означает, что трек, созданный магнитным зарядом в фотоэмульсии, имел бы равномерную плотность вплоть до очень малых скоростей. Это — важное качественное отличие ионизации, даваемой магнитным зарядом, от ионизации, производимой электрическим зарядом. В последнем случае, как мы видели, плотность трека возрастает по мере замедления частицы в фотоэмульсии.

Еще одно важное отличие в картинах ионизации, производимой электрическим и магнитным зарядами, заключается в различии величин этих зарядов. Если справедлива оценка Дирака, то магнитный заряд больше электрического примерно в 70 раз. Потери на ионизацию пропорциональны квадрату заряда. Поэтому ионизационные потери магнитного заряда должны быть в несколько тысяч раз больше, чем ионизационные потери электрического заряда. Иными словами, трек магнитного заряда в фотоэмульсии невозможно было бы не заметить. Если заряд монополя действительно так велик, это должна быть очень «заметная» частица.

Если справедлива оценка Дирака, дающая столь большую величину магнитного заряда, то велики не только ионизационные потери магнитного заряда. Существует ряд чисто классических эффектов взаимодейст-

вия, в которых магнитный заряд легко обнаружить и отделить от электрического. Одним из таких эффектов является излучение Вавилова—Черенкова. Если монополь движется в веществе с диэлектрической постоянной $\epsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$, причем обе эти величины зависят от частоты света ω , и если скорость монополя v превышает фазовую скорость света в среде, равную $c/\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$, то монополь становится источником излучения света. Интенсивность излучения света на частоте ω на единицу пути выражается формулой

$$W = \frac{g^2}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon(\omega)\mu(\omega)\beta^2} \right) \epsilon(\omega).$$

Как видно, интенсивность излучения также пропорциональна g^2 , т. е. на несколько порядков больше, чем излучение Вавилова—Черенкова от электрического заряда. А ведь последнее уверенно детектируется современными черенковскими счетчиками.

Был исследован еще один чисто классический радиационный эффект — переходное излучение магнитного заряда, падающего на плоскую границу раздела с преломляющей средой. Как показал Мергсян [29], в этом случае энергия излучения также пропорциональна квадрату магнитного заряда, т. е. излучение должно быть велико. В случае электрона один квант переходного излучения испускается примерно на сто случаев прохождения через границу раздела. Для магнитного заряда мы получаем несколько десятков квантов за одно прохождение. Это легко измеримая величина. Следует еще отметить, что в двух последних случаях (излучение Вавилова—Черенкова и переходное излучение) поляризация излучаемых волн резко отличается от той, какую дает электрический заряд.

Таким образом, большая предсказываемая величина магнитного заряда позволяет предложить ряд экспериментов, с помощью которых этот заряд может быть зарегистрирован и отделен от электрического. Однако магнитный заряд до сего времени не обнаружен, несмотря на ряд экспериментов, проведенных в самое последнее время с использованием всего арсенала средств совре-

менной физики. Одним из объяснений этого факта может явиться утверждение, что магнитного заряда не существует в природе. Однако пока такое утверждение не сформулировано в виде запрета, вытекающего из физических законов, оно не является доказательным; во всяком случае, оно является не более доказательным, чем противоположное утверждение о существовании магнитного заряда. Запрета же на существование магнитного заряда до сих пор не сформулировано, хотя многие физики и считают, что магнитный заряд не существует. Другое объяснение неудачных опытов по обнаружению магнитного заряда может состоять в том, что в силу тех или иных причин магнитные заряды очень редки в природе.

Эти два объяснения — или магнитных зарядов нет, или их очень мало — не исчерпывают, однако, всех возможностей. Может оказаться, что сами теоретические представления о магнитном заряде, существующие в настоящее время, далеки от завершенности. В таком случае отрицательный результат опытов по обнаружению магнитного заряда находит свое естественное объяснение в том, что физики ищут не там, где надо, и не то, что существует на самом деле. До сих пор, например, не ясно, какими свойствами должен обладать четырехмерный ток $j_\mu^{(g)}$, связанный с магнитным зарядом. Такой ток может быть либо вектором, либо псевдовектором. Если $j_\mu^{(g)}$ — псевдовектор, то вклады в электрическое (магнитное) поле от зарядов e и g имеют одинаковую четность. Если же $j_\mu^{(g)}$ — вектор, то четности полей электрического и магнитного зарядов противоположны. Очевидно, если $j_\mu^{(g)}$ — псевдовектор, то четность электромагнитного поля сохраняется; в противном случае четность не сохраняется. Как указал Томильчик [99], последняя возможность может объяснить отрицательные результаты опытов по обнаружению магнитных зарядов. Действительно, предположим, что четность в электромагнитных взаимодействиях сохраняется. Сохранение четности в электромагнитных взаимодействиях не является абсолютным, поэтому из предположения о векторном характере магнитного тока не вытекает абсолютного запрета на суще-

ствование магнитных зарядов. Степень несохранения четности в электромагнитных взаимодействиях можно оценить не ависимым путем, как это сделал, например, М. Сакс¹⁾. Это позво. яет установить верхний предел сечения для процессов, вызванных взаимодействием магнитных зарядов с электромагнитным полем. Оценка показывает, что константа связи магнитного заряда с электромагнитным полем должна уменьшиться не менее чем в 10^{14} раз по сравнению с дираковским значением g (если $j_\mu^{(g)}$ — вектор и если справедливы оценки Сакса). Таким образом, хотя предположение о векторном характере $j_\mu^{(g)}$ и не накладывает абсолютного запрета на существование магнитного заряда, оно легко объясняет отрицательные результаты всех попыток экспериментально обнаружить монополю.

Отметим еще вопрос о симметрии уравнений Максвелла по отношению к электрическим и магнитным зарядам. Сам факт существования этой симметрии долгое время служил аргументом в пользу существования магнитных зарядов. Однако эту симметрию не удастся сохранить при формулировке вариационного принципа, из которого получались бы одновременно уравнения поля и уравнения движения частиц при одновременном «существовании» электрического и магнитного зарядов. Такого вариационного принципа, в котором электрический и магнитный заряды были бы равноправны, до сих пор не сформулировано. Эта трудность также может указывать на неполноту наших представлений о магнитном заряде. Возможно, что отсюда также следует некоторый запрет на существование монополей.

Б. М. Болотовский
Ю. Д. Усачев

ЛИТЕРАТУРА

1. Работы Дирака

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A133, 60 (1931) (статья 1 данного сборника).
2. Dirac P. A. M., Phys. Rev., 74, 817 (1948) (статья 2 данного сборника).
3. Dirac P. A. M., Scientific American, 208, No. 5, 45 (1963).

¹⁾ M. Sachs, Ann. of Phys., 6, 209 (1959)

2. Экспериментальные работы

4. Ehrenhaft F., Phys. Zs., **31**, 478 (1930).
5. Lustig A., Söllner A., Zs. Phys., **79**, 823 (1932).
6. Ehrenhaft F., Journ. Franklin Inst., **230**, 381 (1940).
7. Malkus W. V. R., Phys. Rev., **83**, 899 (1951) (статья 3 данного сборника).
8. Goto E., Journ. Phys. Soc. Japan, **10**, 1413 (1958).
9. Bradner H., Isbell W. H., Phys. Rev., **114**, 603 (1959).
10. Fidicaro M., Finocchiaro G., Giacomelli G., Nuovo cimento, **22**, 657 (1959).
11. Porter N. A., Nuovo cimento, **16**, 958 (1960).
12. Amaldi E. et al., Conf. Intern. Aixen Provence sur particules elementaries, 1961, vol. 1 (1962), p. 155; Notas de Fisica, **8**, **15**, 251 (1961).
13. Purcell E. M., Collins G. B., Fujii T., Hornbostel J., Turkot F., Phys. Rev., **129**, 2326 (1963) (статья 5 данного сборника).
14. Amaldi E., Baroni G., Manfredini A., Hoffman L., Banderhaeghe G., Nuovo cimento, **28**, 773 (1963).
15. Петухов В. А., Якименко М. Н., Nucl. Phys., **49**, No. 1 (1963).
16. Goto E., Kolm H. H., Ford K. W., Phys. Rev., **132**, 387 (1963).
17. Caruthers W. C., Stefanski R., Adair R. K., Phys. Rev., **149**, 1070 (1966).
18. Kolm H., Phys. Today, **20**, No. 10, 69 (1967).
19. Мурашова В. А., Петухов В. А., Сырейщикова Т. И., Тельнов Ю. Я., Усачев Ю. Д., Якименко М. Н., Препринт ФИАН, № 56, 1969.
20. Fleischer R. L., Jacobs I. S., Schwarz W. M., Price P. B., Goodell H. G., Phys. Rev., **177**, No. 5, Pt 1, 2029 (1969).
21. Ерлыкин А. Д., Яковлев В. И., ЖЭТФ, **56**, 1849 (1969).
- 21а. Дадькин В. Л., Препринт ФИАН, № 117, 1969.
- 21б. Гуревич И. И. и др., Препринт ИАЭ 1914, 1969.

3. Потери энергии при движении монополя в среде, черенковское излучение, связанные состояния с ядрами

22. Ford K. W., Wheeler, Phys. Rev., **81**, A656 (1951).
23. Cole H. J. D., Proc. Cambr. Phil. Soc., **47**, 196 (1951).
24. Bauer E., Proc. Cambr. Phil. Soc., **47**, 777 (1951).
25. Nadeau G., Am. Journ. Phys., **28**, 566 (1960).
26. Lapidus J. R., Pietenpol J. L., Am. Journ. Phys., **28**, 17 (1960).
27. Коломенский А. А., Вестник МГУ (физика, астрономия), № 6, 56 (1962).
28. Бологовский Б. М., Воронин В. С., Изв. вузов СССР, радиофизика, **5**, № 5, 1033 (1962).

- 29 Мергелян О. С., ДАН Арм. ССР, 36, 17 (1963).
 30 Tompkins D. R., Phys. Rev., 138, No. 1B (1965).
 30а Куканов А. Б., Оптика и спектроскопия, 24, 614 (1968).

4. Электродинамика с монополями

- 31 Тамм И. Е., Zs. Phys., 71, 141 (1931).
 32 Gronblom B. O., Zs. Phys., 98, 283 (1935).
 33 Saha M. N., Indian Journ. Phys., 10, 141 (1936).
 34 Jordan P., Ann. Phys., 32, 66 (1938).
 35 Fierz M., Helv. Phys. Acta, 17, 27 (1944).
 36 Banderet P. P., Helv. Phys. Acta, 19, 503 (1946).
 37 Durand E., Compt. rend., 225, 567 (1947).
 38 Harish-Chandra, Phys. Rev., 74, 883 (1948).
 39 Wilson H. A., Phys. Rev., 75, 309 (1949).
 40 Saha M. N., Phys. Rev., 75, 1968 (1949).
 41 Eldridge J. A., Phys. Rev., 75, 1614 (L) (1949).
 42 Durand E., Compt. rend., 242, 1862 (1956).
 43 Gautier P., Compt. rend., 245, 45 (1957).
 44 Hofmann H., Acta phys. austriaca, 11, 241 (1957).
 45 Katz R., Parnell D. R., Phys. Rev., 116, 236 (1959).
 46 Dacos E., Bull. Sci. A. I. M., 72, 73 (1959).
 47 Julier J., Onde electrique, 40, 260 (1960).
 48 Bayle D., Compt. rend., 252, 3535 (1961).
 49 Volz H., Phys. Bl., 47, 79 (1961).
 50 Eluser C. J., Roy S. K., Proc. Cambr. Phil. Soc., 58, 401 (1962).
 51 Katz R., Am. Journ. Phys., 30, 41 (1962).
 52 Cabibbo N., Ferrari E., Nuovo cimento, 23, 1147 (1962).
 53 Harrison H. et al., Am. Journ. Phys., 31, 249 (1963).
 54 Lubkin E., Ann. Phys., 23, 233 (1963).
 5 Левашов А. Е., Воронцов В. И., ДАН БССР, 7, № 2 (1963).
 56 Strax N., Am. Journ. Phys., 32, 615 (1964).
 57 Окулов Ю. И., Геомагн. и астрономия, 4, 1002 (1964).
 58 Окулов Ю. И., Геомагн. и астрономия, 4, 1111 (1964).
 59 Томильчик Л. М., ДАН БССР, 8, 379 (1964).
 60 Ferrell R. A., Hopfield J. J., Physics, 1, 1 (1964).
 61 Fierz M., Helv. Phys. Acta, 37, 663 (1964).
 62 Strax N., Am. Journ. Phys., 33, 102 (1965).
 63 Cavalleri G., Nuovo cimento, 35, 1236 (1965).
 64 Goldhaber A. S., Phys. Rev., 140, B1407 (1965) (статья 6 данного сборника).
 65 Eggman W., Proc. IEEE, 53, 1642 (1965).
 66 Katz R., Am. Journ. Phys., 33, 306 (1965).
 67 Дорман Л. И., Окулов Ю. И., Изв. АН СССР, 29, № 10, 1862 (1965).
 68 Schwinger J., Phys. Rev., 144, 1087 (1966) (статья 7 данного сборника).
 69 Rohlich F., Phys. Rev., 150, 1104 (1966).
 70 Jan T. M., Phys. Rev., 150, 1349 (1966).
 71 Schwinger J., Phys. Rev., 151, 1048 (1966).

72. Schwinger J., Phys. Rev., **151**, 1055 (1966).
73. Wentzel G., Progr. Theor. Phys. Suppl., **37—38**, 163 (1966) (статья 8 данного сборника).
74. Дорман Л. И., Окулов Ю. И., Изв. АН СССР, **30**, № 10, 1590 (1966).
75. Тевнякян Р. В., ЖЭТФ, **50**, 911 (1966).
76. Тевнякян Р. В., ЖЭТФ, **51**, № 4 (1966).
77. Peres A., Phys. Rev. Letters, **18**, 50 (1967).
78. Taylor J. G., Phys. Rev. Letters, **18**, 713 (1967).
79. Jan T. M., Phys. Rev., **160**, 1182 (1967).
80. Carstoiu J., Compt. rend., **265**, No. 16, 833 (1967).
81. Дорман Л. И., Окулов Ю. И., Геоматн. и аэрономия, **7**, № 1, 173 (1967).
82. Дорман Л. И., Окулов Ю. И., Геоматн. и аэрономия, **7**, № 2 (1967).
83. Mitchell T. P., Burns J. A., Journ. Math. Phys., **9**, 2016 (1968).
84. Schwinger J., Phys. Rev., **173**, 1536 (1968).
85. Zwanziger D., Phys. Rev., **176**, 1480 (1968).
86. Стражев В. И., Томильчик Л. М., Вестн АН БССР, № 2, 102 (1968).
87. Усачев Ю. Д., Доклад на Всесоюзной межвузовской конференции в г. Ужгороде, октябрь 1968.
88. Peres A., Phys. Rev., **167**, 1449 (1968) (статья 9 данного сборника).
89. Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М., Вестн АН БССР, № 1, 89 (1969).
90. Lipkin H., Weisberger W., Peshkin M., Ann. of Phys., **53**, 203 (1969).
91. Gambelin R. L., Journ. Math. Phys., **10**, 46 (1969).
92. Ruderman M., Zwanziger D., Phys. Rev. Letters, **22**, 146 (1969).
93. Rabi A., Phys. Rev., **179**, 1363 (1969).
94. Ross D. K., Phys. Rev., **181**, 2055 (1969).
95. Домогацкий Г. В., Железных И. М., Ядерная физика, **10**, 1238 (1969).

5. Монополь и принципы симметрии

96. Ramsey N. F., Phys. Rev., **109**, 225 (1958).
97. Snupp P., Proc. IRE, **50**, 2026 (1962).
98. Pintacuda N., Nuovo cimento, **29**, 216 (1963).
99. Томильчик Л. М., ЖЭТФ, **44**, 160 (1963).
100. Schiff L. I., Am. Journ. Phys., **32**, 812 (1964), УФИ, **86**, 756 (1965).
101. Finkelstein R. I., Rev. Mod. Phys., **36**, 632 (1964).
102. Peaney R., Journ. Math. Phys., **5**, 1431 (1964).
103. Sachs M., Am. Journ. Phys., **33**, 103 (1965).
104. Томильчик Л. М., Изв. АН БССР (сер. физ. мат.), № 4 (1965).
105. Zwanziger D., Phys. Rev., **137**, B647 (1965).

- 106 Weinberg S., Phys. Rev., 138, B988 (1965).
- 107 Hagen C. R., Phys. Rev., 140, B804 (1965).
- 108 Rosenbaum D., Phys. Rev., 147, 891 (1966).
- 109 Salam A., Phys. Letters, 22, 683 (1966).
- 110 Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М., Весті АН БССР, № 2, 127 (1968).

6. Кварки и магнитные заряды

111. Carrigan R. A., Nuovo cimento, 39, 638 (1963).
112. Schiff L. I., Phys. Rev. Letters, 17, 714 (1966).
113. Schiff L. I., Phys. Rev., 160, 1257 (1967).

7. Монополи и сверхпроводимость

- 114 Deaver B. S., Fairbank W. M., Phys. Rev. Letters, 7, 43 (1961).
- 115 Tassie L. I., Nuovo cimento, 38, 1935 (1965).
116. Perl J., Elektronics, 39, 12 (1966).

8. Обзоры и популярные статьи

117. Ферми Э., Лекции по атомной физике, ИЛ, 1952.
- 118 Ford K. W., Scientific American, 209, 6 (1963).
119. Devons S., Sci. Progr., 51, 601 (1963) [см перевод: УФИИ, 85, 755 (1965)].
- 120 Alsena F., Acta cient. venezol, 15, 105 (1964).

1. КВАНТОВАННЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

П. А. М. Дирак

P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., A133, 60 (1931)

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Неуклонный прогресс физических наук требует непрерывного развития математики, необходимой для теоретических построений. Это вполне естественно, и этого следует ожидать. Однако ученые прошлого столетия не могли себе представить той конкретной формы, которую примет развитие математики. Предполагалось, что математика будет становиться все более и более сложной, но при этом будет покоряться на некотором неизменном основании, состоящем из аксиом и определений. В действительности же развитие современной физики потребовало такого математического аппарата, который непрерывно расширяет свои основания и становится все более и более абстрактным. Неевклидова геометрия и некоммутативная алгебра, которые одно время считались чистой игрой разума и упражнениями для логических размышлений, теперь оказались необходимыми для описания весьма общих закономерностей физического мира. Похоже, что этот процесс возрастания степени абстракции будет продолжаться и в будущем и что развитие физики следует связывать с непрерывной модификацией и обобщением аксиом, лежащих в основе математики, а не с логическим развитием какой бы то ни было математической схемы, построенной на фиксированном основании.

Сейчас в теоретической физике существуют фундаментальные проблемы, ожидающие своего решения, например релятивистская формулировка квантовой механики или природа атомных ядер (за которыми следуют более трудные проблемы, такие, как проблема жизни). Решение этих проблем потребует более основательного пересмотра наших основных представлений, чем все про-

веденные ранее. Изменения могут оказаться столь большими, что человеческое сознание окажется не в силах выработать необходимые новые идеи с помощью прямых попыток сформулировать данные опыта в виде математических соотношений. Поэтому теоретик будущего воспользуется более косвенным путем. Наиболее действенный способ продвижения вперед, который можно предложить в настоящее время, заключается в том, чтобы, используя все возможности чистой математики, попытаться усовершенствовать и обобщить математический формализм, лежащий в основе современной теоретической физики, а затем, *после* каждого успеха в этом направлении, попробовать истолковать новые математические результаты с помощью физических понятий (этот процесс аналогичен предложенному Эддингтоном принципу отождествления).

Недавняя работа автора [1] может рассматриваться с точки зрения этой общей схемы продвижения как небольшой шаг вперед. Ко времени написания этой работы математический формализм приводил к серьезному затруднению, так как давал отрицательные значения кинетической энергии электрона. Было предложено преодолеть это затруднение, используя принцип исключения Паули, по которому в каждом квантовом состоянии не может находиться более одного электрона, и утверждая, что в физическом мире почти все состояния с отрицательной энергией уже заняты, так что обычные электроны, имеющие положительную энергию, не могут упасть в эти состояния. Возникает вопрос, как физически интерпретировать состояния с отрицательной энергией, которые, согласно высказанной точке зрения, реально существуют. Следует ожидать, что равномерно заполненное распределение уровней с отрицательной энергией является для нас полностью ненаблюдаемым, но если один из этих уровней в виде исключения свободен, то мы получаем нечто вроде дырки, которую мы можем наблюдать. Было показано, что такая дырка будет вести себя как частица с положительной энергией и положительным зарядом, и эту частицу было предложено отождествить с протоном. Однако последующие исследования показали, что эта частица с необходимостью имеет ту же

массу, что и электрон [2], и что, кроме того, если она сталкивается с электроном, то имеется вероятность аннигиляции этих двух частиц, слишком большая, чтобы можно было согласовать этот результат с известной стабильностью материи [3].

Поэтому мы должны отказаться от отождествления дырок с протонами и должны искать для дырок другое истолкование. Следуя Оппенгеймеру [4], мы можем предположить, что в известном нам мире *все*, а не почти все, состояния электронов с отрицательной энергией заняты. Дырка, если бы она существовала, была бы частицей нового сорта, не известной в экспериментальной физике, поскольку у этой частицы была бы масса электрона, а заряд противоположного знака. Мы можем назвать эту частицу антиэлектроном. Поскольку анигэлектроны быстро аннигилируют с электронами, не следует ожидать, что любую такую частицу легко обнаружить, но если эти частицы создавать экспериментально в высоком вакууме, они будут достаточно стабильны и их можно будет наблюдать. Столкновение двух жестких γ -квантов (с энергией по меньшей мере по полмиллиона вольт) может вести к одновременному рождению электрона и антиэлектрона. Вероятность этого процесса имеет тот же порядок величины, что и вероятность столкновения двух γ -квантов, если эти γ -кванты считать сферами, радиус которых равен классическому радиусу электрона. Однако при достижимых в настоящее время значениях интенсивности γ -лучей эта вероятность пренебрежимо мала¹⁾.

По высказанной точке зрения протоны никак не связаны с электронами. Можно предположить, что протоны имеют свои собственные состояния с отрицательной энергией, которые обычно все заполнены. Незаполненное состояние с отрицательной энергией будет эквивалентно антипротону. Теоретически совершенно непонятно, почему должна существовать какая-либо разница между случаем протонов и случаем электронов.

¹⁾ В 1931 г. античастицы — позитрон (который в статье называется антиэлектроном) и антипротон, о котором речь пойдет ниже, — еще не были открыты. — *Прим. ред.*

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы выдвигать новую идею, которую во многих отношениях можно сопоставить с идеей об отрицательных энергиях. Она не относится к электронам и протонам, а касается причины существования наименьшего электрического заряда. Этот наименьший заряд известен экспериментально и имеет величину e , приближенно определяемую соотношением

$$\frac{\hbar c}{e^2} = 137. \quad (1)$$

На первый взгляд кажется, что развиваемая в этой статье теория дает теоретическое значение заряда e , однако на самом деле она дает связь между наименьшим электрическим зарядом и наименьшим магнитным полюсом. В действительности она демонстрирует симметрию между электричеством и магнетизмом, весьма чуждую распространенным в настоящее время взглядам. Однако теория не приводит к полной симметрии, аналогично тому как по интерпретации Оппенгеймера симметрия между электронами и протонами также отсутствует. Без этой симметрии отношение в левой части (1) остается с теоретической точки зрения полностью неопределенным; если в нашу теорию ввести экспериментальное значение 137, то оно приводит к столь большому количественному различию между электрическими и магнитными зарядами, что можно понять, почему их качественное подобие до сих пор не было обнаружено экспериментально.

§ 2. НЕИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФАЗЫ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим частицу, движение которой представляется волновой функцией ψ , зависящей от x , y , z и t . Как точная форма волнового уравнения, так и то, является ли оно релятивистским или нет, не существенны для настоящей теории. Запишем ψ в форме

$$\psi = A e^{i\gamma}, \quad (2)$$

где A и γ — действительные функции x , y , z и t , обозначающие амплитуду и фазу волновой функции. Для данного состояния движения частицы ψ определяется

с точностью до произвольного постоянного численного множителя, который по модулю должен быть равен единице, если предполагается выполненным условие нормированности ψ . Неопределенность ψ состоит тогда в возможности добавления произвольной константы к фазе γ . Таким образом, величина γ в отдельной точке не имеет физического смысла и важна лишь разность между значениями γ в двух различных точках.

Это немедленно подсказывает обобщение данного формализма. Мы можем предположить, что в отдельной точке γ не имеет определенного значения, а определена лишь разность значений для любых двух точек. Мы можем пойти дальше и предположить, что эта разность не определена, если обе точки не соседние. Тогда для двух отдаленных точек будет существовать определенная разность фаз только по отношению к некоторой кривой, соединяющей их, и разные кривые в общем случае будут давать различные разности фаз. Полное изменение фазы при обходе по замкнутой кривой не должно быть равно нулю.

Исследуем необходимое условие для этой неинтегрируемости фазы, а именно условие отсутствия неоднозначностей в приложениях теории. Если умножить ψ на комплексно-сопряженную ей функцию φ , то получается плотность вероятности, которая имеет прямой физический смысл. Эта плотность не зависит от фазы волновой функции, так что в этом случае не возникает никаких затруднений в связи с любой неопределенностью фазы. Однако существуют и другие приложения более общего типа, которые также необходимо рассмотреть. Если взять две различные волновые функции ψ_m и ψ_n , то можно образовать произведение $\varphi_m \psi_n$. Интеграл

$$\int \varphi_m \psi_n dx dy dz$$

является числом, квадрат модуля которого имеет физический смысл, а именно представляет собой вероятность перехода между двумя состояниями. Для того чтобы интеграл мог иметь определенный модуль, подынтегральное выражение, хотя оно и не обязательно должно обладать определенной фазой в каждой точке, должно иметь

определенную разность фаз между любыми двумя точками, как соседними, так и удаленными. Таким образом, и меншие фазы φ , ψ_n при обходе по замкнутой кривой должно быть равно нулю. Для этого необходимо, чтобы изменение фазы ψ_n при обходе по замкнутой кривой было равно и противоположно изменению фазы φ_m и, следовательно, было тем же самым, что и для ψ_m . Таким образом, мы получаем общий результат: *изменение фазы волновой функции при обходе по любой замкнутой кривой должно быть одинаковым для всех волновых функций*

Легко видеть, что сказанное выше необходимо распространить на функции преобразования¹⁾ и матрицы, представляющие наблюдаемые (в представлении, в котором x , y и z диагональны), что приводит для них к такому же неопределенности фазы, как и для волновых функций. Сформулированное выше условие является достаточным для того, чтобы неинтегрируемость фазы не приводила к неоднозначности во всех приложениях теории. Каждый раз, когда появляется волновая функция ψ , если она не умножается на φ_m , то она, во всяком случае, умножается на какую-то функцию, природа которой подобна φ_m . Это приводит к уничтожению неопределенности фазы, за исключением константы, которая не существенна. Например, если нужно преобразовать ψ_n в другое представление, в котором, скажем, диагональна переменная ξ , то необходимо умножить ψ_n на функцию преобразования $(\xi \ x y z)$ и проинтегрировать по x , y , z . Эта функция преобразования будет иметь ту же самую неопределенность фазы, что и φ , так что преобразованная волновая функция будет обладать определенной фазой, если не считать константы, не зависящей от ξ . С другой стороны, если умножить ψ_n на матрицу $(x' y' z' t \propto x'' y'' z'' t)$, представляющую наблюдаемую α , то неопределенность фазы, относящаяся к столбцу (обозначенному посредством x'' , y'' , z'' , t), будет погашать неопределенность в ψ_n , а неопределенность, относящаяся к строке, сохранится и приведет к необходимой неопреде-

¹⁾ См. П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960, стр. 114. — Прим. ред.

ленности фазы новой волновой функции $\alpha\psi$. Принцип суперпозиции для волновых функций будет рассмотрен несколько ниже, и когда этот пункт будет обоснован, это завершит доказательство того, что все основные операции квантовой механики могут быть выполнены точно так, как если бы неопределенность фазы вообще не существовала.

Полученный выше результат, согласно которому изменение фазы на замкнутой кривой должно быть одинаковым для всех волновых функций, означает, что это изменение фазы должно быть величиной, определяемой самой динамической системой (и, возможно, также отчасти представлением), и не должно зависеть от того, какое состояние системы рассматривается. Поскольку наша динамическая система является лишь простой частицей, неинтегрируемость фазы, по-видимому, должна быть связана с силовым полем, в котором движется частица.

Для математического рассмотрения вопроса мы выразим ψ в более общей, чем в (2), форме в виде произведения

$$\psi = \psi_1 e^{i\beta}, \quad (3)$$

где ψ_1 — любая обычная волновая функция (т. е. волновая функция с определенной фазой в каждой точке), модуль которой повсюду равен модулю ψ . Таким образом, неопределенность фазы представлена множителем $e^{i\beta}$. Отсюда возникает требование, чтобы фаза β была функцией x, y, z и t , не обладающей определенной величиной в каждой точке, однако β должна иметь определенные производные

$$\kappa_x = \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \kappa_z = \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \kappa_0 = \frac{\partial \beta}{\partial t}$$

в каждой точке, которые в общем не удовлетворяют условиям интегрируемости $d\kappa_x/dy = d\kappa_y/dx$ и т. д. Согласно теореме Стокса, изменение фазы при обходе по замкнутой кривой будет теперь равно

$$\int (\kappa, ds) = \int (\text{rot } \kappa, dS), \quad (4)$$

где ds (4-вектор) — векторный элемент замкнутой кривой, а dS (6-вектор) — векторный элемент двумерной поверхности, границей которой служит эта замкнутая кривая. Множитель ψ_1 вообще не участвует в этом изменении фазы.

Теперь становится ясно, что неинтегрируемость фазы полностью совместима с принципом суперпозиции. Более точно можно сказать, что если две волновые функции ψ_m и ψ_n изменяют свои фазы одинаковым образом при обходе по произвольной замкнутой кривой, то и любая их линейная комбинация $c_1 \psi_m + c_2 \psi_n$ также должна изменять фазу на каждой замкнутой кривой точно таким же образом. Это следует из того, что ψ_m и ψ_n обе представимы в форме (3) с одним и тем же множителем $e^{i\beta}$ (т. е. с теми же самыми κ), но с различными ψ_1 , так что их линейная комбинация выражается в такой же форме с тем же множителем $e^{i\beta}$, который определяет изменение фазы на замкнутой кривой. Мы могли бы использовать один и тот же множитель $e^{i\beta}$ в (3) для всех волновых функций системы, однако мы не обязаны поступать таким образом, потому что фиксирован только $\text{rot } \kappa$ и для различных волновых функций можно использовать векторы κ , отличающиеся друг от друга на градиент скаляра.

Из (3) имеем

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = e^{i\beta} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \hbar \kappa_x \right) \psi_1 \quad (5)$$

и подобные же соотношения для производных по y , z и t . Отсюда следует, что если ψ удовлетворяет какому-либо волновому уравнению, содержащему операторы импульсов и энергии $\mathbf{p}$ и W , то ψ_1 будет удовлетворять соответствующему волновому уравнению, в котором $\mathbf{p}$ и W заменены соответственно на $\mathbf{p} + \hbar \boldsymbol{\kappa}$ и $W - \hbar \kappa_0$.

Предположим, что ψ удовлетворяет обычному волновому уравнению для свободной частицы, т. е. в отсутствие каких-либо полей. Тогда ψ_1 будет удовлетворять обычному волновому уравнению для частицы с зарядом $-e$, движущейся в электромагнитном поле, описываемом потенциалом

$$\mathbf{A} = \frac{\hbar c}{e} \boldsymbol{\kappa}, \quad A_0 = -\frac{\hbar}{e} \kappa_0. \quad (6)$$

Таким образом, поскольку ψ — обычная волновая функция с определенной фазой, наша теория совпадает с обычной теорией движения электрона в электромагнитном поле. Это проясняет физический смысл неинтегрируемости фазы. Мы видим, что волновая функция ψ всегда должна удовлетворять одному и тому же волновому уравнению, независимо от того, существует поле или нет, а весь эффект поля, когда оно существует, состоит в том, что фаза становится неинтегрируемой.

Компоненты 6-вектора $\text{rot } \kappa$, входящего в (4), с точностью до численного коэффициента равны компонентам электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В трехмерных обозначениях они записываются в виде

$$\text{rot } \kappa = \frac{e}{\hbar c} \mathbf{H}, \quad \text{grad } \kappa_0 - \frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{e}{\hbar} \mathbf{E}. \quad (7)$$

Связь между неинтегрируемостью фазы и электромагнитным полем, рассмотренная в этом параграфе, не нова; по существу она выражает вейлевский принцип градиентной инвариантности в его современной форме [5]. Она содержится также в работе Иваненко и Фока [6, 7], которые рассмотрели неинтегрируемость более общего типа¹⁾, основанную на общей теории параллельного переноса полувекторов²⁾. Настоящее рассмотрение приведено для того, чтобы подчеркнуть, что неинтегрируемость фаз полностью совместима со всеми общими принципами квантовой механики и никоим образом не ограничивает их физической интерпретации.

§ 3. УЗЛОВЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ

Мы уже видели в предыдущем параграфе, как непрерывные производные κ фазы волновой функции получают естественную интерпретацию с помощью потенциалов электромагнитного поля. Вследствие этого наша теория становится математически эквивалентной

¹⁾ Неинтегрируемость более общего типа, рассмотренная этими авторами, по-видимому, не имеет каких либо физических приложений.

²⁾ Этот термин Дирак употребляет вместо принятого сейчас термина «спинор». — *Прим. ред.*

обычной теории движения электрона в электромагнитном поле и не дает ничего нового. Однако существует еще один факт, который теперь необходимо принять в расчет, а именно фаза всегда определена лишь с точностью до произведения произвольного целого множителя на 2π . Это обстоятельство требует пересмотра связи χ с потенциалами и приводит к новому физическому явлению.

Условие однозначности физической интерпретации теории состояло в том, что изменение фазы при обходе по замкнутой кривой должно быть одним и тем же для всех волновых функций. Это изменение было затем интерпретировано с помощью уравнений (4) и (7) как равное (с точностью до численных множителей) полному потоку $\mathbf{b}$ -вектора $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, описывающего электромагнитное поле, через поверхность, опирающуюся на замкнутую кривую. Очевидно, эти условия должны быть теперь ослаблены. Изменение фазы при обходе по замкнутой кривой может быть различным для разных волновых функций и может отличаться на число, кратное 2π . Подобного рода изменение фазы недостаточно определено, для того чтобы его можно было непосредственно интерпретировать с помощью электромагнитного поля.

Чтобы исследовать этот вопрос, рассмотрим сначала очень малую замкнутую кривую. Волновая функция, удовлетворяющая волновому уравнению, должна быть непрерывной (исключая очень специальные случаи, которые здесь можно не рассматривать), и, следовательно, изменение фазы при обходе по малой замкнутой кривой должно быть малым. Таким образом, это изменение не может теперь отличаться на число, кратное 2π , для различных волновых функций. Оно должно иметь одно определенное значение и поэтому может интерпретироваться однозначно как поток $\mathbf{b}$ -вектора $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ через поверхность, натянутую на малую замкнутую кривую, причем этот поток также должен быть малым.

Существует, однако, исключительный случай, когда волновая функция становится равной нулю и ее фаза в связи с этим теряет смысл. Поскольку волновая функция комплексна, ее обращение в нуль осуществляется при выполнении двух условий, так что в общем случае точки, в которых она исчезает, расположены на некоторой

линии¹⁾. Такую линию мы назовем *узловой линией*. Рассмотрим теперь волновую функцию, обладающую узловой линией, которая проходит через поверхность, натянутую на нашу малую замкнутую кривую. Теперь привлечение соображения о непрерывности не дает возможности сделать заключение о малости изменения фазы при обходе по малой замкнутой кривой. Мы можем лишь сказать, что изменение фазы будет близко к величине $2\pi n$, где n — некоторое целое число, положительное или отрицательное. Это целое число характеристика узловой линии. Знак его связан с направлением обхода вокруг узловой линии, которое в свою очередь может быть связано с направлением вдоль узловой линии.

Разность между изменением фазы при обходе по малой замкнутой кривой и ближайшим числом $2\pi n$ должна быть теперь такой же, как и изменение фазы при обходе по замкнутой кривой для волновой функции, у которой отсутствует узловая линия, проходящая через поверхность, натянутую на замкнутую кривую. Поэтому эта разность такова, что она должна интерпретироваться в виде потока 6-вектора $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ через поверхность, натянутую на замкнутую кривую. Для замкнутой кривой в трехмерном пространстве будет играть роль только магнитный поток, и, следовательно, для изменения фазы при обходе по малой замкнутой кривой мы получаем

$$2\pi n + \frac{e}{hc} \int (\mathbf{H}, d\mathbf{S}).$$

Мы можем теперь рассмотреть большую замкнутую кривую, заменив ее сеткой из малых замкнутых кривых, лежащих на поверхности, границей которой является большая замкнутая кривая. Полное изменение фазы при обходе по большой замкнутой кривой будет равно сумме всех изменений фаз для малых замкнутых кривых n ,

¹⁾ Для простоты мы рассматриваем здесь волновую функцию в трехмерном пространстве. Переход к четырем измерениям не вносит существенных изменений в теорию. Узловые линии тогда становятся двумерными узловыми поверхностями, которые могут быть окружены кривыми точно таким же образом, как и линии в трехмерном пространстве.

содовательно, будет равно

$$2\pi\Sigma n - \frac{e}{\hbar c} \int (\mathbf{H}, d\mathbf{S}), \quad (8)$$

где интегрирование проводится по поверхности, а суммирование по всем узловым линиям, проходящим через нее, причем каждый член в сумме имеет соответствующий знак. Это выражение состоит из двух частей части $(e/\hbar c) \int (\mathbf{H}, d\mathbf{S})$, которая одинакова для всех волновых функций, и части $2\pi\Sigma n$, различной для разных волновых функций.

Выражение (8), примененное к любой поверхности, описывает изменение фазы при обходе по границе поверхности. Следовательно, если вычислить выражение (8) для замкнутой поверхности, то оно обратится в нуль. Отсюда следует, что величина Σn , просуммированная по всем узловым линиям, пересекающим замкнутую поверхность, должна быть одинаковой для всех волновых функций и равной произведению $e/2\pi\hbar c$ на полный магнитный поток, проходящий через поверхность.

Если Σn не равно нулю, то некоторое количество узловых линий имеет конечные точки внутри замкнутой поверхности, поскольку узловая линия, не имеющая таких конечных точек, должна пересекать поверхность по крайней мере дважды и вносить в этих двух точках пересечения равные и противоположные по знаку вклады в Σn . Таким образом, для замкнутой поверхности значение Σn будет равно сумме значений n для всех узловых линий, имеющих конечные точки внутри поверхности. Эта сумма должна быть одинаковой для всех волновых функций. Поскольку этот результат применим к любой замкнутой поверхности, отсюда следует, что конечные точки узловых линий должны быть одними и теми же для всех волновых функций. Поэтому эти конечные точки являются сингулярными точками электромагнитного поля. Полный поток магнитного поля, пересекающий малую замкнутую поверхность, окружающую одну из таких точек, равен

$$4\pi e - 2\pi n \frac{\hbar c}{e},$$

где n — характеристика узловой линии, которая оканчивается там, или сумма характеристик всех узловых линий, оканчивающихся внутри поверхности, если их более чем одна. Таким образом, в конечной точке существует магнитный полюс с зарядом

$$\mu = \frac{1}{2} n \frac{\hbar c}{e}.$$

Наша теория допускает, таким образом, существование изолированных магнитных полюсов, однако заряд такого полюса должен быть квантован; квант магнитного заряда μ_0 связан с зарядом электрона e соотношением

$$\frac{\hbar c}{e\mu_0} = 2. \quad (9)$$

Это соотношение следует сравнить с соотношением (1). Теория требует квантования также и электрического заряда, так как любая заряженная частица, движущаяся в поле полюса с зарядом μ_0 , должна обладать зарядом, равным некоторому целому числу (положительному или отрицательному) зарядов e , для того чтобы могла существовать волновая функция, описывающая движение.

§ 4. ЭЛЕКТРОН В ПОЛЕ ЕДИНИЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЮСА

Волновые функции, рассмотренные в предыдущем параграфе, которые имеют узловые линии, оканчивающиеся в магнитном полюсе, вполне приемлемы и доступны для аналитического рассмотрения с помощью методов, параллельных обычным методам квантовой механики. Читателю, вероятно, поможет согласиться с этим простой пример, рассмотренный более подробно.

Рассмотрим движение электрона в магнитном поле единичного полюса μ_0 в случае, когда электрическое поле отсутствует. Описание проведем в полярных координатах r, θ, φ , помещая магнитный полюс в начало координат. Каждая волновая функция должна иметь теперь узловую линию, исходящую из начала координат.

Выразим нашу волновую функцию ψ в форме (3), где β — некоторая неинтегрируемая фаза, имеющая производные κ , которые связаны с известным электромагнитным полем соотношениями (6). Однако невозможно получить производные κ , удовлетворяющие этим соотношениям повсюду вокруг магнитного полюса. Должна существовать некоторая сингулярная линия, исходящая из полюса, вдоль которой эти соотношения не удовлетворяются, но эта линия может быть выбрана произвольно. Мы можем выбрать ее совпадающей с узловой линией для рассматриваемой волновой функции, что означало бы, что ψ непрерывна. Однако этот выбор приводил бы к различным κ для разных волновых функций (разность между любыми двумя κ была бы, конечно, четырехмерным градиентом скаляра повсюду, кроме сингулярной линии). Это было бы, вероятно, неудобно и в действительности не необходимо. Мы можем выразить все волновые функции в форме (3) с одним и тем же множителем $e^{i\beta}$. Тогда те волновые функции, у которых узловые линии не совпадают с сингулярной линией для производных κ , будут иметь функции ψ_1 с определенным видом разрывности на сингулярной линии, а именно таким, что эта разрывность точно погашается разрывностью множителя $e^{i\beta}$ и в результате получается непрерывное произведение.

Магнитное поле $\mathbf{H}$ направлено вдоль радиуса и имеет величину μ_0/r^2 , что, согласно (9), равно $\hbar c/2er^2$. Следовательно, в соответствии с уравнениями (7) $\text{rot } \kappa$ направлен по радиусу и имеет величину $1/2r^2$. Легко удостовериться в том, что решение всей системы уравнений (7) записывается в виде

$$\kappa_0 = 0, \quad \kappa_r = \kappa_\theta = 0, \quad \kappa_\varphi = \frac{1}{2r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (10)$$

где κ_r , κ_θ , κ_φ — компоненты κ в полярной системе координат. Это решение справедливо повсюду, кроме линии $\theta = \pi$, где κ_φ становится бесконечным таким образом, что криволинейный интеграл $\int (\kappa, ds)$ по малому замкнутому контуру, окружающему линию, равен 2π . Мы можем связать все наши волновые функции с этим рядом значений κ .

Рассмотрим стационарное состояние электрона с энергией W . Записанное в нерелятивистской форме волновое уравнение имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = W \psi.$$

Если мы применим правило, выраженное с помощью уравнения (5), то получим волновое уравнение для ψ_1

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \{ \nabla^2 + i(\kappa, \nabla) + i(\nabla, \kappa) - \kappa^2 \} \psi_1 = W \psi_1. \quad (11)$$

Значения (10) для κ дают

$$\begin{aligned} (\kappa, \nabla) = (\nabla, \kappa) &= \kappa_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{4r^2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \kappa^2 &= \kappa_\varphi^2 = \frac{1}{4r^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

так что уравнение (11) приводится к виду

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \nabla^2 - \frac{i}{2r^2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{4r^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right\} \psi_1 = W \psi_1.$$

Предположим теперь, что ψ_1 имеет форму произведения функции f , зависящей только от радиуса r , на функцию S , зависящую только от θ и φ , т. е.

$$\psi_1 = f(r) S(\theta, \varphi).$$

Это приводит к уравнениям

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r^2} \right\} f = -\frac{2mW}{\hbar^2} f, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right\} S = -\lambda S, \quad (13) \end{aligned}$$

где λ — некоторое число.

Из уравнения (12) видно, что для электрона, находящегося в поле магнитного полюса, стабильные состояния отсутствуют, так как оператор в левой части не содержит константы с размерностью длины. Этот результат именно такой, какого можно было бы ожидать из аналогии с классической теорией. Уравнение (13) опреде-

ляет зависимость волновой функции от угла. Оно может рассматриваться как обобщение обычного уравнения для сферических гармоник.

Наинизшее собственное значение в уравнении (13) $\lambda = 1/2$; этому значению соответствуют две независимые волновые функции

$$S_a = \cos \frac{\theta}{2}, \quad S_b = \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi},$$

в чем легко удостовериться прямой подстановкой. Узловая линия для S_a есть $\theta = \pi$, а для S_b она будет $\theta = 0$. Следует иметь в виду, что S_a непрерывна повсюду, тогда как S_b разрывна на линии $\theta = \pi$ и ее фаза изменяется на 2π при обходе по малому замкнутому контуру, окружающему линию $\theta = \pi$. Это как раз и необходимо для того, чтобы обе функции S_a и S_b , будучи умножены на множитель $e^{i\varphi}$, могли дать непрерывную волновую функцию ψ . Две волновые функции ψ , получаемые таким образом, приемлемы на одинаковом основании, а различие в поведении S_a и S_b обусловлено нашим выбором κ с сингулярностью при $\theta = \pi$.

Общее выражение для собственного значения λ в уравнении (13) имеет вид $\lambda = n^2 + 2n + 1/2$. Общее решение этого волнового уравнения было найдено И. Таммом [8].

§ 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Элементарная классическая теория позволяет нам сформулировать уравнения движения для электрона в поле, порождаемом произвольным распределением электрических зарядов и магнитных полюсов. Однако, если мы пожелаем представить уравнения движения в гамильтоновской форме, нам необходимо ввести электромагнитные потенциалы, а это возможно только при отсутствии изолированных магнитных полюсов. Квантовая механика в своей обычной форме получается из гамильтоновской формы классической теории и поэтому применима только в случае отсутствия изолированных магнитных полюсов.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы показать, что квантовая механика в действительности не

противоречит существованию изолированных магнитных полюсов. Напротив, существующий формализм квантовой механики, развитый естественным образом без наложения произвольных ограничений, неизбежно приводит к волновым уравнениям, которые имеют единственную физическую интерпретацию — движение электрона в поле одиночного магнитного полюса. Это новое развитие теории *не требует* какого-либо изменения формализма, если использовать абстрактные символы, обозначающие состояния и наблюдаемые, и является просто обобщением тех возможностей, которые дает представление этих абстрактных символов волновыми функциями и матрицами. С этой точки зрения было бы удивительно, если бы Природа не использовала этой возможности.

Теория приводит к связи между квантом магнитного полюса и электронным зарядом, устанавливаемой соотношением (9). Обнаружение подобной взаимности между электричеством и магнетизмом вместо чисто электронного квантового условия, подобного соотношению (1), вызывает некоторое разочарование. Однако, по-видимому, не существует возможностей для модификации теории, так как она не содержит произвольных характеристик. Таким образом, объяснение соотношения (1), вероятно, потребует некоторых совершенно новых идей.

Существует полная теоретическая взаимность между электричеством и магнетизмом. Вместо того чтобы рассматривать движение электрона в поле фиксированного магнитного полюса, как это сделано в § 4, мы могли бы одинаково успешно рассмотреть движение полюса в поле фиксированного заряда. Это потребовало бы введения электромагнитного потенциала $\mathbf{V}$, связанного с полями соотношениями

$$\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{V}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad } B_0,$$

чтобы использовать его вместо $\mathbf{A}$ в уравнениях (6). Теория развивалась бы вполне параллельно и привела бы к тому же условию (9), связывающему наименьший магнитный заряд с наименьшим электрическим зарядом.

Остается рассмотреть вопрос, почему не наблюдаются изолированные магнитные полюсы. Эксперименталь-

ный результат (1) показывает, что должна существовать какая-то причина различия между электричеством и магнетизмом (возможно, связанная с причиной различия между электронами и протонами), в результате которой мы имеем соотношение $\mu_0 = (137/2)e$, а не соотношение $\mu_0 = e$. Это означает, что сила притяжения между двумя одиночными полюсами противоположного знака в $(137/2)^2 = 4692 \frac{1}{4}$ раза больше, чем между электроном и протоном. Такая большая сила притяжения, возможно, объясняет, почему полюсы противоположного знака никогда еще не были разделены.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A126, 360 (1930).
- 2 Weyl H., Gruppentheorie und Quantenmechanic, 1931, S. 234.
- 3 Тамм И. Е., Zs. Phys., 62, 545 (1930); Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 35, 939 (1930); Dirac P. A. M., Proc. Camb. Phil. Soc., 26, 361 (1930).
- 4 Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 35, 562 (1930).
- 5 Weyl H., Zs. Phys., 56, 330 (1929).
- 6 Иваненко Д. Д., Фок В. А., Compt. rend., 188, 1470 (1929).
- 7 Фок В. А., Zs. Phys., 57, 261 (1929).
- 8 Тамм И. Е., Zs. Phys., 62, 545 (1930).

2. ТЕОРИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЮСОВ

П. А. М. Дирак

P. A. M. Dirac, Phys. Rev., 74, 817 (1948)

Если предположить, что может существовать частица с одиночным магнитным полюсом и что она взаимодействует с заряженными частицами¹⁾, то законы квантовой механики приводят к требованию квантования электрических зарядов — все заряды должны быть кратными единичному заряду e , связанному с величиной полюса g соотношением $eg = 1/2\hbar c$. Поскольку известно, что электрические заряды квантованы, и пока не предложено другого объяснения этого факта, кроме существования магнитных полюсов, мы имеем основание серьезно рассматривать возможность существования магнитных полюсов. Тот факт, что они еще не наблюдались, может быть приписан большой величине одиночного магнитного полюса.

В 1931 г. я развил простую теорию, описывающую движение полюса в поле заряженной частицы, движение которой задано, или движение заряженной частицы в поле полюса, движение которого задано. В настоящей статье предлагается общая теория заряженных частиц и полюсов, взаимодействующих друг с другом через посредство электромагнитного поля. Представление, которое делает возможным это обобщение, состоит в предположении, что каждый полюс находится на конце ненаблюдаемой нити, являющейся линией, вдоль которой электромагнитные потенциалы сингулярны, а также во введении динамических координат и импульсов для описания движения нитей. Полная теория получается затем применением обычных методов. Существуют неразрешенные трудности, касающиеся взаимодействия точечного заряда или точечного полюса с полем, порождаемым им самим; эти трудности встречаются во всех динамических теориях полей и частиц, взаимодействующих друг с другом.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения электродинамики симметричны относительно напряженностей электрического и магнитного полей. Однако симметрия между электричеством и магне-

¹⁾ Здесь и в дальнейшем под заряженной частицей понимается частица, несущая электрический заряд. — *Прим. ред.*

тизмом нарушается тем фактом, что частица может иметь одиночный электрический заряд, тогда как одиночный магнитный полюс у частицы еще не наблюдался. В настоящей статье развивается теория, в которой частица может обладать одиночным магнитным полюсом, а несимметрия между электричеством и магнетизмом состоит только в том, что величина наименьшего полюса, который может встретиться, много больше величины наименьшего заряда. Вследствие этого для рождения частицы с одиночным полюсом необходима огромная энергия; это обстоятельство вполне может объяснять тот факт, что такие частицы до настоящего времени не наблюдались¹⁾.

В экспериментальной физике имеется несколько типов частиц, для которых еще отсутствует удовлетворительная теория. Естественно поэтому сомневаться, стоит ли вводить совершенно новый тип частиц, которые экспериментально не обнаружены, и, таким образом, вносить дальнейшее усложнение в изучение элементарных частиц. Интерес теории магнитных полюсов состоит в том, что она дает возможность естественного обобщения обычной электродинамики и *приводит к квантованию электрического заряда*. Для взаимодействия полюса величины g с электрическим зарядом e непротиворечивые квантовомеханические уравнения получаются только при условии, что

$$eg = \frac{1}{2} n \hbar c, \quad (1)$$

где n — целое число. Таким образом, одно лишь существование полюса величины g потребовало бы квантования всех электрических зарядов в единицах $\frac{1}{2} \hbar c g$; подобным же образом одно существование заряда потребовало бы квантования всех полюсов. Квантование электрического заряда является одной из наиболее фундаментальных и поразительных особенностей атомной

¹⁾ Эренхафт [1] получил некоторые экспериментальные результаты, которые он интерпретировал с помощью частиц, несущих одиночный магнитный полюс. Это не подтверждает настоящую теорию, так как Эренхафт не использовал больших энергий, а теория не приводит к возможности наблюдения о многочных магнитных полюсов в условиях эксперимента Эренхафта.

физики, и этот факт, по-видимому, не находит объяснения вне рамок теории полюсов. Это дает некоторые основания для веры в существование магнитных полюсов.

Впервые я выдвинул идею о магнитных полюсах в 1931 г. [2]. Теория, которую я предложил, была очень неполной, так как она устанавливала только уравнения движения магнитного полюса в поле заряженных частиц, движение которых задано, или же уравнения движения заряженной частицы в поле магнитных полюсов, движение которых задано. Настоящее развитие теории дает в согласии с квантовой механикой все уравнения движения для магнитных полюсов и заряженных частиц, взаимодействующих друг с другом через посредство электромагнитного поля. Эта теория является полной динамической теорией, если не считать обычных трудностей, связанных с появлением расходящихся интегралов при решении волнового уравнения. Указанные трудности возникают при учете действия на частицу поля, порождаемого ею самой; в настоящей теории они имеют ту же природу, что и в обычной электродинамике.

§ 2. КЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Мы будем придерживаться повсюду релятивистских обозначений, используя четыре координаты x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) для фиксирования точки в пространстве — времени; скорость света положим равной единице. Электромагнитное поле в произвольной точке образует 6-вектор $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. В дальнейшем мы встретимся с необходимостью использовать обозначения для 6-вектора $(F^+)_{\mu\nu}$, дуального 6-вектору $F_{\mu\nu}$ и определяемого соотношениями

$$(F^+)_{01} = F_{23}, \quad (F^+)_{23} = -F_{01}$$

и другими соотношениями, получаемыми из предыдущих с помощью циклической перестановки индексов 1, 2, 3. Заметим, что

$$(F^{++})_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}, \quad (2)$$

а для любого другого 6-вектора $G_{\mu\nu}$ имеет место соотношение

$$(F^+)_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} (G^+)^{\mu\nu}.$$

Обычные уравнения Максвелла записываются в виде

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -4\pi j_\mu, \quad (3)$$

где j_μ — вектор, образованный из плотности заряда и тока, и

$$\frac{\partial (F^\dagger)_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (4)$$

Из уравнений (4) следует, что дивергенция магнитного поoka равна нулю. Поэтому в теории, допускающей существование одиночных магнитных полюсов, уравнения (4) должны быть модифицированы. Плотность полюсов и их ток будут образовывать вектор k_μ , являющийся магнитным аналогом j_μ , а уравнения (4) должны быть заменены уравнениями

$$\frac{\partial (F^\dagger)_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -4\pi k_\mu. \quad (4')$$

Мировая линия частицы может быть задана четырьмя координатами z_μ точки на ней, являющимися функциями собственного времени s , измеренного вдоль линии.

$$z_\mu = z_\mu(s).$$

Частица с точечным зарядом e описывается током j_μ , который бесконечен на мировой линии и равен нулю повсюду, кроме нее. Мы можем выразить это с помощью δ -функции, записав 4-вектор тока в произвольной точке x в виде

$$j_\mu(x) = \sum_e e \int \left(\frac{dz_\mu}{ds} \right) \delta_4(x - z) ds, \quad (5)$$

где функция δ_4 определена следующим образом:

$$\delta_4(x) = \delta(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3),$$

а $\sum_\bullet$ обозначает сумму по всем заряженным частицам.

Подобным же образом, если полюсы g являются точечными, то

$$k_\mu(x) = \sum_g g \int \left(\frac{dz_\mu}{ds} \right) \delta_1(x-z) ds, \quad (6)$$

где $\sum_g$ обозначает сумму по всем частицам с полюсами. Уравнения (3), (4'), (5) и (6) определяют поле, если задано движение частиц и известны свободные поля.

Движение заряженной частицы описывается уравнением Лоренца

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \frac{dz^\nu}{ds} F_{\mu\nu}(z).$$

Для движения полюса мы можем постулировать аналогичное уравнение

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = g \frac{dz^\nu}{ds} (F)_{\mu\nu}(z). \quad (7)$$

Встречающиеся здесь полевые величины $F_{\mu\nu}(z)$ берутся в точке z , в которой расположена частица. В этой точке они бесконечно велики и сингулярны, так что уравнения движения в действительности не имеют смысла. В них необходимо внести небольшие изменения, чтобы избежать бесконечностей. Часто используемый метод состоит в том, чтобы отойти от модели точечного заряда, это связано с заменой функции δ_4 в (5) приближающейся к ней сглаженной функцией. Можно применить подобную же процедуру и в (6) для полюсов. Однако этот метод приводит к дополнительной массе для частиц, которая не преобразуется согласно требованиям теории относительности. По-видимому, лучшим методом является введение λ -процесса, вносящего в уравнения поля малые изменения, такие, что в пределе дополнительная масса для частиц отсутствует. Получающаяся теория не лоренц-инвариантна до перехода к пределу, но лоренц-инвариантна в пределе. Этот метод и будет принят здесь. В его рамках потребуется введение несколько модифицированной полевой функции $F_{\mu\nu}^*$ вместо $F_{\mu\nu}$ в уравнениях (3) и

(7), так что уравнения движения примут вид

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^*}{\partial x_\nu} = -4\pi \sum_e e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x-z) ds, \quad (8)$$

$$\frac{(\partial F^+)_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -4\pi \sum_g g \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x-z) ds, \quad (9)$$

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \frac{dz^\nu}{ds} F_{\mu\nu}(z) \quad (10)$$

для заряженных частиц и

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = g \frac{dz^\nu}{ds} (F^+)_{\mu\nu}^*(z) \quad (11)$$

для частиц с полюсами. Эти уравнения совместно с уравнениями, связывающими F с F^* , которые линейны и будут приведены ниже, образуют полную схему уравнений движения. Они справедливы при произвольных значениях e и g различных частиц.

§ 3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Чтобы получить теорию, которую можно было бы обобщить квантовомеханически, необходимо привлечь принцип наименьшего действия. Для этой цели нам понадобится введение электромагнитных потенциалов. Обычный путь их введения состоит в подстановке

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (12)$$

однако при наличии магнитных полюсов подобное определение невозможно, так как уравнение (12) приводит к (4) и, таким образом, противоречит (9). Поэтому необходимо модифицировать уравнение (12).

Из уравнения (12) или (4) следует, что для определенного момента времени полный магнитный поток, проходящий через любую замкнутую поверхность, должен быть равен нулю. Если внутри замкнутой поверхности находится магнитный полюс, то это не верно. В этом

случае уравнение (12) должно быть несправедливо где-либо на поверхности, и мы можем предположить, что оно несправедливо лишь в одной точке. Однако уравнение (12) должно оказаться несправедливым в одной точке на каждой из замкнутых поверхностей, окружающих полюс. Таким образом, оно будет неверным на некоторой линии, которую мы будем называть *нитью*; она тянется паружу из полюса. Нить может быть произвольной кривой линией, простирающейся из полюса в бесконечность или к другому полюсу равной величины и противоположного знака. Каждый полюс должен находиться на конце такой нити.

Переменные, необходимые для фиксирования положения нитей, будут рассматриваться как динамические переменные. Сопряженные им импульсы будут введены ниже. Эти переменные необходимы для динамической теории, однако они не соответствуют никаким наблюдаемым, а их значения в частной задаче всегда произвольны и не влияют на физические явления. Они могут быть названы *нефизическими* переменными.

Нефизические переменные ранее уже встречались в динамической теории. Например, в обычной электродинамике дополнительные переменные, необходимые для описания потенциалов в случае, когда поле фиксировано, являются нефизическими переменными. Более элементарным примером является азимутальный угол вращающегося тела, которое симметрично относительно своей оси вращения. Нефизические переменные всегда могут быть исключены подходящим преобразованием, однако оно может привести к такому нарушению симметрии в теории, что это окажется нецелесообразным. (Нефизические переменные, описывающие нити, могли бы быть исключены наложением условия о том, что нити всегда должны быть направлены из каждого полюса в бесконечность параллельно оси x_1 . Для описания нитей, фиксированных таким образом, переменные были бы не нужны. Однако симметрия уравнений при трехмерных вращениях была бы полностью нарушена. Физические же следствия теории были бы не затронуты.)

Каждая нить вычерчивает двумерную поверхность в пространстве — времени. Эти поверхности и являются

теми областями, где уравнение (12) не справедливо. Можно описать каждую такую поверхность, если произвольную точку на ней y_μ представить как функцию от двух параметров τ_0 и τ_1 :

$$y_\mu = y_\mu(\tau_0, \tau_1).$$

Предположим для определенности, что каждая нить простирается до бесконечности. Тогда параметры τ_0 и τ_1 могут быть выбраны таким образом, что на мировой линии полюса параметр τ_1 равен нулю, но достигает бесконечно большого значения при стремлении вдоль нити в бесконечность; параметр τ_0 изменяется от $-\infty$ до ∞ при стремлении из бесконечного прошлого в бесконечное будущее.

Уравнение (12) нужно заменить уравнением вида

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + 4\pi \sum_g (G^+)_{\mu\nu}, \quad (13)$$

где $(G^+)_{\mu\nu}$ — поле, которое исчезает повсюду, кроме одной из поверхностей, а суммирование производится по всем поверхностям, каждая из которых связана с одним полюсом. Подставляя (13) в (9) с учетом (2), получаем

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = g \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x - z) ds. \quad (14)$$

Это и есть уравнение, определяющее $G_{\mu\nu}$.

Легко удостовериться, что решение уравнения (14) имеет вид

$$G_{\mu\nu}(x) = g \int \int \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} \right) \delta_4(x - y) d\tau_0 d\tau_1, \quad (15)$$

где интегрирование производится по всей поверхности. Решение (15) дает непосредственно

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} &= g \int \int \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} \right) \frac{\partial \delta_4(x - y)}{\partial x_\nu} d\tau_0 d\tau_1 = \\ &= -g \int \int \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} \right) \frac{\partial \delta_4(x - y)}{\partial y_\nu} d\tau_0 d\tau_1 = \\ &= -g \int \int \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial \delta_4(x - y)}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta_4(x - y)}{\partial \tau_0} \right) d\tau_0 d\tau_1. \end{aligned}$$

Из теоремы Стокса для любых двух функций U и V , определенных на поверхности, имеем

$$\int \int \left(\frac{\partial U}{\partial \tau_0} \frac{\partial V}{\partial \tau_1} - \frac{\partial U}{\partial \tau_1} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} \right) d\tau_0 d\tau_1 = \int U \left(\frac{\partial V}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \frac{\partial V}{\partial \tau_1} d\tau_1 \right), \quad (16)$$

причем в левой части интеграл берется по любой площади поверхности, а в правой части — по границе этой площади. Подставляя $U = \delta_4(x - y)$, $V = y_\mu$ и применяя теорему Стокса ко всей поверхности таким образом, что единственной частью границы, не находящейся на бесконечности, является мировая линия полюса, получаем

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = g \int \delta_4(x - y) \frac{\partial y_\mu(\tau_0, 0)}{\partial \tau_0} d\tau_0,$$

что согласуется с (14), так как $y_\mu(\tau_0, 0) = z_\mu(s)$ при условии, что τ_0 является некоторой функцией от s .

При заданных мировых линиях частиц решения уравнений поля (8) и (9), в которых отсутствуют начальные свободные поля, называются запаздывающими полями. Они связаны посредством (13) с запаздывающими потенциалами. В запаздывающие потенциалы дает вклад каждая частица, и этот вклад зависит только от мировой линии такой частицы или от поверхности, связанной с ней, в том случае, когда частица несет полюс. Эти вклады могут быть удобно выражены с помощью лоренц-инвариантной функции $J(x)$, определенной следующим образом:

$$J(x) = \begin{cases} 2\delta(x_\mu x^\mu) & \text{для } x_0 > 0, \\ 0 & \text{для } x_0 < 0, \end{cases} \quad (17)$$

или

$$J(x) = \frac{1}{r} \delta(x_0 - r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Функция Иордана и Паули $\Delta(x)$ связана с $J(x)$ соотношением

$$\Delta(x) = J(x) - J(-x). \quad (18)$$

Легко удостовериться, что

$$\square J(x) = 4\pi\delta_4(x). \quad (19)$$

(Этот результат можно проверить вблизи начала координат, выражая интеграл от $\square J(x)$ по малому четырехмерному объему, окружающему начало координат, как трехмерный поверхностный интеграл по границам этого объема.)

Вклад заряженной частицы в запаздывающие потенциалы, согласно формуле Льенара — Вихерта, равен

$$A_v^*(x)_{\text{зап}} = e \int_{-\infty}^{\infty} J(x-z) \frac{dz_v}{ds} ds. \quad (20)$$

(Слева стоит A^* вместо A , так как в (8) фигурирует поле F^* .) Соответствующая формула для вклада полюса записывается в виде

$$A_v(x)_{\text{зап}} = g e_{\nu\lambda\rho\sigma} \int \int \frac{\partial y^\lambda}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_1} \frac{\partial J(x-y)}{\partial x_\sigma} d\tau_0 d\tau_1. \quad (21)$$

Здесь интегрирование проводится по всей поверхности, $e_{\nu\lambda\rho\sigma}$ — антисимметричный тензор четвертого ранга со значением $e_{0123} = 1$. Чтобы проверить формулу (21), заметим, что она дает

$$e^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial A_{\nu \text{ зап}}}{\partial x^\mu} = g e^{\mu\nu\alpha\beta} e_{\nu\lambda\rho\sigma} \int \int \frac{\partial y^\lambda}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial y^\mu \partial y_\sigma} d\tau_0 d\tau_1.$$

Используя соотношение

$$e^{\mu\nu\alpha\beta} e_{\nu\lambda\rho\sigma} = \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta + \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\alpha \delta_\lambda^\beta + \delta_\sigma^\mu \delta_\lambda^\alpha \delta_\rho^\beta - (\alpha\beta)$$

[где $-(\alpha\beta)$ означает, что мы должны вычесть все предыдущие члены с взаимно переставленными α и β], с помощью теоремы Стокса (16), а также (19) и (15) получаем

$$\begin{aligned} e^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial A_{\nu \text{ зап}}}{\partial x^\mu} &= g \int \int \left\{ \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial \tau_0 \partial y_\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial \tau_1} + \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial \tau_1 \partial y_\alpha} \frac{\partial y^\beta}{\partial \tau_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial y^\alpha}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\beta}{\partial \tau_1} \square J(x-y) \right\} d\tau_0 d\tau_1 - (\alpha\beta) = \\ &= g \int \left[\frac{\partial J(x-y)}{\partial y_\beta} \right]_{y=z} \frac{dz^\alpha}{ds} ds - (\alpha\beta) + 4\pi G^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Согласно (13), это дает запаздывающее поле

$$\begin{aligned} (F^+)_{\text{зап}}^{\alpha\beta} &= e^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial A_{\nu \text{ зап}}}{\partial x^\mu} - 4\pi G^{\alpha\beta} = \\ &= -g \int \frac{\partial J(x-z)}{\partial x_\beta} \frac{dz^\alpha}{ds} ds - (\alpha\beta) = -\frac{\partial B_{\text{зап}}^\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial B_{\text{зап}}^\beta}{\partial x_\alpha}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$B_{\text{зап}}^\alpha = g \int J(x-z) \frac{dz^\alpha}{ds} ds. \quad (23)$$

Поскольку выражение (23) аналогично выражению (20) для потенциала Льенара — Вихерта, мы можем считать, что оно дает правильное значение запаздывающего потенциала, порождаемого полюсом.

В обычной электродинамике на потенциалы наложены условия

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\nu} = 0. \quad (24)$$

Эти условия могут быть оставлены и в настоящей теории, так как запаздывающие потенциалы (20), (21) им удовлетворяют. Обе формы условий (24) эквивалентны вследствие линейной связи между полями A_ν и A_ν^* [см. уравнение (29)].

§ 4. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

В обычной электродинамике действие выражается в виде суммы трех членов $I_1 + I_2 + I_3$, где I_1 — действие только для частиц:

$$I_1 = \sum_e m \int ds,$$

I_2 — действие только для поля:

$$I_2 = \frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \quad (d^4x = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3),$$

а I_3 — вклад взаимодействия зарядов с полем:

$$I_3 = \sum_e e \int A^\nu(z) \frac{dz_\nu}{ds} ds. \quad (25)$$

Поля $F_{\mu\nu}$ в I_2 следует рассматривать как функции потенциалов.

То же действие пригодно и в данной теории при условии, что суммирование в I_1 помимо зарядов распространяется и на частицы с полюсами:

$$I_1 = \sum_{e+g} m \int ds. \quad (26)$$

Для учета взаимодействия между полюсами и полем нет необходимости вводить какой-либо дополнительный член: это взаимодействие учитывается членом I_2 , в котором поле $F_{\mu\nu}$ должно теперь рассматриваться как функция потенциалов и переменных нити $y_\mu(\tau_0, \tau_1)$, согласно (13) и (15).

Чтобы избежать бесконечностей в уравнениях движения, обусловленных бесконечными полями, порождаемыми точечными зарядами и полюсами, мы произведем небольшую модификацию уравнений поля, заменив I_2 на

$$I'_2 = \frac{1}{16\pi} \int \int F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x') \gamma(x-x') d^4x d^4x',$$

где $\gamma(x)$ — функция, являющаяся приближением к функции $\delta_4(x)$ и переходящая в нее в пределе. Мы предположим, что

$$\gamma(-x) = \gamma(x), \quad (27)$$

и будем также предполагать другие свойства $\gamma(x)$, какие окажутся необходимыми, однако точная форма $\gamma(x)$ для нас несущественна. Мы можем переписать I'_2 в виде

$$I'_2 = \frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu}^*(x) F^{\mu\nu}(x) d^4x, \quad (28)$$

используя обозначения, в которых для любой полевой величины $U^*(x)$ имеем

$$U^*(x) = \int U(x') \gamma(x-x') d^4x'. \quad (29)$$

Теперь необходимо удостовериться, что вариация

$$I = I_1 + I'_2 + I_3$$

приводит к правильным уравнениям движения. Как хорошо известно, вариация I_1 дает

$$\delta I_1 = - \sum_{e+g} m \int \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} \delta z^\mu ds. \quad (30)$$

Вариация I_3 может быть выполнена точно так же, как в обычной электродинамике:

$$\delta I_3 = \sum_e e \int \left[\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right)_{x=z} \delta z^\mu + (\delta A_\nu)_{x=z} \right] \frac{dz^\nu}{ds} ds. \quad (31)$$

Вариация I'_2 с учетом (27) дает

$$\begin{aligned} \delta I'_2 &= \frac{1}{8\pi} \int \int F_{\mu\nu}(x') \delta F^{\mu\nu}(x) \gamma(x-x') d^4 x d^4 x' = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int F_{\mu\nu}^*(x) \delta F^{\mu\nu}(x) d^4 x. \end{aligned}$$

Подставляя вместо поля $F^{\mu\nu}$ его выражение (13), получаем

$$\delta I'_2 = - \frac{1}{4\pi} \int F_{\mu\nu}^* \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x^\nu} d^4 x + \frac{1}{2} \sum_g \int F_{\mu\nu} \delta (G^\dagger)^{\mu\nu} d^4 x, \quad (32)$$

$$\delta I'_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial F_{\mu\nu}^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu d^4 x + \frac{1}{2} \sum_g \int (F^\dagger)_{\mu\nu}^* \delta G^{\mu\nu} d^4 x. \quad (33)$$

Используя (15), второй член здесь можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_g g \int (F^\dagger)_{\mu\nu}^* d^4 x \delta \int \int \frac{\partial y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta_4(x-y) d\tau_0 d\tau_1 = \\ = \sum_g g \int (F^\dagger)_{\mu\nu}^* d^4 x \int \int \left\{ \delta \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \right) \delta_4(x-y) + \right. \\ \left. + \frac{\partial y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta_4(x-y)}{\partial y^\rho} \delta y^\rho \right\} d\tau_0 d\tau_1 = \\ = \sum_g g \int \int \left\{ (F^\dagger)_{\mu\nu}^*(y) \left(\frac{\partial \delta y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial \delta y^\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_0} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial (F^\dagger)_{\mu\nu}^*(y)}{\partial y^\rho} \frac{\partial y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta y^\rho \right\} d\tau_0 d\tau_1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_g g \iint \left\{ \frac{\partial [(F^\dagger)_{\mu\nu}^* \delta y^\mu]}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial [(F^\dagger)_{\mu\nu}^* \delta y^\mu]}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_0} - \right. \\
&\quad - \frac{\partial (F^\dagger)_{\mu\nu}^*}{\partial y^\rho} \left(\frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta y^\mu - \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_0} \delta y^\mu - \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta y^\rho \right) \right\} d\tau_0 d\tau_1 = \\
&= \sum_g g \int (F^\dagger)_{\mu\nu}^*(z) \delta z^\mu \frac{dz^\nu}{ds} ds - \\
&- \sum_g g \iint \left[\frac{\partial (F^\dagger)_{\mu\nu}^*}{\partial y^\rho} + \frac{\partial (F^\dagger)_{\nu\rho}^*}{\partial y^\mu} + \frac{\partial (F^\dagger)_{\rho\mu}^*}{\partial y^\nu} \right] \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta y^\mu d\tau_0 d\tau_1,
\end{aligned} \tag{34}$$

если применить теорему Стокса (16). Полная вариация δI представляет собой сумму (30), (31), (34) и первого члена в (33).

Приравнявая нулю коэффициент при $\delta A^\mu(x)$ в δI , мы получаем в точности уравнение (8). Приравнявая нулю коэффициент при δz^μ для заряженной частицы, получаем уравнение

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)_{x=z} \frac{dz^\nu}{ds}.$$

Это согласуется с уравнением движения (10) при условии, что заряженная частица не находится ни на одной из нитей, так что $G_{\mu\nu}(z) = 0$. Приравнявая нулю коэффициент при δz^μ для полюса, мы получаем в точности уравнение (11). Уравнение (9) является следствием уравнений (13) и (15), которые выражают $F_{\mu\nu}$ через потенциалы и переменные нитей. Таким образом, все уравнения движения (8)–(11) следуют из принципа наименьшего действия $\delta I = 0$ при условии, что мы налагаем требование, чтобы нить никогда не проходила через заряженную частицу.

Приравнявая нулю коэффициент при вариации δy^μ для переменных нити, мы получаем

$$\frac{\partial (F^\dagger)_{\mu\nu}^*}{\partial y^\rho} + \frac{\partial (F^\dagger)_{\nu\rho}^*}{\partial y^\mu} + \frac{\partial (F^\dagger)_{\rho\mu}^*}{\partial y^\nu} = 0,$$

или

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^*}{\partial y_\nu} = 0,$$

что имеет место во всех точках двумерной поверхности. Из уравнения (8) видно, что это автоматически удовлетворяется, если нить никогда не проходит через заряженную частицу.

Таким образом, принцип наименьшего действия не приводит к уравнениям движения для переменных нити в соответствии с утверждением о нефизической природе этих переменных.

Действие I является правильным и может быть использовано в качестве исходного пункта электродинамической теории. Однако действие I приводит к некоторым затруднениям в гамильтоновской формулировке уравнений движения, так как импульс, сопряженный A_0 , тождественно обращается в нуль. Этого неудобства можно избежать в предложенном Ферми методе, который состоит в добавлении к действию дополнительного члена

$$I_4 = \frac{1}{8\pi} \int \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} d^4x. \quad (35)$$

Вариация I_4

$$\delta I_4 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x_\nu} d^4x, \quad (36)$$

$$\delta I_4 = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\nu \partial x^\mu} \delta A^\mu d^4x \quad (37)$$

приводит к появлению дополнительного члена $-\partial^2 A_\nu^* / \partial x_\nu \partial x^\mu$ в левой части уравнения (8). Этот член не влияет на уравнения движения, так как при наложении дополнительного условия (24) он обращается в нуль. Однако в гамильтоновской формулировке необходимо проводить различие между теми уравнениями, которые справедливы только благодаря дополнительным условиям, и теми, которые не зависят от дополнительных условий. Поэтому мы должны оставить этот член в уравнении (8), чтобы иметь уравнение второго типа.

Используя (13) и (15), уравнение (8) теперь можно записать в виде

$$\square A_{\mu}^*(x) = 4\pi \sum_e e \int \frac{dz_{\mu}}{ds} \delta_4(x-z) ds + 4\pi \sum_g \frac{\partial (G^{\dagger})_{\mu\nu}^*}{\partial x_{\nu}}. \quad (38)$$

§ 5 МЕТОД ПЕРЕХОДА К ГАМИЛЬТОНОВСКОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

Если уравнения движения динамической системы выводятся из принципа наименьшего действия, то нужно еще представить их в гамильтоновской форме, как следующий шаг в процессе квантования. Общая процедура такого перехода состоит в том, чтобы представить действие в виде интеграла по времени до некоторого момента времени t , а затем варьировать действие, варьируя одновременно t . Эта вариация δI представляется в виде линейной функции от δt и от вариаций δq динамических координат в момент времени t . Другие члены в δI исчезают, если использовать уравнения движения. Затем вводят полные вариации координат

$$\Delta q = \delta q + \dot{q} \delta t$$

и выражают δI через Δq и δt . Полагают

$$\delta I = \sum p_r \Delta q_r - W \delta t \quad (39)$$

(или соответствующему выражению с интегралом вместо суммы) и таким образом определяют импульсы p_r и энергию W . Величины p_r и W оказываются функциями координат q_r и скоростей $\dot{q}_r$; поскольку число переменных p_r , W на единицу больше числа скоростей $\dot{q}_r$, должно существовать соотношение между p_r , W и координатами в форме

$$W - H(pq) = 0. \quad (40)$$

Импульсы p и $-W$ являются частными производными I по q и t , так что (40) представляет собой дифференциальное уравнение, решением которого является I . Это уравнение называется *уравнением Гамильтона—Якоби*. Применяя определенные правила, от него можно перейти

к волновому уравнению квантовой механики. Может существовать более чем одно уравнение, связывающее p , q и W ; в таком случае существует более чем одно уравнение Гамильтона — Якоби, ведущее к более чем одному волновому уравнению.

Для того чтобы сделать эту процедуру релятивистской, необходимо распространить интеграл по пространству — времени в действии до некоторой трехмерной пространственно-подобной бесконечной гиперповерхности S . Нужно варьировать I , варьируя как S в целом, так и динамические координаты в I , и выразить результат с помощью полных вариаций различных динамических величин на S . Это снова приведет к уравнению типа (39), и снова можно будет определить коэффициенты в нем как импульсы и установить уравнение Гамильтона — Якоби.

Существуют различные способы модификации этой процедуры, которые могут оказаться удобными в частных задачах. Вместо того чтобы ограничивать интегрирование в выражении для действия одним определенным моментом времени или одной определенной трехмерной пространственно-подобной гиперповерхностью S , можно задавать верхние пределы в различных членах действия в разные времена. Можно задать верхний предел в интеграле действия предположением о том, что динамическая система прекращает существование насильственным путем, и рассматривать полное действие прежде, чем система прекращает существование. Чтобы задать верхние пределы в различных членах действия в разные времена, необходимо представить различные части динамической системы прекращающими существование в разные времена. После того как некоторые части уже прекратили существование, оставшиеся части определяют развитие системы в соответствии с уравнениями движения, которые следуют из сохранившихся членов действия, вплоть до того, пока они в свою очередь не прекратят существование. Различные способы выбора верхнего предела в интеграле действия приводят к различным уравнениям Гамильтона — Якоби (40), которые равнозначны и отличаются одно от другого контактными преобразованиями

Удобный способ выбора верхнего предела в интеграле действия в случае, когда имеются частицы, взаимодействующие с полем, сводится, во-первых, к предположению о том, что частицы прекращают существование в точках пространства, лежащих вне световых конусов друг друга, и, во-вторых, к фиксированию поля в заметно более позднее время. Варьируют это фиксированное таким образом действие, совершая вариации в тех точках z_μ пространства — времени, где прекращают существование частицы, а также на той поверхности S_F , где прекращает существование поле. Приравнивая нулю ту часть вариации действия, которая не связана с вариациями границы, получают те же уравнения движения для частиц (вплоть до момента, когда они прекращают существование), что и уравнения движения, получаемые с помощью интеграла действия без фиксированного верхнего предела. Аналогичным образом получают уравнения поля, которые продолжают определять поле после того, как частицы уже прекратили существование. Благодаря вариациям Δz_μ в точках z_μ , находящихся в областях пространства — времени, полностью погруженных в поле, получают уравнения, более удобные по сравнению с уравнениями, получаемыми обычным методом, в котором предполагается, что частицы и поле одновременно прекращают существование.

Предположим, что в новой электродинамике все частицы, а также нити, связанные с полюсами, прекращают существование на трехмерной пространственно-подобной гиперповерхности S_P , а электромагнитное поле — на много более поздней гиперповерхности S_F . Это означает, что верхние пределы в интегралах I_1 и I_3 в (26) и (25) определяются моментами пересечения мировых линий с поверхностью S_P , а область интегрирования по двумерной поверхности в (15) должна определяться моментом достижения двумерной поверхностью трехмерной поверхности S_P . В то же время верхние пределы интегралов I'_2 и I_4 в (28) и (35) должны определяться границей S_F . Выбор верхних пределов в этих интегралах не будет влиять на уравнения движения частиц и поля в точках пространства — времени до S_P , а именно на уравнения (10), (11), (38), и далее (38) будет оставаться

справедливым как на S_P , так и впоследствии вплоть до S_F .

Предположим, что связь (29) между полевыми величинами U и U^* такова, что значение каждой из них в точке x определяется значением другой в точках пространства времени, расположенных вблизи от x . Таким образом, если одна из них обращается в нуль в определенной области пространства — времени, то другая также будет обращаться в нуль в этой области, исключая, возможно, лишь точки вблизи границы.

Поскольку поле $G_{\mu\nu}$ равно нулю повсюду, кроме двумерных поверхностей, $G_{\mu\nu}^*$ должно быть теперь равно нулю в области между S_P и S_F , исключая лишь точки, вблизи которых прекращают существование нити. В этой области первая сумма в правой части (38) также равна нулю, так как верхние пределы интегралов в действии определяются гиперповерхностью S_P , и, следовательно, из (38) мы можем получить

$$\square A_\mu^*(x) = 0. \quad (41)$$

Аналогичными рассуждениями мы можем получить

$$\square A_\mu(x) = 0 \quad (42)$$

в области между S_P и S_F , за исключением точек, вблизи которых заряженные частицы прекращают существование.

В областях, где справедливы (42) и (41), мы можем разложить $A_\mu(x)$ и $A_\mu^*(x)$ в интеграл Фурье:

$$A_\mu(x) = \sum_{k_0} \int A_\mu(k) e^{i(kx)} \frac{d^3k}{k_0}, \quad (43)$$

$$A_\mu^*(x) = \sum_{k_0} \int A_\mu^*(k) e^{i(kx)} \frac{d^3k}{k_0}, \quad (44)$$

где

$$(kx) = k_0x_0 - k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3,$$

$$d^3k = dk_1 dk_2 dk_3,$$

$$k_0 = \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}.$$

а $\sum_{k_0}$ обозначает сумму по обоим значениям k_0 для заданных значений k_1, k_2, k_3 . Множитель k_0^{-1} вводится потому, что произведение $k_0^{-1} d^3 k$ лоренц-инвариантно. Условие, что $A_\mu(x)$ и $A_\mu^*(x)$ действительны, дает

$$A_\mu(-k) = -\bar{A}_\mu(k), \quad A_\mu^*(-k) = -\bar{A}_\mu^*(k). \quad (45)$$

Предположим, что фурье-разложение функции $\gamma(x)$ имеет вид

$$\gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \gamma(l) e^{i(lx)} d^4 l,$$

причем

$$\gamma(-l) = \bar{\gamma}(l).$$

Тогда условие четности $\gamma(-x) = \gamma(x)$ дает

$$\gamma(-l) = \gamma(l), \quad (46)$$

так что $\gamma(l)$ — действительная функция. Теперь непосредственным интегрированием находим

$$A_\mu^*(k) = \gamma(k) A_\mu(k). \quad (47)$$

Нам необходимо, чтобы фурье-разложение (43) было справедливо в каждой точке z , где прекращает существование заряженная частица, а фурье-разложение (44) — в каждой точке y , где прекращает существование нить. Представляется возможным добиться этого подходящим выбором функции γ при условии, что точка y никогда не приближается слишком к точке z . Предположим, что полевая величина $U(x)$ определяется с помощью $U^*(x')$ в точках x' , лежащих вблизи точки x , но вне ее светового конуса. Тогда $A_\mu(z)$ определяется с помощью $A_\mu^*(x')$ в точках x' , для которых справедливо фурье-разложение (44), так что фурье-разложение $A_\mu(z)$ будет также обоснованным. Подобным же образом фурье-разложение $A_\mu^*(y)$ будет справедливым, если $U^*(x)$ определяется с помощью $U(x')$ в точках x' , лежащих вблизи точки x и вне ее светового конуса.

Дополнительное условие (24) в области между S_p и S_f получается модифицированным. Если верхние

пределы в интегралах (20) и (21) выбрать на гиперповерхности S_P , то, вводя обозначение z' вместо $z(s')$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\nu} &= \sum_e e \int_{-\infty}^s \frac{\partial J(x-z')}{\partial x_\nu} \frac{dz'_\nu}{ds'} ds' = \\ &= - \sum_e e \int_{-\infty}^s \frac{\partial J(x-z')}{\partial z'_\nu} \frac{dz'_\nu}{ds'} ds' = - \sum_e e J(x-z). \end{aligned} \quad (48)$$

Эта величина отличается от нуля, когда точка x находится в абсолютном будущем светового конуса любой точки z , где заряженная частица прекращает существование. Уравнения (41) и (48) свидетельствуют о том, что потенциалы A_μ^* принадлежат полю вентцелевского типа ¹⁾ в области между S_P и S_F .

§ 6. ГАМИЛЬТОНОВСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Образует вариацию интеграла действия, определенного так, как было сказано выше. При этом будем варьировать S_P , но не S_F , и оценим члены в δI , связанные с вариациями границ. Члены, обусловленные δI_1 и δI_3 , имеют такой же вид, как и в обычной электродинамике:

$$\sum_{e+g} m \frac{dz_\mu}{ds} \Delta z^\mu + \sum_e e A_\mu(z) \Delta z^\mu, \quad (49)$$

где Δz^μ — полное изменение координат частицы в точке, где частица прекращает существование. При определении $\delta I'_2$ мы не можем более использовать (32), а вместо этого должны образовать вариацию

$$\begin{aligned} \delta I'_2 &= - \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{S_F} \left(F_{\mu\nu}^* \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} + F_{\mu\nu} \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right) d^4x + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_g \int_{-\infty}^{S_F} \left[F_{\mu\nu}^* \delta (G^+)^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta (G^+)^{\mu\nu*} \right] d^4x. \end{aligned} \quad (50)$$

¹⁾ Свойства этих полей приведены, напримр, в работе [3].

Второй член здесь равен

$$\frac{1}{2} \sum_g \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mu\nu}^* \delta (G^+)^{\mu\nu} d^4x$$

при условии, что поверхность S_F достаточно далека от S_P , так что $\gamma(x - x') = 0$ для точек x , находящихся ранее S_P , и точек x' , находящихся позже S_F . Мы можем использовать теперь расчет, который привел к (34), однако с областью интегрирования только по части двумерной поверхности, находящейся до S_P . Тогда мы получим дополнительные члены, возникающие при применении теоремы Стокса, в виде линейных интегралов вдоль линий, где двумерная поверхность пересекает S_P . Выбирая параметризацию двумерной поверхности так, что линия ее пересечения с S_P определяется условием $\tau_0 = \text{const}$, а линия пересечения варьированной двумерной поверхности с варьированной поверхностью S_P задается значением τ_0 , равным той же постоянной, мы получаем эти линейные интегралы в форме

$$\sum_g \int_0^{\infty} (F^+)^*_{\mu\nu} \delta y^\mu \frac{dy^\nu}{d\tau_1} d\tau_1. \quad (51)$$

Линии интегрирования являются положениями нитей, когда последние прекращают существование. При образовании вариации δI_4 мы не можем более использовать (36), а вместо этой формулы следует записать

$$\delta I_4 = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{S_F} \left(\frac{\partial A_\nu^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right) d^4x. \quad (52)$$

Эта величина имеет ту же форму, что и первый член в правой части выражения (50); оба они вместе после интегрирования по частям дают граничный член в форме интеграла по трехмерной гиперповерхности S_F , который можно записать в виде

$$\frac{1}{8\pi} \int \left(\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta A^{\mu*} \right) dS^\nu, \quad (53)$$

где dS^v — элемент этой гиперповерхности. Все другие члены в δI обращаются в нуль при учете уравнений движения, если S_F не очень близка к S_P , так что в результате вариация δI равна сумме (49), (51) и (53).

При таком выражении для δI мы не можем непосредственно ввести импульсы в соответствии с формулой (39), так как A^μ и $A^{\mu*}$, вариации которых входят в (53), не независимы и так как мы не варьировали S_F . Удобный способ введения импульсов состоит в переходе к фурье-компонентам потенциалов, для чего можно использовать фурье-разложения (43) и (44), так как в выражении (53) мы имеем дело с потенциалами на гиперповерхности S_F . Возьмем варьированное движение, которое удовлетворяет уравнениям движения, так что фурье-разложения (43) и (44) действительны на S_F также и для варьированного движения. Тогда с помощью (47) выражение (53) запишется в виде

$$\frac{i}{8\pi} \sum_{k_0, k'_0} \int \int \int k_v [\gamma(k) + \gamma(k')] A_\mu(k) \times \\ \times \delta A^\mu(k') e^{i(k+k', x)} \frac{d^3 k}{k_0} \frac{d^3 k'}{k'_0} dS^v.$$

Если для простоты мы выберем гиперповерхность S_F в виде $x_0 = \text{const}$ (любая пространственно-подобная гиперповерхность должна привести к тому же конечному результату), то после интегрирования по x_1, x_2 и x_3 это выражение принимает вид

$$\pi^2 i \sum_{k_0, k'_0} \int \int [\gamma(k) + \gamma(k')] A_\mu(k) \delta A^\mu(k') \times \\ \times e^{i(k_0+k'_0)x_0} \delta_3(k+k') \frac{d^3 k'}{k'_0} d^3 k,$$

где $\delta_3(k)$ обозначает $\delta(k_1)\delta(k_2)\delta(k_3)$. Множитель $\delta_3(k+k')$ указывает здесь что подынтегральное выражение исчезает повсюду, кроме точки $k'_r = -k_r$ ($r=1$,

2, 3); это означает, что $k'_0 = \pm k_0$. Таким образом, с помощью (46) выражение приводится к виду

$$-2\pi^2 i \sum_{k_0} \int \gamma(k) A_\mu(k) \delta A^\mu(-k) \frac{d^3 k}{k_0} + \\ + \pi^2 i \sum_{k_0} \int [\gamma(k) + \gamma(k_0, -k_r)] A_\mu(k) \delta A^\mu(k_0, -k_r) e^{2ik_0 x_0} \frac{d^3 k}{k_0}.$$

Второй член здесь можно записать в виде полного дифференциала:

$$\pi^2 i \delta \sum_{k_0} \int \gamma(k) A_\mu(k) A^\mu(k_0, -k_r) e^{2ik_0 x_0} \frac{d^3 k}{k_0},$$

и поэтому его можно отбросить. Если мы ограничим теперь k_0 положительными значениями и используем (45) и (46), то первый член можно записать в виде

$$2\pi^2 i \int \gamma(k) [A_\mu(k) \delta \bar{A}^\mu(k) - \bar{A}_\mu(k) \delta A^\mu(k)] \frac{d^3 k}{k_0} = \\ = 2\pi^2 i \delta \int \gamma(k) A_\mu(k) \bar{A}^\mu(k) \frac{d^3 k}{k_0} - \\ - 4\pi^2 i \int \gamma(k) \bar{A}_\mu(k) \delta A^\mu(k) \frac{d^3 k}{k_0}. \quad (54)$$

Первый член в (54) представляет собой полный дифференциал и может быть отброшен. Таким образом, мы получаем следующий конечный результат: если не считать полного дифференциала, то вариация δI равна сумме (49), (51) и второго члена в (54).

Мы выбираем в качестве динамических координат координаты z_μ частиц, когда они прекращают существование, координаты $y_\mu(\tau_1)$ точек на нитях, когда последние прекращают существование (при условии одномерности континуума координат для каждого полюса и каждого значения μ), и фурье-компоненты $A_\mu(k)$ (для положительных k_0) потенциалов после того, как частицы и нити прекратили существование. Коэффициенты при вариациях этих координат в выражении для δI , даваемом суммой (49), (51) и второго члена в (54), являются

сопряженными импульсами. Таким образом, импульсы заряженных частиц имеют вид

$$p_\mu = m \frac{dz_\mu}{ds} + e A_\mu(z), \quad (55)$$

а импульсы частиц с полюсами —

$$p_\mu = m \frac{dz_\mu}{ds}; \quad (56)$$

импульсы, сопряженные переменным нити $y^\mu(\tau_1)$, которые мы обозначим $\beta_\mu(\tau_1)$, равны

$$\beta_\mu(\tau_1) = g(F^+)^*_{\mu\nu} \frac{dy^\nu}{d\tau_1}, \quad (57)$$

а импульсы, сопряженные $A_\mu(k)$, равны

$$-4\pi^2 i \gamma(k) \bar{A}_\mu(k) \frac{1}{k_0}. \quad (58)$$

Импульсы нити $\beta_\mu(\tau_1)$ образуют одномерный континуум переменных, соответствующий одномерному континууму координат $y^\mu(\tau_1)$, а полевые импульсы (58) образуют трехмерный континуум, соответствующий трехмерному континууму полевых координат.

Мы можем обычным образом ввести скобки Пуассона. Для координат и импульсов каждой частицы имеем

$$[p_\mu, z_\nu] = g_{\mu\nu}. \quad (59)$$

Для координат и импульсов нити получаем

$$[\beta_\mu(\tau_1), y_\nu(\tau'_1)] = g_{\mu\nu} \delta(\tau_1 - \tau'_1), \quad (60)$$

а для полевых переменных, согласно (58), имеем

$$[\bar{A}_\mu(k), A_\nu(k')] = \frac{i}{4\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\gamma(k)} k_0 \delta_3(k - k'). \quad (61)$$

Все другие скобки Пуассона равны нулю.

В пределе, когда $\gamma(x) \rightarrow \delta_4(x)$, мы получаем $\gamma(k) \rightarrow 1$, а уравнение (61) переходит в обычные скобки Пуассона для фурье-амплитуд электромагнитных потенциалов. Если выбрать $[\gamma(k)]^{-1} = \cos(k\lambda)$, где λ — малый 4-век-

гор, удовлетворяющий условию $\lambda^2 > 0$, и совершить предельный переход $\lambda \rightarrow 0$, то мы получаем λ -процесс, который уже использовался в электродинамике, классической и квантовой. Этот метод позволяет преодолеть некоторые из трудностей, связанных с бесконечными полями, которые обусловлены точечностью частиц. Такое выражение для $\gamma(k)$, возможно, применимо в настоящей теории, но я не исследовал, совместимо ли оно со всеми требованиями, накладываемыми на функцию $\gamma(x)$.

Из (55) и (56) мы можем исключить скорости dz_μ/ds и получить уравнения

$$[p_\mu - eA_\mu(z)][p^\mu - eA^\mu(z)] - m^2 = 0 \quad (62)$$

для каждой заряженной частицы и

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0 \quad (63)$$

для каждой частицы с полюсом. К этим уравнениям следует присоединить уравнение (57), или

$$\beta_\mu(\tau_1) - g(F^+)_{\mu\nu}^*(y) \frac{dy^\nu}{d\tau_1} = 0. \quad (64)$$

Выразив $A_\mu(z)$ в (62) и $(F^+)_{\mu\nu}^*(y)$ в (64) с помощью фурье-компонент $A_\mu(k)$ и $\bar{A}_\mu(k)$ (законность этого рассмотрена в конце предыдущего параграфа), получим уравнения (62) — (64), которые будут содержать только динамические координаты и импульсы. Это и есть дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет действие I^1 , если импульсы рассматривать как производные I по координатам. Это уравнения Гамильтона — Якоби настоящей теории. Поскольку известно, что они имеют решение, а именно действие I , мы можем заключить из теории дифференциальных уравнений, что все скобки Пуассона их левых частей обращаются в нуль, в чем можно непосредственно удостовериться из (59) — (61).

¹⁾ Более точно следовало бы сказать, что решением этих уравнений Гамильтона — Якоби является главная функция Гамильтона. — *Прим. ред.*

На этой стадии необходимо ввести дополнительные условия (48), которые нужно рассматривать как дополнительные уравнения Гамильтона — Якоби. Различные уравнения (48), получаемые для различных полевых точек x , не являются независимыми от уравнений движения, а также одно от другого. Мы получим из них полностью независимый ряд уравнений, если произведем фурье-разложение в области между S_P и S_F . В этой области мы можем, согласно (18), заменить $J(x - z)$ на функцию $\Delta(x - z)$, фурье-компоненты которой записываются в виде

$$\Delta(x - z) = -\frac{i}{4\pi^2} \sum_{k_0} \int e^{i(k, x - z)} \frac{d^3 k}{k_0}, \quad (65)$$

так что фурье-разложение (48) в этой области при $k_0 > 0$ дает

$$k^\nu \gamma(k) A_\nu(k) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_e e e^{-i(kz)} = 0, \quad (66)$$

$$k^\nu \gamma(k) \bar{A}_\nu(k) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_e e e^{i(kz)} = 0. \quad (67)$$

Эти уравнения содержат только динамические координаты и импульсы и, таким образом, они имеют форму уравнений Гамильтона — Якоби. Легко удостовериться в том, что они, а также уравнения Гамильтона — Якоби (62) — (64) образуют непротиворечивую систему дифференциальных уравнений для I . Для этого достаточно убедиться в том, что все скобки Пуассона их левых частей обращаются в нуль.

§ 7. КВАНТОВАНИЕ

От изложенной выше гамильтоновской формулировки классической электродинамики, применяя обычные правила, можно перейти к квантовой электродинамике. Динамические координаты и импульсы классической теории заменяют при этом операторами, удовлетворяющими коммутационным соотношениям, которые соответствуют соотношениям для скобок Пуассона (59) — (61). Уравнения Гамильтона Якоби заменяют волновыми уравне-

ниями, которые получают приравниванием нулю левых частей уравнений Гамильтона — Якоби (теперь содержащих операторы вместо динамических переменных), действующих на волновую функцию ψ . Полученные таким образом волновые уравнения будут непротиворечивы друг другу, так как операторы, действующие на ψ слева, коммутируют. Об этом можно судить по обращению в нуль скобок Пуассона левых частей уравнений Гамильтона — Якоби.

Эта простая процедура квантования приводит к волновым уравнениям типа Клейна — Гордона для всех частиц и соответствует случаю отсутствия спина. Чтобы описать электроны, необходимо заменить эти уравнения волновыми уравнениями, соответствующими спину $\hbar/2$. Мы не имеем сведений о спинах полюсов и можем предварительно предположить, что они также обладают спином $\hbar/2$, как это вытекает из простейшей релятивистской теории. Переход от нулевого спина к спину $\hbar/2$ не влияет на взаимную непротиворечивость волновых уравнений.

Итак, мы получаем следующую схему волновых уравнений, выраженных с помощью обычных обычных матриц $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_m$ для каждой частицы:

$$\{p_0 - eA_0(z) - \alpha_r[p_r - eA_r(z)] - \alpha_m m\} \psi = 0 \quad (68)$$

для каждой заряженной частицы,

$$\{p_0 - \alpha_r p_r - \alpha_m m\} \psi = 0 \quad (69)$$

для каждой частицы с полюсом,

$$\left\{ \beta_\mu(\tau_1) - g(F^\dagger)_{\mu\nu}^*(y) \frac{dy^\nu}{d\tau_1} \right\} \psi = 0 \quad (70)$$

для каждой нити и

$$\begin{aligned} \left\{ 4\pi^2 k^\nu \gamma(k) A_\nu(k) - \sum_e e e^{-l(kz)} \right\} \psi &= 0, \\ \left\{ 4\pi^2 k^\nu \gamma(k) \bar{A}_\nu(k) - \sum_e e e^{l(kz)} \right\} \psi &= 0 \end{aligned} \quad (71)$$

для переменных поля. Волновую функцию ψ можно рассматривать как функцию переменных частицы z_μ , соответствующих спиновым переменным каждой частицы,

переменных нити $y_\mu(\tau_1)$ с областью определения $0 < \tau_1 < \infty$ и переменных поля $A_\nu(k)$. Волновая функция определена только в том случае, когда все точки z_μ , $y_\mu(\tau_1)$ лежат вне световых конусов друг друга.

На первый взгляд уравнение (69) наводит на мысль, что электромагнитное поле не действует на полюсы. Однако, как видно из (70), оно действует на нити. Поскольку полюсы находятся на концах нитей, поле влияет на движение полюсов. О правильности этого воздействия можно судить из аналогии с классической теорией, в которой полюса движутся согласно уравнению (11).

§ 8. ЕДИНИЧНЫЕ ЗАРЯД И ПОЛЮС

Действие I классической теории можно рассматривать как функцию точек пространства — времени z_μ , в которых частицы прекращают существование, линии $y_\mu(\tau_1)$ пространства — времени, на которых нити прекращают существование, и подходящих переменных поля; I определено только при условии, что нити не проходят ни через какие точки z_μ , в которых прекращают существование заряженные частицы. Однако действие не является однозначной функцией этих переменных, что можно показать следующим способом.

Совершим непрерывное изменение переменных в I согласно следующей процедуре. Мы фиксируем все точки z_μ частиц, а также все нити, за исключением одной. Эту одну нить мы непрерывным образом варьируем, оставляя ее всегда в трехмерной гиперповерхности S_μ , и образуем из нее петлю вокруг одной из точек z_μ , где расположена заряженная частица, как раз перед тем, как она прекращает существование, а затем возвращаем нить в ее первоначальное положение. В то же время потенциалы $A_\mu(x)$ мы варьируем непрерывным образом так, чтобы соотношения (13) и (15) оставались всегда справедливыми для фиксированных значений поля $F_{\mu\nu}$; затем потенциалы возвращаем к их первоначальным значениям одновременно с нитью. Таким образом, мы совершаем здесь непрерывное изменение переменных в I , которые затем все возвращаются к своим исходным значениям. Эту деформацию нельзя непрерыв-

ным образом свести к случаю, когда она отсутствует вообще, потому что нить не может проходить через заряженную частицу. Нить будет очерчивать замкнутую двумерную поверхность σ , лежащую в S_P и заключающую в себе точку z_μ , в которой расположен заряд. Эта поверхность σ не может быть непрерывным образом стянута в точку, так как в этом случае она должна пройти через заряд. Поэтому можно ожидать, что при этом процессе деформации I варьируется, и мы легко можем подчитать эту вариацию DI следующим образом.

Малая вариация нити и потенциалов при фиксированных точках z_μ частиц приводит к вариации I , выражающейся в виде суммы правых частей (50) и (52). При замкнутом процессе деформации, описанном выше, первый член справа в (50) будет равен нулю, так как $F_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}^*$ остаются фиксированными, а A^μ и $A^{\mu*}$ возвращаются к своим первоначальным значениям. Правая часть (52) будет также равна нулю, так как она представляет собой полную вариацию I_4 , а I_4 возвращается к своему первоначальному значению. Остается второй член справа в (50), который равен выражению (51) и для замкнутого процесса деформации дает

$$DI = g \int (F^+)_{\mu\nu}^* d\sigma^{\mu\nu},$$

где $d\sigma^{\mu\nu}$ — элемент двумерной поверхности, очерчиваемой нитью. Интеграл здесь, согласно (8), представляет собой полный электрический поток, проходящий через замкнутую поверхность σ , и, следовательно, он равен умноженному на 4π заряду e , окруженному поверхностью. Таким образом,

$$DI = 4\pi g e.$$

Мы можем образовывать петлю любой нитью вокруг любого заряда любое число раз, так что полная неопределенность I равна сумме

$$4\pi \sum_{g, e} m_{ge} g e, \quad (72)$$

где суммирование производится по всем зарядам e и полюсам g с произвольным целым коэффициентом m_{ge} для каждого члена.

Случаи, когда действие неоднозначно, часто встречаются в механике. Наиболее просто это можно видеть, рассматривая динамическую систему, состоящую из твердого тела, вращающегося относительно фиксированной оси. Для такой системы действие равно просто моменту количества движения, умноженному на азимутальный угол, так что неопределенность действия равна моменту количества движения, умноженному на 2π . В боровской теории правило квантования получается, если приравнять неопределенность действия произведению целочисленного множителя на $\hbar$. Применяя это правило к неопределенности (72), получаем для каждого полюса g и заряда e

$$4\pi ge = n\hbar, \quad (73)$$

где n — целое число. Этот результат совпадает с (1), если скорость света c положить равной единице.

Результат (73) можно также получить в рамках квантовой электродинамики, развитой в § 7, без боровского правила квантования, но используя условие о том, что волновая функция должна быть однозначной. Из коммутационного соотношения (60) следует, что $\beta_\mu(\tau_1)$ есть умноженный на $i\hbar$ оператор функционального дифференцирования по $y_\mu(\tau_1)$, так что волновое уравнение (70) записывается в виде

$$i\hbar \frac{\delta\psi}{\delta y_\mu(\tau_1)} = g(F^+)_{\mu\nu}^*(y) \frac{dy^\nu}{d\tau_1} \psi. \quad (74)$$

Это уравнение показывает, как изменяется ψ , когда варьируется положение нити. Если нить смещается и очерчивает при этом двумерную поверхность σ , из уравнения (74) следует, что ψ умножается на

$$\exp\left[-\frac{ig}{\hbar} \int (F^+)_{\mu\nu}^* d\sigma^{\mu\nu}\right] \quad (75)$$

при условии, что поле $(F^+)_{\mu\nu}^*$ в подынтегральном выражении коммутирует во всех точках поверхности σ . (Этому условию легко удовлетворить точно подходящим выбором функции γ в случае, когда σ лежит на плоской трехмерной пространственно-подобной гиперповерхности S_P ; в случае произвольной S_P некоммутативность стре-

мится к нулю при $\gamma(x) \rightarrow \delta_4(x)$ и не влияет на законность расчета.) Применим теперь прежнюю процедуру, состоящую в деформации нити таким образом, чтобы она образовывала петлю вокруг одного из зарядов, и затем возвращении ее в первоначальное положение. Так как ψ — однозначная функция, она должна возвращаться при этом к своему первоначальному значению, и, таким образом, множитель (75) должен быть равен единице. Для этого должно выполняться равенство

$$\frac{g}{\hbar} \int (F^+)_{\mu\nu}^* d\sigma^{\mu\nu} = 2\pi n,$$

где n — целое число, что дает снова условие (73).

Мы приходим к важному заключению, что *квантование уравнений движения заряженных частиц и частиц с полюсами возможно только при условии, что заряды и полюсы кратны единичному заряду e_0 и единичному полюсу g_0 , удовлетворяющим соотношению*

$$e_0 g_0 = \frac{1}{2} \hbar c. \quad (76)$$

Теория не фиксирует величины e_0 и g_0 , а дает только их произведение.

§ 9 ОБСУЖДЕНИЕ

Изложенная работа дает общую теорию частиц с электрическими зарядами и магнитными полюсами, взаимодействующих с электромагнитным полем. Она не является совершенной теорией, так как взаимодействие частицы с ее собственным полем не учитывается удовлетворительным образом. Это проявляется в непрерывном использовании в теории функции $\gamma(x)$, которая не определена точно и для которой указаны лишь некоторые желаемые свойства. Если бы даже можно было задать удовлетворительную функцию γ , то были бы решены не все трудности, так как остаются еще бесконечности, появляющиеся в волновой функции при попытке решить волновое уравнение. Однако эти же трудности встречаются и в обычной электродинамике электронов без полюсов, и если их решение можно найти в обычной электродинамике, то оно, вероятно, будет применимо также и в более общей электродинамике частиц с полюсами.

Таким образом, наличие этих трудностей не является аргументом против существования магнитных полюсов.

Возникает вопрос, может ли элементарная частица обладать как электрическим зарядом, так и полюсом одновременно. Классические уравнения движения, приведенные в § 2, могут быть немедленно обобщены на этот случай, однако гамильтоновская теория встречается с некоторыми трудностями, связанными с точной формой функции γ . По-видимому, невозможно дать надежный ответ на этот вопрос, пока не дана удовлетворительная трактовка взаимодействия частицы со своим собственным полем.

Теория, развитая в настоящей статье, по существу симметрична относительно электрических зарядов и магнитных полюсов. Существует значительная кажущаяся разница между трактовкой зарядов и полюсов, которая обнаруживается в первую очередь при введении потенциалов, согласно (13). Однако одинаково хорошо можно было бы работать, если поменять ролями заряды и полюсы. Тогда нити были бы присоединены к зарядам и вместо (13) применялся бы потенциал B_μ , определенный соотношением

$$(F^\dagger)_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu} + 4\pi \sum_e (G^\dagger)_{\mu\nu},$$

где поле $G_{\mu\nu}$ обращается в нуль всюду, кроме двумерной поверхности, образованной новой нитью. Конечный результат подобного подхода был бы эквивалентен другому представлению квантовой электродинамики.

Хотя с точки зрения общей теории существует симметрия между зарядами и полюсами, тем не менее на практике имеется различие, связанное с разными численными значениями кванта заряда и кванта полюса. Если мы возьмем экспериментальное значение константы тонкой структуры

$$e_0^2 = \frac{1}{137} \hbar c,$$

мы можем получить значение g_0 :

$$g_0^2 = \frac{137}{4} \hbar c.$$

Таким образом, g_0 много больше, чем e_0 . Это значение соответствует константе тонкой структуры $137/4$. Силы радиационного затухания должны оказывать очень большое влияние на движение полюсов, происходящее с заметным ускорением.

Огромная разница между численными значениями e_0 и g_0 объясняет, почему легко получить электрические заряды, но не магнитные полюсы. Два единичных полюса противоположного знака притягиваются один к другому с силой, в $(137/2)^2$ раз большей, чем сила притяжения между двумя единичными зарядами, находящимися на том же расстоянии друг от друга. Поэтому должно быть очень трудно разделить полюсы противоположного знака. Чтобы получить оценку энергии, необходимой для этой цели, мы можем предположить, что элементарные частицы с полюсами образуют важную составную часть протонов и имеют массу μ порядка половины протонной массы. Энергию связи двух таких частиц нельзя точно подсчитать без более надежной теории радиационного затухания, чем та, которая существует в настоящее время. Однако из зоммерфельдовской формулы для энергетических уровней водорода с учетом релятивистских эффектов можно получить, что эта энергия связи должна быть порядка μc^2 , или $5 \cdot 10^8$ эв. Частицы с полюсами следует искать в таких атомных процессах, в которых доступна энергия такого порядка. Они должны проявить себя как сильно ионизирующие частицы, и их можно отличить от обычных заряженных частиц по тому свойству, что порождаемая ими ионизация не увеличивается по направлению к концу их пробега, а остается приблизительно постоянной.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ehrenhaft F., Phys. Rev., **67**, 63, 201 (1945).
- 2 Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A133**, 60 (1931) (статья 1 данного сборника).
- 3 Dirac P. A. M., Annales d l'Inst. Henri Poincaré, **9**, 23 (1939).

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОНОПОЛЯ ДИРАКА С ВЕЩЕСТВОМ

В. Малкус

W. Malkus, Phys. Rev., 83, 899 (1951)

Как уже известно, в поле магнитного заряда электрон не имеет связанных состояний. В этой статье предпринята попытка установить характер взаимодействия монополя с более сложными полями атомов и молекул. С этой целью в статье исследуются заряженные частицы с произвольным магнитным моментом, движущиеся одновременно в поле монополя и во внешнем электрическом поле. Найдено, что энергия связи монополя с веществом может быть сравнимой с энергией химической связи и не может значительно превосходить ее; однако при этом особо следует рассматривать случаи водорода, для которого самое низкое энергетическое состояние зависит от массы монополя.

На основании гипотезы о том, что монополи рождаются в атмосфере первичным космическим излучением и в дальнейшем диффундируют в магнитном поле Земли, была предпринята попытка экспериментального определения верхнего предела сечения такого рождения. Результаты этого эксперимента показывают, что число монополей, достигающих поверхности Земли, меньше $10^{-10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было показано, что в отсутствие внешнего электрического поля электрон не может быть связан с магнитным зарядом (монополем)¹⁾. Однако именно такие внешние электрические поля всегда существуют в веществе. В связи с этим в данной работе исследуется вопрос, может ли присутствие магнитного заряда привести к уменьшению энергии электронной структуры атома и, таким образом, к связанным состояниям. Ясно,

¹⁾ Теллер отметил, что это утверждение является непосредственным следствием уравнения Дирака для электрически заряженных частиц, так как при отсутствии внешнего электрического поля в любом магнитном поле, описываемом векторным потенциалом, уравнение Дирака не имеет собственного значения энергии, меньшего чем mc^2 по абсолютной величине.

что такая проблема является слишком сложной и может быть решена лишь для некоторых предельных случаев. Поэтому полная электрическая энергия атома определяется сначала для монополя, расположенного очень близко к ядру, а затем для монополя, удаленного на значительное расстояние. После этого можно оценить величину энергии связи для промежуточных случаев.

Исследования проводились по следующей программе:

1) Определение собственных состояний заряженной частицы с произвольным магнитным моментом в поле магнитного монополя и рассмотрение на основании полученных результатов энергии взаимодействия атомных ядер и монополя.

2) Нахождение собственных состояний электрона в объединенном поле монополя и атомных ядер, расположенных в начале координат (при этом временно пренебрегается упомянутой выше энергией взаимодействия).

3) Проведение вариационными методами с использованием теории возмущений расчета сложного атома, основывающегося на собственных функциях, найденных на предыдущем этапе программы, для сравнения результирующей суммарной энергии электронов с соответствующей энергией для обычного атома.

4) Рассмотрение приближенных диамагнитной и парамагнитной энергий электронной структуры на некотором расстоянии от магнитного монополя и анализ всех найденных результатов с целью получения вывода о взаимодействии монополя с веществом.

В последнем параграфе рассмотрение возможности рождения монополей космическим излучением и последующего движения этих частиц в магнитном поле Земли приводит к описанию эксперимента, позволившего определить верхний предел вероятности для монополя достигнуть земной поверхности.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $1/2$, ЗАРЯДОМ $Z|e|$ И ПРОИЗВОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В ПОЛЕ МАГНИТНОГО МОНОПОЛЯ

1. Вектор-потенциал монополя с зарядом M , расположенного в точке $r = 0$, удовлетворяющий уравнениям

$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H} = M\mathbf{r}/r^3$, имеет вид

$$A_\varphi = \frac{M}{r} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right), \quad (1)$$

$$A_\theta = A_r = 0.$$

2. Гамильтониан, включающий в приближении Паули произвольное радиальное электрическое поле, но не учитывающий спин-орбитального взаимодействия и членов более высокого порядка, имеет вид

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(\mathbf{P} - \frac{Z|e|}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V(r) - B_z \frac{|e|\hbar M}{2m_z c r^2} \sigma_r, \quad (2)$$

где B_z — число магнетонов у частицы с зарядом $Z|e|$ и массой m_z . Для дираковской частицы $B_z = Z$. Гамильтониан H можно записать в виде

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} - i\kappa_z (1 - \cos \theta) \right\}^2 \right] + \gamma \sigma_r \right\} + V(r), \quad (3)$$

где

$$\gamma = B_z \left(\frac{\mu}{m_z} \right) \kappa_{z=1} \quad (4)$$

и

$$\kappa_z = Z|e| \frac{M}{\hbar c}; \quad (5)$$

здесь, как впервые указал Дирак [2], $2\kappa_z$ должно быть целым числом.

3. Исследуем угловую зависимость гамильтониана H для случая $\gamma = 0$. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{L}^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} - i\kappa_z (1 - \cos \theta) \right\}^2 \right], \quad (6)$$

который коммутирует с $L_z = -i\hbar(\partial/\partial\phi)$ (но не с L^2)
Если предположить, что

$$\mathcal{L}^2 \Theta \Phi = -\beta_0 \Theta \Phi,$$

то

$$\Phi = e^{im\phi},$$

где

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

Следовательно,

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \{m - \kappa_z (1 - \cos \theta)\}^2 \right] \Theta = -\beta_0 \Theta. \quad (8)$$

Теперь положим

$$x = \sin^2 \frac{1}{2} \theta = \frac{1 - \cos \theta}{2}; \quad (9)$$

тогда

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} x (1-x) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{(m/2)^2}{x(1-x)} - \frac{\kappa_z (\kappa_z - m)}{1-x} + \kappa_z^2 \right] \Theta = -\beta_0 \Theta. \quad (10)$$

Вид двух средних членов в квадратной скобке наводит на мысль искать решение в форме

$$\Theta = x^{|m|/2} (1-x)^{|m-2\kappa_z|/2} u. \quad (11)$$

Это приводит к уравнению для неизвестной функции u

$$(1-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [(1+|m|) - 2(1+P)x] \frac{\partial u}{\partial x} - [P(P+1) - \kappa_z^2] u = -\beta_0 u, \quad (12)$$

где

$$P = \frac{1}{2} (|m| + |m - 2\kappa_z|). \quad (13)$$

Если u представить как ряд по x :

$$u = \sum_n C_n x^{n+s}, \quad (14)$$

то $s = 0, -m$, причем значение $s = -|m|$ неприемлемо. Для коэффициентов C_n получаем

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{[n(n-1) + 2(1+P)n + P(P+1) - \kappa_z^2 - \beta]}{[n(n+1) + (1+|m|)(n+1)]}. \quad (15)$$

Этот ряд содержит конечное число членов, если

$$\beta_0 = l'(l' + 1) - \kappa_z^2, \quad (16)$$

где

$$l' = n + P = |\kappa_z|, \quad |\kappa_z| + 1, \quad |\kappa_z| + 2, \dots \quad (17)$$

Эти собственные значения были получены ранее Таммом [3] и Фирцем [4].

4. Исследуем угловую зависимость для случая произвольного γ . Так как

$$\sigma_r = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{+i\phi} & -\cos \theta \end{vmatrix},$$

рассмотрим оператор

$$\mathcal{J}^2 = \begin{vmatrix} \mathcal{L}^2 + \gamma \cos \theta & \gamma \sin \theta e^{-i\phi} \\ \gamma \sin \theta e^{+i\phi} & \mathcal{L}^2 - \gamma \cos \theta \end{vmatrix}, \quad (18)$$

где $\mathcal{J}^2$ коммутирует с $J_z = -\hbar(\partial/\partial\phi) + 1/2\hbar\sigma_z$. Если предположить, что $\mathcal{J}^2\Theta\Phi = -\beta\Theta\Phi$, то

$$\Phi = \begin{vmatrix} e^{i(m-1)\phi} \\ e^{im\phi} \end{vmatrix}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (19)$$

Следовательно,

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \{ (m-1) - \kappa_z (1 - \cos \theta) \}^2 + \right. \\ \left. + \gamma \cos \theta \right] \Theta_1 + \gamma \sin \theta \Theta_2 = -\beta \Theta_1, \quad (20)$$

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \{ m - \kappa_z (1 - \cos \theta) \}^2 - \gamma \cos \theta \right] \Theta_2 + \\ + \gamma \sin \theta \Theta_1 = -\beta \Theta_2.$$

Как и в соотношениях (8) (12), попытаемся искать решение в виде

$$\Theta_1 = x^{1/2|m-1|} (1-x)^{1/2|m-1-2\kappa_z|} u, \\ \Theta_2 = x^{1/2|m|} (1-x)^{1/2|m-2\kappa_z|} v. \quad (21)$$

Это приводит к системе уравнений

$$x(1-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [(1+|m-1|) - 2(1+P)x] \frac{\partial u}{\partial x} - \bar{\alpha}u + \\ + \gamma(1-2x)u + 2\gamma(1-x)^{1-A} x^{1-B} v = -\beta u, \\ x(1-x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + [(1+|m|) - 2(1+P)x] \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha v - \\ - \gamma(1-2x)v + 2\gamma(1-x)^A x^B u = -\beta v; \quad (22)$$

здесь $\alpha = P(P+1) - \kappa_z^2$, где величина P определена выражением (13), а $\bar{P}$ и $\bar{\alpha}$ определяются теми же формулами, что P и α , но с заменой m на $m-1$; далее,

$$\begin{aligned} A=1 & \text{ для } (m-2\kappa_z) \leq 0, & B=1 & \text{ для } m \leq 0, \\ A=0 & \text{ для } (m-2\kappa_z) > 0, & B=0 & \text{ для } m > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Символ ε_{AB} используется для того, чтобы различить четыре случая:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{10} &= \begin{cases} 1, & \text{когда } (m-2\kappa_z) \leq 0, \quad m > 0, \\ 0 & \text{во всех других случаях;} \end{cases} \\ \varepsilon_{01} &= \begin{cases} 1, & \text{когда } (m-2\kappa_z) > 0, \quad m \leq 0, \\ 0 & \text{во всех других случаях;} \end{cases} \\ \varepsilon_{00} &= \begin{cases} 1, & \text{когда } (m-2\kappa_z) > 0, \quad m > 0, \\ 0 & \text{во всех других случаях;} \end{cases} \\ \varepsilon_{11} &= \begin{cases} 1, & \text{когда } (m-2\kappa_z) \leq 0, \quad m \leq 0, \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Такое обозначение позволяет описывать сразу все четыре случая.

Если теперь сделать подстановку

$$u = (-1)^{\varepsilon_{01} + \varepsilon_{00}} x^{\varepsilon_{00}} u', \quad \text{и} \quad v = x^{\varepsilon_{11}} v', \quad (24)$$

то получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + [\varepsilon_{00} 2(1-x) + (1 + |m-1|) - 2(1 + \bar{P})x] \frac{\partial u'}{\partial x} - \\ - \left[\bar{\alpha} + \varepsilon_{00} \left\{ 2(1 + \bar{P}) - \frac{(1 + |m-1|)}{x} \right\} \right] u' + \\ + \gamma [(1-2x) u' + 2(-1)^{\varepsilon_0 + \varepsilon_{00}} (1-x)^{\varepsilon_{01} + \varepsilon_{00}} x^{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{10}} v'] = -\beta u', \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + [\varepsilon_{11} 2(1-x) + (1 + |m|) - 2(1 + P)x] \frac{\partial v'}{\partial x} - \\ - \left[\alpha + \varepsilon_{11} \left\{ 2(1 + P) - \frac{1 + |m|}{x} \right\} \right] v' - \\ - \gamma [(1-2x) v' - 2(-1)^{\varepsilon_0 + \varepsilon_{00}} (1-x)^{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{10}} x^{\varepsilon_{01} + \varepsilon_0} u'] = -\beta v'. \end{aligned} \quad (26)$$

Нужно заметить, что ни при каких возможных значениях ϵ_{AB} в скобках, умноженных на γ , не появляется член, содержащий x^2 . Вычитая уравнение (26) из (25), получаем

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{\partial^2 (u' - v')}{\partial x^2} - 2(1 + P + \epsilon_{11}) x \frac{\partial (u' - v')}{\partial x} - \\ - (\alpha + 2\epsilon_{11}(1 + P))(u' - v') + (-1)^{\epsilon_{11} + \epsilon_{10}} \gamma (u' - v') + \\ + (1 + |m| + 2\epsilon_{11}) \frac{\partial (u' - v')}{\partial x} + \epsilon_{00} \frac{|m|}{x} u' - \epsilon_{11} \frac{1 + |m|}{x} v' + \\ + \{2(\epsilon_{01} + \epsilon_{00}) - 1\} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\beta (u' - v'), \end{aligned} \quad (27)$$

где учтено, что

$$1 + P + \epsilon_{11} = 1 + \bar{P} + \epsilon_{00}, \quad \alpha + 2\epsilon_{11}(1 + P) = \bar{\alpha} + 2\epsilon_{00}(1 + P).$$

Теперь представим u' и v' в виде рядов по убывающим степеням x :

$$u' = x^n + C_1 x^{n-1} + \dots; \quad v' = x^n + C_2 x^{n-1} + \dots \quad (28)$$

Тогда коэффициент при x^n в (26) равен

$$\begin{aligned} -n(n-1) - 2(1 + P + \epsilon_{11})n - [\alpha + 2\epsilon_{11}(1 + P)] - \\ - (-1)^{\epsilon_{11} + \epsilon_{10}} - 2\gamma(C_1 - C_2) = -\beta, \end{aligned} \quad (29)$$

а коэффициент при x^{n-1} в (27) имеет вид

$$\begin{aligned} (C_1 - C_2)[(n-1)(n-2) + 2(1 + P + \epsilon_{11})(n-1) + \\ + \{\alpha + 2\epsilon_{11}(1 + P)\} - (-1)^{\epsilon_{11} + \epsilon_{10}} - \beta] = \\ = [1 - 2(\epsilon_{11} + \epsilon_{10})]n + |m|(\epsilon_{00} - \epsilon_{11}) - \epsilon_{11}. \end{aligned} \quad (30)$$

Исключив $(C_1 - C_2)$ из двух последних уравнений и положив $l'' = n + P + \epsilon_{11}$, получаем

$$\beta = l''^2 - \kappa_z^2 \pm [l''^2 + 2\gamma\{|m|(\epsilon_{11} - \epsilon_{00}) - P(-1)^{\epsilon_{11} + \epsilon_{10}}\} + \gamma^2]^{1/2};$$

это выражение можно привести к виду

$$\beta = l''^2 - \kappa_z^2 \pm [l''^2 - \kappa_z^2 + (\kappa_z - \gamma)^2]^{1/2}. \quad (31)$$

Поскольку ϵ_{11} неявно входит в β , мы приведем здесь выражения для ϵ_{11} через m и κ_z :

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{4} (|m - 2\kappa_z - 1| + 1 - |m - 2\kappa_z|) (|m - 1| + 1 - |m|). \quad (32)$$

Чтобы определить корни β , соответствующие нижним уровням, отметим, что если $\epsilon_{01} = 1$ или $\epsilon_{10} = 1$, то $P = |\kappa_z|$ и, следовательно, $l'^2 - \kappa_z^2 = 0$ для $n = 0$. В этих случаях $C_1 = C_2 = 0$, когда $n = 0$, и выражение (30) тождественно обращается в нуль, так что β определяется только выражением (29). Действительно, когда $\epsilon_{10} = 1$, $\beta = \kappa_z - \gamma$, в то время как при $\epsilon_{01} = 1$ имеем $\beta = \gamma - \kappa_z$. Это два возможных корня, определенных из (31), когда $l'^2 - \kappa_z^2 = 0$. Однако при $\epsilon_{10} = 1$ $\kappa_z > 0$, в то время как при $\epsilon_{01} = 1$ $\kappa_z < 0$. Поэтому корень, соответствующий самому низкому уровню, может быть записан в виде

$$\beta = |\kappa_z| - \frac{\kappa_z}{|\kappa_z|} \gamma, \quad (33)$$

что согласуется с результатом (15) при стремлении γ к нулю.

Когда монополь имеет очень большую массу по сравнению с заряженной частицей, приведенная масса $\mu \approx m_z$. Пусть заряженной частицей является электрон, и масса монополя велика (т. е. $\mu \approx m_e$). В этом случае $Z = -1$, $B_z = -1$. Пусть κ_z имеет наименьшее значение $\kappa_{z=-1} = -1/2 (M/|M|)$ и $\gamma = -1/2 (M/|M|)$; тогда β можно привести к виду

$$\beta = l(l+1) \pm [l(l+1)]^{1/2}, \quad (34)$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$. Этот последний результат получил также Бандерэ [1], решавший задачу о собственных состояниях электрона в поле монополя бесконечно большой массы в релятивистском случае.

5. Найдем наименьшие энергетические состояния атомных ядер в поле монополя. Уравнение для радиальной части волновой функции R в рассматриваемом случае

имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} R - \left(\kappa^2 + \frac{\beta}{r^2} \right) R = 0, \quad (35)$$

где $\kappa^2 = -2\mu E/\hbar^2$ и μ — приведенная масса системы монополь—нуклон.

Для ядер с нулевым спином наименьшее значение β равно $\beta_1 = |\kappa_z|$ из (16), в то время как для ядер с $|\kappa_z| \gg \gamma$ (т. е. $1 \gg |B_z|$) $\beta_1 \approx \kappa_z$ из (33). Однако в случае протона, для которого $B_{z=1} = 2,79$, имеем

$$\beta_1 = |\kappa_{z=1}| \left[1 - B_{z=1} \left(\frac{\mu}{m_{z=1}} \right) \right].$$

Из (33) и (3) видно, что это выражение может быть отрицательным для достаточно больших значений приведенной массы.

Как было показано [5], в случае $\beta \geq -1/4$ уравнение (35) имеет решение только при положительных значениях энергии, но в случае $\beta < -1/4$ взаимодействие таково, что могут иметь место сколь угодно низкие отрицательные собственные значения энергии. Поэтому вблизи этого критического значения β следует рассматривать релятивистские эффекты. Тогда монополь может быть связан с протоном, если его масса сравнима с массой протона, но пока нельзя сделать определенных выводов¹⁾. С другой стороны, эти соображения показывают, что при взаимодействии магнитного монополя со всеми другими атомными ядрами связанных состояний не существует.

§ 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ УРОВНИ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ МОНОПОЛЯ И ЧАСТИЦЫ С ЗАРЯДОМ $Z|e|$, РАСПОЛОЖЕННЫХ В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ

1. Радиальное уравнение, полученное разделением переменных из более общего гамильтониана, приведен-

¹⁾ Готовится к печати статья, в которой рассматривается взаимодействие монополя с протоном при учете спина монополя. Полученные там результаты показывают, что масса монополя, которая приводит к критическому значению $\beta = -1/4$, равна массе протона.

ного в § 1, имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} R - \left(k^2 + U(r) + \frac{\beta}{r^2} \right) R = 0, \quad (36)$$

где

$$k^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2} \quad \text{и} \quad U(r) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{r}.$$

Тогда для электрона при

$$\beta = l(l+1) \pm [l(l+1)]^{1/2},$$

при $\kappa_z = 1/2$ и при положительных Z мы рассматриваем связанные состояния (отрицательные значения E). Положим $\rho = 2kr$ и $n' = (\mu/\hbar) (Ze^2/k)$, так же как для обычных полиномов Лягерра; тогда

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} R + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n'}{\rho} - \frac{\beta}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (37)$$

Асимптотически $R = e^{-1/2\rho} F$. Сделав эту подстановку, получим для F уравнение

$$F'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1 \right) F' + \left[\frac{n' - 1}{\rho} - \frac{\beta}{\rho^2} \right] F = 0. \quad (38)$$

Пусть $F = \rho^s L(\rho)$, а

$$s = \frac{-1 + (1 + 4\beta)^{1/2}}{2} = \left| \frac{1}{2} \pm [l(l+1)]^{1/2} \right| - \frac{1}{2}. \quad (39)$$

Другой корень, приводящий к недопустимой расходимости в начале координат, отбрасываем. Тогда для L получаем уравнение

$$\rho L'' + [2(s+1) - \rho] L' + (n' - s - 1) L = 0; \quad (40)$$

L является полиномом порядка n'' , если

$$n' = n'' + s + 1 = n'' + \frac{1}{2} + \left| \frac{1}{2} \pm [l(l+1)]^{1/2} \right|. \quad (41)$$

Отсюда

$$R = e^{-1/2\rho} \rho^s L(\rho) \quad (42)$$

и

$$E_{n'} = -\frac{e^2}{2a} \frac{Z^2}{n'^2}, \quad (43)$$

где $a = \hbar^2/\mu e^2$.

Кратность каждого собственного значения в (43) следует из $(2l + 1)$ -кратного вырождения каждого значения l и из того факта, что для данных $l \geq 1$ каждое значение n' , найденное из (41) для знака плюс перед квадратными скобками, можно получить еще раз, если использовать знак минус и заменить n'' на $n'' + 1$.

Таблица 1

Уровни энергии и степени вырождения
для обычного водорода по сравнению
с уровнями энергии и степенями вырождения,
соответствующими формуле (43)

Степень вырождения	n'	Степень вырождения водорода
1	1	2
3	$\sqrt{2}$	
1	2	8
6	$1 + \sqrt{2}$	
5	$\sqrt{6}$	
1	3	18
6	$2 + \sqrt{2}$	
10	$1 + \sqrt{6}$	
7	$\sqrt{12}$	
1	4	32
6	$3 + \sqrt{2}$	
10	$2 + \sqrt{6}$	
14	$1 + \sqrt{12}$	
9	$\sqrt{20}$	
1	5	50

2. В табл. 1 сравниваются уровни энергии (43) и степени вырождения каждого уровня с соответствующими значениями для обычного водорода. В таблице приведены значения параметра n' из (41), который обратно пропорционален корню квадратному из энергии.

В табл. 2 в предположении отсутствия взаимодействия между электронами сравниваются суммарные энер-

Таблица 2

Суммарные энергии электронов обычных атомов
и атомов с монополем в ядре без учета взаимодействия
между электронами

Z	Атом	Энергия, $Z^2 (-e^2/2a)$	
		для обычного атома	для атома с монополем
1	H	1	1
2	He	2	1,500
3	Li	2,250	2
4	Be	2,500	2,500
5	B	2,750	2,750
6	C	3	2,922
10	Ne	4	3,508
16	S	4,666	4,613
28	Ni	6	5,575
40	Zr	6,750	6,662
60	Nd	8	7,638
80	Hg	8,800	8,690

гии электронов ряда обычных атомов и атомов, содержащих монополь. Приведенные в таблице значения для $Z \geq 6$ попеременно соответствуют максимальной и минимальной разностям энергий обычного атома и атома, содержащего монополь. Следует отметить, что в этом приближении монополь увеличивает полную энергию электронов во всех случаях, кроме водорода, бериллия и бора. Вычисления методом теории возмущений должны показать, может ли взаимодействие монополь—электрон приводить к связыванию монополя в бериллии и боре, в то время как полная энергия в случае водорода зависит от взаимодействия монополь—протон, рассмотренного в § 1, п. 5.

В табл. 3 приведены ненормированные собственные функции, полученные из (21), (24), (28), (42), которые необходимы для вычислений, упомянутых выше. Векторы $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначают ортогональные собственные функции σ_z . Полная собственная функция определяется

Таблица 3

Ненормированные собственные функции электрона в поле заряженной частицы и монополя, полученные из формул (21) и (42)

$$\begin{aligned}\psi_{100} &= \left(-\sin \frac{1}{2} \theta e^{-i\varphi} \uparrow + \cos \frac{1}{2} \theta \downarrow \right) e^{-zr/a} \\ \psi_{\sqrt{20}+1} &= \left(-\cos \frac{1}{2} \theta \left[\sin^2 \frac{1}{2} \theta + (3-\beta) \right] \uparrow + \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{1}{2} \theta \cos^2 \frac{1}{2} \theta e^{+i\varphi} \downarrow \right) e^{-zr/\sqrt{2}a} r^{\sqrt{2}-1} \\ \psi_{\sqrt{20}} &= \left(\sin \frac{1}{2} \theta \left[\cos^2 \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{\beta} \right] e^{-i\varphi} \uparrow + \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{1}{2} \theta \left[\sin^2 \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{\beta} \right] \downarrow \right) e^{-zr/\sqrt{2}a} r^{\sqrt{2}-1} \\ \psi_{\sqrt{20}-1} &= \left(\cos \frac{1}{2} \theta \sin^2 \frac{1}{2} \theta e^{-i2\varphi} \uparrow - \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{1}{2} \theta \left[\cos^2 \frac{1}{2} \theta + (3-\beta) \right] e^{-i\varphi} \downarrow \right) e^{-zr/\sqrt{2}a} r^{\sqrt{2}-1} \\ \psi_{200} &= \left(-\sin \frac{1}{2} \theta e^{-i\varphi} \uparrow + \cos \frac{1}{2} \theta \downarrow \right) e^{-\frac{1}{2}zr/a} \times \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zr}{a} \right), \text{ где } \beta = 2 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

тремя индексами n' , n и m , где n' — энергетический параметр из (41), тогда как n и m — параметры, характеризующие угловую часть волновой функции, как и в (21) и (28).

3. Вычисление методом теории возмущений полных энергий электронов для атомов, подобных бериллию и бору, носит стандартный и несколько утомительный характер. Способ вычислений и результаты были проверены путем выполнения аналогичных вычислений для аппроксимации энергий обычных атомов.

В табл. 4 сравниваются эти вычисленные значения и наблюдаемые значения энергий обычных атомов. Эти результаты показывают, что монополь, находящийся внутри атомного ядра или вблизи от него, заметно увеличивает полную электронную энергию. Тем не менее можно

Таблица 4

Вычисленные значения суммарных энергий электронов гелия, бериллия и однократно ионизованного бора для обычных атомов и атомов, содержащих монополь (энергия в единицах $-e^2/2a$)

Z	Атом	Значения, вычисленные методом теории возмущений		Экспериментальные значения
		для обычного атома	для атома с монополем	
2	He	5,70	4,63	5,81
4	Be	28,4	25,2	29,35
5	B ⁺	47,2	43,5	48,76

ожидать, что обычные парамагнитные атомы будут притягивать монополь. Несмотря на то что диамагнитный эффект полностью компенсирует такое притяжение, когда монополь находится на расстоянии $r = 0$, имеет смысл исследовать поведение монополя на других расстояниях.

§ 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОВЕДЕНИИ МОНОПОЛЯ НА НЕКОТОРОМ РАССТОЯНИИ ОТ ЯДРА

1. В предыдущих параграфах определены энергетические параметры для случая, когда монополь находится вблизи атомного ядра. Задача о монополе, расположенном на произвольном расстоянии от ядра, значительно более сложна и рассматривается здесь крайне приближенно.

Когда монополь находится на значительном расстоянии от электронной структуры, изменение ее энергии ΔE является суммой обычных парамагнитных и диамагнитных членов:

$$\Delta E = E_p + E_d = -\frac{e\hbar}{2\mu c} \mathcal{H} \sum_i (m_z^i + 2s_z^i) + \frac{e^2}{\mu c^2} \mathcal{H}^2 \sum_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (44)$$

где $\mathcal{H} = M/R^2$ — напряженность магнитного поля, R — расстояние монополя с зарядом M до структуры, i — индекс суммирования по различным электронам, а m_z^i , s_z^i , x_i^2 и y_i^2 — собственные значения обычных операторов z -компоненты момента количества движения, спина и координат соответственно.

При попытке оценить минимальную энергию, которую может иметь обычное парамагнитное вещество в поле монополя, минимум ΔE может быть найден для случая атома водорода, где $m_z = 0$, $s_z = 1/2$, а $x^2 = y^2 = (\hbar^2/4\mu e^2)^2 = a_0^2$. Тогда

$$\frac{\partial \Delta E}{\partial R} = 0 = \frac{2eM\hbar}{2\mu c R^3} - \frac{4e^2 M^2 \cdot 2a_0^2}{8\mu c^2 R^5}, \quad (45)$$

но $eM/\hbar c = 1/2$, так что $(\hbar^2/2\mu R^3)(1 - a_0^2/2R^2) = 0$. Следовательно,

$$R = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \quad (46)$$

и минимальная энергия

$$\Delta E_{\text{мин}} = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2} + \frac{\hbar^2}{4\mu a_0^2} = -6,76 \text{ эв}. \quad (47)$$

2. Этот последний результат выводит нас за пределы той области значений R , в которой справедлива аппроксимация (44). Однако использование пробной волновой функции и полного гамильтониана, соответствующего (44), позволяет установить как верхний, так и нижний пределы энергии связи. Такое вычисление было проведено и для пробной волновой функции, подобной ψ_{100} (см. табл. 3), после длинного расчета было получено максимальное значение $\Delta E_{\text{мин}} \approx -7 \text{ эв}$ при $R \approx 0,56 a_0$, что очень близко к результату (47). В случае многоэлектронной конфигурации из выражения (44) видно, что, хотя каждый электрон вносит вклад в диамагнитный член, лишь несколько электронов на незаполненных оболочках или в возбужденных состояниях могут быть парамагнитными. Следовательно, нужно ожидать, что энергия связи монополя в веществе сравнима с химической энергией связи и не может существенно ее превосходить.

Конечно, никакая оценка ядерных сил невозможна, и они могут быть силами притяжения, отталкивания или нейтральными. Однако монополю сталкивается с заметным барьером, прежде чем на него оказывает воздействие ядро.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ РОЖДЕНИЯ МОНОПОЛЕЙ ПЕРВИЧНЫМ КОСМИЧЕСКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ И ЭКСПЕРИМЕНТЫ, УСТАНОВЛИВАЮЩИЕ ВЕРХНЮЮ ГРАНИЦУ СЕЧЕНИЯ ТАКОГО РОЖДЕНИЯ

1. В первичном космическом излучении имеются частицы с энергией, достаточной для образования пары монополей, даже если монополю значительно тяжелее протона¹⁾. После рождения²⁾ в атмосфере первоначально имеющий большую энергию монополю на протяжении нескольких метров замедляется до низкой конечной скорости в магнитном поле Земли вследствие больших ионизационных потерь, не зависящих от скорости (около 5 Мэв/см при нормальных температуре и давлении). Никакая обычная космическая установка не может зарегистрировать эти монополи, движущиеся вдоль силовых линий магнитного поля с малой скоростью, а относительно малое число монополей с большой энергией, рождаемых вблизи ядерной эмульсии или пузырьковой камеры, вероятно, останавливается в блоках защиты таких установок. Например, слой латуни толщиной $0,25 \text{ мм}$ остановит монополю с энергией 1 Гэв .

Если бы монополю был сильно связан с веществом неизвестными ядерными силами или если бы он был

¹⁾ Хотя монополю был введен в рассмотрение как частица, полностью аналогичная электрону, он имеет постоянную «тонкой» структуры $M^2/\hbar c = 137/4$ и, следовательно, такие процессы, как образование пары монополей, не могут рассматриваться в предположении слабой связи монополя с веществом. Однако возможно, что расчет, основанный на предположении слабой связи, даст правильный ответ с точностью до нескольких порядков величины. Такой расчет, проведенный для монополей в предположении, что их масса сравнима с массой протона, приводит к выводу, что интенсивность потока монополей на поверхности Земли грубо равна $1 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$.

²⁾ Для сохранения заряда монополю должен продолжать свое существование неограниченно долго, поскольку вероятность аннигиляции при столкновении для монополя пренебрежимо мала.

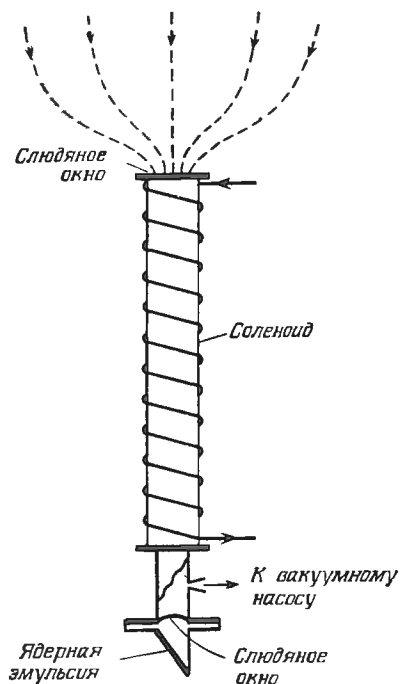
тяжелее протона, связанного с ним силами, рассмотренными в § 1, п. 5, то представляется возможным, что такие монополи могли бы деполяризовать Землю. Действительно, при интенсивности потока монополей $1 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ магнитное поле Земли было бы нейтрализовано за 1 месяц. Следовательно, можно сделать предварительное заключение, что если монополи накапливались в земной коре в течение последнего миллиарда лет, то их интенсивность должна быть меньше $10^{-10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$, так как никакого измеримого магнитного заряда, связанного с поверхностью Земли, не существует.

Однако если выводы § 3 справедливы и монополь лишь слабо связан с парамагнитным веществом, то монополи могут диффундировать сквозь Землю и должны слабо влиять на ее магнитное поле. В этом случае, если положительные монополи движутся в одном направлении, то отрицательные монополи — в противоположном направлении; за пределами земной атмосферы монополи благодаря своей инерции освобождаются от влияния магнитного поля Земли. Единственным результатом этого должно быть рассеяние части энергии, запасенной в магнитном поле Земли, которая может восполняться внутренними регенеративными процессами, предложенными в современной литературе.

2. Был выполнен простой эксперимент по регистрации тех монополей, достигших поверхности, которые могут диффундировать сквозь Землю со скоростью больше чем 1 км в миллиард лет. На фиг. 1 схематически показана созданная установка. Монополи, движущиеся с малой скоростью вдоль поля Земли, проходят сквозь тонкое окно внутрь длинного полого соленоида. Затем они ускоряются до нескольких сотен $Mэв$, проходят сквозь второе окно и регистрируются фотоэмульсией. Экспериментальные требования и выводы, сделанные при эксплуатации установки, описываются ниже.

При свободном падении в поле H гс монополь с зарядом $M = (137/2)e$ СГСМ получает энергию $(137/2) \times \times 300 H \text{ эв/см}$. Следовательно, в поле 250 гс на расстоянии 1 м монополь приобретает энергию $500 Mэв$. Как показано на фиг. 1, монополи, движущиеся вдоль силовых линий поля Земли, подходят к верхней поверхности

откачанной¹⁾ латунной трубы, которая является сердечником соленоида. Здесь они диффундируют сквозь слюдяное окно толщиной 10 мг/см^2 и приобретают при



Фиг. 1. Схематическое изображение установки для регистрации монополей, падающих на поверхность Земли.

движении в соленоиде энергию 500 Мэв на расстоянии 1 м . При прохождении второго слюдяного окна на нижнем конце соленоида монополь теряет энергию менее 50 Мэв , в то время как его потери в фотоэмульсии, куда он затем попадает, равны примерно 1 Мэв на расстоянии 1 мк .

Площадь эффективного поперечного сечения входящих в соленоид силовых линий магнитного поля Земли

¹⁾ Давление поддерживалось значительно ниже $10^{-3} \text{ мм. рт. ст.}$

A_E можно найти, принимая во внимание, что весь поток, входящий через верхний конец соленоида, обусловлен магнитным полем Земли для любого соленоида, для которого

$$H_a = H_s \frac{A_s}{4\pi a^2} < H_E, \quad (48)$$

где H_a — внешнее поле соленоида вблизи его середины, H — внутреннее поле соленоида; A_s — площадь поперечного сечения соленоида и a — половина его длины; H_E — магнитное поле Земли. Если для данного соленоида неравенство (48) справедливо, то

$$A_E H_E = A_s H_s. \quad (49)$$

Следует отметить, что соленоид был ориентирован вдоль локальных силовых линий поля и никакой ферромагнитный материал, который мог бы исказить магнитное поле, не находился вблизи соленоида.

После тщательного просмотра эмульсий, экспонировавшихся в течение двух недель, не было обнаружено никаких толстых треков, кроме нескольких коротких и случайно ориентированных треков α -частиц. (Треки монополей должны быть толще треков α -частиц, должны иметь длину несколько сотен микрон и быть ориентированы только в одном направлении.)

На основе этого отрицательного результата верхний предел¹⁾ потока монополей полагается равным $1/A_E T$, где в согласии с (49) $A_E = H_s A_s / H_E$, а T — время наблюдения, которое составляло $1,2 \cdot 10^6$ сек. В этой установке $H_s = 250$ гс, $A_s = 20$ см², в то время как $H_E = 0,6$ гс. Следовательно, $A_E \approx 8300$ см² и

$$\frac{1}{A_E T} \leq 10^{-10} \text{ монополь/см}^2 \cdot \text{сек.} \quad (50)$$

Соответствующее поперечное сечение рождения монополя первичным космическим излучением

$$\sigma_{\text{макс}} \leq \frac{1}{A_E T \int CN dx}, \quad (51)$$

¹⁾ Статистический смысл выражения «верхний предел» состоит в следующем: вероятность обнаружения в n раз большего потока равна e^{-n} .

где C — число первичных космических частиц, пересекающих площадь 1 см^2 за 1 сек на высоте x , а N — плотность ядер в воздухе на высоте x . Величина $\int CN dx$ только для космических протонов составляет примерно $3,8 \cdot 10^{24} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ [6]; следовательно,

$$\sigma_{\text{макс}} \leq 3 \cdot 10^{-35} \text{ см}^2. \quad (52)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Banderet P., *Helv. Phys. Acta*, **19**, 503 (1946).
2. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **A133**, 60 (1931); *Phys. Rev.*, **74**, 817 (1948) (статьи 1 и 2 данного сборника).
3. Тамм И. Е., *Zs. Phys.*, **71**, 141 (1931).
4. Fierz M., *Helv. Phys. Acta*, **17**, 27 (1944).
5. Mott N. F., Massey H. S. W., *The Theory of Atomic Collisions*, London, 1933, p. 40 (см. перевод: Н. Мотт и Г. Мессси, Теория атомных столкновений, М.—Л., 1936; М., 1951).
6. Rossi B., *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 566 (1948).

4. ПОИСКИ МОНОПОЛЕЙ ДИРАКА

*Е. Амальди, Г. Барони, Х. Браднер, М. де Карвальо,
Л. Хоффман, А. Манфредини, Г. Вандерхааге*

E. Amaldi, G. Baroni, H. Bradner, M. G. de Carvalho,
L. Hoffmann, A. Manfredini, G. Vanderhaeghe, preprint
CERN Report 63-13, Search for Dirac Magnetic Poles

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В 1931 г. Дирак [1] показал, что можно построить такую квантовую теорию, которая кроме точечных электрических зарядов предполагает существование в качестве источников электромагнитного поля точечных магнитных полюсов. Наиболее важной особенностью работы Дирака является то, что в ней величина магнитного полюса не рассматривается как новая универсальная константа, которая привносится в теорию из эксперимента; во всех существующих теориях по отношению к элементарному заряду поступают именно так. Магнитный заряд полюсов Дирака должен состоять из целого числа n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) элементарных зарядов g , которые связаны с e , c и $\hbar$ следующим соотношением:

$$\frac{g}{e} = \frac{1}{2} \frac{\hbar c}{e^2} = \frac{137}{2}. \quad (1)$$

Одной из наиболее интересных особенностей соотношения (1) является то, что оно объясняет тот известный эмпирический факт, что заряды всех элементарных частиц кратны элементарному заряду. Квантование заряда должно быть необходимым следствием существования магнитного заряда.

Хотя с этой точки зрения и с некоторых других теория Дирака [1, 2] явно представляет интерес, она не является полной, так как представляет собой «первично квантованную» теорию. Оказалось, что вторичное квантование электромагнитного поля, если его проводить обычным путем, когда наряду с точечными электрическими зарядами присутствуют магнитные точечные источники, связано со значительными трудностями.

В различных дискуссиях по поводу возможности дальнейшего развития теории и ее завершения затрагивались многие довольно тонкие вопросы (см. приложение А). Однако, поскольку возможное существование магнитных полюсов (монополей) Дирака не находится в явном противоречии с хорошо известными законами природы, многие авторы проводили эксперименты по поиску монополей как в составе космического излучения, так и среди вторичных частиц, рожденных в результате соударений при больших энергиях [3, 6].

С аналогичных позиций к данной проблеме подошли несколько групп, работающих в ЦЕРНе [7, 8] и в Брукхевене [9].

Между тем шаг к разрешению теоретических трудностей, упомянутых выше, сделали Кабиббо и Феррари [10], которым удалось распространить квантовую электродинамику на случай, когда кроме точечных зарядов присутствуют точечные полюсы. Это было сделано путем обобщения развитого Мандельштамом [11] формализма, в котором при описании электромагнитных полей не используются соответствующие потенциалы. Правда, Кабиббо и Феррари до сих пор не смогли найти вариационный принцип, из которого могут быть выведены уравнения обобщенных электромагнитных полей. Но полученных ими результатов уже достаточно, чтобы показать, что теория, включающая вторичное квантование, может быть построена, причем внутренняя логика этой теории требует выполнения соотношения Дирака (1) (см. приложение А).

Обращаясь к экспериментальным попыткам решения проблемы из различных работ, упомянутых выше [3, 6], мы остановимся главным образом на статье Брандсера и Избелла [6], так как только в ней описаны эксперименты, в которых производились поиски монополей, рождаемых на ускорителе частиц высоких энергий. Эти эксперименты, выполненные на Бэватроне Массачусетского технологического института, привели авторов к заключению, что если существуют монополи Дирака с массой не больше протонной, то они рождаются с очень малым сечением: область верхних пределов сечения рождения пар монополей в протон-нуклонных соударениях

для трех различных типов экспериментов лежит между 10^{-35} и 10^{-40} см².

Поскольку наибольшая масса частиц, рождаемых парами при соударениях протонов с энергией 28 Гэв с ядрами, почти равна трем протонным массам¹⁾, представляется интересным провести поиски монополей Дипрака и при энергиях, получаемых на протонном синхротроне ЦЕРНа.

В соответствии с этим в ЦЕРНе поставили две серии экспериментов. одну Джакомелли и др. [8] провели со счетчиками, а другую наша группа [7, 12] выполнила с ядерными эмульсиями.

Мы выполнили три типа экспериментов с эмульсиями, которые отличаются друг от друга тем, что при их интерпретации некоторые свойства монополей предполагались различными.

В экспериментах первого типа мишень, содержащая несколько граммов вещества на квадратный сантиметр, облучалась некоторое время в циркулирующем пучке протонного синхротрона. Монополи, рожденные в такой мишени при протон-нуклонных соударениях или вторичными γ -квантами, должны были быстро потерять энергию на ионизацию и остановиться в этой же мишени. Затем мишень вынималась из ускорителя и помещалась в импульсное магнитное поле от 60 до 150 кэ, которое было достаточным, чтобы извлечь из нее сильносвязанные монополи. Эксперименты этого типа проводились с мишенями из различных материалов, которые по-разному располагались в импульсном магните.

В экспериментах второго типа вблизи мишени непосредственно в камере ускорителя каждый раз во время каждого импульса интенсивности создавалось магнитное поле в несколько сотен эрстед. Монополи, вытянутые из мишени этим полем, должны были ускоряться внутри вакуумной трубы соленоидами, затем пройти через тон-

¹⁾ Кинематическая оценка массы монополя, приведенная здесь, получена при пренебрежении вкладом фермиевского движения нуклонов; в табл. 4 даны два значения m/m_p , одна из которых рассчитана без учета фермиевского движения, а другая — с учетом этого движения.

кое выходное окно и создать характерные треки в ядерных эмульсиях, расположенных около этого окна. Кроме того, сразу после облучения мишень вынималась и помещалась в такое же импульсное магнитное поле, как и в экспериментах первого типа, чтобы зарегистрировать те монополи, которые были связаны так сильно, что не могли двигаться под действием поля, приложенного в ускорителе.

В экспериментах обоих этих типов монополи Дирака должны были сначала замедлиться до тепловой энергии внутри той же мишени, в которой они могли родиться, а затем через некоторое время («очень короткое» в эксперименте второго типа и «очень длинное» в эксперименте первого типа) вытянуться оттуда соответствующим магнитным полем.

Замедления монополей до тепловых энергий удалось избежать в экспериментах третьего типа, где монополи, рожденные в мишени из легкого вещества (бериллия) толщиной в несколько граммов на квадратный сантиметр, должны выйти из нее с высокими скоростями, отклониться импульсным магнитным полем напряженностью 20 кэ и по магнитному каналу длиной более 2 м попасть в стопку эмульсий. Магнитный канал был сконструирован таким образом, что кинетическая энергия этих монополей никогда не была ниже примерно 0,5 Гэв.

В § 2 рассматриваются те свойства монополя, которые необходимо учитывать при планировании экспериментов и интерпретации полученных результатов. В § 3 детально описаны эксперименты. В § 4 обсуждаются результаты и делаются выводы. Результаты суммированы в табл. 4, которая содержит найденные с достоверностью 95% верхние пределы сечения рождения монополей в протон-протонных и протон-нуклонных соударениях, оцененные по отрицательным результатам каждого из экспериментов, описанных в § 3 (взятых порознь или вместе).

Заметим, что подобные же результаты были получены группой Джиакомелли [8], а также группой, работавшей в Брукхевене и использовавшей аналогичную методику [9].

§ 2. СВОЙСТВА МОНОПОЛЕЙ ДИРАКА

1. Константы связи

В этой работе всюду предполагается, что в формуле (1) для величины элементарного заряда монополя $n = \pm 1$; исключением является случай $n = \pm 2$, рассматриваемый в § 4. При таком значении g константа связи монополя с электромагнитным полем оказывается равной

$$\frac{g^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{g}{e} \right)^2 = \frac{1}{137} \left(\frac{137}{2} \right)^2 = \frac{137}{4} = 34,25, \quad (2)$$

т. е. так велика, что все методы, обычно используемые для расчета различных электромагнитных эффектов, создаваемых заряженными частицами, оказываются совершенно непригодными. Хотя это препятствие не столь фундаментально, как задача вторичного квантования электромагнитного поля в присутствии зарядов и монополей (§ 1 и приложение А), оно все же сильно затрудняет оценку некоторых свойств монополя.

Тем не менее из-за отсутствия лучших методов теории возмущений использовалась при оценке некоторых свойств монополей, таких, как влияние их возможного существования на результаты $(g = 2)$ -эксперимента [13, 14] (приложение Б), и сечения рождения пар монополей в протон-нуклонных соударениях (п. 8 настоящего параграфа и приложение В). Результаты этих расчетов должны использоваться со всеми возможными оговорками. Можно лишь сказать, что, исходя из имеющегося опыта расчетов с использованием теории возмущений в случае взаимодействия пионов, можно надеяться, что при расчетах, выполненных таким методом для монополей, ошибка не превышает двух порядков величины, и возможно она меньше чем один порядок величины.

В случае движения монополей через вещество взаимодействие монополей с зарядами атомов характеризуется «эффективной константой связи»

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{g}{e} = \frac{1}{137} \frac{137}{2} = \frac{1}{2}, \quad (3)$$

которая порядка единицы. Бауэр [15] обратил внимание на то, что для расчета энергетических потерь на ионизацию и тормозное излучение могут быть использованы два метода, пригодные соответственно при большой и малой константах связи: полуклассический метод, использующий понятие прицельного параметра, и борновское приближение. Так как оба метода дают результаты, которые согласуются друг с другом при константе связи порядка единицы, можно надеяться, что в упомянутых выше случаях результаты, полученные методом прицельного параметра, не должны быть слишком плохими (см. п. 5 настоящего параграфа и приложение Д).

2. Масса и спин

Теория Дирака не делает никаких предсказаний о массе монополя m_g . Однако часто предполагается, что масса монополя

$$m_g = \left(\frac{g}{e}\right)^2 m_e = \left(\frac{g}{e}\right)^2 \frac{m_e}{m_p} m_p = 2,56 m_p, \quad (4)$$

так как в этом случае классический радиус монополя

$$r_g = \frac{g^2}{m_g c^2} \quad (5)$$

равен классическому радиусу электрона. При таком выборе массы отношения силы инерции к реакции излучения для монополя и для электрона одинаковы при одной и той же величине $(\ddot{x}/\ddot{x})$ [15].

Нижний предел массы монополя, равный приблизительно 1,2 массы протона¹⁾, может быть получен из анализа результатов $(g-2)$ -эксперимента [14], так как виртуальное рождение более легких монополей должно было бы изменить величину магнитного момента мюона. Эти результаты следует принимать с оговорками, так как они получены методами теории возмущений. Более того, в них используется разумное, но произвольное предположение о виде взаимодействия монополей с электромагнитным полем (приложение Б).

¹⁾ См. примечание на стр. 181.

Экспериментальный нижний предел

$$m_g \gtrsim m_p$$

может быть установлен из результатов экспериментов на Бэватроне, которые упоминались в § 1 [6]

Сведений о спине монополя еще меньше, чем о его массе. Дирак рассматривал монополи как фермионы со спином $1/2$ [2], но с тем же основанием можно предположить, что они должны быть бозонами. Интересно отметить, что если монополи являются фермионами со спином $1/2$, то они должны иметь электрический дипольный момент

$$\mu_g = \frac{\hbar e}{2m_g c} = \frac{\hbar c}{2g} \frac{g^2}{m_g c^2} = e r_g, \quad (6)$$

направленный для положительных монополей навстречу спине и для отрицательных — по спине [см. уравнение (A.1в)].

Возможное существование такого электрического дипольного момента должно учитываться при обсуждении связи монополей Дирака с ядрами (п. 6 настоящего параграфа).

3. Стабильность

Монополи Дирака должны быть стабильными. Единственной возможностью их исчезновения является аннигиляция с монополями противоположного знака. Поэтому среднее время жизни монополей, дрейфующих внутри мишеней под влиянием теплового движения должно быть очень большим по сравнению с длительностью проводимых экспериментов (приложение Г)

4. Ускорение монополей

Монополи, ускоряемые в вакууме магнитным полем H э, увеличивают свою энергию со скоростью

$$300 \frac{137}{2} H = 2,055 \cdot 10^4 H \text{ эв} \cdot \text{см}^{-1}, \quad (7)$$

т. е. в поле 1 кэ прирост энергии равен $20,55 \text{ Мэв/см}$

5 Энергетические потери, испытываемые монополями при движении через вещество

Монополи, движущиеся через вещество с релятивистской скоростью, должны терять энергию в основном за счет взаимодействия их электромагнитного поля с зарядами атомных электронов

Ионизационные потери. Удельные потери энергии на ионизацию оценили Коул [16] и Бауэр [15]. Эти авторы использовали полуклассический метод прицельного параметра, который в случаях, поданных рассматриваемому, также не должен давать неправильных результатов (см. конец п. 1 настоящего параграфа). Основным результатом, полученным обоими авторами, заключается в том, что энергетические потери монополя на ионизацию

$$k_g \equiv \left(- \frac{dT}{dR} \right)_g \quad (8)$$

могут быть выражены через соответствующие потери заряженной частицы, движущейся с той же скоростью, в виде

$$k_g = k_{Ze} \left(\frac{g}{Ze} \right)^2 \beta^2. \quad (9)$$

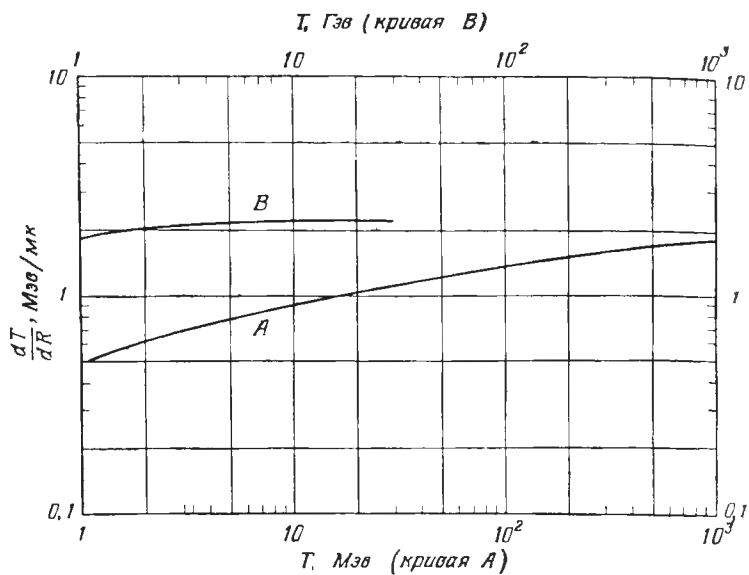
Таким образом, для $\beta = 1$ энергетические потери монополя на ионизацию должны быть в

$$\left(\frac{g}{e} \right)^2 \approx 4700 \quad (10)$$

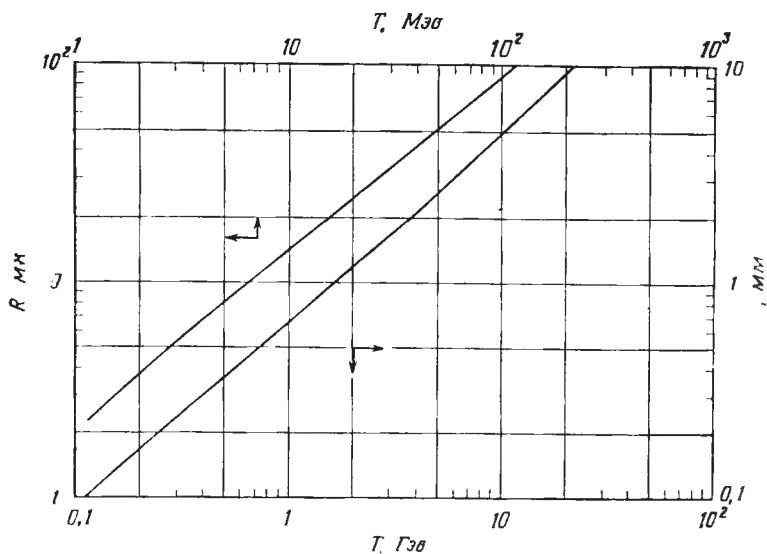
раз больше, чем потери релятивистской частицы с зарядом $Z = 1$ (в минимуме ионизации для заряженных частиц).

Кривые ионизационных потерь монополя, полученные тем применением соотношения (9) и зависимости энергетических потерь заряженной частицы в алюминии и эмульсии от энергии, показаны на фиг. 1 и 3. Из этих кривых были получены (см. приложение Д) соответствующие зависимости пробега от энергии (фиг. 2 и 4).

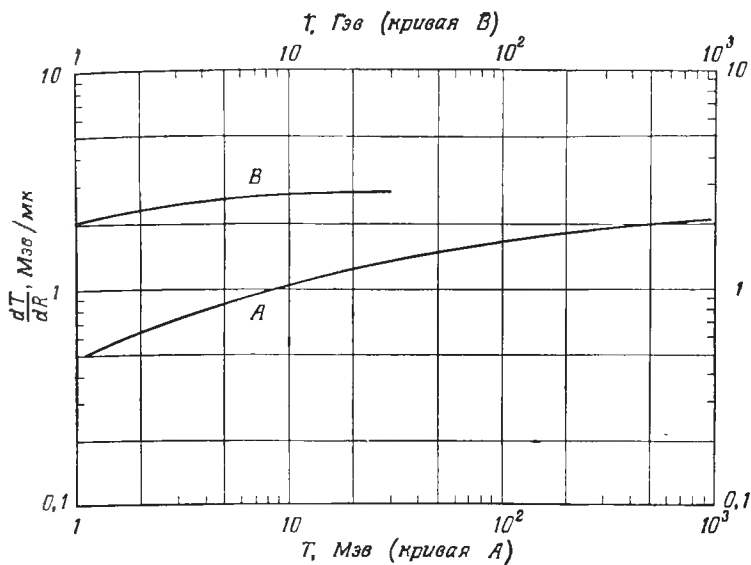
Из фиг. 1 и 3 можно видеть, что величина k_g остается примерно постоянной вплоть до малых скоростей, а затем падает до нуля (не имеет «хвоста»



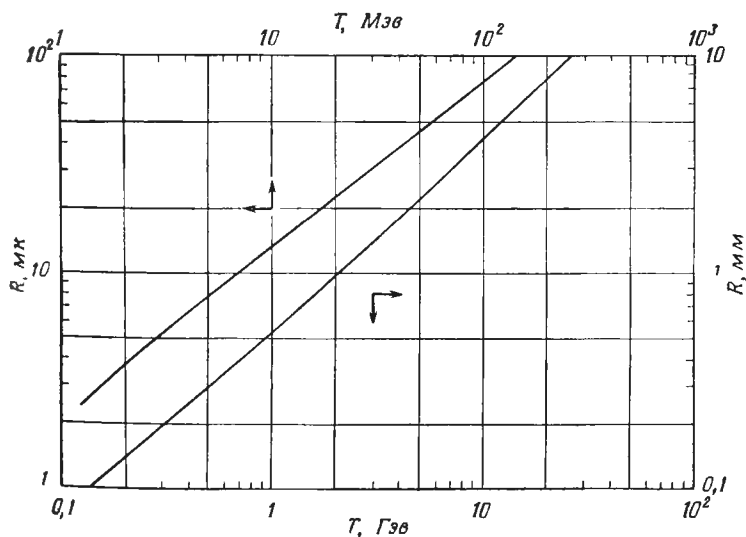
Ф и г. 1. Потери энергии на ионизацию в алюминии для монополей протонной массы.



Ф и г. 2. Зависимость пробега от энергии в алюминии для монополей протонной массы.

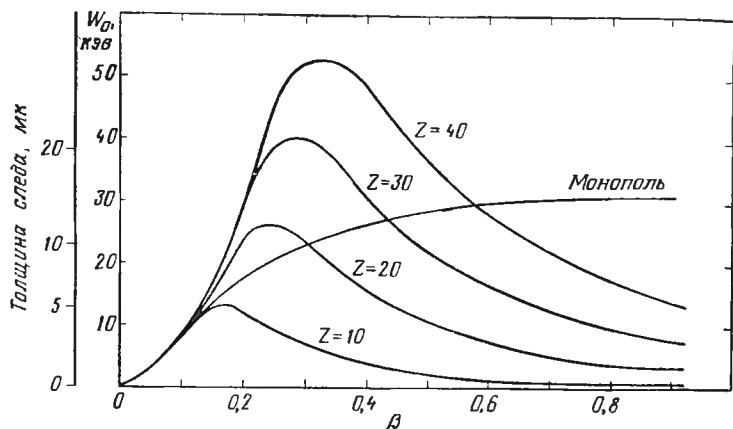


Фиг. 3. Потери энергии на ионизацию в эмульсии для монополей протонной массы.



Фиг. 4. Зависимость пробега от энергии в эмульсии для монополей протонной массы.

Брэгга); такое поведение обусловлено тем, что в выражение (9) входит множитель β^2 . Соответствующий трек в эмульсии или в веществе любого другого прибора для визуального наблюдения треков должен иметь характерное сужение к концу. Такое поведение монополя



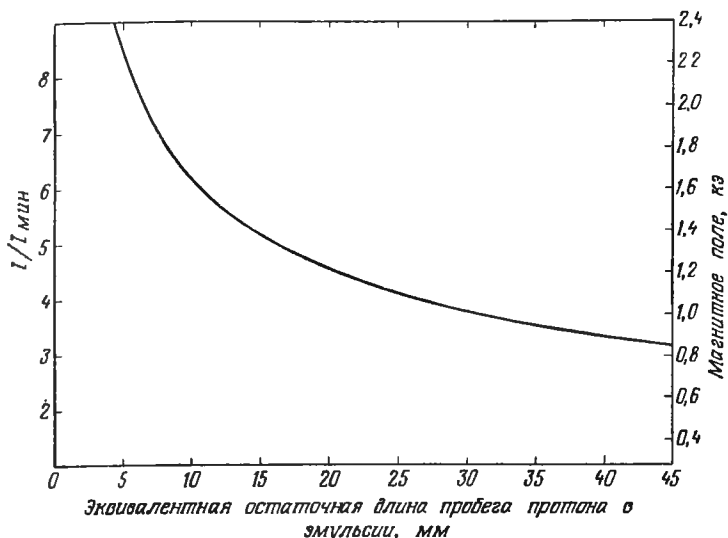
Фиг. 5. Сужение трека монополя к концу и зависимость от $\beta = v/c$ энергии W_0 тех δ -электронов, число которых достаточно, чтобы сделать трек непрозрачным, для ядер с зарядом $Z = 10, 20, 30, 40$ и монополей Дирака [17].

предсказали Кацц и Парнелл [17], которые распространили на монополь теорию Лонгчэмпа. Эта теория основывается на предположении, что трек имеет непрозрачный ствол, толщина которого определяется пробегом δ -электронов с энергией W_0 , если на 100 мк длины трека приходится 400 δ -электронов с энергией больше W_0 . Результаты этих авторов приведены на фиг. 5, где представлены зависимости энергии W_0 и толщины трека от β . Шкала толщины была калибрована по измерениям толщины треков быстрых тяжелых ядер с известной скоростью.

Баркаш¹⁾ обратил наше внимание на то, что в действительности следует ожидать существенно меньшего

¹⁾ W. H. Barkas, частное сообщение.

числа зерен на 100 мк эмульсии, чем это следует из уравнения (9), если пробег δ -электронов порядка диаметра зерен бромистого серебра в эмульсии. Мы вернемся к этому вопросу в § 3, п. 2.



Фиг. 6. Магнитное поле, требуемое для компенсации потерь монополя на ионизацию в эмульсии.

Зависимость ионизации от пробега взята из отчета Аткинсона и Виллиса UCRL 2426.

На фиг. 6 показана величина магнитного поля, которое необходимо приложить, чтобы прирост энергии монополя компенсировал потери энергии на ионизацию в эмульсии. При этих условиях монополь должен двигаться через эмульсию с постоянной скоростью.

Тормозное излучение. Потери энергии на тормозное излучение пренебрежимо малы, пока значение γ для монополей меньше 20 (приложение Д), как это имеет место во всех экспериментах, описанных ниже.

Рассеяние. Наконец, необходимо рассмотреть рассеяние, испытываемое монополями, проходящими через вещество. Во многих работах [3, 9—23] обсуждаются

решения уравнения Шредингера, описывающего движение точечного заряда в поле покоящегося монополя или наоборот; однако ни в одной из них квантовомеханическая проблема рассеяния не решена полностью, даже в нерелятивистском приближении. Поэтому мы изложим классический подход к этой проблеме, который может быть проведен элементарными методами [24, 26]¹⁾. Траектория движущейся частицы в обоих случаях лежит на поверхности конуса, в вершине которого находится рассеиватель. Направление оси конуса определяется вектором $\mathbf{I}$ [см. уравнение (A.12) в приложении А, где этот вопрос изложен детальнее, и фиг. 22].

При большой величине параметра соударения рассеяние подчиняется формуле Резерфорда, тогда как при близких соударениях дифференциальное сечение рассеяния имеет очень нерегулярную зависимость от угла. Квантовомеханическое рассмотрение не было доведено до конца именно из-за этих усложнений, возникающих при очень близких соударениях. С другой стороны, близкие соударения очень редки и, следовательно, не могут иметь существенного значения при определении поведения монополей, движущихся через вещество.

Особое внимание следует уделить поведению монополей, когда их энергия так мала, что они не могут ионизовать атомы. Например, такая ситуация может встретиться, когда в эмульсии движется монополь, энергия которого меньше, чем энергия связи электронов в галогениде серебра, равная 2,8 эв. При таких энергиях электрон остается связанным с атомом, и монополь будет рассеиваться массивным центром через орбитальный и спиновый магнитные моменты электрона. Предположим, что магнитный момент электрона равен μ (порядка одного магнетона Бора μ_B), и пренебрежем малым ларморовским диамагнетизмом. Рассеяние на таком связанном электроны легко оценить, учитывая, что дипольный момент электрона имеет время переориентироваться в направлении на монополь. Если b — параметр соударения, а p_y — поперечный импульс, приобретаемый мо

¹⁾ Проблему движения точечного заряда в поле точечного монополя впервые рассмотрел Пуанкаре [45]

нополем при соударении, то мы имеем

$$p_y = \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\mu g}{r^3} \cos \theta \frac{ds}{v_0} =$$

$$= \frac{2\mu g}{v_0 b^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\mu g}{v_0 b^2}. \quad (11)$$

Из этого соотношения можно рассчитать значение b , при котором p_y равно импульсу p налетающего монополя, а именно

$$b \sqrt{\frac{\mu g}{2T}} \approx \sqrt{\frac{\mu_B g}{2T}} = \sqrt{\frac{0,85}{T(\text{эв})}} \text{ \AA}. \quad (12)$$

Таким образом, для монополя с $T_g = 0,85 \text{ эв}$ эти условия уже имеют место при величине прицельного параметра b , равной $1 \text{ \AA}$. Поскольку монополь, начинающий двигаться из состояния покоя в поле 2 кэ , при перемещении на $2 \text{ \AA}$ приобретает энергию только $0,4 \text{ эв}$, можно заключить что для больших углов рассеяния средняя длина свободного пробега порядка атомного радиуса и, следовательно, монополь не сможет ускоряться в поле 2 кэ ¹⁾

6. Связь монополей с веществом

Проблема связи монополей в веществе достаточно сложна, так как она имеет много аспектов, которые могут быть объединены вокруг двух главных вопросов, подлежащих обсуждению; это, во-первых, локальная

¹⁾ Более детально расчет этого эффекта можно провести, если част сечение рассеяния, которое, согласно уравнению (11), для монополя с кинетической энергией T равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin \theta d\theta} = \frac{\mu g}{4T} \frac{1}{\sin \theta} \sim \frac{\mu g}{4T} \frac{1}{\theta^3}.$$

Интегрируя по углу, получаем

$$\sigma(\theta_{\min}) \sim \frac{\pi}{2} \frac{\mu g}{T} \frac{1}{\theta_{\min}} = \frac{3 \cdot 10^{-16}}{T(\text{эв})} \frac{1}{\theta_{\min}} \text{ см}^2.$$

связь, т. е. связь монополя с данным (одиночным) атомом, молекулой, ионом или ядром, и, во-вторых, макроскопическая, или усредненная, связь, обусловленная взаимодействием монополя с веществом, взятым как целое.

Локальная связь с атомными или молекулярными структурами. Говоря о локальной связи, необходимо напомнить, что уже в первых работах было показано [19, 21, 22], что в отсутствие электрического поля заряженные частицы, такие, как «жесткое» ядро или электрон, не могут быть связаны с магнитным монополем. Однако, поскольку вещество построено с помощью электрических полей, Малкус [3] попытался определить, не уменьшает ли присутствие монополя энергию электронной структуры атома и не приводит ли это к связанным состояниям. Среди различных подходов, предложенных Малкусом для решения этой проблемы, имеется один, который, по крайней мере качественно, приводит к заключению, что монополь может быть связан с атомом или молекулой с энергией связи порядка нескольких электронвольт.

Поместим монополь на расстоянии R от центра масс рассматриваемого атома или молекулы. Магнитное поле

$$H = \frac{g}{r^2} \quad (13)$$

($g = 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ э} \cdot \text{см}^2$), создаваемое монополем, будет поляризовать молекулу. При этом энергия молекулы изменится на величину

$$\Delta E = E_p + E_d, \quad (14)$$

где E_p — часть, обусловленная парамагнитным эффектом, а E_d — часть, обусловленная диамагнитным эффектом. Так как член, описывающий парамагнитное притяжение, на больших расстояниях должен преобладать над членом, описывающим диамагнитное отталкивание, можно ожидать, что на некотором расстоянии ΔE имеет отрицательный минимум.

Доказательство было проведено Малкусом с использованием следующих грубых приближений:

а. Для двух членов уравнения (14) использовались обычные выражения, справедливые для однородного магнитного поля:

$$E_p = -\frac{e\hbar}{2m_e c} H \sum_{i=1}^Z (m_z^i + 2s_z^i) = -\frac{A}{g} H, \quad (15a)$$

$$E_d = \frac{e^2}{m_e c^2} H^2 \sum_{i=1}^Z (x_i^2 + y_i^2) = \frac{B}{g^2} H^2, \quad (15b)$$

где m_z^i , s_z^i — собственные значения операторов, представляющих z -компоненты орбитального момента и спина i -го электрона, $x_i^2 + y_i^2 = \rho_i^2$ — средний квадрат расстояния i -го электрона от оси z (совпадающей с направлением магнитного поля).

б. Для поля H использовалось выражение (13) при $r = R$.

Для связанного состояния R таково, что

$$\frac{d}{dR} \Delta E = 0, \quad \text{а именно} \quad R = \sqrt{\frac{2B}{A}}.$$

В случае атома водорода [$Z = 1$, $m_z = 0$, $s_z = 1/2$]
 $\lambda^2 = y^2 = a_0^2 = (\hbar/m_e c^2)^2$ получаем

$$R = 2a_0 = 1,06 \text{ \AA}, \quad \Delta E_{\min} = -0,85 \text{ эв}. \quad (16)$$

Таким образом, Малкус сделал заключение, что монополи должны быть связаны с парамагнитными атомами или молекулами с энергией, сравнимой с энергией химической связи. Этот вывод можно использовать только в качестве грубой оценки, так как, когда монополь находится на расстоянии от атома порядка атомных размеров или меньше, по-видимому, вся электронная структура изменяется так, что может быть даже терлет всякий смысл проводить различие между диамагнитными и парамагнитными атомами. Однако по сугубо практическим причинам мы в дальнейшем не будем учитывать это замечание.

Важным частным случаем является связь с молекулами O_2 , которые в основном состоянии ($\Lambda = 0$, $S = 1$;

состояние $^3\Sigma$) имеют магнитный момент (25)

$$\mu_{O_2} = \sqrt{4S(S+1)} \mu_B = 2,38\mu_B, \quad (17)$$

$$\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-20} \text{ эрг} \cdot \text{см}^2. \quad (18)$$

Потенциальная энергия V системы монополюль — диполь, рассчитанная с использованием выражения (17), равна

$$V = -\frac{\mu g}{r^2} = -\frac{5,4}{r^2} \text{ эв}, \quad (19)$$

где r в ангстремах. Для расстояния $r = 4 \text{ \AA}$ энергия притяжения равна $0,337 \text{ эв}$. Очень трудно сказать, какая часть этого притяжения компенсируется диамагнитными эффектами, но можно ожидать, что монополюль будет стремиться притянуть все молекулы O_2 , которые он встретит на своем пути, и что при соответствующих условиях, которые могут встретиться в газе или на поверхности образца твердого тела, вокруг него образуется комплекс молекул O_2 заметных размеров (см. ниже в этом параграфе).

Таким образом, если не учитывать этих осложнений, которые будут рассмотрены ниже, следует ожидать, что монополюль, проходящий через образец твердого вещества или жидкость, независимо от парамагнитной или диамагнитной природы вещества будет стремиться оставаться связанным с отдельными молекулами O_2 , которые могут быть включены в это вещество или растворены в нем.

В заключение напомним, что существование таких связанных состояний у электрона, движущегося в поле частицы, обладающей магнитным зарядом в дополнение к электрическому заряду, было доказано недавно Элиезером и Роем [23]; мы не можем вдаваться в детали, так как очевидно, что этот случай лежит вне сферы нашего рассмотрения.

Связь с ядрами. Различные типы локальной связи были рассмотрены Перселлом¹⁾, который отметил, что при взаимодействии монополя с магнитными моментами

¹⁾ Е. М. Purcell, частное сообщение.

ядер на очень коротких расстояниях притяжение компенсируется диамагнитным отталкиванием, возникающим за счет ларморовской прецессии ядер в поле монополя. Комбинируя формулу, подобную (15б) с выражением для притяжения между монополем и точечным ядерным моментом, Перселл оценил, что потенциальная энергия взаимодействия должна иметь минимум при расстоянии порядка ядерного радиуса глубиной примерно от 0,5 до 1 Мэв.

Однако ядерный момент размазан по области, имеющей размеры ядра, в связи с этим потенциальная энергия имеет конечный минимум, даже если диамагнитный эффект пренебрежимо мал.

Предполагая, что магнитный момент в пределах ядра распределен по закону Гаусса, Перселл пришел к заключению, что чисто парамагнитное взаимодействие имеет минимум на расстоянии порядка 1 ферми с глубиной потенциальной ямы в несколько Мэв для одного ядерного магнетона. Тот факт, что эта оценка не учитывает поляризуемость ядра полем монополя, не может нарушить справедливость замечания, что даже при исчезающе малом диамагнитном отталкивании глубина парамагнитной потенциальной ямы примерно в 5—10 раз меньше значения, необходимого для создания связанных состояний.

Однако это качественное заключение должно приниматься с некоторыми оговорками, так как нельзя исключить возможность того, что более тщательный анализ даст некоторые условия для связи монополя с ядром ¹⁾.

Более того, необходимо отметить, что если монополи Дирака — фермионы со спином $1/2$, то они должны иметь электрический дипольный момент, определяемый выражением (6), что приводит к взаимодействию монополя с электрическим полем электрона или ядра. В случае ядер соответствующая энергия должна быть добавлена к магнитному члену, так что потенциальная яма взаимодействия монополя с ядром становится более глубокой. Для оценки величины этого эффекта можно рассмотреть монополь, помещенный на поверхности ядра, причем

¹⁾ Е. М. Purcell, частное сообщение.

сний монополя имеет самое благоприятное направление. Соответствующая энергия определяется выражением

$$E - \mu_g \frac{Ze}{R^2} = - \frac{Z}{A^{2/3}} \frac{e^2}{r_e} \frac{r_e r_g}{r_0^2} - \frac{Z}{A^{2/3}} \frac{r_e r_g}{r_0^2} \cdot 0,5 \text{ Мэв.} \quad (20)$$

Для $r_g = r_e = 2,81 \cdot 10^{-13}$ см, $r_0 = 1,25 \cdot 10^{-13}$ см выражение (20) дает

$$E = 3,2 \frac{Z}{A^{2/3}} \text{ Мэв,} \quad (21)$$

откуда имеем: для С — 3,7 Мэв, для Al — 4,6 Мэв, для Си — 5,8 Мэв и для Вi — 7,6 Мэв. В случае водорода выражение (20) дает для $R = 2r$. $E = 0,2 \text{ Мэв}$.

Наконец, мы не рассматриваем возможность существования других видов взаимодействия между монополями и нуклонами, которые также могут приводить к связи монополей с ядрами.

Усредненная связь. Макроскопическое взаимодействие между монополем и веществом возникает из-за того, что монополь, создающий сильное магнитное поле (13), поляризует окружающее его вещество в очень большом объеме. Если W_m — работа намагничивания вещества монополем, то энергия, которую мы должны сообщить монополю, чтобы вырвать его из вещества, равна

$$W_e = - W_m. \quad (22)$$

Эта энергия может рассматриваться как разновидность потенциального барьера, локализованного на поверхности вещества. Поскольку W_m положительна для парамагнитных веществ и отрицательна для диамагнитных веществ, в первом случае мы должны затратить работу — W_e , чтобы вытянуть монополь наружу, а во втором — произвести работу W_e , чтобы ввести монополь внутрь вещества через его поверхность.

Детальное обсуждение вопроса проведено в приложении Е, где отдельно разбираются различные случаи. Прежде всего излагается так называемое *макроскопическое приближение*; по-видимому, оно дает правильный ответ (с точностью до множителя 2) в случае диамагнит-

ных веществ. Эта же процедура применима в случае металлов, таких, как алюминий и хром, парамагнетизм которых объясняется по крайней мере в основном электронами проводимости. В этих двух случаях применимость макроскопического приближения становится сомнительной на очень малых расстояниях от монополя, но мы надеемся, что все же оно дает правильный порядок величины W_e . Численные результаты, полученные этим методом, представлены в табл. Е. 1.

В сплаве Cu (98%) — Cr (2%) (см. § 3) хром, по-видимому, находится главным образом в виде вкраплений чистого металла в медь. Работа выхода из вкраплений должна быть такой же, как и упомянутая выше работа выхода из чистого хрома.

Возможно, однако, что определенная часть атомов хрома (концентрация $c < 1,10^{-3}$) остается растворенной в меди. Парамагнетизм твердых растворов $\text{Cu}(1-c) + \text{Cr}(c)$ не был измерен, но вероятнее всего он обусловлен магнитными моментами ионов хрома. Случай локализованных моментов рассматривается в общем виде в разделах Е. 2 и Е. 3 и применительно к растворам $\text{Cu} - \text{Cr}$ — в разделе Е. 4 приложения Е. Основные результаты представлены в виде соотношений (Е. 39) ($-W_e \leq 0,6 \text{ эв}$) и (Е. 40).

Молекулы кислорода, вкрапленные на поверхности. Притяжение, вызванное молекулами кислорода, вкрапленными на поверхности вещества, складывается с парамагнитным притяжением или диамагнитным отталкиванием, которые описаны выше.

Этот эффект иногда может играть важную роль, например в случае графита, большая часть поверхности которого покрыта мономолекулярным слоем молекул O_2 .

Энергия окклюзии, отнесенная к одной молекуле, не так точно хорошо известна, для графита мы приняли

$$W_0 = -0,1 \text{ эв}, \quad (23)$$

что соответствует температуре обезгаживания, примерно равной 1000° [27].

Проблема вырывания монополей из твердого вещества подробно рассмотрена в приложении Г, где

принимается, что монополю, связанный с N молекулами кислорода, будет оторван от поверхности мишени магнитным полем, если оно может перенести монополю на расстояние $2 \cdot 10^{-8}$ см (постоянная решетки) при $N < 6$ или $3,6 \cdot 10^{-8} \cdot N^{1/2}$ см (межмолекулярное расстояние в жидком кислороде) при $N \geq 6$. Поэтому мы должны коснуться экстремальных случаев внутренних сил связи. Может оказаться, что монополи свободно дрейфуют через мишень и выходят из нее или, наоборот, связаны в ней так сильно, что приложенные магнитные поля не могут вырвать их оттуда. Мы предполагаем, что монополи будут выходить из мишени, если энергия, приобретаемая ими на расстоянии порядка 10^{-8} см, равна их энергии связи.

Монополи в газе. Монополи, вышедшие из мишени под действием магнитного поля, будут окружены комплексом молекул кислорода, размеры которого могут увеличиваться или уменьшаться в зависимости от того, будет преобладать дальнейшая «конденсация» молекул O_2 из газа или «испарение» молекул комплекса. Этот вопрос детально рассматривается в приложении Ж, где показано, что при низком давлении комплекс не может содержать больше десяти молекул, тогда как при высоком давлении его размеры могут возрасти до сотни молекул.

Размеры комплекса очень важны, так как они определяют среднюю длину свободного пробега в газе [выражение (Ж.13)], а также скорость, приобретаемую комплексом под воздействием приложенного магнитного поля.

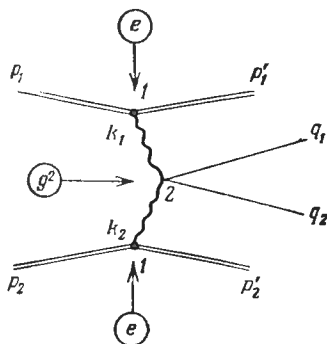
Если средняя длина свободного пробега в газе мала (высокое давление), то монополи будут следовать по магнитным силовым линиям; при большой длине свободного пробега комплекс (или свободный монополю) будет испытывать фокусировку по скоростям. Если скорость кислородного комплекса достаточно велика, то в процессе столкновения с атомами или молекулами он будет «обдираться»; мы будем считать, что для обдираания достаточно скорости, равной скорости валентных электронов, т. е. примерно 10^8 см/сек.

7. Рождение пар монополей

В связи с описанными ниже экспериментами было бы желательно оценить сечение рождения пар монополей в результате взаимодействия протонов или γ -квантов с ядрами. Однако такая оценка затрагивает вопросы, которые не могут быть разрешены в рамках современной теории из-за трудностей, упомянутых в п. 1 данного параграфа и в приложении А. Несмотря на это, мы попытаемся получить некоторые очень грубые оценки сечения, которые могут быть оправданы, если иметь в виду следующие два момента.

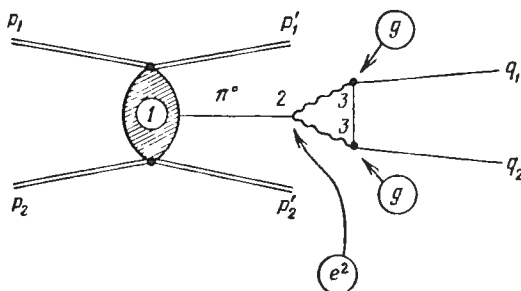
Прежде всего предположим, что монополи взаимодействуют только с электромагнитным полем. Если бы монополям можно было приписать другие виды взаимодействий, например «сильное» взаимодействие, характерное для нуклонов, то сечение их рождения было бы выше, но, вероятно, ненамного, так как уже электромагнитное взаимодействие монополей очень велико. Однако главная причина, по которой можно не рассматривать другие виды взаимодействия монополей, заключается в том, что описанные ниже эксперименты планировались для проверки гипотезы Дирака о возможности существования монополей как чисто электромагнитных объектов.

Второе соображение более практического характера. Из эксперимента, в котором вообще не обнаружены монополи, можно получить только верхний предел сечения их рождения. Если же этот предел на несколько порядков меньше теоретической оценки, даже когда она справедлива с точностью до одного или двух порядков величины, можно сделать вывод, что монополи Дирака в исследуемом диапазоне масс не существуют. Сделать подобный вывод было нашей первой задачей.



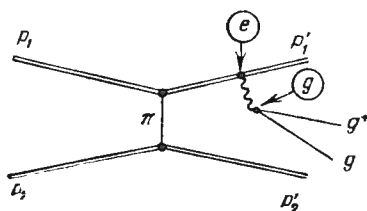
Фиг. 7. Рождение пары монополей, вызванное чисто кулоновским взаимодействием двух сталкивающихся протонов.

Даже в предположении, что монополи обладают лишь электромагнитным взаимодействием, их рождение парами в результате столкновения двух протонов может

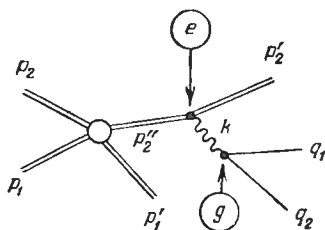


Фиг. 8. Рождение пары монополей в результате рождения виртуального нейтрального пиона и его распада на два γ -кванта.

быть обусловлено двумя механизмами: первый включает только взаимодействие кулоновских полей двух протонов, второй имеет место благодаря сильному взаимодействию сталкивающихся частиц. Фиг. 7 соответствует



Фиг. 9. Рождение пары монополей виртуальным γ -квантом при обмене виртуальным пионом между протоном и нуклоном ядра.



Фиг. 10. Обобщение процесса, представленного на фиг. 9, путем замены обмена виртуальным пионом упругим $p-eN$ -рассеянием.

первому механизму, а фиг. 8, 9 и 10 иллюстрируют процессы рождения чисто электромагнитных монополей, в которых участвует сильное взаимодействие.

Грубые оценки сечения, приведенные в приложении В (табл. В. 1), учитывают только диаграммы, изображенные на фиг. 7 и 10. Влияние других диаграмм, по-видимому, не столь существенно и результаты наших расчетов дают достаточно хорошее приближение для сечения, особенно если учесть сильное расхождение этих теоретических результатов с экспериментальным верхним пределом, полученным в § 4 из наших экспериментов.

В приложении В приведены также некоторые соображения о вкладе диаграмм, изображенных на фиг. 8 и 9, и о сечении рождения монополей γ -квантами.

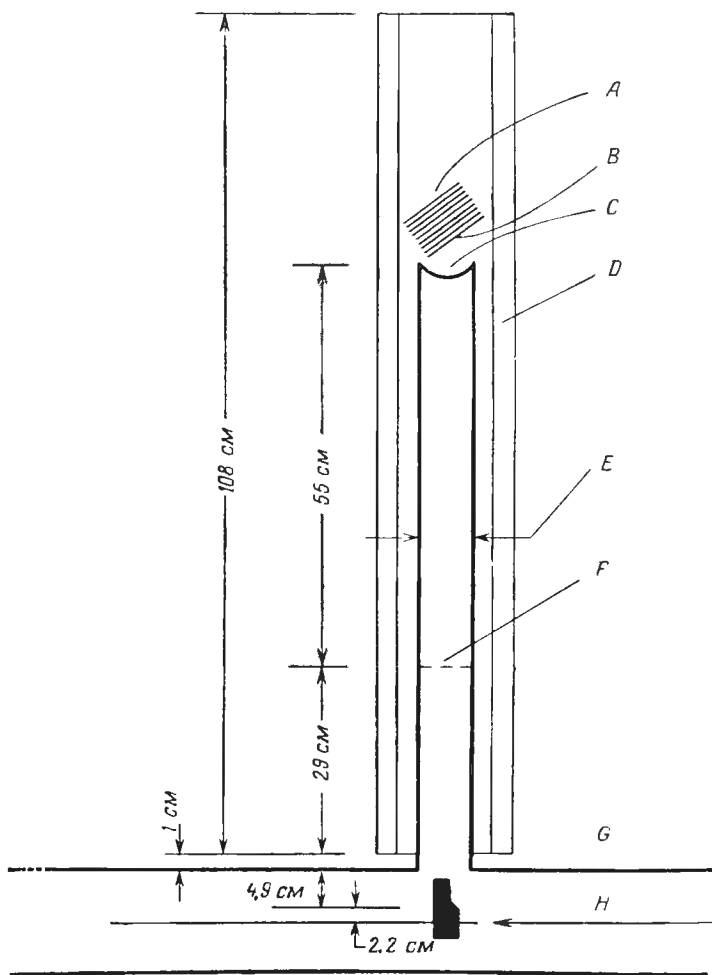
§ 3. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Как уже упоминалось во введении, были выполнены эксперименты трех типов, которые сильно различаются по своей физической сущности. В основу проектирования и интерпретации результатов экспериментов первого типа положено теоретически ожидаемое поведение монополей Дирака в веществе; в меньшей мере это относится к экспериментам второго типа, а для экспериментов третьего типа такое поведение не существенно. Таким образом, выводы из последних экспериментов, по-видимому, обладают наибольшей значимостью.

При описании экспериментальных деталей мы нашли удобным изменить логический порядок изложения и описать сначала эксперименты второго типа, затем первого типа и, наконец, третьего.

1. Эксперименты второго типа

На фиг. 11 показана схема установки, которая использовалась в экспериментах второго типа. Графитовая мишень толщиной $3,14 \text{ г/см}^2$ ($2,06 \text{ г/см}^3$) в каждом цикле ускорения вводилась в пучок протонов с энергией $27,2 \text{ Гэв}$, циркулирующий в протонном синхротроне. Синхронно с магнитным циклом ускорителя до введения мишени создавалось магнитное поле в соленоиде длиной 108 мм , находящемся рядом с мишенью. В центре катушки этого соленоида напряженность поля составляла 2100 э . Плато на вершине импульса поля имело



Фиг. 11. Экспериментальная установка, использовавшаяся в экспериментах второго типа.

A — пять эмульсий К0, каждая толщиной 20 мк, *B* — черная бумага толщиной 70 мк, *C* — майларовое окно толщиной 140 мк, *D* — соленоид (средний диаметр 13 см, 2,1 кэ в центре, включается импульсно, синхронно с импульсами ускорителя, длительность плоской части импульса ~ 600 мек), *E* — труба внутренним диаметром 3,3 см, *F* — органическая обдирочная пленка толщиной $\sim 0,5$ мк, *G* — камера ускорителя, вакуум $5 \cdot 10^{-6}$ тор, *H* — пучок протонов.

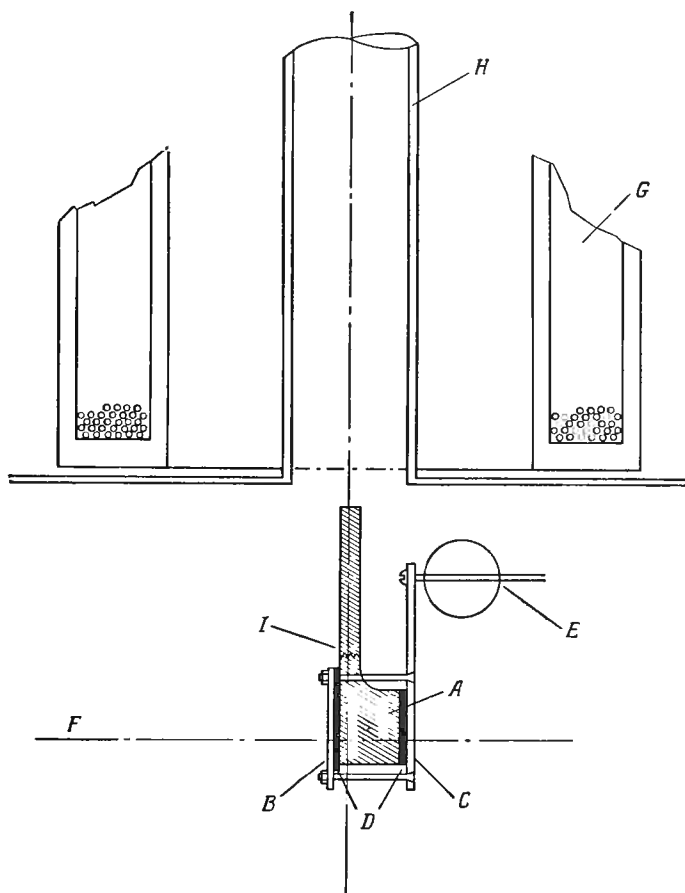
длительность 600 мсек¹⁾, а мишень вводилась на время 30 мсек. Напряженность поля на ближайшем к соленоиду конце мишени была более 800 э, но кончик мишени во время облучения сломался в месте, где поле было только около 310 э (фиг. 12). Таким образом, мы не знаем, как долго существовало каждое из этих двух значений и как учесть это обстоятельство (табл. 1).

Если флуктуации внутреннего потенциала в графите и локальная парамагнитная связь меньше чем 0,7 эв (приложение Г), то приложенное магнитное поле должно вытянуть монополи на поверхность. Затем они будут двигаться дальше, если их связь с поверхностью так мала ($\leq 0,8$ эв), что они смогут покинуть поверхность за время, когда приложенное поле имеет нужное направление, в противном случае они останутся связанными в мишени, пока не будет выполнен эксперимент первого типа (см. ниже).

Поскольку в центре мишени приложенное поле должно ускорять монополи на длине, равной периоду решетки, примерно на 0,1 эв, флуктуации могут быть таковы, что скорость тепловой диффузии будет сравнима со скоростью миграции, обусловленной приложенным полем. В таком случае монополи в результате диффузии могут выйти из мишени через латунный держатель мишени, когда поле выключено. Чтобы избежать этого, мы

¹⁾ Когда мы начинали этот эксперимент, Хайн оценил, что на небольшой длине орбиты ускорителя может быть приложено возмущающее поле без компенсации, если интеграл вертикальной составляющей этого магнитного поля по координате y вдоль орбиты протонов ускорителя не превышает 10^4 э·см. Поскольку использованный в этом эксперименте соленоид, будучи помещен в положение, показанное на фиг. 11, создавал поле, соответствующее величии интеграла около $1,8 \cdot 10^4$ э·см, мы поместили на расстоянии 14 м от соленоида такой же соленоид противоположной полярности. Во время эксперимента компенсирующий соленоид был выключен и действие одной лишь рабочей катушки не оказывало какого-либо заметного влияния на пучок.

Таким образом, мы пришли к выводу, что значение «интеграла поля» $2 \cdot 10^4$ э·см не возмущает внутренний пучок ускорителя, если поле прикладывается примерно через 600 мсек после начала ускорения. Этим значением интеграла $\int H_y dy$ представляет интерес для оценки необходимой точности компенсации сильных магнитных полей, которые используются в экспериментах третьего типа.



Ф и г. 12. Устройство графитовой мишени.

A — графит, $3,14 \text{ г/см}^2$, *B* — латунь, 1 мм, *C* — бронза, 2 мм, *D* — две пластинки висмута, 1,58 мм каждая, *E* — ось вращения мишени, *F* — пучок, *G* — соленоид, *H* — труба из нержавеющей стали, *I* — место, где во время облучения сломалась мишень.

Таблица 1

Основные особенности различных экспериментов

Тип эксперимента	Мишень	Толщина мишени, г/см ²	$\eta_{\text{мишень}}^{1)}$	Магнитное поле у мишени, э	Эффективное число цирку- лирующих протонов	Энергия протонов, Гэв	Σ_p	Σ_M
							см ²	— 40 бытие
II	Графит	3,14	$\sim 1^2)$	310 (на по- верхности) 250 (среднее)	$2,64 \cdot 10^{14}$	27,2	5,80	2,80
I	Графит	3,14	$\sim 1^2)$	$60 \cdot 10^3$	$2,64 \cdot 10^{14}$	27,2	5,70	2,69
I	Алюминий	2,70	0,60	$75 \cdot 10^3$	$1,30 \cdot 10^{15}$	25,0	1,37	0,66
I	Медь (98%)— хром (2%)	5,34	0,83	$150 \cdot 10^3$	$1,04 \cdot 10^{15}$	25,0	0,65	0,297
I	Полиэтилен (10мм), алюминий (1,75мм)	1,39	0,35	$150 \cdot 10^3$	$0,81 \cdot 10^{15}$	25,0	2,48	1,28
III	Бериллий	2,76	0,02 ³⁾	$22 \cdot 10^3$	$0,73 \cdot 10^{15}$	28,0	50	22

1) При расчете Σ_b мы всегда использовали значение $\eta_{\text{мишень}}$, соответствующее $m_g/m_p=2,5$.

2) В случае графитовой мишени $\eta_{\text{мишень}}$ равно 1,01 для p - p -столкновений и равно 1,05 для p - M -столкновений

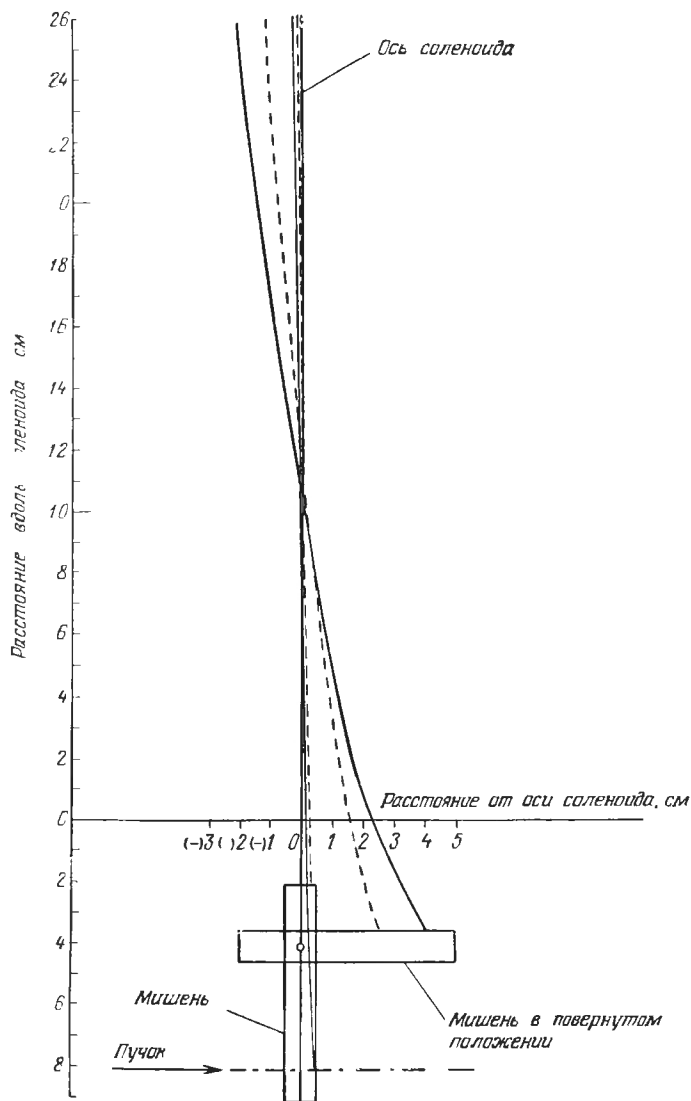
3) Для эксперимента III типа приведено значение η .

отделили графит от держателя мишени двумя прокладками висмута толщиной 1,58 мм (фиг. 12). Так как диамагнитная восприимчивость для твердого висмута больше, чем для графита, мы полагали, что висмут должен создавать потенциальный барьер, препятствующий выходу монополей через боковые поверхности мишени. Однако диамагнитные силы, действующие на монополь, могут создать между графитом и висмутом потенциальный барьер высотой лишь 0,07 эв (табл. Е.1).

Монополи, вышедшие в вакуум с открытой стороны графитовой мишени, должны ускоряться в приложенном поле так же, как монополи, вышедшие из вершины мишени (фиг. 13). Скорость монополей при попадании их на пленку из пластика толщиной около 0,5 мк должна быть достаточной, чтобы ободрать кислород и позволить монополю выйти с другой стороны пленки со скоростью выше 10^8 см/сек при условии, что комплекс содержит менее 200 молекул кислорода. Затем монополи, ускорившись до энергии 2,2 Гэв, должны пройти через майларовую пленку толщиной 0,14 мм и войти в стопку из 5 эмульсий Илфорд К0 толщиной 200 мк каждая, расположенных под углом 45° к направлению падающих частиц. Монополи должны давать треки длиной от 1000 мк ($m_g = m_p$) до 1200 мк ($m_g = 2,5 m_p$). Их можно было бы легко обнаружить в третьей эмульсии стопки, где создаваемая ими ионизация в 1000 раз превышает минимальную. Мишень была облучена $2,64 \cdot 10^{14}$ циркулирующими протонами, каждый из которых прошел через нее около семи раз (приложение 3).

Эмульсии, использованные в этом эксперименте, не должны были детектировать монополи, движущиеся со скоростью меньше 10^8 см/сек. Это возможно, если комплексы кислорода, первоначально притянутые к монополям, так велики, что монополи при прохождении через обдирочную пленку замедляются до скоростей, меньших чем орбитальные скорости электронов; при этом первоначальный комплекс должен содержать около 200 молекул кислорода. Рассмотрение, проведенное в приложении Ж, исключает такую возможность.

К тому же даже магнитное поле 800 э может оторвать от поверхности графита лишь монополи с



Фиг. 13. Несколько примеров траекторий монополей, вылетающих в вакуум из графитовой мишени в экспериментах второго типа.

комплексами, содержащими примерно пять молекул кислорода, так как энергия окклюзии составляет около 0,1 эв на молекулу кислорода. Следовательно, можно сделать вывод, что монополи, вырванные с поверхности графита, должны детектироваться в эмульсиях типа К0.

Эмульсии были подвергнуты обработке по специальной методике, описанной де Карвальо и др.¹⁾ с использованием разбавленного проявителя при низкой температуре.

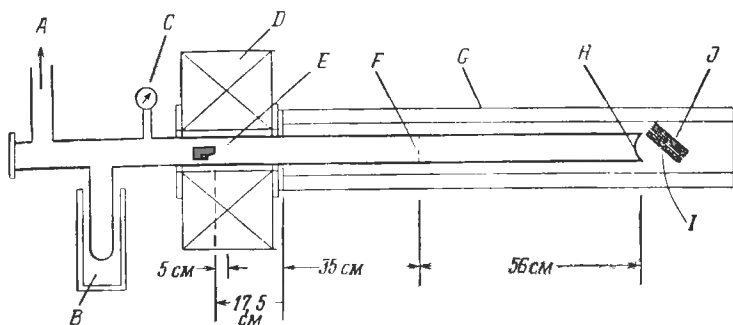
Первая эмульсия не могла быть просмотрена из-за очень большого фона, обусловленного мягким излучением мишени. По этой же причине вторая эмульсия была обработана лишь частично (просмотренная площадь 800 мм²). Третья эмульсия оказалась очень чистой; она была тщательно просмотрена (на площади 26,0 см²) с целью обнаружения каких-либо черных треков, но ничего не было найдено.

2. Эксперименты первого типа с диамагнитной мишенью

Графитовая мишень, использовавшаяся в описанных выше экспериментах второго типа, была извлечена из ускорителя и помещена в импульсное поле 60 кэ [28] с длительностью импульса, примерно равной 2 мсек. Схема эксперимента показана на фиг. 14.

¹⁾ Чтобы уменьшить фоновые эффекты, использовались эмульсии типа К0. Состав проявителя был следующим: борная кислота 10 г, сульфит натрия 2 г, бромистый калий 0,5 г, амидол 1 г на 1 л воды. Была надежда, что удастся различить частицы, создающие ионизацию, превышающую минимальную в 10 раз, т. е. частицы с ионизационными потерями 6 кэв/мкм, треки которых должны быть подобны трекам монополей, проходящих через эмульсии под действием магнитного поля, приложенного в соответствии с условиями эксперимента. Однако эта цель не была достигнута из-за фона частиц с $I \sim 10\%$, которых оказалось более чем 10^7 см⁻². Ситуация была даже хуже, чем представлено выше, вследствие эффекта, упомянутого в п. 2 данного параграфа, на который указал Баркаш. В результате треки монополей не могли наблюдаться в четвертой, пятой и т. д. эмульсиях, в то же время, как отмечено в тексте, монополи должны были бы легко распознаваться в третьей эмульсии.

Прежде всего включался соленоид, поле которого на поверхности мишени составляло 62 э. Поскольку это меньше, чем поле 310 э, приложенное в ускорителе, монополи не должны были двигаться на этом этапе. Затем включался импульсный магнит [28], создающий на поверхности графита поле 120 кэ. Вакуум 10^{-5} тор обеспечивал для комплекса из 180 молекул кислорода среднюю длину свободного пробега, превышающую 20 см.



Фиг. 14. Экспериментальная установка, использовавшаяся в эксперименте первого типа с графитовой мишенью.

A — к масляному диффузионному насосу, B — азотная ловушка, C — датчик вакуумметра, D — импульсный магнит, E — мишень, F — органическая обдирочная пленка толщиной $\sim 0,05$ мк, G — соленоид длиной 108 см, H — майларовое окно толщиной 20 мк, I — черная бумага толщиной 70 мк, J — одиннадцать эмульсий К5, каждая толщиной 200 мк.

Более тяжелые комплексы теряют мало энергии при столкновениях в газе. Обдирочная фольга толщиной примерно 0,05 мк (приложение Г.3) позволяла монополям вылетать со скоростью, большей чем орбитальная скорость электронов, если комплексы состояли по крайней мере из 600 молекул кислорода.

Быстрые монополи, пройдя выходное окно, закрытое майларовой пленкой толщиной 30 мк должны произвести сильную ионизацию в первых четырех (из общего числа 11) слоях эмульсии Илфорд К5 толщиной 200 мк, расположенных под углом 45° к падающим частицам. Создав сильную ионизацию на пути 1100 мк, монополи должны пройти оставшиеся 2000 мк эмульсии под дей-

ствием постоянного поля 2 кэ, создавая треки с ионизацией, примерно в три раза превышающей минимальную. При оценке ионизации принимается во внимание следующее замечание Баркаша¹⁾: при скорости, которой обладают монополи в рассматриваемом случае, δ -электроны имеют слишком малую энергию, чтобы выйти из зерен, пересеченных монополями, и, таким образом, только эти зерна могут проявиться. В результате мы должны ожидать, что на 100 мк трека будет около 300 зерен или около 60 групп зерен. Таким образом, подобные треки имеют ионизацию, превышающую минимальную примерно в 3 раза, а не в 7 раз, как получается по формуле (9).

Следовательно, даже если ошибки наших оценок очень велики, мы должны были бы тем не менее видеть отчетливые треки в эмульсии K5, оставленные монополями, которые имеют работу выхода из графита около 24 эв или могут образовать вокруг себя комплекс примерно из 500 молекул кислорода.

Первая эмульсионная стопка была просмотрена (полная площадь просмотра $30,46 \text{ см}^2$) с целью обнаружения любых треков с ионизацией больше $\sim 1,3I_0$. Было найдено 277 серых треков с $1,3I \leq I \leq 2I_0$, 97 серых треков с $I > 2I_0$, 193 черных треков (таких, как у протонов на последнем сантиметре их пробега), 1 жирный трек со многими δ -электронами.

Мы построили распределение по азимутальным углам для каждого из двух первых классов треков. Оказалось, что оба распределения изотропны. Таким образом, можно считать, что они обусловлены в основном космическими частицами. Все 193 трека, по-видимому, обязаны своим происхождением звездам, образовавшимся в эмульсиях. Жирный трек был тщательно исследован в соседних эмульсиях; было найдено, что он начинается в большой звезде, образованной во второй эмульсионной стопке.

Таким образом, в этом эксперименте также не было обнаружено треков, которые можно было бы приписать магнитным монополям

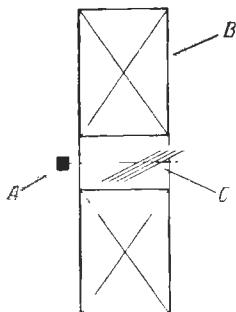
¹⁾ W. H. Barkas, частное сообщение.

3. Эксперименты первого типа с парамагнитными мишенями

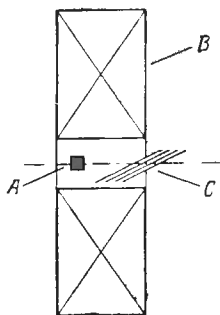
Было проведено три экспозиции с парамагнитными мишенями.

1. Алюминий [парамагнетизм электронов проводимости, приложение Е.5, формула (Е.5)].

Мишень толщиной 10 мм была облучена полным потоком $1,30 \cdot 10^{15}$ протонов с энергией 25 Гэв; каждый протон проходил через мишень примерно 25 раз. Затем эта



Фиг. 15. Расположение оборудования для извлечения монополей из алюминиевой мишени. А — мишенивая мишень, В — импульсный магнит, С — эмульсия G5.



Фиг. 16. Расположение оборудования для извлечения монополей из медно-хромовой и полиэтилен-алюминиевой мишеней.

А — мишень, В — импульсный магнит, С — эмульсия G5.

мишень была помещена в магнит [28], в котором создавался импульс поля 150 кэ длительностью 1 мсек. На фиг. 15 показано расположение мишени, катушки и стопки эмульсии G5 толщиной по 600 мк. Магнитное поле на поверхности мишени было около 75 кэ. Монополи, связанные с мишенями или оклюдированными молекулами кислорода с энергией до 30 эв, должны вырываться и следовать по магнитным силовым линиям к стопке эмульсии. Ионизация, создаваемая монополями при прохождении ими эмульсий, зависит от магнитного поля, требуемого для преодоления связи монополя с веществом мишени, кислородом и веществом эмульсионной

стопки. При энергии связи $0,25 \text{ эв}$ ясно различимый трек образуется при $2I_{\text{мин}}$. Однако при энергии связи меньше $0,6 \text{ эв}$ монополи могут быть потеряны под действием магнитного поля Земли за счет диффузии за время между облучением и включением магнитного поля.

2. Медь (98%) — хром (2%) (ионный парамагнетизм хрома и диамагнетизм меди; приложение Е.4).

Мишень толщиной 6 мм была облучена полным потоком $1,04 \cdot 10^{15}$ протонов с энергией 25 Гэв и затем помещена в импульсное магнитное поле, как и в описанном выше случае алюминия. В этом случае, однако, мишень была расположена на расстоянии 1 см от центра магнита, а эмульсии G5 — в области, где магнитные силовые линии расходятся (фиг. 16). Магнитное поле 150 кэ на поверхности мишени должно удалять монополи, если их энергия связи не превышает 60 эв . Эмульсии должны перехватить более половины монополей, вылетающих из мишени.

3. Алюминий — полиэтилен (парамагнетизм электронов проводимости алюминия и диамагнетизм полиэтилена).

Мишень толщиной 10 мм была облучена полным потоком $0,81 \cdot 10^{15}$ протонов с энергией 25 Гэв , а затем помещена в импульсное магнитное поле, как и в описанном выше случае.

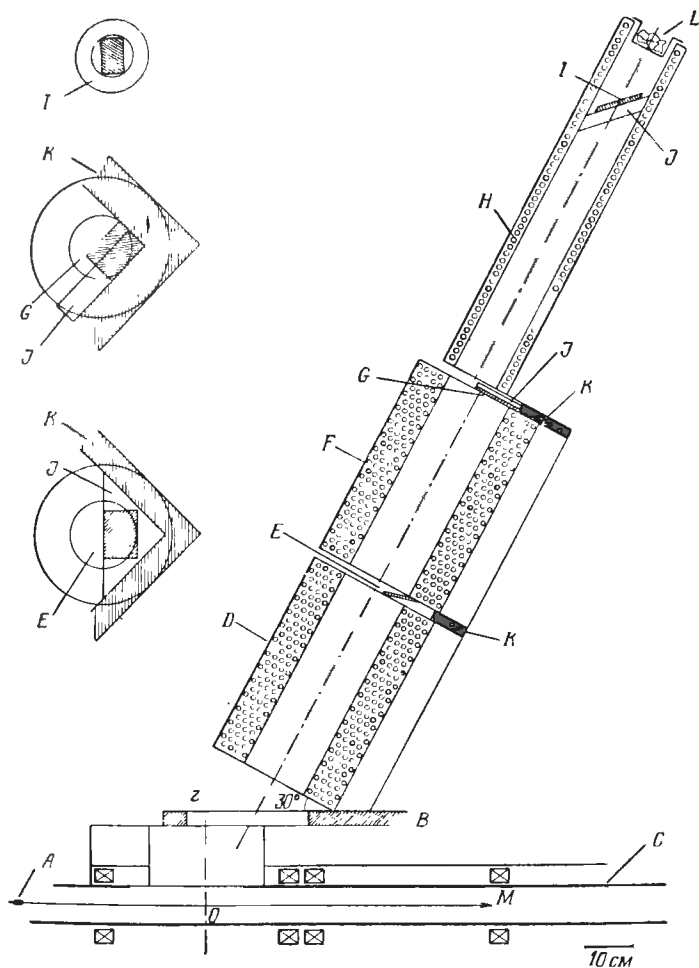
Все эмульсии были просмотрены самым тщательным образом, но среди найденных треков не оказалось таких, которые нельзя было бы объяснить космическими лучами.

4. Эксперименты третьего типа с бериллиевой мишенью

На фиг. 17 показана схема экспериментальной установки. Для уточнения этой схемы предварительно было проведено исследование, которое включало:

а) расчет траекторий монополей различных масс и начальных импульсов для нескольких расположений катушек и соленоидов;

б) изучение фона вокруг ускорителя путем облучения эмульсий разной чувствительности в различных



Фиг. 17. Схема экспериментальной установки, использовавшейся в экспериментах третьего типа.

A — мишень, *B* — подставка соленоидов, *C* — камера ускорителя, *D* — первый соленоид, *E* — стопка эмульсий *A*, *F* — второй соленоид, *G* — стопка эмульсий *B*, *H* — третий соленоид, *I* — стопка эмульсий *D*, *I* — органические держатели стопок, *K* — алюминиевые держатели, *L* — сухой лед, *M* — пучок протонов.

положениях относительно мишени, как защищенных экраном, так и без экрана.

Были испытаны различные методы выделения треков сильно ионизирующих частиц из общего фона. На фиг. 18 представлен общий вид экспериментальной установки.

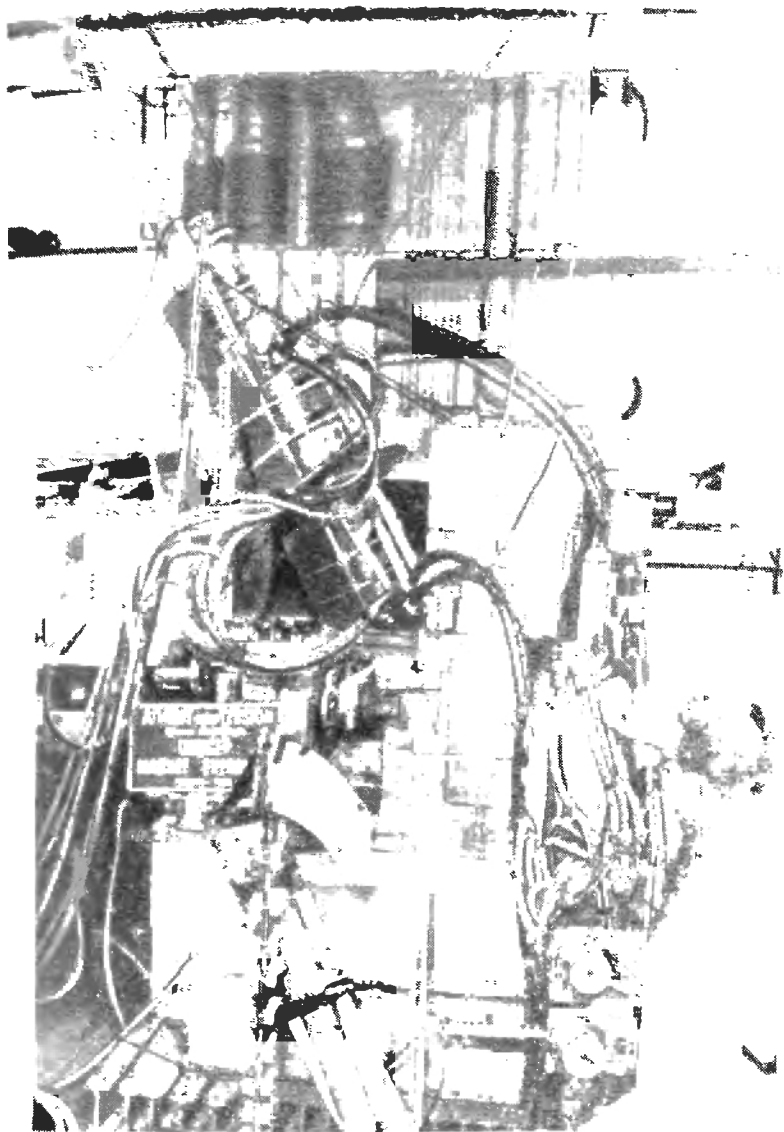
Область W на фиг. 19 — это окно для вывода монополей, т. е. область, где прорезан защитный кожух, а толщина стенки камеры ускорителя из аралдита была уменьшена с 8 до 1,5 мм. Линия D представляет собой край окна в камере ускорителя, а линия V — окно в защитном кожухе. Горизонтальные размеры окна (3×24 см²) не могли быть сделаны больше, чем на фиг. 19, так как мешали болты, крепящие катушку. Как мы увидим ниже, эти размеры и большая толщина стенок в вертикальном направлении (12 см) ограничивают эффективность захвата магнитного канала.

Бериллиевая мишень толщиной 15 мм была размещена немного ближе 20 см от отклоняющей системы¹⁾. Эта система состоит из двух пар катушек (форма и размеры которых представлены на фиг. 17 и 19), расположенных выше и ниже специальной секции вакуумной камеры ускорителя, изготовленной из аралдита.

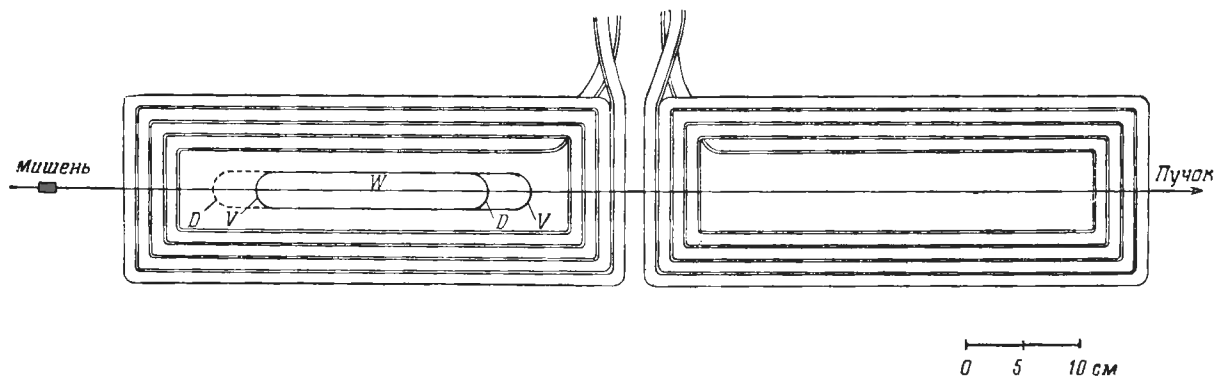
Для вывода монополей используется поле только первой пары катушек. Вторая пара катушек создает поле противоположного направления по отношению к полю первой пары и служит для сведения к минимуму возмущений движения циркулирующего пучка. Измерения показали, что остаточные возмущения пренебрежимо малы, даже если магнитное поле, создаваемое катушками на орбите, равно 24 кэ; однако поле должно быть выключено на время инжекции и в первые моменты ускорения. При поле 20 кэ интеграл $\int H_z dy$, рассчитанный вдоль орбиты для каждой пары катушек, достигает примерно $7 \cdot 10^5$ э · см, причем его значения для двух пар катушек взаимно компенсируются с точностью лучше 2%.

Катушки питаются от конденсаторной батареи емкостью 75 000 мкф ($3 \cdot 10^5$ дж) [28]. Индуктивность

¹⁾ Эта система катушек была сконструирована и испытана Крайнемом из ЦЕРНа для нейтринного эксперимента.



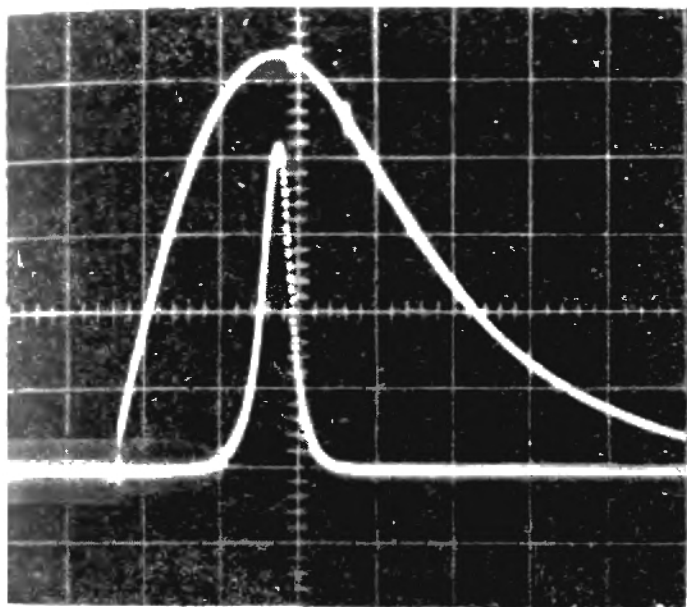
Ф и г. 18. Общий вид экспериментальной установки, использовавшейся в экспериментах третьего типа.



Ф и г. 19. Катушки, использовавшиеся для искривления траекторий монополей в экспериментах третьего типа (вид сверху).

Линия *D* соответствует краям окна в камере ускорителя, а линия *V* — краям окна в защитном кожухе камеры.

катушек такова, что время нарастания поля составляет около 2 мсек. Изменение поля в интервале ± 1 мсек около максимума кривой не превышает примерно 20%. Продолжительность импульса вторичных частиц с мишени,



Фиг. 20. Осциллограммы магнитного поля катушек (верхняя кривая) и импульса интенсивности частиц, испущенных бериллиевой мишенью (нижняя кривая).

измеренная сцинтилляционным счетчиком, составляла на полувысоте около 0,8 мсек. Разряд батареи был синхронизирован с движением мишени, так что максимумы поля и пики импульсов интенсивности частиц совпадали. Это непрерывно контролировалось с помощью осциллографа (фиг. 20).

При этих условиях следовало ожидать, что от 70 до 75% монополей, покинувших мишень, выйдут из нее при полях от $H_{\text{макс}}$ до $0,93 H_{\text{макс}}$, а остальные 25—30% — при полях от $0,93 H_{\text{макс}}$ до $0,8 H_{\text{макс}}$.

Силовые линии в магнитном канале, изображенном на фиг. 17, направлены от отклоняющих катушек (южный полюс) к соленоидам (северный полюс). Поле в центре каждого из трех соленоидов около 2000 э (табл. 2). Они включались синхронно с магнитным циклом ускорителя на время, широко перекрывающее (± 300 мсек) импульс в отклоняющих катушках.

Таблица 2

Магнитные поля и геометрические размеры трех соленоидов, используемых в эксперименте третьего типа (фиг. 17)

Соленоид	Магнитное поле в центре соленоида, э	Внутренний диаметр, см	Внешний диаметр, см	Длина, см
1	2000	14	29	44
2	2000	14	29	44
3	1800	10	12	80

Стопки эмульсий в положениях *A*, *B* и *D* (см. фиг. 17) удерживались с помощью прокладок из стирофома. Они были составлены следующим образом:

стопки, экспонировавшиеся в положениях *A* и *B*

5 слоев эмульсии К0, чередующиеся с 5 слоями эмульсии К минус 1;

стопки, экспонировавшиеся в положении *D*

4 слоя эмульсии К0, чередующиеся с 4 слоями эмульсии К минус 1, за которыми следует 8 слоев эмульсии К2.

Все эмульсии имели толщину 200 мк и площадь $10 \times \times 7,5$ см².

На основании описанных выше предварительных экспериментов мы пришли к выводу, что ни в одном из трех положений *A*, *B* и *D* эмульсии не могут быть оставлены более чем примерно на 2 час, что соответствует примерно $2 \cdot 10^{14}$ циркулирующим протонам.

В табл. 3 приведены основные данные для различных экспозиций. Полное время экспозиции достигло примерно 8 час, но около 20% времени было потеряно из-за неполадок в синхронизации импульса в катушках относительно движения мишени.

Таблица 3

Основные характеристики экспозиций эксперимента третьего типа ($T_p = 28$ Гэв)

к по- ция	Магнитное поле на орбите, э	Полное число циркулирующих протонов, $\times 10^{14}$	Эффект в число цирку- лирующих пр- $\times 10^{14}$ 1)	Время экспозиции
1 ²	20 000	2,73	2,00	2 час 15 мин
2	20 000	1,89	1,72	1 час 45 мин
3	20 000	1,71 } 2,67 ³⁾	1,08 } 1,98 ³⁾	1 час 10 мин
		0,96 }	0,90 }	45 мин
4	22 000	0,82 } 1,61 ³⁾	0,82 }	40 мин
		0,79 }	0,79 }	40 мин
Всего		8,90	7,31	8 час 5 мин

1) За вычетом числа протонов, циркулировавших в то время, когда катушки и мишени работали неуловительно.

2) В этой экспозиции стопка А была слишком сильно засвечена фоном и поэтому не просматривалась.

3) Вследствие фона стопки в положении А заменялись примерно в середине экспозиции.

Чтобы уменьшить регрессию следов во время экспозиции и во время хранения, стопки охлаждались сухим льдом. Проявление начинали сразу после экспозиции.

Все эмульсии, экспонировавшиеся в положениях А и В, а также эмульсии К2, экспонировавшиеся в положении D, были обработаны проявителем для осколков деления¹⁾; эмульсии К0 и К минус 1, экспонированные в положении D, были обработаны обычным амидоловым проявителем при низкой температуре.

¹⁾ Этот проявитель подробно описан в работе [35]. Его состав: борная кислота 1,75 г, сульфит натрия 2,25 г, бромистый калий 0,75 г, амидол 0,225 г на 1 л воды.

Эмульсии, экспонировавшиеся в положениях *A* и *B*, просматривались на микроскопах с большим увеличением (иммерсионный объектив $\times 22$ и окуляр $\times 10$), эмульсии, экспонировавшиеся в положении *D*, просматривались сначала на стереомикроскопе ($\times 4$, $\times 10$), но по причинам, изложенным ниже, часть из них была снова просмотрена на микроскопе с большим увеличением. Просмотр эмульсий осуществлялся в следующем порядке. Сначала просматривались первые две эмульсии каждой стопки (*K0* и *K* минус 1) с целью нахождения одного из треков ядерных фрагментов, ясно видимого среди зерен фона. Затем выбранные эмульсии просматривались с целью выявления всех треков от фрагментов и регистрировались координаты точек пересечения этих треков с обеими поверхностями эмульсии (вначале регистрировались также координаты точек пересечения с одной поверхностью).

Полная просмотренная поверхность составила:

а) на микроскопах с большим увеличением

295,8 см^2 в стопках, экспонированных в положении *A*,

300,3 см^2 в стопках, экспонированных в положении *B*,

144,4 см^2 в стопках, экспонированных в положении *D*;

б) на стереомикроскопах

369 см^2 эмульсий *K0* } в стопках, экспонированных
377 см^2 эмульсий *K2* } в положении *D*.

Среди зарегистрированных треков не было найдено ни одного, который пересекал бы полностью более одного слоя эмульсии. Не было замечено, что треки более многочисленны в первых слоях стопки, обращенных к мишени.

Вариации полного числа треков фрагментов на единицу площади эмульсий, экспонированных в трех положениях *A*, *B* и *D*, в основном соответствовали ожидавшимся, исходя из значений телесных углов и времени экспозиции в предположении, что эти фрагменты создаются в основном γ -лучами, выходящими из мишени.

Кроме этих довольно коротких и легко распознаваемых треков фрагментов никаких жирных длинных треков не обнаружено ни в одной из стопок. Правда, впа-

чае в эмульсиях, облученных в положении *B*, были найдены три очень тонких трека, пересекающих эмульсию почти перпендикулярно поверхности. Хотя эти треки едва выделялись на фоне, они были прослежены по всей толщине стопок, в которых были найдены. Два из них находились в области, где могли быть зарегистрированы треки монополей, а третий — в области, которая была экранирована обмотками второго соленоида для траекторий монополей. Эти треки показались нам довольно загадочными, но положение третьего трека и относительно низкая ионизация всех трех треков навели нас на мысль о существовании некоторого инструментального эффекта. Если треки, наблюдаемые в эмульсии, облученной в положении *B*, обусловлены монополями, то, согласно расчетным траекториям, подобные треки должны быть найдены в эмульсиях, облученных в положении *D*, но под углами примерно $60\text{--}70^\circ$ к поверхности эмульсии (см. фиг. 17).

Когда эмульсии, облученные в положении *D*, впервые были просмотрены на стереомикроскопе, таких тонких треков не могло быть найдено. Поэтому часть этих эмульсий была вновь тщательно просмотрена на микроскопах с большим увеличением.

Эмульсии, облученные в положении *D*, почти не имеют зерен фона, несмотря на то, что они проявлялись так, чтобы выявить треки фрагментов с *Z*, вдвое меньшим, чем это можно было сделать в эмульсиях соответствующего типа, облученных в положении *B*¹⁾. Мы действительно нашли много тонких треков, перпендикулярных к поверхности эмульсии, но ни одного трека под углом, соответствующим траектории монополя.

Оценка по порядку величины показывает, что эти треки могут быть следами α -частиц или тритонов низкой энергии, образованных при расщеплении ядер γ -квантами. Тот факт, что видны только перпендикулярные треки, обусловлен совместным эффектом усадки эмульсий и кажущегося увеличения плотности зерен крутых

¹⁾ Это было предварительно проверено путем сравнения треков фрагментов и осколков в эмульсиях тех же типов ($K0$ и K минус 1), облученных различными частицами известной энергии и проявленных тем же способом [29] (см. также примечание на стр. 153).

треков, который способствует обнаружению таких треков.

Такой эффект должен иметь место и в эмульсиях, экспонированных в положениях A и B , но для треков частиц с большими Z из-за более слабого проявления и значительно более высокого фона. Это объясняет, почему мы могли наблюдать только три таких трека в эмульсиях, облученных в положении B , и не наблюдали ни одного такого трека в эмульсиях, облученных в положении A .

Таким образом, мы делаем заключение, что и в экспериментах третьего типа не было обнаружено ни одного трека, который можно было бы приписать монополю.

§ 4. ВЫВОДЫ

Все эксперименты, описанные в § 3, дали отрицательные результаты в том смысле, что не было обнаружено треков, которые можно было бы приписать магнитным монополям Дирака. Следовательно, мы можем получить только верхние пределы для сечения рождения монополей.

Пусть $\bar{N}_g$ — среднее число монополей, которое должно быть обнаружено, если сечение рождения пар монополей в протон-протонных или протон-нуклонных столкновениях равно $\sigma_b(p, g)$ (где $b = p$ или N). Тогда можно записать

$$N_g = N_p n_{\text{прох}} N_b \sigma_b(p, g) \eta, \quad (24)$$

где N_p — полное число циркулирующих протонов в ускорителе (табл. 1), $n_{\text{прох}}$ — среднее число прохождений мишени протонами (приложение 3), N_b (где $b = p$ или N) — число протонов или нуклонов на 1 см^2 мишени.

Коэффициент η введен в уравнение (24) для того, чтобы учесть эффективность различных вариантов экспериментальной установки. Для экспериментов первого и второго типа этот коэффициент может быть записан в виде

$$\eta = \eta_H \eta_{\text{мишень}}, \quad (25)$$

где η_H относится к эффективности сбора магнитным полем монополей, вылетевших из мишени, на поверхность

эмульсии, а $\eta_{\text{мишень}}$ соответствует доле застрявших в мишени монополей от полного числа рожденных в мишени монополей.

Величина η_H зависит от магнитного поля и вакуума в области между мишенью и эмульсиями. Путем изучения траекторий, по которым должны следовать монополи, мы пришли к выводу, что η_H должна быть равна единице во всех случаях, рассмотренных выше в этом параграфе, за исключением экспериментов первого типа с мишенями из меди, хрома и из алюминия — полиэтилена. Для этих случаев $\eta_H \approx 0,5$, так как эмульсии были размещены в области, где силовые линии магнитного поля расходятся.

Расчет эффективности мишени $\eta_{\text{мишень}}$ был выполнен с учетом:

а) энергетического спектра монополей Дирака, вычисленного с использованием фазового объема в предположении, что два нуклона и два монополя с равной вероятностью разделяют избыток полной кинетической энергии двух сталкивающихся частиц в системе центра масс и разлетаются изотропно (приложение В);

б) соотношения между пробегом и энергией для монополей в мишени, определенного по их ионизационным потерям (приложение Д).

Для экспериментов третьего типа полную эффективность η нельзя разложить на два множителя, так как она получается интегрированием произведения двух множителей по импульсу p и углам вылета θ , ϕ ; первый из этих множителей представляет спектр монополей, вылетающих из мишени под углом θ по отношению к направлению падающих протонов, а второй — эффективность захвата монополей магнитным каналом, которая зависит от p , θ и ϕ (приложение К).

Для вычисления верхнего предела сечения рождения $\sigma_{\text{ра}}$ найдем величину

$$\Sigma_b = \frac{1}{N_p n_{\text{прох}} N_b \eta}, \quad (26)$$

представляющую собой сечение, которое можно было бы получить из уравнения (24), если бы в каком-то из экспериментов было $\bar{N}_g = 1$. Эту величину можно вычислить

для каждого из наших экспериментов; ее значения приведены в последнем столбце табл. 1.

Таким образом, уравнение (24) может быть переписано в виде

$$\bar{N}_g = \frac{\sigma_b(p, g)}{\Sigma_b}; \quad (27)$$

при заданном значении Σ_b это уравнение однозначно устанавливает зависимость между $\bar{N}_g$ и $\sigma_b(p, g)$. Как следует из закона Пуассона, если $n_g = 0$ есть наблюдаемое значение случайной величины N_g , то вероятность того, что эта величина будет иметь среднее значение $\bar{N}_g$, равна $\exp(-\bar{N}_g)$. С учетом этого замечания из уравнения (27) для вероятности ненаблюдения монополей в эксперименте, характеризуемом некоторым значением Σ_b , получаем

$$P_b = \exp\left[-\frac{\sigma_b(p, g)}{\Sigma_b}\right] \quad (28)$$

в предположении, что $\sigma_b(p, g)$ — действительная величина сечения рождения монополей. Полагая $P_b = 1/20$, получаем верхний предел сечения со степенью достоверности 95%

$$\sigma_b(95\%) = \Sigma_b \ln 20 = 2,9957 \cdot \Sigma_b. \quad (29)$$

Значения этого предела для каждого эксперимента приведены в табл. 4.

Для экспериментов первого и второго типов необходимо определить условия справедливости найденного верхнего предела сечения со степенью достоверности 95%; эти условия представлены в трех последних столбцах табл. 4, где мы попытались изложить выводы, полученные при рассмотрении химической связи монополей с молекулами (приложения Г и Е). Необходимо добавить, что заключения, вытекающие из результатов экспериментов первого и второго типов, справедливы лишь в предположении, что связь монополей с ядрами отсутствует; это предположение кажется разумным, но может оказаться и неверным.

Подобные ограничения имеют место также в большинстве экспериментов, выполненных другими авторами.

Эксперименты Фидекаро, Финаччиаро и Джакомелли [8] — все первого и второго типов. Это замечание

Таблица 4

Окончательные результаты

Тип эксперимента	Мишень	Предел сечения со степенью достоверности 95 % $\sigma_b, 10^{-40} \text{ см}^2$		Предел массы ¹⁾ m_g/m_p		Область энергий связи монополя ²⁾		Ограничения
		$p-p$	$p-\mu$	$p_{\mu}=0$	$p_{\mu}=200 \text{ Мэв/с}$	Интервал, эв	Поверхность (число молекул O_2)	
II	Графит	17,3	8,4	2,94	3,36	$E < 0,7$	$N < 8$	Для двух экспериментов, рассматриваемых совместно, ограничений нет, кроме области от $N=8$ до $N=11$
I	Графит	17,3	8,4	2,94	3,36	$0,6 < E < 24$	$10 < N < 250$	
I	Алюминий	4,0	1,9	2,79	3,20	$0,6 < E < 30$	$8 < N < 250$	
I	Медь (98 %) — хром (2 %)	1,95	0,89	2,79	3,20	$0,6 < E < 6,0$	$4 < N < 250$	Некоторые ограничения, обусловленные возможностью слишком слабой связи монополей в металле
I	Полнэтилен — алюминий	7,4	3,9	2,79	3,20	$0,6 < E < 60$	$14 < N < 250$	Некоторые ограничения, обусловленные возможностью слишком сильной связи монополей в хrome
III	Бериллий	150	66	3,0	3,40	Любая область энергий связи	Любое	Нет

1) p_{μ} — импульс ядер мишени в лабораторной системе. Верхний предел массы монополя вычислен для $p_{\mu}=0$ (ядро в состоянии покоя), а также для $p_{\mu}=200 \text{ Мэв/с}$, чтобы учесть фермиевское движение.

2) См. приложение Г.

относится даже к чрезвычайно интересному эксперименту, основанному на регистрации γ -квантов высокой энергии, испускаемых при аннигиляции двух монополей противоположных знаков внутри той же мишени (алюминий + полиэтилен), где, как предполагалось, они родились и замедлились до тепловых скоростей. С другой стороны, из этого эксперимента следует более высокое значение верхнего предела сечения (10^{-35} — 10^{-36} см²), если считать, что аннигиляция двух монополей противоположных знаков происходит главным образом с испусканием двух γ -квантов.

Эксперименты Брукхевенской группы [9] также следует отнести к экспериментам второго типа. От экспериментов этого типа, проведенных в ЦЕРНе, они отличаются в основном тем, что монополи рождались (по крайней мере частично) и замедлялись в жидкости (вакуумном масле), а затем собирались на поверхности масла и, наконец, вырывались с нее с помощью магнитного поля. Тот факт, что вещество представляет собой жидкость, позволял монополям под действием магнитного поля двигаться и вырываться через поверхность вещества даже при наличии молекулярной структуры (типа маленькой жидкой капли), окружающей каждый монополь.

Некоторые ограничения на выводы из этих экспериментов могут быть наложены, только если предположить, что монополи остаются связанными с тяжелыми ядрами (см. § 2, п. 6), так как при этих условиях они могут остаться незамеченными. Такая возможность не очень реальна из-за малого числа тяжелых ядер в веществах, проходимых монополями.

Никакие ограничения, вытекающие из химической или ядерной связи, не могут быть наложены на результаты экспериментов третьего типа, так как образование каких-либо связанных структур полностью исключено при сохранении кинетической энергии монополей выше примерно 0,5 Гэв вдоль всего пути от точки рождения до области детектирования.

Эти положительные стороны экспериментов третьего типа сопровождаются существенным уменьшением эффективности η экспериментальной установки, что в свою

очередь приводит к увеличению в 8—10 раз предела сечения со степенью достоверности 95%. Уменьшение эффективности обусловлено тем, что монополи должны протететь с большой скоростью весь путь от мишени до детектора длиной около 2,5 м.

Несмотря на то что отрицательные результаты каждого из наших экспериментов связаны с различными ограничениями и оговорками, можно попытаться получить суммарную оценку верхнего предела сечения на основании всех результатов, объединенных вместе. Для получения этой оценки необходимо ввести в уравнение (29) величину Σ_b сум, определяемую соотношением

$$\Sigma_{b \text{ сум}}^{-1} = \sum \Sigma_b^{-1}, \quad (30)$$

где суммирование проводится по всем экспериментам, указанным в табл. 1. Тогда получим

$$\begin{aligned} \sigma_p(95\%) &\leq 1 \cdot 10^{40} \text{ см}^2, \\ \sigma_{\nu}(95\%) &\leq 0,5 \cdot 10^{-40} \text{ см}^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Эти значения являются наименьшими из полученных до сих пор. Однако они имеют свои недостатки по сравнению со значениями, проведенными в табл. 4, так как к ним относятся все ограничения, упомянутые при обсуждении каждого из экспериментов, результаты которых были использованы при расчете.

Таковы те заключения, которые можно сделать из результатов наших экспериментов в предположении (которое принимается всюду в этой статье), что монополи Дирака имеют элементарный магнитный заряд g , определяемый уравнением (1).

Теперь необходимо рассмотреть возможность того, что существуют монополи с большей величиной ($n = +2, +3, \dots$) магнитного заряда. Рассмотрим, например, случай «дважды заряженных» монополей, т. е. монополей с зарядом $2g = 137e$.

Отличие в поведении «дважды заряженных» монополей становится понятным, если учесть следующие обстоятельства:

а) при той же начальной скорости «дважды заряженные» монополи должны терять энергию в веществе

в 4 раза быстрее, чем «однократно заряженные» монополи; следовательно, при той же массе и той же начальной кинетической энергии они должны иметь в 4 раза меньшую длину пробега;

б) при ускорении в одном и том же магнитном поле «дважды заряженные» монополи приобретают вдвое большую энергию, чем «однократно заряженные». Следовательно, если они остановились в некотором веществе после ускорения в том же поле, что и «однократно заряженные» монополи, в которое они вошли с пренебрежимо малой энергией, длина их пробега должна быть вдвое меньшей, чем для «однократно заряженных» монополей.

Учитывая эти простые правила, можно вновь оценить выводы из наших трех экспериментов, используя новое предположение о «дважды заряженных» монополях.

Первое замечание, которое может быть сделано, состоит в том, что во всех трех экспериментах длина пробега «дважды заряженных» монополей должна была быть достаточно большой, чтобы эти монополи могли пересечь те области эмульсионных стопок, которые были просмотрены. Поскольку ионизационные потери таких монополей в 4 раза больше, чем для «одиночно заряженных» монополей, можно с уверенностью утверждать, что мы легко распознали бы их треки, если бы они имелись.

Что касается верхнего предела сечения рождения монополей, то оценки, полученные в экспериментах первого и второго типов и в эксперименте третьего типа изменяются по-разному.

В экспериментах первого и второго типов значения $\eta_{\text{мишень}}$ ближе к единице для «дважды заряженных», чем для «однократно заряженных» монополей, и в результате соответствующие σ_b (95%) будут ниже приведенных в табл. 4. В отличие от этого для эксперимента третьего типа значение η уменьшается в 4 раза главным образом из-за сокращения числа монополей, вышедших из мишени. Следовательно, соответствующий верхний предел сечения возрастает в 4 раза. Наконец, области справедливости данных эксперимента первого и второго типов, приведенные в табл. 4, изменятся следующим образом. Для энергии связи E пределы вообще не изме-

няться. Верхний предел N для экспериментов второго типа возрастет с 8 до 9, а для экспериментов первого типа — с 250 до 490. Нижние пределы N для экспериментов первого типа не изменятся вообще или возрастут самое большее на единицу.

§ 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Результаты каждого из наших экспериментов [7, 13], а также экспериментов, проведенных другими группами исследователей [8, 9], приводят к заключению, что сечение рождения пар монополей Дирака с массой, меньшей или близкой к трем протонным массам, в протон-протонных или протон-нуклонных столкновениях при энергии около 28 Гэв имеет верхний предел (со степенью достоверности 95%), колеблющийся от эксперимента к эксперименту между 10^{-38} и 10^{-40} см². Если результаты всех экспериментов собрать вместе, то суммарный верхний предел будет ниже $\sim 10^{-40}$ см².

Эти выводы подтверждают и расширяют полученные ранее оценки нижнего предела массы монополя m_g , например значения $m_g \geq m_p$, следующего из экспериментов, выполненных несколько лет назад на Бэватроне Броднером и Избеллом [6] (см. § 1), а также значения $m_g \geq 1,2m_p$, вытекающего из $(g-2)$ -эксперимента. Однако, как уже указывалось выше, к последней оценке следует относиться с осторожностью, так как ее вывод основан на теории возмущений и, кроме того, он предполагает использование разумных, но произвольных предположений о взаимодействии монополя с электромагнитным полем (см. § 2, п. 2, и приложение Б).

Чтобы сделать более ясным смысл экспериментально найденного верхнего предела сечения рождения монополей порядка 10^{-39} — 10^{-40} см², необходимо заметить, что это значение на много порядков меньше теоретического значения, приведенного в § 2, п. 7, и в приложении В (табл. В.1). Хотя теоретическую оценку необходимо принимать со всеми возможными оговорками, однако ее отличие от экспериментально найденного верхнего предела так велико, что кажется разумным предположить, что монополи Дирака в исследованном интервале масс не существуют.

Этот результат, в какой-то мере не являющийся неожиданным, требует, однако, дальнейшего рассмотрения. Он может быть обусловлен различными второстепенными причинами: например, нельзя исключать возможность того, что ошибки в теоретических оценках сечения рождения монополей на много порядков величины больше ожидаемых, или что потери энергии монополей в веществе много меньше значения, полученного из полуклассической модели, так что монополи ускользнули от наблюдения во всех использовавшихся до сих пор экспериментальных установках. Наш отрицательный результат может быть объяснен также просто тем, что существующие в природе монополи имеют массы, большие чем верхний предел исследованного интервала масс.

Имеется, конечно, и другая возможность, а именно что монополи Дирака не существуют вообще. Тогда, следуя Дираку [1], можно было бы сказать, что природа не использовала возможности, открытой человеком при математическом описании явления. В этом случае было бы интересно получить некоторое правило или закон, которые бы объясняли, почему монополи не могут существовать; но тогда надо было бы найти новое объяснение для самого поразительного эмпирического закона — закона квантования электрического заряда.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВОЗМОЖНЫМ СУЩЕСТВОВАНИЕМ ИЗОЛИРОВАННЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЮСОВ¹⁾

1. Классическая теория, в которой как электрические заряды, так и магнитные монополи выступают в качестве источников электромагнитного поля, может быть развита полностью без серьезных трудностей²⁾. Такая теория имеет множество представляющих интерес особенностей, возникающих вследствие высокой симметрии соответствующих *обобщенных уравнений Максвелла*³⁾:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{J}, \quad (\text{A.1a})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (\text{A.1б})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = -\mathbf{J}_m, \quad (\text{A.1в})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \rho_m. \quad (\text{A.1г})$$

Эти уравнения иногда используются в макроскопической теории инженерами при рассмотрении проблем, в которых магнитные источники вводятся чисто формально [30]. Знак перед $\mathbf{J}$ в уравнении (A.1в) выбран из соображений эквивалентности зависящей от времени поляризации и магнитного тока⁴⁾:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{J}_m.$$

¹⁾ В этом приложении представлены различные точки зрения, которые были высказаны во время дискуссии о дираковских полюсах в ЦЕРНе 7 июня 1961 г. В дискуссии приняли участие Дж. Белл, Б. Фелд, М. Фирц, М. Глэзер, Дж. Яух, Т. Ли и Л. ван Хов.

²⁾ С подобным замечанием согласиться трудно (см. вступительную статью). Едва ли можно считать теорию лишенной серьезных трудностей, если в ней отсутствует лагранжиан. — *Прим. ред.*

³⁾ В этом приложении мы используем рационализированную систему единиц, в которой $c = 1$.

⁴⁾ Заметим, что выбор знака перед $\mathbf{J}_m$ в (A.1в) согласуется с привычной формой записи уравнения непрерывности для магнитного тока: $\partial \rho_m / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{J}_m = 0$. — *Прим. ред.*

Из уравнений (А.1) следует, что ток монополей или движущийся одиночный монополюс порождают электрическое поле, структура которого подобна той, которая получается для поля $\mathbf{H}$ движущегося электрического заряда, за исключением направления поля, которое определяется правилом левой руки вследствие знака минус, фигурирующего в (А.1в).

Вообще все уравнения, пригодные для заряженных частиц, могут быть переписаны для монополей, если учесть, что система уравнений (А.1) остается неизменной при замене

$$\begin{aligned} \mathbf{B} & \text{ на } \mathbf{D}, \\ \mathbf{H} & \text{ на } \mathbf{E}, \\ \rho & \text{ на } \rho_m, \\ t & \text{ на } -t \text{ и наоборот.} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Из этого правила могут быть выведены и другие, в частности правила для плотности тока и скорости частицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} & \text{ заменяется на } \mathbf{J}_m, \\ \mathbf{v} & \text{ заменяется на } -\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Можно заметить, что операции (А.2) и (А.3) получаются комбинированием «обращения времени» с «операцией дуальности», предложенной Дираком в его первоначальной статье [1]: уравнения (А.1) остаются неизменными, если произвести замены

$$\begin{aligned} \mathbf{B} & \text{ на } \mathbf{D} \text{ и } \mathbf{D} \text{ на } -\mathbf{B}, \\ \mathbf{H} & \text{ на } \mathbf{E} \text{ и } \mathbf{E} \text{ на } -\mathbf{H}, \\ \mathbf{J}_m & \text{ на } \mathbf{J} \text{ и } \mathbf{J} \text{ на } -\mathbf{J}_m, \\ \rho_m & \text{ на } \rho \text{ и } \rho \text{ на } -\rho_m. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Таким образом, используя (А.2) и (А.3), можно получить из выражения для силы Лоренца в случае заряженной частицы

$$\mathbf{F} = e (\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]) \quad (\text{A.5a})$$

выражение для силы, действующей на монополюс,

$$\mathbf{F} = g (\mathbf{H} - [\mathbf{v}\mathbf{D}]). \quad (\text{A.5b})$$

Это выражение можно также вывести с помощью лоренцева преобразования от системы, в которой монополю покоится в магнитном поле, к системе, в которой он движется со скоростью v [31, 32].

С помощью уравнений (A.1) можно вывести обычным способом (33) (и даже проще, чем обычно) закон сохранения энергии — импульса. Изменение, которое претерпевает в единицу времени энергия (или импульс) материальных частиц (в данном случае помимо электрически заряженных частиц принимаются во внимание и монополи) и поля, заключенного в определенном объеме, равно потоку энергии (или импульса) поля, проходящему через поверхность в единицу времени.

Чтобы записать обобщенные уравнения Максвелла (A.1) в ковариантной форме, удобно ввести, помимо обычного тензора поля $F_{\mu\nu}$, соответствующий дираковский *дуальный тензор* [2], определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}; \\ F_{\mu\nu} &= -F_{\nu\mu}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = -\tilde{F}_{\nu\mu}, \quad \tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{A.6}$$

где $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ полностью антисимметричный тензор Риччи, нормируемый так, что $\epsilon_{1234} = i/\epsilon_0$. Здесь ϵ_0 — диэлектрическая постоянная, связанная с магнитной проницаемостью μ_0 обычным соотношением $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ (1). Тогда четыре вектора $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ выражаются через компоненты двух определенных выше тензоров следующим образом:

$$\begin{aligned}i\mathbf{D} &= (F_{41}, F_{42}, F_{43}), \quad i\mathbf{B} = (\tilde{F}_{41}, \tilde{F}_{42}, \tilde{F}_{43}), \\ \mathbf{H} &= (F_{23}, F_{31}, F_{12}), \quad -\mathbf{E} = (\tilde{F}_{23}, \tilde{F}_{31}, \tilde{F}_{12}),\end{aligned}$$

а обе пары обобщенных уравнений Максвелла (A.1a), (A.1б) и (A.1в), (A.1г) записываются в виде ($x_\mu = x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$)

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = j_\mu, \tag{A.7a}$$

$$\partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = g_\mu, \tag{A.7б}$$

где

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad j_\mu = (\mathbf{J}, \rho), \quad g_\mu = (\mathbf{J}_m, \rho_m).$$

2. Теперь следует рассмотреть симметрию обобщенных уравнений Максвелла (A.1) [или (A.7)]. Прежде всего мы замечаем, что ϵ_0 и μ_0 должны обнаруживать одинаковое поведение при различных преобразованиях симметрии вследствие соотношения $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2} (=1)$ и того факта, что c^2 — инвариант; если бы преобразование симметрии изменяло знак c^2 , то уравнение Даламбера преобразовывалось бы при такой операции в четырехмерное уравнение Лапласа.

Кроме того, мы примем ту точку зрения, что плотность энергии как электрического поля ($1/2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$), так и магнитного поля ($1/2 \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$) должна оставаться инвариантной при любом из преобразований, рассматриваемых ниже. Из этих двух замечаний следует, что $\mathbf{D}$ имеет те же свойства симметрии, что и $\mathbf{E}$, а $\mathbf{B}$ — те же свойства, что и $\mathbf{H}$; это означает, что ϵ_0 и μ_0 являются скалярами и что мы можем ограничиться рассмотрением свойств симметрии $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Из обобщенных максвелловских уравнений (A.1) мы видим, что если мы хотим за величинами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ оставить (даже в присутствии монополей) их обычные свойства симметрии, т. е. симметрию аксиального и полярного векторов соответственно, то заряд монополя

$$g = \int \rho_m dV \quad (\text{A.8})$$

должен вести себя как *псевдоскаляр*, а плотность магнитного тока

$$\mathbf{J}_m = \rho_m \mathbf{v} \quad (\text{A.9})$$

должна вести себя как *аксиальный вектор* по отношению к пространственным и временным отражениям.

Эти замечания побуждают нас рассмотреть в целом свойства симметрии, присущие теории, в которую включены монополи. Рамзей [34] отметил, что в такой теории *ТСР*-теорема должна быть заменена *ТСМР*-теоремой. Здесь M — новая операция (аналогичная C), которая переводит каждый монополь в монополь равной величины, но противоположного знака и оставляет незатронутыми пространство — время, а также знак электрического заряда.

Формально можно избежать рассмотрения магнитных зарядов как псевдоскаляров (а плотности магнитного тока — как псевдовектора), переформулируя $TСMP$ -теорему, упомянутую выше, либо в $T'С'P'$ -теорему, либо в $T''С'P''$ -теорему, где

$$\begin{aligned} T' &= TM, & C' &= CM, & P' &= MP; \\ T'' &= TC, & P'' &= CP. \end{aligned} \quad (A.10)$$

Новая операция C' представляет собой сопряжение как электрического, так и магнитного зарядов; T' и P' относятся к операциям обращения времени и четности, обобщенным таким образом, что они включают также и сопряжение монополей. Поскольку применение операции P' (или T') автоматически изменяет знак магнитного полюса, но не изменяет знак электрических зарядов, свойства симметрии магнитного поля (электрического поля) сохраняются, несмотря на его смешанное происхождение от магнитных зарядов (электрических зарядов) и электрических токов (магнитных токов).

Те же требования будут удовлетворены, если $TСMP$ -теорему записать в виде $T''С'P''$ -теоремы.

Эта ситуация иллюстрируется в табл. А.1, где показано поведение электромагнитных величин, входящих в уравнение (А.1), при различных преобразованиях симметрии.

Читателей, желающих познакомиться с вопросом о возможном существовании электрического дипольного момента элементарных частиц, который появляется вследствие введения в теорию монополей, мы отсылаем к статье Рамзея [34].

Точка зрения, изложенная выше, хотя и очень привлекательна, но не является единственной. Как любезно указал нам проф. Катц, можно исходить из предположения, что ρ и ρ_m являются скалярами и, следовательно, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}_m$ являются полярными векторами. Тогда из (А.1а) и (А.1в) следует, что $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ — аксиальные векторы, а из (А.1б) и (А.1г) следует, что $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — полярные векторы. В такой схеме ϵ_0 и μ_0 , а также плотность энергии электромагнитного поля — псевдоскаляры, а силы Лоренца (А.5), действующие на заряды и монополи, — псевдовекторы.

Таблица А.1

Поведение электромагнитных величин
при преобразованиях симметрии

	ϵ	$\mathbf{H}$	I_μ		g_μ	
			ρ	$\mathbf{J}$	ρ_m	$\mathbf{J}_m$
T	+		+	—	—	+
C'	—		—	—	—	—
P'	—	+	+	—		+
$T'' = T'C'$		+	—	+	+	—
$P'' = P'C'$	+		—	+	+	—
$TCMP$ $= T'C'P' =$ $= T''C'P''$	+	+	—	—		—

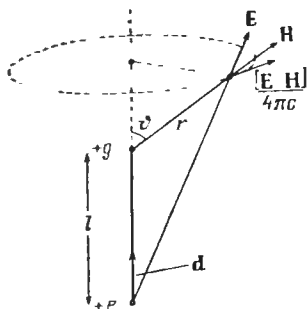
Точка зрения, кратко изложенная Кабиббо и Феррари [10], сводится к принятию предположения, что ρ и ρ_m , а также ϵ_0 и μ_0 — скаляры. Тогда, очевидно, уравнения (А.1) и (А.5) не инвариантны при отражениях.

Однако могут быть приняты и другие точки зрения. Если считать, как это делает Катц [32], что ρ и ρ_m являются источниками градиентных частей $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ соответственно, а $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}_m$ — источниками соленоидальных частей соответственно $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$, то можно построить схему, в которой вектор $\mathbf{D}$ меняет знак при преобразованиях P и C , но инвариантен при преобразованиях T и M ; вектор $\mathbf{E}$ инвариантен относительно C , но меняет знак при T , P и M ; вектор $\mathbf{B}$ инвариантен относительно T , C и P , но меняет знак при M ; наконец, вектор $\mathbf{H}$ инвариантен относительно P и M , но меняет знак при преобразованиях T и C . Такая схема в принципе приемлема во всем, за исключением того факта, что ϵ_0 и μ_0 ведут себя как скаляры относительно P и как псевдоскаляры относительно T , C и M . То же самое, очевидно, имеет место и для плотности энергии.

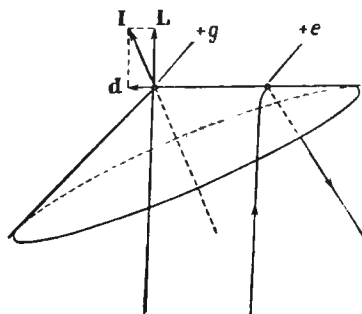
В заключение мы хотим подчеркнуть, что точка зрения, представленная табл. А.1, является предпочтитель-

ной по сравнению с другими различными возможными подходами к проблеме симметрии, так как в ее рамках плотность энергии оказывается инвариантной при любых преобразованиях симметрии.

3. Как было известно уже Томсону [35], статическое поле, порождаемое точечным магнитным зарядом g и точечным электрическим зарядом e (фиг. 21), имеет мо-



Фиг. 21. Момент количества движения статического поля, создаваемого покоящимися точечным зарядом и точечным монополем.



Фиг. 22. Траектория точечного заряда e в поле точечного покоящегося монополя g лежит на поверхности конуса, ось которого определена вектором I .

Во время движения заряда векторы L и d прецессируют вокруг I . Здесь изображен момент, когда e находится на минимальном расстоянии от g .

мент количества движения относительно линии, соединяющей g и e , равный

$$|d| = \frac{1}{c^2} \left| \int [s \rho] dv \right| = \frac{1}{4\pi c} \left| \int [E H] \rho dv \right| = \frac{eg}{c}, \quad (A.11a)$$

где ρ — вектор, перпендикулярный линии, соединяющей e и g , и направленный от этой линии к точке интегрирования. Выражение (A.11a) записано в гауссовых единицах; в используемой здесь рационализированной системе единиц с $c=1$ имеем

$$|d| = \frac{eg}{4\pi}. \quad (A.11b)$$

Следует отметить важную особенность выражений (А.11) — величина $\mathbf{d}$ не зависит от расстояния между электрическим и магнитным зарядами.

Вектор (А.11) не случайным образом входит и в классическое описание движения точечного заряда в поле покоящегося точечного монополя или, наоборот, движения точечного монополя в поле покоящегося точечного заряда. В этих случаях с помощью элементарных методов можно найти, что интегралами движения являются [24]

$$|\mathbf{v}|, |\mathbf{L}|, |\mathbf{d}|$$

и вектор

$$\mathbf{I} = \mathbf{L} + \mathbf{d}, \quad (\text{А.12})$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{L}$ — момент количества движения, а $\mathbf{d}$ — вектор, определенный выражениями (А.11). Как видно из (А.12), вектор $\mathbf{I}$ выполняет функции полного момента количества движения системы; он равен сумме $\mathbf{L}$ и $\mathbf{d}$. Он фиксирует ось конуса, по поверхности которого движется точечный заряд, если точечный монополь расположен в вершине конуса (фиг. 22).

4. Различные авторы [36] уже отмечали, что формальный вывод теоремы Дирака может быть получен, если рассматривать $\mathbf{d}$ как момент количества движения, который квантуется: действительно, приравнявая (А.11) величине $n\hbar/2$ ($n = 0, \pm 1, 2, \dots$), мы получаем соотношение (1). Этот вывод, хотя и очень интересный, основан тем не менее на предложенном в п. А.3 классическом рассмотрении. Таким образом, этот вывод не может приниматься в качестве доказательства соотношения (1).

Среди различных известных доказательств этой теоремы наиболее убедительным является доказательство, данное Фирцем [20], который рассмотрел уравнение Шредингера для электрона, движущегося в поле точечного магнитного заряда произвольной величины g . Считая это уравнение инвариантным относительно группы пространственных вращений, можно найти, что единственными допустимыми значениями g являются те, которые следуют из соотношения (1).

Первоначальные аргументы Дирака, так же как вывод Фирца этого уравнения, основаны на введении в гамильтониан, определяющий ψ -функцию, вектора-потенциала $\mathbf{A}$, описывающего порождаемое монополем кулоновское магнитное поле ¹⁾

$$\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (\text{A.13})$$

Однако любое выражение из бесконечного числа различных выражений, которые могут быть приведены для $\mathbf{A}$, сингулярно вдоль одной (по крайней мере) линии, соединяющей монополь с бесконечностью (*дираковской нити*).

Этот результат является очевидным следствием того факта, что, согласно определению

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (\text{A.14})$$

вектор-потенциал подходит только для описания полей, не имеющих магнитных источников, но не таких полей, как (A.13). Уравнения (A.14) недостаточно для определения $\mathbf{A}$. Необходимо дополнительное условие, которое в данном случае совпадает с кулоновской калибровкой: $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Выражение, фактически используемое для $\mathbf{A}$, соответствует предельному случаю бесконечно длинного соленоида с бесконечно малым поперечным сечением; линия, вдоль которой размещается этот соленоид, есть не что иное, как нить [37]²⁾. Магнитный поток $4\pi g$,

¹⁾ Замечание авторов о потенциале A не точно; см. вступительную статью, § 2. — *Прим. ред.*

²⁾ Выражение для векторного потенциала, описывающего поле (A.13), может быть получено исходя из выражения для векторного потенциала соленоида конечной длины и бесконечно малого поперечного сечения или из выражения для эквивалентного магнитного диполя [36]

$$\mathbf{A} = \frac{[m \mathbf{r}]}{r^3}, \quad |m| = gl.$$

Оставляя один конец соленоида в начале координат и устремляя другой в бесконечность вдоль отрицательной оси z , получаем

$$A_r = A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{g}{r} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{g}{r} \tan \frac{\theta}{2}.$$

или в декартовой системе координат

$$A_x = -\frac{g}{r} \frac{y}{r+z}, \quad A_y = \frac{g}{r} \frac{x}{r+z}, \quad A_z = 0.$$

выходящий из монополя, в действительности проходит из бесконечности к монополю через этот соленоид.

В дираковском выводе соотношение (1) вытекает из требования однозначности ψ -функции, когда нить обходит вокруг точечного заряда или, наоборот, когда точечный заряд обходит вокруг нити по некоторому замкнутому контуру. Значение такого вывода проиллюстрировал Ферми [38], который использовал аналогию между задачей определения выражения для векторного потенциала, удовлетворяющего одновременно уравнениям (A.13) и (A.14), и элементарной задачей расчета магнитного поля, порождаемого обычным распределением токов.

Детальное рассмотрение решений уравнения Шредингера для точечного заряда, движущегося в поле точечного полюса, содержится в работах [19—22]. Особый интерес представляют статьи Гренблума [37] и Йордана [39], в которых показано, что результаты теории Дирака не зависят от любого частного выбора нити.

5. Очень привлекательная симметрия, подчеркнутая в п. A.1, уменьшается в значительной мере не только различным поведением e и g относительно пространственных и временных отражений (о чем упоминалось в п. A.2), но также различием в порядке величины констант связи для зарядов и монополей. Электрические заряды имеют малую константу связи с электромагнитным полем ($e^2/\hbar c = 1/137$), тогда как монополи связаны с ним очень сильно, как это следует из уравнения (2). Асимметрия в величине масс в определенных случаях может уменьшить эффект асимметрии в величине зарядов.

Как видно из приведенных выше выражений, потенциал обращается в бесконечность на линии $\theta = \pi$.

Для A простым вращением относительно оси z можно получить бесконечное количество других выражений; множество еще других выражений может быть найдено выбором нитей различных видов.

Другим решением проблемы (A.14) является выражение

$$A_r = 0, \quad A_\theta = -\frac{g\Phi}{r} \sin \theta, \quad A_\varphi = 0.$$

Это выражение не становится бесконечным нигде, кроме полюса, но в каждой точке пространства оно имеет бесконечное число значений.

Очень большая величина $g^2/\hbar c$ имеет, кроме того, весьма неприятное следствие, рассмотренное в § 2, п. 1: все методы теории возмущений, обычно с успехом применяемые для рассмотрения различных электромагнитных проблем, оказываются полностью несостоятельными, если учитываются магнитные заряды.

6. Дирак развил свою квантовую теорию, вводя канонические переменные, описывающие движение нити. Цитируя Дирака [2], «эти переменные необходимы для динамической теории, но они не соответствуют никаким наблюдаемым, и их значения в частной задаче всегда произвольны и не влияют на физические явления». Они могут быть названы *нефизическими* переменными, подобными тем, которые встречаются в других динамических задачах (неучитываемые переменные).

Существование нитей и необходимость скрытых канонических переменных для описания их поведения во время движения монополя составляет, конечно, весьма неудовлетворительный аспект теории Дирака, которая, однако, не противоречит каким-либо общим законам; в частности, она не противоречит теории относительности и принципу причинности.

Проблема вторичного квантования электромагнитного поля в случае присутствия зарядов и монополей полностью еще не разрешена ¹⁾. Очевидно, основная особенность, специфичная для монополей, связана с нитями, существование которых в свою очередь обусловлено использованием потенциалов. С одной стороны, существующая обычная квантовая теория включает в себя представление электромагнитного поля с помощью потенциалов; с другой стороны, концепция магнитных зарядов не согласуется с использованием векторного потенциала, который может сохраниться в этом случае только ценой появления сингулярности.

7. Таким образом, возникают некоторые теоретические вопросы, которые еще ждут своего ответа. Среди них особый интерес представляют следующие два вопроса:

¹⁾ См. работу Швингера (статья 7 данного сборника), в которой предпринята попытка квантования. *Прим. ред.*

1) Можно ли развить теорию, в которой удалось бы избежать «дираковских нитей»?

2) Если можно, то содержит ли такая теория соотношение типа (1), которое фиксирует величину g через константы e , $\hbar$ и c ?

Различные теоретики¹⁾ дали разные ответы на эти и другие вопросы. Некоторые теоретики (в частности, Фирц и Глэзер) подчеркнули, что надлежащим образом развитой теории электромагнитного поля в присутствии зарядов и монополей не существует и ничто, кроме смутной надежды, не предвещает ее развития. Они высказали подозрение, что даже в надлежащем образом развитой теории нити, присоединенные к магнитным зарядам, не исчезнут и, таким образом, каждый монополь вместе со своей нитью уже является системой с бесконечным числом степеней свободы.

Другие теоретики думают, что окажется возможным развить теорию, в которой удастся избежать нитей, используя фейнмановские методы (Ли) или формулируя квантовую теорию так, чтобы в ней потенциалы вообще не появлялись (Яух). Формулировки второго типа были предложены Новобатским, Беллинфанте и Вабатинным (см. [40]) и последним, в частности, в симметричной и удобной форме.

Каждый участник дискуссии согласился, что если ответ на первый вопрос положительный, то и ответ на второй вопрос должен быть положительным.

8. Шаг вперед в направлении выяснения этих вопросов сделали Кабиббо и Феррари [10]. Они обратили внимание на то, что решение $F_{\mu\nu}$ обобщенных уравнений Максвелла (A.7) может быть представлено с помощью двух векторных потенциалов в виде выражения

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho B_\sigma, \quad (\text{A.15})$$

которое сводится к обычному выражению

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

если отбросить последний член ($B_\mu = \text{const}$).

¹⁾ См. примечание 1 на стр. 165.

Введение второго векторного потенциала B_μ компенсируется (в том смысле, который будет выяснен ниже) расширением группы калибровочных преобразований. Согласно (A.15), A_μ и B_μ определяются полем $F_{\mu\nu}$ с точностью до калибровочных преобразований двух типов:

а) «индивидуальных» калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \\ B_\mu &\rightarrow B'_\mu = B_\mu + \partial_\mu \Gamma, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

каждое из которых является преобразованием обычного вида;

б) смешанных калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + A'_\mu, \\ B_\mu &\rightarrow B'_\mu = B_\mu + B'_\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

где A_μ^0 и B_μ^0 удовлетворяют условию „нулевого поля“:

$$\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0 + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho B_\sigma^0 = 0. \quad (\text{A.18})$$

Используя «индивидуальное» калибровочное преобразование (A.16), можно потребовать выполнения условий Лоренца для A_μ и B_μ . Тогда в этой калибровке они удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\mu &= 0, & \square A_\mu &= j_\mu, \\ \partial_\mu B_\mu &= 0, & \square B_\mu &= g_\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

которые все еще допускают калибровочные преобразования типа (A.16) при условии

$$\square \Lambda = \square \Gamma = 0,$$

а также калибровочные преобразования типа (A.17) при условии

$$\partial_\mu A_\mu^0 = \partial_\mu B_\mu^0 = 0.$$

Этот результат позволяет получить ряд соображений, касающихся ответа на вопрос о числе фотонов, необходимых для описания электромагнитного поля в отсутствие источников, когда используются два векторных потенциала. В этом случае ($j_\mu = g_\mu = 0$) переходят

(посредством допустимых калибровочных преобразований) от обычной калибровки, в которой $A_\mu \neq 0$, а $B_\mu = 0$, к калибровке, в которой $B_\mu \neq 0$, а $A_\mu = 0$, или к более общей калибровке, в которой как и A_μ , так и B_μ отличны от нуля. Таким образом, если электромагнитное поле без источников анализируется на языке фотонов, то получают только два фотона для каждого значения импульса, а не четыре, как можно было бы ожидать в качестве необходимого следствия использования двух потенциалов.

Следующий шаг, сделанный Кабиббо и Феррари, состоит в обобщении данной недавно Мандельштамом [11] трактовки квантовой электродинамики с отказом от использования потенциалов на случай, когда с электромагнитным полем взаимодействуют как заряженные частицы, так и монополи.

Главная идея Мандельштама сводится к попытке сформулировать теорию электромагнитного поля, взаимодействующего с полем, описывающим заряженные частицы, с помощью операторов, которые не изменяются при калибровочном преобразовании.

Калибровочно инвариантными переменными, описывающими электромагнитное поле, являются, конечно, напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. В простейшем случае для заряженных частиц, описываемых скалярным полем $\varphi(x)$, калибровочно инвариантные переменные имеют вид ($\hbar = c = 1$)

$$\Phi(x, P) = \varphi(x) \exp \left(-ie \int_{(P)}^x A_\mu(\xi) d\xi_\mu \right), \quad (\text{A.20})$$

где P — пространственно-подобный путь из бесконечности в точку x . Наиболее характерной особенностью нового оператора $\Phi(x, P)$ является его зависимость от пути P , которая может быть выражена либо в дифференциальной, либо в интегральной форме. Во втором случае эта зависимость имеет вид

$$\Phi(x, P') = \Phi(x, P) \exp \left(-\frac{ie}{2} \int_S F_{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} \right), \quad (\text{A.21})$$

где P и P' — два различных пути, оканчивающихся в одной и той же точке x , а S — поверхность, ограниченная путем $P' - P$. В схеме Мандельштама замена полевого оператора $\Phi(x, P)$ на $\Phi(x, P')$ не зависит от частного выбора поверхности S . Это всегда автоматически обеспечивается однородностью уравнений Максвелла, которые получаются заменой g_μ на нуль в правой части уравнения (A.7в).

Эта процедура была обобщена Кабиббо и Феррари на случай, когда электромагнитное поле может описываться уравнением (A.15) с помощью двух потенциалов вследствие присутствия помимо электрических зарядов еще и магнитных источников. В этом случае внутренняя совместимость теории требует, чтобы изменение (A.21), испытываемое оператором $\Phi(x, P)$ при переходе от пути P к пути P' , не зависело бы от частного выбора двумерной поверхности S . Это означает, что должно иметь место соотношение

$$\begin{aligned} \Phi(x, P) \exp\left(-\frac{ie}{2} \int_{S_1} F_{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu}\right) \\ = \Phi(x, P) \exp\left(-\frac{ie}{2} \int_{S_2} F_{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu}\right), \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

где S_1 и S_2 — две произвольные поверхности, натянутые на один и тот же контур $P' - P$. Соотношение (A.22) выполняется в том случае, когда

$$\exp\left(-\frac{ie}{2} \int_S F_{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu}\right) = 1,$$

т. е. когда

$$\frac{ie}{2} \int_S F_{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} = 2\pi i n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (\text{A.23})$$

где S — замкнутая поверхность, образуемая поверхностями S_1 и S_2 ($S = S_1 - S_2$).

Интеграл по поверхности, возникающий в левой части (A.23), может быть преобразован в соответствующий

интеграл по объему, так что конечный результат имеет вид

$$\int_V g_\mu dV_\mu = \frac{2\pi}{e} n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (\text{A.24})$$

что является релятивистским обобщением теоремы Дирака (1) (записанной в системе единиц, в которой $\hbar = c = 1$). Подобное же соотношение

$$\int_V j_\mu dV_\mu = \frac{2\pi}{g} n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

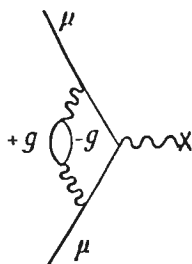
получается, если определить калибровочно инвариантный оператор, описывающий скалярное поле g , и предположить, что изменение этого оператора, обусловленное переходом от пути P к пути P' , не должно зависеть от выбора двумерной поверхности S , натянутой на контур $P' - P$.

Следуя в этом направлении, Кабиббо и Феррари сумели записать уравнения движения для электрически и магнитно заряженных частиц в электромагнитном поле и коммутационные соотношения между соответствующими калибровочно инвариантными переменными. Однако им не удалось, по крайней мере в настоящее время, получить эти уравнения из вариационного принципа.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ОЦЕНКА НИЖНЕГО ПРЕДЕЛА МАССЫ МОНОПОЛЯ ИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ $(g-2)$ -ЭКСПЕРИМЕНТА

Виртуальное рождение пар монополей должно было бы вносить вклад в магнитный момент мюона благодаря процессам, подобным изображенному на фиг. 23. Де-Толлис рассчитал вклад этого процесса в магнитный момент в первом борновском приближении в предположении, что монополи являются фермионами. При расчетах



Фиг. 23. Диаграмма, использованная Де-Толлисом для оценки влияния возможного существования монополей на результаты $(g-2)$ -эксперимента.

для взаимодействия монополей с электромагнитным полем использовалось выражение $g_{\mu}A_{\mu}$, аналогичное выражению, справедливому для электрически заряженных фермионов.

Расчет проводился обычными методами. В результате было получено ¹⁾

$$\frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \left[1 - \frac{2}{45\pi} \left(\frac{g^2}{\hbar c} \right) \frac{m_{\mu}^2}{m_g^2} \right]. \quad (\text{Б.1})$$

¹⁾ В оригинале этот материал изложен небрежно, с ошибками. Следует также иметь в виду, что полученные результаты в настоящее время устарели. По последним данным для μ^- -мезона $\Delta(g-2)/(g-2) = 2,6 \cdot 10^{-4}$ и, согласно вышеизложенному, m_g 3,6 m_p . — *Прим. перев.*

Из эксперимента [14] имеем

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\Delta(g-2)}{g-2} = 0,42 \cdot 10^{-2}.$$

Приравнивая вклад от рождения пар монополей ошибке эксперимента, можно получить оценку для нижнего предела массы монополя:

$$m_g > 11m_\mu \approx 1,2m_p.$$

Гатто, проведя аналогичные расчеты в предположении, что монополи являются бозонами, получил такой же результат.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ОЦЕНКА СЕЧЕНИЯ РОЖДЕНИЯ ПАР МОНОПОЛЕЙ В ЧИСТО ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

1. *Статистический расчет спектра импульсов монополей, рожденных парами в нуклон-нуклонных соударениях.* При планировании экспериментов, описанных в § 3, было необходимо сделать хотя бы очень грубые оценки спектра импульсов монополей, вылетающих под различными углами в реакции

$$\mathcal{N} + \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} + \mathcal{N} + g^+ + g^-. \quad (\text{В.1})$$

Был проведен статистический расчет [41] в предположении, что кинетическая энергия в системе центра масс двух сталкивающихся нуклонов делится между четырьмя частицами, появившимися в правой части (В.1), пропорционально объему фазового пространства.

Расчеты проводились в системе центра масс в нерелятивистском приближении. Затем результат был преобразован в лабораторную систему. Результат имеет вид

$$S(p, \mu) dp d\mu = \frac{105}{16} \left(1 - \frac{p^{*2}}{p_{\text{макс}}^{*2}} \right)^2 \frac{p^2}{p_{\text{макс}}^{*2}} \frac{\sqrt{p^{*2} + m_g^2}}{\sqrt{p^2 + m_g^2}} \frac{dp}{p_{\text{макс}}} d\mu; \quad (\text{В.2})$$

Он представляет число монополей с импульсами от p до $p + dp$, вылетающими со значениями $\cos \theta = \mu$ от μ до $\mu + d\mu$ в лабораторной системе, нормированное на одну частицу, вылетающую в полный телесный угол с любым импульсом (от 0 до ∞); p^* — импульс в системе центра масс, который должен быть представлен в (В.2) в виде функции от p и μ с помощью соответствующего преобразования Лоренца. Для получения максимального

значения $p_{\text{макс}}^*$ в окончательных расчетах было использовано релятивистское выражение

$$p_{\text{макс}}^* = (e_{\text{макс}}^{*2} - m_g^2)^{1/2}, \quad e_{\text{макс}}^* = \frac{1}{2} \left[W_0 + \frac{m_g^2 - (2m_p + m_g)^2}{W_0} \right], \quad (\text{В.3})$$

где W_0 — полная энергия, имеющаяся в системе центра масс.

Расчеты были выполнены на электронной вычислительной машине IBM 610 для ряда значений кинетической энергии падающих протонов (от $T_p = 10$ Гэв до $T_p = 30$ Гэв с шагом 2,5 Гэв) и масс монополей

$$\frac{m_g}{m_p} = 1, 1,5, 2,0, 2,5.$$

На фиг. 24 и 25 показаны результаты, полученные при

$$T_p = 27,5 \text{ Гэв} \quad \text{и} \quad \frac{m_g}{m_p} = 2,0 \quad \text{и} \quad 2,5.$$

Более подробно эти расчеты приведены в работе [41].

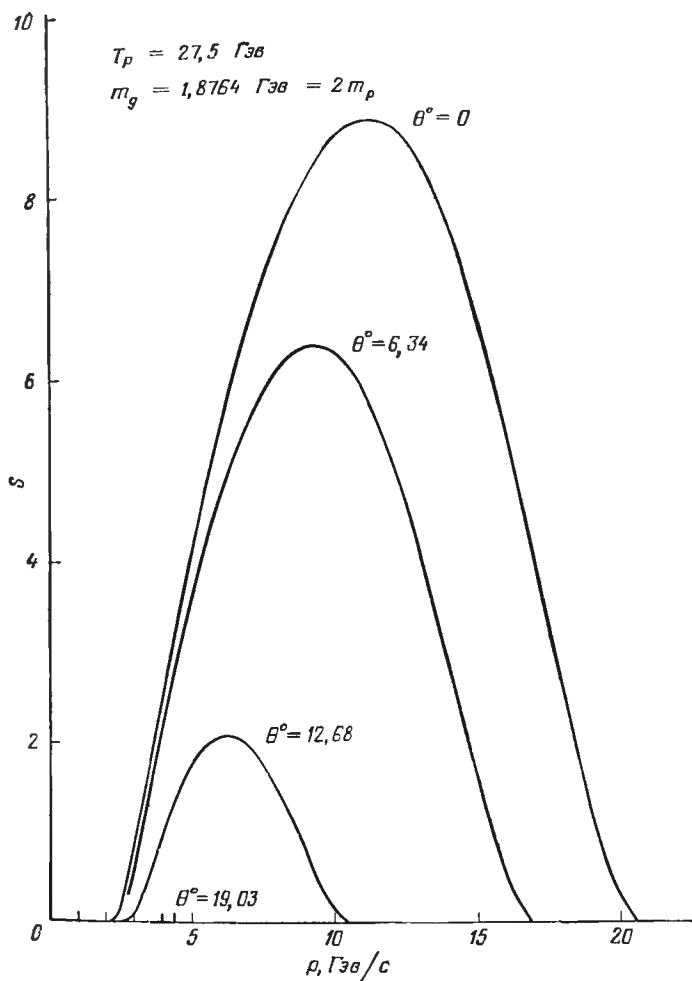
Следует отметить, что в реакции (В.1), так же как и в других реакциях, рассмотренных ниже, мы всегда предполагаем, что мишень состоит из одиночных нуклонов, поскольку передаваемый импульс так велик, что когерентные процессы, происходящие на ядрах в целом, не должны быть существенными.

2. Оценка вклада в полное сечение от процесса, показанного на фиг. 7. Кабиббо и Феррари любезно представили авторам приводимую ниже оценку сечения для процесса

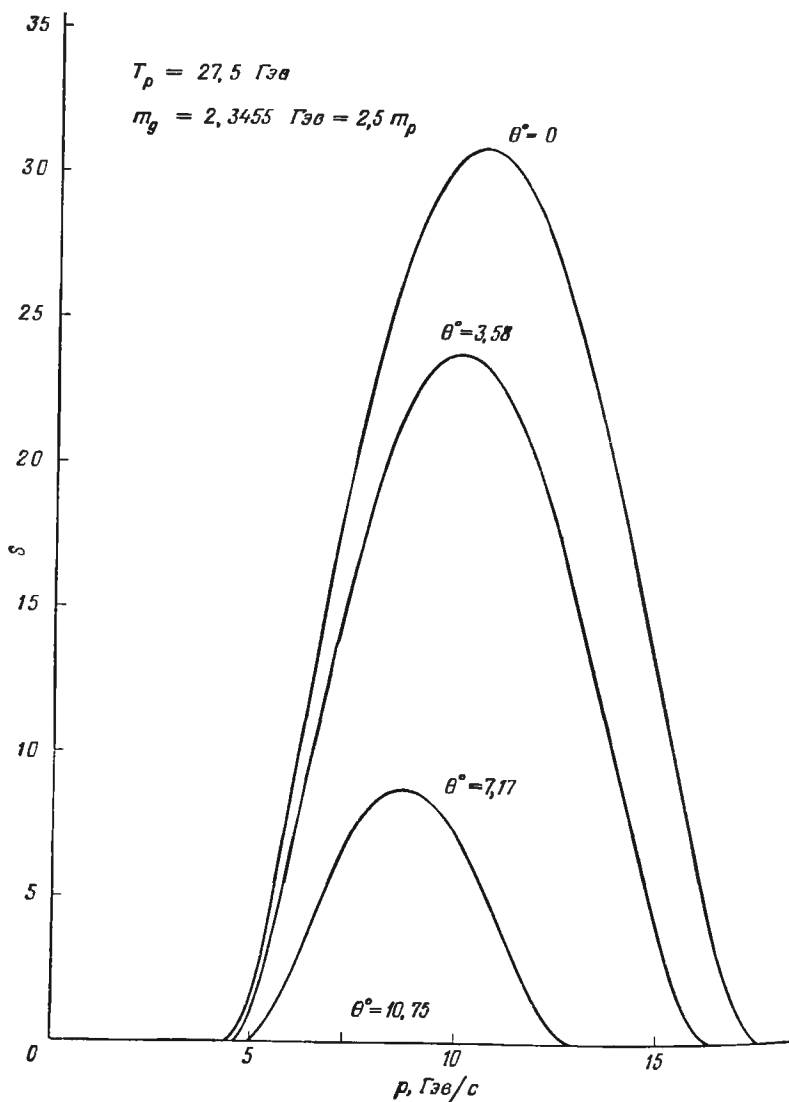
$$p + p \rightarrow p + p + g^+ + g^-; \quad (\text{В.4})$$

вычисления были ими проведены, несмотря на их оправданное нежелание использовать в таких случаях низший порядок теории возмущений (см. § 2, п. 1, и приложение А). Расчет был проведен для диаграммы, показанной на фиг. 7.

В вершине 1 протон с 4-импульсом p_1 испускает виртуальный фотон с 4-импульсом k_1 ; аналогично другой протон с 4-импульсом p_2 испускает фотон с 4-импульсом k_2 .



Фиг. 24. Статистические спектры импульсов монополей в лабораторной системе координат для $T_p = 27,5 \text{ Гэв}$ и $m_g/m_p = 2,0$.



Ф и г. 25. Статистические спектры импульсов монополей в лабораторной системе координат для $T_p = 27,5 \text{ Гэв}$ и $m_g/m_p = 2,5$.

Оба фотона входят в вершину 2, из которой выходят два монополя. Для описания этой вершины требуется адекватное представление взаимодействия монополей с электромагнитным полем. В упрощенном подходе Кабиббо и Феррари в качестве вершины просто берут квадрат магнитного заряда монополя g^2 .

Вследствие приближенности такого рассмотрения было сочтено не обязательным пытаться точно описать электромагнитные вершины двух протонов, структура которых была учтена просто введением зарядового фактора протона $F_{1p}(k^2)$.

В результате прямого расчета, при котором все частицы, включая фотоны, рассматривались как скалярные, было получено ($\hbar = c = 1$)

$$\sigma = \frac{1}{4(2\pi)^4} \frac{1}{m_p^2} \frac{m_p}{E_{\text{лаб}}} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{g^2}{4\pi} \right)^2 J, \quad (\text{B.5})$$

где

$$J = m_p^4 \int \frac{d^3 p'_1}{E'_1} \frac{d^3 p'_2}{E'_2} \frac{d^3 q_1}{\epsilon_1} \frac{d^3 q_2}{\epsilon_2} \left[\frac{F_{1p}(k_1^2)}{k_1^2} \right]^2 \left[\frac{F_{1p}(k_2^2)}{k_2^2} \right]^2 \times \\ \times \delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}) \delta(E'_1 + E'_2 + \epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{\text{лаб}}), \quad (\text{B.6})$$

$E_{\text{лаб}}$ — полная энергия падающего протона в лабораторной системе координат, E'_1 , E'_2 , ϵ_1 , ϵ_2 — энергии, а $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ — импульсы четырех частиц в конечном состоянии.

Следует подчеркнуть еще раз, что критика этого выражения вызвана в большей степени использованием теории возмущений, чем приближенным характером проведенного расчета.

Стоит обратить внимание, что при выводе уравнения (B.5) пренебрегли монополь-монопольным взаимодействием в конечном состоянии. Хотелось бы знать, не приведет ли учет такого взаимодействия к уменьшению или к увеличению сечения.

Определенного ответа на этот вопрос дать нельзя, так как мы игнорировали детальное описание взаимодействия монополей с электромагнитным полем. Можно отметить, однако, что, поскольку в результате взаимодействия монополи притягиваются друг к другу, волновая функция монополей будет возрастать в области, где

они рождаются γ -квантами. Ситуация аналогична той, которая имеет место в процессах рождения электронно-позитронных пар и в β -распаде; в обоих случаях взаимодействие в конечных состояниях приводит к увеличению сечения. Такое увеличение описывается множителем

$$\frac{2\pi\eta_+ 2\pi\eta_-}{(e^{2\pi\eta_+} + 1)(1 - e^{2\pi\eta_-})}, \quad \eta_{\pm} = \frac{e^2}{\hbar v_{\pm}}$$

в случае пар электронов [33], и множителем

$$\frac{2\pi\eta_-}{1 - e^{-2\pi\eta_-}}, \quad \eta_- = \frac{e^2}{\hbar v_-}$$

в случае β -распада [42].

В целом можно сказать, что если $\psi(r)$ — радиальная часть волновой функции, описывающей относительное движение двух разлетающихся частиц, и если функция $u(r) = \psi(r)/r$ монотонно возрастает с ростом r в области порядка $\hbar/p$ (p — импульс, сопряженный r), то взаимное притяжение частиц будет приводить к увеличению $u(r)$ и, следовательно, к увеличению сечения.

Таким образом, можно заключить, что пренебрежение монополю-монополюным взаимодействием в конечном состоянии, по-видимому, приведет к уменьшению полученного сечения. Однако это заключение не совсем достоверно, так как нельзя быть уверенным, что волновая функция $u(r)$ не начнет уменьшаться при $r \sim \hbar/p$. Однако такое поведение не очень вероятно даже в случае монополей.

Воспользовавшись тем, что интеграл (В.6) инвариантен по отношению к преобразованиям Лоренца, мы провели вычисления в системе центра масс. Запишем

$$J = \langle \rangle U_{\text{фаз}}, \quad (\text{В.7})$$

где [43]

$$U_{\text{фаз}} = \frac{(2\pi)^9}{\Gamma(9/2)} \frac{m_p^3 m_g^3}{(2m_p + 2m_g)^{3/2}} [W_0 - 2(m_p + m_g)]^7, \quad (\text{В.8})$$

— объем фазового пространства, а

$$\langle \rangle = \left\langle \left\{ \frac{m_p^4}{E_1' E_2' e_1 e_2} \left[\frac{F_{1p}(k_1^2)}{k_1^2} \right]^2 \left[\frac{F_{1p}(k_2^2)}{k_2^2} \right]^2 \right\} \right\rangle \quad (\text{В.9})$$

— значение величины в скобках, рассчитанное так, как это объяснено ниже, а именно для таких значений $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$, для которых фазовый объем двух монополей имеет наибольшее значение с усреднением по всем возможным направлениям вылетающих протонов.

Легко видеть следующее:

1) Объем фазового пространства двух монополей при фиксированном значении импульса двух протонов имеет максимальное значение, если $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2$ (и, следовательно, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$).

2) При этих условиях полные энергии четырех вылетающих частиц равны

$$E = E' = E'_2 = \sqrt{p^2 + m_p^2} = \sqrt{\frac{4}{5} m_p [W_0 - 2(m_p + m_g)] + m_p^2},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2} W_0 - E,$$

а передаваемые 4-импульсы k_1^2, k_2^2 равны друг другу и имеют вид

$$k^2 - k_1^2 = k_2^2 = -2m_p^2 + 2E_1 E'_1 - 2p_1 p'_1 \cos \theta.$$

3) Значение k^2 зависит от угла θ_{12} между $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}'_1$ (который равен углу между $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}'_2$).

Таким образом, величина в скобках (В.9) может быть записана через значения $E'_1, E'_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, k_1^2$ и k_2^2 , определенные выше, а затем усреднена по значениям угла θ_{12} между 0 и π .

Преобразование уравнения (В.5) из системы единиц, где $\hbar = c = 1$, к системе СГС производится сразу же, если заметить, что σ является произведением безразмерного множителя на величину $1/m_p^2 = \sigma_0$, которая в новой системе единиц должна быть записана в виде

$$\sigma_0 = \left(\frac{\hbar}{m_p c} \right)^2 = 4,38 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2. \quad (\text{В.10})$$

В заключение, используя (В.6) — (В.9) и значение

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \sqrt{\pi \frac{105}{16}},$$

можно записать уравнение (В.5) в удобном для расчетов виде

$$\sigma = \bar{\sigma} \frac{m_p^4}{E^2 e^2} \frac{m_p}{E_{\text{лаб}}} \Phi(\mu) \left/ \left\{ \frac{m_p^8}{k^8} F_{1p}^4(k^2) \right\} \right|, \quad (\text{В.11а})$$

где

$$\mu = \frac{m_g}{m_p}, \quad \Phi(\mu) = \mu^3 \frac{\left[\frac{W_0}{m_p} - 2(1 + \mu) \right]^7}{(1 + \mu)^{3/2}}, \quad (\text{В.11б})$$

$$\bar{\sigma} = \frac{4\pi^4}{105} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_0 = 2,04 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2.$$

Как можно видеть из этих выражений, сечение сильно зависит от зарядового формфактора протона $F_{1p}(k^2)$ в той области значений передаваемого 4-импульса k^2 , где прямые измерения отсутствуют. В связи с этим приходится взять одно из выражений, даваемых различными авторами для $F_{1p}(k^2)$, и использовать его в качестве экстраполяционной формулы.

Неопределенность, вытекающая из такой экстраполяции, может быть оценена при повторных расчетах σ для различных выражений $F_{1p}(k^2)$. Результаты, полученные подстановкой в уравнения (В.11) трех различных выражений [44] для $F_{1p}(k^2)$, приведены в левой части табл. В.1. Значения, приведенные во втором столбце, получены при использовании только сил отталкивания на малых расстояниях в выражении для формфактора, данном Корнельской группой в 1961 г.; это означает, что, полагая

$$F_{1p}(k^2) \approx F_{1s}^c(k^2), \quad (\text{В.12})$$

пренебрегают членом $F_{1s}^\mu(k^2)$, учитывающим «мезонное облако». В третьем и четвертом столбцах этой таблицы приведены результаты, полученные подстановкой формфакторов, данных Стенфордской группой в 1961 и 1962 гг.

Различие между значениями сечений, приведенными в трех столбцах, легко понять при рассмотрении основных особенностей выражений для $F_{1p}(k^2)$, принимая во внимание, что сильное отталкивание на малых расстояниях благоприятствует рождению пар монополей Ди-

Таблица В. 1

Численные результаты оценки сечения рождения монополей в p - p -соударениях

	σ , см ² , для процесса, показанного на фиг. 7, формула (В. 11)			σ , см ² , для процесса, показанного на фиг. 10, формула (В. 15)	
	Корнель, 1961 г.	Стенфорд 1961 г.	Стенфорд, 1962 г.	Стенфорд, 1961 г.	Стенфорд, 1962 г.
1,0	$9,8 \cdot 10^{-32}$	$3,0 \cdot 10^{-31}$	$1,8 \cdot 10^{-32}$	$3,0 \cdot 10^{-32}$	$4,5 \cdot 10^{-33}$
1,5	$4,8 \cdot 10^{-32}$	$1,0 \cdot 10^{-31}$	$4,9 \cdot 10^{-32}$	$3,5 \cdot 10^{-32}$	$3,2 \cdot 10^{-33}$
2,0	$4,7 \cdot 10^{-33}$	$5,5 \cdot 10^{-32}$	$1,3 \cdot 10^{-33}$	$1,6 \cdot 10^{-32}$	$9,8 \cdot 10^{-34}$
2,5	$5,0 \cdot 10^{-34}$	$1,0 \cdot 10^{-34}$	$0,92 \cdot 10^{-35}$	$2,1 \cdot 10^{-33}$	$8,2 \cdot 10^{-35}$
3,0 ¹	—	$2,1 \cdot 10^{-35}$	$1,1 \cdot 10^{-36}$	$5,9 \cdot 10^{-34}$	$1,2 \cdot 10^{-35}$

¹ Для этого значения массы монополей сечения были рассчитаны в предположении, что пучок опытного мишени движется навстречу падающим протонам, имея импульс $p_{\mu} = 200 \text{ МэВ}/c$.

рака, особенно для больших значений m_g . Для малых значений m_g вследствие приближения (В.12) использование «Корнельского» формфактора приводит к занижению результатов по сравнению с данными Стенфордской группы 1961 г.

Наконец, необходимо отметить, что приближение (В. 7), сделанное при оценке интеграла I , также имеет тенденцию занижать значение σ , так как $F_{1p}^4(k^2)/k^8$ является функцией, значения которой быстро уменьшаются при возрастании k ; другая ошибка в том же направлении, возможно, возникает из-за пренебрежения взаимодействием монополей в конечном состоянии.

3 *Рождение чисто электромагнитных монополей в процессах сильного взаимодействия.* Совершенно другим типом процесса, который может вносить заметный вклад в сечение рождения пар монополей, является рождение пар на γ -квантах распада виртуальных пионов, генерируемых при сильных протон-протонных взаимодействиях

Схема простейшего процесса такого типа показана на фиг. 8. Сильное взаимодействие между двумя протонами представлено заштрихованной областью 1, из которой выходит π^0 -мезон. В вершине 2 нейтральный пион распадается, вершины 3 (взяты вместе) приводят к появлению множителя g^2 и, таким образом, они эквивалентны вершине 2 на фиг. 7.

На первый взгляд может показаться, что вклад последнего процесса (фиг. 8) в сечение рождения много больше, чем вклад процесса, показанного на фиг. 7. Однако, как отметил Кабиббо, помимо того, что расчет диаграммы, показанной на фиг. 8, менее точен и встречает больше трудностей, чем расчет диаграммы на фиг. 7, приведенное выше качественное заключение неверно.

На фиг. 7 вклад двух вершин 1 уменьшается благодаря влиянию формфактора $F_{1p}(k^2)$. Как мы видели выше, сечение, рассчитанное по формуле, оказывается относительно большим (В. 5) из-за наличия сильного отталкивания на малых расстояниях (столбцы 2 и 3 в табл. В. 1) или по крайней мере значительной величины протонного формфактора при очень больших значениях передаваемых 4-импульсов (четвертый столбец в той же таблице).

Вклад вершины 2 на фиг. 8 очень мал, в чем можно убедиться, рассмотрев два следующих аргумента. Первый аргумент основывается на сравнении наблюдаемого среднего времени жизни π^0 -мезона

$$\tau_{\pi^0} \approx 10^{-16} - 10^{-17} \text{ сек}$$

с ожидаемым средним временем жизни электромагнитного процесса. Средние времена жизни для типичных сильных взаимодействий порядка

$$\tau_s \sim \frac{1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}}{c \text{ см/сек}} \sim 0,5 \cdot 10^{-23} \text{ сек.}$$

Поскольку распад π^0 -мезона происходит с испусканием двух γ -квантов, можно предположить, что среднее время жизни этой частицы порядка τ_s , деленного на

квадрат постоянной тонкой структуры, а именно

$$\tau \sim \frac{\tau_s}{a^2} \sim (137)^2 \tau_s \sim 10^{-19} \text{ сек};$$

это значение по крайней мере в 100 раз меньше наблюдаемого времени жизни

Второй аргумент основывается на том, что для рождения двух монополей каждый из двух виртуальных γ -квантов, испускаемых из вершины 2 на фиг. 8, должен иметь энергию на величину порядка m_g больше массовон оболочек и, следовательно, нужно учитывать форм-фактор π^0 -мезона. Эта величина недостаточна хорошо известна и нет никаких оснований полагать, что она должна иметь «твердую сердцевину» или даже иметь заметную величину для очень больших передаваемых 4-импульсов.

Используя оба эти аргумента, Кабиббо пришел к выводу, что процесс, изображенный на фиг. 8, имеет меньшую вероятность или, в крайнем случае, равновероятен процессу, рассмотренному в предыдущем разделе.

Процесс, изображенный на фиг. 9, был рассмотрен впервые Янгом и Лепором¹⁾. Они нашли, что соответствующее сечение должно быть порядка

$$\frac{e^2 g^2}{(1 + m_g^2 a^2)^4} \approx \frac{1}{(1 + m_g^2 a^2)^4}, \quad (\text{B.13})$$

где m_g — масса в единицах обратной длины, а a — длина порядка 0,2 ферми.

Эти соображения были обобщены Феррари, который вместо обмена пионом между двумя сталкивающимися протонами рассмотрел упругое протон-нуклонное рассеяние (фиг. 10). В тех же грубых приближениях, которые Кабиббо и Феррари использовали при выводе соотношения (B.5) для диаграммы на фиг. 7, Феррари получил

$$\begin{aligned} \sigma & \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{W_0}{p} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) m_p^2 m_\pi^2 \int \frac{1}{(\omega^2 - m_p^2)^2} \left[\frac{F_{1p}(k^2)}{k^2} \right]^2 \times \\ & \times \frac{d\sigma_{pp}}{d\Omega} \frac{d^3 p_1}{E_1'} \frac{d^3 p_2}{E_2'} \frac{d^3 q_1}{\epsilon_1} \frac{d^3 q_2}{\epsilon_2} \delta(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \times \\ & \times \delta(E_1' + E_2' + \epsilon_1 + \epsilon_2 - E_1 - E_2), \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

¹⁾ F. Yang J. Lepore, частное сообщение.

где $d\sigma_{p\mathcal{N}}/d\Omega$ — сечение упругого $p - \mathcal{N}$ -рассеяния, p^* импульс каждого протона и W_0 — полная энергия в системе центра масс,

$$\omega^2 = -p_2''^2 = (p_2' + q_1 + q_2)^2 = (p_2' + k)^2.$$

Величину (В. 14) можно оценить тем же методом, который использовался в предыдущем случае. Запишем выражение (В. 14) в виде

$$\sigma = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{W}{p^*} \left(\frac{e^2}{4\pi}\right) \left(\frac{g^2}{4\pi}\right) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{(\omega_m^2 - m_p^2)^2} \frac{m_p^2 m_g^2}{E^2 e^2} \left[\frac{F_{1p}(k_m^2)}{k_m^2} \right]^2 \right\} \frac{d\sigma_{p\mathcal{N}}}{d\Omega} U, \quad (\text{В.15})$$

где U — объем фазового пространства (В. 8), а множитель в фигурных скобках рассчитывается для таких значений p_1' и p_2' , для которых фазовое пространство двух монополий имеет наибольшую величину. Тогда $E = E_1' = E_2'$ и $e = e_1 = e_2$ имеют те же значения, что и в предыдущем случае, и

$$k^2 = k_m^2 = -4e^2, \quad \omega_m^2 - m_p^2 = \omega^2 - m_p^2 = -2m_p^2 - W_0^2 - 2W_0 E.$$

В рассматриваемом случае k_m есть времени-подобный вектор, и, следовательно, соответствующий форм-фактор $F_{1p}(k^2)$ является комплексной величиной. Поскольку оценка σ по формуле (В. 15) очень приближена, а знание $F_{1p}(k^2)$ в далекой времени-подобной области совершенно недостоверно, по-видимому, оправдана следующая грубая процедура: выражение, данное Стенфордской группой, используется в качестве экстраполяционной формулы для действительной части $F_{1p}(k^2)$, а соответствующая мнимая часть опускается. Результаты, полученные таким способом при

$$\frac{d\sigma_{p\mathcal{N}}}{d\Omega} \approx \frac{\sigma_{p\mathcal{N}}}{4\pi} \approx \frac{1}{4\pi} 10^{-26} \text{ см}^2,$$

приведены в столбцах 5 и 6 табл. В. 1.

4. *Рождение пар монополей γ -квантами.* По-видимому, представляет некоторый интерес рассмотреть

здесь, имеются ли другие процессы, отличные от реакции (В. 1), в которых рождение пар монополей более эффективно. Например, фоторождение

$$\gamma + p \rightarrow p + g^+ + g^- \quad (\text{В. 16})$$

соответствует диаграмме, подобной фиг. 7, в которой нет протона 1 и соответствующей вершины 1, а виртуальный фотон с 4-импульсом k_1 заменен реальным фотоном.

О таком процессе можно сделать два замечания. Первое относится к сравнению кинематики процессов (В. 16) и (В. 1); на первый взгляд кажется, что для процесса (В. 16) сечение значительно больше из-за более низкого порога, но это не так.

Пороговая энергия $k_s = \hbar\nu$ падающего фотона в процессе (В. 16) имеет величину

$$k = 2m_g \frac{m_p + m_g}{m_p} \quad (k \geq k_s),$$

которую необходимо сравнить с пороговой кинетической энергией падающего протона в процессе (В. 1)

$$T_s = 2m_g \frac{2m_p + m_g}{m_p} \quad (T \geq T_s).$$

Если $m_g \ll m_p$, то $k_s \approx 2m$, а $T = 4m$ и, следовательно, k существенно меньше T_s . Однако если $m_g > m_p$, как и ожидается для монополей, то k_s становится того же порядка, что и T_s , и стремится к T_s при $m_g \gg m_p$.

Второе замечание связано с видом спектра γ -квантов, которые могут рождаться на машинах типа кольцевого ускорителя ЦЕРН. Гамма-кванты рождаются при распаде π^0 -мезонов, в результате их количество быстро падает с увеличением энергии (46).

Таким образом, мы полагаем, что процесс (В. 1) наиболее удобен, чтобы на протонном синхротроне установить, существуют ли в природе монополи Дирака с массами от одной до примерно трех протонных масс.

ДИФФУЗИЯ МОНОПОЛЕЙ ЧЕРЕЗ ТВЕРДОЕ ВЕЩЕСТВО

1. *Миграция монополей в твердых телах.* Если монополю ограничен в своем движении решеткой с периодическим потенциалом W , то он будет перескакивать в соседние ячейки с вероятностью

$$r = \nu e^{-W/kT} \text{ сек}^{-1}, \quad (\text{Г.1})$$

где ν — частота колебаний атомов в узлах решетки, которую мы примем равной [47]

$$\nu \approx 10^{14} \text{ сек}^{-1}. \quad (\text{Г.2})$$

В отсутствие какого-либо внешнего магнитного поля монополи будут мигрировать случайным образом шагами, равными периоду решетки $d \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, и, таким образом, за время t будут продвигаться на расстояние

$$S = d \sqrt{t \nu e^{-W/kT}}. \quad (\text{Г.3})$$

Они пройдут около 1 см за 12 час, если потенциал связи W равен 0,25 эв.

В присутствии приложенного магнитного поля H монополю будет увеличивать свою энергию на $dgH = 4 \cdot 10^{-4} H \text{ эв}$ при прохождении периода решетки $d = 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Таким образом, в экспериментах, где используются поля от поля Земли до сотен эрстед, миграция должна быть обусловлена комбинацией тепловой диффузии и диффузии, обусловленной полем.

Если действует только поле Земли, то прирост энергии монополя dgH , вызванный полем, много меньше kT и движение можно описывать математически как обыкновенную диффузию. Скорость дрейфа под влиянием единичного поля, по определению, является подвиж-

ностью μ . Она связана с коэффициентом диффузии D соотношением Эйнштейна

$$\mu kT = gD, \quad (\Gamma.4)$$

где g — заряд монополя. Таким образом, скорость дрейфа равна

$$v = \frac{H g v d^2}{kT} e^{-W/kT} \approx H \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{14} \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{0,025} e^{-W/0,025}. \quad (\Gamma.5)$$

Следовательно, при энергии связи 0,25 эв скорость диффузии в поле Земли будет около 1,6 см/сек, тогда как при энергии связи 0,5 эв она составит лишь 0,3 см/час.

Для случая, когда тепловая энергия kT и энергия dgH , обусловленная приложенным полем, сравнимы, предположим, что влияние приложенного поля можно рассматривать как эффективное уменьшение энергии связи в направлении поля. Тогда вероятность скачка в направлении поля будет равна

$$v \exp \left(- \frac{W - g dH}{kT} \right). \quad (\Gamma.6)$$

Эта величина должна быть много больше, чем вероятность скачков в других направлениях. Можно сказать, что эффективно все скачки происходят в направлении поля и скорость миграции монополей определяется выражением

$$v = d v \exp \left(- \frac{W - dgH}{kT} \right). \quad (\Gamma.7)$$

Магнитное поле на оси пучка в экспериментах второго типа было 250 э. Скорость миграции в поле 250 э для различных энергий связи приведена в табл. Г.1.

Таблица Г.1
Зависимость скорости миграции
от глубины потенциальной ямы

W, эв	Скорость
0,25	$5 \cdot 10^3$ см/сек
0,35	100 см/сек
0,5	0,25 см/сек
0,7	0,33 см/час

Когда приложенное поле соответствует энергии $dgH \gg kT$, можно считать, что «свободная миграция» будет иметь место, если поле достаточно, чтобы вырвать монополь из его связанного состояния, т. е. $dgH \gg W$. Тогда освобожденный монополь будет ускоряться до тех пор, пока не достигнет скорости v орбитальных электронов в веществе. Однако средняя скорость «свободной миграции» будет около $v/2$, или $0,5 \cdot 10^8$ см/сек. Поля напряженностью 60 кэ достаточно, чтобы вырвать монополь с энергией связи 24 эв.

2. Прохождение монополей и окклюдированных молекул через поверхность мишени¹⁾. Здесь необходимо рассмотреть несколько эффектов.

1) Монополи связаны на поверхности мишени (или выталкиваются из нее) вследствие магнитных свойств вещества мишени. Обозначим энергию этой связи W_e . В случае углерода диамагнитная восприимчивость будет приводить к потенциалу отталкивания $\sim 0,07$ эв (приложение Е).

2) Монополи могут быть связаны в малой области внутри мишени в слое толщиной $2 \cdot 10^8$ см вблизи поверхности за счет вариаций потенциала кристаллической решетки. Энергию этой связи обозначим W_v . Ожидается, что работа выхода монополя из таких областей к поверхности мишени обычно мала по сравнению с W_e .

3) Монополи могут быть связаны с кислородом, который в свою очередь может быть окклюдирован на поверхности мишени. Обозначим энергию окклюзии молекул кислорода W_0 . Энергия окклюзии молекул кислорода в графите лежит между 0,1 и 0,2 эв на молекулу [27]. Парамагнитная связь монополя с молекулой кислорода достигает 0,4 эв при межмолекулярном расстоянии в жидком кислороде 3,6 Å (приложение Ж).

4) Связанные монополи должны находиться в тепловом равновесии с мишенью и, следовательно, благодаря тепловому движению могут иметь кинетическую энергию

¹⁾ Термин «поверхность» относится также к поверхностям пор внутри мишени. Графитовая мишень, имеющая плотность $2,06$ г/см³, соответствует 91% плотности углерода в форме кристаллов графита.

$E > kT$. Вероятность обнаружения монополя с энергией E изменяется с энергией как $\exp(-E/kT)$.

5) Приложенное магнитное поле позволяет монополям набирать энергию dgH при прохождении расстояния d . В случае когда монополи проходят мимо малого числа (< 6) молекул кислорода, можно считать, что d примерно равно постоянной решетки вещества мишени, т. е. около $2 \cdot 10^{-8}$ см. В случае же, когда монополь проходит мимо большого числа молекул кислорода, следует считать, что d примерно равно межмолекулярному расстоянию в жидком кислороде, т. е. $3,6 \cdot 10^{-8}$ см.

Энергия связи монополя без учета тепловой энергии должна быть равна $W_v + W_e + W_0 N dgH$, где N — число молекул кислорода, которые образовали комплекс, окружающий монополь. Величина W_e должна быть положительна для парамагнитных веществ и отрицательна для диамагнитных веществ.

Время, в течение которого монополь остается на поверхности мишени, можно найти, обращаясь к модифицированному выражению для скорости скачка

$$t = \frac{1}{v} \exp\left(\frac{W_v + W_e + W_0 N - dgH}{kT}\right). \quad (Г.8)$$

В экспериментах второго типа t должно быть меньше чем $\sim 3 \cdot 10^{-2}$ сек, т. е. меньше времени, в течение которого приложенное поле имеет нужное направление.

Для углерода приняты значения: $v = 10^{14}$ сек $^{-1}$, $t = 3 \cdot 10^{-2}$ сек, $\ln t v = 28,7$, $kT = 0,025$ эв, W_v мало, $W_e = -0,07$ эв, $W_0 = +0,10$ эв, $N = ?$, $dgH = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 310 = 0,12$ эв (сломанная мишень).

Таким образом, результаты эксперимента со сломанной мишенью имеют значение, если $(0,1 N - 0,09) / 0,025 < 28,7$, т. е. если $N < 8,1$. Аналогичные аргументы приводят к заключению, что N должно быть меньше 11, если мишень не сломана. Когда мишень находилась в выведенном положении (см. фиг. 13), приложенное поле должно было соответствовать гораздо большему эффективному времени порядка (550 мсек на импульс) $\times (10^3$ импульсов).

В эксперименте первого типа с графитовой мишенью, помещаемой в сильное импульсное поле, величина t в

поле Земли должна быть больше 12 час, а в поле 60 кэ — меньше $5 \cdot 10^{-3}$ сек. Из первого условия вытекает, что $vt = 4,32 \cdot 10^{18}$, или $\ln vt = 42,9$ при $dgH = 4 \cdot 10^{-4}$ эв. Таким образом, $0,1N + 0,03/0,025$ должно быть больше 42,9, или N должно быть больше 10.

Из второго условия следует, что $vt = 5 \cdot 10^{11}$, или $\ln vt = 26,9$ при $dgH = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 10^4 = 24$ эв. Таким образом, $(0,1N - 24 + 0,03)/0,025$ должно быть меньше 26,9, или N должно быть меньше чем примерно 250.

Однако комплексы таких или больших размеров могут не приниматься во внимание по причинам, рассматриваемым в приложении Е.

3. *Обдирочные пленки (фольги).* Для получения обдирочных пленок, используемых в экспериментах второго и первого типов с графитовой и висмутовой мишенями, на поверхности воды приготавливалась коллодиевая пленка, которая поднималась затем сетчатым кругом из тонкой проволоки с ячейками около 4 мм. Толщину пленки брали минимальную возможную, при которой пленка не разрушалась во время манипуляций и выпаривания. В эксперименте второго типа на ускорителе пленка имела толщину от $3\lambda/2$ голубого света до менее $\lambda/2$ на части ее площади.

Пленка в лабораторной вакуумной установке для экспериментов первого типа имела толщину менее $\lambda/2$. Пленка должна быть достаточно тонкой, чтобы ободраный монополь прошел ее прежде, чем его скорость уменьшится до скорости орбитальных электронов в кислороде; в противном случае, покидая пленку, монополь захватит кислород. В нерелятивистском приближении после ускорения вместе с комплексом, содержащим N_0 молекул кислорода, на пути d см в среднем поле H э и обдирки в пленке монополь должен иметь кинетическую энергию

$$T = \frac{m_g}{m_g + N_0 M_{O_2}} dgH.$$

В описываемом эксперименте $d = 34,9$ см, а $H = 1,6$ кэ. [Это значение получено интегрированием выра-

жения для аксиального поля

$$B_z = \frac{\mu NI}{2L} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$$

при поле в центре, равном 2,1 кэ.] Энергетические потери монополя в пленке должны составлять малую долю T . Заметим, что в коллодии $dT/dx \leq 0,2$ Мэв/мк для монополя с энергией меньше 1 Мэв, и, таким образом, при прохождении $3\lambda/2$, или 0,7 мк, монополь должен потерять энергию меньше 0,14 Мэв.

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ И ДЛИНА ПРОБЕГА МОНОПОЛЕЙ ДИРАКА В ВЕЩЕСТВЕ

1. *Потери энергии на ионизацию.* Для нахождения зависимости длины пробега от энергии удобно ввести обозначения

$$r = \frac{R}{m}, \quad t = \frac{T}{m}, \quad (\text{Д.1})$$

где для протона $m = m_p = 1$, так что r и t — длина пробега и кинетическая энергия частицы протонной массы. Тогда для заряженной частицы можно написать

$$r = K_T t^{\delta_T}, \quad (\text{Д.2})$$

где K_T и δ_T — медленно меняющиеся функции скорости [48].

Из уравнения (1) с учетом того, что

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{(1+t)^2}, \quad (\text{Д.3})$$

получаем

$$\left(\frac{dt}{dr} \right)_g = \frac{g^2}{e^2} \frac{1}{\delta_T} \frac{t^3 + 2t^2}{(1+t)^2} \frac{1}{r(t)}, \quad (\text{Д.4})$$

$$r_g(t) = r_0 + \int_{t_0}^t \frac{dt}{(dr/dt)_g} = r_0 + \frac{e^2}{g^2} \int_{t_0}^t \delta_T \frac{(1+t)^2}{t^2(2+t)} r(t) dt. \quad (\text{Д.5})$$

Соотношения (Д.4) и (Д.5) использовались для расчета энергетических потерь и длины пробега монополей в эмульсии и в алюминии. Значения δ_T и $r(t)$ были взяты из работы [48]. Для $t_0 = T_{p0}$ было взято значение 1,12 Мэв, так как оно является минимальной величиной, для которой было известно δ_T .

Константа r_0 была положена равной 2,2 мк в обоих случаях; это значение является нижним пределом вели-

чны, так как для расчета r_0 использовалась аппроксимация

$$r_0 = \frac{t_0}{(dt/dr)_{r=r}}. \quad (\text{Д.6})$$

Энергетические потери были рассчитаны с помощью соотношения (Д. 4) для

$$t = t_0, \quad t_1 = 2t_0, \quad t_2 = 2t_1, \dots, \quad t_{n+1} = 2t_n, \dots$$

Длина пробега рассчитывалась по формуле (Д. 5); интерполяция, необходимая для получения значений длины пробега между точками t_n и t_{n+1} , проводилась по простой формуле

$$r_{n+1} = (t_{n+1} - t_n) \left(\frac{1}{(dt/dr)_g} \right)_{\text{ср}}. \quad (\text{Д.7})$$

Результаты расчетов приведены на фиг. 1—4.

2. Потери энергии на тормозное излучение. Эти потери вычислил полуклассическим методом Бауэр [15], который очень точно повторил рассуждения Вайцзекера, проведенные им для случая энергетических потерь на тормозное излучение для заряженных частиц. Однако, поскольку формула Вайцзекера не дает хорошо известной логарифмической зависимости потерь на тормозное излучение от энергии, мы, следуя полуклассическому выводу Бауэра, использовали метод, данный Росси [49]. Полученный результат имеет вид:

для заряженных частиц (Росси)

$$\left(-\frac{dT}{dx} \right)_{Ze} = \alpha Z^2 N r_e^2 E \ln \frac{r_{\text{макс}}}{r_{\text{мин}}}, \quad \text{где} \quad r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}; \quad (\text{Д.8})$$

для монополей

$$-\left(\frac{dT}{dx} \right)_g = \alpha Z^2 N r_g^2 E \beta^2 \ln \frac{r_{\text{макс}}}{r_{\text{мин}}}, \quad \text{где} \quad r_g = \frac{g^2}{m_g c^2}. \quad (\text{Д.9})$$

Величина логарифмического множителя зависит от «экранирования». В случае полного экранирования имеем: для заряженных частиц

$$r_{\text{макс}} = \text{радиус } K\text{-орбиты}, \quad r_{\text{мин}} = \frac{\hbar}{m_e c},$$

$$K_{Ze} = \frac{r_{\text{макс}}}{r_{\text{мин}}} = 137Z; \quad ;$$

для монополей

$$r_{\text{макс}} = \text{радиус } K\text{-орбиты}, \quad r_{\text{мин}} = r_{\text{ядра}} \approx \frac{1}{2} r_e A^{1/3},$$

$$K_g = \frac{r_{\text{макс}}}{r_{\text{мин}}} = \frac{2}{a^2} (ZA)^{-1/3}.$$

Полагая $A = 2Z$, получаем

$$\ln K_g = \ln K_{Ze} + \ln \frac{217}{Z'}.$$

Таким образом, логарифмический множитель для монополей в 2—3 раза больше, чем для заряженных частиц.

Учитывая это, из уравнений (Д. 8) и (Д. 9) получаем, что потери монополя, движущегося с данной скоростью, могут быть найдены из потерь для заряженной частицы умножением их на величину

$$\sim 2 \left(\frac{g}{e} \right)^2 \frac{m_e}{m_g} \beta^2 \approx 5 \frac{m_p}{m_g} \beta^2. \quad (\text{Д.10})$$

Так как потери на излучение для заряженных частиц начинают быть заметными только при

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 20, \quad (\text{Д.11})$$

мы приходим к выводу, что при всех энергиях, встречающихся в наших экспериментах, потерями монополей на тормозное излучение можно пренебречь.

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

РАБОТА ВЫХОДА МОНОПОЛЕЙ ИЗ ДИАМАГНИТНЫХ И ПАРАМАГНИТНЫХ ВЕЩЕСТВ

Работа выхода монополя из диамагнитного или парамагнитного вещества W_e , согласно уравнению (22), равна энергии намагничивания среды с обратным знаком. Таким образом, надо вычислить

$$W_m = \int w(\mathbf{r}) dv, \quad (\text{Е.1})$$

где интеграл берется по всему объему, занимаемому веществом, а

$$w(\mathbf{r}) = \int H dM \quad (\text{Е.2})$$

есть работа намагничивания единицы объема.

1. *Макроскопическое приближение.* Первая оценка величины W_m может быть получена при использовании обычного приближения, справедливого для слабых полей

$$M = \chi H, \quad \text{где } \chi = \text{const}. \quad (\text{Е.3})$$

В соответствии с этой оценкой, используя уравнение (13), имеем

$$\begin{aligned} W(\infty) &= \frac{1}{2} \chi g^2 \int_0^\infty \frac{4\pi r^2}{r^4} dr = 2\pi \chi g^2 \frac{1}{\rho} = \\ &= 4,28 \cdot 10^{-8} \frac{\chi}{\rho_{cm}} \text{ эв.} \quad (\text{Е.4}) \end{aligned}$$

Незнание величины минимального расстояния ρ от монополя, для которой применимо макроскопическое соотношение (Е.4), является одним из главных источников неопределенности такой оценки, другой источник заложен в использовании $\chi = \text{const}$.

Однако величину ρ , по-видимому, можно оценить по крайней мере по порядку величины, если заметить, что в кристалле монополь будет стремиться занять положение равновесия. Например, в кристаллах с гранецентрированной кубической решеткой монополь будет стремиться к центру ячейки, а в кристаллах с объемноцентрированной кубической решеткой он будет стремиться к центру одной из граней. Тогда мы можем попробовать взять (в качестве ρ) расстояние от такого положения равновесия до ближайшего соседнего атома, которое в обоих упомянутых выше случаях оказывается равным

$$\rho = \frac{a}{2}, \quad (\text{Е.5})$$

где a — постоянная решетки.

Полученные таким методом результаты для некоторых диамагнитных и парамагнитных веществ приведены в табл. Е. 1.

Таблица Е.1

Работа выхода W_e из некоторых диамагнитных и парамагнитных веществ, рассчитанная в макроскопическом приближении [соотношение (Е. 4)]

Вещество	Структура	$a, \text{\AA}$	$\rho, \text{\AA}$	$\chi \cdot 10^6$	$W_m = -W_e$ ев
Графит		$a = 2,46$ $b = 6,71$	2,98 ¹⁾	-0,5	-0,072
Медь		3,61	1,80	-0,086	-0,020
Висмут	ромбич.	4,74	2,37	1,34	-0,24
Висмут	жидк.		2,35 ²⁾	-0,14	-0,025
Алюминий		4,04	2,02	+0,61	+0,13
Хром		2,88	1,44	+3,5	+1,0

1) $\rho^2 = a^2 + (b/4)^2$.

2) Это значение было пересчитано из значения для твердого вещества в соответствии с изменением плотности.

Причина, по которой мы полагаем, что в случае диамагнитных веществ соотношение (Е. 4) должно быть корректно (с точностью до множителя 2), состоит в том, что в этих веществах соотношения (Е. 3) справедливы

до тех пор, пока можно пренебречь величиной ω_L^2 по сравнению с ω^2 , где

$$\omega_L = \frac{eH}{2m_e c}$$

есть ларморовская частота прецессии, а ω — обычная частота обращения электронов в атомах. Используя для поля выражение (13), имеем

$$\omega_L = \frac{0,29}{r_{cm}^2} \text{ гц},$$

что для $r = 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ дает

$$\omega_L \approx 0,07 \cdot 10^{16} \text{ гц}.$$

Это значение следует сравнить с

$$\omega \geq 4 \cdot 10^{16} \text{ гц}.$$

Таким образом, видно, что для диамагнитных веществ единственным существенным источником неопределенности результатов, полученных с помощью соотношения (Е. 4), является принятое значение ρ , которое не может отличаться от истинного значения более чем в 2 раза. Такое же рассмотрение было проведено по предложению проф. Фриделя также для случая парамагнитных металлов, таких, как алюминий и хром.

Считается, что измеренная магнитная восприимчивость алюминия (которая не сильно зависит от температуры) складывается из четырех членов: очень малого внутрионного диамагнетизма, спинового парамагнетизма Паули и диамагнетизма Ландау электронов проводимости и, наконец, малого члена Ван-Флека, обусловленного примесью возбужденных состояний электронов проводимости, образовавшихся под действием внешнего магнитного поля [47].

В хроме, как и в других переходных металлах, магнитная восприимчивость слабо зависит от температуры [47]. Большая ее часть, вероятно, обусловлена электронами проводимости частично заполненной d -полосы, которая возникает из незаполненных d -оболочек атомов. Согласно последним экспериментальным данным, слабая температурная зависимость может быть обусловлена малыми локальными атомными моментами (доли μ_B

на атом). Довольно сложные расчеты d -полосы приводят к разному значению парамагнетизма, обусловленного электронами проводимости, тогда как полная теория восприимчивости, обусловленной локальными моментами, не создана.

В обоих случаях детальный расчет W_m столь сложен и неопределен, что кажется предпочтительным использовать результаты макроскопического приближения, несмотря на то, что на малых расстояниях от монополя не выполняются условия, при которых применение (Е.3) корректно.

В случае сплава меди (98%) и хрома (2%) определенная доля (наверняка меньше 1%) ионов хрома может оставаться растворенной в меди (см. п. 4 данного приложения); в таком твердом растворе магнитные свойства в основном обусловлены, по-видимому, большими локальными моментами. По этой причине случай локальных моментов подробно рассмотрен в п. 2 и 3 данного приложения; применение полученных результатов к смеси из сплава меди и хрома дано в п. 4.

2. Случай локальных атомных моментов в условиях, соответствующих зееман-эффекту. Рассмотрим теперь случай вещества, парамагнетизм которого в основном вызван локальными атомными моментами. В области слабого магнитного поля энергия каждого парамагнитного атома (или иона) в состоянии, характеризуемом квантовыми числами J , L и S , дается выражением

$$E_J = \frac{A}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]. \quad (\text{Е.6})$$

Соответствующий магнитный момент

$$\mu_J = g_J J \mu_B,$$

где

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (\text{Е.7})$$

есть множитель Ланде. Зееман-эффекту соответствуют условия, когда обусловленное магнитным полем расщепление уровней

$$E_M = \mu_J H \cdot M, \quad -J \leq M \leq +J, \quad (\text{Е.8})$$

мало по сравнению с расстоянием между соседними уровнями мультиплета, описываемого (Е.6):

$$E_M \ll \Delta E_J, \quad (\text{Е.9})$$

где

$$\Delta E_J = E_{J+1} - E_J = A(J+1). \quad (\text{Е.10})$$

Тогда намагниченность выражается через H и T в виде [47]

$$M(a) = N\mu_J B_J(a), \quad (\text{Е.11})$$

где

$$a = \frac{\mu_J H}{kT}, \quad (\text{Е.12})$$

а

$$B_J(a) = \frac{2J+1}{2J} \operatorname{cth} \frac{2J+1}{2J} a - \frac{1}{2J} \operatorname{cth} \frac{a}{2J} \quad (\text{Е.13})$$

есть функция Бриллюэна.

Подставляя (Е.11) в (Е.2) и (Е.1) и обозначая через W_Z величину W_m , рассчитанную для условий зееман-эффекта, получаем

$$W_Z(\infty) = 2\pi N r_J^3 k T f_J(\infty) = 1,03 \cdot 10^{-22} N (g_I J)^{3/2} f_J(\infty) \text{ эв}, \quad (\text{Е.14})$$

где

$$r_J = \left(\frac{\mu_J g}{kT} \right)^{1/2} = (g_I J)^{1/2} r_0, \quad (\text{Е.15})$$

$$r_0 = \left(\frac{\mu_B g}{kT} \right)^{1/2} = 8,68 \text{ \AA}, \quad (\text{Е.16})$$

$$f_J(z) = \int_0^1 d\xi \left[\int_{r_J^2 \xi^2 / z^2}^{\infty} B_J(a) \frac{da}{a^{5/2}} - \int_{r_J^2 \xi^2 / z^2}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{sh} [(2J+1)/2J] a}{(2J+1) \operatorname{sh} (a/2J)} \right) \frac{da}{a^{5/2}} \right]; \quad (\text{Е.17})$$

аргумент ∞ у W_Z в выражении (Е.14) показывает, что монополю находится на бесконечном расстоянии от любой поверхности соприкосновения вещества с вакуумом или другим веществом.

Функция $f_J(z)$ очень полезна, так как она позволяет рассчитать $W_z(z)$, когда монополь находится на расстоянии z от плоскости, отделяющей вещество от вакуума:

$$\begin{aligned} W_z(z) &= \frac{1}{2} W_z(\infty) + \pi N r_J^3 k T f_J(z) \quad \text{для } z > 0, \\ W_z(z) &= \frac{1}{2} W_z(\infty) - \pi N r_J^3 k T f_J(z) \quad \text{для } z < 0. \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Можно указать на ряд полезных свойств функции $f_J(z)$ и других функций z , связанных с $f_J(z)$ [50].

1) Величину $f_J(z)$ удобно привести к виду

$$f_J(z) = \int_0^1 d\xi \int_{r_J^2 \xi^2 / z^2}^1 \frac{da}{da} \left[\frac{g(a)}{a} \right] \frac{da}{a^{1/2}}, \quad (\text{E.19})$$

где

$$g(a) = \ln \left(\frac{\text{sh} [(2J+1)/2J] a}{(2J+1) \text{sh} (a/2J)} \right); \quad (\text{E.20})$$

функция $g(a)$ в нуле и на бесконечности ведет себя следующим образом:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{g(a)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{J+1}{6J} a = 0, \quad (\text{E.21})$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{g(a)}{a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[1 - \ln \frac{2J+1}{a} \right] = 1. \quad (\text{E.22})$$

2) Из соотношений (E.19) и (E.21) получаем

$$f_J(z) = \int_0^z g\left(\frac{r_J^2}{z^2}\right) \frac{z^2}{r_J^2} \frac{dz}{r_J}, \quad (\text{E.23})$$

откуда следует

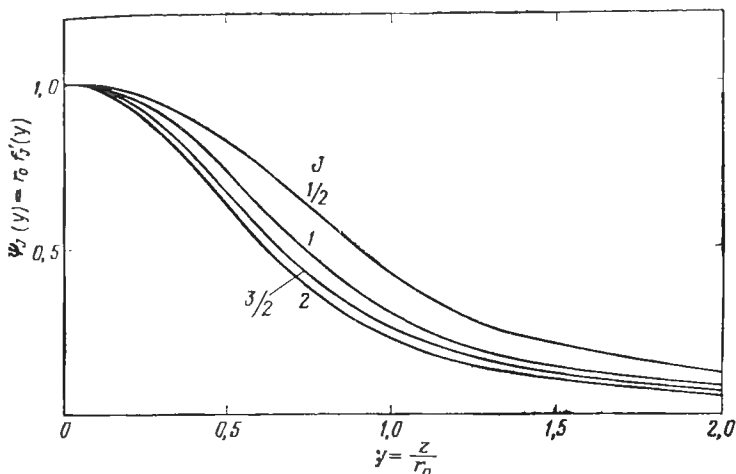
$$\psi_J(z) = r_J f_J(z) = \frac{z^2}{r_J^2} g\left(\frac{r_J^2}{z^2}\right). \quad (\text{E.24})$$

Эта новая функция, график которой приведен на фиг. 26, входит в выражение для силы парамагнитного происхождения, действующей на монополь, помещенный на рас-

стоянии z от поверхности. Беря производную от (Е. 18) по z , получаем

$$H_p(z) = \frac{F_p(z)}{g} = \frac{1}{g} \frac{dW_z}{dz} = \pi N \frac{r_J^2}{g} kT \psi_J(z). \quad (\text{Е. 25})$$

Из фиг. 26 видно, что «парамагнитное поле» $H_p(z)$ занимает очень большую область. Это можно наглядно



Фиг. 26. Безразмерные функции $\psi_J(y)$, определяющие зависимость силы, действующей на монополь, от расстояния z между монополем и поверхностью парамагнитного вещества.

представить, если заменить зависимость $H_p(z)$ от z (Е. 25) прямоугольником высотой

$$H_{\text{эфф}} = H_p(0) = \pi N \frac{kT}{g} r_J^2 = 2,9 \cdot 10^{-20} N g_I J \varepsilon$$

и длиной

$$l_{\text{эфф}} = \frac{W_z(\infty)}{H_{\text{эфф}} g} = 17,4 (g_I J)^{1/2} f_J(\infty) \text{ \AA}.$$

3) Функцию $f_J(z)$ можно записать иначе: например,

$$f_J(z) = \left(\frac{2J+1}{2J} \right) F \left(\frac{2J+1}{2J} \frac{r_J^2}{z^2} \right) = \frac{1}{(2J)^{1/2}} F \left(\frac{1}{2J} \frac{r_J^2}{z^2} \right), \quad (\text{Е. 26})$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} \frac{du}{u} \ln \frac{\operatorname{sh} u}{u}. \quad (\text{E.27})$$

4) Функция (E. 27) может быть вычислена с помощью разложения в ряд. Для $x = 0$ имеем

$$F(0) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 0,694791 \dots;$$

подставляя это значение в (E. 26), получаем

$$f_J(\infty) = 0,695 \varphi(J), \quad (\text{E.28})$$

где (табл. E. 2)

$$\varphi(J) = \left(\frac{2J+1}{2J} \right)^{3/2} - \left(\frac{1}{2J} \right)^{3/2}. \quad (\text{E.29})$$

Таблица E.2

Некоторые функции от J ,
полезные при расчетах W_e
и парамагнитного поля H_p

J	$\varphi(J)$	$f_J(\infty)$	η_J
1/2	1,83	1,27	0,394
1	1,49	1,04	0,320
3/2	1,35	0,94	0,295
2	1,27	0,88	0,284
5/2	1,23	0,85	0,274
3	1,19	0,83	0,268

5) Из выражений (E. 23), (E. 24) и (E. 21) имеем

$$\int_r^{\infty} \psi_J(z) \frac{dz}{r_J} = \frac{J+1}{6J} \frac{r_J}{r} \quad \text{для } r \gg r_J, \quad (\text{E.30})$$

$$f_J(r) = f_J(\infty) - \frac{J+1}{6J} \frac{r_J}{r} \quad \text{для } r \gg r_J \quad (\text{E.31})$$

Непосредственным вычислением было найдено, что эти асимптотические выражения достаточно точны уже при $r = 1,5 r_J$ и при их использовании ошибка меньше 10% даже при $r = r_J$.

Окончательно получаем, что энергия намагничивания той части бесконечного объема парамагнитного вещества, которая находится на расстоянии $r > r^*$ от монополя, имеет вид

$$W_z(r \geq r) = 2\pi N r_J^3 kT \left\{ \int_0^{r_J^2/r^{*2}} B_J(a) \frac{da}{a^{5/2}} - \int_0^{r_J^2/r^{*2}} \ln \left[\frac{\text{sh} [(2J+1)/2J] a}{(2J+1) \text{sh} (a/2J)} \right] \frac{da}{a^{5/2}} \right\}.$$

Для $r^* \gg r_J$ последнее выражение можно представить в виде

$$W_z(r \geq r) = W_z(\infty) \frac{1}{f_J(\infty)} \frac{J+1}{6J} \frac{r_J}{r^*} \quad \text{при } r^* \gg r_J. \quad (\text{E.32})$$

3. *Случай локальных атомных моментов в условиях эффекта Пащенко — Бака.* Эффект Пащенко — Бака наблюдается, когда расщепление, обусловленное магнитным полем, больше, чем разделение мультиплетов (Е. 10). В этом случае вместо (Е. 8) имеем

$$E_{M_L M_S} = (M_L + 2M_S) \mu_B H \begin{cases} -L \leq M_L \leq +L, \\ -S \leq M_S \leq +S, \end{cases} \quad (\text{E.33})$$

а вместо (Е. 11) получаем

$$M = N \mu_B [L B_L(a_L) + 2S B_S(a_S)], \quad (\text{E.34})$$

где

$$a_L = \frac{L \mu_B H}{kT}, \quad a_S = \frac{2S \mu_B H}{kT}.$$

Повторяя рассуждения, проведенные в п. 2, получаем вместо (Е. 14) выражение

$$W_{\Pi-B}(\infty) = 2\pi N kT [r_L^3 f_L(\infty) + 2r_S^3 f_S(\infty)], \quad (\text{E.35})$$

где

$$r_L = L^{1/2} r_0, \quad r_S = (2S)^{1/2} r_0.$$

Индекс $\Pi - Б$ напоминает нам, что это выражение справедливо только в том случае, если везде выполняются

условия эффекта Пашена — Бака. Для удобства расчетов (Е. 35) можно переписать в виде

$$W_{\text{П-Б}}(\infty) = 1,03 \cdot 10^{-22} N [L f_L(\infty) + 2(2S) f_S(\infty)]. \quad (\text{Е. 36})$$

Аналогично энергия намагничивания материала, содержащегося в сфере радиуса r^* , равна

$$W_{\text{П-Б}}(r \leq r^*) = 1,03 \cdot 10^{-22} N [L f_L(r) + 2(2S) f_S(r)]. \quad (\text{Е. 37})$$

Это выражение можно упростить с помощью аппроксимации, использующей асимптотическую формулу (Е. 31) для $f_J(r)$.

4. *Случай сплава меди (98%) и хрома (2%).* Фазовая диаграмма сплавов меди и хрома показывает, что максимальная равновесная концентрация хрома в твердом растворе в меди меньше 1% при 1080 и быстро уменьшается при понижении температуры. Таким образом, ожидается, что в мишени из сплава меди (98%) и хрома (2%) хром находится главным образом в виде вкраплений в почти чистой меди. Действительная величина, форма и расположение вкраплений очень сильно зависят от способа получения сплава.

Эти вкрапления состоят из почти чистого хрома с соответствующими магнитными свойствами; предполагая, что их размеры не меньше чем 20—30 Å, можно использовать в качестве значения работы выхода из таких вкраплений величину, рассчитанную в п. 1 данного приложения с помощью так называемого макроскопического приближения. Для ионов хрома, остающихся растворенными в меди, концентрация которых не может быть больше 1%, но, вероятно, много меньше этого значения, можно использовать рассмотрение, проведенное в п. 3.

Вследствие взаимодействия парамагнитных ионов с электрическим полем кристалла орбитальный момент количества движения обращается в нуль и J уменьшается до суммы спинов четырех электронов: $J = 4/2 = 2$. Для такой системы условия эффекта Пашена — Бака будут выполнены, если энергия ионов в магнитном поле монополя станет больше, чем энергия, необходимая для переброса спина одного электрона относительно спина дру-

гого Эта энергия порядка 1 эв. Отсюда можно сделать вывод, что условия зееман-эффекта выполняются для любого r , большего чем

$$r_c \sim r_0 \left(\frac{kT}{1 \text{ эв}} \right)^{1/2} \sim r_0 \left(\frac{1}{40} \right)^{1/2} \sim 1 \text{ \AA}. \quad (\text{E.38})$$

Объем шара радиуса r_c так мал по сравнению с объемом шара радиуса r_J , что энергия намагничивания $W(\infty)$ будет очень мало отличаться от $W_Z(\infty)$.

Используя (E. 14), получаем

$$W_m(\infty) \approx W_Z(\infty) - 61c \text{ эв}. \quad (\text{E.39})$$

где $c < 1 \cdot 10^{-2}$. Кроме того,

$$r_J = 1,74 \text{ \AA}, \quad l_{\text{эфф}} \sim 30 \text{ \AA}, \quad H_{\text{эфф}} = 9800c \text{ э.}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

КОМПЛЕКСЫ МОЛЕКУЛ КИСЛОРОДА, ОКРУЖАЮЩИЕ МОНОПОЛЬ В ГАЗЕ

Монополь, выходящий наружу через поверхность вещества, такого, как графит, может сорвать несколько молекул O_2 , окклюдированных на поверхности. Образовавшийся комплекс молекул окружает монополь. Его размеры могут увеличиваться или уменьшаться в зависимости от того, что преобладает: «конденсация» новых молекул O_2 из газа или «испарение» молекул комплекса. Размеры комплекса очень существенны, так как они определяют скорость, набираемую им, а следовательно, и монополем, под действием приложенного магнитного поля.

Обозначим радиус комплекса a ; в качестве верхнего предела его величины можно взять расстояние от монополя, на котором энергия, определяемая выражением (19), равна kT , так как для больших расстояний воздействие теплового движения превышает притяжение монополя. Из (19) получаем

$$a = \sqrt{\frac{\mu g}{kT}} = 14,7 \text{ \AA}. \quad (\text{Ж.1})$$

Плотность капли положим равной плотности жидкого кислорода

$$\delta_{O_2} = 1,14 \text{ г/см}^3$$

(в точке кипения при нормальном давлении $t = -182,7^\circ \text{C}$), откуда можно определить среднее межмолекулярное расстояние

$$d_0 = 3,6 \text{ \AA}. \quad (\text{Ж.2})$$

Это значение может быть завышенным, так как в точке замерзания

$$d_f = 2,88 \text{ \AA}. \quad (\text{Ж.3})$$

Полное число молекул O_2 , содержащихся в комплексе радиуса (Ж. 1), для значения (Ж. 2) оказывается равным

$$N_0 = \left(\frac{14,7}{3,6} \right)^3 \approx 68, \quad (\text{Ж.4})$$

а для значения (Ж. 3) оно равно

$$N_{\text{макс}} = \left(\frac{14,7}{2,88} \right)^3 \approx 132. \quad (\text{Ж.5})$$

Эти молекулы должны быть распределены в пространстве в виде более или менее концентрических слоев.

Рассмотрим первый случай. 68 молекул образуют четыре слоя, содержащих приблизительно 40, 18, 6 и 4 молекул. В табл. Ж. 1 приведены оценки радиусов этих

Таблица Ж.1

Основные характеристики слоев комплекса молекул O_2
для значения d (Ж.2)

В с данные следует рассматривать лишь как ориентировочные

Слой	N_s	a_s	$\xi(a_s)$	$\frac{\xi(a_s)}{KT}$	$e^{-\xi(a_s)/KT}$	$\frac{1}{N_s} \left(\frac{dN_s}{dt} \right)_{\text{исп}}$	A_s
1 (наружные)	~ 40	$\sim 14,7$	0,025	1	0,368	$1,1 \cdot 10^{11}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$
2	~ 18	$\sim 11,1$	0,044	1,76	0,172	$0,52 \cdot 10^{11}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$
3	~ 6	$\sim 7,5$	0,096	3,84	0,214	$0,63 \cdot 10^{10}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$
4	~ 4	$\sim 3,9$	0,355	14,2	$0,71 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^{-8}$
	$N_{O_2} - 68$						

четырёх последовательных слоев и соответствующие им значения $\xi(a)$.

Скорость уменьшения числа молекул N_s , имеющих в момент t в слое s , обусловленная испарением этих молекул, дается выражением

$$\left(\frac{dN_s}{dt} \right)_{\text{исп}} = \int_{v_{\text{мин}}}^{\infty} 4\pi a_s^2 v_x dn, \quad (\text{Ж.6})$$

где $v_{\text{мин}}$ определяется из соотношения

$$\frac{1}{2} m_{\text{O}_2} v_{\text{мин}}^2 = \mathcal{E}(a_s), \quad (\text{Ж.7})$$

$$dn = \frac{N_s}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x, \quad (\text{Ж.8})$$

$$V = 4\pi a_s^2 d, \quad (\overline{v_{\text{O}_2}})^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} = 4,61 \cdot 10^4 \text{ см/сек.}$$

При написании этих выражений принималось, что ось x направлена нормально к поверхности комплекса. В результате получаем

$$\left(\frac{dN_s}{dt} \right)_{\text{исп}} = \frac{N_s}{(6\pi)^{1/2}} \frac{(\overline{v_{\text{O}_2}})^{1/2}}{d} e^{-\mathcal{E}(a_s)/kT} = 2,95 \cdot 10^{11} N_s e^{-\mathcal{E}(a_s)/kT} \text{ сек}^{-1}. \quad (\text{Ж.9})$$

Значения этой величины приведены в предпоследнем столбце табл. Ж. 1.

Скорость возрастания числа N_s , обусловленная молекулами O_2 окружающего комплекс газа (воздуха), которые сталкиваются с комплексом и прилипают к нему, определяется выражением

$$\left(\frac{dN_s}{dt} \right)_{\text{конд}} = \pi a_s^2 V \frac{2,7 \cdot 10^{19}}{4} \frac{P [\text{тор}]}{760} \xi = 2,23 a_s^2 [\text{\AA}] V [\text{см/сек}] P [\text{тор}] \xi, \quad (\text{Ж.10})$$

где ξ — вероятность прилипания, которую мы будем считать близкой к единице, и

$$V = v_{\text{комплекс}}, \quad \text{если } v_{\text{комплекс}} \gg (\overline{v_{\text{O}_2}})^{1/2},$$

$$V = 4(\overline{v_{\text{O}_2}})^{1/2}, \quad \text{если } v_{\text{комплекс}} \ll (\overline{v_{\text{O}_2}})^{1/2}.$$

Приравнивая величины (Ж. 9) и (Ж. 10), получаем для каждого из четырех слоев следующие соотношения между давлением и скоростью:

$$P = \frac{A_s}{\beta_{\text{комплекс}} \xi}, \quad A_s = \frac{1}{2,23 a_s^2 c} \left(\frac{dN_s}{dt} \right)_{\text{исп}}, \quad (\text{Ж.11})$$

где a_s измерено в ангстремах, а P — в торах. Численные значения A_s приведены в последнем столбце табл. Ж. 1.

Для иллюстрации в табл. Ж.2 приведены два численных примера расчета, соответствующие скоростям комплексов $V=10^8$ и $V=10^6$ см/сек; указаны массы и кинетические энергии для комплексов четырех различных размеров а также равновесное значение ξP .

Таблица Ж.2

Примеры, иллюстрирующие соотношение между размерами, скоростью комплекса и давлением газа

Все данные следует рассматривать лишь как ориентировочные

	$M_{\text{комплекс}}/m_p$	$T_{\text{комплекс, Мэ}}$ для $V = 10^8$ м/сек	ξP (тор)	$T_{\text{комплекс, э}}$ для $V = 10^6$ см/сек	ξP (т.р.)
63	216	11,3	9,3	1130	930
28	896	4,67	3,3	467	330
10	320	1,67	0,3	167	30
	128	0,67	$2,4 \cdot 10$	67	$2,4 \cdot 10^{-3}$

Из приведенных значений видно, что комплекс даже примерно из 30 молекул может существовать только при высоком давлении и большой скорости, а для существования комплекса большего размера потребовались бы еще более необычные условия. Однако при большой скорости (10^7 – 10^8 см/сек) увеличение энергии комплекса, происходящее при встрече с одной молекулой, оказавшейся на его пути настолько велико, что это может привести к мгновенному испарению комплекса [26]. Таким образом, из данных табл. Ж.2 с учетом этого замечания следует, что при тех давлениях, которые были в экспериментах первого и второго типов, в графите комплексы вообще не должны образовываться.

Однако такое заключение должно быть сделано с некоторыми оговорками, так как для комплексов, состоящих из очень малого числа молекул, наше статистическое рассмотрение не справедливо. С уверенностью можно сказать лишь, что в этих экспериментах комплексы вокруг монополей не должны были содержать более 10 молекул.

Тот же вывод справедлив в случае комплекса из 132 молекул с межмолекулярным расстоянием (Ж.3), где капля должна иметь пять слоев из 64, 38, 20, 6 и 4 молекул каждый, из которых первые три мгновенно испаряются при низком давлении.

Средняя длина свободного пробега в газе

$$\lambda = \frac{1}{\pi a^2 n} \frac{760}{\pi a^2 \cdot 2,7 \cdot 10^{19} P [\text{тор}]}.$$

Принимая

$$a \leq (10)^{1/3} d = (10)^{1/3} 3,6 = 7,75 \text{ \AA}. \quad (\text{Ж.12})$$

получаем

$$\lambda \geq \frac{1,48 \cdot 10^{-3}}{P [\text{тор}]} \text{ см}. \quad (\text{Ж.13})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ОЦЕНКА ЧИСЛА ПРОХОЖДЕНИЙ МИШЕНИ ПРОТОНАМИ В УСКОРИТЕЛЕ

Число проходов мишени можно рассчитать [51], используя работу Блэкмана и Куранта [52], которые оценили многократное кулоновское рассеяние на газе в протонном синхротроне.

За основу расчета была принята формула Блэкмана и Куранта, модифицированная для учета ядерных соударений

$$P(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{R_r J_1(R_r)} \exp \left[- \left(\frac{15 R_r}{2 \theta_c \rho \beta c} \right)^2 \frac{x}{L_{\text{рад}}} \right] e^{-x/\lambda}, \quad (3.1)$$

где $P(x)$ — вероятность не «выбыть из игры» для частицы, прошедшей расстояние x , $J_1(x)$, $J_0(x)$ — функции Бесселя, R_r — r -й корень уравнения $J_0(x) = 0$, $L_{\text{рад}}$ — радиационная длина материала мишени, λ — средняя длина свободного пробега в мишени для ядерных соударений и рассеяния на углы больше θ_c , θ_c — максимальный допустимый угол рассеяния.

Соотношение

$$\theta_c = \frac{2\pi A}{l} \quad (3.2)$$

связывает полуапертуру камеры ускорителя A и длину волны l бетатронных колебаний протонов в ускорителе.

Полная средняя длина пробега протона в материале мишени получается интегрированием соотношения (3.1)

$$L = \int_0^{\infty} P(x) dx = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{R_r J_1(R_r)} \frac{1}{(15 R_r / 2 \theta_c \rho \beta c)^2 (1/L_{\text{рад}}) + (1/\lambda)} = \lambda F(y), \quad (3.3)$$

где

$$F(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{R_r J_1(R_r)} \frac{1}{1 + R_r^2 y} \quad (3.4)$$

является функцией только одной переменной

$$y = \frac{1}{4} \left(\frac{15}{\rho \beta c} \right)^2 \frac{1}{\theta_c^2} \frac{\lambda}{L_{\text{рад}}} \approx \frac{1}{4} \left(\frac{15}{E} \right)^2 \frac{1}{\theta_c^2} \frac{1}{L_{\text{рад}}}. \quad (3.5)$$

Функция $F(y) = L/\lambda$ представляет собой эффективность мишени, а отношение длины L к толщине мишени s дает число проходов

$$n_{\text{прох}} = \frac{L}{s}. \quad (3.6)$$

Для вычисления θ_c из (3.2) были использованы следующие данные, любезно предоставленные Рихтером: после некоторых коррекций вертикальная и горизонтальная полуапертуры ускорителя равны 27 и 35 мм соответственно. Отсюда с учетом того, что $l/2\pi = 100/2\pi \approx 16$ м, получаются два значения θ_c , равные $1,7 \cdot 10^{-3}$ и $2,2 \cdot 10^{-3}$ радиан; среднее значение достаточно близко к величине

$$\theta_c = 2 \cdot 10^{-3} \text{ радиан}, \quad (3.7)$$

которая использовалась для численных расчетов. Для вычисления λ были использованы данные Эшмора и др. [53], которые измерили для некоторых элементов сечения поглощения и полные сечения для протонов с кинетической энергией 24,2 Гэв.

Для легких элементов (бериллий, углерод, алюминий) мы брали $\lambda = \lambda_{\text{полн}}$, учитывая, что доля протонов, рассеявшихся на угол, меньший чем $\theta_c = 2$ мрад, очень мала. Для тяжелых элементов (медь и висмут) мы брали среднюю длину свободного пробега, соответствующую $\sigma = 1,54 \sigma_{\text{абс}}$. Численный множитель 1,54 был найден усреднением отношения $\sigma_{\text{полн}}/\sigma_{\text{абс}}$, полученного для легких элементов. Этот способ расчета был использован, чтобы учесть, хотя бы грубо, уменьшение сечения при переходе от легких элементов к тяжелым, вызванное как прозрачностью ядер, так и изменением среднего угла рассеяния, обусловленного дифракцией.

Таблица 3.1

Данные, использованные для расчета λ и L в мишенях

	$\sigma_{\text{полн}}, 10^{-24} \text{ см}^2$ [53]	$\delta, \text{ г/см}^3$	$\lambda, \text{ г/см}^2$	$L_{\text{рад}}, \text{ г/см}^2$ [18]
H ₂	0,080	—	—	58
Be	$0,28 \pm 0,02$	1,84	53,3	63
C	$0,34 \pm 0,02$	—	58,8	42,5
C _n H _{2n}	$n (0,42 \pm 0,02)$	0,92	55,3	44,3
Al	$0,62 \pm 0,04$	2,7	72,1	23,9
Cu	$1,14 \pm 0,3^1)$	8,9	92,6	12,8
Bi	$2,70 \pm 0,05^1)$	9,78	128,7	5,6

1) Эти значения найдены из $\sigma_{\text{абс}}$ для Cu и Pb соответственно умножением их на значение $\sigma_{\text{полн}}/\sigma_{\text{абс}} = 1,54$, полученное для более легких элементов (Be, C, Al) в работе [53].

В табл. 3.1 приведены значения $L_{\text{рад}}$ и сечений, использованные для расчета λ и L в различных мишенях. Табл. 3.2 содержит значения L и $n_{\text{прох}}$, полученные из соотношений (3.3) и (3.6). Следует обратить внимание

Таблица 3.2

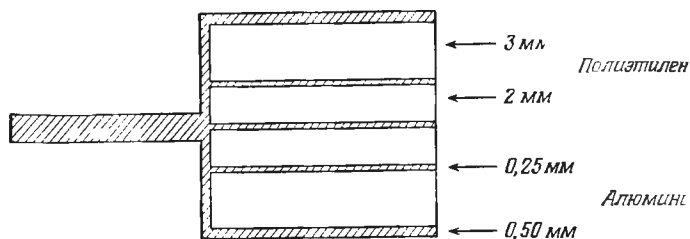
Число проходов протонов через различные мишени

	Толщина мишени, г см ²			$L_{\text{рад}}, \text{ г/см}^2$	$\lambda, \text{ г/см}^2$	$L, \text{ г/см}^2$	$n_{\text{прох}}$
	материала мишени	других материалов	в его				
Графит	3,14	бронза 1,75, Bi 3,10, латунь 0,86	8,85	10,6	83,6	60	6,8
Al	2,70	—	2,70	23,9	72,1	65	24,1
Cu (98%) — Cr (2%)	5,34	—	5,34	12,8	92,6	65	12,2
Полиэти- лен + Al	$0,92 \pm 0,47$	—	1,39	34,4	60,1	59	42,5
Be	2,76	—	2,76	63	53,3	53	19,2

на сложную структуру мишеней из графита (фиг. 12) и из алюминия и полиэтилена (фиг. 27).

Проверка этих результатов может быть проведена сравнением значения L , вычисленного из (3.3) для алюминия, со значением, полученным из следующих полуэмпирических соображений.

По данным Рихтера, при наличии алюминиевой фольги толщиной 10 мк большой площади (т. е. площади, достаточной, чтобы перекрыть почти полностью



Фиг. 27. Структура мишени из полиэтилена и алюминия.

сечение камеры) внутренний протонный пучок при энергии 19,2 Гэв и длительности 200 мсек на плато погибает за время

$$160 \text{ мсек} \pm 5\%. \quad (3.8)$$

Это означает, что такой пучок погибает в полной толщине алюминия, эквивалентной

$$L_m = \frac{160 \cdot 10^{-3} \text{ сек}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ сек}} 10 \text{ мк} \cdot 10^{-4} \text{ см} = 80 \text{ см} \approx 216 \text{ г/см}^2, \quad (3.9)$$

где 2 мсек — время, в течение которого протон совершает один оборот в ускорителе.

Чтобы рассчитать среднюю толщину материала, пересекаемую протонами, необходимо знать, как изменяется число протонов в зависимости от проходимой толщины x . Эта величина, к сожалению, не известна; более того, она зависит от площади и толщины мишени. Мож-

но попробовать, однако, использовать следующее выражение:

$$n(x) = N_p \frac{e^{-x/\lambda_{\text{полн}}} - e^{-a}}{1 - e^{-a}}, \quad a = \frac{L_m}{\lambda_{\text{полн}}}, \quad (3.10)$$

которое несколько произвольно, но дает правильные значения $n(x)$ при $x=0$ и $x=L_m$. Из (3.10) сразу получаем

$$L = \frac{1}{N_p} \int_0^{L_m} x \, dn = \frac{1 - (1+a)e^{-a}}{1 - e^{-a}} \lambda_{\text{полн}}. \quad (3.11)$$

Принимая $\lambda_{\text{полн}} = 72,1 \text{ г/см}^2$, из (3.9) и (3.10) находим

$$a = \frac{216}{72,1} = 3,$$

а из (3.11) получаем

$$L = \frac{1 - 4e^{-3}}{1 - e^{-3}} \lambda_{\text{полн}} = 0,844 \lambda_{\text{полн}} = 61 \text{ г/см}^2,$$

что хорошо совпадает со значением, приведенным в табл. 3.2.

Таким образом, можно полагать, что величины L , приведенные в табл. 3.2, не содержат больших ошибок.

ПРИЛОЖЕНИЕ И

ОЦЕНКА ДОЛИ $\eta_{\text{мишень}}$ МОНОПОЛЕЙ, ОСТАНОВИВШИХСЯ В МИШЕНИ, ОТ ПОЛНОГО ЧИСЛА РОЖДЕННЫХ МОНОПОЛЕЙ

Расчет $\eta_{\text{мишень}}$ проведем следующим образом. Будем исходить из нормализованного спектра монополей в лабораторной системе, рассчитанного на основе статистической теории (приложение В, п. 1) [41]

$$S(p, \mu) dp d\mu \quad (\mu = \cos \theta),$$

и преобразуем это выражение к новым переменным: длине пробега в алюминии R и $\mu = \cos \theta$. Поскольку

$$S(R, \mu) dR d\mu = S(p(R), \mu) \frac{dp}{dR} dR d\mu$$

и

$$\frac{dp}{dR} = \frac{E}{p} \frac{dT}{dR},$$

имеем

$$S(R, \mu) = S(p, \mu) \frac{E}{p} \frac{dT}{dR}. \quad (\text{И.1})$$

Теперь легко получить

$$\eta_{\text{мишень}}(T_p, m_g) = \int_0^s dx \int_{\cos \theta_{\text{макс}}}^1 d\mu \int_0^{x/\mu} S(R, \mu) dR, \quad (\text{И.2})$$

где s — толщина мишени.

Для алюминия интегралы в (И.2) можно непосредственно вычислить по кривым зависимости длины пробега от энергии и энергетических потерь от энергии. Для других мишеней воспользуемся энергетическими потерями, отнесенными к потерям в алюминии (табл. И.1), и вычислим толщины эквивалентной алюминиевой мишени.

Таблица И.1

Энергетические потери в различных материалах, отнесенные к потерям в алюминии¹⁾

H ₂	1,28 ²⁾
Be	1,11 ²⁾
C	1,08 ²⁾
C _n H _{2n}	1,11 ²⁾
Al	1,00 ³⁾
Cu	0,86 ³⁾
S	0,77 ³⁾
Bi	0,65 ³⁾

1) Приведенные значения усреднены в интервале энергий от 0,2 Мэв до 2 Гэв.

2) Experimental Nuclear Physics ed. by E. Segre. Vol. I, New York, 1953, p. 209

(см. перевод: Экспериментальная ядерная физика, под ред. Э. Сегре, том I, М., 1955).

3) UCRL 2426, Vol. II.

Дополнительные объяснения требуются лишь для графитовой мишени, которая имеет сложную структуру (см. фиг. 12 и табл. 3.2). В этом случае необходимо рассмотреть следующие две группы монополей:

а) Монополи, которые родились в графите и остановились в нем же; для них $\eta_{\text{мишень}}$ рассчитывается обычным способом.

б) Монополи, которые родились в слоях бронзы и висмута, расположенных до графита, а остановились в графите; для них необходимо рассчитать коэффициент ϵ аналогично тому, как рассчитывается $\eta_{\text{мишень}}$.

Поскольку в формулу (12) входит число протонов (или нуклонов), содержащихся только в слое графита, величина $\eta_{\text{мишень}}$ (C + Bi + бронза), которую необходимо использовать, равна

$$\eta_{\text{мишень}}(C + \text{Bi} + \text{бронза}) = \eta_{\text{мишень}}(C) + \frac{N_b}{N_b(C)} \epsilon, \quad b = \begin{cases} p, \\ n, \end{cases} \quad (\text{И.3})$$

где N_b — число протонов (нуклонов) в слоях бронзы и висмута до графита, а $N_b(C)$ — число протонов (нуклонов) в графите. В результате этого η_{C+Bi} может быть больше единицы (табл. И.2).

Таблица И.2

Значения эффективности мишени $\eta_{мишень}$

$\frac{m_g}{m_p}$	Алюминий + полиэтилен, 25 Гэв	Алюминий, 25 Гэв	Медь, 25 Гэв	Графит, 27 Гэв		Графит + висмут, 27 Гэв	
				$\eta_{мишень}$	ϵ	протоны	нуклоны
2,5	0,35	0,60	0,83	0,76	0,28	1,01	1,05
2,0	0,41	0,63	0,84	0,78	0,25	1,00	1,04
1,5	0,46	0,65	0,85	0,80	0,22	1,00	1,03
1,0	0,55	0,70	0,87	0,84	0,18	1,00	1,03

Интересно отметить, что результаты наших расчетов могут быть заниженными, так как мы не учитываем монополей, рожденных в висмуте и остановившихся в нем; половина их в результате диамагнитного отталкивания должна войти в графит и затем выйти из него под действием внешнего магнитного поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ К

РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИЙ МОНОПОЛЕЙ И ЭФФЕКТИВНОСТИ СБОРА МОНОПОЛЕЙ В МАГНИТНЫЙ КАНАЛ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ТРЕТЬЕГО ТИПА

1. Уравнения движения монополей Дирака во внешнем магнитном поле можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{dp_x}{ds} &= gH_0 \frac{h_x}{\beta}, \\ \frac{dp_y}{ds} &= gH_0 \frac{h_y}{\beta}, \\ \frac{dp_z}{ds} &= gH_0 \frac{h_z}{\beta},\end{aligned}\tag{K.1}$$

где ds — элементарный отрезок траектории, g — величина магнитного заряда, H_0 — напряженность магнитного поля в произвольно выбранной начальной точке O , и $h_x(x, y, z)$, $h_y(x, y, z)$, $h_z(x, y, z)$ — три функции координат, представляющие компоненты магнитного поля; эти функции нормированы так, что в избранной точке O

$$[h_x^2(O) + h_y^2(O) + h_z^2(O)]^{1/2} = 1.$$

Для расчета траекторий монополей в поле, создаваемом катушками и соленоидами в эксперименте третьего типа, начальную точку O поместим в точку пересечения оси протонного пучка с осью двух катушек; кроме того, начало координат поместим в центре выходной поверхности бериллиевой мишени (выходной по отношению к направлению падающих протонов). Ось y направим к точке O , ось z — в вертикальном направлении, т. е. параллельно оси катушек, ось x — к центру машины, чтобы образовалась правовинтовая система координат.

Для численного расчета траекторий использовался простейший метод, обычно называемый методом Эйлера

[26], суть которого сводится к замене производных в левых частях уравнений (К.1) соответствующими отношениями конечных приращений

$$\frac{dp_x}{ds} \approx \frac{\Delta p_x}{\Delta s} \text{ и т. д.}$$

Тогда, зная импульс частицы $\mathbf{p}_i(p_{xi}, p_{yi}, p_{zi})$ в определенной точке $P_i(x_i, y_i, z_i)$, можно определить импульс $\mathbf{p}_{i+1}$ в точке

$$P_{i+1}[x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i, z_i + \Delta z_i], \quad \Delta s^2 = [(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2]$$

с помощью соотношений

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i + \Delta \mathbf{p}_{i+1}, \quad (\text{К.2})$$

$$\begin{aligned} \Delta p_{xi+1} &= K \frac{h_x^i}{\beta_i}, \\ \Delta p_{yi+1} &= K \frac{h_y^i}{\beta_i}, \\ \Delta p_{zi+1} &= K \frac{h_z^i}{\beta_i}, \end{aligned} \quad (\text{К.3})$$

где

$$K = gH_0 \Delta s \quad (\Delta s = \text{const}), \quad (\text{К.4})$$

$$h_x^i = h_x(P_i), \quad h_y^i = h_y(P_i), \quad h_z^i = h_z(P_i),$$

$$\beta_i = \frac{p_i}{W_i}, \quad W_i = (p_i^2 + m_g^2)^{1/2},$$

$$\Delta x_i = \Delta s \frac{p_{xi}}{p_i}, \quad \Delta y_i = \Delta s \frac{p_{yi}}{p_i}, \quad \Delta z_i = \Delta s \frac{p_{zi}}{p_i}.$$

2. На фиг. 28 приведены измеренные значения h_z для поля, создаваемого катушками Крайнена, в зависимости от y для различных значений z и x . В области, представляющей интерес для расчета траекторий, вследствие малости окна ω (см. фиг. 19; $-1,5 \text{ см} \leq x \leq 1,5 \text{ см}$) радиальная компонента поля $\sqrt{h_x^2 + h_y^2}$ была настолько мала, что ею можно было полностью пренебречь. Значения h_z , приведенные на фиг. 28, были интерполированы с шагом 5 см во всех трех направлениях.

Затем были рассчитаны траектории в соответствующей области, причем уравнения (К.3) были заменены на

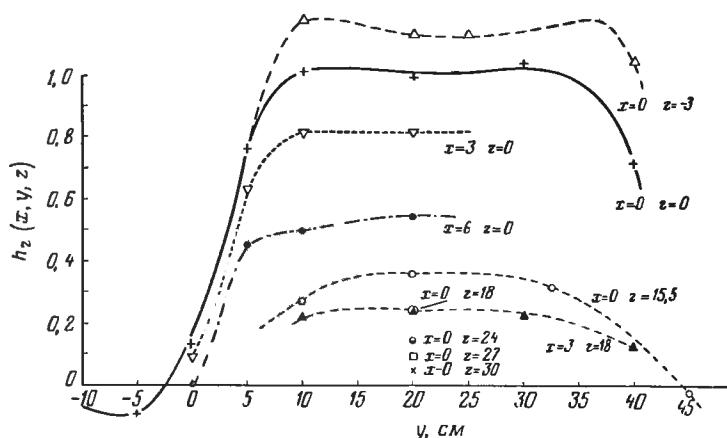
$$\Delta p_{xi+1} = 0,$$

$$\Delta p_{yi+1} = 0,$$

$$\Delta p_{zi+1} = K \frac{h_z^i}{\beta_i},$$

где K определяется (К.4) при $\Delta s = 2$ см.

Численные расчеты были проведены для различных начальных значений импульса (7,5, 10,0, 12,5 и 15,0 Гэв/с)



Фиг. 28. Зависимость «нормированного магнитного поля» h_z , создаваемого катушками Крайнена, от координат.

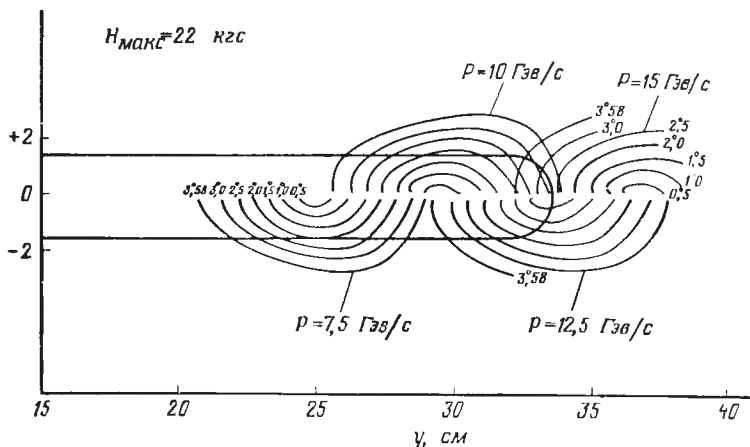
и угла вылета из бериллиевой мишени: угол θ с осью y варьировался от 0 до 7° с шагом $1-2^\circ$, для азимутального угла ϕ вокруг оси y был выбран шаг 30° .

Были рассчитаны траектории (для двух значений $H_0 = 20$ и $H_0 = 22$ кГс) на всем пути от мишени до стенки камеры: ($z = 3,7$ см). Затем рассчитывались потери энергии при прохождении аральдитовой стенки толщиной 1,5 мм; при этом учитывалась энергия частиц и угол искривления траектории.

Полученные данные использовались для дальнейшего расчета траекторий в воздухе вплоть до значения

$z=15,7$ см, соответствующего верхней грани крепления катушек.

Движение следа траектории на этой плоскости для данных значений p и θ при изменении φ от 0 до 180° представлено на фиг. 29. С помощью этих кривых легко выделить траектории, прошедшие через окно w на



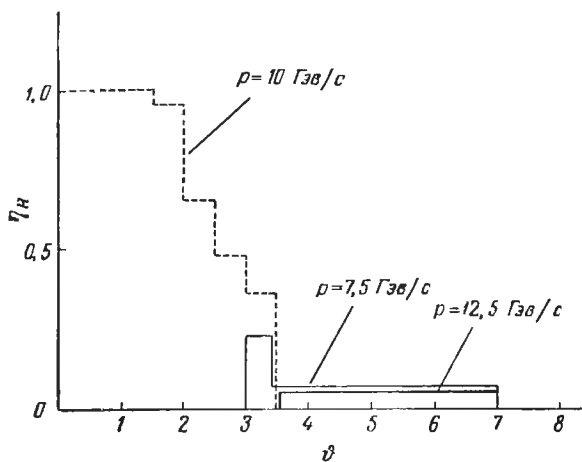
Фиг. 29. Каждая кривая представляет собой след траекторий монополей, испущенных мишенью при фиксированных p и θ на плоскости $z=15,7$ см, когда угол φ пробегает значения от 0 до $\pm 180^\circ$.

фиг. 19, которые затем продлеваются в поле, представляющем векторную сумму полей катушек и соленоидов.

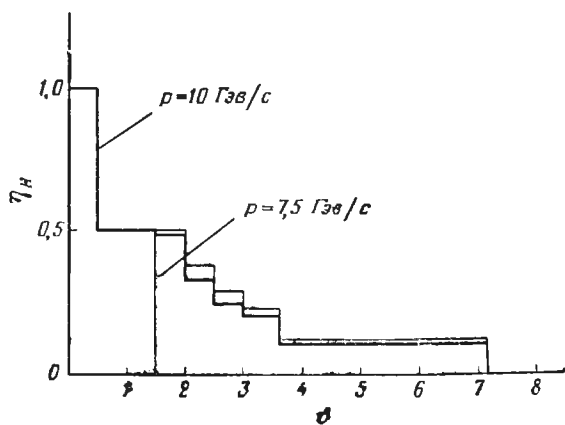
Зависимость поля трех соленоидов от координат была рассчитана по таблицам, приведенным Александром и Даунингом [45]. На этом этапе расчетов траекторий учитывались y - и z -компоненты поля, а x -компонентой пренебрегали. Такое приближение оправдано, так как все допустимые траектории лежат в плоскостях, близких к плоскости $x=0$, и образуют с ней пренебрежимо малые углы.

В результате этих расчетов получена полная эффективность канала

$$\eta_H(p, \theta) = \int \eta_H(p, \theta, \varphi) d\varphi$$



Ф и г. 30. Эффективность сбора монополей магнитным каналом в случае $H_0 = 20 \text{ кэ}$.

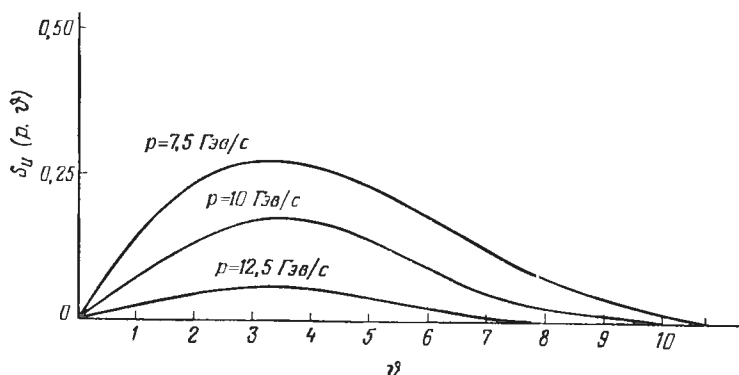


Ф и г. 31. Эффективность сбора монополей магнитным каналом в случае $H_0 = 22 \text{ кэ}$.

как функция θ для нескольких начальных значений импульса (фиг. 30 и 31).

Затем, согласно методике, изложенной в приложении А, п. 1, был рассчитан спектр монополей, покидающих мишени для $m_g = 2,5 m_p$ (и $m_g = m_p$) и $T_p = 28$ Гэв (фиг. 32).

Окончательные результаты были получены после умножения этого спектра на эффективность магнитного



Фиг. 32. Спектр монополей с массой $m_g = 2,5 m_p$, вылетающих из бериллиевой мишени.

канала (фиг. 30 или 31) и интегрирования по θ и p . Оказалось, что для рожденных в мишени монополей, достигающих верхнего конца магнитного канала, составляет 2,05% для $H_0 = 20$ кГс и 1,95% для $H_0 = 22$ кГс, как при $m_g = 2,5 m_p$, так и при $m_g = m_p$. При расчете Σ_b использовалось значение 2%, т. е.

$$\eta = 0,02. \quad (K.5)$$

Следует отметить, что поправка к значению η , обусловленная многократным рассеянием монополей в стенке из аральдита ¹⁾, достигает примерно 4%.

¹⁾ Легко показать, что средний угол многократного рассеяния монополей связан с таким же углом для заряженных частиц той же

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A133, 60 (1931) (статья 1 данного сборника).
2. Dirac P. A. M., Phys. Rev., 74, 817 (1948) (статья 2 данного сборника).
3. Malkus W. V. R., Phys. Rev., 83, 899 (1951) (статья 3 данного сборника).
4. Fitz H. C., Good W. B., Kassner J. L., Ruark A. E., Phys. Rev., 111, 1406 (1958).
5. Goto E., Journ. Phys. Soc. (Japan), 13, 1413 (1958).
6. Bradner H., Isbell W. M., Phys. Rev., 114, 603 (1959).
7. Amaldi E., Baroni G., Bradner H., de Carvalho J., Hoffmann L., Manfredini A., Vanderhaeghe G., Proceedings of the Aix-en-Provence Conference, p. 155.
8. Fidecaro M., Finocchiaro G., Giacomelli G., Nuovo cimento, 22, 657 (1961).
9. Purcell E. M., Collins G. B., Fujii T., Hornbostel J., Turkot F., Phys. Rev., 129, 2326 (1963) (статья 5 данного сборника).
10. Cabibbo N., Ferrari E., Nuovo cimento, 23, 1147 (1962).
11. Mandelstam S., Ann. Phys., 19, 1 (1962).
12. Amaldi E., Baroni G., Bradner H., Hoffmann L., Manfredini A., Vanderhaeghe G., Nuovo cimento, 28, 773 (1963).
13. Charpak G., Farley F. J. M., Garwin R. L., Muller T., Sens J. C., Telegdi V. L., Zichichi A., Phys. Rev. Letters, 6, 128 (1961).
14. Charpak G., Farley F. J. M., Garwin R. L., Muller T., Sens J. C., Zichichi A., Phys. Letters, 1, 16 (1962).
15. Bauer E., Proc. Cambr. Phil. Soc., 47, 777 (1951).
16. Cole H. J. D., Proc. Cambr. Phil. Soc., 47, 196 (1951).
17. Katz R., Parnell D. R., Phys. Rev., 116, 236 (1959).
18. Barkas W. H., Rosenfeld A. H., UCRL 8030, March 20, 1958.
19. Тамм И. Е., Z. Phys., 71, 141 (1931).
20. Fierz M., Helv. Phys. Acta, 17, 27 (1944).
21. Bandret P. P., Helv. Phys. Acta, 19, 503 (1946).
22. Harish-Chandra, Phys. Rev., 74, 883 (1948).

массы и скорости соотношением

$$\Theta_g = \frac{g}{e} \beta \Theta_e = \frac{137}{2} \beta \Theta_e,$$

где, как обычно,

$$\Theta_e^2 = \left(\frac{21 M \beta v}{\rho \beta c} \right)^2 \frac{x}{L_{\text{рад}}}.$$

Для $x=0,15 \text{ см}/\cos \alpha \sim 0,15/0,3=0,5 \text{ см}$, $0,9 \text{ г/см}^2$ и $L_{\text{рад}} = 25 \text{ г/см}^2$ при $\rho \approx 15 \text{ Гэв/с}$ получаем $\Theta_g \approx 1 \cdot 2^\circ$.

23. Eliezer C. J., Roy S., Proc. Cambr. Phil. Soc., 58, 11, 401 (1962).
24. Lapidus J. R., Pietenpol J. L., Am. Journ. Phys., 28, 17 (1960).
25. van Vleck J. H., The Theory of Electric and Magnetic Susceptibility, Oxford, 1932.
26. Nadeau G., Am. Journ. Phys., 28, 566 (1960).
27. Dushman S., Vacuum Technique, New York (см. перевод: С. Дэшман, Техника высокого вакуума, М., 1933).
28. Braunersreuter F., Combe J., Hoffmann L., Morpurgo M., CERN Report 62-7, A 200 kgauss pulsed magnet for emulsion experiments.
29. de Carvalho H. G., Muchnik M., Potenza G., Rinzi-villo R., Nuovo cimento, 27, 468 (1963).
30. American Institute of Physics Handbook, New York 1947, p. 5 40.
31. Semat H., Katz R., Physics, New York, 1958; Cullwick E. G., Electromagnetism and Relativity, London, 1957, p. 87.
32. Katz R., Am. Journ. Phys., 30, 41 (1961).
33. Heitler W., Quantum Theory of Radiation, London, 1954, p. 6-7 (см. перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, М., 1956).
34. Ramsay N. F., Phys. Rev., 109, 225 (1958).
35. Thompson J. J., Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, 1921, p. 396.
36. Saha M. N., Ind. Journ. Phys., 10, 141 (1936); Phys. Rev., 75, 1968 (1949); Wilson N. A., Phys. Rev., 75, 309 (1949); Eldridge J. A., Phys. Rev., 75 1614 (1949).
37. Grönblom P. O., Zs. Phys., 98, 283 (1935).
38. Fermi E., Acc. Naz. Lincei, Fondazione Donegani, Conferenze 1950, p. 117.
39. Jordan P., Ann. Phys., 32, 66 (1938).
40. Jauch J. M., Rohrlich F., The Theory of Photons and Electrons, Reading, Mass., U. S. A.
41. Ageno M., Amaldi E., Internal Report of the Istituto Superiore di Sanità, Roma, DT 60/15, DT 60/16.
42. Blatt J. M., Weisskopf V. F., Theoretical Nuclear Physics, New York, 1952 (см. перевод: Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, М., 1954).
43. Milburn R. H., Rev. Mod. Phys., 27, 1 (1955).
44. Olson D. N., Schopper H. F., Wilson R. R., Phys. Rev. Letters, 6, 286 (1961); Hofstadter R., Herman R., Phys. Rev. Letters, 6, 293 (1961); de Vries C., Hofstadter R., Herman R., Phys. Rev. Letters, 8, 381 (1962).
45. Poincaré H., Compt. rend., 123, 530 (1896).
46. Fidecaro M., Gatti G., Giacomelli G., Love W. A., Middlekoop W. C., Yamagata T., Nuovo cimento, 19, 382 (1961).
47. Kittel C., Introduction to Solid State Physics, New York, 1956 (см. перевод: Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, М. — Л., 1958).
48. High-energy data, UCRL 2436 Rev., Vol. II, p. 71.

- 49 Rossi B., High-Energy Particles, New York, 1952 (см. перевод: Б. Росси, Частицы большой энергии, М., 1955).
50. Report No. 1258 of 23rd March 1961 of the Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo del C. N. R., Roma.
- 51 Courant E. D., Brookhaven Internal Report EDC 46, February 5, 1962.
- 52 Blachman M. N., Courant E. D., Phys. Rev., **74**, 140 (1948); **75**, 315 (1949).
53. Ashmore A., Cocconi G., Diddens A. N., Wetherell A. M., CERN SC Internal Report 60—61.
54. Scarborough J. B., Numerical Mathematical Analysis, Baltimore and Oxford, (2nd ed), 1950, p. 235.
- 55 Alexander N. B., Dowing A. C., ORNL, 2828 Physics and Mathematics, Oak Ridge National Laboratory, October 13, 1959.

5. ПОИСКИ МОНОПОЛЕЙ ДИРАКА НА ПРОТОНАХ С ЭНЕРГИЕЙ 30 ГЭВ

*Э. Перселл, Дж. Коллинз, Т. Фуджи, Дж. Хорнбостел,
Ф. Туркот*

E. Purcell, G. Collins, T. Fujii, J. Hornbostel,
F. Turkot, Phys. Rev., **129**, 2326 (1963)

На Брукхевенском протонном синхротроне с сильной фокусировкой была предпринята попытка обнаружить магнитные монополи, которые могут возникать при соударениях протонов с энергией 30 Гэв с легкими ядрами или за счет вторичных по отношению к этим протонам γ -лучей в кулоновском поле протонов или ядер углерода. В экспериментах, которые потребовали $5,7 \cdot 10^{15}$ ускоренных протонов, не было найдено ни одного случая, похожего на образование монополя. Получен верхний предел сечения образования монополей при взаимодействии протонов с ядрами, равный $2 \cdot 10^{-40}$ см². Получен также экспериментальный предел сечения для фоторождения пар монополей.

Как показал Дирак [1], существование монополей не противоречит квантовой механике, если магнитный заряд монополя g определенным образом связан с зарядом электрона e . Необходимо, чтобы g/e было кратно $\hbar c/2e^2$. Поэтому наименьшее допустимое значение магнитного заряда полюса, отличное от нуля, равно $(137/2)e$, или приблизительно $3 \cdot 10^8$ СГСМ. Дирак предположил, что существование такого объекта могло бы быть связано с квантованием электрического заряда и что, хотя магнитные монополи не наблюдались до настоящего времени, они могут образовываться парами в процессах при очень больших энергиях.

Это предположение стимулировало постановку некоторых экспериментов по обнаружению монополей. Первым здесь следует отметить эксперимент Малкуса [2]. Он сконструировал простой, но изящный прибор для сбора и регистрации монополей, которые могли бы попадать в земную атмосферу в состав первичного космического излучения или могли быть созданы в атмосфере обычными первичными частицами большой энергии. Малкус

установил верхний предел потока монополей любого происхождения $10^{-10} \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$. Позднее Браднер и Избелл [3] описали эксперименты, выполненные на Бэватроне; они также безуспешно искали монополи, которые могут рождаться в процессах, вызванных протонами с энергией 6 Гэв. После создания ускорителей больших энергий вопрос был заново пересмотрен. Мы приводим здесь результаты наблюдений, выполненных в пучке протонов с энергией 30 Гэв и вторичных γ -квантов Брукхевенского протонного синхротрона с сильной фокусировкой. Одновременно с той же целью, но несколько другой методикой были выполнены аналогичные опыты на протонном синхротроне в ЦЕРНе [4, 5].

§ 1 ПРЕДПОЛАГАЕМЫЕ СВОЙСТВА МОНОПОЛЯ

Обычно для простоты предполагают, что если монополь Дирака существует, то он обладает зарядом, равным $(137/2)e$, а не кратным этой величине. Проект нашего эксперимента также отражает это обстоятельство, и ниже, если не оговорено противоположное, магнитный заряд g принимается равным $(137/2) e$. Чувствительность к многократно заряженным монополям рассмотрена в § 10. Магнитные полюса должны рождаться парами, и обратно, изолированный полюс не может распадаться, если предположить, разумеется, что заряд сохраняется. Поскольку в обычном веществе монополи или отсутствуют, или встречаются крайне редко, отсюда следует практически неограниченное время жизни для любого монополя, удалившегося после рождения на макроскопическое расстояние от полюса другого знака.

О массе гипотетического монополя можно сказать очень мало. Дирак высказал лишь предположение, что масса монополя может быть порядка массы нуклона. В нашем эксперименте наиболее массивные монополи, пары которых могли рождаться при нуклон-нуклонных взаимодействиях, имели бы массу покоя 2,9 Гэв, что составляет половину возможной энергии в системе центра масс для протона с энергией 30 Гэв, взаимодействующего с нуклоном первичной мишени. (Предельная масса будет больше, если рассмотреть дальнейдействующие

силы в качестве причины когерентного рождения при взаимодействии протонов с ядрами.) Значение массы покоя, имеющее определенную привлекательность, но, насколько нам известно, не имеющее более серьезного обоснования, составляет $2,4 \text{ Гэв}$; при такой массе монополю с зарядом $(137/2)e$ должен иметь классический радиус, равный радиусу электрона. Поскольку это значение находится в пределах верхней части области, доступной в данных опытах, мы часто будем принимать его в качестве примера при рассмотрении вопросов, связанных с зависимостью от массы. Можно сказать, что данный эксперимент увеличивает исследованную область возможных масс покоя в 3 раза по сравнению с областью, изученной ранее Баднером и Избеллом [3]. Однако ни один эксперимент на ускорителе, который дал отрицательный результат, не может полностью заменить опыт типа эксперимента Малкуса [2], так как первичные протоны в космических лучах обладают гораздо более высокой энергией.

Необходимо также сказать несколько слов о сечении рождения монополей. Для монополей нельзя просто написать формулы, аналогичные формулам образования в электромагнитном взаимодействии электрически заряженных пар частиц — античастиц. Не известно ни одной надежной оценки сечения рождения монополей. В этих условиях экспериментатор может только попытаться уменьшить, насколько возможно, пределы сечения, рассчитывая, что в дальнейшем теория придаст какой-то смысл его отрицательным результатам. Кажется вероятным, что прежде всего будет дан теоретический анализ процесса фоторождения; вообще нет основания для обсуждения других взаимодействий. Учитывая это обстоятельство, мы обратим особое внимание на то, чтобы установить верхний предел сечения фоторождения пар монополей γ -лучами. Для изучаемой нами области значений масс порог достаточно высок, так как импульс внешнего поля должен быть передан нуклону. Например, чтобы создать пару монополей с массой $2,4 \text{ Гэв}$ в поле протона, необходим фотон с энергией 17 Гэв . Предел по массе составляет $5,6 \text{ Гэв}$ при фоторождении γ -лучами с энергией 17 Гэв в поле ядра углерода.

§ 2. ПОВЕДЕНИЕ МАГНИТНЫХ МОНОПОЛЕЙ В ВЕЩЕСТВЕ

Хотя основные свойства монополя, его масса, спин и прежде всего его существование не могут быть точно предсказаны, однако если постулировать его существование как стабильной частицы с определенным магнитным зарядом, то многие особенности поведения монополя в веществе можно предвидеть. Коул [6] и Бауэр [7] теоретически исследовали ионизационные потери монополей, проходящих через вещество. Продолжив исследование, начатое в работе Дирака, Хариш-Чандра [8] показал, что для системы из двух частиц — магнитного монополя и электрона связанных состояний не существует. Малкус [2] и Элиезер и Рой [9] рассмотрели возможную связь монополя с ядром, атомом или молекулой. Мы рассмотрим здесь только те аспекты поведения монополя, которые относятся к нашему опыту.

Магнитный монополь с зарядом g при движении с большой скоростью в среде испытывает огромные потери на ионизацию. Создаваемая им ионизация весьма похожа на ионизацию релятивистской частицы с электрическим зарядом $68 e$, однако в отличие от электрически заряженной частицы его потери на ионизацию не зависят существенно от скорости, пока скорость существенно больше, чем у атомных электронов. Как общее правило, следует ожидать, что быстрый монополь теряет около 8 Гэв на 1 г/см^2 ; его ионизация составляет примерно одну треть ионизации осколка деления. Это необычное свойство используется для обнаружения монополя во всех проведенных до сих пор экспериментах.

После того как монополь замедлен, так что не может больше эффективно ионизовать, его взаимодействие с кулоновским полем ядра характеризуется довольно большим сечением упругого рассеяния. Например, сечение рассеяния на большие углы монополя со скоростью $2 \cdot 10^8 \text{ см/сек}$ и массой 2,4 Гэв ядром с $Z=6$ равно 10^{-22} см^2 . Этот механизм может служить для дальнейшего уменьшения энергии монополя. Однако еще большего сечения упругого рассеяния следует ожидать для скоростей меньше 10^7 см/сек в результате диамагнитного отталкивания между монополем и электронами оболочки

атома. Для монополей с энергией в несколько электрон-вольт или меньше сечение рассеяния в результате диамагнитного отталкивания порядка размеров атома. Эти процессы можно рассмотреть детально, однако для нашей непосредственной цели достаточно отметить, что монополь с высокой энергией, например с начальной кинетической энергией 1 Гэв , несомненно будет замедлен до тепловой энергии на расстоянии в несколько десятых долей г/см^2 от его начального положения. Нам необходимо знать также его последующее состояние.

Как было сказано выше, между диамагнитным атомом или молекулой и монополем существует отталкивание. Это взаимодействие гораздо больше любых эффектов, которые мы привыкли связывать с диамагнетизмом. Если монополь находится вне атома, то сила отталкивания пропорциональна $1/r^5$, и потенциальная энергия может достигать 1 эв на расстоянии атомного радиуса. Точно оценить энергию трудно вследствие возмущения электронных оболочек атома при таком расстоянии между монополем и ядром, однако порядок величины можно определить. Таким образом, следует ожидать, что в чисто диамагнитной среде монополь останется свободным в том смысле, что он не будет связан ни с одним атомом. Тем не менее он может быть связан внутри решетки из атомов или ионов вследствие отталкивания, которое создает минимумы потенциальной энергии в промежуточных положениях. Эта ситуация напоминает так называемые клатраты, в которых химически инертный атом находится внутри инородной кристаллической решетки. В компактной решетке из тяжелых атомов диамагнитного вещества монополь движется в эффективном периодическом потенциале, имеющем минимумы в несколько десятых электронвольта. Хотя может показаться, что этого достаточно для захвата монополей при комнатной температуре, подвижность подобных захваченных монополей должна быть очень большой даже в слабом магнитном поле. Например, поле 1 гс , которое эквивалентно полю 20 кв/см , действующему на обычный ион, при наличии такого потенциала может обусловить дрейф монополя со скоростью, составляющей много сантиметров в секунду при комнатной температуре. Этот процесс

аналогичен ионной проводимости в кристалле, и предсказываемая подвижность экспоненциальным образом зависит от предполагаемой величины барьера, поэтому любая количественная оценка весьма неопределенна. Таким образом, нельзя заранее точно решить априори, будет ли монополю в диамагнитной решетке эффективно неподвижен под действием слабого поля. С другой стороны, почти несомненно, что поле порядка нескольких килогаусс достаточно уменьшит потенциальный барьер, чтобы обусловить быстрое перемещение монополя, который испытывает только диамагнитное взаимодействие.

Однако большинство веществ содержит по крайней мере небольшое число парамагнитных атомов примеси, поэтому необходимо исследовать вопрос о связи монополя в парамагнитном веществе. Это взаимодействие можно приближенно оценить следующим образом. Рассмотрим отдельный атом, содержащий нескомпенсированный спин электрона, и монополю с зарядом g на некотором расстоянии r . Зеемановская энергия составляет $e\hbar g/2m_e c r^2$. Существует потенциал притяжения, соответствующий основному состоянию, в котором спин электрона поляризован преимущественно вдоль оси, соединяющей атом и монополю. Данное описание справедливо, если скорость прецессии спина в поле g/r^2 велика по сравнению со скоростью движения оси атом — монополю. Это условие заведомо выполняется в случае массивного монополя. Если объединить этот потенциал притяжения $1/r^2$ с потенциалом отталкивания $1/r^4$, обусловленным диамагнитным взаимодействием монополя с орбитами электронов, то получим потенциальную яму глубиной в несколько электронвольт с минимумом при r около 10^{-8} см. Это расстояние настолько мало, что наше простое рассмотрение диамагнитного и парамагнитного взаимодействий едва ли может давать хорошее приближение. Тем не менее имеются достаточные основания ожидать для связи монополя с парамагнитным атомом или ионом глубину потенциальной ямы порядка нескольких электронвольт. К этому заключению пришел также Малкус [2].

Аналогичный анализ системы двух частиц, состоящей из ядра или нуклона с магнитным моментом и монополя,

показывает, что связанного состояния не существует. Однако этот вопрос не тривиален. Область, где связанные состояния исключены, не столь обширна и нельзя быть совершенно уверенным, что более тонкий анализ не выявит возможность такой связи для некоторых случаев. И наконец, возможны специфические взаимодействия между монополями и нуклонами, о которых нам ничего не известно. Ниже мы рассмотрим применительно к нашему эксперименту возможность связанного комплекса ядро — монополь.

Рассмотрения вопроса о связи неподвижных монополей в веществе можно избежать, если монополи останавливаются в жидкости. Если монополь находится в жидкости, то независимо от того, связан ли он с атомом, с молекулой или с молекулярным комплексом, он должен перемещаться в направлении приложенного магнитного поля до тех пор, пока не подойдет к границе жидкости. Скорость монополя будет такой, что вязкое торможение связанных с ним частиц точно уравнивается магнитной силой gB . Например, в жидкости с вязкостью 1 снз подвижность системы молекулярного размера, с которой связан монополь, должна быть порядка $10 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{гс}^{-1}$. С другой стороны, если монополь остается не связанным, то он также будет двигаться в направлении магнитной силы. В этом случае вязкое торможение возникает из-за соударений «голого» монополя с атомами на его пути; если поле достаточно мало, движущаяся «структура» может быть описана как небольшая сфера, в которой находится монополь и из которой диамагнитное отталкивание удаляет жидкость. Диаметр такой сферы можно оценить по поверхностному натяжению и объемной вязкости жидкости. Обычно оказывается, что он порядка размера молекулы. Таким образом, в слабом поле связанный и свободный монополи будут двигаться через жидкость почти одинаково.

Эта гидродинамическая модель вряд ли применима, если тянущее поле B достаточно сильно. Рассеиваемая вдоль трека монополя энергия становится настолько большой, что локальная структура жидкости может измениться. Или же сила gB просто протаскивает, если не связанный, то «голый» монополь между окружающими

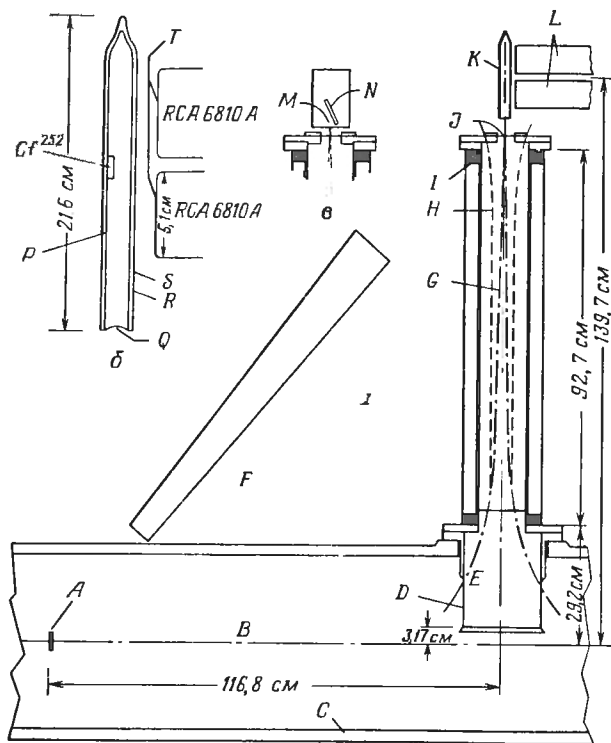
молекулами, заставляя его преодолевать потенциальные барьеры и двигаться со скоростью больше тепловой. Изучение различных моделей показывает, что граница между слабым и сильным полями лежит вблизи 100 гс (по порядку величины). Во всяком случае можно быть уверенным, что увеличение тянущего поля монотонно увеличивает скорость дрейфа монополя и ничто не может препятствовать его перемещению в жидкости под действием магнитного поля, даже если оно слабое.

Практически во всех случаях сила инерции, обусловленная макроскопическим искривлением силовой линии, мала по сравнению с торможением монополя в плотной среде. Можно показать также, что влияние поперечной диффузии должно быть незначительным. Следовательно, можно считать, что в однородной жидкости монополю точно следует вдоль силовой линии поля. Наш экспериментальный замысел частично основан на предыдущем рассмотрении; идея состоит в том, чтобы избежать остановки монополя в твердом веществе между моментами образования и регистрации и вместо этого провести его через жидкость с помощью магнитного поля, которое также можно использовать для извлечения монополя с поверхности жидкости. Процесс отрыва монополя с поверхности жидкости детально рассматривается в § 5.

§ 3. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

На фиг. 1 показана экспериментальная установка. Откачанная коробка мишени помещена в длинную прямолинейную секцию ускорителя, где находится облучаемая мишень, показанная на фигуре («первичная мишень»). Эта мишень состояла из легких веществ (Be, C, CH₂, Al) и имела толщину 0,15 см; она служила для других экспериментов по высоким энергиям, для которых данный опыт является побочным. Резервуар с внутренним диаметром 20,8 см, расположенный в центре прямолинейной секции в коробке мишени, служит для того, чтобы захватить часть магнитных зарядов, которые могут образоваться при взаимодействии протонов с ядрами первичной мишени и затем двигаться вперед со скоростью, близкой к скорости системы центра масс ядра

и протона. При этой скорости кинетическая энергия монополя Дирака с массой 2,4 Гэв будет равна 7,4 Гэв.



Фиг. 1. Экспериментальная установка.

a — показан фокусирующий соленоид и масляный контейнер вместе с мишенью и коробкой мишени; *b* — детали устройства счетчика; *в* — верхняя часть фокусирующего соленоида (показано расположение эмульсии).

A — первичная мишень, *B* — медианная плоскость пучка, *C* — коробка мишени, *D* — алюминий, 0,15 см, *E* — масло, *F* — защита (латунь 3,8 см), *G* — траектория, *H* — силовые линии магнитного поля, *J* — окно соленоида $\varnothing 12,7$ см, *J* — май р. 0,005 см, *K* — трубка, наполненная ксеноном, *L* — фотоумножители, *M* — эмульсия, *N* — эмульсия, *P* — алюминий, нанесенный испарением на внутреннюю стенку, *Q* — стекло 0,01 см, *R* — высококачественная сварка, *S* — кварц, внешний диаметр 1,9 см, *T* — слой *n*-квотерфенила для сдвига спектра д. и волн.

Алюминиевая стенка резервуара слишком тонка (0,15 см) чтобы остановить магнитные заряды такой энергии, во всяком случае, если их заряд не больше

(137 2)е. Они пройдут через нее и остановятся в жидкости, которой заполнен резервуар (вакуумное масло).

Жидкость служит и для другой цели. Она образует мишень для возможного рожденья пар монополей в электромагнитных взаимодействиях фотонов высокой энергии, которые пересекают резервуар. Толщина масляного «конвертора» составляет примерно половину радиационной длины, и он расположен так, чтобы захватить значительную долю потока γ -лучей высокой энергии от первичной мишени ¹⁾.

Выше резервуара вертикально установлен длинный соленоид, который служит для ускорения монополей до большой энергии для регистрации. Вакуумный насос поддерживает внутри соленоида давление около 100 *мк рт. ст.*; майларовое окно толщиной 0,005 *см* закрывает его верхний конец. Монополь соответствующего знака, остановленный в масле, вытягивается на его свободную поверхность магнитным полем, создаваемым концом соленоида. Если предположить, что «голый» монополь, вырванный из масла, ускорен в области вакуума, то его кинетическая энергия при подходе к вершине соленоида будет близка к 1,1 Гэв. Это значение зависит, конечно, только от заряда монополя, поля в соленоиде (которое обычно составляло от 500 до 700 *гс*) и эффективной длины соленоида, равной примерно 90 *см*. Форма поля вблизи нижнего конца соленоида была выбрана так, чтобы сфокусировать все траектории монополей в малое отверстие в конце детектора. После прохождения через майларовое окно и через воздушный промежуток толщиной в несколько сантиметров монополь попадает в детектор.

Использовались два типа детектора: I) заполненная чистым ксеноном кварцевая трубка, образующая ксеноновый сцинтиллятор, которая просмагривается двумя фотоумножителями, и II) ядерные эмульсии. Оба метода регистрации используют крайне специфическую ионизацию, создаваемую магнитным монополем, чтобы

¹⁾ Стенки резервуара в нижней части покрыты слоем свинца толщиной 0,635 *см*. Однако неясно (см. § 2), может ли сравнительно слабое магнитное поле вырвать монополи, созданные в этом материале.

отделить его трек от обильного фона релятивистских заряженных частиц. При работе сцинтилляционного детектора I этим фоном можно было бы пренебречь, если бы была полная уверенность в том, что подвижность монополей в масле не превышает существенно ту оценку, которая получена выше для случая слабого поля. Согласно этой оценке, монополь должен попадать в детектор с запаздыванием относительно момента прохождения протонного пучка, так что можно просто выключить счетчики на время прохождения пучка. Согласно нашему первоначальному плану, сцинтилляционный детектор должен был работать именно так, несмотря на существенную неопределенность в подвижности. К счастью, была доказана возможность избавиться от фона без импульсного включения счетчиков и в результате этого наши выводы не зависят от неопределенности в наименьшем запаздывании.

Импульсы с фотоумножителей, регистрирующих световой импульс ксенонового датчика, подавались на схему совпадений с хорошим разрешением, дискриминатор и осциллограф. Уровень дискриминатора мог быть установлен по импульсам от осколков деления, созданных внутренним источником Cf^{252} . С учетом потерь в окошке монополь должен был потерять в ксеноне примерно в 10 раз большую энергию, чем осколок деления. Дискриминатор, настроенный на уровень в 3 раза выше величины импульсов от осколков деления, хорошо подавлял импульсы фона. Любые импульсы выше этого уровня могли быть тщательно исследованы на фотографиях с экрана осциллографа. При работе с фотоэмульсиями система ксенонового детектора сдвигалась и заменялась коробкой с алюминиевым окном толщиной 0,0025 см, как показано на фиг. 1, в.

В начальный период соленоид работал в импульсном режиме (поле 760 гс), чтобы исключить вредное влияние его поля рассеяния на орбиты протонов при инжекции. Поле соленоида включалось в каждом цикле работы ускорителя в интервале времени от 0,2 до 1,2 сек после инжекции пучка, что соответствовало скважности, равной примерно 2. После того как было установлено, что поле рассеяния не влияет на инжекцию, соленоид рабо-

тал непрерывно, однако его поле было снижено от 760 до 500 гс, чтобы избежать перегрева

Полная экспозиция при любом измерении определялась суммированием числа циркулирующих протонов по всем импульсам ускорителя. За все время эксперимента, в котором на мишень попало $5,7 \cdot 10^{15}$ ускоренных протонов, не было зарегистрировано ни одного события, похожего на монополь. Необходимо детально рассмотреть критические особенности эксперимента, чтобы обосновать значимость этого отрицательного результата и отвести возможные замечания.

§ 4. ФОКУСИРОВКА

Поле соленоида обладает фокусировкой первого порядка для монополей, которые вначале покоятся вблизи конца соленоида и затем ускоряются внутри откачанной колонки. Действие поля аналогично действию иммерсионных электростатических линз для ионов. В нерелятивистском приближении траектории не зависят от напряженности поля и массы монополя. Фокусное расстояние зависит от расположения плоскости источников, которой здесь является поверхность жидкости, относительно конца соленоида. Уровень жидкости был выбран так, чтобы вычисленное положение фокуса находилось точно над верхним концом соленоида. Были использованы результаты релятивистского расчета фокусного расстояния, хотя сдвиг фокуса при изменении массы в пределах, представляющих интерес, был несуществен, так как совокупность траекторий от источника заполняет в фокусе очень малый угол. Это показано на фиг. 1, где приведена траектория монополя, которая начинается у верхнего края тонкой части стенки резервуара. Траектории монополей, образовавшихся ниже этой точки, будут находиться еще ближе к оси.

Необходимо было убедиться в том, что магнитные поля от других источников не смогут отклонить траектории монополей от входа в детектор. Исследование окружающего статического поля и поля рассеяния импульсных магнитов ускорителя показало, что горизонтальная компонента не превышает 1 гс. В этом отношении распо-

ложение соленоида было особенно удобным. Он находился в центре между двумя магнитами ускорителя с противоположной ориентацией, так что ось соленоида была в то же время осью симметрии ближайшей структуры магнитного поля синхротрона. Постоянная горизонтальная компонента 1 гс по всей длине соленоида могла сдвинуть фокус только на 2 мм .

§ 5. ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗ ЖИДКОСТИ

Предположим, что к поверхности жидкости подходит монополь, связанный с молекулой. Мы видели, что с большой вероятностью монополь может быть связан с парамагнитными молекулами, а присутствие свободных радикалов особенно в масле, которое подверглось действию сильно ионизирующего излучения, можно принять без доказательства¹⁾. Будет ли содержащая монополь молекула извлечена с поверхности? Направленная вверх сила gB , эквивалентная в нашем поле 500 гс по полю 10^7 в/см , действующему на ион, разумеется, способствует испарению. Даже без учета такого благоприятного фактора, если равновесное давление пара над маслом составляет 1 мк рт. ст. , то время жизни молекулы на поверхности относительно испарения равно примерно $0,01\text{ сек}$. Поэтому если присутствие монополя не усиливает резко связи между этой отдельной молекулой и соседними молекулами, то эта молекула вместе с монополем испарится. Такая молекула будет объектом рассмотрения в следующем параграфе.

Однако нельзя исключать возможность того, что монополь объединяет вокруг себя комплекс молекул. Действительно, рассмотренная выше связь парамагнитного типа не обладает свойством насыщения. Допустимо, что монополь может создать вокруг себя оболочку молекул,

¹⁾ Измерения парамагнитного резонанса, выполненные Тенчем и Сутиным, обнаружили концентрацию $10^{12} - 10^{13}\text{ спин/см}^3$ как в предварительно облученном, так и в необлученном масле. Для этих значений концентрации невозможно оценить, будет ли монополь на своем пути в масле связан с парамагнитным веществом. В процессе облучения спиновая концентрация могла быть, разумеется, гораздо больше.

число которых ограничивают только пространственные эффекты. Более того, нельзя полностью исключить возможность образования комплекса, состоящего даже больше чем из одной оболочки молекул, так как парамагнитное притяжение представляет собой дальнюю действующую силу, а о химических свойствах молекулы, электронную конфигурацию которой изменило присутствие монополя, имеется очень мало данных. Однако если поле B достаточно сильно, описанный ниже существенно макроскопический эффект может обеспечить отрыв сильно связанного монополя.

Допустим, что влияние монополя на локальные механические свойства жидкости становится незначительным на некотором расстоянии r_0 от монополя. Сделаем крайнее предположение, что молекулы вещества внутри области $r < r_0$ жестко связаны с монополем или, другими словами, образуют твердый шар, на который, разумеется, действует сила gB . Если предположить, что свойства жидкости вне сферы неизменны, то наибольшая сила, необходимая, чтобы извлечь сферу радиуса r_0 из жидкости, составляет $2\pi r_0 T$, где T поверхностное натяжение жидкости. Поэтому если gB превышает $2\pi r_0 T$, то шар обязательно оторвется от поверхности. Пусть $r = 10^{-6}$ см. При таких размерах допустимо макроскопическое описание деформации поверхности жидкости. В действительности влияние монополя на механические свойства жидкости не может быть столь далеким, так как поле монополя на таком расстоянии составляет только 30 кэс. Если теперь принять, что T составляет 50 дин/см, то получим, что поле 10 кэс будет удовлетворять нашему условию. Извлечение может стать только легче при любом уменьшении жесткости сферы $r = r_0$.

Мы считаем маловероятным, что монополи могли остаться на поверхности масла в поле 500 гс, которое прикладывалось в большинстве экспериментов. Тем не менее представлялось необходимым выполнить один опыт, в котором эта маловероятная возможность была бы полностью исключена. Небольшой соленоид был установлен соосно внутри большого соленоида точно над поверхностью масла. Этот соленоид мог включаться на 2 сек и создавать поле около 10 000 гс. После экспозиции

масляная мишень и эмульсионный детектор были помещены на место при включенном поле в большом соленоиде, уровень масла поднят до необходимой высоты внутри малого соленоида и включено сильное импульсное поле. Все собранные на поверхности монополи, двигаясь вдоль магнитных силовых линий, безусловно, должны быть извлечены, согласно приведенным выше аргументам. После исследования двух эмульсий толщиной 400 мк, экспозиция которых соответствовала общему числу протонов в ускорителе $1,0 \cdot 10^{16}$, не было найдено ни одного трека монополя.

§ 6. РАЗРУШЕНИЕ КОМПЛЕКСА, ОКРУЖАЮЩЕГО МОНОПОЛЬ

При ускорении магнитным полем монополь приобретает такую большую скорость, что последующее соударение с молекулами газа разрушает связь и вызывает освобождение монополя от его окружения. Чтобы это показать, отметим, что энергия, приобретаемая в поле 500 гс на длине свободного пробега молекулы при давлении 100 мк рт. ст., составляет по порядку величины 3 Мэв. В данном случае предполагалось, что сечение соударения равно 10^{-15} см². При этом относительная скорость при соударениях столь велика, что разрушается любая парамагнитная связь, даже если энергия принадлежит монополю, окруженному комплексом с молекулярным весом 10^3 .

Разумеется, если разрушение комплекса происходит только после того, как молекула с монополем прошла большую часть длины соленоида, то энергия, с которой монополь достигает детектора, будет гораздо меньше ожидаемого значения. Поэтому очень малое давление в колонке недопустимо.

Если предположить существование очень большого комплекса молекул, подобного твердому шару, рассмотренному в предыдущем параграфе, то можно оценить скорость, с которой этот квазимакроскопический шар мог бы приобретать энергию при «продирании» через газ. Это «продирание» можно точно учесть в уравнении движения. При таких условиях указанная передача энергии столь велика, что шар разрушился бы на расстоя-

нии гораздо меньше 1 см, даже если его начальный радиус достигал 10^{-6} см. Следовательно, даже при наиболее искусственных предположениях о химической связи монополь будет освобожден в результате соударений в газе вблизи основания соленоида. Тот же вывод применим в случае, когда монополь мог бы оказаться параманнитно связанным с молекулами кислорода при прохождении через масло (или через алюминий, см. § 10).

Другое положение имело бы место, если бы монополь был связан с ядром. Такая структура, по-видимому, имела бы размер порядка радиуса ядра и энергию связи, измеряемую в Мэв. В этом случае только ядерное взаимодействие, крайне маловероятное в условиях эксперимента, могло бы отделить монополь от ядра. Эта сложная частица могла бы пройти детектор. Основные потери на ионизацию создавал бы магнитный заряд монополя, а не заряд ядра, поэтому они почти не зависели бы от скорости. Таким образом, длина пробега и ионизация для такого комплекса в любом детекторе были бы такими же, как для отдельного монополя, ускоренного тем же полем.

Более сложная ситуация возникает в том случае, если монополь связан с ядром существенно слабее, чем сами ядра друг с другом, и находится в состоянии с размером промежуточным между размерами ядра и атома¹⁾. Тогда разрушение комплекса может происходить не в ускорительной колонке, а в окошках или в эмульсии. Монополь, обладающий только частью ожидаемой энергии, избавляется от сопровождающей его частицы до регистрации. Эта частица также пересечет сцинтиллятор или эмульсию; ионизация будет весьма значительной, так как почти все ее электроны будут сорваны, но не столь большой, чтобы вся ее энергия была израсходована на длине пробега, соответствующей монополю с полной энергией. Весьма вероятно, что такой случай не будет зарегистрирован ни в сцинтилляторе, ни в эмульсии.

¹⁾ Чтобы монополь был связан с ядром на каком-либо расстоянии, он должен сначала преодолеть диамагнитный барьер электронных оболочек. Благодаря этому требованию преобладание таких структур маловероятно.

§ 7. ПЕРВАЯ СИСТЕМА РЕГИСТРАЦИИ: КСЕНОНОВЫЙ СЧЕТЧИК И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ АППАРАТУРА

Наиболее существенным требованием, предъявляемым к детектору монополей в данном опыте, является способность регистрации редких частиц, обладающих чрезвычайно сильной ионизацией, при наличии большого фона релятивистских заряженных частиц и γ -лучей вблизи мишени ускорителя. Мы построили ксеноновый газовый сцинтилляционный счетчик, удовлетворяющий этому требованию.

Хорошо известно, что газовый сцинтилляционный счетчик характеризуется малым временем высвечивания (10^{-8} сек), а амплитуда импульса в нем является линейной функцией энергетических потерь [10, 11]. Последняя характеристика весьма желательна при использовании дискриминатора амплитуды импульсов для регистрации монополей, так как создаваемая ими плотность ионизации является промежуточной по отношению к плотности ионизации α -частиц и осколков деления. Малая ширина временного разброса световых импульсов существенна для уменьшения загрузки счетчика импульсами фона в период облучения пучком.

Эффективному объему счетчика легко придать форму, которая увеличивает отношение сигнала к фону в данной экспериментальной установке; это является еще одним преимуществом газового счетчика по сравнению с другим возможным детектором, например с полупроводниковым счетчиком. Наибольший размер счетчика соответствовал вычисленной длине пробега ускоренных монополей (примерно 100 мг/см^2) с учетом фокусировки траекторий монополей, в то время как поперечный размер был гораздо меньше. В результате этого длина следа большинства фоновых частиц была меньше, чем длина следа монополей.

Сцинтилляционный объем нашего счетчика образует прозрачная трубка длиной 21,6 см, наружным диаметром 1,9 см и толщиной 0,16 см, наполненная спектроскопически чистым ксеноном при атмосферном давлении. Средняя часть трубки длиной 11,4 см изготовлена из кварца, пропускающего преимущественно ультрафиоле-

товый свет сцинтилляций ксенона. Одна сторона внутренней стенки кварцевой трубки покрыта слоем напыленного алюминия, чтобы увеличить эффективность светосбора. Оба конца трубки изготовлены из стекла пирекс и соединены с кварцевой трубкой посредством высококачественной сварки. Нижний конец трубки закрыт тонким стеклянным окном толщиной 0,1 мм, что соответствует примерно 25% вычисленной длины пробега монополя с кинетической энергией 1 Гэв.

Ксеноновая трубка установлена вертикально в прямоугольной бакелитовой рамке, расположенной против фотокатодов двух фотоумножителей типа 6810А. На поверхность каждого фотокатода напылен слой *n*-квотерфенила примерно 40 мг/см² для того, чтобы сдвинуть спектр первичного излучения в область большей чувствительности фотокатода. В промежутке между ксеноновой трубкой и фотоумножителями умышленно оставлен воздушный зазор, чтобы избежать черенковского излучения от любого возможного источника фона.

Все счетное устройство тщательно экранировано от магнитных полей системой магнитных экранов, расположенной в прямоугольной стальной коробке, и установлено на ускоряющем солениоиде.

Импульсы с анодов обоих фотоумножителей поступают через дискриминаторы на схему двойных совпадений. Импульсы с выхода схемы совпадений регистрируются пересчетным устройством, а также используются для запуска развертки высокочастотного осциллографа Тектроникс 517. На вертикальные пластины подавались импульсы обоих фотоумножителей с задержками, определяемыми удобством наблюдения. Время развертки достигало 200 нсек. Установка уровня дискриминатора для совпадения импульсов осуществлялась ослаблением выходных сигналов. Картина на экране осциллографа для каждого случая совпадения фотографировалась. Поэтому для каждого такого события могли быть тщательно исследованы амплитуды импульсов, их форма и совпадение во времени.

Ввиду неопределенности в подвижности монополей, рассмотренной в § 2, следовало установить связь между моментами сброса пучка на мишень и регистрации со-

бытия. Промежуток времени между этими моментами измерялся с точностью 1 мсек пересчетной схемой, считавшей периодические сигналы с частотой 1 кГц, которая выключалась выходным импульсом схемы совпадения, а включалась в нулевой момент времени периода ускорения в синхротроне. Сброс пучка осуществлялся примерно через 1 сек после нулевого момента времени и имел длительность 15 мсек. Время сброса контролировалось вспомогательным телескопом счетчиков, и было доказано, что разброс этого времени относительно нулевого момента незначителен.

Для калибровки системы ксенонового детектора был использован радиоактивный источник Cf^{252} . Источник был нанесен испарением в вакууме на тонкий кружок платиновой фольги; он находился у внутренней стенки ксеноновой трубки на равных расстояниях от двух фотоумножителей (см. фиг. 1, б). Чтобы получить спектр осколков деления с хорошим разрешением, диодные импульсы от обоих фотоумножителей складывались и после формирования вводились в амплитудный анализатор. Наблюдался пик α -частиц низкой энергии, а также двугорбый спектр осколков деления. Согласно измерениям времени пролета, проведенным Милтоном и Фрэзером [12], эти пики соответствуют энергиям 104,7, 79,8, 6,11 Мэв. Высота α -пика в нашем эксперименте была существенно уменьшена вследствие ограниченного телесного угла вылета α -частиц, в котором укладывается весь их пробег в ксеноне. Тем не менее наблюдаемый спектр подтвердил линейность нашего детектора в зависимости от потери энергии по всему исследованному диапазону значений ионизации (около 30 : 1).

Монополи после ускорения примерно до 1 Гэв должны создавать приблизительно в 10 раз большую ионизацию в ксеноновом счетчике, чем осколки деления наибольшей энергии. Таким образом, внутренний источник осколков деления обеспечивал удобный способ установки уровня дискриминатора. Ввиду некоторой неопределенности расчетной длины пробега монополя обычно опорный уровень дискриминатора устанавливался в 2,8 раза выше максимальной величины импульса осколков деления. Во время работы для общего контроля всей системы

регистрации опорный уровень часто снижался, и регистрировалась верхняя часть спектра осколков деления. Регулярно измеряемое амплитудное распределение осколков деления позволяло контролировать любой дрейф усиления фотоумножителей.

Существуют два возможных источника случайных помех, которые могут давать импульсы, достаточно большие, чтобы сработала схема совпадений: 1) наложение малых случайных импульсов вследствие бунчеровки пучка и 2) образование звезд с сильно ионизирующими следами. Чтобы избежать помех первого типа, была предусмотрена возможность запираť детектор с помощью импульсного напряжения на фокусирующих электродах фотоумножителей на время сброса пучка. Однако оказалось, что сброс частиц не создавал импульсов, превосходящих импульс осколков деления более чем в 2 раза. Поскольку релятивистская частица при прохождении через ксенон не может потерять на ионизацию более 0,2 Мэв, требовалось наложение более 1000 частиц за время от 20 до 30 нсек для получения импульса, аналогичного импульсу от монополя. Если учесть геометрию детектора, интенсивность пучка ($2 \cdot 10^{10}$ протонов в импульсе), а также наблюдаемую внутреннюю структуру пучка, то такое событие имеет крайне малую вероятность. Не было получено также случаев совпадения, обусловленных образованием звезд. Большие импульсы, которые могли быть обусловлены этим процессом, наблюдались лишь в том случае, когда осциллограф запусклся только одним из двух фотоумножителей. В этом случае на фотоснимке получался большой импульс в одном счетчике и отсутствие импульса в другом. Можно предположить, что данный эффект был следствием рождения звезды в материале покрытия, сдвигающего спектр, или в материале фотокатода.

§ 8 ВТОРАЯ СИСТЕМА РЕГИСТРАЦИИ: ЭМУЛЬСИИ

Во второй серии опытов в качестве детекторов были применены ядерные эмульсии. Была выбрана обладающая низкой чувствительностью эмульсия Илфорд К минус 2, чтобы сделать возможным длительное время

экспозиции. Пластинки имели площадь $2,54 \times 7,62$ см и толщину эмульсии 200 мк. Калибровка чувствительности выполнялась двумя способами. Во-первых, пластинки облучались источником Sr^{252} . При выбранном режиме проявления ¹⁾ осколки деления создавали жирные черные треки и были видны остатки треков α -частиц, состоящих из 3–4 зерен или близко расположенных пар зерен. Кроме того, пластинки облучались ионами кислорода с энергией около 10 Мэв/нуклон. Ионы направлялись под углом 20° к плоскости эмульсии и создавали треки длиной около 130 мк умеренной плотности в основной их части и черные или почти черные в области максимальной ионизации вблизи конца пробега. В этой области ион кислорода теряет около 1,5 Мэв/мк [13], или около $2/3$ потери энергии монополя с зарядом $(137/2)e$. Поскольку создаваемая монополями ионизация очень велика и почти не зависит от длины пробега, можно было быть уверенным, что эти частицы дадут легко видимые треки.

Для регистрации монополей пластинки располагались в коробках под углом 20° к оси солсонида (см. фиг. 1, в); отклонение от центра составляло не более 0,5 мм. Было облучено пятьдесят пластинок, и экспозиция каждой пластинки соответствовала 10^{14} ускоренным протонам. Это облучение создавало фон средней величины из случайных зерен, в котором можно было обнаружить отдельные тонкие треки (возможно, обусловленные легкими ионами), а также короткие (≤ 10 мк) более толстые треки, обусловленные более тяжелыми ионами.

Пластинки проявлялись не позже чем через 12 час после экспозиции, вследствие быстрой регрессии эмульсии К минус 2 (упомянутые выше остатки треков α -частиц исчезают после 24 час хранения при комнатной температуре). Если промежуток времени между экспозицией и проявлением превышал 3 час, то пластинки хранили при температуре около 0°C , чтобы уменьшить скорость регрессии.

¹⁾ Чтобы избежать коррозии, к гипосульфиту было добавлено 10 г/л AgBr.

Площадь с центром на оси соленоида, величина которой соответствовала 1 см^2 пучка, тщательно изучалась, чтобы обнаружить треки монополей, вошедших в эмульсию. Такие треки могли быть длиной около 350 мк для заряда $(137/2) e$ и вдвое меньшей длины для удвоенного заряда. Для подготовки просмотрщика изучали следы ионов кислорода и других ионов, чтобы определить подходящую скорость просмотра. Увеличение составляло $500\times$; след эталона можно было легко увидеть при вдвое меньшем увеличении.

Треков, которые могли бы соответствовать монополям, найдено не было.

§ 9 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА СЕЧЕНИЯ ПО ПОЛУЧЕННЫМ ДАННЫМ

Как упоминалось выше, мы выразим наш отрицательный результат через верхний предел сечения рождения монополей: а) при нуклон-нуклонных взаимодействиях и б) при взаимодействиях ядер с γ -лучами. Далее следует описание анализа, проведенного для получения верхнего предела сечения.

а) Мы предположим, что все пары монополей рождаются в первичной мишени ускоренными протонами и пренебрежем всеми механизмами рождения монополей в масле рассеянными или вторичными частицами (ср. фиг. 1). Предположим далее, что все монополи соответствующей («южной») полярности, которые входят в масло, почти останавливаются в нем, извлекаются из масла, фокусируются и ускоряются так, как описано в § 4—6. Для монополей со свойствами, определенными во введении, это предположение полностью справедливо. Те небольшие сомнения, которые еще остаются, рассматриваются в § 10. Наконец, предположим, что каждый «южный» монополь, вошедший в одну из систем регистрации, будет наблюдаться.

Число N_m входящих монополей связано с сечением рождения в нуклон-нуклонных взаимодействиях σ_n соотношением

$$N_m = [N_P t N \sigma_n, \quad (1),$$

где N_p — число ускоренных протонов, l — толщина мишени в $г/см^2$, умноженная на среднее число прохождений мишени протонами, N — число нуклонов на 1 $г$ мишени ($6,0 \cdot 10^{23}$) и f — геометрический множитель, определяющий долю общего числа созданных монополей, которая входит в масло.

Для вычисления верхнего предела σ предположим, что $N_m = 2$. Тогда для предельного значения σ_n вероятность, что будут наблюдаться один или больше монополей, составляет 86%. Величина N_p определялась по монитору ускорителя с точностью $\pm 10\%$ [14]. Вероятная оценка l составляет $20 г/см^2$ ¹⁾. Геометрический множитель f оценивался путем перехода от лабораторной системы к системе центра масс двух соударяющихся ядер. Было сделано предположение, что в системе центра масс сечение рождения изотропно, и вычислена доля полного телесного угла в этой системе, соответствующего преобразованным телесным углам лабораторной системы, для различных кинетических энергий монополя в системе центра масс. Для монополя массы m в верхней части доступного в нашем эксперименте интервала энергии (для протонно-нуклонных соударений), а именно если $2 Гэв < mc^2 < 2,9 Гэв$, наиболее вероятные значения кинетической энергии находятся в интервале от $0,05 mc^2$ до $0,2 mc^2$, а среднее значение f составляет $0,2$ ²⁾. Сравнительно большая эффективность сбора монополей объясняется тем, что из-за большой скорости системы центра масс частицы концентрируются в малом конусе в лабораторной системе, а масляная ванна задерживает почти четвертую часть всех частиц, испущенных из мишени под углами от $2,5$ до 8° . Если исключить опыты с импульсным магнитным полем (см. § 5), то полное число ускоренных протонов при использовании как нашего детектора, так и эмульсии, было $5,7 \cdot 10^{15}$. Поэтому,

¹⁾ Для легких элементов радиохимический метод обычно дает значения l , близкие к $30-35 г/см^2$, однако для некоторых элементов эта величина снижается до $10 г/см^2$.

²⁾ Требование, чтобы монополи были испущены под углом больше $2,5^\circ$, уменьшает максимальную достижимую массу только на $0,04 Гэв$.

согласно соотношению (1), при $f = 0,2$ получаем

$$\sigma_{n \text{ макс}} = 2(0,2 \cdot 5,7 \cdot 10^{15} \cdot 20 \cdot 6,0 \cdot 10^{23}) = 1,4 \cdot 10^{-40} \text{ см}^2/\text{нуклон}.$$

Для меньших масс монополя $1 \text{ Гэв} < mc^2 < 2 \text{ Гэв}$ обычно кинетическая энергия больше, конус частиц шире и f меньше (приближенно $f = 0,1$). Поэтому для таких масс $\sigma_{n \text{ макс}} \approx 3 \cdot 10^{-40} \text{ см}^2/\text{нуклон}$.

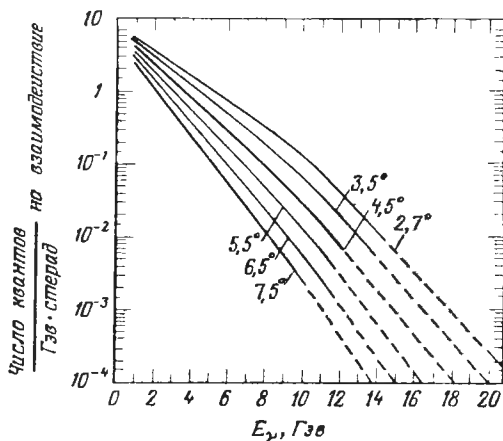
Можно рассмотреть возможность того, что монополи, создаваемые в первичной мишени, тут же поглощаются ядрами мишени в результате вторичных соударений благодаря некоторому неизвестному сильному взаимодействию. Однако, как отмечено выше, в части экспериментов мишень была из полиэтилена. Примерно в 5% соударений первичные протоны должны взаимодействовать с водородом, содержащимся в этом материале. Таким образом, если бы ядра (не протоны) были неэффективны в отношении рождения монополей, то значение $\sigma_{n \text{ макс}}$ следовало бы увеличить в 20 раз¹⁾.

б) Установка была сконструирована так, что она могла регистрировать монополи, рожденные в масле γ -лучами от первичной мишени. При оценке верхнего предела сечения этого процесса также предполагалось, что будут зарегистрированы все «южные» монополи, созданные в масле.

Оценки были основаны на спектрах γ -лучей, измеренных Фидекаро и др. [15, 16] при энергии протонов 23,1 и 24,5 Гэв и углах эмиссии 3, 3,2 и 6°. Поскольку примерно в половине наших экспериментов мишень состояла из Be, C или CH_2 , а в другой половине экспериментов — из Al, были использованы усредненные данные Фидекаро для Be и Al, кривые были экстраполированы «на глаз» к несколько большим энергиям. (Экстраполяция по данным в фазовом пространстве должна быть еще менее надежной, так как вблизи крайних измеренных точек экспериментальные кривые отличаются от кривых в фазовом пространстве как по амплитуде, так и по

¹⁾ Авторы молчаливо предполагают что «неизвестное сильное взаимодействие» не имеет места между монополем и протоном. —
Прим ред

форме.) Спектр при энергии 30 Гэв был получен просто лоренцевым преобразованием в предположении, что спектр в системе центра масс не зависит от первичной энергии. Благодаря этому предположению интенсивности верхней части спектра будут несколько занижены



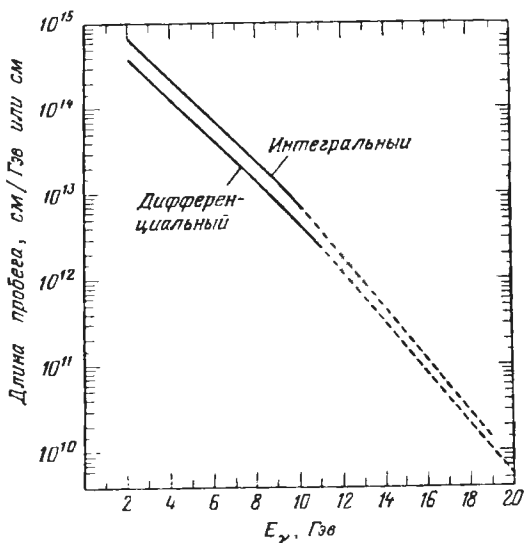
Фиг. 2. Дифференциальный спектр фотонов от протонов с энергией 30 Гэв, падающих на первичную мишень, для различных углов испускания.

Сплошные кривые получены преобразованием Лоренца экспериментальных значений, найденных Фидекаро и др. на протонах с энергией 24 Гэв. Пунктирные части кривых получены экстраполяцией.

Была учтена небольшая поправка на увеличение с энергией протонов множественности π^0 , которая оказалась пренебрежимо малой по сравнению с другими неопределенностями. Спектры для других углов были получены интерполяцией. Результирующий спектр для протонов с энергией 30 Гэв показан на фиг. 2, где пунктирные части кривых соответствуют указанной выше экстраполяции. При наибольших энергиях на фиг. 2 экстраполяция может давать ошибку в 10 раз.

Эти спектры затем были использованы для получения распределения длин пробега фотонов в масле в нашем эксперименте. Для этого масляная ванна была разделена на сегменты лучами, исходящими из мишени, а за-

тем численным интегрированием было найдено произведение числа фотонов, отнесенного к одному взаимодействию в мишени, на длину пробега фотона в масле (в см) для каждого интервала энергии фотона, равного



Фиг. 3. Дифференциальный и интегральный спектры ($h\nu > E_\gamma$) длин пробега фотонов в масляной мишени при $2 \cdot 10^{15}$ взаимодействующих протонов.

Пунктирные части кривых зависят от экстраполяции на фиг. 2, но ниже 13—14 Гэв неопределенность невелика, так как наибольший вклад в длину пробега дают фотоны с такими углами эмиссии, для которых нет необходимости в экстраполяции.

1 Гэв в диапазоне от 2 до 20 Гэв. Эти произведения числа фотонов на длину пробега в масле были исправлены на поглощение γ -лучей в масле в предположении, что радиационная длина равна 50 см, и были умножены на $2 \cdot 10^{15}$ (полное число взаимодействий в мишени, соответствующее эффективной толщине мишени $t = 20 \text{ г/см}^2$). Затем полученный таким образом дифференциальный спектр длин пробега был превращен в интегральный спектр $L(E_\gamma)$ полной длины пробега в масле фотона, имеющего энергию более E_γ .

Интегральный и дифференциальный спектры длин пробега показаны на фиг. 3. Пунктирные части кривых определяются экстраполяциями на фиг. 2. Однако ниже 13—14 Гэв неопределенность экстраполяции влияет на кривые фиг. 3 незначительно, так как большая доля пробега фотона соответствует таким углам эмиссии, при которых экстраполяция не влияет.

В предположении, что все фотоны с энергией больше пороговой энергии имеют одинаковое сечение рождения пар монополей, предел сечения рождения может быть получен из следующего соотношения:

$$N_m = L(E) N \sigma_{\gamma \text{ макс}}, \quad (2)$$

где для некогерентного рождения (в поле протонов) $N = 2,7 \cdot 10^{23}$ есть число протонов (свободных или связанных в 1 см³ масла, а для когерентного рождения (в поле ядра) $N = 3,4 \cdot 10^{22}$ есть число атомов углерода в 1 см³. Энергия E связана с массой монополя m соотношением

$$E = 2mc^2 \left(1 + \frac{m}{m_T}\right), \quad (3)$$

где m_T — масса ядра мишени или нуклона. Например, для $mc^2 = 2,4$ Гэв, $E = 17$ Гэв для некогерентного рождения и $E = 5,8$ Гэв для когерентного рождения. Для этих энергий из данных фиг. 3 получаем $L = 6 \cdot 10^{10}$ см и $L = 8 \cdot 10^{13}$ см соответственно. Полагая снова $N_m = 2$, из соотношения (2) получаем $\sigma_{\gamma \text{ макс}} = 1,3 \cdot 10^{-34}$ см² на нуклон для некогерентного и $\sigma_{\gamma \text{ макс}} = 7 \cdot 10^{-37}$ см² на ядро для когерентного процессов. Сечение $\sigma_{\gamma \text{ макс}}$ быстро уменьшается с уменьшением m , так как L быстро растет с уменьшением E .

§ 10. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К МОНОПОЛЯМ «ЕДИНИЧНОГО» ЗАРЯДА

В предыдущем рассмотрении ожидаемого поведения монополей в данном эксперименте мы приняли заряд монополя равным $g = (137/2)e$. Нет никаких теоретических оснований, чтобы исключить возможность существования заряда, кратного $(137/2)e$. Более того, можно выдвинуть некоторые соображения в пользу заряда $137e$, который мы назовем «единичным». При исследовании

экспериментальных условий с учетом данной возможности возникают сомнения: смогут ли монополи, как предполагается, созданные в первичной мишени, пройти сквозь стенку масляной ванны. Вследствие увеличенных потерь на соударения для верхней области значений масс только те монополи, которые рождаются с почти максимальной доступной энергией, будут способны проникнуть сквозь алюминиевую стенку. Монополи, остановленные в этой стенке, подвергаются влиянию поля рассеяния соленоида, которое составляет от 30 до 50 гс для рассматриваемой области. Из нашего предыдущего анализа (§ 2) перемещений монополей в кристаллах под влиянием магнитного поля следует, что монополи могут в конце концов проникнуть в жидкость, а затем обычным способом выйти на поверхность, вырваться, ускориться и быть зарегистрированы детектором. Однако нет никакой уверенности, что это будет происходить в действительности. Именно вследствие неопределенности этих соображений о перемещении и захвате монополей мы применили жидкий «поглотитель». Таким образом, чтобы распространить анализ на случай «единичных монополей», которые могут рождаться в первичной мишени, потребовались дополнительные исследования.

Если предположить, что монополи, остановленные в алюминиевой стенке, не могут быть вырваны в течение эксперимента полем около 30 гс, то, несомненно, они останутся на месте в остаточном поле 1—2 гс, которое преобладает, когда соленоид выключен. Такие монополи просто накапливались бы в приборе, и затем их можно было бы вырвать очень сильным импульсным полем. Заключительная проверка этого типа была проведена способом, совершенно аналогичным тому, который использовался, чтобы вырвать монополи, случайно захваченные на поверхности масла (см. § 5). Снова малая катушка была вставлена в большой соленоид, дно которого на этот раз закрывала пластинка. Часть стенки масляной ванны, обращенная к первичной мишени, предварительно облученная вторичными частицами, возникавшими от примерно $4 \cdot 10^{16}$ ускоренных протонов, была разрезана на диски, затем эти диски помещались последовательно один за другим в систему соленоидов на высоте,

необходимой для фокусировки. В большом соленоиде создавалось поле 500 гс, а в малом — импульсное поле около 10 кгс. При этом монополи с «единичным» зарядом, связанные с энергией менее 10 эв, должны быть вырваны из дисков.

Регистрация монополей «единичного» заряда эмульсией не представляет трудностей. Такой монополь получает от соленоида удвоенную энергию по сравнению с энергией монополя «половинного» заряда, тогда как его длина пробега вдвое меньше, поскольку потери энергии на соударения в 4 раза больше. Принимая в расчет потери энергии в окошке и при коротком пробеге в воздухе, тем не менее получаем, что трек такого монополя в эмульсии должен быть хорошо виден. Только если монополи с «единичным» зарядом были связаны в алюминии с энергией в пределах от 0,02 до 0,2 эв и поэтому были бы вырваны из дисков полем от 30 до 300 гс (во время роста поля), треки могли бы быть такими короткими (меньше 50 мк), что их не удалось зарегистрировать. Эффективность обнаружения коротких треков могла быть малой, несмотря на то, что просмотрщики получили указание исследовать даже короткие треки. Наши предыдущие заключения относительно отрыва монополей с поверхности масла существенно не изменяются для монополей «единичного» заряда.

Две эмульсии K0 были экспонированы потоком с 18 дисков и исследованы. Не было найдено ни одного трека, который мог бы принадлежать монополю.

§ 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Наша неудачная попытка обнаружить монополи позволяет сделать вывод, что при взаимодействии протонов с энергией 30 Гэв с нуклонами, когда наибольшая допустимая кинематикой масса монополя равна 2,9 Гэв, верхний предел сечения рождения пар монополей составляет примерно $2 \cdot 10^{-40}$ см². Браннер и Избелл [3] получили близкое значение предела $2 \cdot 10^{-40}$ см²¹⁾ из отри-

¹⁾ Здесь и ниже приводятся значения, пересчитанные с учетом разных уровней доверия, использованных в различных работах. Для этого данные Браннера и Избелла [3], а также Фидекаро и др. [4] умножены на 2, а данные Амальди и др. [5] — на 0,7.

цательного результата эксперимента, в котором полиэтиленовая мишень облучалась протонами с энергией 6 Гэв. При этой энергии могли рождаться только монополи с массой, меньшей чем масса протона. В этом эксперименте монополи были бы найдены, если бы их энергия связи в веществе мишени составляла 3—20 эв. Было выполнено два эксперимента с энергией протонов, близкой к нашей. Фидекаро и др. [4], используя счетчики, нашли $\sigma_n \leq 2 \cdot 10^{-39} \text{ см}^2$ для монополей, рожденных и связанных в алюминиевых или полиэтиленовых мишенях. Амальди и др. [5], используя эмульсии, получили предел, близкий к нашему или несколько больший, чем наш, в экспериментах, где мишени из алюминия, полиэтилена и алюминия или сплава Cu—Cr облучались, а затем подвергались действию сильного магнитного поля для извлечения монополей с энергией связи от 0,6 до 60 эв. В двух других экспериментах с графитовой мишенью, где не было ограничений на допустимую энергию связи, предел сечения был равен 10^{-39} см^2 .

Поскольку возникающие в первичной мишени γ -лучи имеют непрерывный спектр, нельзя получить определенный предел для сечения фоторождения σ_γ . Этот предел зависел бы как от массы монополя, так и от неизвестной зависимости σ_γ от энергии γ -лучей. Как пример для монополя с массой 2,4 Гэв в маловероятном случае, когда начиная с порога рождения σ_γ не зависит от энергии γ -лучей, можно получить предел $1,3 \cdot 10^{-34} \text{ см}^2$ для рождения в поле протонов и $7 \cdot 10^{-37} \text{ см}^2$ для рождения в поле ядер углерода.

В работах [3—5] не дано пределов для σ_γ . Однако в работе Амальди и др. [5], где γ -лучи могли взаимодействовать с веществом мишени, в которой они возникали, эти пределы могли быть такими же, как наши, так как угол захвата в их опыте больше, чем в нашем, и компенсирует меньшее количество вещества, облученного γ -лучами.

В нашем основном эксперименте около 10% ускоренных протонов использовались в опыте со счетчиками. Поэтому, хотя предел сечения, полученный в опыте со счетчиками, на порядок величины больше предела, полученного в опыте с эмульсией, этот метод регистрации

гарантирует, что монополи не были пропущены по какой-либо неизвестной причине, обуславливающей невозможность обнаружить их треки в малочувствительной эмульсии. Только при наличии двух маловероятных условий монополи, возникшие в нашем эксперименте, могли систематически не регистрироваться. Это могло бы быть, если бы монополи были связаны с ядром на расстоянии, промежуточном между размерами ядра и атома, или если бы монополи, рожденные при взаимодействии протонов с ядрами в первичной мишени, имели заряд $137 e$, массу, близкую к кинематическому пределу, и были бы связаны в алюминии с энергией от 0,02 до 0,2 эв.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Phys. Rev., 74, 817 (1948) (статья 2 данного сборника).
2. Malkus W. V. R., Phys. Rev., 83, 899 (1951) (статья 3 данного сборника).
3. Bradner H., Isbell W. M., Phys. Rev., 114, 603 (1959).
4. Fidecaro M., Finocchiaro G., Giacomelli G., Nuovo cimento, 22, 657 (1961).
5. Amaldi E., Baroni G., Bradner H., de Carvalho J., Hoffman L., Manfredini A., Vanderhaeghe G., Proceedings of the Aix-en-Provence International Conference on Elementary Particles (Centre d'Etudes Nucleaires de Saclay Seine et Oise 1961), vol. I, p. 155 (статья 4 данного сборника).
6. Cole H. J. D., Proc. Cambr. Phil. Soc., 47, 196 (1961).
7. Bauer E., Proc. Cambr. Phil. Soc., 47, 777 (1951).
8. Harish-Chandra, Phys. Rev., 74, 883 (1948).
9. Eliezer C. J., Roy S. K., Proc. Cambr. Phil. Soc., 68II, 401 (1962).
10. Sayres A., Wu C. S., Rev. Sci. Instr., 28, 758 (1957).
11. Northrop J. A., Gursky J. M., Johnsrud A. E., Proceedings of Sixth Scintillation Symposium (IRE Trans. Nucl. Sci NS-5, 81, 1958).
12. Milton J. C. D., Fraser J. S., Phys. Rev., 111, 877 (1958).
13. Heckman H. H., Perkins B. L., Simon W. G., Smith F. M., Barkas W. H., Phys. Rev., 117, 544 (1960).
14. Halama H. J., Brookhaven National Laboratory Accelerator Development Report HJH-1.
15. Fidecaro M., Gatti G., Giacomelli G., Love W. A., Middelkoop W. C., Yamagata T., Nuovo cimento, 19, 382 (1961).
16. Fidecaro M., Finocchiaro G., Gatti G., Giacomelli G., Middelkoop W. C., Yamagata T., Nuovo cimento, 24, 73 (1962).

6. ЗНАЧЕНИЕ СПИНА В ПРОБЛЕМЕ МОНОПОЛЯ

А. Голдхабер

A. Goldhaber, Phys. Rev., 140, B1407 (1965)

Рассеяние электрического заряда на монополе рассмотрено методом, который точно учитывает сохранение момента количества движения. Квантовое условие Дирака для зарядов получено из принципа соответствия и требования инвариантности по отношению к трехмерным вращениям. Показано также, что начальное и конечное состояния в реакциях рассеяния содержат дополнительный момент количества движения, который нельзя приписать каждой частице в отдельности. Известно, что такой момент существует в классической релятивистской теории и что его можно отождествить с моментом количества движения электромагнитного поля. Получен квантовый вариант нерелятивистской теории этого момента и показано, что она эквивалентна теории Дирака для монополя, в которой сингулярен вектор-потенциал. Используемый подход открывает интересные перспективы в развитии релятивистской электродинамики монополя. Чтобы релятивистская теория могла достичь успеха, в методе S-матрицы необходимо отказаться от постулата о кросс-симметрии или изменить его.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В 1931 г. Дирак [1] выдвинул гипотезу о существовании новой частицы — магнитного монополя. Эта частица, существование которой экспериментально не доказано [2—7], должна быть источником магнитного поля по аналогии с точечным источником электрического поля. Дирак показал, что если монополь ввести в обычную квантовую механику, то должно быть выполнено следующее квантовое условие:

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{n}{2}, \quad (1.1)$$

где g — заряд монополя, e — электрический заряд любой другой частицы, а n — целое число. Из данного условия непосредственно следует вывод, что если

существует хотя бы один монополь, то все электрические заряды кратны некоторому наименьшему заряду. Таким образом, существование монополя могло бы «объяснить» квантование электрического заряда.

Полуклассический вывод соотношения (1.1) был дан Вильсоном [8, 9], который показал, что для момента количества движения электромагнитного поля статической системы, состоящей из электрического заряда и монополя, справедливо соотношение

$$\mathbf{s} = \frac{1}{8\pi c} \int d^3r [\mathbf{r} [\mathbf{E} \mathbf{H}]] = \frac{eg}{c} \tilde{\mathbf{n}}, \quad (1.2)$$

где $\tilde{\mathbf{n}}$ — единичный вектор, направленный от e к g . Квантование $\mathbf{s}$ в единицах $1/2\hbar$ позволяет снова получить соотношение (1.1).

Оставалось неясным, существует ли связь между методами Дирака и Вильсона. В данной работе мы показываем, что подход, основанный на выражении (1.2) для дополнительного момента количества движения, действительно корректен и позволяет гораздо глубже вникнуть в квантовую теорию монополя. В § 2 показано, что существование дополнительного момента количества движения в начальном и конечном состояниях при рассеянии бесспинового монополя на заряде со спином нуль является следствием общих принципов квантовой механики. Этот метод позволяет снова получить квантовое условие Дирака. Нерелятивистская теория построена в § 3, где показано, что дополнительный момент количества движения может быть отождествлен с классическим моментом количества движения Вильсона. Таким образом, становится яснее связь с теорией Дирака. Наконец, в § 4 найдены определенные ограничения, накладываемые на пока еще не построенную релятивистскую теорию рассеяния монополя на заряде.

§ 2. ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ И S-МАТРИЦА

Рассмотрим последствия некоторых минимальных требований, которые должны выполняться в квантовой теории монополей. Вычислим угол рассеяния в импульсном приближении в случае большого параметра соуда-

рения **b**. Выражение для силы имеет вид ¹⁾

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{eg}{c} \left[\mathbf{v} \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{r^2} \right];$$

отсюда находим

$$\Delta p \approx \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(\mathbf{v}_0 t + \mathbf{b}, \mathbf{v}_0) = \frac{2eg}{bc} [\tilde{\mathbf{v}}_0 \tilde{\mathbf{b}}]. \quad (2.1)$$

Если направление конечного импульса $\mathbf{p}'$ в сферической системе координат определяется углами θ , φ и если начальный импульс $\mathbf{p} = \mu \mathbf{v}_0$ направлен по полярной оси, то из (2.1) получаем

$$\mathbf{b} \approx -\frac{2eg}{c\rho\theta} \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \quad (\theta \ll 1), \quad (2.2)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ — единичный вектор в направлении увеличения азимутального угла φ в правой системе координат.

Квантовомеханическое рассмотрение рассеяния бесспинового заряда, описываемого падающей плоской волной, на монополе со спином нуль приводит обычным образом к следующему асимптотическому выражению для рассеянной волны:

$$\begin{aligned} \psi_i &= e^{ikz}, \\ \psi_s &\sim \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi), \\ p &= \hbar k. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Логарифмический множитель, возникающий в случае кулоновского рассеяния, здесь отсутствует, так как сила взаимодействия изменяется как $1/r^3$, если расстояние до частицы при рассеянии гораздо больше, чем параметр соударения.

Если построен падающий волновой пакет, то метод перевала приводит к следующему соотношению [10] между параметром соударения волнового пакета и углом рассеяния:

$$\mathbf{b} = (\nabla_k \alpha)_{\perp}. \quad (2.4)$$

где $f = \int e^{i\alpha}$, ∇_k — градиент по начальному импульсу, а индекс $\perp$ показывает, что эта составляющая полного

¹⁾ Автор использует обозначение $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a$. Прим. ред.

вектора перпендикулярна $\mathbf{k}$. Составляющая, параллельная $\mathbf{k}$, определяет «время запаздывания» [11, 12], которое здесь не рассматривается. Соотношение (2.4) можно переписать с помощью углов θ и φ ; тогда получим

$$\mathbf{b} = (\tilde{\mathbf{k}}' - \tilde{\mathbf{k}}' \cdot \tilde{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{k}}) \frac{1}{k} \frac{\partial \alpha}{\partial \cos \theta} - \tilde{\varphi} \frac{1}{k \sin \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}. \quad (2.5)$$

Отсюда, сопоставляя с (2.2), для $\theta \ll 1$ получаем

$$\alpha \approx \frac{2eg}{\hbar c} \varphi. \quad (2.6)$$

Чтобы понять смысл такой странной зависимости амплитуды рассеяния от азимутального угла, необходимо обратиться к хорошо известной инвариантности по отношению к трехмерным вращениям в квантовой механике. Рассмотрим переход от начального к конечному состоянию, определяемый амплитудой $\langle o | \mathbf{T} | i \rangle$. Поскольку вероятность перехода должна быть инвариантна по отношению к вращениям, должно выполняться следующее условие:

$$|\langle o | \mathbf{T} | i \rangle| = |\langle Ro | \mathbf{T} | Ri \rangle| = |\langle o | R^{-1} \mathbf{T} R | i \rangle|; \quad (2.7)$$

отсюда следует

$$\langle o | R^{-1} \mathbf{T} R | i \rangle = e^{i\Phi(R)} \langle o | \mathbf{T} | i \rangle. \quad (2.8)$$

Фаза $\Phi(R)$ не может зависеть от $|o\rangle$ или $|i\rangle$, если (2.7) справедливо для произвольных волновых пакетов. Пусть $R = R_2 R_1$; тогда последовательным применением (2.8) получаем

$$\Phi(R_2 R_1) = \Phi(R_1) + \Phi(R_2). \quad (2.9)$$

Произвольный поворот можно записать в виде

$$R_1 = R_2 R_1^{-1} R_2^{-1},$$

и, таким образом, Φ тождественно равно нулю, или

$$\langle o | R^{-1} \mathbf{T} R | i \rangle = \langle o | \mathbf{T} | i \rangle, \quad R^{-1} \mathbf{T} R = \mathbf{T}. \quad (2.10)$$

Пусть $\mathbf{J}$ — генератор вращений для $|i\rangle$ или $|o\rangle$ (он предполагается одинаковым для обоих состояний); тогда $\mathbf{J}$

сохраняется:

$$[\mathbf{J}\mathbf{T}] = 0, \quad (2.11)$$

и можно считать $\mathbf{J}$ сохраняющимся полным моментом.

Данный подход выявляет существенное различие между классической и квантовой теориями. В классической механике при произвольном законе взаимодействия нет оснований ожидать сохранения момента количества движения, даже если энергия и импульс сохраняются. В квантовой механике существование момента количества движения $\mathbf{J}$, коммутирующего с S -матрицей, гарантируется общими принципами инвариантности совместно с линейностью теории. В результате некоторые классические теории могут не иметь квантовых аналогов, а другие могут иметь их только для определенного ограниченного класса параметров так, чтобы полный квантованный момент количества движения сохранялся. Последний вариант реализуется в рассматриваемой проблеме. Обычно в классической теории существование гамильтониана, инвариантного по отношению к вращениям, является основанием для того, чтобы момент количества движения сохранялся. Мы увидим, что в данной задаче такой гамильтониан есть, однако его структура весьма своеобразна. Условие Дирака получается квантованием момента количества движения, который входит в гамильтониан.

Вернемся к соотношению (2.6) и вначале, как обычно, предположим, что начальное и конечное состояния описываются только импульсами взаимодействующих частиц. Тогда из (2.10) следует, что $\langle o|\mathbf{T}|i\rangle$ зависит только от $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'$ и k^2 , или, что то же самое, от E и θ , где E — энергия. Данный результат противоречит (2.6), так как отсюда следует, что $\hat{f} = \langle o|\mathbf{T}|i\rangle$ зависит от φ . Следовательно, необходимо ввести дополнительный множитель χ , зависящий от некоторого параметра, не связанного с импульсами. В (2.11) $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$ может быть сохраняющимся моментом количества движения, если $\mathbf{L}$ определить как генератор вращений импульсов, т. е. как орбитальный момент количества движения, а $\mathbf{s}$ — как генератор вращений по новому параметру в χ . Матричные элементы от $\mathbf{T}$ между состояниями с разными

проекциями s на ось z , m и m' будут зависеть от φ следующим образом: $\alpha = (m - m')\varphi$. Поскольку $(m - m')$ является целым числом, отсюда получаем квантовое условие Дирака, что $2eg/\hbar c$ есть целое число. Таким образом, данное рассмотрение дает необходимое условие существования монополя, но не доказывает, что это условие может быть удовлетворено.

Можно было бы думать, что приведенный выше анализ не является необходимым и что из непрерывности волновой функции следует квантовое условие Дирака в (2.6). Как будет показано в § 3, п. 3, это не так.

Отметим, что момент количества движения s не может являться спином новой частицы (монополя). Если бы монополь имел спин S , то максимальное значение $|m - m'|$ было бы равно $2S$ и тогда из (2.6) получалось бы $eg/\hbar c \leq S$. Можно было бы всегда нарушить это условие, рассеивая частицы с произвольно большим зарядом e . Поэтому величина s связана с обеими частицами и не может быть приписана отдельно каждой частице¹⁾.

Предположения и следствия, рассмотренные в данном параграфе, мы можем резюмировать следующим образом.

Пусть: 1) в квантовомеханической теории взаимодействия заряд — монополь рассматриваются большие параметры соударений или рассеяние на малые углы, обусловленное действием классической силы Лоренца и 2) дифференциальное сечение инвариантно относительно вращений начального и конечного импульсов на один и тот же угол. Тогда: 1) начальное и конечное состояния не могут быть представлены просто произведением волновых функций свободно движущегося заряда и монополя — необходим еще множитель, соответствующий дополнительному моменту количества движения s , и 2) про-

¹⁾ Несмотря на то, что сам автор весьма убедительно показал ошибочность попытки отождествить s с собственным спином монополя, тем не менее в статье повсюду употребляется термин «spin» в применении к s . Подобная терминология не представляется нам удачной, и во избежание недоразумений термины «spin» и «extra spin» мы переводим словами «дополнительный момент количества движения». — *Прим. ред.*

наведение зарядов должно удовлетворять условию Дирака.

В следующем параграфе мы покажем, что дополнительный момент количества движения s можно отождествить в нерелятивистской теории с классическим моментом количества движения Вильсона. Рассматривая s как независимую переменную, мы получим гамильтониан, инвариантный относительно вращений, и удостоверимся в том, что существует сохраняющийся полный момент количества движения.

§ 3. ПЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ

1. Классический вариант

Уравнение движения ¹⁾ заряда e с массой μ в поле неподвижного монополя с зарядом g имеет вид

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \frac{eg}{c} \left[\mathbf{r} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r^3} \right]. \quad (3.1)$$

Из этого уравнения непосредственно следует, что $v = |\dot{\mathbf{r}}|$ и $|\mathbf{L}| = |[\mathbf{r} \mu \dot{\mathbf{r}}]|$ являются интегралами уравнений движения. Поэтому в проходящей через оба заряда вращающейся плоскости, по отношению к которой $\mathbf{L}$ всегда нормален, заряд движется по прямой с постоянной скоростью, величина которой равна v . Расстояние этой прямой от начала координат является параметром соударения b . Получаем соотношение

$$r = [(vt)^2 + b^2]^{1/2}. \quad (3.2)$$

Задача сводится к определению движения вращающейся плоскости. Чтобы это сделать, введем дополнительный момент количества движения s , рассмотренный в § 1, $s = (-eg/c)\dot{\mathbf{r}}$. Если $\mathbf{J} = \mathbf{L} + s$, то из (3.1) и данного определения можно получить

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0, \quad \frac{d(\mathbf{J} \cdot \mathbf{s})}{dt} = 0, \quad \frac{d(\mathbf{J} \cdot \mathbf{L})}{dt} = 0. \quad (3.3)$$

¹⁾ Классические траектории рассмотрены, например, в работах [13—16]. Отметим, что данные вычисления применимы также к движению заряда и монополя конечных масс, если $\mathbf{r}$ является относительной координатой, а μ — приведенной массой.

Остается вычислить, как меняется со временем азимутальный угол ω между $\mathbf{s}$ и $\mathbf{J}$. Используя (3.1) — (3.3), получаем

$$\dot{\omega} = \frac{(L^2 + s^2)^{1/2}}{\mu r^2} = \frac{eg}{\mu c \cos \psi} \frac{1}{(vt)^2 + b^2}, \quad (3.4)$$

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{s}{L} = \frac{eg}{\mu v b c},$$

что приводит к соотношению

$$\omega(\infty) = \frac{eg\pi}{vb\mu c \cos \psi} = \frac{\pi}{\sin \psi}, \quad (3.5)$$

В итоге угол рассеяния θ и дифференциальное сечение рассеяния определяются выражениями

$$\cos \theta = -\cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos \left(\frac{\pi}{\sin \psi} \right), \quad (3.6)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(eg/\mu v c)^2 \sin \psi / \cos^4 \psi}{|2 \sin \psi [1 - \cos(\pi/\sin \psi) - \pi \sin(\pi/\sin \psi)]|}.$$

Траектория располагается на поверхности конуса с осью, направленной по $\mathbf{J}$, и половинным углом при вершине ψ . Для малых θ сечение аналогично сечению кулоновского рассеяния на неподвижном заряде $e' = gv/c$. Для больших углов $d\sigma/d\Omega$ имеет интегрируемые особенности с точкой сгущения при $\theta = \pi$, которые образуются вследствие того, что θ является осциллирующей функцией $1/b$. Заряд нависает на поверхность конуса тем чаще, чем меньше b , и может рассеиваться на один и тот же полярный угол для нескольких разных траекторий.

Поскольку полный момент количества движения сохраняется, не удивительно, что задача допускает гамильтоновскую формулировку. Рассмотрим

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{J^2}{2\mu r^2} + \frac{s^2}{2\mu r^2}. \quad (3.7)$$

Это выражение точно определяет кинетическую энергию заряда, так как $\mathbf{L}$ и $\mathbf{s}$ перпендикулярны. Однако H можно считать гамильтонианом системы, если $\mathbf{s}$ рассматривать как момент количества движения с независимыми

степенями свободы, для которого скобки Пуассона удовлетворяют соотношению

$$\{s_i, s_j\} = -\epsilon_{ijk}s_k. \quad (3.8)$$

Уравнения движения принимают вид ¹⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \{H, \mathbf{r}\} = \frac{1}{\mu} \frac{\mathbf{p} - [\mathbf{r}\mathbf{s}]}{r^2}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \{H, \mathbf{p}\} = -\frac{1}{\mu r^2} [[\mathbf{p}\mathbf{s}] - 2([\mathbf{p}\mathbf{s}] \cdot \tilde{\mathbf{r}}) \tilde{\mathbf{r}}], \\ \dot{\mathbf{s}} &= -\frac{dL}{dt} = \frac{[\mathbf{L}\mathbf{s}]}{\mu r^2} = \frac{[\mathbf{J}\mathbf{s}]}{\mu r^2}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{[\mathbf{L}\tilde{\mathbf{r}}]}{\mu r^2} + \frac{[\mathbf{s}\tilde{\mathbf{r}}]}{\mu r^2} = \frac{[\mathbf{J}\tilde{\mathbf{r}}]}{\mu r^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отсюда непосредственно следует, что если условие $\mathbf{s} = (-eg/c)\tilde{\mathbf{r}}$ выполняется для одного момента времени, то оно остается справедливым всегда, а все нежелательные члены в (3.9) исчезают.

В следующем разделе гамильтониан (3.7) применяется в задаче квантовой теории, причем решение полностью соответствует требованиям, сформулированным в § 2.

2. Квантовая теория для гамильтониана с дополнительным моментом количества движения

Определим в квантовой теории оператор импульса в (3.7) как $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, а $\mathbf{s}$ как квантовомеханический оператор момента количества движения $\hbar\mathbf{s}$ с коммутационными соотношениями $[\mathbf{s}\mathbf{s}] = i\mathbf{s}$. Поскольку H является положительно определенным, связанные состояния отсутствуют²⁾, и нам необходимо найти решение уравнения $H\Psi = E\Psi$ только для рассеяния. Отметим вначале, что

$$[\mathbf{s} \cdot \tilde{\mathbf{r}}, H] = 0. \quad (3.10)$$

¹⁾ При выводе (3.9) предполагается, что $\mathbf{L}$ и $\mathbf{s}$ не перпендикулярны друг другу, а $\mathbf{J} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ — *Прим ред.*

²⁾ См., однако, примечание на стр. 292. Отсутствие связанных состояний отмечено Дираком [1].

Это можно получить из того факта, что $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$, а оператор $\mathbf{L}$ осуществляет повороты $\hat{\mathbf{r}}$, тогда как оператор $\mathbf{s}$ осуществляет повороты $\mathbf{s}$. Поэтому $\mathbf{J}$ оставляет $\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ инвариантным; поскольку H содержит только $\mathbf{J}^2$ и операторы от r , отсюда следует (3.10). Однако если изменить отношение $\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}$ к L^2 в H , то (3.10) будет неверно.

Используя (3.10), можно искать решение по аналогии с классической теорией, удовлетворяющее условию

$$\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{r}} \Psi = -\frac{e\hbar}{\hbar c} \Psi, \quad (3.11)$$

которое определяет квантовое условие Дирака. Общий случай рассмотрен в приложении, а здесь мы ограничимся случаем $\mathbf{s} = \hbar/2\sigma$, т. е. спином $1/2^1$). Возьмем падающую волну в виде

$$\Psi_i = e^{ikz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Это выражение для падающей волны требует пояснения, так как гамильтониан (3.7) по существу приводит к постоянным сдвигам фазы для произвольно больших l . Смысл состоит в том, что волновой пакет, построенный из «плоских волн», будет представляться в форме

$$\Psi(t) = e^{-iHt} \lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{iH\tau} e^{-iH_0\tau} \Psi_i, \quad (3.13)$$

где H_0 — только кинетическая энергия. Практически это означает, что сопоставление Ψ и Ψ_i совершается представлением функций Бесселя в их асимптотической форме ($kr \gg l$) для произвольно больших l и сравнением с коэффициентами в разложении $e^{-ik \cdot \mathbf{r}}$.

Разложение плоской волны имеет вид

$$\Psi_i = \sum_{l=0}^{\infty} (2^l + 1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \chi_{\alpha} \quad (3.14)$$

¹⁾ Представление дополнительного момента количества движения $\mathbf{s}$ с помощью спинных матриц σ продиктовано удобствами математического аппарата и не должно привести к недоразумению (см. примечание на стр. 274). — *Прим. ред.*

с обычными обозначениями, а

$$\chi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Переходя к разложению по состояниям с определенным J , получаем

$$\begin{aligned} \Psi_i = \sum_{J=1/2}^{\infty} \{ (\lambda + 1) i^{\lambda} [P_{\lambda} j_{\lambda} + i P_{\lambda+1} j_{\lambda+1}] \chi_u + \\ + i^{\lambda+1} \sin \theta \sigma \cdot \tilde{\varphi} [P'_{\lambda} j_{\lambda} - i P'_{\lambda+1} j_{\lambda+1}] \chi_u \}, \quad (3.15) \\ \lambda = J - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Анализ (3.7) показывает, что для данного J точной радиальной волновой функцией является $j_q(kr)$, где q определяется соотношением

$$q + \frac{1}{2} = \left[\left(J + \frac{1}{2} \right)^2 - s^2 \right]^{1/2} = \left[\left(J + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]^{1/2}. \quad (3.16)$$

Используя асимптотическую форму

$$j_{\xi}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} z^{-1} \sin \left(z - \frac{\xi \pi}{2} \right), \quad (3.17)$$

можно провести соответствие с падающей волной, чтобы, исходя из Ψ_i , получить Ψ :

$$\begin{aligned} \Psi = \sum_{J=1/2}^{\infty} (-1)^{\lambda} i^{-q} j_q [(\lambda + 1)(P_{\lambda} - P_{\lambda+1}) + \\ + i \sin \theta \sigma \cdot \tilde{\varphi} (P'_{\lambda} + P'_{\lambda+1})] \chi_u = \\ = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sum_{J=1/2}^{\infty} (-1)^{\lambda} i^{-q} j_q (P'_{\lambda} + P'_{\lambda+1}) \times \\ \times \exp \left[i \left(\frac{\sigma}{2} \right) \cdot \tilde{\varphi} \tilde{\theta} \right] \chi_u, \quad (3.18) \\ \tilde{\theta} = \pi - \theta. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из тождества

$$(\lambda + 1)(P_{\lambda} - P_{\lambda+1}) = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (P'_{\lambda} + P'_{\lambda+1}). \quad (3.19)$$

Таким образом, точное решение является спинором, описывающим состояние со спином, направленным по радиусу-вектору к началу координат. Действительно, можно непосредственно проверить, что (3.7) диагонализуются в сферической системе координат с помощью преобразования

$$\begin{aligned} H' &= \exp \left[i \left(\frac{\sigma}{2} \right) \cdot \tilde{\varphi} \theta \right] H \exp \left[- i \left(\frac{\sigma}{2} \right) \cdot \tilde{\varphi} \theta \right] = \\ &= \frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[-i \partial_\varphi + \frac{1}{2} \sigma_z (1 - \cos \theta) \right]^2 \right] \right\}. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Этот гамильтониан тождествен гамильтониану Дирака (3.26) для случая $eg/\hbar c = +1/2$ при условии, что σ_z имеет значения $\sigma_z = \mp 1$. В нашем представлении момента количества движения этого следовало ожидать, так как положительному произведению зарядов соответствует направление s , обратное радиусу.

Чтобы получить амплитуду рассеяния, рассмотрим расходящуюся волну

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(\frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \right) F = \left(\frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{i\mathbf{k}r} \right) \sin \frac{\theta}{2} \times \\ &\times \exp \left[i \left(\frac{\sigma}{2} \right) \cdot \tilde{\varphi} \theta \right] \chi_u \sum_{l=1/2}^{\infty} (-1)^{l-q} (P'_l + P'_{l+1}). \quad (3.21) \end{aligned}$$

Для малых θ существенным является только асимптотическое поведение, для которого

$$\begin{aligned} F(\theta \ll 1) &\approx -i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \exp \left[i \left(\frac{\sigma}{2} \right) \cdot \tilde{\varphi} \theta \right] \chi_u \times \\ &\times \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-i) \frac{d}{d \cos \theta} (P_\lambda + P_{\lambda+1}) = \\ &= -\exp \left[i \left(\frac{\sigma}{2} \right) \cdot \tilde{\varphi} \theta \right] \chi_u \left[\frac{eg(v/c)}{2\mu v^2 \sin^2(\theta/2)} \right], \\ f(\theta \ll 1, \varphi) &= \chi_u^\dagger F \chi_u = -e^{i\varphi} |f| = -e^{2i(eg/\hbar c)\varphi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{1/2}. \quad (3.22) \end{aligned}$$

При анализе этого решения полезно рассмотреть асимптотическое поведение волновой функции. На первый взгляд кажется, что описывающий взаимодействие член $(2\mu r^2)^{-1}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + 1/2)$ изменяется обратно пропорционально r^2 . Однако для плоской волны e^{ikz} орбитальный момент количества движения равен $k[rz]$, и взаимодействие изменяется только как r^{-1} в направлениях, перпендикулярных к $\hat{z}$. Это согласуется с качественным классическим рассмотрением: сила Лоренца уменьшается как r^{-3} вдоль траектории частицы и только как r^{-2} в направлении, перпендикулярном к ней. Если мы ищем «асимптотическую» ψ_0 , удовлетворяющую уравнению Шредингера, в котором оставлены члены порядка $r^{-1}E\psi_0$, то e^{ikh} необходимо умножить на некоторый дополнительный множитель. В аналогичном случае рассеяния в кулоновском поле данный множитель представляет собой $(r - z)$ с мнимым показателем степени [17]. Оказывается, что здесь этот множитель равен

$$\exp\left[-i\left(\frac{\sigma}{2}\right) \cdot \tilde{\varphi}0\right],$$

т. е. совпадает с тем, который необходим для преобразования гамильтониана H в гамильтониан Дирака H' (3.20). Для подтверждения укажем, что когда этот новый гамильтониан действует на e^{ikh} , то члены порядка r^{-1} не возникают. Начальное условие, согласно которому плоская волна распространяется в направлении $-z$, требует дополнительного множителя, поэтому ψ_0 принимает вид $e^{i\varphi}e^{ikh}$. Такая зависимость от азимутального угла проверяется с помощью точного выражения (3.18), где она следует из множителя вида

$$\exp\left[i\pi\left(\frac{\sigma}{2}\right) \cdot \tilde{\varphi}\right].$$

Результат действия H на функцию $e^{i\varphi}g(r, \theta)$ дает расходимость при $\theta = 0$. Поэтому ψ_0 должна быть равна нулю вдоль положительной полуоси z . Действительно, данная функция должна стремиться к нулю так быстро, как θ . В результате ψ_0 имеет разумный асимптотический вид только тогда, когда она оценена вне конуса $\theta < \theta_0$, а поправочный множитель становится малым для

$kr\theta_0 \gg 1$. Проще можно сказать, что исключенная область образует цилиндр радиусом ρ вокруг положительной полуоси z при $kr \gg 1$. Это разумно, так как частицы сильно рассеиваются, если параметр соударения $b \ll \rho$. Из (3.18) можно непосредственно убедиться, что Ψ равно нулю при $\theta = 0$. При фиксированном r и для больших $q \approx J$ сферическая функция Бесселя $j_q(kr)$ принимает вид¹⁾

$$J \sim \frac{e}{V^2} (2J+1)^{-1} \left(\frac{ekr}{2J+1} \right)^J.$$

Приблизительное ограничение, накладываемое на $\sin(\theta/2)(P'_\lambda + P'_{\lambda+1}) = (2J+1) d_{-1/2, 1/2}$ [19], определяется из условия $|d^J| < C J \theta^{2J}$ [20], где C — постоянная. Подстановка этих выражений в (3.18) для заданного r определяет поведение вблизи $\theta = 0$, $|\Psi| < C'\theta$.

Может показаться, что данное утверждение не согласуется с расходящимся выражением для f (3.22). Однако это выражение было получено в предположении, что все функции Бесселя оценены в асимптотической области больших r . Данное предположение справедливо только для $J \ll kr$, поэтому ряд для f фактически обрзан при $J \approx kr$. Чтобы определить эффект такого обрзания, рассмотрим производящую функцию

$$(1 + z^2 - 2xz)^{-1/2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} z^\lambda P_\lambda(x).$$

Укороченный ряд для f можно оценить, если взять производную по $\theta = \arccos x$ от производящей функции для z , равного, например, $(10)^{-1/kr}$. Это означает, что члены с $\lambda \approx kr$ будут уменьшены множителем $1/10$. Окончательное условие справедливости выражения (3.22) для f имеет вид $kr\theta^2 \gg 1$. Оно даже сильнее, чем условие $kr\theta \gg 1$ того, что асимптотическим решением является плоская волна. Но это не удивительно, поскольку выражение (3.22) расходится при $\theta = 0$, а пло-

¹⁾ Сферическая функция Бесселя связана с обычной функцией Бесселя соотношением $j_\nu(z) = (\pi/2z)^{1/2} J_{\nu+1/2}(z)$. Асимптотическое поведение j_ν см. в книге [18].

ская волна конечна. Исключение значений $kr\theta^2 \leq 1$ из области справедливости выражения (3.22) интуитивно можно объяснить следующим образом. Дифференциальное сечение и, следовательно, амплитуда рассеяния расходятся при малых θ . Эта расходимость соответствует траекториям, расположенным далеко от оси z ; однако если θ стремится к нулю для определенного r , то траектория касается оси z и не должна приводить к расходимости. Можно отметить, что соответствующие ограничения применимы при интерпретации обычных асимптотических выражений для волновой функции кулоновского рассеяния [17].

Мы получили нерелятивистскую теорию, которая согласуется с требованиями, приведенными в § 2. В следующем разделе мы сравним эту теорию с решением Бандере [21] уравнения Дирака для рассеяния электрического заряда на монополе.

3. Квантовая теория при наличии вектора-потенциала

Анализ Дирака [1] квантовой теории основан на введении сингулярного вектора-потенциала, определяющего поле неподвижного монополя

$$\mathbf{A} = g \frac{\boldsymbol{\varphi}}{r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (3.23)$$

Этот потенциал удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{\tilde{g}\mathbf{r}}{r^2} \quad (\theta \neq \pi), \\ \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} &= -4\pi g, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где C — малый контур вокруг линии $\theta = \pi$. Таким образом, $\mathbf{A}$ описывает не изолированный магнитный заряд, а линию магнитного потока, который распространяется из точки O в бесконечность вдоль отрицательной полуоси z , или длинный тонкий диполь. Взаимодействие электрического заряда с монополем вводится посредством обычной подстановки $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} - (ie/\hbar c)\mathbf{A}$. Поскольку положение оси z произвольно, линию диполя можно повернуть любым способом, не меняя физических результатов. Если сделать такой поворот, то можно определить,

что волновая функция ψ' , которая удовлетворяет тому же уравнению, что и ψ , но с новым потенциалом A' , имеет вид

$$\psi'(\mathbf{x}) = \left\{ \exp \left[\left(\frac{ie}{\hbar c} \right) \int^{\mathbf{x}} d\mathbf{x}' \cdot (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) \right] \right\} \psi(\mathbf{x}). \quad (3.25)$$

Потребуем, чтобы фазовый множитель был точно определен. Фаза определяется для тех путей интегрирования, которые не охватывают линий сингулярности $\mathbf{A}$ или $\mathbf{A}'$, так как в этом случае $\text{rot}(\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0$. Однако при однократном обходе любой линии сингулярности фаза меняется каждый раз на $\Delta\Phi = \pm 4\pi(eg/\hbar c)$. Отсюда вытекает условие Дирака, так как данное изменение должно быть кратным 2π .

Эта калибровочная инвариантность, или «инвариантность дипольной линии», имеет не только формальное значение. Как показали наиболее четко Ааронов и Бом [22—24], линия потока, которую *не* пересекает траектория заряда, может тем не менее создавать эффект рассеяния. В частности, дифракционная картина от электроинной волны, которая проходит по обе стороны линии потока, сдвигается на одну полосу каждый раз, когда охваченный волной поток изменяется на $2\pi\hbar c/e^1$. Следовательно, линия диполя *могла бы* создавать наблюдаемый эффект, если бы не было условия Дирака для потока $4\pi g$. Таким образом, между инвариантностью относительно вращений, рассмотренной в § 2, и калибровочной инвариантностью, рассматриваемой здесь, существует тесная связь. Отметим, что волновая функция могла бы быть разрывной или неопределенной для путей, охватывающих линию, если допустить, чтобы линия оказалась наблюдаемой сингулярностью, и пренебречь данными условиями инвариантности. Полученный гамильтониан был бы приемлемым оператором, однако он не описывал бы рассеяние заряда на монополе. Если принять терминологию Дирака [1], к монополю была бы присоединена «нить» и ориентация падающего пучка от-

¹⁾ Это было экспериментально подтверждено [30]. Был проведен также аналогичный эксперимент, использующий эффект Джозефсона в сверхпроводниках [31]

носителем этой нити влияла бы на рассеяние; таким образом, инвариантность относительно вращений была бы нарушена.

Для определения положения «монополя» требовалось бы задать не точку, а линию. Такой «монополь» не мог бы быть частицей в обычном смысле, так как имел бы бесконечное число степеней свободы. Таким образом, без квантового условия дираковский гамильтониан H описывает рассеяние не на монополе, а на бесконечном диполе, один конец которого находится в начале координат. Это обсуждение показывает, почему непрерывность по φ в § 2 является следствием инвариантности относительно вращений и не может быть потребована с самого начала.

Исследуем решения уравнения Дирака [1] для случая, когда квантовое условие выполнено:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} &= H - \left(\frac{1}{2\mu} \right) \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (-i\partial_\varphi - s(1 - \cos \theta))^2 \right] \right\}, \quad (3.26) \\ s &= \frac{eg}{\hbar c}. \end{aligned}$$

для $s = 1/2$ это согласуется с (3.18). Решения уравнения Шредингера с гамильтонианом (3.26) могут быть получены разделением переменных в виде¹⁾

$$\begin{aligned} \Psi_{jm} &= j_q(kr) e^{im\varphi} d_{s-m, s}^j(\theta), \\ q + \frac{1}{2} &= \left[\left(J - \frac{1}{2} \right)^2 - s^2 \right]^{1/2}, \quad J \geq |s|, |s-m|, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где j_q — сферическая функция Бесселя, а d^j — обобщенная сферическая функция, или амплитуда спиральности.

¹⁾ Эти решения были получены в работах [32, 33]. Легко получить решения радиального уравнения. Уравнение для угловых переменных лучше всего решается, если оно приведено к частной форме дифференциального уравнения для обобщенных сферических функций, см., например, [29]. Предыдущие авторы, следуя Дираку, неявно предполагали, что $eg = -|eg|$. Мы делаем противоположное предположение.

Бандере [21] получил решение для рассеянной волны, идущей в направлении *отрицательной* полуоси z , потребовав отсутствия зависимости от φ и приняв, что падающая волна должна быть формально равна $i\delta(1 - \cos \theta)(kr)^{-1}e^{ikr}$, как это справедливо в обычной теории рассеяния. Его решение полностью эквивалентно (3.18) и тому обобщению, которое приведено в приложениях, изложенных в § 2, о зависимости от φ , однако легко показать, что аналогом (2.4) при наличии вектора-потенциала является

$$\mathbf{b} = [\nabla_k \alpha']_{\perp},$$

$$\alpha' = \alpha - \frac{e}{\hbar c} \int^x \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.28)$$

Это дает

$$\alpha' \sim 0, \quad z \rightarrow +\infty,$$

$$\alpha' \sim -\left(\frac{2eg}{\hbar c}\right)\varphi, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = -\tilde{\mathbf{z}}.$$

Соотношение (3.28) фактически обосновывает и обобщает требование Бандере об отсутствии зависимости его решения от φ . Естественное требование состоит в том, что α' не должно зависеть от φ для падающей волны. Для волны, идущей в *положительном* направлении оси z , это предполагает, что $\alpha \sim (2eg/\hbar c)\varphi$; таким образом, можно получить

$$\alpha' \sim 0, \quad z \rightarrow -\infty,$$

$$\alpha' \sim +\left(\frac{2eg}{\hbar c}\right)\varphi, \quad z \rightarrow +\infty, \quad (3.29')$$

$$\mathbf{k} = +\mathbf{z}.$$

Резюмируя результаты данного параграфа, отметим, что нерелятивистская квантовая задача рассеяния заряда на монополе может быть решена без противоречий с требованиями, приведенными в § 2. Можно использовать два подхода: метод Дирака и метод момента количества движения. Эти два метода полностью эквивалент-

ны. Метод Дирака обладает тем недостатком, что вводится взаимодействие, которое сингулярно вдоль полубесконечной линии, однако этот метод позволяет избежать сложностей $(2s + 1)$ -компонентного спинового формализма. Волновая функция Дирака получается из спиновой волновой функции с помощью операции вращения.

§ 4. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРОБЛЕМЫ И ВЫВОДЫ

К сожалению, в настоящее время не существует релятивистской теории для электрических зарядов и монополей (описывающей реакции аннигиляции с античастицами)¹⁾. Однако результаты, приведенные в § 2, налагают определенные требования на такую теорию, разъясняющие трудности, возникшие при недавних попытках ее построения.

Чтобы это понять, необходимо обратить внимание на дополнительный момент количества движения в начальном и конечном состояниях реакции

$$e + g \rightarrow e + g. \quad (4.1)$$

Может ли этот дополнительный момент количества движения относиться к новой частице? Очевидно, нет. Помимо того факта, что энергия и импульс обоих зарядов сохраняются, требование унитарности запрещает рассматривать дополнительный момент количества движения как независимую степень свободы. Выше было показано, что рассеяние определяется недиагональным «спиновым» матричным элементом $\langle -s | T | s \rangle$, во всяком случае для малых углов. Если бы дополнительный момент количества движения был независимой переменной, то оптическая теорема не была бы справедлива, так как амплитуда «спин»-диагонального рассеяния вперед была бы пренебрежимо мала по сравнению с бесконечно боль-

¹⁾ Дирак [1] и Кабиббо и Феррари [34] получили уравнения движения в теории поля, однако пока не достигнут прогресс в получении даже приближительных решений. Бандере [21] рассмотрел релятивистскую проблему в том смысле, что он использовал релятивистскую кинематику для дираковского электрона.

шим полным сечением. Вследствие этой бесконечности оптическую теорему теперь имеет смысл понимать только в виде предельного перехода в соотношении унитарности при малых углах. Однако это не изменяет заключения о том, что соотношение унитарности применимо к амплитуде с факторизованной зависимостью от φ , поэтому дополнительный момент количества движения не может принадлежать новой частице. Сущность этого аргумента состоит в том, что азимутальная зависимость амплитуды является единственным следствием ее зависимости от дополнительного момента количества движения, что в свою очередь следует рассматривать только кинематически, а не как следствие дополнительных физических переменных в проблеме. Дополнительный момент количества движения можно было бы определить в системе центра масс реакции с обычными преобразованиями, дающими возможность записать его в других лоренцевских системах отсчета.

Обычная теория S -матрицы [25] для реакций частиц имеет несколько существенных постулатов, включающих лоренцевскую инвариантность, унитарность, аналитичность инвариантных переменных в реакциях и кроссинг-симметрию. Последний из них утверждает, что амплитуду для реакции (4.1) можно аналитически продолжить для получения амплитуды перекрестной реакции

$$e + \bar{e} \rightarrow g + \bar{g}. \quad (4.2)$$

В обычных задачах, где каждая частица обладает определенным спином, имеются хорошо известные способы установления связи между амплитудами прямой и перекрестной реакций. Однако реакция (4.1) содержит дополнительный момент количества движения, который не появляется в реакции (4.2). Таким образом, если кроссинг-симметрия вообще справедлива для данного случая, то она имеет не простую форму, так как кинематика прямой и перекрестной реакций различна. «Нанивная» кроссинг-симметрия должна нарушаться для взаимодействия электрического заряда с монополюм.

Этот результат согласуется с другими выводами. Заряд монополя g должен изменять знак при преобразовании четности P в теории, где оператор четности P

сохраняется¹⁾). Если g не имеет других внутренних квантовых чисел, то действие P на g подобно действию PC на другие частицы, где C — преобразование зарядового сопряжения. Легко видеть, что данное определение предполагает отсутствие вкладов от однофотонных промежуточных состояний в реакцию (4.2). Поэтому хотя и существует полюс в нуле по передаваемому импульсу в прямом канале, но отсутствует полюс с нулевой массой в кросс-канале. Опять мы получаем указание на то, что кроссинг-симметрия нарушена для данной реакции. Для монополей (или зарядов) со спином однофотонный вклад может быть не равен нулю, однако характерно то, что полюс в кросс-канале должен зависеть от спинов частиц, тогда как полюс в прямом канале (определяемый принципом соответствия) не зависит от спинов.

Недавно Цванцигер [26] и Вейнберг [27] попытались построить теорию монополя по крайней мере для малых углов рассеяния методами, отчасти аналогичными данному. Цванцигер нашел амплитуду с неприемлемыми свойствами аналитичности. Вейнберг в теории, имеющей большие ограничения, нашел амплитуду, которая оказалась не лоренц-инвариантной. По-видимому, кроссинг-симметрия выполняется в обеих теориях. Непоследовательность этих работ не может быть установлена в рамках данной теории, однако справедливость в них кроссинг-симметрии гарантирует несовместимость их результатов с рассеянием заряда на монополе для малых углов. Действительно, полученные амплитуды не дают даже правильного дифференциального сечения рассеяния.

Таким образом мы показали, что современные представления о теории монополя можно получить из принципа соответствия и инвариантности относительно трехмерных вращений в теории S -матрицы. Найдено, что квантовое условие Дирака справедливо для перенормированных или физически наблюдаемых зарядов. Далее, среди других обычных постулатов релятивистской теории

¹⁾ Проще всего это получить, если потребовать, чтобы сила Лоренца (2.1) оставалась неизменной при преобразовании четности [35].

S -матрицы для монополей по крайней мере постулат о кроссинг-симметрии должен быть видоизменен. Таким образом, если бы монополи были найдены, для их рассмотрения необходим был бы некоторый пересмотр существующих теоретических методов. Если окажется, что они не подчиняются условию Дирака, то даже обычные постулаты квантовой механики будут поставлены под вопрос.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем решения для нерелятивистского рассеяния заряда на монополе для произвольных целых значений $2s = 2eg/\hbar c$.

Падающая волна имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_i &= \sum_l (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \chi(m=s) = \\ &= \sum_l (2l+1) i^l j_l(kr) \langle l, 0(\mathbf{r}) | l, 0(\tilde{\mathbf{z}}) \rangle |s, s(\tilde{\mathbf{z}})\rangle, \quad (\text{П. 1})\end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{z}}$ определяют оси квантования m_l или m_s ¹⁾. Поскольку $\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}$ коммутирует с H , мы можем записать проекцию состояния ψ_i на состояния, в которых ось квантования для оператора $\mathbf{s}$ выбрана в радиальном направлении:

$$\begin{aligned}\langle m(\mathbf{r}) | \psi_i \rangle &= \sum_l (2l+1) i^l j_l(kr) \times \\ &\times \langle l, 0(\mathbf{r}) | l, 0(\mathbf{z}) \rangle \langle s, m(\mathbf{r}) | s, s(\mathbf{z}) \rangle. \quad (\text{П. 2})\end{aligned}$$

Если к тому же выбрать состояния с определенным J , то угловая часть гамильтониана будет иметь определенный вид для каждого J :

$$\begin{aligned}\langle m | P_J | \psi_i \rangle &= \sum_l (2l+1) i^l j_l(kr) C(J, l, s; 0, m) \times \\ &\times C(J, l, s; 0, s) \langle j, m(\mathbf{r}) | J, s(\mathbf{z}) \rangle, \quad (\text{П. 3})\end{aligned}$$

где C — коэффициенты векторного сложения [28].

¹⁾ $P_l(\cos \theta) = d_{00}^l(\theta) = \langle l, 0(\mathbf{r}) | l, 0(\mathbf{z}) \rangle$; см. [20], стр. 52, 60.

Используя ¹⁾

$$H_J = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \partial_r^2 r - \frac{J(J+1) - s^2}{r^2} \right] = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}, \quad (\text{П. 4})$$

можно сопоставить ψ_i с приходящей частью собственных функций H :

$$\begin{aligned} \langle m | P_J | \psi \rangle &= \sum_l (2l+1) (-1)^l C(J, l, s; 0, m) \times \\ &\times C(J, l, s; 0, s) i^{-q} e^{i(s-m)\varphi} d_{m, s}^J(\theta) j_q(kr), \\ q + \frac{1}{2} &= \left[\left(J + \frac{1}{2} \right)^2 - s^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{П. 5})$$

где использовано стандартное определение обобщенных сферических функций или амплитуд спиральности $d_{m, s}^J(\theta)$ [28, 29, 20, 19]. С помощью правила сумм [20] получаем

$$\begin{aligned} \sum_l (2l+1) C(Jl; s0) C(Jl; m0) (-1)^l &= \\ &= (2J+1) (-1)^{J-s} \delta_{m, -s}; \end{aligned} \quad (\text{П. 6})$$

окончательно находим

$$\begin{aligned} \langle m(\tilde{\mathbf{r}}) | \psi \rangle &= e^{2is\varphi} \delta_{m, -s} \times \\ &\times \sum_J (2J+1) (-1)^{J-s} i^{-q} j_q(kr) d_{-s, s}^J(\theta). \end{aligned} \quad (\text{П. 7})$$

Это решение эквивалентно решению Бандере [21] и дает правильное поведение при малых углах:

$$\begin{aligned} \langle -s(\tilde{\mathbf{z}}) | f | s(\tilde{\mathbf{z}}) \rangle_{\theta \ll 1} &\approx e^{2is\varphi} \left[\frac{(-1)^{-s}}{2ik} \right] \sum_J (2J+1) d_{-s, s}^J(\theta) = \\ &= i(-1)^s e^{2i(eg/\hbar c)\varphi} \frac{eg(v/c)}{2\mu v^2 \sin^2(\theta/2)}. \end{aligned} \quad (\text{П. 8})$$

¹⁾ Выражение (П.4) представляет собой просто квантовый вариант (3.7). Соответствие с гамильтонианом Дирака получено подстановкой s^2 вместо $s(s+1)$. Различие не влияет на рассеяние на малые углы, но оно сохраняет положительно определенный характер H для $J=s$. Это наименьшее значение J , согласующееся с граничным условием $\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -s$, так как $\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{r}}$.

Последнее выражение найдено, следуя работе Бандере, путем определения коэффициентов в разложении

$$(1 - \cos \theta)^{-1} = \frac{1}{2} \sum_J (2J+1) C_J d_{-s,s}^J(\theta), \quad (П. 9)$$

$$C_J = \int_{-1}^1 d \cos \theta (1 - \cos \theta)^{-1} d_{-s,s}^J = s^{-1} (-1)^{2s+1}.$$

Интеграл C_J получен путем последовательного интегрирования по частям с применением формулы Родрига [29]

$$d_{-s,s}^J(\cos^{-1} x) = \frac{(-1)^{J+s} d^{J-s}(1-x)^{2s}(1-x^2)^{J-s}/dx^{J-s}}{2^J (J-s)! (1-x)^s}. \quad (П. 10)$$

Разумеется, предостережение, сделанное в тексте, об интерпретации асимптотического выражения для рассеянной волны, относится также к (П.8). Требуемое условие имеет вид $kr\theta^2 \gg s$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A133, 60 (1931); Phys. Rev., 74, 817 (1948) (статьи 1 и 2 данного сборника).
2. Malkus W. V. R., Phys. Rev., 83, 899 (1951) (статья 3 данного сборника).
3. Fitz H. C., Good W. B., Kassner J. L., Ruark A. E., Phys. Rev., 111, 1406 (1958).
4. Bradner H., Isbell W. M., Phys. Rev., 114, 603 (1959).
5. Purcell E. M., Collins G. B., Fujii T., Hornbostel J., Turkot F., Phys. Rev., 129, 2326 (1963).
6. Amaldi E., Baroni G., Bradner H., Hoffmann L., Manfredini A., Vanderhaeghe G., Nuovo cimento, 28, 773 (1963) (статья 4 данного сборника).
7. Goto E., Kolm H. H., Ford K. W., Phys. Rev., 132, 387 (1963).
8. Saha M. N., Indian Journ. Phys., 10, 145 (1936); Phys. Rev., 75, 1968 (1949).
9. Wilson H. A., Phys. Rev., 75, 309 (1949).
10. Froissart M., Goldberger M. L., Watson K. M., Phys. Rev., 131, 2820 (1963).
11. Wigner E. P., Phys. Rev., 98, 145 (1955).
12. Goldberger M. L., Watson K. M., Phys. Rev., 127, 2284 (1962).

13. Poincare H., *Compt. rend.*, **123**, 530 (1896).
14. Fierz M., *Helv. Phys. Acta*, **17**, 27 (1944).
15. Lapidus I. R., Pietenpol J. L., *Am. Journ. Phys.*, **28**, 17 (1960).
16. Nadeau G., *Am. Journ. Phys.*, **28**, 566 (1960).
17. Schiff L. I., *Quantum Mechanics*, New York, 1949 (см. перевод: Л. Шифф, *Квантовая механика*, М., 1957).
18. Abramowitz M., Stegun I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Washington, 1965, p. 365.
19. Jacob M., Wick G. C., *Ann. Phys. (N. Y.)*, **7**, 426 (1959).
20. Rose M. E., *Elementary Theory of Angular Momentum*, New York, 1957, p. 53.
21. Banderet P. P., *Helv. Phys. Acta*, **19**, 503 (1946).
22. Ehrenburg W. E., Siday R. E., *Proc. Phys. Soc. (London)*, **B62**, 8 (1949).
23. Aharonov Y., Bohm D., *Phys. Rev.*, **115**, 485 (1959); **123**, 1511 (1961).
24. Furry W. H., Ramsey N. F., *Phys. Rev.*, **118**, 623 (1960).
25. Chew G. F., *S-Matrix Theory of Strong Interactions*, New York, 1961.
26. Zwanziger D., *Phys. Rev.*, **137**, B647 (1965).
27. Weinberg S., *Phys. Rev.*, **138**, B988 (1965).
28. Wigner E. P., *Group Theory*, New York, 1959, chap. 17 (см. перевод: Е. Вигнер, *Теория групп*, М., 1961).
29. Edmonds A. R., *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton, New Jersey, 1957.
30. Möllenstedt G., Bayh W., *Naturwiss.*, **49**, 81 (1962).
31. Jaklevic R. C., Lambe J. J., Silver A. H., Mercereau J. E., *Phys. Rev. Letters*, **12**, 275 (1964).
32. Тамм И. Е., *Zs. Phys.*, **71**, 141 (1931).
33. Fierz M., *Helv. Phys. Acta*, **17**, 27 (1944).
34. Cabibbo N., Ferrari E., *Nuovo cimento*, **23**, 1147 (1962).
35. Schiff L. I., *Am. Journ. Phys.*, **32**, 812 (1964).

7. МАГНИТНЫЙ ЗАРЯД И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Ю. Швингер

J. Schwinger, Phys. Rev., 144, 1087 (1966)

Построена квантовая теория поля для электрического и магнитного зарядов. Доказано, что если квантовое условие для зарядов имеет вид $eg/\hbar c = n$, где n — целое число, то теория релятивистски инвариантна. Это условие является более жестким, чем условие Дирака, допускающее также полуцелые значения.

Симметрия между электрическим и магнитным зарядами, которая в принципе внутренне присуща уравнениям Максвелла, по-видимому, не наблюдается в природе. Этот факт вызывает некоторое беспокойство, которое усугубляется замечательным предположением Дирака [1] о том, что существование магнитного заряда означало бы квантование электрического заряда. Недавно несколько авторов [2—4] заявили, что предполагаемые свойства S -матрицы в релятивистской теории нарушены для частицы, которая обладает магнитным зарядом. Однако совместимость концепции магнитного заряда с принципами релятивистской квантовой теории поля еще не исследована¹⁾. Данная работа посвящена общему анализу этой проблемы.

Сохранение ковариантных уравнений Максвелла для полей

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad \partial_\nu {}^*F^{\mu\nu} = {}^*j^\mu, \\ {}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa}$$

¹⁾ Работа Кабиббо и Феррари [5] является очевидным исключением. Однако эти авторы не рассматривают ограничений, которые следуют из тождества Якоби для коммутаторов функций, зависящих от пути интегрирования. Я должен поблагодарить Колмэна за стимулирующие обсуждения, которые имели место в тот же год, когда выполнена данная работа. Он независимо построил аналогичную теорию.

сводится к локальным законам сохранения электрического и магнитного зарядов

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \partial_\mu {}^* j^\mu = 0,$$

к уравнениям движения для трехмерных поперечных компонент напряженностей поля

$$\partial_0 \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}, \quad \partial_0 \mathbf{H} = -\text{rot } \mathbf{E} - {}^*\mathbf{j}$$

и к уравнениям

$$\text{div } \mathbf{E} = \mathbf{j}^0, \quad \text{div } \mathbf{H} = {}^*\mathbf{j}^0.$$

Следующие соотношения определяют поперечные векторные потенциалы:

$$\mathbf{H}^T = \text{rot } \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{E}^T = -\text{rot } \mathbf{B}^T.$$

Одновременные коммутационные соотношения

$$i [A_k^T(x), B_l^T(x')] = \epsilon_{klm} \partial_m \mathcal{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

где ϵ_{klm} — полностью антисимметричный тензор, а

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|},$$

определяют известный канонический коммутатор

$$\begin{aligned} i [A_k^T(x), E_l^T(x')] &= (\delta_{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'))^T = \\ &= \delta_{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \partial_k \partial'_l \mathcal{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

и его магнитный аналог

$$i [B_k^T(x), H_l^T(x')] = (\delta_{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'))^T.$$

Квантовая теория поля релятивистски инвариантна, если плотность тензора энергии и импульса удовлетворяет одновременному коммутационному соотношению [6]¹⁾

$$-i [T^{00}(x), T^{00}(x')] = - (T^{0k}(x) + T^{0k}(x')) \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

¹⁾ Формула в тексте справедлива для ограниченного физического класса локальных систем [7]. Существует также независимое аналогичное рассмотрение этого вопроса [8].

Разумеется, требования инвариантности в трехмерном пространстве, осуществляющиеся с помощью операторов импульса и момента количества движения

$$P^k = \int (dx) T^{0k}, \quad J^{kl} = \int (dx) (x^k T^{0l} - x^l T^{0k}),$$

также должны быть выполнены.

Рассмотрим конкретную модель, в которой поле ψ со спином $1/2$ обладает электрическим зарядом e , а поле χ со спином $1/2$ — магнитным зарядом g . Плотность энергии для данной системы имеет вид

$$T^{00} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + \bar{\psi} \gamma (-i\nabla - e\mathbf{A}^T - e\mathbf{A}_g) \psi + m_e \bar{\psi} \psi + \\ + \chi \gamma (-i\nabla - g\mathbf{B}^T - g\mathbf{B}_e) \chi + m_g \bar{\chi} \chi,$$

где произведения фермиевских операторов антисимметризованы относительно производных по координатам. Мы определили операторы

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^T - \nabla \phi, \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}^T - \nabla^* \phi,$$

где

$$\phi(x) = \int (dx') \mathcal{D}(x - x') j^0(x'),$$

$$^* \phi(x) = \int (dx') \mathcal{D}(x - x') ^* j^0(x')$$

и

$$\mathbf{A}_g(x) = \int (dx') \mathbf{a}(x - x') ^* j^0(x'),$$

$$\mathbf{B}_e(x) = \int (dx') \mathbf{b}(x - x') j^0(x').$$

Вид векторов $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ будет определен ниже.

Два 4-вектора токов имеют следующий вид:

$$j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad ^* j^\mu = g \bar{\chi} \gamma^\mu \chi.$$

Можно получить коммутационные соотношения

$$-i [j^0(x), T^{00}(x')] = -j^k(x') \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ -i [^* j^0(x), T^{00}(x')] = -^* j^k(x') \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

которые гарантируют выполнение обоих локальных законов сохранения зарядов. Эти коммутаторы следуют также из соотношений

$$\begin{aligned} -i[\mathbf{E}(x), T^{(0)}(x')] &= -[\mathbf{H}(x') \nabla \delta(x - x')] - \mathbf{j}(x') \delta(x - x'), \\ -i[\mathbf{H}(x), T^{(0)}(x')] &= [\mathbf{E}(x') \nabla \delta(x - x')] - {}^*\mathbf{j}(x') \delta(x - x'), \end{aligned}$$

а последние соответствуют уравнениям движения для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Дельтаобразная структура коммутаторов, которые связывают напряженности полей с вкладами от плотности энергии заряженных полей, упрощает вычисление коммутатора для плотностей энергии. Помимо коммутатора, содержащего оба заряженных поля, получается ожидаемое выражение для плотности импульса

$$\begin{aligned} T_k^0 &= \{[\mathbf{E}\mathbf{H}] + \bar{\psi}\gamma^0(-i\nabla - e\mathbf{A}^T - e\mathbf{A}_g)\psi + \\ &+ \frac{1}{4} \text{rot}(\bar{\psi}\gamma^0\sigma\psi) + \bar{\chi}\gamma^0(-i\nabla - g\mathbf{B}^T - g\mathbf{B}_e)\chi + \\ &+ \frac{1}{4} \text{rot}(\chi\gamma^0\sigma\chi)\}_k. \end{aligned}$$

Вклад от электромагнитного поля в плотность импульса может быть переписан в виде

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}\mathbf{H}]_k &= \mathbf{E}^T \partial_k \mathbf{A}^T - \text{div}(\mathbf{E}^T A_k^T) + \int^0 A_k^T + {}^*\int^0 B_k^T + \\ &+ \text{div}(A_k^T \nabla \phi - \phi \partial_k \mathbf{A}^T) + \text{div}(B_k^T \nabla {}^*\phi - {}^*\phi \partial_k \mathbf{B}^T) + \\ &+ \text{rot}_k \left(\frac{1}{2} \phi \nabla {}^*\phi - \frac{1}{2} {}^*\phi \nabla \phi \right). \end{aligned}$$

Полученное этим способом выражение для полного оператора импульса имеет вид

$$\begin{aligned} P_k &= \int (dx) [\mathbf{E}^T \partial_k \mathbf{A}^T - \bar{\psi}\gamma^0 i \partial_k \psi - \bar{\chi}\gamma^0 i \partial_k \chi] - \\ &- \int (dx)(dx') \int^0(x) {}^*\int^0(x') [a_k(x - x') + b_k(x' - x)]. \end{aligned}$$

Это выражение представляет собой требуемый генератор сдвига только в том случае, если справедливо соотношение

$$\mathbf{b}(x) = -\mathbf{a}(-x).$$

Анализ оператора момента количества движения мы пока отложим.

Коммутатор между энергетическими плотностями от обоих типов заряженных полей имеет несколько целочисленных вкладов. Условием их полного исчезновения является соотношение

$$\varepsilon_{klm} \partial_m \mathcal{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \partial_l a_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \partial_k b_l(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = 0,$$

или

$$-\text{grad } \mathcal{D}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{a}(\mathbf{x}).$$

Это уравнение нельзя решить, не исключив некоторую область пространства, вследствие несовместимости правой и левой его частей, которая выявляется при интегрировании по замкнутой поверхности, включающей начало координат. Однако существуют решения, которые справедливы почти всюду. Так,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n(\mathbf{x}) &= \frac{\mathcal{D}(\mathbf{x})}{2} \left(\frac{[\mathbf{n}\mathbf{x}]}{|\mathbf{x}| + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} - \frac{[\mathbf{n}\mathbf{x}]}{|\mathbf{x}| - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} \right) = \\ &= \mathbf{a}_n(-\mathbf{x}) - \mathbf{a}_{-n}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

является решением во всех точках, которые не находятся на бесконечной линии, проходящей через начало координат в направлении единичного вектора $\mathbf{n}$. Характер сингулярности раскрывает неисчезающий предел интеграла, взятого по малой произвольной поверхности, пронизанной линией $\mathbf{x} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$, или эквивалентного криволинейного интеграла по пути, являющемуся границей этой малой поверхности:

$$\lim \int d\mathbf{S} \cdot \text{rot } \mathbf{a}_n = \lim \oint d\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_n = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому полное уравнение, которому удовлетворяет $\mathbf{a}_n(\mathbf{x})$, имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{a}_n(\mathbf{x}) = -\text{grad } \mathcal{D}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}_n(\mathbf{x}),$$

где

$$\mathbf{h}_n(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \mathbf{n} \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) \delta_n(\mathbf{x}),$$

а $\delta_n(\mathbf{x})$ — двумерная δ -функция в плоскости, ортогональной $\mathbf{n}$. Векторное поле $\mathbf{h}_n(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\text{div } \mathbf{h}_n(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}).$$

Отметим также, что

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_n(\mathbf{x}) = 0,$$

так как

$$4\pi \mathbf{a}_n(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \left\{ \mathbf{n} \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{x}| - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}| + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} \right\},$$

и что

$$\mathbf{b}_n(\mathbf{x}) = -\mathbf{a}_n(\mathbf{x})$$

является аксиальным вектором, что согласуется со свойством $\mathbf{B}^T$ по отношению к пространственному отражению.

Переход от одной сингулярной линии к другой является почти всюду калибровочным преобразованием для векторных потенциалов

$$\mathbf{A}_g(x) = \int (d\mathbf{x}') \mathbf{a}_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') {}^* j^0(x'),$$

$$\mathbf{B}_e(x) = - \int (d\mathbf{x}') \mathbf{a}_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') j^0(x').$$

Соответствующие преобразования для заряженных полей имеют вид

$$\psi'(x) = \exp \left[ie \int_{-\infty}^x d\mathbf{x}' (\mathbf{A}'_g - \mathbf{A}_g)(x') \right] \psi(x),$$

$$\chi'(x) = \exp \left[ig \int_{-\infty}^x d\mathbf{x}' (\mathbf{B}'_e - \mathbf{B}_e)(x') \right] \chi(x),$$

где

$$\int_{-\infty}^x d\mathbf{x}' (\mathbf{A}'_g - \mathbf{A}_g) = \int (d\mathbf{x}') f_{n'n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') {}^* j^0(x'),$$

$$\int_{-\infty}^x d\mathbf{x}' (\mathbf{B}'_e - \mathbf{B}_e) = - \int (d\mathbf{x}') f_{n'n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') j^0(x')$$

и

$$f_{n'n}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^0 d\xi (\mathbf{a}_{n'} - \mathbf{a}_n)(\mathbf{x} + \xi) = -f_{n'n}(-\mathbf{x}).$$

Данное преобразование оставляет инвариантными выражения для T^{00} и T^{0k} . Оно также не меняет коммутационные соотношения для ψ и χ , поскольку

$$\psi'(x) = U^{-1} \psi(x) U, \quad \chi'(x) = U^{-1} \chi(x) U,$$

где

$$U = \exp \left[i \int (dx) (dx') j^0(x) f_{n'n}(x - x')^* j^0(x') \right]$$

является унитарным оператором. В данном рассмотрении нет, в частности, ничего, что зависело бы от спинов заряженных полей.

Фазовый множитель, на который умножается, например, $\psi(x)$ в полученном выше калибровочном преобразовании, является по-прежнему унитарным оператором. Образующее им преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \exp \left[-ie \int (dx'') f_{n'n}(x - x'')^* j^0(x'') \right] \chi(x') \times \\ \times \exp \left[ie \int (dx'') f_{n'n}(x - x'')^* j^0(x'') \right] = \\ = \exp [ieg f_{n'n}(x - x')] \chi(x'). \end{aligned}$$

При условии, что x' совпадает с началом координат, $f_{n'n}(x - x')$ является разностью криволинейных интегралов от $a_{n'}$ и a_n по пути с конечной точкой x . Любые изменения пути интегрирования не изменяют эту разность, что определяется топологией, связанной с двумя сингулярными линиями, определяемыми n и n' . Однако если непрерывно изменяемый путь интегрирования пересечет одну из этих линий, то $f_{n'n}(x - x')$ скачком изменится на величину $\pm 1/2$. Калибровочное преобразование может оставаться однозначным почти всюду только в том случае, если

$$\frac{eg}{4\pi} = n,$$

где n — целое число. В обычных гауссовых единицах целочисленная величина равна $eg/\hbar c$. Это условие квантования зарядов отличается от условия Дирака: наименьшее не равное нулю произведение зарядов равно

единице, а не половине. Различие возникло в результате применения нами в анализе бесконечной сингулярной линии с учетом свойств относительно пространственного стражения, а не полубесконечной линии, используемой Дираком. Ниже мы укажем другое различие между двумя подходами. Затем мы выявим небольшую тонкость, которая не была учтена при использовании полубесконечной сингулярной линии.

Легко вычислить криволинейный интеграл, входящий в данное калибровочное преобразование, если $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ отличаются на бесконечно малую величину:

$$\mathbf{n}' - \mathbf{n} = \delta \mathbf{n}$$

вследствие бесконечно малого поворота

$$\delta \omega = [\mathbf{n} \delta \mathbf{n}].$$

Действительно,

$$\delta_n 4\pi \mathbf{a}_n(\mathbf{x}) = -\text{grad} \frac{1}{2} \delta \omega \left[\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}| + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}| - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} \right]$$

и

$$f_{n'n}(\mathbf{x}) = -\delta \omega \left\{ [\mathbf{x} \mathbf{a}_n(\mathbf{x})] + \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right\} = \delta \omega \mathbf{f}_n(\mathbf{x}).$$

Таким образом, бесконечно малое калибровочное преобразование генерируется унитарным оператором

$$U(\delta \omega) = 1 + i \delta \omega \cdot \mathbf{j}_n,$$

где

$$\mathbf{j}_n = \int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}') j^0(\mathbf{x}) \mathbf{f}_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^* j^0(\mathbf{x}').$$

В этом преобразовании участвуют только компоненты $\mathbf{j}_n$, перпендикулярные $\mathbf{n}$. Действительно, компоненты, параллельные $\mathbf{n}$, исчезают:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_n = 0,$$

так как

$$[\mathbf{n} \mathbf{x}] 4\pi \mathbf{a}_n(\mathbf{x}) = -\frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|}.$$

Рассмотрим теперь полный момент количества движения системы. Он определяется выражением

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(0)} + \int (d\mathbf{x}) (\phi \nabla \cdot \phi - \nabla \phi \phi) - \\ - \int (d\mathbf{x}) (d\mathbf{x}') j^0(x) [(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{a}_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \nabla j^0(x'),$$

где

$$\mathbf{J}^{(0)} = \int (d\mathbf{x}) \left\{ \bar{\psi} \gamma^0 \left(-i [\mathbf{x} \nabla] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) \psi + \right. \\ \left. + \bar{\chi} \gamma^0 \left(-i [\mathbf{x} \nabla] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) \chi + \mathbf{E}^T [\mathbf{x} \nabla] \mathbf{A}^T + [\mathbf{E}^T \mathbf{A}^T] \right\}$$

есть обычный оператор полного момента количества движения. Дополнительный вклад статических полей

$$\int (d\mathbf{x}) (\phi \nabla \cdot \phi - \nabla \phi \phi) = - \int (d\mathbf{x}) (d\mathbf{x}') j^0(x) \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla j^0(x')$$

был определен давно [9]. Однако это только часть дополнительного момента количества движения, который полностью определяется выражением

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^0 + \mathbf{j}_n.$$

Смысл дополнительного момента количества движения очевиден; он генерирует калибровочное преобразование, необходимое для установления связи между сингулярной линией и системой координат. Однако вектор $\mathbf{j}_n$ не является независимым моментом количества движения. Его компоненты коммутативны, а комбинация $\mathbf{J}^0 + \mathbf{j}_n$ удовлетворяет коммутационным соотношениям для момента количества движения вследствие дифференциального соотношения

$$\delta \omega_1 [\mathbf{x} \nabla] \delta \omega_2 \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{x}) - \delta \omega_2 [\mathbf{x} \nabla] \delta \omega_1 \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{x}) = - [\delta \omega_1 \delta \omega_2] \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{x}).$$

Спектр собственных значений $\mathbf{J}$ состоит из целых или полуцелых значений, как и спектр $\mathbf{J}^{(0)}$, поскольку

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^{(0)}.$$

Анализ выражения для момента количества движения проливает некоторый свет на квантовое условие для

зарядов применительно к случаю полубесконечной сингулярной линии. Рассмотрим альтернативную векторную функцию

$$\mathbf{a}'_n(\mathbf{x}) = -\mathbf{b}'_n(-\mathbf{x}) = -\mathcal{D}(\mathbf{x}) \frac{[n\mathbf{x}]}{|\mathbf{x}| - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}},$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\text{rot } \mathbf{a}'_n(\mathbf{x}) = -\text{grad } \mathcal{D}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}'_n(\mathbf{x}).$$

Функция $\mathbf{h}'_n(\mathbf{x})$ подчиняется соотношению

$$\text{div } \mathbf{h}'_n(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x})$$

и определяется выражением

$$\mathbf{h}'_n(\mathbf{x}) = -\frac{n}{2} \left(1 + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} \right) \delta_n(\mathbf{x}).$$

Если теперь контур интегрирования охватывает линию $\mathbf{x} = \mathbf{n}|\mathbf{x}|$, то

$$\lim \oint d\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}'_n = -1$$

и при калибровочном преобразовании выполняется следующее условие однозначности Дирака:

$$\frac{eg}{4\pi} = \frac{n}{2},$$

где n — целое число. Построение момента количества движения отличается только в одной детали, которая следует из соотношения

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}'_n(\mathbf{x}) = -n \left\{ [\mathbf{x} \mathbf{a}'_n(\mathbf{x})] + \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right\} = \frac{1}{4\pi}$$

Соответственно

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^{(0)} + \frac{1}{4\pi} Q^* Q,$$

что вводит операторы полных зарядов

$$Q = \int (d\mathbf{x}) j^0(x), \quad {}^*Q = \int (d\mathbf{x}) {}^*j^0(x).$$

Собственные значения оператора $(1/4\pi) Q^* Q$ являются величинами, кратными $eg/4\pi$. Мы снова получим квантовые условия Дирака, если данный член рассматривать

просто как дополнительную компоненту момента количества движения. Однако это нарушает геометрическую эквивалентность вращения относительно произвольной оси на угол 2π с тождественным преобразованием, справедливую с точностью до характерного изменения знака для полей с полуцелым спином. Действительно, пусть χ является полем со спином s . Тогда получаем

$$\exp(-2\pi i \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \chi \exp(2\pi i \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) = (-1)^{2s} \exp\left(\frac{1}{2} igQ\right) \chi,$$

что не равно просто $(-1)^{2s} \chi$, если величина $eg/4\pi$ принимает полуцелые значения $1/2, 3/2, \dots$. Это является другим указанием на то, что квантовое условие для зарядов должно удовлетворять более сильному требованию целочисленности величины $eg/4\pi$.

Более детальный анализ криволинейных интегралов, взятых вокруг сингулярной линии, разрешает это очевидное противоречие. Пусть n определяет положительную ось z . Рассмотрим предельные значения криволинейных интегралов, взятых от $\mathbf{a}'_n$ и $\mathbf{a}_n$ в положительных направлениях вокруг оси z . Выделим три области

$$z > 0, \quad z = 0, \quad z < 0.$$

Эти предельные значения равны

$$\lim \oint d\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}'_n = \begin{cases} -1, & z > 0, \\ -\frac{1}{2}, & z = 0, \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

и

$$\lim \oint d\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_n = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & z > 0, \\ 0 & z = 0, \\ +\frac{1}{2}, & z < 0, \end{cases}$$

где при $z = 0$ берется среднее значение двух пределов для противоположных отрезков оси z . Существенной является наименьшая не равная нулю величина криволинейного интеграла; теперь найдено, что эта величина

равна $1/2$ в обоих методах. Следовательно, правильным квантовым условием для зарядов является требование

$$\frac{eg}{4\pi} = n,$$

где n — целое число.

Эти два векторных потенциала являются членами класса таких функций, для которых полубесконечная сингулярная линия $z > 0$ входит с весовым коэффициентом α , а сингулярная линия $z < 0$ — с коэффициентом β , где

$$\alpha + \beta = 1.$$

Три предельных значения криволинейного интеграла равны $-\alpha$, $1/2(-\alpha + \beta)$, β в том же порядке, что и выше. Целочисленное квантовое условие для зарядов сохраняется, так как разность последовательных значений равна $1/2$. Возможными значениями α и β являются

$$\alpha = \frac{k}{2n}, \quad \beta = 1 - \frac{k}{2n},$$

где k — целое число. Когда используется одна из этих функций, $n \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{J}^{(0)})$ становится равным $(1/4\pi) Q^* Q (\alpha - \beta)$. Собственные значения последнего оператора кратны целому числу $k - n$.

Какие заключения, касающиеся релятивистской инвариантности, можно вывести из всего этого рассмотрения? Для данной пары одновременных точек может быть выбрана произвольная сингулярная линия, так что основное коммутационное условие для плотности энергии будет выполнено; это доказывает релятивистскую инвариантность. Однако правильно также и то, что коммутационное условие не будет выполнено повсюду, если фиксирована сингулярная линия. Следует ожидать, что нарушение равенства, которое возникает, когда сингулярная линия соединяет две данные точки, является скорее следствием несостоятельности формализма теории, чем нарушением релятивистской инвариантности. Мы подтвердим это заявление с помощью анализа пре-

дельного перехода¹⁾ для вкладов заряженных полей в плотность энергии, который устраняет данный недостаток.

Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} -\bar{\psi}(x) \gamma \cdot (\nabla - ie\mathbf{A}(x)) \psi(x) = \\ = \lim \left[\bar{\psi}\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{3\gamma \cdot \epsilon}{\epsilon^2} \psi\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(ie \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{A}(x_1)\right) \right], \end{aligned}$$

где путь интегрирования является прямой линией, соединяющей две одновременные точки, а усреднение должно быть выполнено по всем направлениям ϵ , прежде чем совершить переход при $|\epsilon| \rightarrow 0$. Аналогичное построение с предельным переходом применимо к χ и $g\mathbf{B}$ вместо ψ и $e\mathbf{A}$. Достаточно рассмотреть комбинации операторов

$$\begin{aligned} F &= \bar{\psi}_a\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right) \psi_b\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right) \times \\ &\times \exp\left(ie \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} d\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}_g)(x_1)\right), \\ G &= \bar{\chi}_c\left(x' + \frac{\epsilon'}{2}\right) \chi_d\left(x' - \frac{\epsilon'}{2}\right) \times \\ &\times \exp\left(ig \int_{x'-\epsilon'/2}^{x'+\epsilon'/2} d\mathbf{x}_2 \cdot (\mathbf{B}^T + \mathbf{B}_e)(x_2)\right). \end{aligned}$$

Они обладают следующими коммутационными свойствами:

$$FG = GF \exp(iegC),$$

¹⁾ «Произведения локальных операторов поля следует понимать как предел произведений, определенных для несовпадающих точек» [10].

где

$$C = \int_{\mathbf{x}-\boldsymbol{\varepsilon}/2}^{\mathbf{x}+\boldsymbol{\varepsilon}/2} d\mathbf{x}_1 \times \int_{\mathbf{x}'-\boldsymbol{\varepsilon}'/2}^{\mathbf{x}'+\boldsymbol{\varepsilon}'/2} d\mathbf{x}_2 \{ \text{rot } \mathbf{a}_n(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \text{grad } \mathcal{D}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \} = \\ = \int_{-1/2}^{1/2} d\lambda \int_{-1/2}^{1/2} d\lambda' [\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \lambda\boldsymbol{\varepsilon} - \lambda'\boldsymbol{\varepsilon}').$$

В общем случае $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ имеет не равную нулю проекцию на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{n}$. Выберем векторы $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}'$ так, чтобы их длины были меньше, чем эта проекция. Тогда $\mathbf{h}_n$ равно нулю для всех λ и λ' , $C = 0$ и F коммутирует с G . Этого не будет, если $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ параллельно $\mathbf{n}$. Если рассмотреть, например, векторную функцию, связанную симметрично с сингулярной линией, и учесть, что

$$[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] \cdot \mathbf{n} \delta_n(\lambda\boldsymbol{\varepsilon} - \lambda'\boldsymbol{\varepsilon}') = \frac{[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] \cdot \mathbf{n}}{|[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] \cdot \mathbf{n}|} \delta(\lambda) \delta(\lambda'),$$

то мы получим

$$C = -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')|} \frac{[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] \cdot \mathbf{n}}{|[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] \cdot \mathbf{n}|}.$$

Число C не равно нулю, если две точки соединены сингулярной линией. Однако вследствие квантового условия для зарядов имеем

$$\exp(iegC) = 1$$

и F коммутирует с G . Этот анализ отчетливо показывает, что при любом рассмотрении, основанном на теории возмущений, мы получим кажущееся нарушение релятивистской инвариантности. Теория поля есть нечто большее, чем набор «правил Фейнмана».

Релятивистская квантовая теория поля для электрического и магнитного зарядов обладает такой стройностью, что мы должны повторить слова Дирака: «Было бы удивительно, если бы природа не использовала данную возможность».

Дополнительное замечание

В то время, когда рукопись данной статьи перепечатывалась, вышел номер журнала *Physical Review* от 8 ноября 1965 г., в котором была опубликована работа

Хагена по тому же вопросу [11]. В этой работе был получен противоположный вывод в отношении релятивистской инвариантности. Хаген настаивает на несомненной инвариантности теории относительно трехмерных вращений, тогда как мы допускаем асимметрию, связанную с сингулярной линией, при выполнении лоренц-инвариантности и инвариантности относительно трехмерных вращений в теории. К тому же линейная модель Булвара и Гильберта [12], которую анализирует Хаген, не дает приемлемой идеализации электрического и магнитного зарядов. Поскольку экспоненциальные функции не возникают, квантовое условие не устраняет того, что изменение сингулярной линии не всегда определяется калибровочным преобразованием.

Дополнение в корректуре

Полевая теория электрического и магнитного зарядов требует использования потенциалов с произвольными сингулярными линиями. Все направления сингулярной линии должны быть эквивалентны. Однако при любом конкретном выборе пара точек, объединяемая сингулярной линией, по-видимому, обладает специфической особенностью. Роль квантового условия для зарядов состоит именно в том, чтобы устранить аномальность этих точек и восстановить эквивалентность всех без исключения пространственно-временных точек. Именно эта решающая черта и отличает данную теорию поля от более ранней (не полевой) теории Дирака, в которой был наложен строгий запрет для частицы с электрическим зарядом находиться на сингулярной линии («нити»), связанной с частицей, имеющей магнитный заряд. Анализ релятивистской инвариантности в данной статье иллюстрирует эту теоретико-полевую точку зрения. Однако остается не до конца выясненным существование требования эквивалентности всех точек. Вызывает некоторое удивление, что потенциалы с бесконечной сингулярной линией, которые первоначально допускали целое число в квантовом условии Дирака для зарядов, могут быть использованы только тогда, когда это целое число является четным.

Пусть теперь $a_n(x)$ — функция, которая сингулярна на полубесконечной линии $x = n|x|$. Существует единственное унитарное преобразование, связанное с переходом от n к n' , если в выражении

$$\exp[ieg f_{n'n}(x)],$$

$$f_{n'n}(x) = \int_{-\infty}^x dx' \cdot (a_{n'} - a_n)(x')$$

интеграл не зависит от пути интегрирования для всех точек x . Сравнивая два таких пути, можно выразить разность криволинейных интегралов интегралом по поверхности, граница которой определяется обоими путями. Условие однозначности имеет вид

$$\exp\left[ieg \int dS' \cdot (h_{n'} - h_n)(x')\right] = 1.$$

Это условие должно выполняться для всех поверхностей без исключения. Такие операторные структуры, как T^{00} , являются точно градиентно инвариантными, если они построены как пределы произведений (F и G в тексте). Например, влияние на F замены полей и потенциалов такими полями и потенциалами, которые связаны с новой сингулярной линией, должно заключаться в умножении на следующий операторный множитель:

$$\exp\left[ie \int_C dx' \cdot (A_{g'} - A_g)(x')\right] =$$

$$= \exp\left[ie \int (dx'') \int dS' \cdot (h_{n'} - h_n)(x' - x'')^* i^0(x''),\right]$$

где контур C начинается в бесконечности, проходит последовательно через $x - \epsilon/2$, $x + \epsilon/2$ и затем возвращается в бесконечность. Полная тождественность этого оператора с единичным оператором следует из природы собственных значений оператора плотности магнитного заряда, имеющих вид суммы трехмерных δ -функций, умноженных на $\pm g$.

Предположим, что поверхность пересекает сингулярную линию $\mathbf{x} = \mathbf{n}x$ в точке $x > 0$, где $\mathbf{v}$ — нормаль к поверхности. Тогда возможные вклады в интеграл равны

$$\int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{h}_n(x) = \begin{cases} -1, & \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0, \\ 0, & \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ 1, & \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0. \end{cases}$$

Однако если точкой пересечения является $x = 0$, то значение интеграла следует умножить на $1/2$. Множитель $1/2$ появляется также в том случае, если сингулярная линия является касательной к поверхности, а не пронизывает ее. Рассмотрим теперь возможные значения $\int d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{h}_{n'} - \mathbf{h}_n)$. Этот интеграл равен целому числу, если ни одна из двух сингулярных линий не является касательной к поверхности. Не являются исключением и те поверхности, которые пересекают обе линии в начале координат, так как возможные величины таких вкладов равны $1/2 \pm 1/2$. Различие возникает, если одна из линий является касательной к поверхности. В общем случае значение интеграла будет отличаться от целого числа на $1/2$. Рассмотрим, например, полубесконечную плоскую поверхность, которая пересекает линию, определяемую вектором $\mathbf{n}$, и касается линии $\mathbf{n}'$ в одной точке. Значение интеграла будет равно $(-1/2) - (-1) = 1/2$. Будем поворачивать поверхность относительно этой точки до тех пор, пока она не пересечет начало координат. Теперь интеграл равен $(0) - (-1/2) = 1/2$. Дальнейший поворот на угол меньше π приводит к значению $(1/2) - (0) = 1/2$. Другими значениями, получаемыми при продолжении вращения, будут 0 и $-1/2$, прежде чем снова будет достигнуто значение $1/2$. Когда все возможные поверхности рассмотрены, наименьшее не равное нулю значение интеграла по поверхности оказывается равным $1/2$. Поэтому условием однозначности преобразования сингулярной линии является целочисленность правила квантования:

$$\frac{eg}{4\pi} = n.$$

Критерий релятивистской инвариантности можно представить в виде

$$\exp \left[i e g \int dS'' \cdot h_n(x'') \right] = 1,$$

где x'' — переменная интегрирования на произвольной малой поверхности, которая проходит через точку $x - x' \neq 0$. Поскольку возможные значения интеграла по поверхности равны 0, $1/2$, 1, данный критерий справедлив без каких-либо исключений.

Рассмотрим теперь класс потенциалов с бесконечной сингулярной линией. Пусть α — весовой коэффициент, связанный с полубесконечной линией, определяемой вектором n , а $\beta = 1 - \alpha$ — весовой коэффициент зеркально отображенной линии. Однозначность преобразований сингулярной линии требует выполнения соотношений

$$\frac{1}{2} e g \alpha = 2\pi n_1, \quad \frac{1}{2} e g \beta = 2\pi n_2,$$

$$\frac{eg}{4\pi} = n = n_1 + n_2$$

и

$$n\alpha = n_1, \quad n\beta = n_2.$$

Отметим, однако, что если α и β определено как несократимая дробь, то целое число n должно делиться без остатка на знаменатель этой дроби, чтобы можно было применить симметричные потенциалы с $\alpha = \beta = 1/2$, целое число n должно быть четным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A133**, 60 (1931); Phys. Rev., **74**, 817 (1948) (статьи 1 и 2 данного сборника).
2. Zwanziger D., Phys. Rev., **137**, B647 (1965).
3. Weinberg S., Phys. Rev., **138**, B988 (1965).
4. Goldhaber A. S., Phys. Rev., **140**, B1407 (1965) (статья 6 данного сборника).
5. Cabibbo N., Ferrari E., Nuovo cimento, **23**, 1147 (1962).
6. Schwinger J., Phys. Rev., **127**, 324 (1962).
7. Schwinger J., Phys. Rev., **130**, 406, 800 (1963); Nuovo cimento, **30**, 278 (1963).
8. Dirac P. A. M., Rev. Mod. Phys., **34**, 592 (1962).
9. Wilson H. A., Phys. Rev., **75**, 309 (1949).
10. Schwinger J., Phys. Rev. Letters, **3**, 296 (1959).
11. Hagen C. R., Phys. Rev., **140**, B804 (1965).
12. Boulware D. G., Gilbert W., Phys. Rev., **126**, 1563 (1962).

8 ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ МАГНИТНЫХ МОНОПОЛЕЙ ДИРАКА

Г. Вентцель

G. Wentzel, Supplement of the Progress of Theoretical Physics,
Numbers 37—38, 163 (1966)

§ 1. Исключение фиктивных полей: модифицированная дираковская связь между полем и векторным потенциалом рассматривается с различных точек зрения, в частности изучается вопрос о волновом пакете монополя.

§ 2. Квантование поля: указывается путь включения монополей в квантовую электродинамику Томонага.

§ 3. Замечания о поляризации вакуума: рассматривается вклад от виртуальных монополь-антимонопольных пар с привлечением дуальности.

§ 1. ИСКЛЮЧЕНИЕ ФИКТИВНЫХ ПОЛЕЙ

Наше первое замечание относится к одному из вопросов теории магнитных монополей Дирака [1, 2], который хотя и ясно описан в статье Дирака [2], но часто не учитывается или неправильно понимается в современной литературе по этому вопросу.

Чтобы записать волновое уравнение для электрона в присутствии магнитного заряда, необходимо ввести вектор-потенциал, представляющий поле монополя. Дирак ввел такой потенциал. Он представил монополь как конечную точку «нити» магнитного диполя, другой конец которой находится где-то в бесконечности. Например, для покоящегося в начале координат монополя нить можно направить вдоль отрицательной оси z . При этом вектор-потенциал

$$A_x = g \frac{-y}{r(r+z)}, \quad A_y = g \frac{x}{r(r+z)}, \quad A_z = 0, \\ [r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} > 0] \quad (1)$$

имеет сингулярность вдоль нити ($z \rightarrow -r$), а его ротор имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H} + \mathbf{H}^{(f)}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{H} = -g \nabla \frac{1}{r} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3)$$

есть кулоновское поле монополя, в то время как $\mathbf{H}^{(f)}$ представляет собой сингулярный магнитный поток вдоль нити. Действительно, взяв $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ по замкнутой траектории вокруг оси z , найдем

$$\begin{aligned} H_x^{(f)} = H_y^{(f)} &= 0, \\ H_z^{(f)} &= \begin{cases} 4\pi g \delta(x) \delta(y) & [z < 0], \\ 0 & [z > 0]. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Поле $\mathbf{H}^{(f)}$ является *фиктивным*, так как относится не к монополю, а к дипольной нити (которая введена искусственно). Таким образом, физическое магнитное поле определяется выражением

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{H}^{(f)}. \quad (5)$$

Поскольку $\mathbf{H}^{(f)}$ не является ротором, то такое поле не может быть представлено с помощью вектора-потенциала. Исключение фиктивного сингулярного поля особенно важно для правильной *физической интерпретации теории* (в противном случае мы имели бы дело не с монополем, а с бесконечно длинным диполем или соленоидом). Рассматриваемый случай является примером построения энергетически-импульсных величин (подобных $\mathbf{H}^2$ или $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$) с помощью потенциала $\mathbf{A}$. Например, было бы неправильно включать член $[\mathbf{E}\mathbf{H}^{(f)}]/4\pi c$ в плотность импульса поля. (По-видимому, этот член искажает выражение Швингера [3]¹⁾ для полного момента количества движения поля.)

Уравнение движения электрона в этом магнитном поле получается из гамильтониана $\mathcal{H}$, который включает «оператор импульса»

$$\pi = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (6)$$

¹⁾ «Момент количества движения» Швингера зависит от геометрии линии потока даже в статическом случае (монополь и электрический заряд покоятся). Очевидно, это противоречит представлению об истинном монополе.

($\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ в квантовой механике). Уравнение движения имеет вид

$$\dot{\pi} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}\pi] = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \text{ rot } \mathbf{A}], \quad (7)$$

где $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока. Важно отметить, что эта «сила Лоренца» содержит нефизический член, связанный с фиктивным полем $\mathbf{H}^{(f)}$ [см. (2), (4)], который искажает уравнение движения (7), если не выполняется условие

$$\mathbf{j}_x = \mathbf{j}_y = 0 \text{ вдоль линии потока.} \quad (8)$$

Для выполнения этого условия достаточно рассматривать только такие волновые пакеты, для которых

$$\psi = 0 \text{ на линии потока.} \quad (9)$$

Действительно, Дирак требует, чтобы «нить нигде не проходила через заряженную частицу» [2]¹⁾. Разумеется, могут быть ситуации, когда запрет (9) является излишне строгим. В основной проблеме рассеяния электронов статическим полюсом [4, 5] выбранная геометрия соответствует направлению траекторий падающих электронов вдоль отрицательной оси z . В этом случае, конечно, фиктивная сила $\mathbf{j} \times \mathbf{H}^{(f)}/c$ несущественна. Тамм и Фирц [6, 7] исследовали собственные функции, соответствующие нерелятивистскому гамильтониану [не накладывая ограничения (9), что оправдано в их математическом аппарате]. Потребовав, чтобы эти собственные функции образовывали представление группы вращения, Фирц снова получил «квантовое соотношение» Дирака

$$eg = \frac{1}{2} c\hbar n \quad (n - \text{целое число}). \quad (10)$$

Для выполнения «дираковского запрета» (9) в других случаях необходимо или желательно ввести *искривленные* линии потока. Как и раньше, будем рассматривать покоящийся монополь, а дипольную нить расположим

¹⁾ Это ставит на обсуждение аргумент Швингера [3] о точках на линии потока,

вдоль некоторой кривой L , начинающейся в « $-\infty$ » и кончающейся в полюсе (начале координат):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, L) = -g \int_L \left[d\mathbf{x}_L \nabla \frac{1}{r} \right] \quad (11)$$

($r = |\mathbf{x}_L - \mathbf{x}|$; градиент действует на координатный вектор $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$). Уравнение (2) по-прежнему справедливо. Однако теперь сингулярное поле $\mathbf{H}^{(0)}$ направлено вдоль кривой L . Физические выводы из теории не должны зависеть от выбора кривой L при условии, что эта кривая кончается в начале координат. Рассмотрим смещение $L \rightarrow L'$. Поле

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, L') - \mathbf{A}(\mathbf{x}, L) = \delta_L \mathbf{A} \quad (12)$$

имеет ротор, равный нулю (за исключением кривых L и L' , на которых ротор отличен от нуля). Поэтому оно является градиентом функции $\lambda(\mathbf{x})$, которая, однако, не однозначна, а при обходе вокруг L или вокруг L' изменяется на $\pm 4\pi g$. Волновые функции электрона для любых двух потенциалов отличаются на фазовый множитель

$$\exp \left[-\frac{i\lambda(\mathbf{x})e}{c\hbar} \right]. \quad (13)$$

Постулируя однозначность волновой функции после обхода по любой замкнутой кривой, еще раз получаем условие (10).

Укажем на простую аналогию: поле $\mathbf{A}(\mathbf{x}, L)$ (11) формально совпадает с полем Био — Савара, создаваемым линейным током вдоль L . Поэтому поле $\delta_L \mathbf{A}$ (12) равно полю двойного магнитного слоя:

$$\delta_L \mathbf{A} = \nabla \lambda, \quad \lambda = -g \int_{\sigma} d\sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \quad (14)$$

(σ — поверхность, натянутая на L и L'). Функция λ терпит разрыв на поверхности σ , причем разрыв ($\lambda^+ - \lambda^-$) равен $4\pi g$. Однако для λ , фигурирующей в выражении (13), он равен модулю $4\pi g$. Это еще раз подтверждает однозначность фазового множителя (13) вследствие (10).

Эту теорию, относящуюся к покоящемуся монополю, легко обобщить на случай классического движения мо-

нополя вдоль определенной мировой линии. При этом линия потока L движется вдоль двумерной поверхности в четырехмерном пространстве. Вместо (11) используем запаздывающий потенциал движущегося элемента диполя [см. уравнение (21) Дирака [2], а также его уравнения (13) и (15) для исключения фиктивного поля]. Обобщение градиентного преобразования (14) не представляет труда.

Для квантовомеханического описания движения монополя необходимо заменить точечный полюс на волновой пакет плотности $\rho^{(m)}$ и с плотностью тока $\mathbf{j}^{(m)}$, которые подчиняются уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^{(m)} + \frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

($\int d^3\rho^{(m)} = g$). Заметим, что если вернуться к простейшему случаю — к линиям потока в направлении оси z , то уравнение (4) можно записать в виде

$$H_z^{(f)}(xyz) = 4\pi \int_z^\infty dz' \rho^{(m)}(xyz'), \quad (16)$$

где

$$\rho^{(m)}(xyz) = g \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

Если мы определяем $\mathbf{H}^{(f)}$ для общих распределений плотности (даже зависящих от времени) с помощью (16), то это означает, что мы берем *параллельный пучок* линий потока, каждая из которых исходит из своего элемента объема волнового пакета. Теперь появятся также фиктивные электрические поля

$$\begin{aligned} E_x^{(f)}(xyz) &= -\frac{4\pi}{c} \int_z^\infty dz' j_y^{(m)}(xyz'), \\ E_y^{(f)}(xyz) &= +\frac{4\pi}{c} \int_z^\infty dz' j_x^{(m)}(xyz'), \\ E_z^{(f)}(xyz) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя (15), легко получить

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(f)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(f)}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(m)}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}^{(f)} &= -4\pi \rho^{(m)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Пучок линий можно подвергнуть непрерывным деформациям (даже стянуть их в линию), причем результат (18) при этом не меняется. Но мы не будем детально анализировать эту математическую проблему (сопутствующее градиентное преобразование). С другой стороны, удобно ввести обозначения Минковского $ict = x_4$, $ic\rho = j_4$.

$$H_x = F_{23} = -iH_{14}, \quad E_x = iF_{14} = H_{23} \text{ и т. д.} \quad (19)$$

Тогда уравнение (18) запишется в виде

$$\partial_\mu H_{\mu\nu}^{(f)} = -\frac{4\pi}{c} j_\nu^{(m)}. \quad (20)$$

При этом мы используем соотношение дуальности в виде

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad \epsilon_{1234} = i.$$

Обобщенное уравнение (5) можно записать в двух эквивалентных формах:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - F_{\mu\nu}^{(f)}, \quad (21)$$

$$H_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma - H_{\mu\nu}^{(f)}; \quad (22)$$

4-потенциал A_ν является запаздывающим потенциалом всех электрических зарядов и магнитных дипольных нитей. Потенциал магнитных дипольных нитей удовлетворяет уравнениям

$$\partial_\mu^2 A_\nu^{(m)} = \partial_\mu F_{\mu\nu}^{(f)}, \quad \partial_\mu A_\mu^{(m)} = 0. \quad (23)$$

Запаздывающее решение уравнений (23) легко записывается, если выбрать особое представление, подобное (16) и (17). Уравнений (23) достаточно для исключения членов фиктивного поля в $\partial_\mu F_{\mu\nu}$, согласно (21):

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial_\mu A_\nu^{(e)} - \partial_\nu A_\mu^{(e)}) = -\frac{4\pi}{c} j_\nu^{(e)}. \quad (24)$$

С другой стороны, объединяя уравнение (20) и (22), получаем

$$\partial_\mu H_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu^{(m)}. \quad (25)$$

Это уравнение является желаемым обобщением уравнений Максвелла. Уравнения (20), (21) и (23) становятся эквивалентными уравнениям Дирака [2], (14), (13) и (38), если волновой пакет стягивать к движущемуся точечному монополю.

Подчеркнем, что все уравнения (15) — (25) остаются справедливыми, если плотности $j_\nu^{(m)}$ являются операторами, содержащими квантованные поля монополя, рассматриваемые в § 2.

§ 2. КВАНТОВАНИЕ ПОЛЯ

Метод квантования Дирака (через принцип наименьшего действия и введения канонических переменных) сохраняет асимметрию между электрическими и магнитными величинами: монополи рассматриваются как конечные точки нитей, параметры которых служат в качестве канонических переменных. Конечно, существует дуальное описание, в котором не магнитные, а электрические заряды имеют прикрепленные линии потока. Отложим вопрос о том, как можно было бы осуществить формальную симметрию, и рассмотрим теорию Дирака, изложенную в его статье [2].

Один аспект этой теории сводится к тому, что в ней явно не вводятся (вторично) квантованные поля частиц. Она является до некоторой степени теорией в конфигурационном пространстве в духе многовременного формализма Дирака, Фока и Подольского [8]. Однако Томонага в ряде своих известных статей [9] показал, как ввести в такую теорию квантованное электронное поле. Его математический язык применим к обобщенной квантовой электродинамике Дирака, если ввести несколько необычное монопольное поле.

Сначала мы немного коснемся теории Томонага в ее первоначальном виде, а именно в предположении, что монополей нет. В представлении взаимодействия

используем операторы свободного поля, подчиняющиеся волновым уравнениям

$$\partial_\mu^2 A_\nu = 0, \quad (26)$$

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi = 0 \quad (27)$$

и обычным правилам коммутации (содержащим лоренц-инвариантную D -функцию). Вектор состояния Ψ является функционалом на пространственно-подобной гиперповерхности S . Бесконечно малое смещение S в точке P вызывает изменение Ψ , пропорциональное $(j_\nu^{(e)} A_\nu)_P \Psi$, где $j_\nu^{(e)}$ — оператор плотности электрического тока ($j_\nu^{(e)} = e c \bar{\psi} \gamma_\nu \psi$ допускает переупорядочение операторов испускания и поглощения для перенормировки вакуума). Кроме того, на Ψ наложено дополнительное условие (обобщенное условие Лоренца), включающее инвариантную D -функцию и токи $j_\nu^{(e)}$. Несмотря на уравнение (26), получаются правильные уравнения Максвелла (24), так как при смещении $x_\mu \rightarrow x_\mu + dx_\mu$ поверхность S необходимо оставлять проходящей через эту точку. Итак, сила, действующая на электроны, является правильной силой Лоренца.

Для введения магнитных полюсов и их полевых операторов ф Дирак в своей работе вносит следующие три изменения в теорию Томонага.

а) Поле A_ν должно включать поле $A_\nu^{(m)}$ дипольных нитей. В таком случае от уравнения (26) нужно отказаться и принять уравнение (23)¹⁾. Для волнового пакета полюса конечного размера можно выбрать параллельный пучок нитей для получения фиктивного поля [см. (16), (17)], но во всех случаях должны удовлетворяться уравнения (18) или (20), где $j_\nu^{(m)}$ — плотность магнитного тока (например, для полюсов со спином $1/2$ $j_\nu^{(m)} = g c \bar{\psi} \gamma_\nu \psi$). В результате без введения нового члена взаимодействия формализм Томонага приводит к правильной силе Лоренца, действующей на электроны при условии, что электроны не попадают на магнитные линии потока («дираковский запрет»).

¹⁾ При этом правила коммутации применяются к полям A_ν^{in} , см. [16].

б) При введении потенциалов A_ν определение напряженностей поля должно быть изменено в соответствии с *правилами вычитания* (21) или (22). Только таким способом можно получить неоднородные уравнения Максвелла (25), не изменяя (24).

в) Параметры нити в теории Дирака становятся каноническими координатами системы: поэтому уместно рассмотреть полевой оператор полюса φ как *функционал пространственно-подобной кривой* L , простирающейся из « $-\infty$ » к точке x_ν . Путем воздействия на эту нить электромагнитное поле действует также на его конечную точку, т. е. на полюс. Ниже мы попытаемся объяснить это подробнее.

Дираковское «волновое уравнение нити» (см. [2], уравнение (74)) эквивалентно следующему правилу: если кривая L деформируется в L' так, что она описывает поверхность σ , то поле полюса $\varphi(L)$ умножается на фазовый множитель:

$$\varphi(L') = \varphi(L) \exp\left(\frac{ig}{2\hbar c} \int_{\sigma} d\sigma_{\mu\nu} H_{\mu\nu}\right). \quad (28)$$

Кроме того, если конечная точка x_ν смещается в $x_\nu + dx_\nu$ таким путем, что кривая L удлиняется как раз на этот линейный элемент dx_ν (без изменения первоначальной части кривой, даже для $\nu = 4$)¹⁾, то $\varphi(L)$ изменяется в соответствии с уравнением свободного поля, например,

$$\text{для спина } \frac{1}{2} \quad (\gamma_\mu \partial_\mu + M) \varphi(L) = 0, \quad (29)$$

$$\text{для нулевого спина} \quad (\partial_\mu^2 - M^2) \varphi(L) = 0 \quad (30)$$

(см. [2] уравнения (69), (63)). Необходимо отметить, что, согласно закону изменения фаз (28), нет необходимости, чтобы две производные по x коммутировали:

$$(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \varphi(L) = \frac{ig}{\hbar c} \varphi(L) H_{\mu\nu}(x). \quad (31)$$

¹⁾ В другом контексте такое определение было подробно сформулировано Мандельштамом [11].

Мы хотим сначала проверить, что эти уравнения приводят к правильным уравнениям движения для монополей¹⁾. Определим тензор энергии импульса поля монополя с помощью известных выражений для свободного поля, например для случая спина, равного нулю²⁾:

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = (\partial_\mu \Phi^*)(\partial_\nu \Phi) + (\partial_\nu \Phi)(\partial_\mu \Phi) - \\ - \delta_{\mu\nu} [(\partial_\lambda \Phi^*)(\partial_\lambda \Phi) + M^2 \Phi \Phi],$$

где, однако, Φ теперь обозначает $\Phi(L)$ и производные определяются так, как указано выше. ($T_{\mu\nu}^{(m)}$, оказывается, не зависят от L ; см. ниже.) С помощью (30) и (31) легко найти

$$\partial_\mu T_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{1}{c} j_\mu^{(m)} H_{\mu\nu}, \quad (32)$$

$$j_\mu^{(m)} = \frac{ig}{\hbar} (\Phi \partial_\mu \Phi^* - \Phi^* \partial_\mu \Phi).$$

Для других значений спина при соответствующих определениях T и j в правой части уравнения (32) всегда получается правильная плотность «дуальной» силы Лоренца.

Фазовое соотношение (28) используется Дираком для того, чтобы еще раз вывести квантовое условие (10). Для простоты ограничимся кривыми L , L' , ..., лежащими в гиперплоскости $t = \text{const}$. Тогда

$$\Phi(L') = \Phi(L) \exp \left(\frac{ig}{\hbar c} \int_\sigma d\sigma \cdot \mathbf{E} \right).$$

Если L' каким-либо образом переходит в начальную кривую L , то для однозначности $\Phi(L)$ требуется, чтобы фаза изменялась на число, кратное 2π (при этом L' описывает замкнутую поверхность σ). Здесь важно вспомнить, что на линию потока никогда не должны попадать электрические заряды. Это не запрещает зарядам присутствовать *внутри* замкнутой поверхности σ

¹⁾ Дирак только декларирует соответствие с классической теорией.

²⁾ Считая само собой разумеющимся присутствие символа нормального произведения для операторов Φ .

в виде достаточно малого волнового пакета. Однако в таком случае собственные значения $\int_{\sigma} d\sigma \cdot \mathbf{E}$ являются целыми кратными $4\pi e$ и, действительно, мы снова получаем уравнение (10).

Построение функционала $\varphi(L)$ может быть выполнено следующим образом. Вспомним, что кривые L могут проходить только через области, где электрические плотности $j_{\mu}^{(e)}$ обращаются в нуль: $\partial_{\mu} F_{\mu\nu} = 0$. В этих областях дуальный тензор $H_{\mu\nu}$ представляется как ротор:

$$H_{\mu\nu} = \partial_{\mu} B_{\nu} - \partial_{\nu} B_{\mu} \quad (\partial_{\mu} B_{\mu} = 0). \quad (33)$$

«Дуальный потенциал» B_{ν} не имеет сингулярности на (магнитной) линии потока. Тогда выражение

$$\varphi(L) = \varphi_0(x) \exp \left(\frac{ig}{\hbar c} \int_{(L)}^x d\xi_{\mu} B_{\mu}(\xi) \right) \quad (34)$$

с не зависящей от L функцией $\varphi_0(x)$ удовлетворяет правилу фаз (28) на основании теоремы Стокса, тогда как (29) или (30) соответственно требуют выполнения уравнений

$$\begin{aligned} \left(\gamma_{\mu} \left[\partial_{\mu} + \frac{ig}{\hbar c} B_{\mu}(x) \right] + M \right) \varphi_0(x) &= 0, \\ \left(\left[\partial_{\mu} + \frac{ig}{\hbar c} B_{\mu}(x) \right]^2 - M^2 \right) \varphi_0(x) &= 0. \end{aligned}$$

Два поля, имеющие такую же связь, как $\varphi_0(x)$ и $\varphi(L)$ в уравнении (34), были широко исследованы в дуальном случае ($B_{\mu} \rightarrow A_{\mu}$) Мандельштамом [11], определившим коммутационные соотношения при условии, что на решения наложена кулоновская калибровка. Очень просто применить здесь все эти выводы. Необходимо, в частности, принять во внимание, что на стадии построения полевых операторов монополя $\varphi(L)$, $j_{\mu}^{(m)}$ и т. д. можно все еще игнорировать наличие электронов и их взаимодействия с полем (33) (до сих пор понятие линии тока не использовалось). Эти электрические взаимодействия затем будут приняты во внимание

с помощью уравнений Томонага для вектора состояния $\Psi(C)$ ¹⁾ с изменениями (а) и (б), указанными выше.

В отношении зависимости от L величин, включающих $\varphi(L)$, Мандельштам дает общее соотношение, содержащее коммутатор такой величины с «полным зарядом» J , который здесь должен быть отождествлен с интегралом по всему пространству от плотности распределения магнитного полюса ($J = \int d\nu\rho^{(m)}$) (см. [11] уравнение (2.14)). Физические величины должны быть независимыми от L , т. е. они должны коммутировать с J . Это, конечно, справедливо для плотностей тока $j_\mu^{(m)}$, а также и для тензора $T_{\mu\nu}^{(m)}$, входящего в (32).

Кабиббо и Феррари [12] попытались сформулировать теорию, в которой электроны и магнитные полюсы рассматриваются на равных основаниях; следуя Мандельштаму, они ввели электронные операторы поля $\psi(L)$ и $\psi_0(x)$, связанные соотношением

$$\psi(L) = \psi_0(x) \exp \left(- \frac{ie}{\hbar c} \int_{(L)}^x d\xi_\mu A_\mu(\xi) \right), \quad (35)$$

в дополнение к $\varphi_0(x)$ и $\varphi(L)$, связанным соотношением (34). Однако не ясно, является ли математически возможным представление всех этих операторов, совместное с принятыми правилами коммутации. Необходимым (но, возможно, не достаточным) является условие, чтобы пути L интегрирования, которые осуществляются в (34) и (35), не пересекались друг друга. Желательно уточнение этого вопроса.

Другие, еще более важные вопросы относятся к математическим бесконечностям, которые исключают в ортодоксальной квантовой электродинамике путем перенормировки. Дирак избегает этой проблемы путем введения формфактора как метода обрезания (который мы здесь не описываем). Математическая трудность усиливается из-за непригодности или сомнительной природы методов теории возмущений: взаимодействия электрон — монополю не являются «слабыми» из-за соотношения

¹⁾ Например, путем разложения в теории возмущений по степеням e .

(10), а взаимодействия монополь — монополь являются «сильными» ($g^2/\hbar c \geq 137/4$). Тем не менее в § 3 мы попытаемся рассмотреть некоторые вопросы поляризации вакуума.

В случае частичного перекрытия электрических и магнитных волновых пакетов возникает другая проблема, требующая некоторого смягчения «запрета Дирака». Можно ли это последовательно довести до конца, является спорным вопросом.

§ 3. ЗАМЕЧАНИЯ О ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА

Кроме обычной «электрической» поляризации вакуума (э. п. в.), вызываемой виртуальными электрон-позитронными парами, мы должны рассмотреть «магнитную» поляризацию вакуума (м. п. в.). Причиной последней являются виртуальные монополь-антимонопольные пары. Следует сразу же заметить, что как э. п. в. (через круговые электрические токи и эквивалентную им магнитную поляризацию) может влиять на магнитное поле, точно так же м. п. в. (вследствие дуальности) может влиять на электрическое поле. С монополем связаны следующие типичные проблемы:

A — э. п. в., создаваемая статическим монополем g ;

B — м. п. в., создаваемая статическим зарядом Ze .

Проблема A интересна главным образом вследствие дуальной связи с проблемой B . Если проблема A решается строго, то решение проблемы B находится с помощью дуального преобразования. Конечно, при этом предполагается, что монополи и электроны имеют один и тот же спин $1/2$. Но если бы у монополя не было спина, то дуальная проблема A рассматривала бы э. п. в., обусловленную бесспиновыми заряженными частицами.

В наиболее тщательных расчетах э. п. в. [13—15] для получения средних значений энергии или плотностей заряда для вакуума были использованы точные собственные функции электронов и позитронов в специальных внешних полях. В этом случае результаты являются «правильными» с любым приближением во внешнем поле. Этот метод, по-видимому, применим также к проблеме

А, так как известны собственные функции электронов (например, с нулевым спином) во внешнем поле $A(1)$ [6,7]. Не очевидно, однако, являются ли полученные таким путем результаты достаточно полными и строгими для того, чтобы перейти к случаю B (с помощью соотношения дуальности). Основной недостаток таких расчетов состоит в том, что пренебрегают *взаимодействиями* (например, кулоновским) между виртуальными электронами и позитронами. Это может быть несущественным для э. п. в., но дуальный эффект в проблеме B может играть большую роль: в силу квантового условия (10) магнитные кулоновские силы являются «сильными» и они могут приводить к сцеплению монополей и антимонполей, препятствующему поляризации¹⁾.

Чтобы рассмотреть проблему B с другой точки зрения, обратимся к случаю *медленно изменяющихся* полей, а именно к приближению, в котором пренебрегается всеми производными E и H [13—15]. В проблемах, подобных A и B , это должно означать, что $r \gg m^{-1}$ или $r \gg M^{-1}$ соответственно. Хорошо известно, что э. п. в. описывается с помощью измененного лагранжиана $\mathcal{L}$, который зависит только от двух лоренц-инвариантов:

$$(E^2 - H^2) \quad \text{и} \quad (E \cdot H)^2.$$

Мы не будем выписывать ни полное выражение (интегральное представление), ни разложение по теории возмущения для $\mathcal{L}$, а заметим только, что $\mathcal{L}$ изменяет кулоновский потенциал статического заряда Z_e следующим образом [15]:

$$V_e(r) = \frac{Ze}{r} \left[1 - \frac{2Z^2}{225\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \frac{1}{(mr)^4} \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + O \left(Z^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{(mr)^4} \right) \right\} \right]. \quad (36)$$

Аналогично свойства м. п. в. (виртуальные монополи и антимонполю со спином $1/2$, а электроны и позитроны)

¹⁾ Теллер предположил (в частном разговоре), что сильное кулоновское притяжение и усиленная аннигиляция должны сильно уменьшать сечение для (реального) рождения пар монополей и антимонполей.

теперь не рассматриваются) могут быть описаны измененным лагранжианом поля $\mathcal{L}_m$, который получается из $\mathcal{L}_e$ (или скорее из $-\mathcal{L}_e$ для сохранения знака главного члена) с помощью дуальной замены

$$\begin{aligned} e &\rightarrow g, & m &\rightarrow M, \\ \mathbf{E}^2 &\rightarrow \mathbf{H}^2, & \mathbf{H}^2 &\rightarrow \mathbf{E}^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Далее, положив $\mathbf{H} = 0$ и рассматривая электрическое поле статического заряда Ze , мы находим кулоновский потенциал, измененный вследствие м. п. в.:

$$\begin{aligned} V_m(r) = \frac{Ze}{r} \left[1 + \frac{2Z^2}{225\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{g^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{(Mr)^4} \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + O\left(Z^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{g^2}{\hbar c} \frac{1}{(Mr)^4} \right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Поправочные члены здесь представляют *электрические* эффекты поляризации, обусловленные круговыми движениями монополей в поле $\mathbf{E}$. Между прочим, эти члены меньше, чем соответствующие члены в V_e (36), если $M/m > g/e$ (до сих пор не удалось обнаружить даже последние члены).

В связи с этим мы преднамеренно пренебрегаем взаимодействиями между частицами, ответственными за поляризацию вакуума. Как указывалось выше, такие взаимодействия вряд ли влияют на V_e , но в V_m они, возможно, могут препятствовать поляризации.

Пока эти вопросы не исследованы более подробно, неудачные попытки наблюдения эффектов м. п. в. (или реального рождения пар монополей и антимонополей) вряд ли могут служить убедительным аргументом против существования в природе магнитных монополей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A133**, 60 (1931) (статья 1 данного сборника).
2. Dirac P. A. M., Phys. Rev., **74**, 817 (1948) (статья 2 данного сборника).
3. Schwinger J., Phys. Rev., **144**, 1087 (1966) (статья 7 данного сборника).

4. Banderet P. P., *Helv. Phys. Acta*, **19**, 503 (1946).
5. Goldhaber A., *Phys. Rev.*, **140**, B1407 (1965).
6. Тамм И. Е., *Zs. Phys.*, **71**, 141 (1931).
7. Fierz M., *Helv. Phys. Acta*, **17**, 27 (1944).
8. Dirac P. A. M., Fock V., Podolsky B., *Phys. Zs. USSR*, **2**, 468 (1932).
9. Tomonaga S., *Riken Ihô*, **22**, 525 (1943); *Progr. Theor. Phys.*, **1**, 27 (1946); **2**, 101, 198 (1947); *Phys. Rev.*, **74**, 224 (1948).
10. Yang C. N., Feldman D., *Phys. Rev.*, **79**, 972 (1950).
11. Mandelstam S., *Ann. of Phys.*, **19**, 1 (1962).
12. Cabibbo N., Ferrari E., *Nuovo cimento*, **23**, 1147 (1962).
13. Heisenberg W., Euler H., *Zs. Phys.*, **98**, 714 (1936).
14. Weisskopf V., *Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Math.-Fys. Medd.*, **14**, Nr. 9 (1936).
15. Wichmann E. H., Kroll N. M., *Phys. Rev.*, **101**, 843 (1956).
16. Yang C. N., Feldman D., *Phys. Rev.*, **79**, 972 (1950).

9. ИНВАРИАНТНОСТЬ МАГНИТНЫХ МОНОПОЛЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРАЩЕНИЙ

Э. Перес

A. Peres, Phys. Rev., 167, 1449 (1968)

Получено соотношение Швингера для магнитных зарядов $g = n\hbar c/e$ (n — целое число) исключительно методами теории групп, исходя из совместных требований инвариантности относительно вращения и градиентной инвариантности. При выводе не используется понятие «сингулярных линий» магнитных зарядов.

Много лет назад Дирак [1, 2] показал, что если существуют магнитные монополи, то их магнитный заряд g квантуется и удовлетворяет соотношению $g = n/2e$ ¹⁾, где n — целое число, а e — элементарный электрический заряд. Этот результат был затем уточнен Швингером [3], который пришел к соотношению $eg = n$.

В первом приближении аргументы Дирака и Швингера основывались на том, что любое решение для вектора-потенциала $\mathbf{A}$ в окрестности монополя должно содержать одну (или больше) сингулярных линий, которые нарушают симметрию системы относительно вращения. Такая симметрия может быть восстановлена, если положить $g = n/2e$ (или n/e), так как в этом случае различные ориентации сингулярной линии (или линий) могут быть связаны друг с другом соответствующими градиентными преобразованиями.

В последнее время природа этих сингулярных линий стала предметом дискуссии [4]. Имеет смысл показать, что соотношение Швингера $eg = n$ может быть получено непосредственно, исходя из требований инвариантности относительно вращения и градиентной инвариантности без какого-либо упоминания о сингулярных линиях.

Для иллюстрации нашего метода рассмотрим сначала простую проблему однородного магнитного поля $\mathbf{B}$

¹⁾ Мы используем систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

и построим генераторы $\mathbf{P}$ группы магнитных трансляций [5] для частицы с разрядом e . Мы не можем просто принять $\mathbf{P} = \mathbf{p} \equiv -i\nabla$, так как это выражение не является градиентно-инвариантным. С другой стороны, генератор $\mathbf{P}' = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$, который является градиентно-инвариантным, также неприемлем, так как приводит к $[P'_m, P'_n] = -ie\epsilon_{mns}B_s$, в то время как генераторы группы трансляций должны удовлетворять соотношению

$$[P_m, P_n] = 0 \quad (1)$$

для любой системы, обладающей трансляционной симметрией. Правильное решение имеет вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - e\mathbf{A} - \frac{1}{2}[\mathbf{r}\mathbf{B}];$$

оно удовлетворяет (1) и является градиентно-инвариантным.

Аналогично рассмотрим магнитное поле $\mathbf{B} = g\mathbf{r}/r^3$, создаваемое магнитным монополем, и построим генератор $\mathbf{J}$ группы магнитных вращений для частицы с зарядом e . Мы не можем просто принять $\mathbf{J} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$, так как это выражение не является градиентно-инвариантным. С другой стороны, выражение $\mathbf{J}' = [\mathbf{r}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})]$ также неприемлемо, хотя и является градиентно-инвариантным, так как оно приводит к ¹⁾

$$\begin{aligned} [J'_m J'_n] &= ie_{mns}(J'_s - er_s r_k B_k) = \\ &= ie_{mns}(J'_s - egn_s) \end{aligned}$$

(где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$), в то время как генераторы вращения должны удовлетворять соотношению

$$[J_m J_n] = ie_{mns}J_s \quad (2)$$

¹⁾ У читателя может вызвать сомнения одновременное использование $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ и $\mathbf{B} = -g\nabla(r^{-1})$. Эти уравнения не совместны при $r = 0$, или в общем случае в любой многосвязной области, окружающей монополь (даже если сам монополь исключается из этой области). Однако эти уравнения совместны в любой односвязной области, где $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Такая область является достаточной для получения алгебры генераторов бесконечно малых вращений [соотношение (2)], а для нашего доказательства необходимо только это.

для любой системы, обладающей симметрией относительно вращения. Правильным решением является

$$\mathbf{J} = [\mathbf{r}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})] + e\mathbf{g}\mathbf{n}; \quad (3)$$

оно удовлетворяет соотношению (2) и является гравитационно-инвариантным.

Из (3) мы имеем

$$eg = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J};$$

собственные значения этого выражения равны 0, ± 1 , 2, ..., как легко видеть, если принять представление, в котором $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}$ являются диагональными. Это соотношение как раз и является результатом Швингера для eg ¹⁾.

Заметим, что $\mathbf{J}^2$ не может иметь диагональный вид, если $\mathbf{n}$ имеет диагональный вид. Возможные собственные значения $\mathbf{J}^2$ имеют вид $J(J+1)$ при $J \geq |eg|$. Непосредственно из выражения

$$J(J+1) = [\mathbf{r}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 + (eg)^2$$

вытекает, что значения $J < |eg|$ запрещены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A133**, 60 (1931) (статья 1 данного сборника).
2. Dirac P. A. M., Phys. Rev. **74**, 817 (1948) (статья 2 данного сборника).
3. Schwinger J., Phys. Rev., **144**, 1087 (1966).
4. Peres A., Phys. Rev. Letters, **18**, 50 (1967).
5. Zak J., Phys. Rev. **134**, A1602 (1964).

¹⁾ Введение спина не изменит результат. В этом случае мы будем иметь $eg = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$, но так как $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$ оба являются либо целыми, либо полуцелыми числами, то eg всегда является целым числом.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Б. М. Болотовский и Ю. Д. Усачев.</i> Вступительная статья	5
1. <i>П. А. М. Дирак.</i> Квантованные сингулярности в электромагнитном поле	40
2. <i>П. А. М. Дирак.</i> Теория магнитных полюсов	58
3. <i>В. Малкус.</i> Взаимодействие монополя Дирака с веществом	92
4. <i>Е. Амальди, Г. Барони, Х. Броднер, М. де Карвальо, Л. Хоффман, А. Манфредини, Г. Вандерхааге.</i> Поиски монополей Дирака	112
5. <i>Э. Перселл, Дж. Коллинз, Т. Фуджи, Дж. Хорнбостл, Ф. Туркот.</i> Поиски монополей Дирака на протонах с энергией 30 Гэв	238
6. <i>А. Голдхабер.</i> Значение спина в проблеме монополя	269
7. <i>Ю. Швингер.</i> Магнитный заряд и квантовая теория поля	295
8. <i>Г. Вентцель.</i> Замечания к теории магнитных монополей Дирака	313
9. <i>Э. Перес.</i> Инвариантность магнитных монополей относительно вращений	329

МОНОПОЛЬ ДИРАКА

Редактор *Н. Л. ТЕЛЕСНИН*

Художественный редактор *П. Ф. Некунда*

Технический редактор *Л. П. Кондюкова*

Художник *А. Д. Смеляков*

Корректор *Л. А. Брычкова*

Сдано в производство 4/XI—1969 г. Подписано к печати 19/V—1970 г. Вумага
тип. № 1 84×108¹/₃₂—5,19 бум. л. 17,43 печ. л. Уч.-изд. л. 15,84.

Изд. № 2/5141 Цена 1 р. 60 к. Зак. 423.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгения Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

1 p. 60 n.

