

М. А. ДАВЫДОВА

**ЛЕКЦИИ
ПО
ГИДРОДИНАМИКЕ**



М. А. ДАВЫДОВА

**ЛЕКЦИИ
ПО
ГИДРОДИНАМИКЕ**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2011

УДК УДК 532.5

ББК 22.253

Д 13

Давыдова М. А. **Лекции по гидродинамике.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 216 с. — ISBN 978-5-9221-1303-8.

Учебное пособие содержит наиболее важные разделы гидродинамики, связанные с изучением движений идеальных и вязких жидкостей. Основная часть книги посвящена вопросам математического моделирования гидрофизических явлений в целом и в конкретных случаях. Здесь представлены основные принципы, положенные в основу гидродинамических моделей, выписаны часто используемые упрощающие предположения и соответствующие им модели, приведены примеры аналитического решения широкого круга задач в этих упрощенных постановках. Особое внимание обращается на применение методов математической физики при решении задач гидродинамики. Текст пособия содержит справочный материал по некоторым разделам высшей математики.

Книга предназначена студентам и аспирантам высших учебных заведений, обучающимся по специальности «физика», а также преподавателям соответствующих вузов.

Рецензенты:

проф. Т. Г. Елизарова (Институт математического моделирования РАН),
проф. А. Г. Свешников (МГУ им. М. В. Ломоносова, Физический факультет),
чл.-корр. РАН проф. И. А. Шишмарев (МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет
ВМиК)

© ФИЗМАТЛИТ, 2011

© М. А. Давыдова, 2011

ISBN 978-5-9221-1303-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Кинематика жидкой среды	7
§ 1.1. Гипотеза сплошности жидкой среды	7
§ 1.2. Переменные Лагранжа и Эйлера	9
§ 1.3. Элементы теории поля. Поле скоростей	12
§ 1.4. Уравнение неразрывности	25
§ 1.5. Потенциальное и вихревое движения	28
§ 1.6. Основные свойства потенциального движения в односвязных областях	30
§ 1.7. Простейшие примеры потенциальных течений	35
1.7.1. Трехмерный поток перед пластиной (35). 1.7.2. Источник и сток (36).	
§ 1.8. Поле вихрей и его свойства	37
Глава 2. Динамика идеальной жидкости	40
§ 2.1. Массовые и поверхностные силы	40
§ 2.2. Общее уравнение движения жидкого объема	42
§ 2.3. Напряжения в жидкой среде. Гидродинамическое давление в идеальной жидкости	43
§ 2.4. Уравнения Эйлера	44
§ 2.5. Модели жидких идеальных сред	47
§ 2.6. Начальные и граничные условия	52
§ 2.7. Простейшие случаи движения идеальной жидкости	54
§ 2.8. Примеры решения задач	58
§ 2.9. Кинетическая энергия потенциального движения. Теорема Томсона	72
§ 2.10. Плоское потенциальное движение	74
§ 2.11. Комплексная скорость и комплексный потенциал	77
§ 2.12. Примеры плоского потенциального движения в односвязных областях	78
2.12.1. Однородный поступательный поток (78). 2.12.2. Поток вдоль двух пересекающихся стенок (79). 2.12.3. Источник (сток) (80). 2.12.4. Диполь (82).	
§ 2.13. Примеры плоского потенциального движения в многосвязных областях	84
§ 2.14. Вычеты комплексной скорости. Циркуляция и поток скорости	87
§ 2.15. Вихревые движения идеальной жидкости. Теоремы Томсона, Лагранжа, Гельмгольца	91

§ 2.16. Движение системы цилиндрических вихрей	97
§ 2.17. Примеры решения задач	103
§ 2.18. Вихревые цепочки Кармана	108
§ 2.19. Плоские задачи о движении тел в идеальной жидкости	112
§ 2.20. Движение кругового цилиндра	115
§ 2.21. Применение метода конформных отображений для решения плоских задач гидродинамики	122
Глава 3. Механика вязкой жидкости	125
§ 3.1. Понятие вязкой жидкости	125
§ 3.2. Формулы Коши–Гельмгольца. Понятие тензора скоростей деформации	127
§ 3.3. Тензор напряжений. Связь между компонентами тензоров скоростей деформации и напряжений	131
§ 3.4. Уравнения Навье–Стокса. Векторная форма уравнений движения вязкой жидкости	136
§ 3.5. Модели жидких вязких сред	140
§ 3.6. Начально-краевые задачи	143
3.6.1. Внешняя задача гидроаэродинамики (143).	
3.6.2. Внутренняя задача (143). 3.6.3. Условия на поверхности раздела (144).	
§ 3.7. Диссипация механической энергии	144
§ 3.8. Подобие течений вязкой жидкости	146
§ 3.9. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости. Стационарные задачи	148
3.9.1. Течение вязкой жидкости между двумя неподвижными параллельными стенками под действием продольного градиента давления (148). 3.9.2. Течение вязкой жидкости между двумя параллельными стенками, одна из которых движется (151). 3.9.3. Стеkanie слоя жидкости по поверхности вертикально расположенного цилиндра в поле силы тяжести (152). 3.9.4. Стеkanie слоя жидкости по наклонной плоскости (154). 3.9.5. Стационарное течение в трубах (156). 3.9.6. Стационарное течение с осевой симметрией (164).	
§ 3.10. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости. Нестационарные задачи	166
3.10.1. Слоистые нестационарные течения (166).	
3.10.2. Нестационарное течение в трубе с круговым сечением (176). 3.10.3. Нестационарные течения с осевой симметрией (179).	
§ 3.11. Приближенные решения уравнений движения вязкой жидкости в случае малых чисел Рейнольдса	184

3.11.1. Двумерное течение жидкости между плоскопараллельными пластинами при малых числах Рейнольдса (185).	
3.11.2. Медленное вращение сферы (187).	
3.11.3. Медленное вращение двух сфер вокруг общего диаметра (189).	
3.11.4. Медленное движение сферы (190).	
3.11.5. Сила сопротивления. Формула Стокса (193).	
§ 3.12. Приближенные решения уравнений движения вязкой жидкости в случае больших чисел Рейнольдса	197
3.12.1. Стационарное обтекание тонкой полубесконечной пластины (200).	
3.12.2. Стационарное обтекание плоского тонкого тела (202).	
3.12.3. Автомодельные решения (203).	
Глава 4. Дополнение	208
§ 4.1. Уравнения движения вязкой жидкости и основные дифференциальные операции в ортогональных криволинейных координатах	208
4.1.1. Цилиндрические координаты (208).	
4.1.2. Сферические координаты (209).	
§ 4.2. Некоторые формулы векторного анализа	210
4.2.1. Дифференциальные операции первого порядка (210).	
4.2.2. Дифференциальные операции второго порядка (211).	
Список литературы	212
Предметный указатель	213

Предисловие

Курс «Механика сплошных сред» является одним из фундаментальных курсов и входит в список обязательных для студентов физических факультетов университетов. За продолжительный период времени по данному разделу теоретической физики написано множество классических учебников, среди которых курсы, созданные Л. Прандтлем [1], Г. Ламбом [2] и другими. Из отечественных пособий следует выделить учебники Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [3], а также знаменитый двухтомник Н. Е. Кочина, И. А. Кибеля и Н. В. Розе [4]. Однако все они содержат материал, превосходящий по объему тот, который составляет основу многих спецкурсов.

Отличительной особенностью настоящего пособия является компактное изложение лекций по теоретической гидродинамике, совмещенное с адекватным такому изложению математическим описанием и опирающееся на иллюстративный материал с целью демонстрации применения методов математической физики в математическом моделировании гидрофизических явлений. При написании книги широко использовались навыки из других разделов высшей математики, таких как теория поля, теория функций комплексной переменной, дифференциальные уравнения. Лекции снабжены большим количеством примеров аналитического решения задач, а также содержат справочный материал по соответствующим разделам математики, что делает пособие особенно удобным в использовании.

Учебное пособие составлено в соответствии с материалами лекций по гидродинамике, которые читались автором на геофизическом отделении физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Автор глубоко благодарен рецензентам учебного пособия: проф. А. Г. Свешникову, проф. Т. Г. Елизаровой и чл.-корр. РАН проф. И. А. Шишмареву, а также проф. А. Б. Васильевой и проф. В. В. Жмуру за труд по ознакомлению с материалами лекций, конструктивные замечания и доброжелательное отношение. Отдельная благодарность выражается проф. Н. Н. Нефедову и проф. Н. К. Шелковникову за постоянное внимание к работе и поддержку в издании книги, а также сотрудникам кафедры физики моря и вод суши физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за участие в обсуждении некоторых разделов книги. Автор признателен М. В. Зеленеvu за помощь, оказанную в оформлении пособия.

КИНЕМАТИКА ЖИДКОЙ СРЕДЫ

Настоящая глава носит вводный характер и содержит основополагающие гипотезы теории сплошных жидких сред, а также некоторые способы их теоретического описания, удачный выбор которых (способов описания) определяет успех в решении той или иной задачи.

Рассматриваются основные кинематические соотношения для потенциальных и вихревых течений и их типичные свойства.

§ 1.1. Гипотеза сплошности жидкой среды

Одно из характерных свойств жидких сред — относительная подвижность частиц. В отличие от твердого тела для медленной деформации жидкости достаточны малые силы, в то время как при быстрой деформации жидкость оказывает сопротивление подобно твердому телу. Свойство жидкостей оказывать сопротивление деформациям, которое проявляется в виде внутреннего трения, называется *вязкостью*. Как только движение прекращается, исчезает и сопротивление жидкости. Другое важное свойство жидкостей — их большое сопротивление изменению объема. Однако в некоторой мере жидкости сжимаемы. Например, объем воды при увеличении давления до 1000 атм уменьшается на 5%. Заметим, что во многом поведения жидкостей и газов схожи. Поэтому, зачастую, жидкими средами называют как капельные жидкости, так и газы.

Построению описательных теорий всегда предшествует введение гипотез-аксиом — основополагающих бездоказательных утверждений, которые играют роль фундамента в теоретических построениях. В основу изучения законов движения жидких сред положены две гипотезы:

- гипотеза сплошности жидкой среды и непрерывности ее деформирования;
- гипотеза непрерывности распределения скоростей и плотностей жидких частиц.

Согласно первой гипотезе жидкость является *сплошной средой*. Понятие сплошной среды вводится через определение *жидкой частицы*, которая есть неделимый элемент сплошной среды. В качестве жидкой частицы можно выбрать малый объем жидкости, линейный размер которого l сравним с наименьшим фиксируемым размером и имеет порядок размера регистрирующего датчика. Величина l много больше размеров молекул, но много меньше размеров окружающих нас объектов. Поэтому, являясь для наблюдателя точкой, жидкая частица заключает в себе большое количество молекул и атомов. Благодаря изменению расстояния между жидкими частицами происходит изменение внешней конфигурации объема, определяемое как *деформация*, причем при своем движении жидкие частицы также деформируются. Далее будем считать, что имеет место непрерывность продвижения частиц, т. е. каждая частица не может отделяться от других частиц, не может обгонять окружающие частицы и не может отставать от них. В рамках данной гипотезы предполагается непрерывность деформирования любой части объема, вследствие чего любая замкнутая линия, состоящая из некоторых жидких частиц, во время движения остается замкнутой. Осредняя по объему l^3 физические характеристики среды, такие как плотность, температура, скорость и т. д., получаем плотность, температуру, скорость соответствующей жидкой частицы (средние величины будем называть *гидродинамическими*, подробнее см., например, [5]). Таким образом, осуществляется переход от дискретной среды к сплошной. Однако применение процедуры осреднения к описанию сплошных сред ведет к утрате хаотических движений внутри жидких частиц, а это означает, что все явления, связанные с молекулярными переносами (вязкость, диффузия и т. д.), не могут быть рассмотрены без введения дополнительных предположений.

В соответствии с гипотезой номер два, в любой момент времени между величинами плотностей и скоростей соседних жидких частиц должна существовать функциональная зависимость. Далее будем предполагать, что функции, отвечающие гидродинамическим величинам, непрерывно дифференцируемы столько раз, сколько это потребуется. Такое предположение позволит использовать математический аппарат дифференциального

исчисления и векторного анализа при исследовании характера движения в конкретной ситуации.

§ 1.2. Переменные Лагранжа и Эйлера

Следующим этапом в теоретическом исследовании физического объекта является выбор способа описания объекта и соответствующего такому способу математического оформления.

В описании жидких сред традиционно существуют два подхода.

С точки зрения *метода Лагранжа* объектом изучения являются жидкие частицы, рассматриваемые как материальные точки, сплошь заполняющие объем с жидкостью. При этом исследуется:

- как изменяются различные векторные и скалярные величины, связанные с конкретной частицей, с течением времени;
- как изменяются эти величины при переходе от одной частицы к другой.

Отнесем рассмотрение течения жидкости в произвольный момент времени к некоторой декартовой системе координат. В этой системе координат каждой жидкой частице будет отвечать тройка чисел (x_0, y_0, z_0) — координаты частицы в начальный момент времени $t = t_0$. В любой другой момент времени $t \neq t_0$ координаты частицы (x, y, z) будут функциями не только времени t , но и начального положения частицы:

$$\begin{aligned}x &= \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0), \\y &= \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0), \\z &= \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

При $t = t_0$ имеем

$$\begin{aligned}x_0 &= \varphi_1(t_0, x_0, y_0, z_0), \\y_0 &= \varphi_2(t_0, x_0, y_0, z_0), \\z_0 &= \varphi_3(t_0, x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

Вместо (x_0, y_0, z_0) можно рассматривать любые другие величины (a, b, c) , однозначно связанные с (x_0, y_0, z_0) :

$$\begin{aligned}a &= \psi_1(x_0, y_0, z_0), \\b &= \psi_2(x_0, y_0, z_0), \\c &= \psi_3(x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

Совокупность величин (t, a, b, c) называется *переменными Лагранжа*.

Введя переменные Лагранжа, можно определить значения скалярных и векторных величин, связанных с конкретной частицей. В самом деле, координаты некоторой частицы задаются соотношениями:

$$\begin{aligned}x &= f_1(t, a, b, c), \\y &= f_2(t, a, b, c), \\z &= f_3(t, a, b, c).\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

Изменение с течением времени некоторой величины в данной точке (при фиксированных значениях (a, b, c)) характеризуется частной производной. Поэтому для рассматриваемой частицы среды компоненты скорости и ускорения частицы вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{a,b,c}, & w_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\right)_{a,b,c}, \\v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)_{a,b,c}, & w_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}\right)_{a,b,c}, \\v_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial t}\right)_{a,b,c}, & w_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}\right)_{a,b,c}.\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

Для полной характеристики состояния жидкости необходимо знать давление p и плотность ρ как функции переменных Лагранжа:

$$p = p(t, a, b, c), \quad \rho = \rho(t, a, b, c).$$

Объектом изучения в случае *метода Эйлера* является не сама жидкость, а неподвижное пространство, заполненное жидкостью. При этом изучается:

- изменение различных характеристик движения в фиксированной точке пространства с течением времени;
- изменение этих характеристик при переходе к другим точкам пространства.

В данной ситуации векторные и скалярные величины, описывающие движение жидкости, зависят от переменных (t, x, y, z) , называемых *переменными Эйлера*. В частности, компоненты вектора скорости могут быть заданы как

$$\begin{aligned}v_x &= F_1(t, x, y, z), \\v_y &= F_2(t, x, y, z), \\v_z &= F_3(t, x, y, z).\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

Из соотношений (1.2.3) легко осуществляется обратный переход к переменным Лагранжа. В самом деле,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F_1(t, x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(t, x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= F_3(t, x, y, z).\end{aligned}$$

Если решение данной системы существует, то оно представимо в виде

$$\begin{aligned}x &= \Phi_1(t, C_1, C_2, C_3), \\ y &= \Phi_2(t, C_1, C_2, C_3), \\ z &= \Phi_3(t, C_1, C_2, C_3).\end{aligned}$$

Константы C_1, C_2, C_3 могут быть найдены из начальных условий:

$$\begin{aligned}x_0 &= \Phi_1(t_0, C_1, C_2, C_3), \\ y_0 &= \Phi_2(t_0, C_1, C_2, C_3), \\ z_0 &= \Phi_3(t_0, C_1, C_2, C_3).\end{aligned}$$

Пусть некоторая величина A задана в переменных Эйлера: $A = F(t, x, y, z)$. Требуется составить производные от величины A по переменным Лагранжа. В соответствии с (1.2.1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial a} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}, \\ \frac{\partial A}{\partial b} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial b}, \\ \frac{\partial A}{\partial c} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c}, \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{(a,b,c)} + \frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{(a,b,c)} + \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{(a,b,c)} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{dt}.\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

Используя представление (1.2.2), из последней формулы в (1.2.4) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} v_x(t, a, b, c) + \frac{\partial F}{\partial y} v_y(t, a, b, c) + \frac{\partial F}{\partial z} v_z(t, a, b, c) + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{dt}.\tag{1.2.5}$$

Уравнения (1.2.1) однозначно разрешимы относительно a , b , c , так как два положения жидкого объема в моменты времени t и t_0 связаны взаимнооднозначно:

$$\begin{aligned} a &= \bar{f}_1(t, x, y, z), \\ b &= \bar{f}_2(t, x, y, z), \\ c &= \bar{f}_3(t, x, y, z). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Поэтому из формулы (1.2.5) с учетом (1.2.6) получается выражение для полной производной от величины A по времени в переменных Эйлера:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} v_x + \frac{\partial F}{\partial y} v_y + \frac{\partial F}{\partial z} v_z + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.2.7)$$

Полагая в формуле (1.2.7) поочередно $F = v_x$ или $F = v_y$ или $F = v_z$, находим выражения для проекций ускорения в переменных Эйлера:

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t}, \\ w_y &= \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t}, \\ w_z &= \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

§ 1.3. Элементы теории поля. Поле скоростей

Изучение характера течения какой-либо жидкости в переменных Эйлера приводит нас к необходимости рассмотрения физических скалярных и векторных полей, отвечающих такому движению, что позволяет успешно использовать математический аппарат векторного анализа, развитие которого в свое время было продиктовано потребностями теоретической гидродинамики. Напомним некоторые определения и теоремы векторного анализа, которые в дальнейшем окажутся полезными.

Если каждой точке пространства ставится в соответствие по известному закону некоторая скалярная величина, то говорят, что в пространстве определено *скалярное поле* (примеры: температурное поле, поле плотностей, поле давлений и т. д.).

Если каждой точке пространства ставится в соответствие по известному закону вектор, то говорят, что в пространстве определено *векторное поле* (примеры: поле скоростей, поле гравита-

ционной напряженности, поле электростатической напряженности и т. д.).

При рассмотрении течения жидкости особенно полезным является изучение векторного поля скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y, z)$.

1. Наглядное представление о мгновенной картине течения дают линии тока.

Линиями тока называются кривые, в каждой точке которых в данный момент времени вектор поля является касательным вектором.

Рассмотрим, например, *плоское поле скоростей* $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x, y)$. Из рис. 1.1 ясно, что при каждом фиксированном t

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{v_y(t, x, y)}{v_x(t, x, y)}.$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение линий тока в плоском случае:

$$\frac{dx}{v_x(t, x, y)} = \frac{dy}{v_y(t, x, y)}.$$

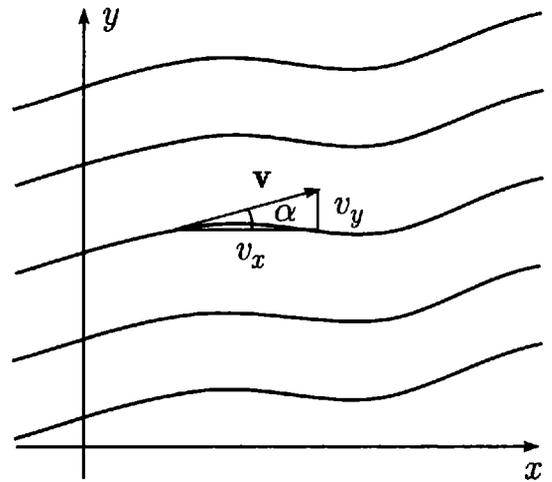


Рис. 1.1

Если функции $v_x(t, x, y)$ и $v_y(t, x, y)$ непрерывны по совокупности аргументов и не обращаются одновременно в ноль, то в данный момент времени через каждую точку плоскости проходит единственная линия тока [6]. При изменении параметра t положение линий тока изменяется.

В общем случае уравнения линий тока определяются как решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{v_x(t, x, y, z)} = \frac{dy}{v_y(t, x, y, z)} = \frac{dz}{v_z(t, x, y, z)}.$$

Если функции $v_x(t, x, y, z)$, $v_y(t, x, y, z)$ и $v_z(t, x, y, z)$ непрерывны по совокупности аргументов и не обращаются одновременно в ноль, то в данный момент времени через каждую точку пространства проходит единственная линия тока [6].

При *установившемся (стационарном)* течении линии тока совпадают с траекториями частиц и остаются неизменными с течением времени, поскольку все характеристики течения не зависят от времени. При нестационарном течении такое совпадение невозможно. В самом деле, касательные к линии тока дают направления скоростей разных частиц жидкости в последователь-

ных точках пространства в определенный момент времени, в то время как касательные к траектории дают направления скорости определенной частицы в последовательные моменты времени.

Следует иметь в виду, что форма траекторий движения частиц зависит от выбора системы координат. Например, при равномерном и прямолинейном движении тела в жидкости для наблюдателя, покоящегося относительно невозмущенной жидкости, картина течения будет иная, чем для наблюдателя, движущегося вместе с телом.

Если провести линии тока через все точки какого-нибудь замкнутого контура, не совпадающего ни с одной линией тока, то в случае непрерывного поля скоростей линии тока образуют поверхность, называемую *трубкой тока*. Жидкость внутри трубки тока в рассматриваемый момент времени ведет себя как в канале с твердыми стенками. Действительно, если бы жидкость проходила через стенки трубки тока, то это означало бы существование составляющей скорости, перпендикулярной к линиям тока, что противоречит определению линии тока. При стационарном течении трубки тока сохраняют свою форму и положение в пространстве с течением времени, и жидкость в них течет как в трубках с твердыми стенками.

2. Пусть задано некоторое скалярное поле $U(\mathbf{r}, t)$. *Градиентом скалярного поля $U(\mathbf{r}, t)$* называется вектор, определяемый в каждой точке пространства в каждый момент времени соотношением (здесь t выступает в роли параметра)

$$\text{grad } U = \mathbf{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Если формально ввести вектор $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, где \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z — координатные орты, то $\text{grad } U = \nabla U$.

Вектор $\text{grad } U$ в данной точке в данный момент времени ориентирован в направлении наибыстрейшего возрастания поля $U(\mathbf{r}, t)$. В точках, где $U(\mathbf{r}, t)$ при фиксированном t имеет максимум или минимум $\text{grad } U = 0$.

Производная поля $U(\mathbf{r}, t)$ вдоль нормали \mathbf{n} или скорость изменения поля вдоль нормали в каждый момент времени, определяется как проекция $\text{grad } U$ на направление нормали:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \mathbf{n} \text{ grad } U.$$

Аналогично вводится понятие производной скалярного поля по направлению некоторого вектора \mathbf{s} : $\partial U / \partial s = \mathbf{s} \operatorname{grad} U$.

3. Предположим, что нужно рассчитать количество жидкости, протекающее в единицу времени через поверхность S . Пусть поверхность S достаточно гладкая и ориентированна, т. е. в каждой точке поверхности определена нормаль \mathbf{n} . На рис. 1.2 видно, что объем жидкости, протекающий через элемент поверхности ds за единицу времени, равен $v_n ds$, где v_n — проекция вектора скорости на нормаль \mathbf{n} .

Тогда искомый объем выражается интегралом

$$V = \int_S v_n ds. \quad (1.3.1)$$

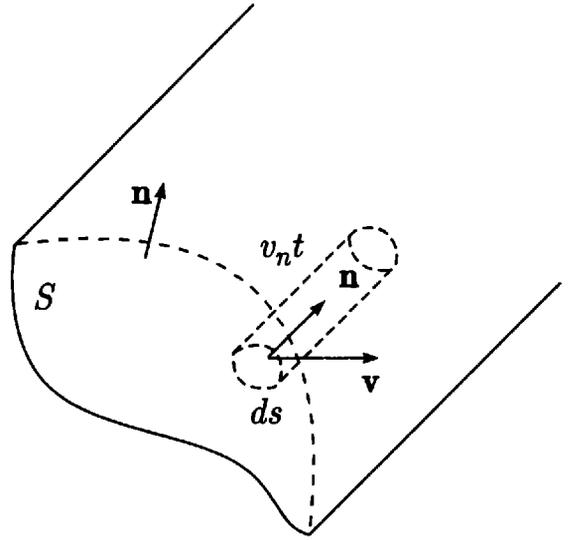


Рис. 1.2

Интеграл (1.3.1) называется *скалярным потоком поля скоростей через поверхность S* .

Пусть $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x})$, $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y})$, $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z})$ — направляющие косинусы нормали \mathbf{n} (косинусы углов между нормалью и координатными осями). Тогда

$$\begin{aligned} V &= \int_S \mathbf{v} \mathbf{n} ds = \\ &= \int_S (v_x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + v_y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + v_z \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z})) ds = \int_S \mathbf{v} ds, \end{aligned}$$

где $ds \equiv \mathbf{n} ds$.

Знак скалярного потока определяется знаком скалярного произведения $\mathbf{v} \mathbf{n}$. Если \mathbf{n} — внешняя нормаль к замкнутой поверхности S , то поток, втекающий в объем, ограниченный поверхностью S , считается отрицательным, а вытекающий из этого объема — положительным. В случае незамкнутой поверхности внешняя нормаль выбирается произвольно.

4. Поток жидкости через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V , определяется как

$$\oint_S v_n ds$$

и выражает суммарное количество жидкости, которое в единицу времени возникает и исчезает в пределах объема V . Поэтому данный поток целесообразно назвать суммарной мощностью источников (если поток больше нуля) или стоков (если поток меньше нуля) вещества, расположенных в объеме V . Тогда отношение

$$\frac{\oint_S \mathbf{v} \, ds}{V}$$

представляет собой среднюю плотность источников (или стоков), т. е. количество жидкости, возникающее (или исчезающее) в единице объема за единицу времени. Поэтому, предел

$$\lim_{V \rightarrow M} \frac{\oint_S \mathbf{v} \, ds}{V},$$

где обозначение « $\lim_{V \rightarrow M}$ » следует понимать, как стягивание области V к некоторой фиксированной точке M внутри области, означает плотность источников (стоков) вещества в точке M . Этот предел называется *дивергенцией векторного поля скоростей в точке M* и обозначается как $\operatorname{div} \mathbf{v}(M)$.

В декартовой системе координат формула для вычисления дивергенции имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Пусть пространственная область V ограничена кусочно-гладкой поверхностью S . Пусть компоненты вектора скорости $\{v_x, v_y, v_z\}$ являются непрерывными функциями вместе с производными $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ в открытом множестве, содержащем область V вместе с границей. Тогда скалярный поток поля скоростей через поверхность S определяется *формулой Остроградского–Гаусса* [7]:

$$\oint_S \mathbf{v} \, ds = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\tau,$$

где $d\tau$ — элемент объема V .

В соответствии с формулой Остроградского–Гаусса отличие от нуля дивергенции поля скоростей внутри объема V означает, что всегда найдется замкнутая поверхность, заключенная внутри объема V , суммарный поток через которую не равен нулю. Отличие же от нуля скалярного потока может быть обусловлено

как наличием реальных источников и стоков вещества внутри объема, так и сжимаемостью среды, которая имитирует присутствие источников и стоков в выделенном объеме. Поэтому, если в объеме с жидкостью $\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 0$, то жидкость является *несжимаемой* (источники и стоки вещества (реальные и фиктивные) отсутствуют).

Заметим, что выполнение равенства $\oint_S \mathbf{v} \, ds = 0$ не гарантирует

выполнение тождества $\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 0$ внутри объема V . В самом деле, пусть внутри S содержатся, например, источник и сток, чьи мощности равны по модулю. Тогда в единицу времени в пределах объема V будет выделяться и поглощаться одно и то же количество жидкости. Следовательно, $\oint_S \mathbf{v} \, ds = 0$. С другой

стороны, всегда можно найти такую замкнутую поверхность S_1 , заключенную внутри S , которая содержит в себе только источник. Значит, $\oint_{S_1} \mathbf{v} \, ds > 0$. Таким образом, в соответствии

с формулой Остроградского–Гаусса, $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$ в объеме, который ограничен поверхностью S_1 . Следовательно, неравенство имеет место внутри объема V .

Поле скоростей, для которого $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, называется *соленоидальным* или *трубчатым*. Для соленоидальных полей скоростей справедлив закон сохранения интенсивности трубки тока. Рассмотрим некоторую трубку тока, и возьмем ее отрезок, заключенный между нормальными сечениями σ_1 и σ_2 (рис. 1.3). Эти сечения вместе с боковой поверхностью σ_3 образуют замкнутую поверхность Σ . Так как поле скоростей соленоидально, то $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, и по формуле Остроградского–Гаусса

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v} \mathbf{n} \, d\Sigma = \int_{\sigma_1} \mathbf{v} \mathbf{n}_1 \, d\sigma + \int_{\sigma_2} \mathbf{v} \mathbf{n}_2 \, d\sigma + \int_{\sigma_3} \mathbf{v} \mathbf{n}_3 \, d\sigma = 0,$$

где \mathbf{n} , \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , \mathbf{n}_3 — внешние нормали к соответствующим поверхностям. Если положить $\bar{\mathbf{n}}_1 = -\mathbf{n}_1$ и учесть, что в силу определения трубки тока $\mathbf{v} \mathbf{n}_3 = 0$, то окончательно находим

$$\int_{\sigma_1} \mathbf{v} \bar{\mathbf{n}}_1 \, d\sigma = \int_{\sigma_2} \mathbf{v} \mathbf{n}_2 \, d\sigma.$$

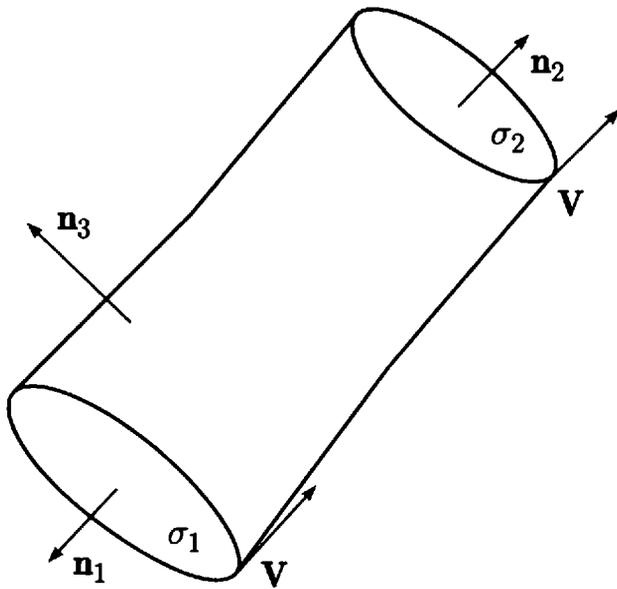


Рис. 1.3

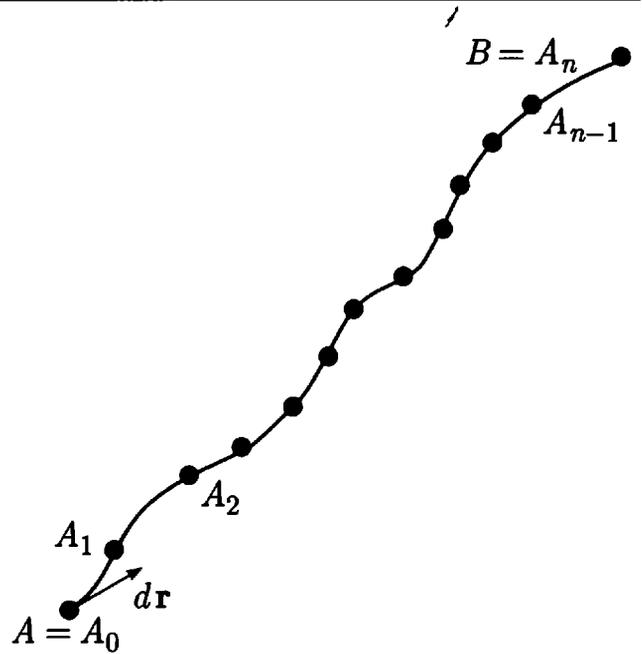


Рис. 1.4

Следовательно, количество жидкости, протекающее в единицу времени через нормальное сечение трубки тока (*интенсивность трубки тока*), одно и то же для всех нормальных сечений этой трубки.

5. Пусть задано непрерывное поле скоростей $\mathbf{v} = (\mathbf{r}, t)$ и некоторая гладкая кривая AB . Пусть $d\mathbf{r}$ — бесконечно малый вектор вдоль AB (рис. 1.4). Выполняя различные разбиения кривой AB точками A_i на n частей ($A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$), рассмотрим скалярную величину

$$\int_{AB} \mathbf{v} d\mathbf{r},$$

называемую криволинейным интегралом II-го рода [7] и определяемую как конечный предел последовательности интегральных сумм

$$S_n = \sum_{i=1}^n (v_x(i) \Delta x_i + v_y(i) \Delta y_i + v_z(i) \Delta z_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(i) \Delta \mathbf{r}$$

при стремлении длины наибольшей из дуг $A_i A_{i-1}$ к нулю. Здесь $\{v_x(i), v_y(i), v_z(i)\}$ — значение скорости внутри дуги $A_i A_{i-1}$; $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ — проекции дуги $A_i A_{i-1}$ на координатные оси. Заметим, что значение предела последовательности интегральных сумм не зависит от выбора точек $\{v_x(i), v_y(i), v_z(i)\}$.

Если $\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор вдоль кривой, а dl — бесконечно малый элемент кривой, то

$$\int_{AB} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_{AB} \mathbf{v} \boldsymbol{\tau} dl = \int_{AB} v_\tau dl,$$

где v_τ — тангенциальная составляющая вектора скорости на кривой AB .

Очевидно, что знак криволинейного интеграла II-го рода зависит от знака скалярного произведения $\mathbf{v}\boldsymbol{\tau}$, и значит, зависит от направления движения по кривой AB .

Пусть кривая AB задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$. При условии, что скорость является непрерывной функцией на AB , криволинейный интеграл II-рода сводится к определенному интегралу следующим образом [7]:

$$\int_{AB} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_{AB} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_{t_1}^{t_2} [v_x(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \varphi'(t) + v_y(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \psi'(t) + v_z(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \chi'(t)] dt.$$

Если кривая AB замкнута, то соответствующий криволинейный интеграл называется *циркуляцией скорости по замкнутому контуру*.

6. В соответствии с *формулой Стокса* [7] циркуляция скорости по замкнутому контуру выражается как

$$\oint_{AB} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_S \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz dx,$$

где S — любая поверхность, натянутая на контур AB . Если \mathbf{n} — нормаль к поверхности S , выбор которой согласован с направлением движения по AB , $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x})$, $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y})$, $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z})$ — направляющие косинусы нормали, то

$$dy dz = \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) ds = \mathbf{e}_x \mathbf{n} ds,$$

$$dz dx = \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) ds = \mathbf{e}_y \mathbf{n} ds,$$

$$dx dy = \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}) ds = \mathbf{e}_z \mathbf{n} ds.$$

Поэтому формулу Стокса можно переписать в виде

$$\oint_{AB} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_S \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x \mathbf{n} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y \mathbf{n} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \mathbf{n} \right] ds$$

и рассмотреть правую часть полученного равенства как поток через поверхность S некоторого вектора

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z = \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{v}, \end{aligned}$$

называемого *ротором (вихрем) векторного поля скоростей* и обозначаемого как $\text{rot } \mathbf{v}$.

Пусть компоненты вектора скорости $\{v_x, v_y, v_z\}$ являются непрерывными функциями вместе со своими первыми частными производными внутри некоторой пространственной области V . Тогда циркуляция скорости по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру AB , расположенному внутри V , равна потоку вихря скорости сквозь любую кусочно-гладкую поверхность S , натянутую на контур AB и целиком лежащую в области V [7]:

$$\oint_{AB} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \, \text{rot } \mathbf{v} \, ds.$$

В дальнейшем это преобразование контурного интеграла в поверхностный будем называть *формулой Стокса*.

Направления нормали \mathbf{n} и обхода контура AB должны быть согласованы в соответствии с правилом правого винта в прямоугольной системе координат.

Поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ называется *потенциальным (консервативным)*, если оно представимо в виде градиента некоторого скалярного поля $\varphi(\mathbf{r}, t)$, т. е. если $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t)$, где функцию $\varphi(\mathbf{r}, t)$ принято называть *потенциалом скорости*. Для консервативности поля необходимо и достаточно, чтобы $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ (*критерий консервативности векторного поля*) [7].

Наглядная физическая интерпретация вихря скорости будет дана ниже при рассмотрении формул Коши–Гельмгольца (см. § 3.2).

7. В заключение этого параграфа рассмотрим примеры решения задач.

7.1. Найти величину и направление $\text{grad } U$ в точке $M(2; -2; 1)$, если $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Используя определение градиента скалярного поля, находим

$$\text{grad } U = 2x \mathbf{e}_x + 2y \mathbf{e}_y + 2z \mathbf{e}_z.$$

Следовательно,

$$\text{grad } U(M) = 4\mathbf{e}_x - 4\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z.$$

Определим абсолютную величину градиента в точке M :

$$\begin{aligned} |\text{grad } U(M)| &= \sqrt{\left(\frac{\partial U(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(M)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(M)}{\partial z}\right)^2} = \\ &= \sqrt{46 + 16 + 4} = 6. \end{aligned}$$

Направляющие косинусы градиента ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$) в точке M (косинусы углов между градиентом и координатными осями в точке M) вычисляются как

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\partial U(M)/\partial x}{|\text{grad } U(M)|} = \frac{4}{6}, \\ \cos \beta &= \frac{\partial U(M)/\partial y}{|\text{grad } U(M)|} = -\frac{4}{6}, \\ \cos \gamma &= \frac{\partial U(M)/\partial z}{|\text{grad } U(M)|} = \frac{2}{6}. \end{aligned}$$

7.2. Найти угол между $\text{grad } U$ и $\text{grad } V$ в точке $M(1; 0; -1)$, если $U = x^2 - y^2$, $V = (x/z) + y^3$.

Используя определение градиента, находим

$$\text{grad } U = 2x\mathbf{e}_x - 2y\mathbf{e}_y, \quad \text{grad } V = \frac{1}{z}\mathbf{e}_x + 3y^2\mathbf{e}_y - \frac{x}{z^2}\mathbf{e}_z.$$

Поэтому

$$\text{grad } U(M) = 2\mathbf{e}_x, \quad \text{grad } V(M) = -\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z.$$

Далее, в соответствии с определением угла между двумя векторами, а также принимая во внимание известные формулы для скалярного произведения двух векторов в декартовых координатах [8] и определение градиента, получаем косинус искомого угла α :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\frac{\partial U(M)}{\partial x} \cdot \frac{\partial V(M)}{\partial x} + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \cdot \frac{\partial V(M)}{\partial y} + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \cdot \frac{\partial V(M)}{\partial z}}{|\text{grad } U(M)| \cdot |\text{grad } V(M)|} = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{4}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}.$$

7.3. Найти производную скалярного поля $U = 4x^3 - 3y^3$ в точке $M_0(1; 1; 0)$ по направлению, идущему к точке $M(4; 5; 0)$.

Производная $\partial U / \partial s$ по направлению вектора $\mathbf{s} = \overline{M_0M} = 3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y$ в точке M_0 определяется как проекция $\text{grad } U(M_0)$ на направление вектора $\overline{M_0M}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(M_0)}{\partial s} &= |\text{grad } U(M_0)| \cos(\text{grad } U(M_0), \overline{M_0M}) = \\ &= \frac{|\text{grad } U(M_0)| \left(3 \frac{\partial U(M_0)}{\partial x} + 4 \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} \right)}{|\text{grad } U(M_0)| \cdot |\overline{M_0M}|} = \frac{3 \frac{\partial U(M_0)}{\partial x} + 4 \frac{\partial U(M_0)}{\partial y}}{|\overline{M_0M}|} = \\ &= \frac{3 \cdot 12 - 4 \cdot 9}{5} = 0. \end{aligned}$$

7.4. Найти $\text{div } \mathbf{a}$ для центрально симметричного векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{f(r)}{r} \mathbf{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Компоненты вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ имеют вид:

$$a_x = \frac{x}{r} f(r), \quad a_y = \frac{y}{r} f(r), \quad a_z = \frac{z}{r} f(r).$$

С учетом этого находим

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \\ &= \frac{3f(r)}{r} + \frac{x f'_x(r)}{r} - \frac{x^2 f(r)}{r^3} + \frac{y f'_y(r)}{r} - \frac{y^2 f(r)}{r^3} + \frac{z f'_z(r)}{r} - \frac{z^2 f(r)}{r^3} = \\ &= \frac{3f(r)}{r} + \frac{1}{r} \left(x f'_x(r) + y f'_y(r) + z f'_z(r) \right) - \frac{f(r)}{r} = \\ &= \frac{2f(r)}{r} + \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \frac{2f(r)}{r} + f'(r). \end{aligned}$$

Примеры физических центрально симметричных полей хорошо известны. К ним относятся, например, поле гравитационной напряженности \mathbf{g} материальной точки с массой M , находящейся

в начале координат,

$$\mathbf{g} = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r}, \quad G = \text{const},$$

или поле электростатической напряженности \mathbf{E} точечного заряда q , помещенного в среду с диэлектрической проницаемостью ϵ ,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^3} \mathbf{r}, \quad \epsilon_0 = \text{const}.$$

Отличие от нуля дивергенции центрально симметричного поля свидетельствует о том, что всегда существует источник такого поля. В первом случае — это материальная точка, во втором — заряд.

7.5. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = x^3 \mathbf{e}_x + y^3 \mathbf{e}_y + z^3 \mathbf{e}_z$ через полную поверхность конуса: $z^2 \leq \frac{H^2}{R^2} (x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq H$.

По формуле Остроградского–Гаусса

$$\oint_S \mathbf{a} \mathbf{n} ds = 3 \int_V (x^2 + y^2 + z^2) d\tau.$$

Для вычисления тройного интеграла в правой части целесообразно воспользоваться цилиндрической системой координат (r, φ, z) , $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ [7]. Учитывая связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, находим

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{a} \mathbf{n} ds &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{Hr}{R}}^H (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r dz dr d\varphi = \\ &= 6\pi \int_0^R \left(r^3 z + \frac{z^3}{3} r \right) \Big|_{\frac{Hr}{R}}^H dr = 3\pi H R^2 \left(\frac{R^2}{10} + \frac{H^2}{5} \right). \end{aligned}$$

7.6. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = (y - x) \mathbf{e}_x + (2x - y) \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ вдоль замкнутой кривой AB , состоящей из отрезков координатных осей X , Y и дуги окружности $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 0$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

По формуле Стокса

$$\oint_{AB} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a} \, ds,$$

где в качестве поверхности S удобно выбрать часть плоскости OXY , ограниченную осями OX , OY и дугой окружности. Если направление обхода контура AB считать положительным, то нормаль \mathbf{n} будет сонаправлена с ортом \mathbf{e}_z . Так как

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-x & 2x-y & z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z,$$

то

$$\oint_{AB} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \mathbf{e}_z \, ds = \int_S ds = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r \, dr \, d\varphi = \frac{9\pi}{4}.$$

7.7. Дано векторное поле $\mathbf{a} = (y+z)\mathbf{e}_x + (x+z)\mathbf{e}_y + (x+y)\mathbf{e}_z$. Доказать, что поле консервативно и найти его потенциал.

Проверим выполнение критерия потенциальности векторного поля. Для этого вычислим значение ротора:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, то поле консервативно. Следовательно, существует такая скалярная функция $\varphi(\mathbf{r})$, что $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r})$. Определим значение этой функции.

Поскольку

$$a_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y+z, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x+z, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = x+y.$$

Из первого уравнения находим

$$\varphi(x, y, z) = (y+z)x + C_1(y, z),$$

где $C_1(y, z)$ — некоторая функция y и z . Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + z = x + \frac{\partial C_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = x + y = x + \frac{\partial C_1}{\partial z}.$$

Отсюда получаем

$$C_1(y, z) = zy + C_2(z) \quad \text{и} \quad C_1(y, z) = zy + C_3(y),$$

где $C_2(z)$, $C_3(y)$ — некоторые функции. Очевидно, что $C_2(z) = C_3(y) = \text{const}$. Поэтому

$$\varphi(x, y, z) = yx + zx + zy + C_4,$$

где C_4 — произвольная константа.

§ 1.4. Уравнение неразрывности

При своем движении жидкость сплошным образом заполняет ту или иную часть пространства без потери или приобретения вещества. Математической формулировкой закона сохранения вещества, применительно к жидкой среде, является уравнение неразрывности. Поскольку в процедуре получения уравнения неразрывности не используется понятие силы, она включена в настоящую главу.

Пусть $\rho(x, y, z, t)$ — плотность жидкости. Масса M , заключенная в некотором объеме V , равна $M = \int_V \rho(x, y, z, t) d\tau$. Если

V — объем, содержащий одни и те же частицы жидкости (*жидкий объем*), то масса внутри этого объема остается постоянной.

Пусть $B(x, y, z, t)$ — некоторая гидродинамическая величина. Тогда справедлива формула [7]:

$$\frac{d}{dt} \int_V B(x, y, z, t) d\tau = \int_V \left(\frac{dB}{dt} + B \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau, \quad (1.4.1)$$

где V — жидкий объем. В соответствии с (1.4.1)

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau = 0.$$

В силу произвольности объема V и непрерывности подынтегральной функции имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.4.2)$$

Уравнение (1.4.2) называется *уравнением неразрывности*.

Пусть V — некоторый объем пространства. Тогда интеграл $\oint_S \mathbf{v} ds$, где S — поверхность, ограничивающая V , выражает суммарное количество жидкости, втекающее в объем и вытекающее из него в единицу времени. Так как жидкость несжимаема, то соответствующие потоки равны по величине и противоположны по знаку и, значит, $\oint_S \mathbf{v} ds = 0$. В силу произвольности выбранного объема из формулы Остроградского–Гаусса следует уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.4.3)$$

которое является *уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости*.

Если в несжимаемой жидкости имеются дополнительные источники массы, то поток скорости через любую замкнутую поверхность, внутри которой содержатся источники, отличен от нуля ($\oint_S \mathbf{v} ds > 0$, если вещество выделяется в объеме и $\oint_S \mathbf{v} ds < 0$, если вещество поглощается). Специальный случай, когда $\oint_S \mathbf{v} ds = 0$ (количество выделенного вещества равно количеству поглощенного) не обсуждается. Пусть $q(t, x, y, z)$ — объемная скорость выделения вещества, которая определяется как количество жидкости, выделяемое (поглощаемое) единицей объема в единицу времени. Тогда объем V в единицу времени выделяет количество жидкости, равное $\int_V q(t, x, y, z) d\tau$. Поэтому в силу произвольности V и в соответствии с формулой Остроградского–Гаусса:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = q(t, x, y, z).$$

Итак, если жидкость несжимаема и внутри объема с жидкостью нет дополнительных источников массы, то плотность в соответствии с (1.4.2) должна определяться из уравнения $d\rho/dt = 0$. Простейшим случаем, для которого выполняется это уравнение, является жидкость с постоянной плотностью (*однородная жидкость*): $\rho(t, x, y, z) = \text{const}$. Применив формулу

(1.2.7) к функции $\rho(t, x, y, z)$, получим

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial\rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial\rho}{\partial z} v_z + \frac{\partial\rho}{\partial t}. \quad (1.4.4)$$

Поэтому плотность обязана удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial\rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial\rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial\rho}{\partial z} v_z \right). \quad (1.4.5)$$

Приведем пример течения, для которого уравнение (1.4.5) выполняется автоматически. Рассмотрим медленное установившееся течение несжимаемой жидкости с примесью в поле силы тяжести между двумя бесконечными плоскопараллельными пластинками $z = 0$ и $z = a$ под действием продольного градиента давления (рис. 1.5). Ось X выберем в направлении движения потока. Очевидно, что проекция скорости v_x отлична от нуля, а $v_y = v_z = 0$. В предположении, что жидкость является вязкой, на границе должны выполняться условия:

$$v_x|_{z=0} = 0, \quad v_x|_{z=a} = 0.$$

Наличие примеси приводит к изменению плотности с изменением координаты z . Таким образом, уравнение (1.4.5) выполняется, хотя плотность является функцией z . Заметим, что распределение плотности в установившемся потоке совпадает с распределением плотности в начальный момент времени, когда жидкость покоится.

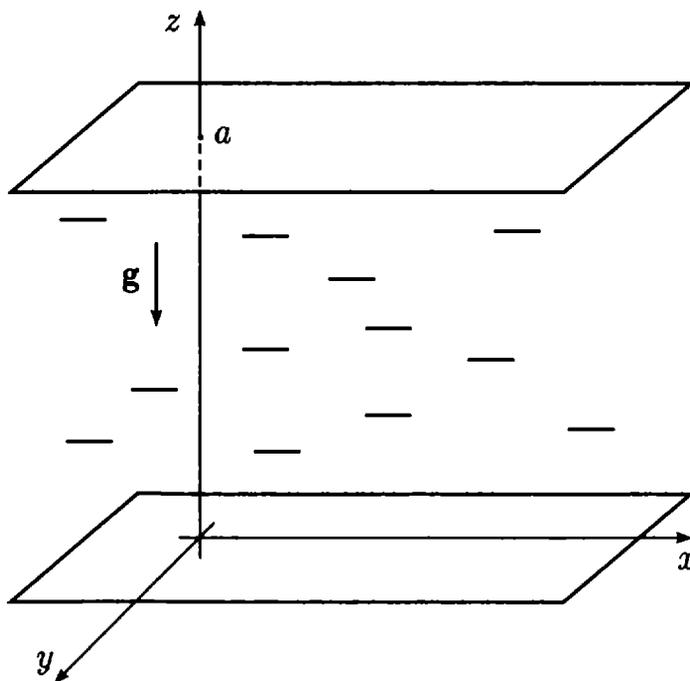


Рис. 1.5

Жидкость, в которой физические характеристики (плотность, теплоемкость, вязкость и т. д.) в стационарном состоянии изменяются в выделенном направлении, называется *стратифицированной*.

Уравнение (1.4.2) с учетом (1.4.4) можно представить как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0.$$

Отсюда следует, что для стационарного течения в силу независимости плотности от времени уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

§ 1.5. Потенциальное и вихревое движения

Согласно теореме Коши–Гельмгольца, доказательство которой будет изложено в гл. 3, мгновенная скорость движения любой точки жидкой среды в любой момент времени может быть представлена в виде векторной суммы

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

где \mathbf{v}_0 — скорость движения произвольно выбранного полюса, относительно которого рассматривается движение точки; $\mathbf{v}_1 = (1/2) \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho}$ — скорость вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через выбранный полюс ($\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор, проведенный из полюса в рассматриваемую точку), \mathbf{v}_2 — скорость чистой деформации. Таким образом, можно говорить о двух классах движений жидкости: *безвихревом* (потенциальном, консервативном) и *вихревом*.

Потенциальным движением называется движение, при котором во всем объеме с жидкостью выполняется условие $\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv 0$ (нет локального вращательного движения).

Вихревым движением называется движение, для которого условие $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ выполняется не во всем объеме.

В случае потенциального движения компоненты вектора $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ равны нулю:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \quad (1.5.1)$$

Соотношения (1.5.1) являются необходимым и достаточным условием существования потенциала скорости $\varphi(t, x, y, z)$, так что справедливо представление: $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$. Тогда

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Условия (1.5.1) также означают, что выражение

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad (1.5.2)$$

является полным дифференциалом. Следовательно, значение линейного интеграла вдоль некоторой кривой AB

$$\int_{AB} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_{AB} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_{AB} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A),$$

в случае *однозначного* потенциала, не зависит от выбора кривой AB , а зависит лишь от положения точек A и B . Тогда циркуляция вдоль любого замкнутого контура L равна нулю:

$$\oint_L \mathbf{v} d\mathbf{r} = 0. \quad (1.5.3)$$

Заметим, что формула (1.5.3) является прямым следствием формулы Стокса, так как $\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0$ во всей части пространства, занимаемой жидкостью.

Из формулы (1.5.3) следует, что *линии тока консервативного поля скоростей не могут быть замкнутыми*. Для доказательства этого факта предположим обратное и в (1.5.3) в качестве контура интегрирования выберем линию тока. При любых разбиениях линии тока соответствующие интегральные суммы $\sum_i \mathbf{v}(i) \Delta \mathbf{r}$ будут содержать слагаемые одного знака (только положительные, если направление обхода контура совпадает с направлением вектора скорости или только отрицательные, если это не так). Поэтому и линейный интеграл вдоль линии тока будет либо положительным, либо отрицательным, но не будет равен нулю. Полученное противоречие является результатом неверной предпосылки.

В случае консервативного поля скоростей ускорение определяется в соответствии с формулами (1.2.8):

$$\begin{aligned}
 w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} = \\
 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}.
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$w_y = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}, \quad w_z = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}.$$

Таким образом, при потенциальном течении вектор ускорения является потенциальным:

$$\mathbf{w} = \text{grad} \left\{ \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}.$$

§ 1.6. Основные свойства потенциального движения в односвязных областях

Односвязной областью называется область, всякую замкнутую линию внутри которой можно стянуть в точку, не пересекая границы области.

Рассмотрим основные свойства безвихревого движения несжимаемой жидкости внутри такой области. Поскольку для потенциальных движений $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, то уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div grad } \varphi = 0,$$

или

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \Delta \varphi = 0.$$

Если жидкость несжимаема, то $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ и функция $\varphi(t, x, y, z)$ называется *гармонической* по пространственным переменным.

Перечислим основные свойства гармонических функций и следствия из этих свойств.

1. *Принцип максимума* [9]. Гармоническая в области D функция $\varphi(M)$, непрерывная в замкнутой области \bar{D} , достигает своих максимального и минимального значений на границе области.

Опираясь на принцип максимума, можно доказать следующее утверждение: *при потенциальном движении несжимаемой жидкости в односвязной области D скорость не может*

принимать максимальное значение внутри D . Заметим, что относительно минимального значения такое утверждение сформулировать нельзя.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что во внутренней точке A скорость достигает максимального значения. Направим в точке A ось Ox вдоль скорости в этой точке в данный момент времени. Тогда

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_A = v_A = v_{\max}.$$

Так как движение потенциально, то

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

во всех точках D .

Продифференцировав это равенство по x , приходим к выводу, что функция $\partial\varphi/\partial x$ также является гармонической. По принципу максимума $\partial\varphi/\partial x$ не может достигать максимального значения в точке A . Следовательно, существует точка B из окрестности точки A , для которой имеет место неравенство

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_B > \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_A = v_A.$$

Очевидно, что

$$v_B^2 = \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right]_B > v_A^2.$$

Полученное противоречие говорит о ложной предпосылке.

2. Теорема о среднем [9]. Пусть $\varphi(M)$ — гармоническая в области D функция. Тогда

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_S \varphi(M) ds,$$

где S — сфера радиуса a с центром в точке M_0 , целиком лежащая в области D , $M_0 \in D$.

Из теоремы о среднем следует утверждение: при потенциальном течении несжимаемой жидкости значение потенциала в точке M_0 равно среднему значению потенциала на поверхности любой сферы с центром в точке M_0 , принадлежащей области D .

Аналогичное утверждение имеет место для вектора скорости в точке M_0 , так как компоненты вектора скорости $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ являются гармоническими функциями. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(M_0, t) &= \mathbf{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0, t) + \mathbf{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0, t) + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}(M_0, t) = \\
 &= \frac{1}{S_0} \oint_S \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P, t) + \mathbf{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P, t) + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P, t) \right) ds = \\
 &= \frac{1}{S_0} \oint_S \mathbf{v}(P, t) ds,
 \end{aligned}$$

где $P \in S$, S_0 — площадь сферы S с центром в точке M .

3. Для любой кусочно-гладкой замкнутой поверхности $S \in D$ при условии, что $\varphi(M)$ — гармоническая в D , имеет место равенство

$$\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0,$$

где \mathbf{n} — нормаль к S .

Для доказательства этого утверждения рассмотрим интеграл

$$\oint_S \mathbf{v} ds = \oint_S \mathbf{v} \mathbf{n} ds = \oint_S \mathbf{n} \operatorname{grad} \varphi ds = \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds.$$

С другой стороны, по формуле Остроградского–Гаусса

$$\oint_S \mathbf{v} ds = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau = \int_V \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) d\tau = \int_V \Delta \varphi d\tau = 0,$$

где V — объем, ограниченный поверхностью S .

4. В рамках лекций рассматриваются течения, характеризующиеся непрерывными полями скоростей. Поскольку в случае потенциального движения $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$, то требование непрерывности скорости налагает определенные ограничения на гладкость функции φ . В связи с этим возникает необходимость изучения существования именно классических решений краевых задач, определяющих потенциал течения.

Классическим решением внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в } D, \quad \varphi|_{\partial D} = f(P), \quad P \in \partial D,$$

называется функция $\varphi(M)$, непрерывная в области $\bar{D} = D \cup \partial D$, где ∂D — граница D , удовлетворяющая уравнению Лапласа в области D и непрерывно примыкающая к граничному условию $f(P)$: $\lim_{M \rightarrow P} \varphi(M) = f(P)$.

Задача Дирихле не может иметь более одного классического решения (теорема единственности) [9].

Из теоремы единственности следует утверждение: *если потенциал сохраняет постоянное значение на границе области D , то он остается постоянным во всех внутренних точках области.*

В самом деле, если потенциал имеет на границе постоянное значение C , то он удовлетворяет в D задаче Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } D, \quad \varphi|_{\partial D} = C, \quad P \in \partial D,$$

которая имеет классическое решение $\varphi = C$, являющееся единственным в силу теоремы единственности.

Заметим, что доказанное утверждение также следует из принципа максимума.

5. *В односвязном объеме с несжимаемой жидкостью, который ограничен непроницаемыми твердыми стенками, не может существовать потенциальное движение.*

Допустим, что жидкость способна совершать потенциальное движение при поставленных условиях на границе. Найдем потенциал, отвечающий такому движению.

Очевидно, что на границе ∂D объема с жидкостью выполняется условие равенства нулю нормальной компоненты скорости:

$$v_n|_{\partial D} = 0.$$

Значит,

$$v_n|_{\partial D} = \mathbf{v}\mathbf{n}|_{\partial D} = \mathbf{n} \operatorname{grad} \varphi|_{\partial D} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0,$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль по отношению к D . Следовательно, потенциал в области D удовлетворяет однородной краевой задаче Неймана для оператора Лапласа.

Классическим решением второй краевой задачи для уравнения Лапласа называется функция, непрерывная с первыми производными в области \bar{D} , имеющая непрерывные вторые производные в D , удовлетворяющая уравнению Лапласа в D и заданному граничному условию.

Классическим решением однородной краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } D, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0$$

является функция $\varphi(M) = C$, причем постоянная C произвольна. Отсюда приходим к выводу, что жидкость в D покоится.

6. Если односвязный объем с несжимаемой жидкостью ограничен неподвижной стенкой, причем на одной части границы потенциал имеет постоянное значение, а другая часть границы непроницаема, то внутри объема не может существовать безвихревое движение.

Пусть жидкость в области D совершает потенциальное движение. Тогда потенциал будет удовлетворять краевой задаче:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } D, \quad (1.6.1)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\partial D_1} = 0, \quad \varphi|_{\partial D_2} = C, \quad \partial D_1 \cup \partial D_2 = \partial D. \quad (1.6.2)$$

Определение классического решения задачи (1.6.1), (1.6.2) совпадает с определением классического решения второй краевой задачи. Очевидно, что задача (1.6.1), (1.6.2) имеет классическое решение $\varphi = C$. Докажем его единственность.

Пусть существует еще одно классическое решение $\varphi = \varphi_0 \neq C$ задачи (1.6.1), (1.6.2). Тогда функция $\bar{\varphi} = \varphi_0 - C$ удовлетворяет однородной задаче:

$$\Delta\bar{\varphi} = 0 \text{ в } D, \quad (1.6.3)$$

$$\left. \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n} \right|_{\partial D_1} = 0, \quad \bar{\varphi}|_{\partial D_2} = 0, \quad \partial D_1 \cup \partial D_2 = \partial D. \quad (1.6.4)$$

Полагая в первой формуле Грина [9]:

$$\int_D v \Delta u \, d\tau = \oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \int_D \nabla u \nabla v \, d\tau$$

$u = v = \bar{\varphi}$, получим

$$\int_D \bar{\varphi} \Delta \bar{\varphi} \, d\tau = \oint_{\partial D} \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \, ds - \int_D (\nabla \bar{\varphi})^2 \, d\tau \quad (1.6.5)$$

или

$$\int_D \bar{\varphi} \Delta \bar{\varphi} \, d\tau = \int_{\partial D_1} \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \, ds + \int_{\partial D_2} \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \, ds - \int_D (\nabla \bar{\varphi})^2 \, d\tau.$$

В силу уравнения (1.6.3) и граничных условий (1.6.4) имеем

$$\int_D (\nabla \bar{\varphi})^2 \, d\tau = 0.$$

Отсюда находим, что $\text{grad } \bar{\varphi} = 0$ в D . Следовательно, $\bar{\varphi} \equiv 0$ в \bar{D} , что и требовалось доказать.

Итак, задача (1.6.1), (1.6.2) имеет единственное классическое решение $\varphi = C$. Такой потенциал описывает покоящуюся жидкость.

§ 1.7. Простейшие примеры потенциальных течений

1.7.1. Трехмерный поток перед пластиной. Рассмотрим течение, которое описывается потенциалом

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2} (ax^2 + by^2 + cz^2). \quad (1.7.1)$$

Так как потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, то

$$a + b + c = 0.$$

Пусть $b = a$, $c = -2a$. Тогда

$$\varphi(x, y, z) = \frac{a}{2} (x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Компоненты скорости определяются как

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = ax, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = ay, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2az.$$

Для точек плоскости $x = 0$ скорость имеет две отличные от нуля компоненты: v_z и v_y . Поэтому уравнения линий тока, лежащих в этой плоскости, определяются как решения дифференциального уравнения

$$v_z(x, y, z) dy - v_y(x, y, z) dz = 0. \quad (1.7.2)$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2dy}{y}, \quad y \neq 0, \quad z \neq 0,$$

или

$$\ln |z| + 2 \ln |y| = C_1,$$

где C_1 — произвольная константа.

Следовательно, семейство линий тока в плоскости $x = 0$ имеет вид

$$zy^2 = C_2. \quad (1.7.3)$$

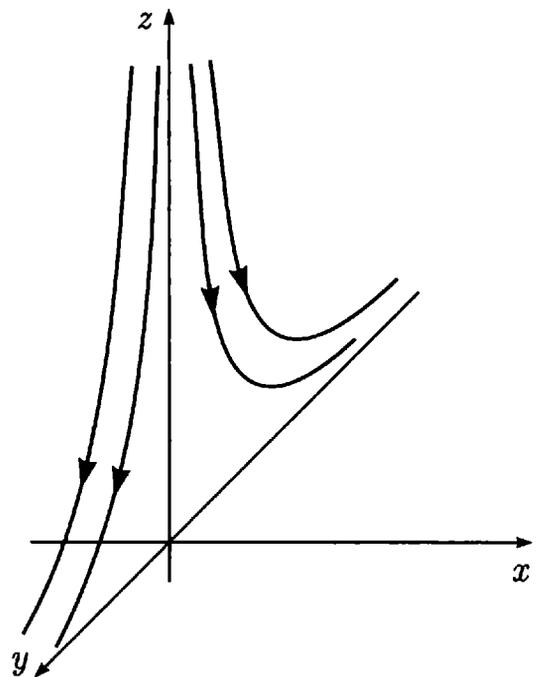


Рис. 1.6

При $C_2 = 0$ получаем функции $z = 0$ или $y = 0$, которые, очевидно, являются решениями уравнения (1.7.2). Поэтому постоянная

величина C_2 в (1.7.3) может принимать любые значения, в том числе и нулевые. Семейство гипербол (1.7.3) схематически изображено на рис. 1.6.

Аналогично можно описать линии тока в плоскости $y = 0$. Таким образом, потенциал скорости (1.7.1) описывает трехмерный симметричный относительно оси Z поток перед бесконечной пластиной.

1.7.2. Источник и сток. Функция

$$\varphi(x, y, z) = \pm \frac{c}{r}, \quad c > 0,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ означает расстояние от начала координат до рассматриваемой точки, удовлетворяет уравнению Лапласа, а потому определяет потенциальное течение.

В каждой точке изопотенциальной поверхности $\varphi = \text{const}$ вектор $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ направлен вдоль нормали к поверхности. Так как поверхностями равного потенциала являются сферы с центром в начале координат, то линии тока представляют собой лучи, выходящие из начала координат. Тогда если \mathbf{e}_r — единичный орт, направленный вдоль радиуса, то проекция скорости на это направление равна

$$v_r = (\mathbf{e}_r, \text{grad } \varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \mp \frac{c}{r^2}.$$

Поток, определяемый потенциалом $\varphi = -c/r$, называется *источником*, а поток, определяемый потенциалом $\varphi = c/r$ — *стоком*. В случае источника вектор скорости в каждой точке направлен от начала координат, в случае стока — к началу координат.

Количество жидкости Q , протекающее в единицу времени через сферу радиуса r , называется мощностью источника (стока):

$$Q = \int_{S_r} v_r ds = \pm c \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = \pm 4\pi c. \quad (1.7.4)$$

Физически реализовать сток можно следующим образом: подвести узкую трубочку к предполагаемому месту нахождения стока и отсасывать через нее жидкость.

Источники и стоки, как правило, играют вспомогательную роль при решении различных гидродинамических задач. Например, рассмотрим движение сигарообразного тела в направлении своей продольной оси (рис. 1.7).

При таком движении передний конец тела вытесняет перед собой жидкость, к заднему же концу жидкость притекает. Следовательно, около концов тела возникает такое течение жидкости, как если бы около переднего конца был источник, а около заднего конца — сток. Потенциал скорости

$$\varphi(x, y, z) = c \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

являющийся суперпозицией потенциалов, отвечающих источнику и стоку, описывает соответствующее течение жидкости. Если тело перемещается со скоростью V и площадь поперечного сечения тела равна S , то количество вытесняемой телом и вновь притекающей к телу в единицу времени жидкости равно $Q = SV$. Подставляя это значение в (1.7.4), получаем

$$c = \frac{SV}{4\pi}.$$

Заметим, что такое движение жидкости не является установившимся, так как вместе с телом перемещается и система линий тока.

§ 1.8. Поле вихрей и его свойства

Состояние жидкости называется *вихревым*, если существуют области жидкости в которых $\Omega \equiv \text{rot } \mathbf{v} \neq 0$.

Допустим, что точки, в которых $\Omega \neq 0$, сплошным образом заполняют некоторый объем. Тогда в этом объеме определено векторное поле вихрей Ω . Так как $\Omega = \text{rot } \mathbf{v}$, то $\text{div } \Omega = 0$ и поле вихрей является соленоидальным, подобно полю скоростей несжимаемой жидкости. Следовательно, согласно формуле Остроградского–Гаусса, поток вихря через любую кусочно-гладкую замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint_S \Omega ds = 0. \quad (1.8.1)$$

Рассмотрим аналог линий тока — *вихревые линии* — кривые, в каждой точке которых в данный момент времени вектор Ω

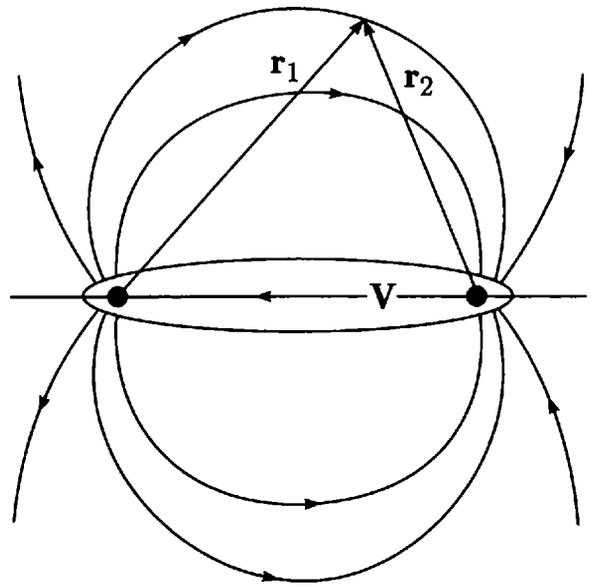


Рис. 1.7

является касательным вектором. Дифференциальные уравнения вихревых линий имеют вид:

$$\frac{dx}{\Omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\Omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\Omega_z(x, y, z, t)}.$$

Аналогом трубки тока является *вихревая трубка*. Выделим в жидкости некоторый замкнутый контур, состоящий из точек, принадлежащих разным вихревым линиям, и рассмотрим все вихревые линии, проходящие через точки этого контура в данный момент времени. Они образуют поверхность, называемую *вихревой трубкой*. Жидкость, заключенная внутри бесконечно тонкой вихревой трубки, называется *вихревой нитью*.

Интеграл $\int_{\Sigma} \Omega \mathbf{n} d\sigma$, где Σ — площадь нормального сечения вихревой трубки, называется *интенсивностью вихревой трубки*.

Для поля вихрей, как для соленоидального поля, справедлив закон сохранения интенсивности вихревой трубки, согласно которому вдоль вихревой трубки интенсивность постоянна (см. § 1.3).

Разобьем все поле вихрей на вихревые трубки одинаковой интенсивности. Согласно (1.8.1) в любом замкнутом объеме с жидкостью число входящих вихревых трубок равно числу выходящих. Поэтому вихревые линии не могут начинаться или обрываться внутри жидкости. Они могут начинаться или заканчиваться на границе объема с жидкостью или же являться замкнутыми.

Докажем еще одно утверждение, которое в дальнейшем окажется полезным.

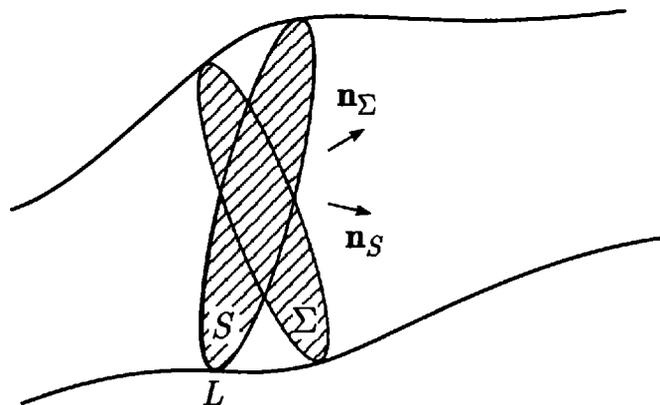


Рис. 1.8

Циркуляция скорости по любому контуру, лежащему на поверхности вихревой трубки, равна интенсивности вихревой трубки.

Сначала докажем это утверждение для тонкой вихревой трубки. Пусть произвольное наклонное сечение S тонкой трубки ограничено контуром L (рис. 1.8).

С одной стороны, используя формулу Стокса, имеем

$$\oint_L \mathbf{v} d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\Omega} \mathbf{n}_S ds = \Omega \cos(\widehat{\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{n}_S}) S = \Omega \cos(\widehat{\mathbf{n}_\Sigma, \mathbf{n}_S}) S = \Omega \Sigma.$$

Здесь \mathbf{n}_S — единичная нормаль к сечению S ; \mathbf{n}_Σ — единичная нормаль к нормальному сечению Σ , проходящему через эту же точку.

Заметим, что в силу соленоидальности поля вихрей интенсивность $\Omega \Sigma$ постоянна вдоль вихревой трубки.

Рассмотрим теперь произвольную вихревую трубку с наклонным сечением S , ограниченным контуром L . Выполним разбиение сечения S на n частей: $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$. Если L_i — кусочно-гладкие контуры, ограничивающие S_i , то

$$\oint_{L_1} \mathbf{v} d\mathbf{l} + \oint_{L_2} \mathbf{v} d\mathbf{l} + \dots + \oint_{L_n} \mathbf{v} d\mathbf{l} = \Omega_1 \Sigma_1 + \Omega_2 \Sigma_2 + \dots + \Omega_n \Sigma_n,$$

где $\Omega_i \Sigma_i$ — интенсивность i -й тонкой вихревой трубки, проходящей через контур L_i . С другой стороны,

$$\oint_{L_1} \mathbf{v} d\mathbf{l} + \oint_{L_2} \mathbf{v} d\mathbf{l} + \dots + \oint_{L_n} \mathbf{v} d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{v} d\mathbf{l},$$

так как некоторые участки контуров L_i обходятся дважды в противоположных направлениях. Следовательно,

$$\oint_L \mathbf{v} d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \Omega_i \Sigma_i,$$

где $\sum_{i=1}^n \Omega_i \Sigma_i$ — интенсивность вихревой трубки.

ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Несмотря на то, что все реальные жидкости обладают вязкостью, изучение законов движения идеальных сред все еще представляется актуальным. Связано это с тем, что приближение идеальной жидкости для ряда практически интересных задач является вполне удовлетворительным. Например, приближение идеальной жидкости применяется в океанологии при рассмотрении малых колебаний в океане с целью описания волн различного типа [10], при изучении распространения звуковых волн в стратифицированном океане с использованием волнового уравнения, получающегося путем линеаризации уравнений гидродинамики идеальной жидкости [10], для исследования крупномасштабных и мезомасштабных течений во внутренней области океана, когда в уравнениях движения учитываются только кориолисов член и горизонтальный градиент давления, ролью же вязкости пренебрегается [11] и т. д.

В настоящей главе получены основные уравнения движения идеальной жидкости. При этом внимание акцентируется на постановочной четкости начально-краевых задач, моделирующих процессы в идеальных средах.

Хорошо изученным классом течений являются плоские потенциальные течения, рассмотрению которых отводится значительная часть главы.

§ 2.1. Массовые и поверхностные силы

Состояние движения жидкой среды изменяется под влиянием взаимодействия частиц друг с другом и с телами, внешними по отношению к рассматриваемому объему с жидкостью. В результате такого взаимодействия возникают силы, которые

делят на два основных типа: *массовые* и *поверхностные*. Силы, распределенные по объему и пропорциональные массам частиц, называются *массовыми*. Массовые силы, возникающие при взаимодействии частиц объема друг с другом (например, силы притяжения) являются внутренними, в то время как внешними считаются массовые силы взаимодействия элементов жидкого объема с внешними телами, действующие на каждый элемент объема независимо от того, существуют ли рядом другие элементы (например сила тяжести, силы инерции и другие). Рассмотрим движение произвольного жидкого объема V , выделенного внутри жидкости и ограниченного поверхностью S (рис. 2.1). Если $\mathbf{F} = \{X, Y, Z\}$ — вектор внешней массовой силы, отнесенный к единице массы, то на элемент объема $d\tau$ действует сила $\mathbf{F}\rho d\tau$, где ρ — плотность жидкости. Следовательно, массовая сила, действующая на объем V , равна

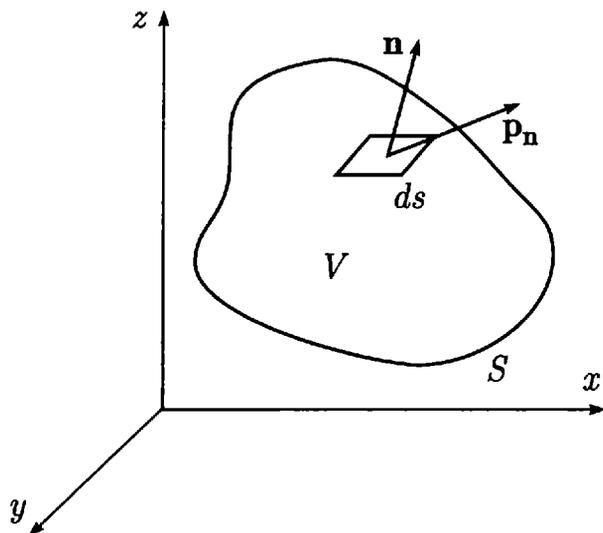


Рис. 2.1

Если $\mathbf{F} = \{X, Y, Z\}$ — вектор внешней массовой силы, отнесенный к единице массы, то на элемент объема $d\tau$ действует сила $\mathbf{F}\rho d\tau$, где ρ — плотность жидкости. Следовательно, массовая сила, действующая на объем V , равна

$$\int_V \mathbf{F}\rho d\tau = \left\{ \int_V X\rho d\tau, \int_V Y\rho d\tau, \int_V Z\rho d\tau \right\}.$$

Поверхностные силы, в отличие от массовых, распределены по поверхности. Силы взаимодействия частиц рассматриваемого объема с окружающей средой, приложенные к поверхности раздела или действующие со стороны твердых границ, называются *внешними*. К ним относятся силы взаимодействия жидкости со стенками сосуда, воздуха с крылом и так далее. Силы, с которыми взаимодействуют частицы внутри рассматриваемого объема через разделяющие их воображаемые поверхности, являются *внутренними*. Пусть ds — элемент поверхности S , \mathbf{n} — нормаль к S , внешняя по отношению к объему V (рис. 2.1). Вектор поверхностных сил \mathbf{p}_n , отнесенный к единице площади, называется *напряжением*. В общем случае \mathbf{p}_n зависит от положения и ориентации сечения в пространстве и от времени. Поскольку ds — элемент двухсторонней поверхности, то к ds можно задать две нормали: \mathbf{n} и $-\mathbf{n}$. Выясним, как связаны напряжения, действующие в сечениях с нормальями \mathbf{n} и $-\mathbf{n}$. Со стороны внешних,

по отношению к объему V , частиц к внешней стороне элемента ds будет приложена поверхностная сила $\mathbf{p}_n ds$. Со стороны частиц объема к внутренней стороне этого же элемента поверхности приложена сила $\mathbf{p}_{-n} ds$. В силу закона равенства действия и противодействия, имеем

$$\mathbf{p}_{-n} = -\mathbf{p}_n. \quad (2.1.1)$$

Если угол между нормалью \mathbf{n} к поверхности и напряжением \mathbf{p}_n острый, то нормальная составляющая вектора \mathbf{p}_n называется *нормальным напряжением*; если угол — тупой, то нормальная составляющая называется *давлением*. Проекция \mathbf{p}_n на касательную к поверхности плоскость называется *касательным напряжением* или *силой внутреннего трения (силой вязкости)*.

§ 2.2. Общее уравнение движения жидкого объема

Согласно второму закону Ньютона, равнодействующая сила \mathbf{F} , действующая на ускоренно движущуюся материальную точку массы m , пропорциональна ускорению \mathbf{a} .

Этот закон можно переписать в виде уравнения статики

$$\mathbf{F} + \mathbf{I}_d = 0,$$

где $\mathbf{I}_d = -m\mathbf{a}$ — *даламберова сила инерции*, которую следует интерпретировать как сопротивление, оказываемое инертной массой, изменению своего движения, т. е. ускорению, вызванному другим объектом. Таким образом, в каждый момент движения материальной точки все силы, приложенные к ней, взаимно уравновешиваются. В этом состоит *принцип Даламбера*, который справедлив и для материальных систем.

Применим принцип Даламбера к жидкому объему V , выделенному внутри движущейся жидкости и ограниченному поверхностью S :

$$\int_V \mathbf{F} \rho d\tau + \oint_S \mathbf{p}_n ds - \int_V \mathbf{w} \rho d\tau = 0,$$

где \mathbf{F} — плотность массовых сил; \mathbf{p}_n — напряжение, приложенное к внешней стороне поверхности S ; \mathbf{w} — ускорение жидкого объема единичной массы. Окончательно имеем общее уравнение движения жидкого объема:

$$\int_V (\mathbf{F} - \mathbf{w}) \rho d\tau + \oint_S \mathbf{p}_n ds = 0. \quad (2.2.1)$$

§ 2.3. Напряжения в жидкой среде.

Гидродинамическое давление в идеальной жидкости

Выделим внутри жидкости элементарный объем КАВС в форме тетраэдра с вершиной в начале координат (рис. 2.2). Нормали к граням СКА, СКВ и АКВ противоположны координатным осям.

Найдем напряжение \mathbf{p}_n , действующее на грани АВС, площадь которой равна ds . Если совокупность чисел $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ является направляющими косинусами нормали \mathbf{n} к площадке ds , то площадь треугольника АКС равна αds , площадь треугольника СКВ равна βds , площадь треугольника АКВ равна γds . Применим уравнение (2.2.1) к рассматриваемому объему $d\tau$:

$$(\mathbf{F} - \mathbf{w}) \rho d\tau + \mathbf{p}_{-x} \alpha ds + \mathbf{p}_{-y} \beta ds + \mathbf{p}_{-z} \gamma ds + \mathbf{p}_n ds = 0.$$

В силу (2.1.1)

$$\mathbf{p}_{-x} = -\mathbf{p}_x, \quad \mathbf{p}_{-y} = -\mathbf{p}_y,$$

$$\mathbf{p}_{-z} = -\mathbf{p}_z.$$

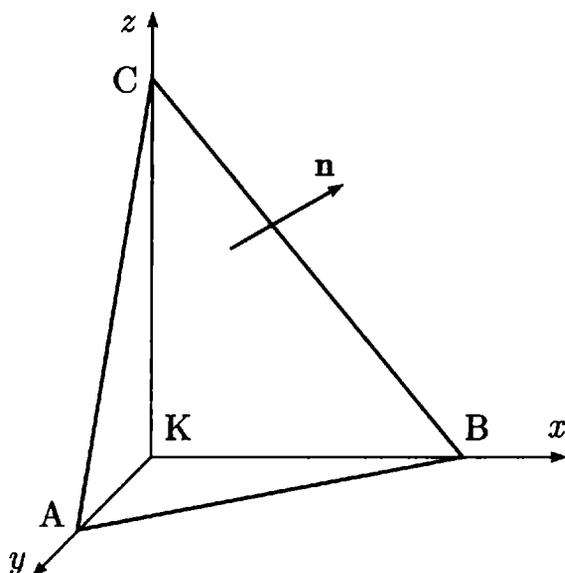


Рис. 2.2

Пусть h — высота тетраэдра, опущенная к грани АВС. Тогда $d\tau = 1/3h ds$ и значит

$$\frac{1}{3} (\mathbf{F} - \mathbf{w}) \rho h - \alpha \mathbf{p}_x - \beta \mathbf{p}_y - \gamma \mathbf{p}_z + \mathbf{p}_n = 0.$$

При $h \rightarrow 0$ имеем

$$\mathbf{p}_n = \alpha \mathbf{p}_x + \beta \mathbf{p}_y + \gamma \mathbf{p}_z. \tag{2.3.1}$$

Таким образом, если в трех сечениях, образующих трехгранный угол друг с другом, напряжения известны, то напряжения во всех других сечениях могут быть определены.

Идеальной жидкостью называется жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения, а значит, касательные составляющие напряжений равны нулю. Следовательно, в идеальной жидкости существуют только нормальные напряжения, которые при деформации жидкости предотвращают ее разрыв. Поэтому нормальные напряжения всегда направлены вглубь выделенного в идеальной жидкости объема и являются силами

давления, называемого *гидродинамическим давлением идеальной жидкости*.

Возвращаясь к представлению (2.3.1), видим, что в случае идеальной жидкости вектор \mathbf{p}_n направлен противоположно вектору внешней нормали. Скалярно умножая (2.3.1) на \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z , приходим к равенствам:

$$-p_n \alpha = -\alpha p_x, \quad -p_n \beta = -\beta p_y, \quad -p_n \gamma = -\gamma p_z$$

или

$$p_n = p_x = p_y = p_z.$$

В идеальной жидкости величина нормального напряжения (давления) не зависит от ориентации сечения, а значит давление в одной и той же точке идеальной жидкости одинаково во всех направлениях (во всех сечениях, проходящих через эту точку).

§ 2.4. Уравнения Эйлера

Поскольку в случае идеальной жидкости величина вектора \mathbf{p}_n не зависит от ориентации сечения и, следовательно, от положения нормали \mathbf{n} , то уравнение (2.2.1) принимает вид

$$\int_V (\mathbf{F} - \mathbf{w}) \rho d\tau + \oint_S \mathbf{p} ds = 0, \quad (2.4.1)$$

где $\mathbf{p} = -\mathbf{n}p$.

Воспользуемся преобразованиями Гаусса, которые формулируются для скалярной функции $u(x, y, z)$, определенной в пространственной области V , ограниченной поверхностью S с внешней нормалью \mathbf{n} . Справедливы следующие интегральные преобразования:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial x} d\tau = \oint_S u \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) ds, \quad (2.4.1a)$$

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial y} d\tau = \oint_S u \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) ds, \quad (2.4.1б)$$

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial z} d\tau = \oint_S u \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}) ds, \quad (2.4.1в)$$

где $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x})$, $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y})$, $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z})$ — направляющие косинусы нормали.

Умножая (2.4.1а) на \mathbf{e}_x , (2.4.1б) — на \mathbf{e}_y , (2.4.1в) — на \mathbf{e}_z и складывая результаты, получаем

$$\int_V \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) d\tau = \int_V \text{grad } u \, d\tau =$$

$$= \oint_S u \left(\mathbf{e}_x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + \mathbf{e}_y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + \mathbf{e}_z \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}) \right) ds = \oint_S u \mathbf{n} \, ds,$$

следовательно, $\int_V \text{grad } u \, d\tau = \oint_S u \mathbf{n} \, ds.$

Из формулы (2.4.1) и последнего равенства, находим

$$\int_V (\mathbf{F} - \mathbf{w}) \rho \, d\tau - \int_V \text{grad } p \, d\tau = 0$$

или

$$\int_V [(\mathbf{F} - \mathbf{w}) \rho - \text{grad } p] \, d\tau = 0.$$

Предполагая непрерывность подынтегральной функции, в силу произвольности объема V получаем уравнение

$$\mathbf{F} - \mathbf{w} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0,$$

или покомпонентно

$$\begin{aligned} X - w_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ Y - w_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ Z - w_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

С учетом представлений (1.2.8) для компонентов ускорения в эйлеровых переменных, уравнения (2.4.2) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Уравнения (2.4.3) называются *уравнениями движения идеальной жидкости* или *уравнениями Эйлера*.

Система (2.4.3) может быть представлена в виде одного векторного уравнения (*векторная форма представления*)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.4.4)$$

Так как в силу (1.2.8) $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v}$, то (2.4.4) можно переписать как

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.4.5)$$

Используя формулу векторного анализа

$$\frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{v}^2 = (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v},$$

из (2.4.5) получаем

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.4.6)$$

Если ввести в рассмотрение вектор $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$ и спроецировать уравнение (2.4.6) на координатные оси, то в результате получаются *уравнения движения идеальной жидкости в форме Ламба*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - (v_y \Omega_z - v_z \Omega_y) &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - (v_z \Omega_x - v_x \Omega_z) &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - (v_x \Omega_y - v_y \Omega_x) &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Уравнения (2.4.2) можно записать в переменных Лагранжа. Считая, что все функции в (2.4.2) зависят от переменных Лагранжа (t, a, b, c) , в соответствии с формулами (1.2.2) имеем:

$$X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.4.7a)$$

$$Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.4.7б)$$

$$Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.4.7в)$$

Умножая (2.4.7a) на $\partial x/\partial a$, (2.4.7б) — на $\partial y/\partial a$, (2.4.7в) — на $\partial z/\partial a$, складывая результаты и учитывая (1.2.4), получаем

первое уравнение из системы уравнений движения в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial a} = \\ = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a}. \end{aligned}$$

Аналогично составляем два других уравнения:

$$\begin{aligned} \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial b} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial b} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b}, \\ \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial c} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial c} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c}. \end{aligned}$$

§ 2.5. Модели жидких идеальных сред

Общую задачу о движении идеальной жидкости можно сформулировать следующим образом: при заданном распределении внешних массовых сил, определить координаты отдельной частицы в каждый момент времени, скорости движения в каждой точке жидкости в каждый момент времени, а также силы внутреннего взаимодействия, т. е. гидродинамические давления, в каждой точке в каждый момент времени.

В однородной жидкости плотность, являющаяся характеристикой среды, считается известной: $\rho(x, y, z, t) = \text{const}$. Соответствующую систему уравнений гидродинамики можно получить, если к уравнениям Эйлера добавить уравнение неразрывности (1.4.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Система (2.5.1), состоящая из четырех уравнений, является системой относительно четырех неизвестных функций: v_x , v_y , v_z и p . Поэтому она замкнута.

В случае неоднородной несжимаемой жидкости (например, несжимаемая жидкость с плотностной стратификацией) к уравнениям Эйлера следует добавить уравнения неразрывности (1.4.3), (1.4.5). Полученная таким образом система оказывается замкнутой.

Предположим, что удалось разрешить систему (2.5.1), т. е. что найдены следующие функции

$$\begin{aligned} p &= f_1(t, x, y, z), & v_x &= f_2(t, x, y, z), \\ v_y &= f_3(t, x, y, z), & v_z &= f_4(t, x, y, z). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Решения (2.5.2) определены неоднозначно (содержат произвольные константы), поскольку система (2.5.1) как система дифференциальных уравнений имеет бесконечно много решений (подробнее см. [6]). Для выделения единственного решения (2.5.1), которое соответствует физическому процессу, нужно задать дополнительные условия, о которых будет сказано ниже.

Функции (2.5.2) определяют некоторое скалярное поле давлений и векторное поле скоростей. Для того чтобы в каждый момент времени определить координаты частицы, находящейся в начальный момент $t = t_0$ в точке (x_0, y_0, z_0) , нужно решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_2(t, x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= f_3(t, x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= f_4(t, x, y, z) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0.$$

Для сжимаемых сред характерна определенная зависимость между плотностью и давлением. В связи с этим различают *баротропные и бароклинные среды*.

Баротропной средой называется среда, в которой плотность зависит только от давления. Так как зависимость $\rho = \Phi(p)$, как правило, известна (например, установлена экспериментально), то для баротропных сред система уравнений гидродинамики оказывается замкнутой. В самом деле, к трем уравнениям Эйлера (2.4.3) добавляется уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.5.3)$$

Бароклинной средой называется среда, плотность которой зависит не только от давления. Поэтому количество неизвестных функций увеличивается на одну: v_x, v_y, v_z, p и ρ . Для того, чтобы замкнуть систему необходимо еще, по крайней мере, одно уравнение. С целью получения недостающего уравнения запишем дифференциальное уравнение закона сохранения энергии для сжимаемой идеальной жидкости. Полная энергия U движущегося жидкого объема V представляет собой сумму кинетической энергии K и внутренней \tilde{U} (предполагается общий случай, когда внешнее силовое поле не потенциально):

$$U = K + \tilde{U},$$

где $K = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v}^2 d\tau$. Если E — значение внутренней энергии, отнесенной к единице массы, то

$$\tilde{U} = \int_V \rho E d\tau.$$

Поэтому

$$U = \int_V \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + E \right) d\tau.$$

Приращение энергии ΔU за время $\Delta t = t_2 - t_1$ складывается из работы массовых сил A_τ , работы поверхностных сил A_S , притока тепла Q_S через поверхность S , ограничивающую объем V и притока тепла Q_τ от источников, распределенных в объеме с жидкостью:

$$\Delta U = A_\tau + A_S + Q_\tau + Q_S. \quad (2.5.4)$$

Работа массовых сил, действующих на элемент массы $dm = \rho d\tau$ за единицу времени, определяется как

$$\mathbf{F} \mathbf{v} \rho d\tau,$$

где F — плотность массовых сил. Поэтому

$$A_\tau = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathbf{F} \mathbf{v} \rho d\tau dt.$$

Работа поверхностных сил, действующих на элемент поверхности ds , за единицу времени равна

$$\mathbf{p}_n \mathbf{v} ds,$$

где \mathbf{p}_n — плотность поверхностных сил (напряжение). Следовательно,

$$A_S = \int_{t_1}^{t_2} \oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} ds dt.$$

Если q_n — количество тепла, поступающее в единицу времени через единицу поверхности в объем V , то

$$Q_S = \int_{t_1}^{t_2} \oint_S q_n ds dt.$$

Для многих изотропных сред справедлив закон теплопроводности Фурье, определяющий плотность теплового потока:

$$q_n = k \frac{\partial T}{\partial n},$$

где $\partial T / \partial n$ — скорость изменения температуры в направлении нормали \mathbf{n} ; k — коэффициент теплопроводности, величина которого зависит в основном от температуры.

Введем в рассмотрение скорость объемного выделения тепла ε , как количество тепла, выделяемое единицей объема за единицу времени. Тогда

$$Q_\tau = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \varepsilon d\tau dt.$$

Подставляя найденные выражения в (2.5.4) и используя теорему о среднем (предполагается непрерывность подинтегральных функций), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \Delta U = & \left(\int_V \mathbf{F} \mathbf{v} \rho d\tau \right)_{t=t^*} \Delta t + \left(\oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} ds \right)_{t=t^{**}} \Delta t + \\ & + \left(\oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} ds \right)_{t=t^{***}} \Delta t + \left(\int_V \varepsilon d\tau \right)_{t=t^{****}} \Delta t, \end{aligned}$$

где $t^*, t^{**}, t^{***}, t^{****} \in (t_1, t_2)$.

Разделив обе части уравнения на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, имеем

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \mathbf{F} \mathbf{v} \rho d\tau + \oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} ds + \oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} ds + \int_V \varepsilon d\tau.$$

Учитывая формулу (1.4.1), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + E \right) d\tau = \int_V \left[\rho \left(\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dE}{dt} \right) + \frac{d\rho}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + E \right) + \right. \\ \left. + \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + E \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] d\tau = \int_V \rho \left(\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dE}{dt} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь использовалось уравнение (2.5.3).

Таким образом, получаем закон сохранения энергии для сжимаемой теплопроводящей среды в интегральной форме

$$\int_V \rho \left(\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dE}{dt} \right) d\tau = \int_V \mathbf{F} \mathbf{v} \rho d\tau + \oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} ds + \oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} ds + \int_V \varepsilon d\tau. \quad (2.5.4a)$$

Преобразуем поверхностные интегралы, содержащиеся в выражении (2.5.4a), в объемные. Так как

$$\oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} ds = \oint_S \mathbf{n} k \operatorname{grad} T ds,$$

то по формуле Остроградского–Гаусса

$$\oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} ds = \int_V \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) d\tau. \quad (2.5.4b)$$

Выражение для работы поверхностных сил легко преобразуется в интеграл по объему, если принять во внимание преобразования Гаусса (2.4.1a–в):

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} ds = - \oint_S p \mathbf{n} \mathbf{v} ds = - \oint_S p [v_x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + v_y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + \\ + v_z \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z})] ds = - \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (pv_x) + \frac{\partial}{\partial y} (pv_y) + \frac{\partial}{\partial z} (pv_z) \right] d\tau = \\ = - \int_V [p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} p] d\tau. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в (2.5.4a), в силу произвольности объема V приходим к уравнению

$$\rho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \frac{dE}{dt} = \varepsilon + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + \rho \mathbf{F} \mathbf{v} - p \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{grad} p.$$

Учитывая (2.4.4), окончательно находим

$$\rho \frac{dE}{dt} = \varepsilon + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) - p \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.5.4\text{в})$$

При адиабатическом движении идеальной жидкости имеем уравнение

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Если в качестве идеальной жидкости выступает идеальный газ, то

$$\frac{dE}{dt} = c_V \frac{dT}{dt},$$

где c_V — удельная теплоемкость в изохорном процессе.

Пусть зависимость $E = \Psi(T, p)$ известна. Тогда присоединяя к уравнениям (2.4.3), (2.5.3), (2.5.4в) уравнение состояния

$$\Theta(p, \rho, T) = 0, \quad (2.5.5)$$

приходим к замкнутой системе уравнений, которая соответствует модели *идеальной теплопроводящей бароклиной жидкости*. Например, при рассмотрении движения идеального газа уравнение (2.5.5) является уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$p = R\rho T,$$

где $R = k_0 m^{-1}$ — универсальная газовая постоянная; k_0 — постоянная Больцмана, одинаковая для всех газов; m — средняя масса молекулы в граммах.

§ 2.6. Начальные и граничные условия

Как уже отмечалось ранее, гидродинамическая система уравнений, являясь системой дифференциальных уравнений, имеет бесконечное множество решений [6]. Для того чтобы выделить единственное решение системы, соответствующее физическому процессу, необходимо воспользоваться *дополнительными условиями*, включающими в себя *начальные распределения* и *граничные условия*. В качестве начальных условий в эйлеровых переменных, например для системы (2.4.3), (1.4.2), (1.4.4), используются распределения скоростей и плотностей в начальный момент времени $t = t_0$. Пусть $t_0 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} v_x(0, x, y, z) &= \varphi_1(x, y, z), & v_y(0, x, y, z) &= \varphi_2(x, y, z), \\ v_z(0, x, y, z) &= \varphi_3(x, y, z), & \rho(0, x, y, z) &= \rho_0(x, y, z). \end{aligned}$$

Условия, задаваемые на границах области, зависят от характеристик границы. Если жидкость граничит с неподвижной твердой стенкой S_T с уравнением гладкой поверхности $G(x, y, z) = 0$, то граничное условие имеет вид

$$v_n = (\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T, \quad (2.6.1)$$

где $\mathbf{n} = \{\partial G/\partial x, \partial G/\partial y, \partial G/\partial z\}$ — нормаль к поверхности границы S_T , \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из начала координат в рассматриваемую точку. Условие (2.6.1) можно переписать в виде

$$v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T.$$

Если же стенка движется со скоростью \mathbf{V}_T , то нормальная составляющая скорости частиц жидкости в любой точке на поверхности должна равняться нормальной составляющей скорости движения поверхности:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = (\mathbf{V}_T, \mathbf{n}), \quad \mathbf{r} \in S_T. \quad (2.6.2)$$

При условии, что поверхность является свободной, уравнение поверхности зависит от времени: $G(t, x, y, z) = 0$. Частицы жидкости на свободной поверхности S_p движутся вместе с поверхностью, не пересекая ее. Поэтому если частица в момент времени t находилась на поверхности в точке (x, y, z) , то в следующий момент $t + \Delta t$, где Δt мало, она окажется в точке $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, но все еще будет находиться на поверхности:

$$G(t + \Delta t, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = 0, \quad \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \in S_p.$$

Используя разложение в ряд Тейлора и ограничиваясь членами первого порядка, получаем

$$G(t, x, y, z) + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial G}{\partial z} \Delta z = 0, \quad \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \in S_p.$$

Учитывая уравнение свободной поверхности и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, окончательно находим *кинематическое условие на свободной поверхности*:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} v_x + \frac{\partial G}{\partial y} v_y + \frac{\partial G}{\partial z} v_z = 0, \quad \mathbf{r} \in S_p. \quad (2.6.3)$$

При переходе через границу свободной поверхности давление не испытывает скачок. Если \mathbf{n}_1 — нормаль к свободной поверхности S_p , а \mathbf{p}_1 — соответствующее напряжение, то $\mathbf{p}_1 = -p_0 \mathbf{n}_1$, где p_0 — атмосферное давление. Пусть $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$. Тогда напряжение

\mathbf{p}_2 , действующее в сечении с нормалью \mathbf{n}_2 , равно $\mathbf{p}_2 = -p_0 \mathbf{n}_2$. Таким образом, получаем *динамическое условие на свободной поверхности*

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{n}_2) = -p_0, \quad \mathbf{r} \in S_p.$$

При изучении движений идеальной жидкости в замкнутом объеме во всех внутренних точках объема должно выполняться условие ограниченности решений гидродинамической системы (*внутренняя задача гидроаэродинамики*). Если область содержит бесконечно удаленные точки (*внешняя задача гидроаэродинамики*), то на бесконечности также должно выполняться условие ограниченности решений. Например, в случае задачи об обтекании тела поступательно движущимся потоком скорость жидкости на бесконечности обязана стремиться к скорости невозмущенного потока. Если же рассматривается задача о движении тела в невозмущенной жидкости, то на бесконечности скорость движения жидкости должна стремиться к нулю.

§ 2.7. Простейшие случаи движения идеальной жидкости

Первыми интегралами движения системы (2.4.3), (2.5.3) называются функции $\Phi_i \left(v_x, v_y, v_z, \frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial y}, \frac{\partial v_x}{\partial z}, \frac{\partial v_y}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_z}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial z}, p, t \right) = C_i$, которые обращаются в постоянные C_i на решениях этой системы.

Система уравнений (2.4.3), (2.5.3) допускает наличие первых интегралов движения, представимых в явном виде, в двух простейших случаях: установившегося и потенциального движений баротропной жидкости во внешних потенциальных полях.

Установившимся движением называется движение, при котором поле скоростей, поле гидродинамических давлений и поле плотностей с течением времени не меняются. Характерной особенностью такого движения является то, что траектории движения частиц совпадают с линиями тока.

Элементарное перемещение вдоль линии тока определяется как

$$d\mathbf{S} = \mathbf{v} dt = \{ dx, dy, dz \}.$$

Умножим уравнение движения

$$\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

скалярно на вектор $\mathbf{v} dt$:

$$\mathbf{F} \mathbf{v} dt - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} dt = \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \operatorname{grad} p dt.$$

Принимая во внимание вычислительную формулу для скалярного произведения [8], получим

$$X dx + Y dy + Z dz - d\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2\right) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right), \quad (2.7.1)$$

где $\mathbf{F} = \{X, Y, Z\}$.

Если справа в уравнении (2.7.1) добавить слагаемое $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$, то уравнение примет вид

$$X dx + Y dy + Z dz - d\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2\right) = \frac{1}{\rho} dp. \quad (2.7.2)$$

Предположим, что поле массовых сил является потенциальным, т.е. что существует такая скалярная функция U , что $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U$. Тогда уравнение (2.7.2) преобразуется к виду

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) - d\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2\right) = \frac{dp}{\rho},$$

где $\rho = \Phi(p)$, так как среда баротропна. Значит,

$$-dU - d\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2\right) = \frac{dp}{\Phi(p)}.$$

Допустим, что существует такая функция $P(p)$, что $\frac{dP}{dp} = \frac{1}{\Phi(p)}$.

Тогда $dP = \frac{dp}{\Phi(p)}$. Поэтому

$$d\left(U + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + P\right) = 0$$

или

$$U + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + P = \text{const} \quad \text{вдоль линии тока.} \quad (2.7.3)$$

Значение константы в (2.7.3) изменяется при переходе от одной линии тока к другой. Соотношение (2.7.3) называется *интегралом Бернулли*.

Интеграл Бернулли часто называют *интегралом энергий*, так как слагаемое $\mathbf{v}^2/2$ имеет смысл кинетической энергии единицы массы, слагаемое U имеет смысл потенциальной энергии

единицы массы, а слагаемое P — энергии, приобретаемой единицей массы за счет действия сил давления.

При движении однородной жидкости в поле силы тяжести интеграл (2.7.3) принимает вид

$$gz + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad \text{вдоль линии тока.} \quad (2.7.4)$$

Пусть теперь жидкость совершает потенциальное движение. Учитывая, что $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ и $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$, уравнение движения (2.4.6) представим как

$$\text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{grad } \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \mathbf{F}. \quad (2.7.5)$$

Если рассмотреть потенциальное движение однородной жидкости в потенциальном поле внешних массовых сил, то уравнение (2.7.5) примет вид

$$\text{grad } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} + U \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} + U = \Gamma(t). \quad (2.7.6)$$

Соотношение (2.7.6) называется *интегралом Бернулли–Коши*.

Так как движение потенциально и жидкость несжимаема, то потенциал скорости φ удовлетворяет уравнения Лапласа и, значит, задавая дополнительное условие для φ на границе, можно найти потенциал и определить скорость. Далее интеграл (2.7.6) позволит вычислить давление, если только известна функция $\Gamma(t)$. Для однозначного определения функции $\Gamma(t)$ необходимо знать значение давления в какой-либо точке как функцию времени: $p(x_0, y_0, z_0, t) = f(t)$.

В случае потенциального движения баротропной жидкости также можно получить интеграл Бернулли–Коши. Для этого нужно предположить существование функции $P(p)$ такой, что $dP = \frac{dp}{\rho(p)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz + \frac{\partial P}{\partial t} dt &= \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p &= \frac{1}{\rho} \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ &= \mathbf{e}_x \frac{\partial P}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial P}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial P}{\partial z} = \operatorname{grad} P, \end{aligned}$$

где \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z — координатные орты.

Если движение баротропной жидкости происходит во внешнем поле потенциальных сил, то из (2.7.5) находим

$$\operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \operatorname{grad} P = -\operatorname{grad} U$$

и, значит, интеграл Бернулли–Коши в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U + P = \Gamma(t). \quad (2.7.7)$$

Если движение к тому же установилось, то интеграл (2.7.7) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U + P = C, \quad (2.7.8)$$

где постоянная C , в отличие от постоянной в выражении для интеграла Бернулли, одинакова для всех линий тока. Соотношение (2.7.8) называется *интегралом Бернулли–Эйлера*.

Проиллюстрируем физическое содержание интеграла Бернулли–Эйлера простым примером. Пусть однородная жидкость движется в однородном поле силы тяжести. Направим ось Z вертикально вверх. Тогда (2.7.8) примет вид

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = C. \quad (2.7.9)$$

Полученный интеграл можно истолковать как выражение постоянства суммы трех высот:

- динамической высоты, равной $\mathbf{v}^2/2g$, на которую поднимается материальная точка в однородном поле тяжести, брошенная вертикально вверх с начальной скоростью \mathbf{v} ;
- геометрической высоты z ;

— высоты столба жидкости с плотностью ρ , производящей давление p на основание.

Существование интегралов (2.7.3), (2.7.6), (2.7.7) и (2.7.8) устанавливает ограничение на скорость, в соответствии с которым скорость не может превышать указанное значение без разрыва сплошности среды.

Например, рассмотрим движение, для которого имеет место интеграл (2.7.9). Пусть в некоторой точке на высоте $z = z_0$ скорость и давление соответственно равны $v = v_0$ и $p = p_0$. Если v и p — значения скорости и давления для другой точки, расположенной на высоте $z = z_0$, то в силу (2.7.9):

$$\frac{v_0^2}{2g} + z_0 + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} + z_0 + \frac{p}{\rho g}.$$

Тогда

$$0 \leq \frac{p}{\rho g} = \frac{1}{2g} (v_0^2 - v^2) + \frac{p_0}{\rho g}$$

и, значит,

$$v^2 \leq v_0^2 + \frac{2p_0}{\rho}.$$

Это неравенство показывает, что скорость не может оказаться чрезмерно большой ни в одной точке объема, заполненного жидкостью.

§ 2.8. Примеры решения задач

8.1. *Получить расчетную формулу для скорости потока жидкости, которая измеряется при помощи трубки Вентури (рис. 2.3).*

Горизонтальная стеклянная трубка при помощи резинового шланга подключена к крану с постоянным напором воды, так что течение можно считать установившимся. Для измерения давления в жидкости в стенки впаяны стеклянные манометрические трубки.

Если жидкость покоится, то уравнение Эйлера принимает вид

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0. \quad (2.8.1)$$

Уравнение (2.8.1) означает, что давление максимально возрастает в направлении действия внешней силы. Пусть \mathbf{s} — некоторый вектор, перпендикулярный градиенту давления. Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial s} = (\mathbf{s}, \text{grad } p) = |\mathbf{s}| |\text{grad } p| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

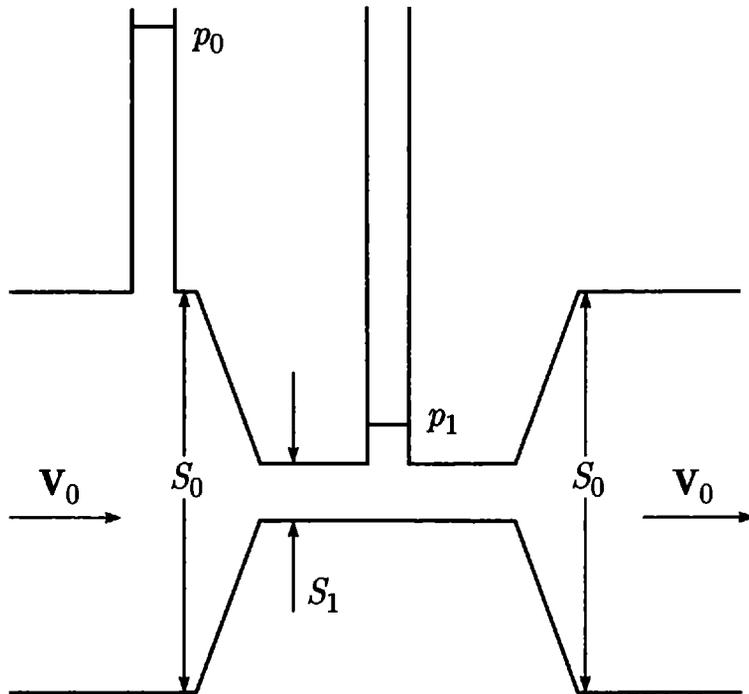


Рис. 2.3

Следовательно, в направлениях, перпендикулярных $\text{grad } p$, давление остается постоянным.

Рассмотрим равновесие идеальной жидкости в однородном поле силы тяжести. Если ось Z сонаправлена с вектором ускорения свободного падения, то $F_z = g$, $F_x = F_y = 0$ и проекция уравнения (2.8.1) на ось Z имеет вид

$$g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

значит

$$p - \rho g z = \text{const}.$$

Пусть точка $z = 0$ совпадает со свободной поверхностью жидкости. Тогда

$$p = p_0 + \rho g z, \quad (2.8.2)$$

где p_0 — давление атмосферы. Согласно (2.8.2) давление на глубине z не зависит от формы сосуда, в который налита жидкость.

Поскольку в манометрической трубке жидкость находится в состоянии равновесия (рис. 2.4), то сумма сил, действующих на цилиндрический объем жидкости малой высоты с основанием S , расположенный у основания трубки, равна нулю:

$$(p_0 + \rho g h) S - p_{\text{жидк}} S = 0,$$

или

$$p_{\text{жидк}} = p_0 + \rho g h,$$

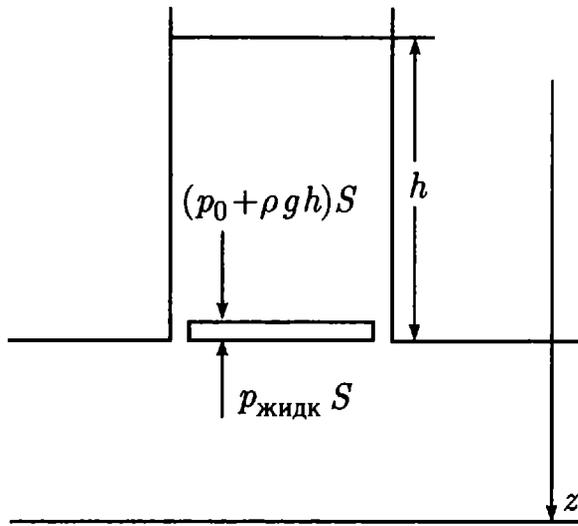


Рис. 2.4

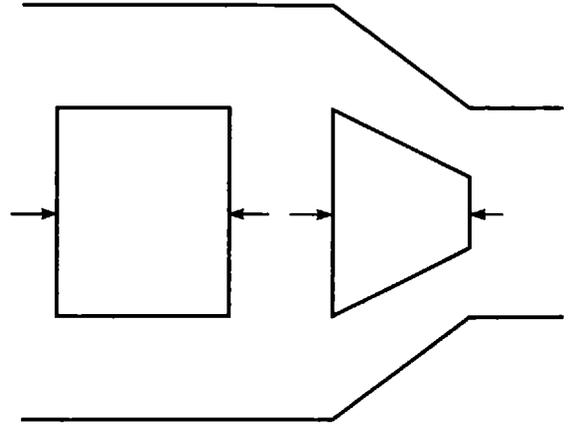


Рис. 2.5

откуда заключаем, что высота жидкости h в манометрической трубке прямо пропорциональна давлению жидкости.

Так как жидкость несжимаема, то количество жидкости, протекающее в единицу времени через сечение S_1 , равно количеству жидкости, протекающему через сечение S_0 :

$$v_0 S_0 = v_1 S_1.$$

Это соотношение предполагает равенство скоростей всех частиц в одном и том же сечении.

По мере приближения к узкому каналу жидкие частицы деформируются и ускоряются. Эти ускорения возникают за счет разности сил давления (на рис. 2.5 изображены стрелками).

Движение можно считать потенциальным и, значит, имеет место интеграл Бернулли-Эйлера:

$$gz + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const}.$$

Применительно к течению в трубке Вентури, интеграл Бернулли-Эйлера дает соотношение

$$gz_0 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_0^2 + \frac{p_0}{\rho} = gz_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_1^2 + \frac{p_1}{\rho}.$$

Пренебрегая членом $g(z_0 - z)$ и учитывая, что $v_1 = v_0 S_0/S_1$, имеем

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}_0^2 + \frac{p_0}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 S_0^2}{S_1^2} + \frac{p_1}{\rho}$$

или

$$v_0 = \left[\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho(S_0^2/S_1^2 - 1)} \right]^{1/2}.$$

8.2. Истечение из открытого сосуда под действием силы тяжести. В выходном отверстии В (рис. 2.6), площадь которого много меньше площади свободной поверхности А, линии тока направлены перпендикулярно к сечению отверстия. Внутри сосуда все линии тока начинаются на свободной поверхности, уровень которой постепенно понижается. Давление на поверхности А, как и на поверхности В, равно атмосферному p_0 .

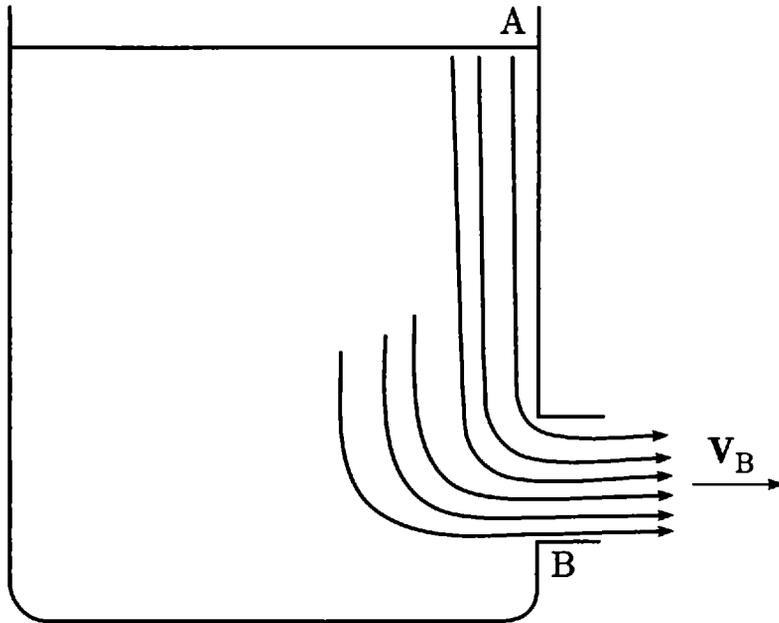


Рис. 2.6

Поскольку жидкость несжимаема, то скорость частиц v_A на поверхности А мала по сравнению со скоростью частиц v_B в отверстии В, и значит, $v_A^2 \ll v_B^2$. В силу малости скорости частиц на поверхности А изменением v_A с течением времени можно пренебречь и считать процесс установившимся. Обозначая через z_A и z_B геометрические высоты в точках поверхностей А и В, на основании интеграла Бернулли для одной из линий тока имеем

$$gz_B + \frac{1}{2} v_B^2 + \frac{p_0}{\rho} = gz_A + \frac{1}{2} v_A^2 + \frac{p_0}{\rho}.$$

Отсюда, с учетом сказанного, находим

$$\frac{v_B^2}{2g} = z_A - z_B = h,$$

или

$$v_B = \sqrt{2gh}. \quad (2.8.3)$$

Скорость жидкости в выходном отверстии такова, как если бы вытекающие частицы жидкости свободно падали с высоты h . Равенство (2.8.3) называется *формулой Торричелли*.

8.3. Истечение из закрытого сосуда под действием внутреннего давления. Пусть в закрытом сосуде (рис. 2.7) давление жидкости равно p_1 , причем $p_1 > p_0$, где p_0 — давление атмосферы.

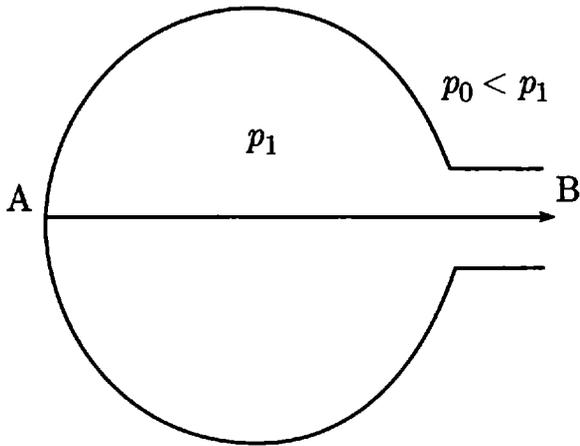


Рис. 2.7

Для линии тока АВ, идущей горизонтально, $z_A = z_B$. Так как скорость v_A около стенки мала по сравнению со скоростью вытекания v_B , то на основании интеграла Бернулли получим

$$\frac{1}{2} v_B^2 + \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_1}{\rho},$$

или

$$v_B = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}. \quad (2.8.4)$$

Формула (2.8.4) может быть использована с целью оценки значения скорости, при движении с которой газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость.

Примем за допустимое изменение плотности величину $\Delta\rho/\rho = 0,01$. При адиабатическом изменении состояния давление и плотность связаны соотношением

$$p = \text{const} \cdot \rho^\chi, \quad \text{где } \chi = 1,4 \text{ для воздуха.}$$

Изменение давление при изменении плотности определяется в соответствии с формулой:

$$\Delta p = \text{const} \cdot \chi \rho^{\chi-1} \Delta \rho.$$

Тогда

$$\frac{\Delta p}{p} = \chi \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

или

$$\Delta p = \chi \frac{\Delta \rho}{\rho} p.$$

Подставив сюда $p = 101325$ Па (атмосферное давление), $\chi = 1,4$ и $\Delta\rho/\rho = 0,01$, получим

$$\Delta p = 1,4 \cdot 101325 \cdot 0,01 = 1418,6 \text{ Па.}$$

Внесем это значение в (2.8.4), причем для плотности примем среднее значение $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$:

$$v_B \cong 47 \text{ м/с.}$$

8.4. Подпор жидкости перед препятствием. Когда равномерный поток жидкости встречает на своем пути препятствие (рис. 2.8), то он расходится во все стороны, причем перед препятствием происходит *подпор жидкости*, т. е. замедление потока. В центре области подпора поток полностью останавливается (*критическая точка*).

Пусть скорость потока вдали от препятствия равна v_0 , а величина давления — p_0 . Если давление в критической точке равно p_1 , причем рассматриваемые точки находятся на одинаковой высоте и соединены линией тока, то, применяя интеграл Бернулли, получим

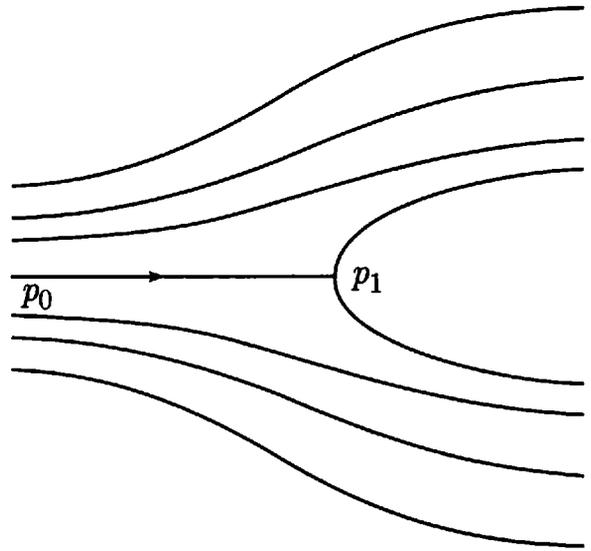


Рис. 2.8

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2},$$

или

$$p_1 = p_0 + \rho \frac{v_0^2}{2}. \quad (2.8.5)$$

Приращение давления

$$p_1 - p_0 = \rho \frac{v_0^2}{2}$$

называется *динамическим* или *скоростным*.

Давление p_1 в формуле (2.8.5) принято называть *полным*. Это давление легко измерить с помощью прибора, называемого *трубкой Пито*. Он представляет собой изогнутую под прямым углом полую стеклянную трубку, помещенную в течение. Прибор обращен изогнутым концом против течения и, значит, давление в отверстии, равное p_1 , можно измерить.

Давление p_0 , называемое *статическим*, показал бы прибор для измерения давления, движущийся вместе с жидкостью. Именно статическое давление фигурирует в уравнении Бернулли. Так как

$$p_0 = p_1 - \rho \frac{v_0^2}{2},$$

то из уравнения Бернулли имеем

$$p_1 + \rho g z = \text{const}.$$

Поскольку обтекание является потенциальным, то константа, входящая в это уравнение, одна и та же для всей жидкости. Поэтому полное давление постоянно в каждой горизонтальной плоскости.

8.5. *Определить форму сосуда, употребляемого для водяных часов. Считается, что высота воды изменяется с постоянной скоростью (рис. 2.9).*

Так как высота столба жидкости изменяется с постоянной скоростью, то в любой момент времени скорость частиц жидкости в сечении S одна и та же. Обозначим ее через V .

Пусть s — площадь сечения узкой части часов, а v — скорость частиц жидкости в этом сечении. Поскольку жидкость несжимаема, то количество жидкости, протекающее в единицу времени через сечение s , равно (см. формулу (1.3.1))

$$sv = SV. \quad (2.8.6)$$

Допустим, что точка $M(x, y)$ одновременно принадлежит поверхности часов и сечению S . Тогда по формуле Торричелли (2.8.3)

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Так как $S = \pi x^2$, то согласно (2.8.6)

$$s\sqrt{2gy} = \pi x^2 V,$$

или

$$y = \frac{\pi^2 x^4 V^2}{2gs^2}.$$

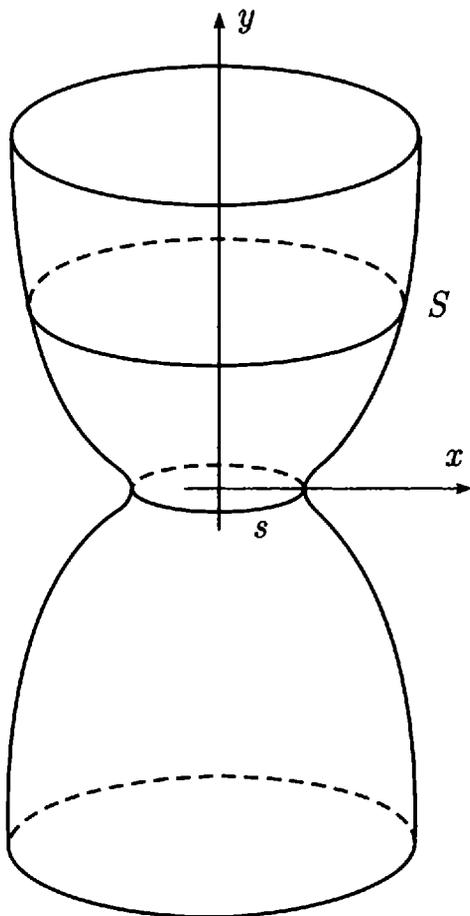


Рис. 2.9

8.6. *Определить период колебаний жидкости в U-образной трубке в поле силы тяжести. Колена трубки наклонены под углами α и β к горизонту. Колебательное движение предполагается потенциальным (малыми участками искривления трубки, где возможны отклонения от потенциального движения, пренебречь).*

Выберем криволинейную ось l так, чтобы она совпала с осью симметрии трубки. Пусть точке $l = 0$ отвечает положение жидкости в левом колене в некоторый момент времени, а точке $l = L$ отвечает положение жидкости в правом колене (рис. 2.10). Предположим, что жидкость движется в направлении возрастания l .

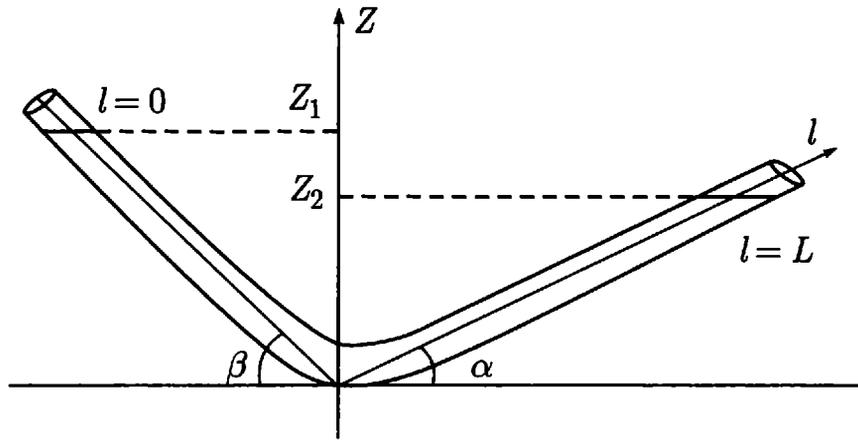


Рис. 2.10

Движение является одномерным, причем скорость не зависит от l , так как жидкость несжимаема: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Поскольку процесс потенциальный, то существует скалярная функция φ такая, что

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{e}_l v(t) = \mathbf{e}_l (\mathbf{e}_l, \text{grad } \varphi) = \mathbf{e}_l \frac{\partial \varphi}{\partial l},$$

где \mathbf{e}_l — единичный вектор, касательный к оси l ; $v(t)$ — проекция скорости на ось l . Тогда $v(t) = \partial \varphi / \partial l$. Следовательно,

$$\varphi(l, t) = v(t)l + f(t). \quad (2.8.7)$$

Применяя интеграл Бернулли–Коши в точках $l = 0$ и $l = L$, находим

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{l=0} + \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz_1 = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{l=L} + \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz_2, \quad (2.8.8)$$

где p_0 — атмосферное давление. В силу (2.8.7)

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{l=0} = f'(t), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{l=L} = v'(t)L + f'(t).$$

Следовательно, из (2.8.8) получаем

$$f'(t) + gz_1 = v'(t)L + f'(t) + gz_2.$$

Если $h = z_2 - z_1$, то справедливо уравнение

$$L \frac{dv}{dt} = -gh. \quad (2.8.9)$$

С другой стороны, проекции скорости на ось OZ в точках $l = 0$ и $l = L$ соответственно равны:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= v \cos(\pi/2 + \beta) = -v \sin \beta, \\ \frac{dz_2}{dt} &= v \cos(\pi/2 - \alpha) = v \sin \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} = v(\sin \alpha + \sin \beta).$$

Дифференцируя это равенство по t и принимая во внимание (2.8.9), получим

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{gh}{L}(\sin \alpha + \sin \beta). \quad (2.8.10)$$

Уравнение (2.8.10) описывает колебание разности уровней жидкости в двух коленах с частотой ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}(\sin \alpha + \sin \beta)}.$$

Следовательно, период колебаний T равен

$$T = 2\pi \left(\frac{g}{L}(\sin \alpha + \sin \beta) \right)^{-1/2}$$

8.7. Вычислить силу сопротивления, действующую на сферу радиуса a , ускоренно движущуюся в идеальной несжимаемой жидкости, считая обтекание сферы потенциальным.

Так как движение потенциально и жидкость несжимаема, то потенциал φ вне сферы удовлетворяет уравнению Лапласа. Поскольку жидкость граничит с движущейся сферой, то нормальная составляющая скорости частиц жидкости на поверхности сферы равна нормальной составляющей скорости движения поверхности сферы S :

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_S = (\mathbf{v}_0(t), \mathbf{n}).$$

Следовательно,

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_S = (\text{grad } \varphi, \mathbf{n})|_S = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S = (\mathbf{v}_0(t), \mathbf{n}).$$

На бесконечности выполняется условие:

$$\mathbf{v} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty.$$

Значит,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для определения потенциала скорости в области вне движущейся сферы имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S &= (\mathbf{v}_0(t), \mathbf{n}), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

Выберем сферическую систему координат (r, θ, λ) , $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \lambda < 2\pi$ так, чтобы начало отсчета совпало с центром сферы, а угол θ совпадал с углом между направлением движения сферы и направлением нормали к поверхности (рис. 2.11).

В каждый момент времени $t = t_0$ можно определить распределение скоростей в жидкости относительно этой системы координат, решив задачу (2.8.1) при фиксированном значении $t = t_0$, так как t входит в систему (2.8.11) в качестве параметра.

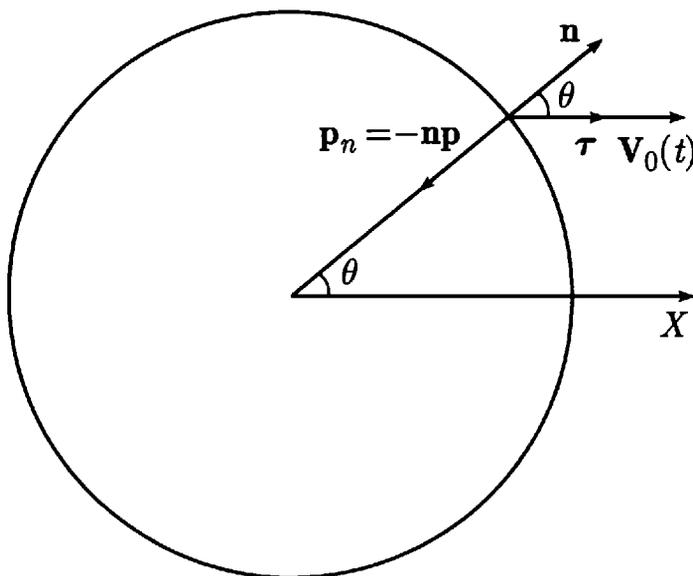


Рис. 2.11

Задача (2.8.11) является внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа. В выбранной системе координат система (2.8.11) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} = 0$$

при $a < r < \infty$, $0 < \theta < \pi$, $0 \leq \lambda < 2\pi$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = v_0(t_0) \cos \theta, \quad (2.8.12)$$

при $0 < \theta < \pi$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Если классическое решение задачи (2.8.12) существует, то оно определено с точностью до произвольной функции времени. Докажем это. Пусть $\varphi_1(r, \theta, \lambda, t_0)$ — решение задачи (2.8.12). Покажем, что любое другое решение $\varphi_2(r, \theta, \lambda, t_0)$ отличается от решения $\varphi_1(r, \theta, \lambda, t_0)$ на произвольную функцию времени $C(t_0)$. Рассмотрим функцию $\varphi_0(r, \theta, \lambda, t_0) = \varphi_2(r, \theta, \lambda, t_0) - \varphi_1(r, \theta, \lambda, t_0)$. Функция $\varphi_0(r, \theta, \lambda, t_0)$ удовлетворяет задаче (2.8.12) с условием на границе $\partial \varphi_0 / \partial r = 0$ при $r = a$. По аналогии с [9] можно доказать справедливость формулы (1.6.5) для области D_e , которая расположена вне сферы S :

$$\int_{D_e} \varphi_0 \Delta \varphi_0 d\tau = \oint_S \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds - \int_{D_e} (\nabla \varphi_0)^2 d\tau.$$

Отсюда $\nabla \varphi_0 = 0$ в D_e . Учитывая условие на бесконечности, находим $\varphi_0(r, \theta, \lambda, t_0) = C(t_0)$. Следовательно, $\varphi_2(r, \theta, \lambda, t_0) = \varphi_1(r, \theta, \lambda, t_0) + C(t_0)$.

Ограниченные на бесконечности частные решения уравнения из системы (2.8.12) ищем в соответствии с методом разделения переменных [9] в виде

$$\varphi(r, \theta, \lambda) = R(r) u(\theta, \lambda).$$

Подставляя искомый вид решения в соответствующее уравнение, получим

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{\Delta_{\theta\lambda} u}{u} = \mu,$$

где $\Delta_{\theta\lambda} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2}$ — сферический оператор Лапласа, $\mu = \text{const}$.

Отсюда приходим к задаче Штурма–Лиувилля для сферического оператора Лапласа:

$$\Delta_{\theta\lambda} u + \mu u = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \lambda < 2\pi,$$

$$u(\theta, \lambda) = u(\theta, \lambda + 2\pi), \quad |u(0, \lambda)| < \infty, \quad |u(\pi, \lambda)| < \infty,$$

собственными функциями которой являются сферические функции [9]

$$u = u_{nm}(\theta, \lambda) = P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\lambda, \\ \sin m\lambda, \end{cases}$$

а собственные значения равны $\mu = \mu_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, \dots, \infty$, $m = 0, 1, \dots, n$. Здесь $P_n^m(\cos \theta) = \sin \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_n(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра; $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра [9].

Функция $R(r)$ удовлетворяет уравнению

$$r^2 R'' + 2r R' - n(n+1)R = 0,$$

общее решение которого представимо как

$$R(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}.$$

Таким образом, ограниченное на бесконечности решение уравнения из задачи (2.8.12) ищем в виде

$$\varphi(r, \theta, \lambda, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{-(n+1)} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) + C(t_0),$$

где $C(t)$ — произвольная функция времени. Поскольку $P_1^0(\cos \theta) = P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, то граничное условие из (2.8.12) можно записать как

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = v_0(t_0) P_1^0(\cos \theta).$$

Далее

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) a^{-(n+2)} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) = v_0(t_0) P_1^0(\cos \theta).$$

Отсюда ясно, что отличны от нуля только члены с $n = 1, m = 0$:

$$-2a^{-3} A_{10} P_1^0(\cos \theta) = v_0(t_0) P_1^0(\cos \theta).$$

Значит,

$$A_{10} = -\frac{v_0(t_0)a^3}{2}.$$

Следовательно,

$$\varphi(r, \theta, t_0) = -\frac{v_0(t_0)a^3}{2r^2} \cos \theta + C(t_0) \quad (2.8.13)$$

для любого момента времени $t = t_0$.

Поскольку в сферической системе координат выражение для скорости имеет вид

$$\mathbf{v}(r, \theta, \lambda, t) = \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\lambda \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda},$$

где $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\lambda$ — орты сферической системы координат, то

$$\mathbf{v}(r, \theta, t) = \mathbf{e}_r \frac{v_0(t)a^3}{r^3} \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \frac{v_0(t)a^3}{2r^3} \sin \theta. \quad (2.8.14)$$

Заметим, что потенциал скорости (2.8.13) определен с точностью до произвольной функции времени, а распределение скоростей определяется однозначно и дается формулой (2.8.14).

Сила, действующая на сферу со стороны потока, определяется распределением давления

$$\mathbf{F} = -\oint_S (p \mathbf{n})|_{r=a} ds,$$

где p — значение гидродинамического давления при $r = a$.

Параллельная скорости тела составляющая силы \mathbf{F} называется *силой сопротивления*, а перпендикулярная составляющая — *подъемной силой*. Определим силу сопротивления.

Если $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, ориентированный в направлении движения сферы (рис. 2.11), то проекция силы, отнесенной к элементу поверхности ds , на направление вектора $\boldsymbol{\tau}$ равна

$$-p|_{r=a} \mathbf{n} \boldsymbol{\tau} ds = -p|_{r=a} \cos \theta ds.$$

Следовательно, проекция силы, действующей на сферу, на направление $\boldsymbol{\tau}$ выражается интегралом

$$w = -\oint_S p|_{r=a} \cos \theta ds.$$

Так как движение жидкости является потенциальным, то для вычисления давления на поверхности сферы можно воспользоваться интегралом Бернулли–Коши. Пусть в бесконечно удаленной точке давление равно p_0 ($\varphi_\infty = 0, v_\infty = 0$). Тогда для двух точек, одна из которых находится на бесконечности, а другая — на поверхности сферы на том же уровне, имеет место соотношение

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2}.$$

Отсюда с учетом (2.8.13) и (2.8.14) находим

$$p|_{r=a} = p_0 + \frac{\rho \dot{v}_0(t)}{2} a \cos \theta - \frac{\rho}{2} \left(v_0^2 \cos^2 \theta + \frac{v_0^2}{4} \sin^2 \theta \right). \quad (2.8.15)$$

Поэтому

$$w = -2\pi a^2 \int_0^\pi \left[p_0 + \frac{\rho \dot{v}_0(t)}{2} a \cos \theta - \frac{\rho}{2} \left(v_0^2 \cos^2 \theta + \frac{v_0^2}{4} \sin^2 \theta \right) \right] \times \\ \times \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Вычисляя интеграл, окончательно находим

$$w = -\frac{2}{3} \pi a^3 \rho \dot{v}_0(t).$$

Таким образом, при движении сферы в идеальной жидкости сила сопротивления, действующая на сферу, не зависит от скорости сферы, а определяется лишь ускорением. Если сфера движется равномерно, то сила сопротивления отсутствует. В этом состоит *парадокс Даламбера*.

В действительности парадокс Даламбера возникает только при движении в неограниченных областях, и легко объясняется.

Предположим, что при равномерном движении сфера испытывает сопротивление. Тогда для поддержания равномерного движения внешний источник должен совершать работу, которая идет на изменение кинетической энергии жидкости, так как силы трения отсутствуют. Следовательно, от тела должна уноситься на бесконечность энергия посредством волнового возмущения. Однако скорость приводимой в движение жидкости быстро убывает с расстоянием и на бесконечности обращается в ноль. Полученное противоречие говорит о ложной предпосылке.

Если же область ограничена, например свободной поверхностью, то равномерно движущаяся в идеальной жидкости сфера будет испытывать сопротивление за счет возникновения поверх-

ностных волн, которые уносят энергию на бесконечность (*волновое сопротивление*).

§ 2.9. Кинетическая энергия потенциального движения. Теорема Томсона

Вычислим кинетическую энергию несжимаемой жидкости, совершающей потенциальное движение в односвязанном объеме D , который ограничен поверхностью ∂D . Если рассмотреть однородную жидкость с плотностью ρ , то кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \int_D \rho v^2 d\tau = \frac{\rho}{2} \int_D \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau. \quad (2.9.1)$$

При условии, что потенциал скорости является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в области D и непрерывно дифференцируемой в области $D \cup \partial D$, справедлива формула (1.6.5):

$$\int_D \varphi \Delta \varphi d\tau = \oint_{\partial D} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} ds - \int_D (\nabla \varphi)^2 d\tau,$$

где \mathbf{n}_1 — внутренняя нормаль к поверхности ∂D . Так как в силу (2.9.1)

$$\int_D (\nabla \varphi)^2 d\tau = \frac{2T}{\rho}$$

и $\Delta \varphi = 0$, то

$$T = -\frac{\rho}{2} \oint_{\partial D} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds,$$

где $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$. Таким образом, кинетическая энергия потенциального движения однородной жидкости в односвязанном объеме зависит от характера движения на границе. В частности, если жидкость не протекает сквозь стенки ($\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0$) или потенциал на поверхности ∂D имеет постоянное значение (можно считать, что $\varphi \Big|_{\partial D} = 0$, так как φ определен с точностью до аддитивной постоянной), то $T = 0$ и жидкость покоится. Этот же результат был получен ранее в § 1.6.

Справедлива следующая теорема (*теорема Томсона*).

Кинетическая энергия несжимаемой жидкости, потенциально движущейся в односвязанном объеме с заданным значением скорости на границе, меньше, чем кинетическая энергия

этой же жидкости, совершающей непотенциальное движение в таком же объеме с тем же значением скорости на границе.

Пусть T — кинетическая энергия потенциального движения, а T' — кинетическая энергия непотенциального движения. Условие равенства нормальных составляющих скоростей на границе имеет вид

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{\partial D} = (\mathbf{v}', \mathbf{n})|_{\partial D},$$

где \mathbf{n} — внутренняя нормаль. Если $\mathbf{n} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, то это условие можно переписать иначе:

$$(\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z)|_{\partial D} = (\alpha v'_x + \beta v'_y + \gamma v'_z)|_{\partial D}. \quad (2.9.2)$$

Для несжимаемой жидкости справедливо уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0, \quad (2.9.3)$$

которое в случае потенциального движения представимо как

$$\Delta \varphi = 0. \quad (2.9.4)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} T' - T &= \frac{\rho}{2} \int_D [v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2] d\tau - \frac{\rho}{2} \int_D \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = \\ &= \frac{\rho}{2} \int_D 2 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(v'_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(v'_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(v'_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] d\tau + \\ &+ \frac{\rho}{2} \int_D \left[\left(v'_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(v'_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(v'_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2.9.5)$$

В (2.9.5) $I_2 > 0$. Поэтому если показать, что $I_1 = 0$, то теорема будет доказана.

Подынтегральные функции в каждом слагаемом в I_1 преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(v'_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi \left(v'_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] - \varphi \left(\frac{\partial v'_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(v'_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi \left(v'_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] - \varphi \left(\frac{\partial v'_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(v'_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\varphi \left(v'_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] - \varphi \left(\frac{\partial v'_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в (2.9.5) и учитывая (2.9.3) и (2.9.4), находим

$$I_1 = \rho \int_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi \left(v'_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi \left(v'_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\varphi \left(v'_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \right\} d\tau. \quad (2.9.6)$$

Далее, к каждому слагаемому в (2.9.6) применим преобразования Гаусса (2.4.1а-в), после чего найдем, что

$$I_1 = -\rho \oint_{\partial D} \left\{ \varphi \left(v'_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \alpha + \varphi \left(v'_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \beta + \varphi \left(v'_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \gamma \right\} ds = 0$$

в силу (2.9.2).

§ 2.10. Плоское потенциальное движение

Если при движении жидкости линии тока представляют собой плоские кривые, расположенные в параллельных плоскостях, а частицы, лежащие на одной прямой, перпендикулярной к этим плоскостям, совершают одинаковые движения, то такое движение жидкости называется *плоскопараллельным* или *плоским*.

В математической гидродинамике теория плоских потоков разработана наиболее полно, что объясняется наличием мощных математических методов, позволяющих исследовать такие потоки.

Предположим, что жидкость совершает плоское движение параллельное плоскости XU . Тогда все характеристики движения будут зависеть от двух пространственных переменных. Если при этом жидкость несжимаема, то справедливо уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(-v_y)}{\partial y}. \quad (2.10.1)$$

Дифференциальное уравнение линий тока имеет вид

$$\frac{dx}{v_x(x, y, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, t)},$$

или

$$-v_y dx + v_x dy = 0. \quad (2.10.2)$$

Выполнение равенства (2.10.1) является необходимым и достаточным условием того, что выражение (2.10.2) есть полный дифференциал, т. е. что существует такая скалярная функция $\psi(x, y, t)$, для дифференциала которой справедливо представление

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy = 0, \quad (2.10.3)$$

причем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x. \quad (2.10.4)$$

Интегрируя (2.10.3), получаем

$$\psi(x, y, t) = \text{const} \quad \text{вдоль линии тока.}$$

Функция $\psi(x, y, t)$ называется *функцией тока* и вводится для описания плоских потоков.

Определим компоненты вихря скорости в случае плоского движения:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \\ \Omega_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \\ \Omega_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Если движение потенциально, то функция тока является гармонической:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Поскольку $v_x = \partial \psi / \partial y$, $v_y = -\partial \psi / \partial x$, то в силу (2.10.4)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (2.10.5)$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (2.10.6)$$

Условие (2.10.6) означает, что *линии тока* $\psi = \text{const}$ и *изопотенциальные линии* $\varphi = \text{const}$ в каждой точке ортогональны друг другу. С геометрической точки зрения неважно, какие из линий являются линиями тока, а какие — изопотенциальными. Линии $\psi = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ называются *сопряженными*. Если известно расположение изопотенциальных линий (а значит и линий тока) для некоторого плоского течения с заданным

значением скорости на границе, то такое расположение задает еще одно плоское движение (*сопряженное движение*). В этом потоке роль изопотенциальных линий $\tilde{\varphi} = \text{const}$ будут выполнять прежние линии тока, а роль линий тока $\tilde{\psi} = \text{const}$ будут выполнять изопотенциальные линии $\varphi = \text{const}$. В самом деле, если положить $\tilde{\varphi} = -\psi$, $\tilde{\psi} = \varphi$, то в силу (2.10.5)

$$-\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}.$$

Соотношения (2.10.5) позволяют выразить функцию тока через известный потенциал и наоборот. Действительно, так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

то

$$\psi(x, y) = -\int_a^x \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \theta(y),$$

где $\theta(y)$ — некоторая функция. С другой стороны,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\int_a^x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dx + \theta'(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Так как движение потенциально, то $\Delta \varphi = 0$ и, значит, $-\partial^2 \varphi / \partial y^2 = \partial^2 \varphi / \partial x^2$. Тогда

$$\int_a^x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx + \theta'(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_a^x + \theta'(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Значит,

$$\theta'(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_a.$$

Поэтому

$$\theta(y) = \int_b^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_a dy$$

и, следовательно,

$$\psi(x, y) = - \int_a^x \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \int_b^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=a} dy.$$

Заметим, что функция тока (как и потенциал) определена с точностью до аддитивной постоянной.

§ 2.11. Комплексная скорость и комплексный потенциал

Функция комплексной переменной $f(z)$ называется *аналитической в точке* $z = z_0$, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Функция называется *аналитической в области*, если она аналитическая в любой точке области.

Если потенциал $\varphi(x, y)$ и функцию тока $\psi(x, y)$ рассматривать как действительную и мнимую части некоторой функции w комплексной переменной $z = x + iy$, то условия (2.10.5) являются необходимыми и достаточными условиями (условия Коши–Римана [12]) аналитичности функции $w(z) = \varphi + i\psi$ в области, в которой они выполняются. В точках этой области функция $w(z)$ имеет производную:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Поскольку

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y,$$

а модуль этой комплексной функции равен модулю скорости

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |\mathbf{v}|,$$

то функцию dw/dz принято называть *комплексной скоростью*, в то время как функцию $w(z)$ естественно назвать *комплексным потенциалом*.

Задавая аналитическую функцию $w(z)$, мы определяем систему линий $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$, а значит, устанавливаем вид поля скоростей для некоторого плоского потенциального течения (если такое течение существует). Изучение свойств функции $w(z)$ с помощью известных методов теории функций комплексной переменной [12] позволяет успешно исследовать соответствующий плоский поток. Рассмотрим некоторые примеры.

§ 2.12. Примеры плоского потенциального движения в односвязных областях

2.12.1. Однородный поступательный поток. Рассмотрим поток, описываемый потенциалом $w = az$, $a > 0$:

$$w(z) = ax + iay = \varphi + i\psi. \quad (2.12.1)$$

Отсюда находим систему изопотенциальных линий

$$\varphi = ax \rightarrow x = \text{const},$$

и линий тока

$$\psi = ay \rightarrow y = \text{const}.$$

Поскольку $v_x = \partial\varphi/\partial x = a > 0$, $v_y = \partial\varphi/\partial y = 0$, то поток движется в направлении возрастания координаты x (рис. 2.12).

Если $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta > 0$, то потенциал принимает вид

$$w = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y) = \varphi + i\psi.$$

Значит, линии тока $y = C - \frac{\beta}{\alpha}x$ повернуты относительно оси X на угол $-\arctg \beta/\alpha$. Поскольку $\varphi = \alpha x - \beta y$, то компоненты скорости вычисляются как

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \alpha, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\beta.$$

Системы линий тока и изопотенциальных линий такого потока изображены на рис. 2.13.

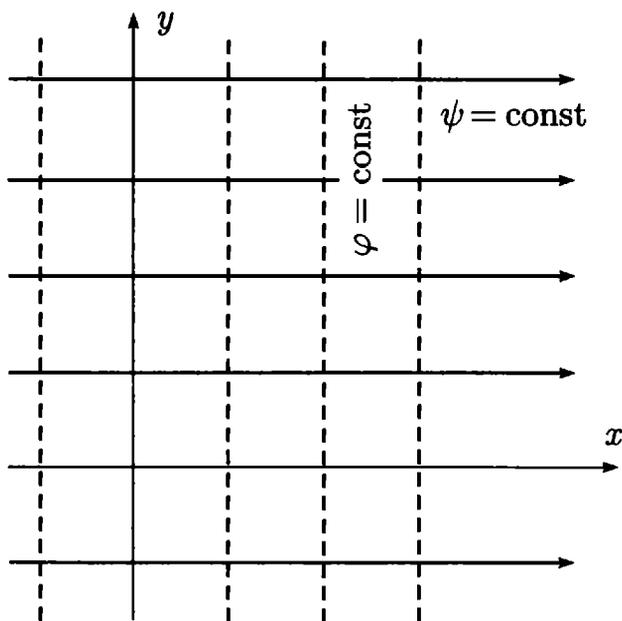


Рис. 2.12

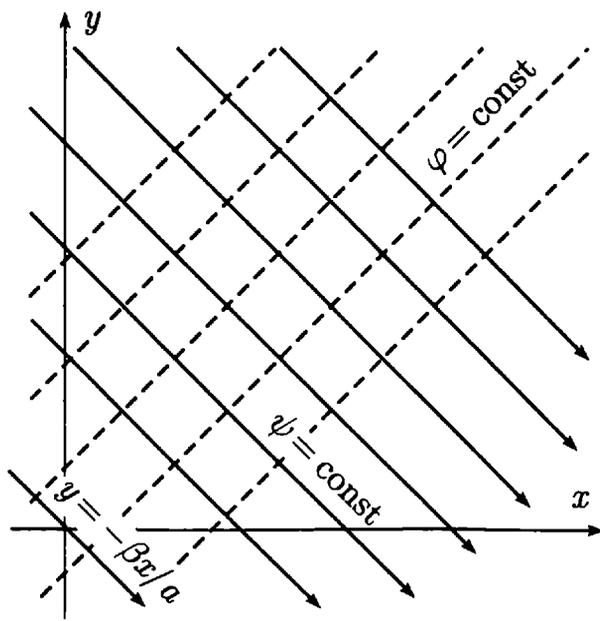


Рис. 2.13

2.12.2. Поток вдоль двух пересекающихся стенок. Такой поток описывается функцией $w = az^{\pi/\alpha}$, где α — угол между стенками, a — вещественно.

Если $\alpha = \pi$, то соответствующий потенциал (2.12.1) описывает однородный поступательный поток, движущийся вдоль твердой стенки без трения.

При значении $\alpha = \pi/2$ получаем, что движение жидкости внутри прямого двухгранного угла описывается потенциалом $w = az^2$. В самом деле, так как

$$w = a(x + iy)^2 = a(x^2 - y^2) + i2axy = \varphi + i\psi,$$

то линии тока представляют собой семейство гипербол

$$xy = \text{const},$$

а изопотенциальные линии — другое семейство гипербол

$$x^2 - y^2 = \text{const},$$

ортогональное в каждой точке линиям тока.

Найдем комплексную скорость:

$$\frac{dw}{dz} = 2az = 2a(x + iy) = v_x - iv_y.$$

Отсюда

$$v_x = 2ax, \quad v_y = -2ay.$$

Скорость направлена так, как показано на рис. 2.14. Ее величина пропорциональна удалению от начала координат.

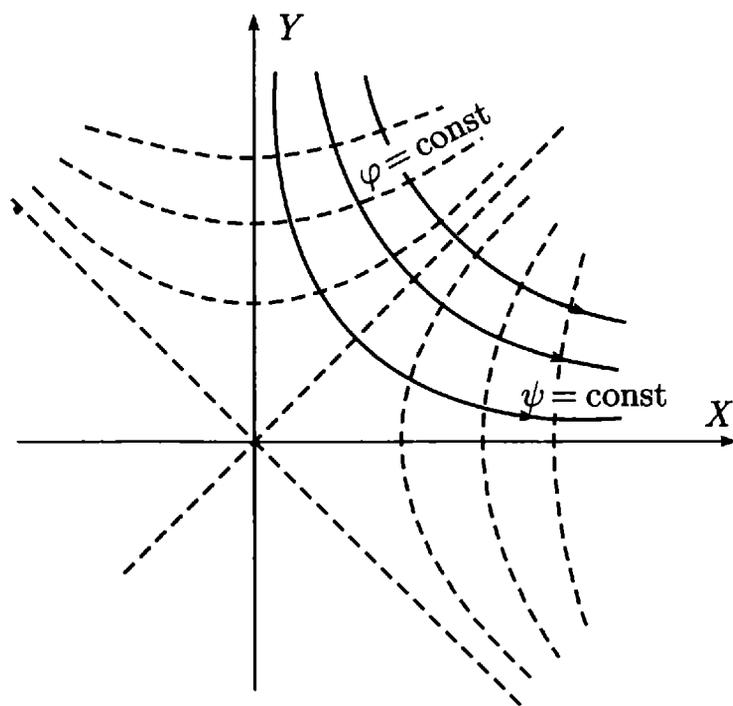


Рис. 2.14

Если линию тока $\psi = 0$, которая совпадает с положительными полуосями X и Y , принять за твердую границу, то такое течение становится физически возможным, причем жидкость внутри угла будет поворачивать без локального относительного вращения частиц, находящихся на разных линиях тока, что характерно для потенциальных течений.

В общем случае, переходя в полярную систему координат (r, θ) на основании формулы Муавра [12], получаем

$$w = ar^{\pi/\alpha} \left(\cos \frac{\pi\theta}{\alpha} + i \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} \right).$$

Следовательно, функция тока выражается как

$$\psi = ar^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}.$$

Если линию тока $\psi = 0$ ($\theta = 0$ или $\theta = \alpha$) отождествить с твердой границей, то потенциал будет описывать движение жидкости внутри двухгранного угла величины α .

Комплексная скорость

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a\pi}{\alpha} z^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$$

равна нулю в точке $z = 0$ при $\alpha < \pi$ и обращается в бесконечность при $\alpha > \pi$. В реальных потоках при обтекании острого ребра возникает вихрь, благодаря чему скорость в точке $z = 0$ имеет конечное значение.

2.12.3. Источник (сток). Рассмотрим потенциал вида

$$w = \ln z.$$

Используя показательную форму представления комплексного числа, получим

$$w = \ln r e^{i\theta} = \ln r + i\theta = \varphi + i\psi,$$

где r, θ — модуль и аргумент числа z .

Следовательно, линии тока представляют собой лучи $\theta = \text{const}$, выходящие из начала координат, а изопотенциальные линии — систему окружностей $r = \text{const}$ с центрами в начале координат (рис. 2.15). Так как $dw/dz = 1/z$, то функция w не является аналитической в точке $z = 0$. Однако, существует физическое течение, которое описывается потенциалом вида $w = \ln z$ и точка $z = 0$ с бесконечным значением скорости имеет вполне определенную физическую интерпретацию.

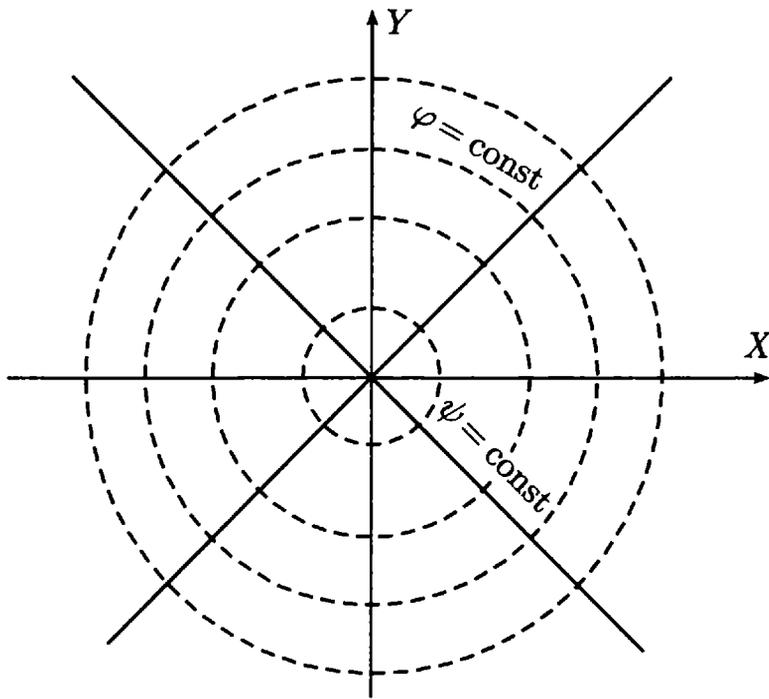


Рис. 2.15

Поскольку линии тока радиально расходятся из начала координат, то можно считать, что в начале координат находится источник (сток) жидкости. Если жидкость несжимаема, то ее количество m , протекающее в единицу времени через поверхность цилиндра единичной высоты с основанием в плоскости XY и осью, проходящей через начало координат, не зависит от радиуса основания. Назовем это количество жидкости мощностью источника, если $m > 0$, или мощностью стока, если $m < 0$.

Нормальная к поверхности цилиндра составляющая скорости равна

$$v_r = \mathbf{n}_r \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Поскольку искомый расход жидкости вычисляется как

$$2\pi r \frac{d\varphi}{dr} = m,$$

то

$$\varphi = \frac{m}{2\pi} \ln r = \frac{m}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Здесь константу положили равной нулю.

Определим выражение для функции тока. Для этого связь (2.10.5) запишем в полярных координатах (r, θ) , $r \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \\ \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= -\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на $\sin \theta$, второе — на $\cos \theta$ и складывая результаты, имеем $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$. Следовательно, $\psi(r, \theta) = \eta_1(\theta)$, где $\eta_1(\theta)$ — некоторая функция. Далее, умножая первое уравнение на $\cos \theta$, второе — на $-\sin \theta$ и складывая результаты, находим $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m}{2\pi}$. Поэтому $\frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} = \frac{m}{2\pi}$. Значит, $\eta_1(\theta) = \frac{m}{2\pi} \theta + \text{const.}$

Полагая константу равной нулю, получаем, что $\psi(r, \theta) = \frac{m}{2\pi} \theta$.

Итак, потенциал $w(z) = \frac{m}{2\pi} \ln z$ соответствует плоскому течению, порожденному источником (стоком) вещества мощности $m > 0$, ($m < 0$), который расположен в начале координат.

Если в точках $z_1 = a_1, z_2 = a_2, \dots, z_n = a_n$ находятся источники или стоки с мощностями m_1, m_2, \dots, m_n , то комплексный потенциал такого течения имеет вид

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{m_1}{2\pi} \ln(z - a_1) + \frac{m_2}{2\pi} \ln(z - a_2) + \dots + \frac{m_n}{2\pi} \ln(z - a_n) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n m_k \ln(z - a_k). \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

Отсюда получаем выражение для потенциала скорости

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n m_k \ln r_k$$

и для функции тока

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n m_k \theta_k,$$

где r_k, θ_k — модуль и аргумент комплексного числа $z - a_k$.

2.12.4. Диполь. В заключение этого параграфа рассмотрим движение жидкости с потенциалом $w(z) = 1/z$. Отделяя действительную часть от мнимой, получаем

$$w = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Уравнения линий тока можно привести к следующему виду путем выделения полного квадрата:

$$x^2 + (y + C_1^{-1})^2 = C_1^{-2}, \quad C_1 = \text{const.}$$

Таким образом, линии тока представляют собой систему окружностей с центрами в точках $(0; -C_1^{-1})$, касающихся оси X в начале координат (рис. 2.16). Аналогично, изопотенциальные линии описываются уравнениями

$$(x - C_2^{-1})^2 + y^2 = C_2^{-2}, \quad C_2 = \text{const},$$

и представляют собой систему окружностей в каждой точке, ортогональных к системе линий тока.

Заметим, что функция $w(z) = 1/z$ теряет аналитичность в точке $z = 0$, так как $\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = -\frac{1}{z^2} \Big|_{z=0}$.

В § 1.6 рассматривалось движение сигарообразного тела в направлении своей продольной оси. Если тело заменить системой источник–сток, расположенной на оси тела, то движение жидкости, порождаемое этой системой, будет таким же, как при движении исходного тела. При совмещении источника и стока в одной точке картина течения вырождается в картину, изображенную на рис. 2.16. Поэтому можно сказать, что потенциал вида $w(z) = 1/z$ описывает течение, порождаемое *диполем*, который представляет собой источник и сток одинаковой мощности, совмещенные в одной точке.

Система, состоящая из источника и стока одинаковой мощности m , расположенных бесконечно близко друг к другу в начале

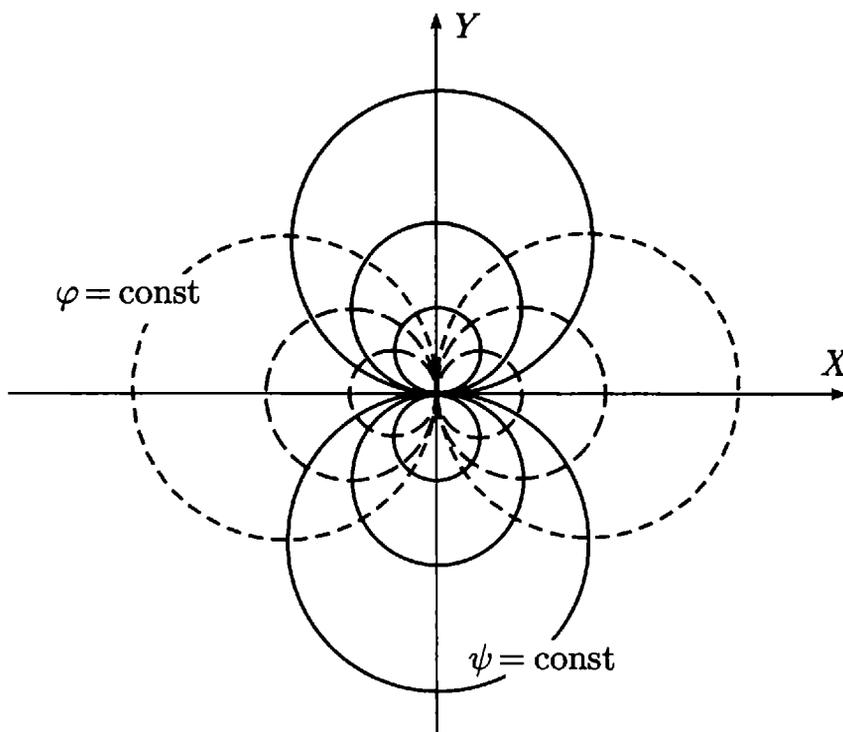


Рис. 2.16

координат под углом α к оси X , создает потенциал

$$w(z) = -\frac{M e^{i\alpha}}{2\pi z}, \quad (2.12.3)$$

где $M = m\delta s$ — момент диполя; δs — вектор, проведенный от стока к источнику [4].

§ 2.13. Примеры плоского потенциального движения в многосвязных областях

Одним из характерных свойств потенциальных течений в односвязных областях является равенство нулю циркуляции скорости вдоль любого замкнутого контура. Однако существуют такие потенциальные потоки, для которых циркуляция в целом для всего потока отлична от нуля. Для существования такого движения необходимо, чтобы область, в которой находится жидкость, была многосвязной. Область пространства или плоскости называется *многосвязной*, если в ней можно провести такие замкнутые кривые, которые нельзя стянуть в точку, не пересекая границы области. Примером двухсвязной области является, например, кольцо.

В § 2.12 было показано, что движение жидкости, порождаемое источником с мощностью m , расположенным в начале координат, описывается потенциалом $w(z) = m/2\pi \ln z$. При этом линиями тока являлась система лучей, выходящих из начала координат, а изопотенциальными линиями — система окружностей с центрами в начале координат. Однако, в силу сопряженности линий тока и изопотенциальных линий, потенциал с логарифмической особенностью может описывать другое потенциальное течение с замкнутыми линиями тока.

Если φ и ψ являются потенциалом и функцией тока для течения, порождаемого источником, а $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ являются потенциалом и функцией тока для сопряженного течения, то

$$\tilde{\varphi} = -\psi, \quad \tilde{\psi} = \varphi.$$

Поэтому потенциал сопряженного потока имеет вид

$$\tilde{w}(z) = \tilde{\varphi} + i\tilde{\psi} = -\psi + i\varphi = -\frac{m}{2\pi} \theta + \frac{mi}{2\pi} \ln r = \frac{mi}{2\pi} \ln z.$$

Итак,

$$\tilde{\varphi} = -\frac{m}{2\pi} \theta, \quad \tilde{\psi} = \frac{m}{2\pi} \ln z.$$

Потенциал $\tilde{\varphi}$ является *неоднозначной функцией*, так как при обходе начала координат в положительном направлении величина $\tilde{\varphi}$ изменяется на значение $-m$: $\tilde{\varphi}(2\pi) - \tilde{\varphi}(0) = -m$; при обходе в отрицательном направлении соответствующая величина изменяется на значение m : $\tilde{\varphi}(-2\pi) - \tilde{\varphi}(0) = m$. Таким образом, циркуляция скорости по любому замкнутому контуру L , содержащему внутри себя начало координат, отлична от нуля, в то время как циркуляция скорости по любому контуру, не содержащему начало координат, равна нулю. В самом деле,

$$\Gamma \equiv \oint_L \mathbf{v} d\mathbf{l} = \oint_L v_x dx + v_y dy + v_z dz = \oint_L d\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(2\pi) - \tilde{\varphi}(0) = -m,$$

где движение по контуру происходит в положительном направлении. Заметим, что циркуляция не зависит от вида контура.

Если исключить из рассмотрения точку $z = 0$, в которой потенциал перестает быть аналитической функцией, а движение — потенциальным, путем исключения некоторой окрестности этой точки, то движение в возникшей при этом двухсвязной области будет потенциальным (*потенциальное движение с циркуляцией*). При таком движении $\text{grad } \tilde{\varphi}$, а значит и вектор скорости, имеет только одну компоненту:

$$v_\theta = (\mathbf{e}_\theta, \text{grad } \tilde{\varphi}) = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} = -\frac{m}{2\pi r}.$$

Движение частиц жидкости, характеризующееся распределением скоростей $v_\theta = -m/2\pi r$ и происходящее по окружностям с центрами в одной точке, называется *вихревой точкой*.

Назовем циркуляцию $\Gamma = -m$ *интенсивностью вихревой точки*. Следовательно, вихревая точка $z = 0$ создает плоское движение, определяемое комплексным потенциалом

$$\tilde{w}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Поскольку в точке $z = 0$ скорость равна бесконечности, то физически такое движение возможно, как уже отмечалось ранее, лишь вне некоторой окрестности точки $z = 0$, т. е. вне некоторого ядра конечного диаметра. Это ядро может быть образовано жидкостью, совершающей непотенциальное движение. Другой способ реализации такого ядра — твердое тело или другая более легкая жидкость, не принимающая участие в движении. Примером последнего случая является полый водяной вихрь, в котором вода движется вокруг ядра из воздуха (рис. 2.17).

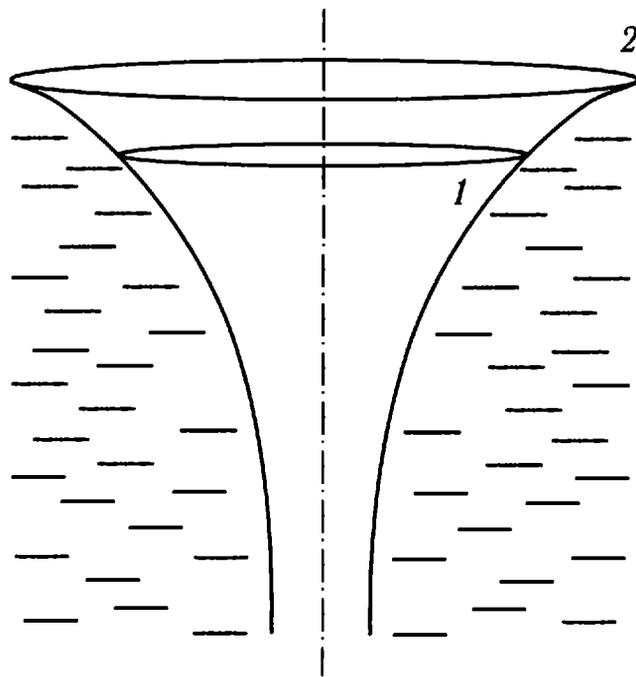


Рис. 2.17

Используя интеграл Бернулли–Эйлера для линий тока 1 и 2, получаем уравнение

$$\frac{p_0}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + gz_0.$$

Отсюда находим уравнение поверхности воронки:

$$z = z_0 - \frac{v^2}{2g} \frac{p_0}{\rho} = z_0 - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2}.$$

Если движение порождается n вихревыми точками $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2, \dots, z_n = a_n$ с интенсивностями $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, то комплексный потенциал, описывающий такое течение, имеет вид

$$w(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \ln(z - a_k). \quad (2.13.1)$$

Если же точечные вихри непрерывно расположены на кривой L с погонной интенсивностью K (интенсивность, отнесенная к единице длины), то комплексный потенциал соответствующего течения представим в виде

$$w(z) = -\frac{Ki}{2\pi} \int_L \ln(z - \bar{z}) dl, \quad (2.13.2)$$

где dl — элемент кривой L , $\bar{z} \in L$.

Рассмотрим теперь движение, описываемое потенциалом

$$w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z, \quad q = m - i\Gamma.$$

Если q вещественно, то потенциал $w(z)$ описывает движение, создаваемое источником мощности m . Если q мнимое, то $w(z)$ соответствует течению, порождаемому вихревой точкой интенсивности Γ . В случае комплексного q движение создается *вихреисточником* и рассматривается как суперпозиция движений, создаваемых источником мощности m и вихревой точкой интенсивности Γ , совмещенных в одной точке. Потенциал при этом имеет вид

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{m - i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta) = \\ &= \frac{1}{2\pi} (m \ln r + \Gamma\theta) + \frac{i}{2\pi} (m\theta - \Gamma \ln r) = \varphi + i\psi. \end{aligned}$$

Линии тока представляют собой семейство логарифмических спиралей $r = C_1 \exp\left(\frac{m}{\Gamma}\theta\right)$, а изопотенциальные линии — другое семейство логарифмических спиралей $r = C_2 \exp\left(-\frac{m}{\Gamma}\theta\right)$, ортогональное в каждой точке к семейству линий тока. На рис. 2.18 схематически изображено семейство линий тока для случая $m > 0$.

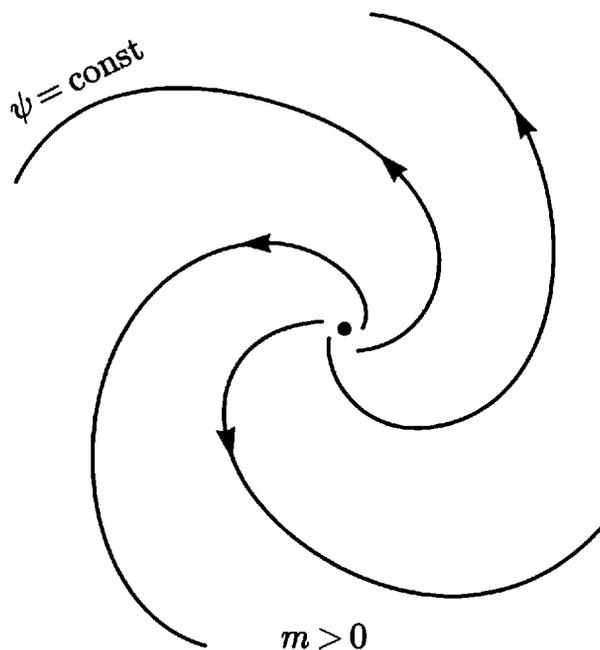


Рис. 2.18

§ 2.14. Вычеты комплексной скорости. Циркуляция и поток скорости

Пусть функция $f(z)$ — аналитическая внутри некоторого кольца между двумя concentric окружностями с центрами в точке a ($0 < r \leq |z - a| \leq R$). Тогда эта функция единственным образом может быть представлена в виде *ряда Лорана* [12]:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - a)^k, \quad (2.14.1)$$

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{k+1}}, \quad (2.14.2)$$

где C — произвольно выбранный контур внутри кольцевой области, по которому обходят точку a в положительном направлении (против часовой стрелки).

1. Если ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями ($C_k = 0, k < 0$), то ряд (2.14.1) становится рядом Тейлора и $f(z)$ — аналитическая функция в точке a (необходимое и достаточное условие аналитичности функции в точке).
2. Если ряд Лорана содержит конечное число m членов с отрицательными степенями, т. е. $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} C_k(z-a)^k$, где $C_{-m} \neq 0$, то точка a называется полюсом m -го порядка (особая точка).
3. Если ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями, то точка a называется существенно особой.

Если $z = a$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, то коэффициент C_{-1} при степени $(z-a)^{-1}$ называется *вычетом функции $f(z)$ в точке a* . Согласно (2.14.2)

$$C_{-1} \equiv \text{Выч}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\xi) d\xi, \quad a \neq \infty.$$

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D за исключением конечного числа точек a_1, a_2, \dots, a_k , пусть C — кусочно-гладкая замкнутая кривая, охватывающая особые точки a_i ($i = \overline{1, k}$) и лежащая целиком в области D . Тогда справедливо представление (*основная теорема теории вычетов*) [12]:

$$\oint_C f(\xi) d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Выч}_{a_k} f(z).$$

Допустим, что для комплексной скорости $\bar{v}(z)$ известно расположение простых полюсов в точках $z_1 = a_1, z_2 = a_2, \dots, z_n = a_n$ и значения A_1, A_2, \dots, A_n вычетов скорости в этих точках. Такая ситуация реализуется в случае течения с потенциалом, имеющим логарифмические особенности в точках $z_1 = a_1, z_2 = a_2, \dots, z_n = a_n$.

Тогда

$$\oint_C \bar{v}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n A_k,$$

где C — замкнутый контур, охватывающий точки a_k . Отделяя вещественную часть от мнимой, имеем

$$\begin{aligned} \oint_C \bar{v}(z) dz &= \oint_C (v_x - iv_y) (dx + i dy) = \\ &= \oint_C (v_x dx + v_y dy) + i \oint_C (v_x dy - v_y dx) = \Gamma + i\Pi. \end{aligned}$$

Вещественная часть Γ имеет смысл циркуляции скорости по замкнутому контуру C . Выясним смысл мнимой части Π .

Рассмотрим $\int_{AB} \mathbf{v} \mathbf{n} dl$, где dl — элемент кривой C ; A и B — две произвольные точки на этой кривой; \mathbf{n} — нормаль, получаемая поворотом касательного вектора $\boldsymbol{\tau}$ на угол $\pi/2$ по часовой стрелке. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{AB} \mathbf{v} \mathbf{n} dl &= \int_{AB} [v_x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + v_y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y})] dl = \\ &= \int_{AB} \left[v_x \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\widehat{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_x})\right) + v_y \cos\left(\frac{\pi}{2} + (\widehat{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_y})\right) \right] dl = \\ &= \int_{AB} [v_x \sin(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_x}) - v_y \sin(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_y})] dl = \\ &= \int_{AB} [v_x \cos(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_y}) - v_y \cos(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_x})] dl = \int_{AB} (v_x dy - v_y dx). \end{aligned}$$

Если $A = B$, то

$$\Pi = \oint_{AB} (v_x dy - v_y dx) = \oint_{AB} \mathbf{v} \mathbf{n} dl.$$

Следовательно, функция Π имеет смысл потока вектора скорости через боковую поверхность цилиндра единичной высоты.

Пусть $A_k = \alpha_k + i\beta_k$. Тогда

$$\Gamma + i\Pi = 2\pi i \sum_{k=1}^n A_k = 2\pi i \sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k) = -2\pi \sum_{k=1}^n \beta_k + 2\pi i \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Следовательно,

$$\Gamma = -2\pi \sum_{k=1}^n \beta_k, \quad \Pi = 2\pi \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

В заключение этого параграфа рассмотрим пример решения задачи.

14.1. *Найти количество жидкости, протекающее в единицу времени через боковую поверхность кругового цилиндра единичной высоты, если сечением цилиндра является круг с центром в точке $z = 0$ и радиусом $r = 2$, а течение порождается источником с мощностью m , расположенным в точке $z = 1$, и точечным вихрем с интенсивностью γ , расположенным в точке $z = 0$.*

Движение описывается комплексным потенциалом $w(z) = m/2\pi \ln(z-1) - i\gamma/2\pi \ln z$. Вычисляя производную от потенциала, получаем выражение для комплексной скорости

$$\bar{v}(z) = \frac{m}{2\pi(z-1)} - \frac{i\gamma}{2\pi z}.$$

Функция $f_1(z) = \frac{m}{2\pi(z-1)}$ является аналитической в любой точке $z = z_1 \neq 1$, так как в окрестности такой точки справедливо разложение

$$f_1(z) = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{1-z_1} \frac{1}{1-(z-z_1)(1-z_1)^{-1}} = -\frac{m}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_1)^k}{(1-z_1)^{k+1}},$$

$$\frac{|z-z_1|}{|1-z_1|} < 1.$$

В окрестности точки $z = 1$ функция $f_1(z)$ представима рядом Лорана

$$f_1(z) = \frac{m}{2\pi(z-1)}.$$

Аналогично, функция $f_2(z) = \gamma/2\pi z$ является аналитической в любой точке $z = z_2 \neq 0$, так как в окрестности такой точки она

представима в виде ряда Тейлора:

$$f_2(z) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{z_2} \frac{1}{1 + (z - z_2) z_2^{-1}} = \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z - z_2)^k}{z_2^{k+1}},$$

$$\frac{|z - z_2|}{|z_2|} < 1.$$

В окрестности же точки $z = 0$ для функции $f_2(z)$ справедливо разложение в ряд Лорана

$$f_2(z) = \frac{\gamma}{2\pi z}.$$

Следовательно, для комплексной скорости $\bar{v}(z)$ в окрестности точки $z = 1$ действительно разложение в ряд Лорана

$$\bar{v}(z) = \frac{m}{2\pi(z-1)} - \frac{i\gamma}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k, \quad |z-1| < 1,$$

а в окрестности точки $z = 0$ комплексная скорость представима как

$$\bar{v}(z) = -\frac{m}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} z^k - \frac{i\gamma}{2\pi z}, \quad |z-0| < 1.$$

Таким образом, приходим к выводу, что $\bar{v}(z)$ имеет простые полюсы в точках $z = 0$ и $z = 1$. Используя определение вычета, окончательно находим

$$\Gamma + i\Pi = 2\pi i \sum_{k=1}^2 \underset{z_k}{\text{Выч}} \bar{v}(z) = 2\pi i \left(-\frac{i\gamma}{2\pi} + \frac{m}{2\pi} \right) = \gamma + im.$$

Отсюда получаем значение искомого потока: $\Pi = m$.

§ 2.15. Вихревые движения идеальной жидкости. Теоремы Томсона, Лагранжа, Гельмгольца

В настоящем параграфе доказаны общие теоремы, позволяющие сформулировать условия невозникновения и неразрушения вихрей в идеальной жидкости на основании уже известных свойств поля вихрей, изложенных в § 1.8.

Внутри жидкости выделим произвольную линию AB , состоящую из жидких частиц. Если через σ обозначить расстояние от точки A до некоторой жидкой частицы на кривой AB , то положение каждой жидкой частицы, принадлежащей AB , в любой момент времени можно рассматривать как функцию $\sigma_0 = \sigma(t_0)$ и t ,

где $t = t_0$ — начальный момент времени. При этом относительно выбранной декартовой системы координат положение жидкой частицы будет задаваться радиусом-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\sigma_0, t)$.

Сопоставим некоторому расположению кривой AB криволинейный интеграл:

$$J = \int_{AB} \mathbf{v} d\mathbf{l} = \int_{AB} v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

Если $L(t)$ — длина AB , то для любого фиксированного момента времени t

$$J(t) = \int_0^{L(t_0)} \left(v_x \frac{\partial x}{\partial \sigma_0} + v_y \frac{\partial y}{\partial \sigma_0} + v_z \frac{\partial z}{\partial \sigma_0} \right) d\sigma_0 = \int_0^{L(t_0)} \left(\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma_0} \right) d\sigma_0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \int_0^{L(t_0)} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma_0} \right) d\sigma_0 + \int_0^{L(t_0)} \left(\mathbf{v} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial \sigma_0} \right) d\sigma_0 = \\ &= \int_0^{L(t_0)} \left(\mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma_0} \right) d\sigma_0 + \int_0^{L(t_0)} \left(\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma_0} \right) d\sigma_0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}(\sigma_0, t)}{\partial t}$ — ускорение жидкой частицы, которая в момент времени t_0 имела координату σ_0 . Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности. Тогда

$$\int_0^{L(t_0)} \left(\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma_0} \right) d\sigma_0 = \frac{1}{2} \int_0^{L(t_0)} \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial \sigma_0} d\sigma_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^2(B) - \mathbf{v}^2(A)).$$

Переходя от переменных (σ_0, t) к переменным (x, y, z, t) , получим

$$\begin{aligned} \int_0^{L(t_0)} \left(\mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma_0} \right) d\sigma_0 &= \int_0^{L(t_0)} \left(w_x \frac{\partial x}{\partial \sigma_0} + w_y \frac{\partial y}{\partial \sigma_0} + w_z \frac{\partial z}{\partial \sigma_0} \right) d\sigma_0 = \\ &= \int_{AB} w_x dx + w_y dy + w_z dz = \int_{AB} \mathbf{w}(x, y, z, t) d\mathbf{l} = \int_{AB} \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{l}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{AB} \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{l} + \frac{1}{2} (\mathbf{v}^2(B) - \mathbf{v}^2(A)).$$

Если точки A и B совпадают, то

$$\frac{dJ}{dt} = \oint_{AB} \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{l}. \quad (2.15.1)$$

Исследуем вихревое движение идеальной баротропной жидкости в поле консервативных массовых сил. Так как жидкость баротропная, то существует такая функция $P(p)$, что

$$\frac{1}{\rho(p)} \text{grad } p = \text{grad } P(p).$$

Поэтому уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } (U + P),$$

где U — потенциал внешнего силового поля. Учитывая этот факт, из (2.15.1) находим

$$\frac{dJ}{dt} = - \oint_{AB} \text{grad } (U + P) d\mathbf{l}.$$

При элементарном перемещении $d\mathbf{l}$ вдоль кривой AB бесконечно малое приращение скалярной величины $U + P$ определяется как (t рассматривается как параметр)

$$\begin{aligned} d(U + P) &= \frac{\partial(U + P)}{\partial x} dx + \frac{\partial(U + P)}{\partial y} dy + \frac{\partial(U + P)}{\partial z} dz = \\ &= \text{grad } (U + P) d\mathbf{l}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{dJ}{dt} = -(U + P)_B + (U + P)_A,$$

или

$$\frac{d}{dt} \oint_{AB} \mathbf{v} d\mathbf{l} = 0.$$

Отсюда

$$\oint_{AB} \mathbf{v} d\mathbf{l} = \text{const.}$$

Таким образом, приходим к теореме Томсона.

При движении идеальной баротропной жидкости в консервативном поле массовых сил циркуляция скорости по любому жидкому контуру остается неизменной.

В рамках, установленных условиями теоремы Томсона, можно доказать теоремы Гельмгольца.

1. *Теорема о сохранении вихревой линии (теорема Гельмгольца–Фридриха). При выполнении условий теоремы Томсона жидкие частицы, образующие вихревую линию, в любой момент движения будут оставаться на вихревой линии. Иными словами, вихревые линии движутся вместе с частицами вещества (вморожены в вещество).*

Для доказательства выберем некоторую линию, которая не будет совпадать ни с одной вихревой, и рассмотрим все вихревые линии, проходящие через выбранную линию. Эти вихревые линии образуют вихревую поверхность S , в каждой точке которой вектор Ω является касательным вектором. Выберем на поверхности S малый контур L так, чтобы он полностью принадлежал S . По формуле Стокса

$$\oint_L \mathbf{v} \, d\mathbf{l} = \int_S \Omega \mathbf{n} \, ds.$$

Так как S — вихревая поверхность, то векторы Ω и \mathbf{n} ортогональны и, следовательно,

$$\oint_L \mathbf{v} \, d\mathbf{l} = 0.$$

В следующий момент времени жидкий контур L перейдет в контур L' , причем L' будет принадлежать поверхности S' , в которую перейдет поверхность S . По теореме Томсона

$$\oint_{L'} \mathbf{v}' \, d\mathbf{l} = 0.$$

Тогда по формуле Стокса

$$\int_{S'} \Omega' \mathbf{n}' \, ds = 0.$$

В силу произвольности S' вектор Ω' ортогонален к вектору \mathbf{n}' , и поверхность S' — вихревая. Таким образом, если в некоторый момент времени поверхность является вихревой, то в любой другой момент времени она остается вихревой поверхностью.

Выберем на вихревой поверхности S некоторую вихревую линию l и проведем через эту вихревую линию другую вихревую поверхность Σ . В следующий момент времени вихревые поверхности S и Σ перейдут в вихревые поверхности S' и Σ' , а линия их пересечения l — в линию пересечения l' поверхностей S' и Σ' . В каждой точке линии l' вектор Ω' является касательным и к поверхности S' , и к поверхности Σ' . Но тогда Ω' направлен вдоль линии l' , и, значит, l' — вихревая линия.

Из первой теоремы Гельмгольца следует, что при выполнении условий теоремы Томсона любая вихревая трубка остается вихревой в любой момент движения, так как она состоит из вихревых линий.

2. Теорема о сохранении интенсивности вихревой трубки. Пусть выполнены условия теоремы Томсона. Тогда интенсивность любой вихревой трубки во время движения остается постоянной.

В § 1.8 было показано, что интенсивность вихревой трубки равна циркуляции скорости по любому контуру L , лежащему на поверхности вихревой трубки:

$$\int_{\Sigma} \Omega \mathbf{n} d\sigma = \oint_L \mathbf{v} dl.$$

Но по теореме Томсона

$$\oint_L \mathbf{v} dl = \oint_{L'} \mathbf{v}' dl = \text{const},$$

где L' — контур, в который перейдет контур L в следующий момент времени. Поэтому

$$\int_{\Sigma} \Omega \mathbf{n} d\sigma = \text{const},$$

и теорема доказана.

Установим наиболее очевидные выводы из теорем Томсона и Гельмгольца.

2.15.1. Теорема Лагранжа. *Пусть выполнены условия теоремы Томсона. Тогда если движение жидкости в некоторый момент времени в некоторой пространственной области было потенциальным, то оно было потенциальным до этого момента и останется после.*

Пусть в некоторой области G движение жидкости потенциально. Тогда $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ в G . По формуле Стокса

$$\oint_L \mathbf{v} \, d\mathbf{l} = \int_{S \subset G} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, ds = 0,$$

где S — поверхность, натянутая на контур L и принадлежащая G . В соответствии с теоремой Томсона

$$\oint_{L'} \mathbf{v}' \, d\mathbf{l} = 0$$

во все предыдущие и последующие моменты времени. Поэтому для любой поверхности S' , натянутой на контур L' и принадлежащей области G' , в которую перешла область G , справедливо равенство

$$\int_{S' \subset G'} \operatorname{rot} \mathbf{v}' \, ds = \int_{S' \subset G'} \boldsymbol{\Omega}' \, ds = 0.$$

Следовательно, $\boldsymbol{\Omega}' \equiv 0$ в G' в любой момент времени.

Заметим, что из теоремы Томсона также следует утверждение, согласно которому движение идеальной баротропной жидкости, возникшее из состояния покоя, является потенциальным.

2.15.2. В частях объема с жидкостью, где движение было непотенциальным, новые вихри не образуются, а старые — не разрушаются, поскольку вихревые линии, как было показано при доказательстве теоремы Гельмгольца–Фридмана, вморожены в вещество и перемещаются вместе с ним.

Обратим особое внимание на то, что выводы, сделанные в пунктах 2.15.1 и 2.15.2 относительно невозникновения вихрей, допустимы, если нет поверхности раздела, возникающей при слиянии двух потоков жидкости различного происхождения. В этом случае из-за неустойчивости поверхности раздела могут возникать вихри, что не противоречит теореме Томсона, так как разные потоки между собой не перемешиваются.

2.15.3. Теорема Лагранжа приводит нас к важному выводу. Вихри возникают, если: 1) жидкость неидеальная (существует вязкость); 2) процесс небаротропный (например, плотность зависит от температуры); 3) поле массовых сил не консервативно.

2.15.4. В рамках, установленных условиями теоремы Томсона, с использованием основного уравнения движения идеальной жидкости, можно получить *уравнение Гельмгольца*.

В соответствии с (2.4.6) уравнение движения идеальной жидкости представимо в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p.$$

Учитывая консервативность поля массовых сил и баротропность жидкости, приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} &= -\text{grad} H, \\ H &= P + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + U, \quad \boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{v}, \end{aligned} \tag{2.15.1.1}$$

где U — потенциал поля массовых сил, $\text{grad} P = \frac{1}{\rho} \text{grad} p$.

Вычислим ротор от обеих частей уравнения (2.15.1.1):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \text{rot} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = 0.$$

Так как

$$\begin{aligned} \text{rot} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) &= \boldsymbol{\Omega} \text{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{div} \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{v}, \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega}, \nabla) \mathbf{v} = \\ &= \boldsymbol{\Omega} \text{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega}, \nabla) \mathbf{v}, \end{aligned}$$

где $\text{div} (\text{rot} \mathbf{v}) = 0$, то

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \text{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega}, \nabla) \mathbf{v} = 0$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \text{div} \mathbf{v} = (\boldsymbol{\Omega}, \nabla) \mathbf{v}. \tag{2.15.1.2}$$

Уравнение (2.15.1.2) называется *уравнением Гельмгольца*.

В случае несжимаемой жидкости приходим к уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega}, \nabla) \mathbf{v}.$$

§ 2.16. Движение системы цилиндрических вихрей

Большинство явлений в жидких средах относится к классу вихревых и только в немногих случаях удается воспользоваться приближением потенциального движения, теоретическое описание которого разработано наиболее полно. Вихревой процесс в жидкости — крайне сложное явление, которое часто носит турбулентный (хаотический) характер. Для упрощенного моделиро-

вания вихревых процессов в идеальной жидкости часто рассматривают движение жидкости под действием *вихревых нитей* — бесконечно тонких вихревых трубок. Прямолинейная вихревая нить порождает движение жидкости, называемое *цилиндрическим вихрем*.

Предположим, что прямолинейная вихревая нить расположена вдоль оси Z . Очевидно, что характеристики движения жидкости при этом не зависят от координаты z , и, значит, движение является плоским. Поэтому можно исследовать движение жидких частиц, например, в плоскости XU . Это движение порождается *точечным вихрем (вихревой точкой)*, который получается в результате пересечения плоскости XU вихревой нитью.

В § 2.13 было показано, что точечный вихрь (вихревая точка) создает движение частиц жидкости по окружностям с радиусами r и скоростями $v = \Gamma/2\pi r$, где Γ — циркуляция скорости по любому замкнутому контуру с положительным направлением обхода, охватывающему точечный вихрь. При этом если точечный вихрь расположен в точке z_0 , то комплексный потенциал, описывающий движение жидкости во внешней по отношению к малой окрестности точки z_0 области, имеет вид

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0).$$

Рассмотрим движение двух прямолинейных вихревых нитей. В этом случае задачу можно свести к плоской задаче о движении двух точечных вихрей, расположенных в точках z_1 и z_2 , имеющих интенсивности Γ_1 и Γ_2 , и получающихся в результате пересечения вихревых нитей с плоскостью XU . Комплексный потенциал, описывающий движение жидкости, дается формулой (2.13.1):

$$w(z) = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \ln(z - z_1) + \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \ln(z - z_2).$$

Заметим, что в общем случае процесс является нестационарным и потенциал зависит от времени.

Комплексная скорость определяется как

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{z - z_1} + \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{z - z_2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = \frac{dx}{dt} - i \frac{dy}{dt} = \frac{d\bar{z}}{dt},$$

где $\bar{z} = x - iy$ — число, сопряженное к z . Итак,

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{z - z_1} + \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{z - z_2}.$$

На вихрь Γ_1 действует только вихрь Γ_2 , и потенциал, создаваемый вихрем Γ_2 , в точке z_1 равен

$$w_2(z_1) = \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \ln(z_1 - z_2).$$

Следовательно, комплексная скорость в точке z_1 вычисляется как

$$\frac{dw_2}{dz_1} = \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2} = v_{x_1} - iv_{y_1} = \frac{d\bar{z}_1}{dt}, \quad (2.16.1)$$

где $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$. Уравнение (2.16.1) является уравнением движения вихря Γ_1 в поле вихря Γ_2 .

Аналогично получается уравнение движения вихря Γ_2 в поле вихря Γ_1 :

$$\frac{d\bar{z}_2}{dt} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{z_2 - z_1}, \quad (2.16.2)$$

где $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$.

Из (2.16.1) находим, что

$$\frac{dx_1}{dt} - i \frac{dy_1}{dt} = - \frac{i\Gamma_2}{2\pi((x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2))}.$$

Умножая числитель и знаменатель в правой части на величину, сопряженную к знаменателю, получаем

$$\frac{dx_1}{dt} - i \frac{dy_1}{dt} = - \frac{i\Gamma_2((x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2))}{2\pi((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)},$$

или

$$\frac{dx_1}{dt} - i \frac{dy_1}{dt} = - \frac{\Gamma_2(y_1 - y_2)}{2\pi R^2} - \frac{i\Gamma_2(x_1 - x_2)}{2\pi R^2},$$

где $R^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ — квадрат расстояния между вихрями. Разделяя действительную и мнимую части, имеем:

$$\frac{dx_1}{dt} = - \frac{\Gamma_2(y_1 - y_2)}{2\pi R^2}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\Gamma_2(x_1 - x_2)}{2\pi R^2}. \quad (2.16.3)$$

Аналогично, из (2.16.2) находим:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\Gamma_1(y_1 - y_2)}{2\pi R^2}, \quad \frac{dy_2}{dt} = - \frac{\Gamma_1(x_1 - x_2)}{2\pi R^2}. \quad (2.16.4)$$

Умножая первое уравнение в (2.16.3) на Γ_1 , первое уравнение в (2.16.4) — на Γ_2 и складывая результаты, получаем

$$\Gamma_1 \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_2 \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

Отсюда следует первый интеграл системы (2.16.1), (2.16.2)

$$\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 = \text{const.} \quad (2.16.5)$$

Аналогично, умножая второе уравнение в (2.16.3) на Γ_2 , второе уравнение в (2.16.4) — на Γ_1 и складывая результаты, имеем еще один первый интеграл

$$\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2 = \text{const.} \quad (2.16.6)$$

Выражения для первых интегралов (2.16.5) и (2.16.6) разделим на $\Gamma_1 + \Gamma_2$ и введем обозначения:

$$x_0 \equiv \frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \text{const}, \quad y_0 \equiv \frac{\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \text{const.} \quad (2.16.7)$$

В системе двух вихрей точка, положение которой определяется координатами (2.16.7), называется *центром инерции системы из двух вихрей*.

Согласно (2.16.7) с течением времени центр инерции в системе из двух свободных вихрей остается неподвижным.

Далее, вычтем из первого уравнения в (2.16.3) первое уравнение в (2.16.4), а из второго уравнения в (2.16.3) — второе уравнение в (2.16.4):

$$\begin{aligned} \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} &= -\frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(y_1 - y_2)}{2\pi R^2}, \\ \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} &= \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(x_1 - x_2)}{2\pi R^2}. \end{aligned} \quad (2.16.8)$$

Первое уравнение в (2.16.8) умножим на разность $x_1 - x_2$, а второе — на разность $y_1 - y_2$ и результаты сложим:

$$(x_1 - x_2) \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} + (y_1 - y_2) \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим еще один первый интеграл

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \text{const},$$

или

$$R^2 = \text{const.} \quad (2.16.9)$$

Равенство (2.16.9) означает, что в процессе движения расстояние между вихрями сохраняется.

Итак, согласно (2.16.7), (2.16.9) вихри движутся вокруг центра инерции системы с сохранением расстояния между ними.

Рассмотрим теперь систему из n точечных вихрей, расположенных в точках z_1, z_2, \dots, z_n и имеющих интенсивности $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$. Система уравнений, описывающая движение вихрей, представима в виде

$$\frac{d\bar{z}_l}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z_l - z_k}, \quad k \neq l, \quad l = \overline{1, n}. \quad (2.16.10)$$

Умножая каждое уравнение в (2.16.10) на Γ_l и складывая результаты, приходим к уравнению

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_l \frac{d\bar{z}_l}{dt} = 0,$$

интегрирование которого дает первый интеграл системы (2.16.10)

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_l \bar{z}_l = \text{const}. \quad (2.16.11)$$

Отделяя в (2.16.11) действительную часть от мнимой части, получаем два первых интеграла, аналогичных (2.16.11):

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_l x_l = \text{const}, \quad \sum_{l=1}^n \Gamma_l y_l = \text{const}.$$

Если $\sum_{l=1}^n \Gamma_l \neq 0$, то положение центра инерции системы из n вихрей определяется формулами:

$$x_0 = \frac{\sum_{l=1}^n \Gamma_l x_l}{\sum_{l=1}^n \Gamma_l}, \quad y_0 = \frac{\sum_{l=1}^n \Gamma_l y_l}{\sum_{l=1}^n \Gamma_l}.$$

Если $\sum_{l=1}^n \Gamma_l = 0$, то центр инерции системы находится на бесконечности. Например, в случае системы из двух вихрей с интенсивностями Γ_1 и $\Gamma_2 = -\Gamma_1$ центр инерции находится на бесконечности, и вихри движутся параллельно друг другу

с сохранением расстояния между ними. В самом деле, из (2.16.8) следует, что

$$x_1 - x_2 = \text{const}, \quad y_1 - y_2 = \text{const}.$$

Умножим каждое уравнение в (2.16.10) на $\Gamma_l z_l$ и результаты сложим:

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_l z_l \frac{d\bar{z}_l}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq l} \Gamma_k \Gamma_l.$$

Отделив действительную часть, получаем

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_l \left(x_l \frac{dx_l}{dt} + y_l \frac{dy_l}{dt} \right) = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_{l=1}^n \Gamma_l (x_l^2 + y_l^2) = 0.$$

Интегрируя, находим, что

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_l (x_l^2 + y_l^2) = \text{const}. \quad (2.16.12)$$

Если учесть, что $R_l^2 = x_l^2 + y_l^2$ — квадрат расстояния от l -го вихря до начала координат, то первый интеграл (2.16.12) можно интерпретировать так: сумма моментов инерции масс Γ_l относительно начала координат сохраняется с течением времени.

Еще один первый интеграл системы (2.16.10) можно получить, умножив каждое уравнение в (2.16.10) на $\Gamma_l dz_l/dt$ и сложив результаты. В итоге имеем

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_l \frac{dz_l}{dt} \frac{d\bar{z}_l}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq l} \frac{\Gamma_k \Gamma_l}{z_l - z_k} \frac{d(z_l - z_k)}{dt}. \quad (2.16.13)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq l} \frac{\Gamma_k \Gamma_l}{z_l - z_k} \frac{d(z_l - z_k)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \sum_{k \neq l} \Gamma_k \Gamma_l \ln(z_l - z_k).$$

Отделяя мнимую часть в (2.16.13), находим

$$\frac{d}{dt} \sum_{k \neq l} \Gamma_k \Gamma_l \ln R_{lk} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_{k \neq l} \Gamma_k \Gamma_l \ln R_{lk} = 0,$$

где R_{lk} — расстояние между вихрями Γ_l и Γ_k .

§ 2.17. Примеры решения задач

2.17.1. Получить уравнения линий тока в системе из двух закрепленных вихрей с одинаковой интенсивностью Γ , находящихся на расстоянии H друг от друга.

Расположим начало координат между вихрями. Согласно (2.13.1) комплексный потенциал соответствующего течения имеет вид

$$w(z) = -\frac{i}{2\pi} \left[\Gamma \ln \left(z - \frac{H}{2} \right) + \Gamma \ln \left(z + \frac{H}{2} \right) \right] = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(z^2 - \frac{H^2}{4} \right). \quad (2.17.1)$$

Для того чтобы получить уравнения линий тока нужно в (2.17.1) выделить мнимую часть, которая по определению комплексного потенциала является функцией тока и сохраняет постоянное значение вдоль линии тока. Воспользовавшись показательной формой представления комплексного числа $z = x + iy$ [12], имеем

$$\ln z = \ln r + i\theta,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль числа z ; θ — аргумент числа z . Тогда

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(x^2 - y^2 - \frac{H^2}{4} + 2ixy \right) = \\ &= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\ln \sqrt{\left(x^2 - y^2 - \frac{H^2}{4} \right)^2 + 4x^2 y^2} + i\theta \right] = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{\left(x^2 - y^2 - \frac{H^2}{4} \right)^2 + 4x^2 y^2} = \varphi + i\psi, \end{aligned}$$

где θ — аргумент числа $\left(x^2 - y^2 - \frac{H^2}{4} + 2ixy \right)$.

Поэтому семейство линий тока $\psi = \text{const}$ дается представлением

$$\left(x^2 - y^2 - \frac{H^2}{4} \right)^2 + 4x^2 y^2 = \text{const},$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{H^2}{2} (x^2 - y^2) + \frac{H^4}{16} = \text{const}.$$

Полученное уравнение задает семейство овалов Кассини. Переходя в полярную систему координат (r, θ) , имеем

$$r^4 - \frac{H^2}{2} r^2 \cos 2\theta + \frac{H^4}{16} = \text{const}. \quad (2.17.2)$$

Полагая в (2.17.2) $\text{const} = H^4/16$, находим уравнение линии тока, проходящей через начало координат

$$r^2 = \frac{H^2}{2} \cos 2\theta.$$

Это уравнение лемнискаты. Семейство линий тока изображено на рис. 2.19.

Определим комплексную скорость течения:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{4i\Gamma z}{\pi(4z^2 - H^2)} = \frac{dx}{dt} - i\frac{dy}{dt}.$$

Отсюда приходим к системе

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Gamma y \left(x^2 - y^2 - 2x^2 - \frac{H^2}{4} \right)}{\left(x^2 - y^2 - \frac{H^2}{4} \right)^2 + 4x^2 y^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma x \left(x^2 - y^2 + 2y^2 - \frac{H^2}{4} \right)}{\left(x^2 - y^2 - \frac{H^2}{4} \right)^2 + 4x^2 y^2}.$$

На рис. 2.19 представлена фазовая плоскость, отвечающая этой системе. Особенно интересным является движение частиц жидкости по траекториям, проходящим через начало координат

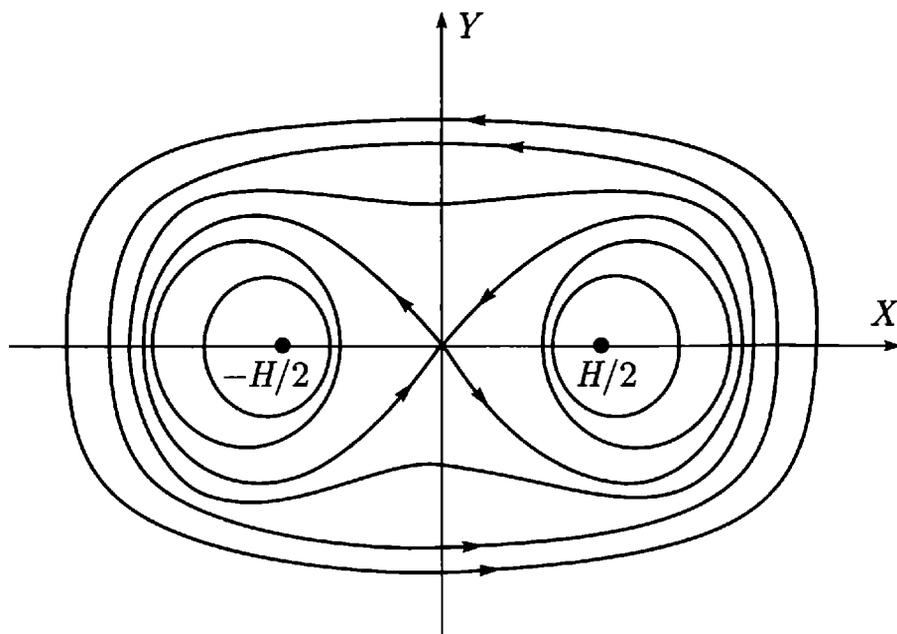


Рис. 2.19

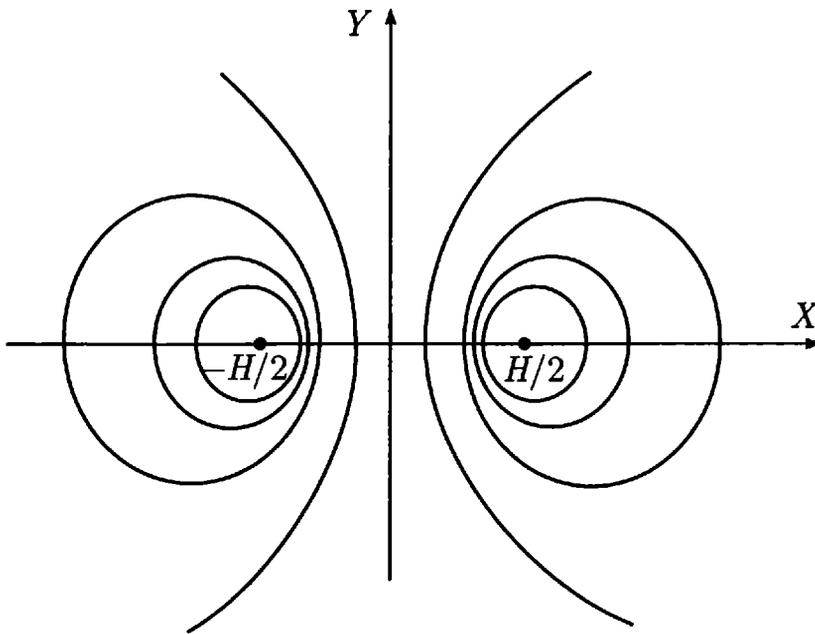


Рис. 2.20

(сепаратрисам). Поскольку точка с координатами $(0; 0)$ является точкой покоя типа седла [6], что несложно установить, анализируя систему в соответствии с методами, рассмотренными в [6], то частицы жидкости будут бесконечно медленно приближаться к этой точке по одной из сепаратрис и так же медленно покидать окрестность начала координат по другой.

Если вихри имеют интенсивности, равные по модулю и противоположные по знаку, то картина течения выглядит так, как показано на рис. 2.20.

2.17.2. *Определить траекторию движения свободного вихря с интенсивностью Γ , находящегося в начальный момент внутри прямого двухгранного угла на расстоянии H от его сторон.*

Течение жидкости от свободного вихря в ограниченной области сводится к течению жидкости в неограниченной области от системы связанных вихрей. При этом система фиктивных вихрей выбирается таким образом, чтобы на поверхности воображаемого двухгранного угла скорость имела только касательную составляющую (рис. 2.21).

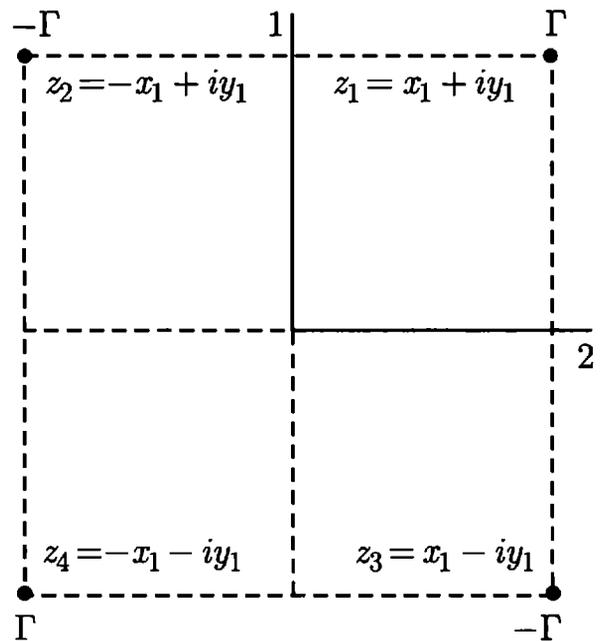


Рис. 2.21

Вихрь в точке z_2 заставляет течь поток вдоль грани 1, но приносит негоризонтальную составляющую скорости на грань 2. Аналогично, вихрь в точке z_3 делает поток горизонтальным на грани 2, но порождает некасательную составляющую скорости на грани 1. Поэтому в точку z_4 помещается вихрь, который компенсирует действия вихрей в точках z_2 и z_3 на гранях 2 и 1 соответственно. Таким образом, воздействие фиктивных свободных вихрей в точках z_2 , z_3 и z_4 на вихрь в точке z_1 имитирует присутствие твердой поверхности двухгранного угла.

Заметим, что этот подход к решению задачи по своей сути аналогичен хорошо известному методу электростатических отображений, который широко применяется в электростатике для расчета электростатических полей, порождаемых неподвижными зарядами, расположенными вблизи проводящих поверхностей.

Если вихрь в точке z_1 не закреплен, то он будет перемещаться в поле, порождаемом вихрями, расположенными в точках z_2 , z_3 и z_4 . Комплексный потенциал течения $w(z)$ в точке $z = z_1$, создаваемый вихрями в точках z_2 , z_3 и z_4 , в соответствии с (2.13.1) представим как

$$\begin{aligned} w(z_1) &= -\frac{i}{2\pi} (\Gamma \ln(z_1 - z_4) - \Gamma \ln(z_1 - z_2) - \Gamma \ln(z_1 - z_3)) = \\ &= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z_1 - z_4}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}. \end{aligned}$$

Учитывая связь между координатами вихрей, находим

$$\begin{aligned} w(z_1) &= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(x_1 + iy_1) - (-x_1 - iy_1)}{(x_1 + iy_1 - (-x_1 + iy_1))(x_1 + iy_1 - (x_1 - iy_1))} = \\ &= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{2x_1} - \frac{i}{2y_1} \right) = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \bar{\theta} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{4x_1^2 y_1^2}} = \varphi(x_1, y_1) + i\psi(x_1, y_1), \end{aligned}$$

где $\bar{\theta}$ — аргумент числа $\left(\frac{1}{2x_1} - \frac{i}{2y_1} \right)$.

Отсюда находим возможные уравнения линий тока

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{y_1^2} = \text{const}.$$

Если $x_1 = H$, $y_1 = H$, то $\text{const} = 2/H^2$ и искомая траектория представляет собой гиперболу с уравнением

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{y_1^2} = \frac{2}{H^2}.$$

2.17.3. Исследовать течение жидкости от совокупности элементарных вихрей с погонной интенсивностью K , расположенных непрерывно на окружности радиуса R .

В соответствии с (2.13.2) комплексный потенциал течения, порождаемого вихрями, расположенными непрерывно вдоль кривой L , дается выражением

$$w(z) = -\frac{iK}{2\pi} \oint_L \ln(z - \bar{z}) dl,$$

где в качестве кривой L выступает окружность радиуса R , $\bar{z} \in L$.

Найдем комплексную скорость течения

$$\bar{v}(z) = \frac{dw}{dz} = -\frac{iK}{2\pi} \oint_L \frac{dl}{z - \bar{z}}.$$

Перейдя в полярную систему координат, находим

$$\begin{aligned} \bar{v}(z) &= -\frac{iK}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta}{z - R e^{i\theta}} = -\frac{iKR}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z} + \int_0^{2\pi} \frac{R e^{i\theta} d\theta}{z(z - R e^{i\theta})} \right) = \\ &= -\frac{iKR}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{z} + \frac{1}{iz} \int_0^{2\pi} \frac{dR e^{i\theta}}{z - R e^{i\theta}} \right) = -\frac{iKR}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{z} - \frac{1}{iz} \oint_L \frac{d\bar{z}}{\bar{z} - z} \right). \end{aligned}$$

Интеграл в выражении для комплексной скорости можно вычислить, используя основную теорему теории вычетов (см. § 2.14):

$$\oint_L \frac{d\bar{z}}{\bar{z} - z} = 2\pi i \text{Выч}_z \frac{1}{\bar{z} - z}, \text{ если точка } z \text{ лежит внутри контура } L,$$

$$\oint_L \frac{d\bar{z}}{\bar{z} - z} = 0, \text{ если точка } z \text{ лежит вне контура } L.$$

Поэтому

$$\bar{v}(z) = -\frac{iKR}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{z} - \frac{1}{iz} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 2\pi i \end{array} \right\} \right) = \begin{cases} -\frac{iKR}{z}, \\ 0 \end{cases}$$

в зависимости от расположения точки z . Так как $\bar{v}(z) = v_x - iv_y$, то внутри кольца жидкость покоится, в то время как вне кольца она движется, причем комплексная скорость движения равна

$$\bar{v}(z) = -\frac{iKR}{x+iy} = -\frac{KRy}{x^2+y^2} - \frac{iKRx}{x^2+y^2}.$$

Следовательно,

$$v_x = -\frac{KRy}{x^2+y^2}, \quad v_y = \frac{KRx}{x^2+y^2}.$$

Поэтому

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{KR}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

где $\Gamma = 2\pi RK$ — интенсивность вихревого кольца. Таким образом, частицы жидкости вне кольца имеют такие же скорости, как при движении вокруг вихревой точки с интенсивностью $\Gamma = 2\pi RK$, расположенной в начале координат.

§ 2.18. Вихревые цепочки Кармана

Рассмотрим бесконечный ряд точечных вихрей одинаковой интенсивности Γ , отстоящих на расстояние l друг от друга и расположенных на прямой, параллельной (для определенности) оси X (рис. 2.22).

Комплексный потенциал течения от такой совокупности вихрей представим как

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} (\ln(z - z_k) + \ln(z - z_{-k})) \right],$$

$$z \neq z_0, \quad z \neq z_k, \quad z \neq z_{-k},$$

где z_0, z_{-1}, z_1, \dots — точки, в которых расположены вихри.

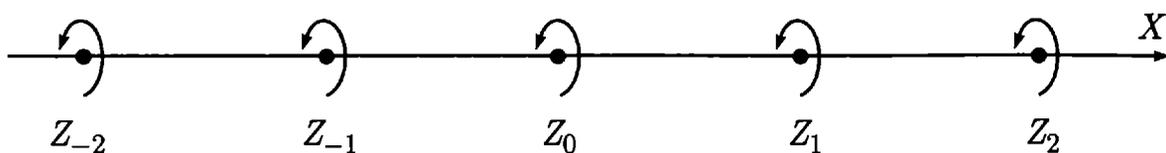


Рис. 2.22

Так как потенциал определен с точностью до аддитивной постоянной, то функция

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln \frac{\pi(z - z_0)}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln \frac{z - z_k}{-lk} + \ln \frac{z - z_{-k}}{lk} \right) \right] \quad (2.18.1)$$

также является комплексным потенциалом, описывающим течение от бесконечной вихревой цепочки. Далее (2.18.1) представим как

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{\pi(z - z_0)}{l} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(z - z_k)(z - z_{-k})}{-l^2 k^2} \right).$$

Учитывая, что $z_k = z_0 + lk$, $z_{-k} = z_0 - lk$, находим

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{\pi(z - z_0)}{l} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(z_0 + lk - z)(z - z_0 + lk)}{l^2 k^2} \right) = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left[\frac{\pi(z - z_0)}{l} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z - z_0)^2}{l^2 k^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.18.2)$$

Применив к (2.18.2) известную формулу

$$\sin \pi \xi = \pi \xi \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{k^2} \right),$$

получим

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi(z - z_0)}{l}. \quad (2.18.3)$$

Поэтому комплексная скорость в точке z определяется как

$$\bar{v}(z) = \frac{\Gamma}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - z_0)}{l}. \quad (2.18.4)$$

Поскольку вихри расположены симметрично, то они будут перемещаться с одинаковыми скоростями, и, определив значение скорости в точке z_0 , мы, тем самым, определим скорость движения вихревой цепочки. В соответствии с (2.18.1) потенциал, создаваемый вихревой цепочкой в точке z_0 , определяется как

$$w(z_0) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln \frac{z_0 - z_k}{-lk} + \ln \frac{z_0 - z_{-k}}{lk} \right) = 0,$$

и, значит, комплексная скорость вихря в точке z_0 равна нулю. Следовательно, одна вихревая цепочка остается неподвижной.

Рассмотрим теперь две параллельные бесконечные цепочки вихрей. Пусть расстояние между соседними вихрями равно l , расстояние между цепочками равно h , интенсивности вихрей в первой и во второй цепочках соответственно равны Γ и $-\Gamma$.

Комплексный потенциал в любой точке плоскости, положение которой не совпадает с положением какого-нибудь вихря, определяется как

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi(z - z_1)}{l} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi(z - z_2)}{l},$$

где z_1 — координата одного из вихрей в первой цепочке; z_2 — координата ближайшего к точке z_1 вихря во второй цепочке. При этом комплексная скорость в точке z равна

$$\bar{v}(z) = \frac{\Gamma}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - z_1)}{l} - \frac{\Gamma}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - z_2)}{l}. \quad (2.18.5)$$

Для того чтобы найти скорости перемещения цепочек, достаточно в силу симметрии цепочек определить скорости вихрей, расположенных в точках z_1 и z_2 .

Вихрь, расположенный в точке z_1 , будет перемещаться лишь под влиянием второй цепочки, так как одна цепочка не перемещается. Выражение для комплексной скорости в точке z_1 получается из (2.18.5), если вычеркнуть первое слагаемое:

$$\bar{v}(z_1) \equiv v_{x_1} - iv_{y_1} = -\frac{\Gamma}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi(z_1 - z_2)}{l}.$$

Аналогично, вычеркнув второе слагаемое в (2.18.5), найдем комплексную скорость в точке z_2 :

$$\bar{v}(z_2) \equiv v_{x_2} - iv_{y_2} = \frac{\Gamma}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi(z_2 - z_1)}{l}.$$

Так как $\bar{v}(z_1) = \bar{v}(z_2)$, то цепочки перемещаются с равными скоростями. Учитывая, что $\sin iy = i \operatorname{sh} y$, $\cos iy = \operatorname{ch} y$ [12], находим

$$\operatorname{ctg}(x + iy) = \frac{\sin 2x - i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}.$$

Используя этот результат, имеем

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi(b + ih)}{l} = \frac{\sin \frac{2\pi b}{l} - i \operatorname{sh} \frac{2\pi h}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi b}{l}},$$

где $b + ih = z_1 - z_2$. Отсюда

$$v_{x_1} = v_{x_2} = \frac{\Gamma}{2l} \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi h}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi b}{l}},$$

$$v_{y_1} = v_{y_2} = -\frac{\Gamma}{2l} \frac{\sin \frac{2\pi b}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi b}{l}}.$$

Поскольку перемещение предполагается параллельным оси X , то $v_{y_1} = v_{y_2} = 0$. Из этого требования следует, что $\sin 2\pi b/l = 0$. Поэтому $b = 0$ или $b = l/2$.

В случае $b = 0$ имеет место *симметричный порядок* расположения вихрей, т. е. под каждым вихрем одного ряда расположен вихрь другого ряда. При этом цепочки движутся параллельно оси OX со скоростью

$$v_{x_1} = v_{x_2} = \frac{\Gamma}{2l} \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi h}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi h}{l} - 1} = \frac{\Gamma}{2l} \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l} \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi h}{l}} = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{l}.$$

Если $b = l/2$, то вихри расположены в *шахматном порядке*. Скорость движения цепочек равна

$$v_{x_1} = v_{x_2} = \frac{\Gamma}{2l} \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi h}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi h}{l} + 1} = \frac{\Gamma}{2l} \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l} \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l}} = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l}.$$

Бесконечные цепочки вихрей, расположенные в симметричном или шахматном порядке, называются *вихревыми цепочками Кармана*.

Цепочки Кармана можно наблюдать на опыте при обтекании тел правильной формы, например, при обтекании вертикального кругового цилиндра. Если скорость потока достаточно велика, то позади цилиндра с поверхности поочередно справа и слева начинают срывать вихри. Возникновение вихрей обусловлено наличием сил вязкости, которые при больших скоростях движения потока проявляют себя главным образом вблизи поверхности цилиндра. В точках, удаленных от цилиндра, влияние вязкости существенно ослабевает, так что в ряде случаев ею можно пренебречь. На некотором расстоянии за обтекаемым телом между вихрями устанавливается определенное расстояние, причем

вихри располагаются в шахматном порядке и имеют противоположные вращения.

§ 2.19. Плоские задачи о движении тел в идеальной жидкости

В соответствии с принципом относительности Галилея равномерное и прямолинейное движение замкнутой системы не влияет на ход протекающих в ней механических процессов. Этот принцип позволяет говорить о динамической эквивалентности следующих задач:

- задача о прямолинейном и равномерном движении тела в жидкости, которая покоится на бесконечности;
- задача об установившемся обтекании неподвижного тела потоком жидкости, для которой бесконечно удаленные частицы имеют постоянную скорость.

Динамическая эквивалентность этих задач состоит в эквивалентности сил, действующих на тело со стороны жидкости. Однако характер течения жидкости в этих двух случаях различен. В первом случае течение является неустановившимся, в то время как во втором случае процесс установился.

Будем рассматривать плоские безвихревые задачи о движении (или обтекании) тел в идеальной несжимаемой жидкости. Такие задачи сводятся к нахождению комплексных потенциалов, т. е. к подбору такого расположения особых точек (вихревых, источников и так далее), которое при отсутствии тела давало бы ту же самую картину течения.

Пусть цилиндрическое тело с произвольным гладким сечением γ движется в жидкости. Отыскание комплексного потенциала, описывающего соответствующее течение, можно свести к отысканию функции тока $\psi(x, y)$, так как потенциал $\varphi(x, y)$ и функция тока связаны через условие Коши–Римана (2.10.5). При этом функция тока является гармонической во внешней по отношению к цилиндру области D_e :

$$\Delta\psi = 0, \quad (x, y) \in D_e. \quad (2.19.1)$$

Если тело движется в жидкости, покоящейся на бесконечности, то на бесконечности выполняются условия:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (2.19.2)$$

Поскольку сечение поверхности цилиндра является гладкой кривой, то в каждой точке контура γ определена нормаль n

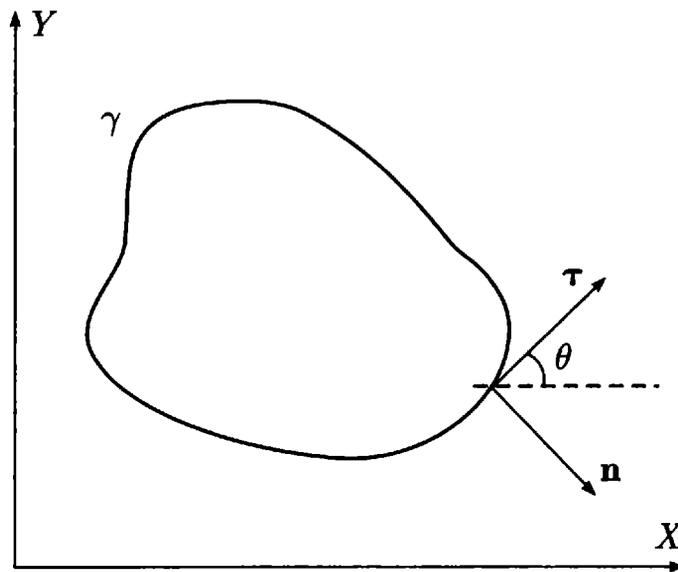


Рис. 2.23

и касательный вектор τ . Обозначим через θ угол между вектором τ и осью X (рис. 2.23).

Тогда для нормальной составляющей скорости движения частиц жидкости на границе имеем выражение

$$\begin{aligned} v_n|_{\gamma} &= (v_x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + v_y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}))|_{\gamma} = \\ &= (v_x \sin \theta + v_y \sin(\widehat{\tau, \mathbf{e}_y}))|_{\gamma} = (v_x \sin \theta - v_y \cos \theta)|_{\gamma}. \end{aligned}$$

Далее, если ds — бесконечно малый элемент кривой γ , а dx и dy — проекции ds на координатные оси, то вводя натуральный параметр s , определяемый как расстояние от некоторой фиксированной точки на γ до произвольной, окончательно находим

$$v_n|_{\gamma} = \left(v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds} \right) \Big|_{\gamma} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) \Big|_{\gamma} = \frac{d\psi}{ds} \Big|_{\gamma}.$$

Пусть цилиндр движется со скоростью $\mathbf{u} = \{u_x, u_y\}$. Тогда на поверхности цилиндра имеет место граничное условие

$$v_n|_{\gamma} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\gamma} = (u_x \sin \theta - u_y \cos \theta)|_{\gamma},$$

или

$$\frac{d\psi}{ds} \Big|_{\gamma} = (u_x \sin \theta - u_y \cos \theta)|_{\gamma}. \quad (2.19.3)$$

В частности, если тело поступательно движется со скоростью U вдоль оси X , то

$$\frac{d\psi}{ds} \Big|_{\gamma} = U \sin \theta|_{\gamma} = U \frac{dy}{ds} \Big|_{\gamma}.$$

Умножая обе части полученного равенства на ds и интегрируя вдоль γ от некоторой фиксированной точки до произвольной, получаем граничное условие вида

$$\psi|_{\gamma} = Uy + \text{const}, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (2.19.4)$$

Если в жидкости имеются покоящиеся тела с границами γ_i , то на границах этих тел выполняются условия

$$\left. \frac{d\psi}{ds} \right|_{\gamma_i} = 0,$$

или

$$\psi|_{\gamma_i} = \text{const}. \quad (2.19.5)$$

Пусть цилиндр совершает произвольное движение. Такое движение можно разложить на поступательное движение со скоростью $\mathbf{U}^{\text{пост}} = \{U, V\}$ и вращательное движение, осуществляемое вокруг начала координат с угловой скоростью ω . Тогда если \mathbf{u} — скорость движения некоторой точки на γ , \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенной из начала координат к выбранной точке, то

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}^{\text{пост}} + [\omega, \mathbf{r}].$$

Следовательно,

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x.$$

Поэтому в силу (2.19.3)

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\psi}{ds} \right|_{\gamma} &= [(U - \omega y) \sin \theta - (V + \omega x) \cos \theta]|_{\gamma} = \\ &= \left[(U - \omega y) \frac{dy}{ds} - (V + \omega x) \frac{dx}{ds} \right] \Big|_{\gamma}. \end{aligned}$$

Интегрируя вдоль γ , находим

$$\psi|_{\gamma} = Uy - Vx - \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2) + \text{const}, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (2.19.6)$$

Таким образом, для функции тока получаем внешнюю задачу Дирихле (2.19.1), (2.19.2), (2.19.6) для уравнения Лапласа, куда время входит как параметр.

Задачу о движении цилиндра можно решать путем поиска функции $\varphi(x, y)$. Вне контура γ потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0, \quad (x, y) \in D_e. \quad (2.19.7)$$

На самом контуре выполняется условие

$$v_n|_{\gamma} = (\mathbf{n}, \text{grad } \varphi)|_{\gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\gamma} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\gamma}. \quad (2.19.8)$$

Поскольку на бесконечности жидкость покоится, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (2.19.9)$$

Следовательно, для определения потенциала получаем внешнюю задачу Неймана (2.19.7)–(2.19.9) для уравнения Лапласа.

§ 2.20. Движение кругового цилиндра

Пусть в задаче (2.19.1), (2.19.2), (2.19.6) в качестве контура γ выступает окружность радиуса a . Тогда приходим к плоской задаче о течении жидкости вне движущегося круга. Если цилиндр поступательно движется со скоростью $\{U, V\}$, то для определения функции тока получаем задачу

$$\begin{aligned} \Delta \psi = 0, \quad (x, y) \in D_e, \quad \psi|_{\gamma} = Uy - Vx + \text{const}, \quad (x, y) \in \gamma, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.20.1)$$

Пусть для определенности угол α между направлением движения цилиндра и осью X больше нуля, но меньше $\pi/2$.

Поскольку время входит в систему (2.20.1) как параметр, то в каждый фиксированный момент времени можно определить картину течения относительно осей, связанных с центром круга. Это течение будет описываться комплексным потенциалом $w(z)$, где $z = r e^{i\theta}$, (r, θ) — координаты в полярной системе, связанной с центром круга. Найдем комплексный потенциал $w(z)$, используя соотношение

$$\frac{dw(z)}{dz} = v_x - i v_y,$$

где $v_x \rightarrow 0$, $v_y \rightarrow 0$ при $(x, y) \rightarrow \infty$. Так как движение жидкости потенциально, то комплексная скорость является однозначной аналитической функцией вне круга. Из курса теории функций комплексной переменной [12] известно, что ряд Лорана для такой функции имеет вид

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$w(z) = C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{2z^2} + \dots \quad (2.20.2)$$

Пусть в (2.20.2)

$$C_k = A_k + iB_k.$$

Тогда

$$w(z) = (A_1 + iB_1)(\ln r + i\theta) - \frac{(A_2 + iB_2)}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} - \frac{(A_3 + iB_3)}{2r^2(\cos \theta + i \sin \theta)^2} + \dots$$

Отсюда находим значения потенциала и функции тока:

$$\begin{aligned} \varphi &= A_1 \ln r - B_1 \theta - \frac{A_2 \cos \theta + B_2 \sin \theta}{r} - \frac{A_3 \cos 2\theta + B_3 \sin 2\theta}{2r^2} + \dots, \\ \psi &= A_1 \theta + B_1 \ln r + \frac{A_2 \sin \theta - B_2 \cos \theta}{r} + \frac{A_3 \sin 2\theta - B_3 \cos 2\theta}{2r^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.20.3)$$

С другой стороны, согласно граничному условию из (2.20.1),

$$\psi|_{r=a} = Ua \sin \theta - Va \cos \theta + \text{const}. \quad (2.20.4)$$

Полагая в (2.20.3) $r = a$ и сравнивая с (2.20.4), имеем:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \quad A_2 = Ua^2, \quad B_2 = Va^2, \\ A_k &= B_k = 0 \quad \text{при } k \geq 3. \end{aligned}$$

Поскольку в (2.20.4) содержится некоторая константа, то $B_1 \neq 0$. Введем обозначение

$$B_1 \equiv \frac{\Gamma}{2\pi}, \quad \text{где } \Gamma - \text{любое число.}$$

Поэтому

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - (U + iV) \frac{a^2}{z} \equiv w_1(z) + w_2(z), \quad (2.20.5)$$

причем

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{\Gamma\theta}{2\pi} - \frac{a^2(U \cos \theta + V \sin \theta)}{r}, \\ \psi &= \frac{\Gamma \ln r}{2\pi} + \frac{a^2(U \sin \theta - V \cos \theta)}{r}. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое, входящее в формулу (2.20.5). Используя показательную форму представления

комплексного числа, имеем выражение для потенциала $w_2(z)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_2(z) &= -\left(\frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} + i\frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}}\right) \frac{a^2\sqrt{U^2 + V^2}}{z} = \\ &= -\frac{a^2\sqrt{U^2 + V^2}}{z} \sqrt{\frac{U^2}{U^2 + V^2} + \frac{V^2}{U^2 + V^2}} \cdot \exp\left(i \operatorname{arctg} \frac{V}{U}\right) = \\ &= -\frac{a^2\sqrt{U^2 + V^2}}{z} \cdot \exp\left(i \operatorname{arctg} \frac{V}{U}\right). \end{aligned}$$

Сравнивая полученное представление с (2.12.3), приходим к выводу, что течение, соответствующее потенциалу $w_2(z)$, порождает диполь с моментом $M = 2\pi a^2\sqrt{U^2 + V^2}$, расположенный в центре окружности $r = a$ под углом $\alpha = \operatorname{arctg} V/U$ к оси X . Заметим, что α — это угол, который составляет вектор скорости движения цилиндра с осью X . Линии тока в случае течения, описываемого потенциалом $w_2(z)$, выглядят так, как показано на рис. 2.24. Потенциал $w_1(z)$ отвечает потоку, порождаемому вихревой точкой произвольной интенсивности, совмещенной с диполем.

Итак, плоское течение, вызванное движущимся кругом, можно рассматривать как результат наложения на вихревую точку произвольной интенсивности, расположенную в центре круга, диполя, помещенного в эту же точку, ориентированного по направлению движения круга и имеющего момент $M = 2\pi a^2\sqrt{U^2 + V^2}$.

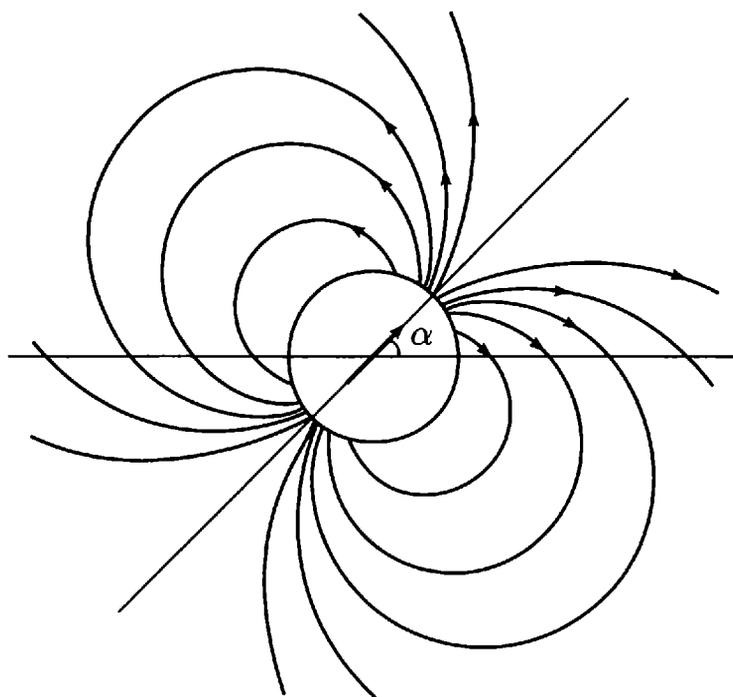


Рис. 2.24

Теперь рассмотрим плоскую задачу об обтекании неподвижного кругового цилиндра поступательно-циркуляционным потоком, имеющим на бесконечности заданную скорость $\bar{v}_\infty = U - iV$. Пусть система координат связана с центром круга. Очевидно, что

$$\bar{v}_\infty = \frac{d\tilde{w}_1}{dz},$$

где функция

$$\tilde{w}_1(z) = (U - iV)z \quad (2.20.6)$$

является комплексным потенциалом, описывающим поступательный поток.

В соответствии с вышеизложенным, если круговой цилиндр движется со скоростью $\{-U, -V\}$, то согласно (2.20.5) картина течения относительно осей, связанных с телом, определяется комплексным потенциалом

$$\tilde{w}_2(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + (U + iV) \frac{a^2}{z}. \quad (2.20.7)$$

Исследуем суперпозицию движений с потенциалами (2.20.6) и (2.20.7). Тогда потенциал результирующего течения представим как

$$w(z) \equiv \tilde{w}_1(z) + \tilde{w}_2(z) = (U - iV)z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + (U + iV) \frac{a^2}{z}. \quad (2.20.8)$$

Вычисляя соответствующую комплексную скорость

$$\frac{dw}{dz} = U - iV + \frac{\Gamma}{2\pi iz} - (U + iV) \frac{a^2}{z^2} = v_x - iv_y, \quad (2.20.9)$$

убеждаемся в том, что

$$v_x \rightarrow U, \quad v_y \rightarrow V \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.20.9a)$$

Далее выясним, чему равняется нормальная составляющая скорости движения частиц жидкости на окружности $r = a$. Ранее было показано, что

$$\begin{aligned} v_n|_{r=a} &= (\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{r=a} = (v_x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + v_y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}))|_{r=a} = \\ &= (v_x \cos \theta + v_y \sin \theta)|_{r=a}, \end{aligned} \quad (2.20.10)$$

где θ — угол между нормалью к окружности $r = a$ и осью X . Используя показательную форму представления комплексного

числа, а также формулу Эйлера [12], перепишем выражение для комплексной скорости (2.20.9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} \Big|_{r=a} &= \left(U - iV - \frac{\Gamma i}{2\pi r} e^{-i\theta} - (U + iV) \frac{a^2}{r^2} e^{-2i\theta} \right) \Big|_{r=a} = \\ &= U - iV - \frac{\Gamma i}{2\pi a} (\cos \theta - i \sin \theta) - (U \cos 2\theta - iU \sin 2\theta + \\ &\quad + iV \cos 2\theta + V \sin 2\theta) = (v_x - iv_y) \Big|_{r=a}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v_x \Big|_{r=a} &= U - \frac{\Gamma}{2\pi a} \sin \theta - U \cos 2\theta - V \sin 2\theta, \\ v_y \Big|_{r=a} &= V + \frac{\Gamma}{2\pi a} \cos \theta - U \sin 2\theta + V \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.20.11)$$

Подставляя (2.20.11) в (2.20.10), убеждаемся в том, что

$$v_n \Big|_{r=a} = 0. \quad (2.20.12)$$

Поскольку потенциал, соответствующий комплексному потенциалу (2.20.8), удовлетворяет уравнению Лапласа и выполняются условия на границе (2.20.12), а также условия на бесконечности (2.20.9а), то потенциал (2.20.8) будет описывать процесс обтекания кругового цилиндра, причем движение жидкости вне круга можно представить как результат наложения трех движений: поступательного движения потока; движения, порождаемого вихревой точкой, расположенной внутри круга и движения, вызванного диполем, совмещенным с вихревой точкой.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу об обтекании кругового цилиндра поступательным потоком, имеющим на бесконечности скорость $\{U, 0\}$. Соответствующий комплексный потенциал представим в виде

$$w(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right).$$

Разделяя действительную и мнимую части, находим:

$$\begin{aligned} \varphi &= U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta = Ux \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right), \\ \psi &= U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta = Uy \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned}$$

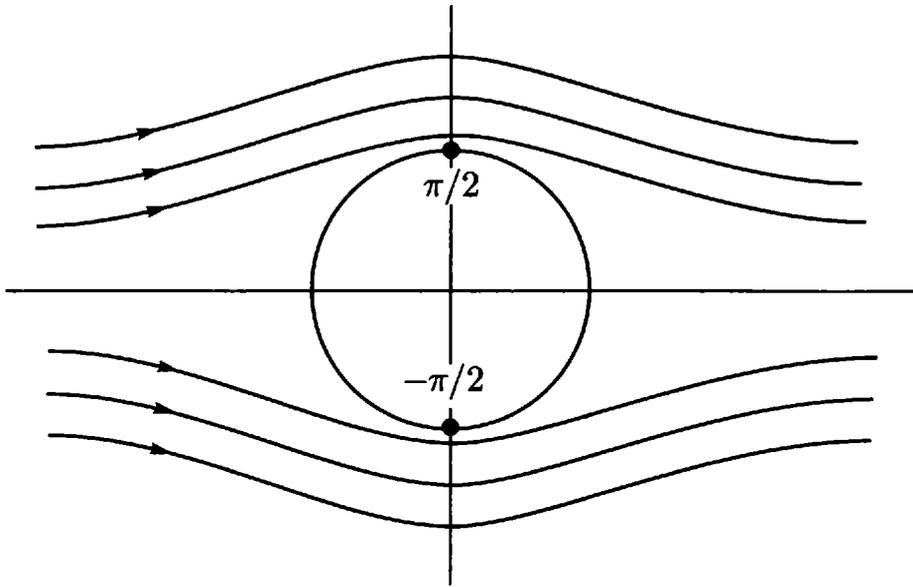


Рис. 2.25

Следовательно, линии тока представляют собой кривые третьего порядка (рис. 2.25):

$$y - \frac{a^2 y}{x^2 + y^2} = \text{const}.$$

Если константа равна нулю, то получаем уравнение границы.

Найдем касательную составляющую скорости v_τ на границе. Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — касательный вектор к окружности $r = a$. Тогда, вводя натуральный параметр s , находим

$$\begin{aligned} v_\tau|_{r=a} &= (\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})|_{r=a} = (\text{grad } \varphi, \boldsymbol{\tau})|_{r=a} = \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_y}) \right) \Big|_{r=a} = \frac{d\varphi}{ds} \Big|_{r=a}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\frac{d\varphi}{ds} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} \Big|_{r=a} = \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -2U \sin \theta,$$

где $s = a\theta$. Очевидно, что касательная составляющая скорости имеет максимальное абсолютное значение при $\theta = \pm\pi/2$. Поскольку движение является стационарным и безвихревым, то справедливо уравнение Бернулли: $p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$. Поэтому давления в симметричных относительно оси X точках равны и результирующее давление, действующее со стороны потока, равно нулю. Таким образом, поступательный поток идеальной жидкости не оказывает на круговой цилиндр никакого действия.

В стационарном циркуляционном потоке, описываемом потенциалом

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z,$$

все частицы движутся по окружностям, причем на поверхности цилиндра скорость постоянна и равна $\Gamma/2\pi a$. Поэтому циркуляционный поток также не оказывает давления на цилиндр.

Если поток является поступательно-циркуляционным и описывается потенциалом

$$w(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z,$$

то движение жидкости в таком случае асимметрично. Например, при $|\Gamma| < 4\pi Ua$ [4] картина течения выглядит так, как показано на рис. 2.26.

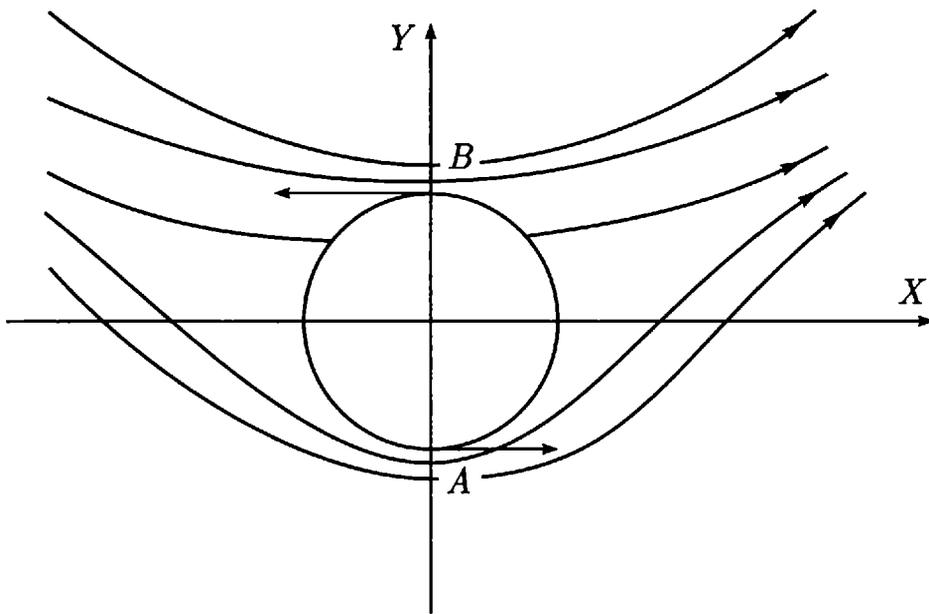


Рис. 2.26

Следствием асимметрии движения является возникновение давления на цилиндр со стороны составного потока, хотя в составляющих его потоках давление на цилиндр отсутствует. Этот парадокс можно объяснить следующим образом. Пусть, для определенности, $\Gamma > 0$. Возьмем для сравнения две точки A и B . В точке A скорость циркуляционного потока складывается со скоростью поступательного потока, а в точке B эти скорости вычитаются. Поэтому $v_A > v_B$. Так как $p_A = \text{const} - v_A^2/2$, $p_B = \text{const} - v_B^2/2$, то $p_A < p_B$. Таким образом, результирующее давление направлено вниз.

§ 2.21. Применение метода конформных отображений для решения плоских задач гидродинамики

Преобразование плоскости, осуществляемое аналитической функцией $z = f(\xi)$, называется *конформным* и обладает следующими свойствами в окрестности точки ξ , где $f'(\xi) \neq 0$: бесконечно малые векторы, выходящие из точки ξ , изменяются по своей длине в одно и то же количество раз, и углы между векторами сохраняются; фигуры в бесконечно малой окрестности точки ξ преобразуются в себе подобные, а фигуры конечных размеров искажаются, но углы между двумя кривыми сохраняются; преобразование $z = f(\xi)$ переводит координатные линии прямоугольной декартовой системы координат в координатные линии ортогональной системы [12].

Примером функции, осуществляющей конформное преобразование, является функция вида $z = \xi^2$. Так как в точке $\xi = 0$ производная $z' = 0$, то в окрестности этой точки нарушено условие конформности, и первый координатный угол переходит в верхнюю полуплоскость (см. рис. 2.27).

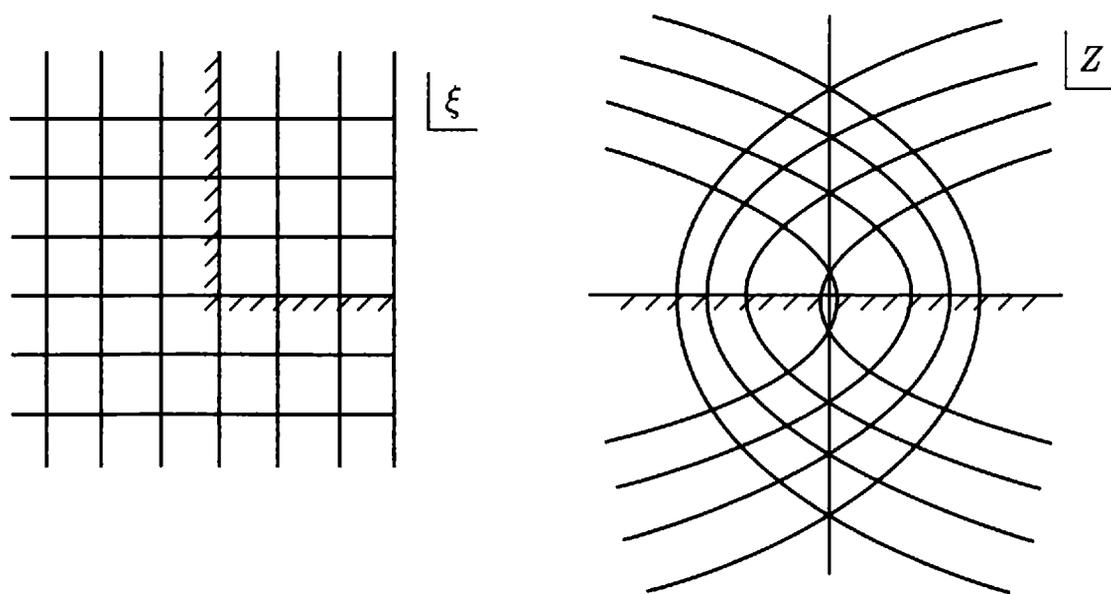


Рис. 2.27

Располагая известными свойствами конформных преобразований, уместно задаться вопросом: можно ли, зная комплексный потенциал для задачи обтекания кругового цилиндра, посредством конформного отображения плоскости получить комплексный потенциал для случая обтекания тела другой формы? В качестве ответа на поставленный вопрос рассмотрим следующий пример.

Пусть на бесконечно длинную пластину ширины $2a$, сечение которой плоскостью XU , для определенности, расположено на

оси X , набегает поток, имеющий на бесконечности скорость $\{U, V\}$, так что задачу можно считать плоской. Найдем преобразование плоскости $z = f(\xi)$, которое переводило бы область вне контура круга некоторого радиуса с центром в точке $\xi = 0$ в область вне отрезка длины $2a$. При этом точке $\xi = \infty$ должна соответствовать точка $z = \infty$. Поскольку комплексный потенциал $\bar{w}(\xi)$, описывающий течение жидкости в задаче об обтекании кругового цилиндра, известен, то, совершив обратное преобразование плоскости $\xi = F(z)$, можно получить потенциал $w(z)$, отвечающий задаче об обтекании бесконечной пластины. В этом состоит суть *метода конформных преобразований*.

Прежде всего рассмотрим преобразование подобия $z = a\eta$, с помощью которого область вне отрезка $[-1, 1]$ в плоскости η переводится в область вне отрезка $[-a, a]$ в плоскости z . Далее, преобразование $\eta = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)$ осуществляет отображение области вне единичного круга с центром в точке $\xi = 0$ в область вне отрезка $[-1, 1]$ (см. рис. 2.28). Наконец, композиция двух преобразований $z = \frac{a}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) \equiv f(\xi)$ устанавливает соответствие между областью вне единичного круга в плоскости ξ и областью вне отрезка $[-a, a]$, находящегося в плоскости z . При этом точке $\xi = \infty$ отвечает точка $z = \infty$.

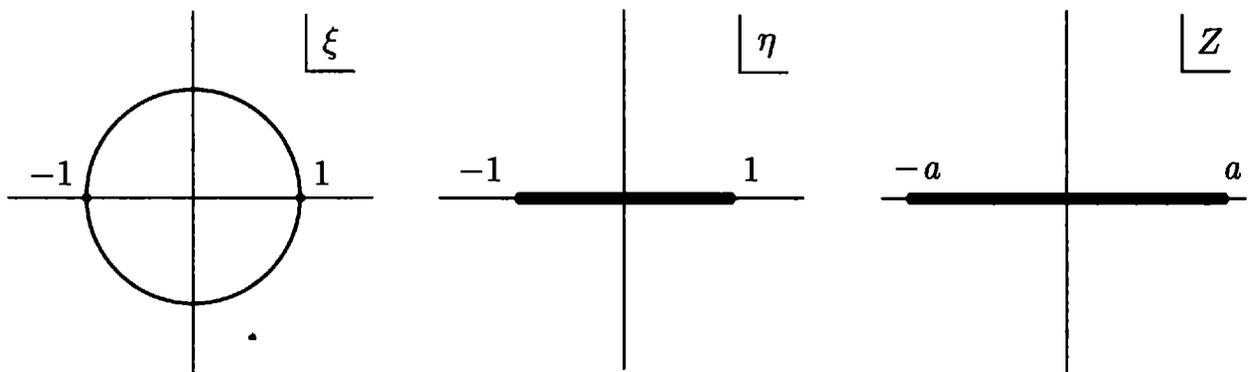


Рис. 2.28

Поскольку нужное преобразование плоскости найдено, то для достижения поставленной цели осталось построить комплексный потенциал $\bar{w}(\xi)$ фиктивного течения. Для этого определим значение комплексной скорости на бесконечности для фиктивного потока. Так как

$$w(z) = w(f(\xi)) = \bar{w}(\xi),$$

то

$$\frac{d\bar{w}}{d\xi} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\xi} = \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2\xi^2} \right) \frac{dw}{dz}.$$

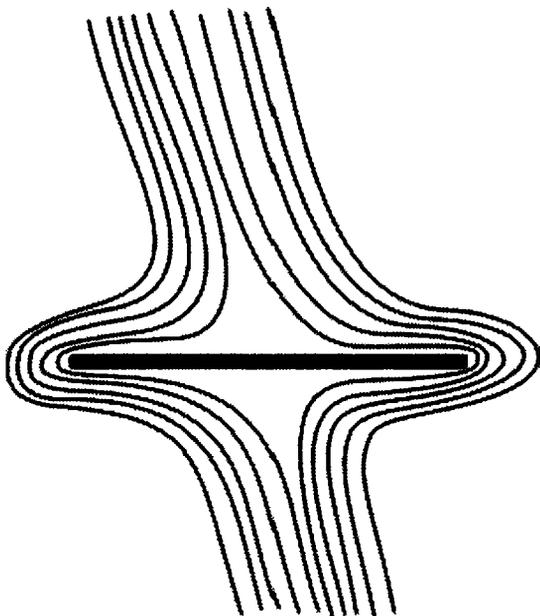


Рис. 2.29

Далее,

$$\left. \frac{d\bar{w}}{d\xi} \right|_{\xi=\infty} = \frac{a}{2} \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=\infty} = \frac{a}{2} \bar{v}_{\infty},$$

где $\bar{v}_{\infty} = U - iV$. Итак, комплексная скорость фиктивного течения на бесконечности равна $(a/2)\bar{v}_{\infty}$. Следовательно, комплексный потенциал фиктивного течения представим как

$$\bar{w}(\xi) = \frac{a}{2} (U - iV)\xi + \frac{a}{2\xi} (U + iV) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \xi.$$

Поскольку

$$\xi = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \equiv F(z),$$

то

$$\frac{1}{\xi} = \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

Поэтому

$$w(z) = \bar{w}(\xi) \Big|_{\xi=F(z)} = Uz - iV\sqrt{z^2 - a^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right).$$

Если пластину обтекает поступательный поток, то $\Gamma = 0$, и соответствующий потенциал имеет вид

$$w(z) = Uz - iV\sqrt{z^2 - a^2}.$$

При $U > 0$, $V < 0$ картина течения выглядит так, как показано на рис. 2.29.

Комплексная скорость

$$\frac{dw}{dz} = U - iV \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

на концах пластины принимает бесконечные значения, что объясняется несовершенством модели, основанной на свойствах идеальной жидкости.

В заключение отметим, что, используя аналогичный подход, можно решить задачу об обтекании эллиптического цилиндра.

МЕХАНИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Третья глава посвящена изучению динамики течений вязких потоков. Случаи движения вязкой жидкости, для которых решения гидродинамической системы представимы в аналитическом виде, встречаются достаточно редко. Связано это, прежде всего, с нелинейностью соответствующей системы. Поэтому в настоящей главе наряду с точно интегрируемыми задачами рассматриваются задачи, для которых используются приближенные методы интегрирования, состоящие в отбрасывании отдельных членов в уравнениях и дополнительных условиях, вклад которых в движение невелик.

Примерами прикладного использования уравнений динамики вязкой жидкости могут быть применения осредненных уравнений в теории крупномасштабных океанических течений при изучении ветровых течений в океане постоянной плотности без учета термохалинных факторов (классическая стационарная модель Экмана) [10], при математическом моделировании течения в бароклинном слое неоднородного океана с учетом эффектов диффузии плотности (система уравнений П. С. Линейкина) [13], при исследовании циркуляции вод в экваториальной зоне с использованием нелинейных моделей в однородном, двухслойном или бароклинном океане [11] и т. д.

§ 3.1. Понятие вязкой жидкости

Взаимодействие частиц жидкости характеризуется напряжениями поверхностных сил, т. е. силами взаимодействия, отнесенными к единице площади соприкосновения жидких частиц. В случае идеальной жидкости вектор напряжения p_n имеет только нормальную к поверхности соприкосновения составляющую, направленную вглубь выделенного объема. Таким образом, взаимодействие частиц идеальной жидкости характеризуется дав-

лениями. То же самое можно сказать относительно всех покоящихся жидкостей. При движении *вязкой жидкости* наряду с нормальной составляющей напряжения возникает касательная составляющая, называемая *силой внутреннего трения (силой вязкости)*, которая проявляет себя в виде сопротивления жидкости процессу деформации. В пользу существования сил вязкости

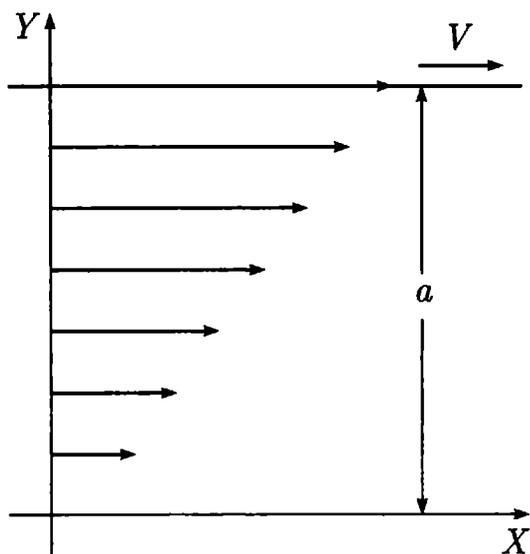


Рис. 3.1

свидетельствует следующий простой пример. Пусть между двумя бесконечными параллельными пластинами, расположенными на расстоянии a друг от друга, находится вязкая жидкость (рис. 3.1).

Если верхняя пластина движется со скоростью V , а нижняя — покоится, то из-за действия сил вязкости слой жидкости, непосредственно примыкающий к верхней пластине, движется со скоростью V , в то время как слой, примыкающий к нижней пластине, покоится. Промежуточные же слои скользят

друг по другу и обладают скоростями u , пропорциональными расстоянию от неподвижной пластины:

$$\frac{u}{V} = \frac{y}{a}.$$

Этот пример демонстрирует существование как *внешнего*, так и *внутреннего трения жидкости*, благодаря которому происходит передача движения от слоя к слою.

Согласно гипотезе, высказанной Ньютоном, величина силы вязкого трения τ пропорциональна скорости изменения скорости движения в направлении, перпендикулярном к направлению движения:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (3.1.1)$$

Величина μ называется *коэффициентом вязкости*, а соотношение (3.1.1) — *законом трения Ньютона*. В системе единиц «СИ» коэффициент вязкости имеет размерность Па · с (*паскаль-секунда*). Это непосредственно видно из формулы (3.1.1). В общем случае коэффициент вязкости зависит от температуры и внешнего давления. Например, для воды при температуре 25 °С и нормальном давлении атмосферы коэффициент вязкости имеет значение 895 мкПа · с; при температуре 100 °С коэффициент

вязкости изменяется до величины 284 мкПа·с. В случае воздуха при температуре 25 °С и давлении 5,07 МПа вязкость имеет значение 19,2 мкПа·с; при давлении 10,1 МПа коэффициент равен 20,6 мкПа·с. Если воздух нагреть до 100 °С, то при тех же значениях давления значения коэффициента вязкости изменятся до величины 22,4 мкПа·с в первом случае, и до величины 23,4 мкПа·с во втором случае. Заметим, что на практике часто используется *кинематический коэффициент вязкости* $\nu = \mu/\rho$, где ρ — плотность вещества. Очевидно, что в системе единиц «СИ» кинематический коэффициент вязкости имеет размерность Па·с·м³·кг⁻¹.

В соответствии с кинетической теорией газов вязкость газа следует рассматривать как процесс обмена импульсами между соседними слоями газа, вызванный собственным движением молекул, т.е. как диффузию импульса. В капельных жидкостях происхождение вязкости иное. Здесь молекулы расположены близко друг к другу и способны совершать только колебательные движения и перескоки с места на место. Обычно такие перескоки беспорядочны, но под действием касательного напряжения их количество увеличивается в направлении действия этого напряжения, что приводит к перемещению одного слоя жидкости относительно другого. Таким образом, проявление сил вязкости связано с переменной молекулами своих мест; вязкость тем меньше, чем чаще совершается такая перемена.

§ 3.2. Формулы Коши–Гельмгольца. Понятие тензора скоростей деформации

В твердом теле мгновенная скорость \mathbf{v} любой точки в каждый момент времени представима в виде векторной суммы

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \quad (3.2.1)$$

где \mathbf{v}_0 — скорость выбранного в теле полюса; $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ — скорость вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через выбранный полюс ($\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho}$ — вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор, проведенный из полюса в точку наблюдения). Формула (3.2.1) известна как формула Эйлера. Заметим, что для твердого тела $\boldsymbol{\rho} = \text{const}$. Если \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из начала выбранной декартовой системы координат в точку наблюдения, то согласно (3.2.1)

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dt, \quad (3.2.2)$$

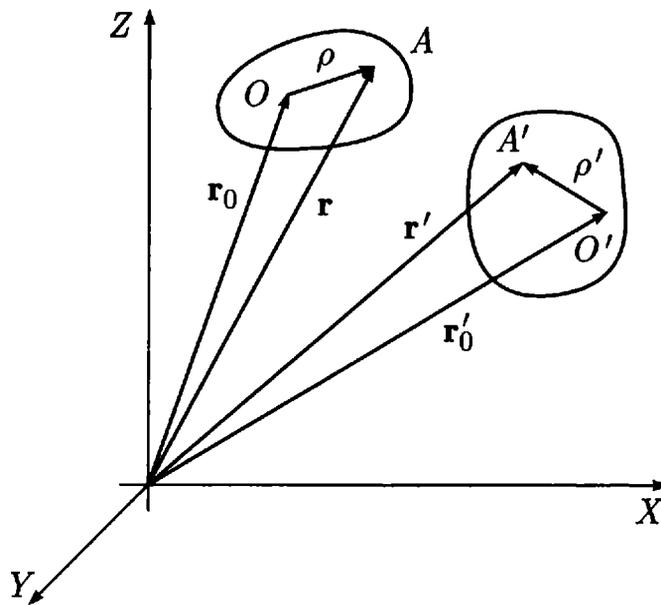


Рис. 3.2

и значит, элементарное перемещение любой точки твердого тела можно рассматривать как суперпозицию элементарного перемещения полюса и элементарного поворота вокруг оси, проходящей через полюс.

Рассмотрим движущуюся жидкую среду. Выделим в ней малый объем и рассмотрим этот объем в два близких момента времени: t и $t + dt$ (рис. 3.2). Выберем в качестве полюса точку O , положение которой в момент времени t определяет радиус-вектор \mathbf{r}_0 , в момент времени $t + dt$ — радиус-вектор \mathbf{r}'_0 .

Пусть точка A принадлежит выделенному объему, и ее положение в рассматриваемые моменты времени определяют радиус-векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' соответственно. За время dt происходят бесконечно малые приращения

$$d\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r},$$

и элементарное перемещение точки A относительно точки O :

$$d\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}.$$

Согласно правилу треугольника

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0.$$

Значит,

$$d\boldsymbol{\rho} = d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_0 = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) dt,$$

где \mathbf{v} и \mathbf{v}_0 — абсолютные скорости точек A и O относительно начала координат. С другой стороны, если рассмотреть поле скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, то $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$. Далее, воспользовавшись

известной формулой векторного анализа и отбросив в этой формуле квадратичные по ρ члены, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) = \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) \approx (\boldsymbol{\rho}, \nabla) \mathbf{v}|_{\mathbf{r}_0}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$d\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}, \nabla) \mathbf{v}|_{\mathbf{r}_0} dt. \quad (3.2.3)$$

Если $\boldsymbol{\rho} = \{\xi, \eta, \zeta\}$, $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$, то равенство (3.2.3) можно переписать в виде трех проекций на координатные оси:

$$\begin{aligned} d\xi &= \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) v_x dt, \\ d\eta &= \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) v_y dt, \\ d\zeta &= \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z dt. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Перепишем (3.2.4) в следующем удобном виде:

$$\begin{aligned} d\xi &= \left[\xi \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \zeta \right] dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \zeta - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \eta \right] dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\eta &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \xi + \eta \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \zeta \right] dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \xi - \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \zeta \right] dt, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} d\zeta &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \eta + \zeta \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \eta - \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \xi \right] dt. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \varepsilon_3 &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \theta_1 &= \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}, & \theta_2 &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}, & \theta_3 &= \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Заметим, что значения величин (3.2.6) вычисляются в точке O . Поскольку

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_y \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

то преобразования (3.2.5) можно переписать в виде:

$$d\xi = \left(\varepsilon_1 \xi + \frac{1}{2} \theta_3 \eta + \frac{1}{2} \theta_2 \zeta \right) dt + \frac{1}{2} (\zeta \operatorname{rot}_y \mathbf{v} - \eta \operatorname{rot}_z \mathbf{v}) dt,$$

$$d\eta = \left(\frac{1}{2} \theta_3 \xi + \varepsilon_2 \eta + \frac{1}{2} \theta_1 \zeta \right) dt + \frac{1}{2} (\xi \operatorname{rot}_z \mathbf{v} - \zeta \operatorname{rot}_x \mathbf{v}) dt,$$

$$d\zeta = \left(\frac{1}{2} \theta_2 \xi + \frac{1}{2} \theta_1 \eta + \varepsilon_3 \zeta \right) dt + \frac{1}{2} (\eta \operatorname{rot}_x \mathbf{v} - \xi \operatorname{rot}_y \mathbf{v}) dt,$$

или

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial F}{\partial \xi} dt + \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho} \right)_x dt, \\ d\eta &= \frac{\partial F}{\partial \eta} dt + \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho} \right)_y dt, \\ d\zeta &= \frac{\partial F}{\partial \zeta} dt + \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho} \right)_z dt, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

где $F(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 \xi^2 + \varepsilon_2 \eta^2 + \varepsilon_3 \zeta^2 + \theta_1 \eta \zeta + \theta_2 \xi \zeta + \theta_3 \xi \eta)$.

Следовательно, элементарное перемещение точки A относительно точки O за время dt представимо как

$$d\boldsymbol{\rho} = \operatorname{grad} F dt + \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho} \right) dt. \quad (3.2.8)$$

Преобразования (3.2.5) называются *преобразованиями Коши*, а формулы (3.2.7) — *формулами Коши-Гельмгольца*.

В соответствии с (3.2.8) абсолютное элементарное перемещение точки A можно представить в виде

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\boldsymbol{\rho} = d\mathbf{r}_0 + \operatorname{grad} F dt + \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho} \right) dt. \quad (3.2.9)$$

Таким образом, получен аналог формулы (3.2.2) для случая жидкой среды, причем слагаемое $\operatorname{grad} F dt$ описывает элементарное деформационное перемещение. Разделив обе части (3.2.9) на dt , приходим к формуле

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

где \mathbf{v}_0 — скорость движения полюса; $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho}$ — скорость вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс O ; $\mathbf{v}_2 = \text{grad } F$ — скорость чистой деформации.

Заметим, что скорость \mathbf{v}_2 является потенциальным вектором, который представим в виде градиента от некоторой скалярной функции. Выпишем компоненты этого вектора:

$$\begin{aligned} v_{2x} &= \varepsilon_1 \xi + \frac{1}{2} \theta_3 \eta + \frac{1}{2} \theta_2 \zeta, \\ v_{2y} &= \frac{1}{2} \theta_3 \xi + \varepsilon_2 \eta + \frac{1}{2} \theta_1 \zeta, \\ v_{2z} &= \frac{1}{2} \theta_2 \xi + \frac{1}{2} \theta_1 \eta + \varepsilon_3 \zeta. \end{aligned}$$

Таблица из девяти величин

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2} \theta_3 & \frac{1}{2} \theta_2 \\ \frac{1}{2} \theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2} \theta_1 \\ \frac{1}{2} \theta_2 & \frac{1}{2} \theta_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

называется *тензором скоростей деформации*. Тензор Φ полностью описывает динамику деформационного процесса, происходящего в малой окрестности выбранного в жидкости полюса. Если все девять компонентов тензора обращаются в ноль, то скорость деформации равна нулю и, следовательно, скорость всякой частицы из окрестности точки O представима формулой (3.2.1).

В том, что матрица Φ действительно определяет тензор, можно убедиться, если изучить, как преобразуются компоненты матрицы при переходе к другой системе координат. Одно из таких преобразований будет рассмотрено ниже для другого тензора второго ранга.

§ 3.3. Тензор напряжений. Связь между компонентами тензоров скоростей деформации и напряжений

В § 2.3 было показано, что если заданы напряжения поверхностных сил \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y и \mathbf{p}_z в трех взаимно ортогональных сечениях, то напряжение в произвольно ориентированном сечении, проходящем через эту же точку, выражается формулой

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + \mathbf{p}_y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + \mathbf{p}_z \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}), \quad (3.3.1)$$

где $\mathbf{n} = \{ \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}), \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}), \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}) \}$ — нормаль к рассматриваемому сечению. Составим из проекций векторов \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y и \mathbf{p}_z на координатные оси таблицу

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.3.2)$$

которая определяет *тензор напряжений*.

Рассмотрим, как преобразуются компоненты матрицы Π , например, при повороте системы координат.

Для сокращения записи формул координатные оси будем помечать индексами 1, 2, 3. Пусть (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) — две системы координат с общим началом, а \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 и \mathbf{p}'_1 , \mathbf{p}'_2 , \mathbf{p}'_3 — соответствующие векторы напряжений, действующие в ортогональных сечениях. Положение одной системы координат относительно другой задается с помощью таблицы косинусов углов между координатными ортами:

$$\alpha_{ij} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_{y_i}, \mathbf{e}_{x_j}}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Применив формулу (3.3.1) к вектору \mathbf{p}'_1 , имеем

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 \cos(\widehat{\mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{x_1}}) + \mathbf{p}_2 \cos(\widehat{\mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{x_2}}) + \mathbf{p}_3 \cos(\widehat{\mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{x_3}}).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_2 &= \mathbf{p}_1 \cos(\widehat{\mathbf{e}_{y_2}, \mathbf{e}_{x_1}}) + \mathbf{p}_2 \cos(\widehat{\mathbf{e}_{y_2}, \mathbf{e}_{x_2}}) + \mathbf{p}_3 \cos(\widehat{\mathbf{e}_{y_2}, \mathbf{e}_{x_3}}), \\ \mathbf{p}'_3 &= \mathbf{p}_1 \cos(\widehat{\mathbf{e}_{y_3}, \mathbf{e}_{x_1}}) + \mathbf{p}_2 \cos(\widehat{\mathbf{e}_{y_3}, \mathbf{e}_{x_2}}) + \mathbf{p}_3 \cos(\widehat{\mathbf{e}_{y_3}, \mathbf{e}_{x_3}}). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Представление (3.3.3) можно записать более компактно:

$$\mathbf{p}'_i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{p}_j \alpha_{ij}.$$

Отсюда

$$\mathbf{e}_{y_1} p'_{i1} + \mathbf{e}_{y_2} p'_{i2} + \mathbf{e}_{y_3} p'_{i3} = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}_{x_1} p_{j1} + \mathbf{e}_{x_2} p_{j2} + \mathbf{e}_{x_3} p_{j3}) \alpha_{ij}.$$

Скалярно умножая обе части полученного выражения на \mathbf{e}_{y_s} , $s = 1, 2, 3$, находим

$$p'_{is} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{jk} \alpha_{sk} \alpha_{ij}. \quad (3.3.4)$$

Таким образом, компоненты матрицы (3.3.2) при повороте системы координат преобразуются по формуле (3.3.4). Преобразование вида (3.3.4) характерно для тензоров.

В случае идеальной жидкости недиагональные компоненты тензора напряжений Π обращаются в ноль, так как

$$p_x = e_x p_{xx} = -e_x p, \quad p_y = -e_y p, \quad p_z = -e_z p.$$

Поэтому

$$\Pi^0 = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Если вязкая жидкость покоится, то напряженное состояние в ней также характеризуется тензором Π^0 . При своем движении вязкая среда деформируется, причем процесс деформации сопровождается возникновением дополнительных напряжений, в частности касательных. Величины касательных напряжений тем больше, чем быстрее деформируется среда. Таким образом, изменение напряжений в движущейся жидкости непосредственно связано со скоростью деформационного процесса. Это позволяет высказать предположение о существовании определенной связи между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформации. Такую связь устанавливает закон Навье–Стокса.

В основу модели вязкой жидкости положены следующие предположения:

- составляющие тензора напряжений при стремлении вязкости к нулю должны стремиться к составляющим тензора напряжений в идеальной жидкости;
- жидкость изотропна (физические свойства жидкости одинаковы по всем направлениям);
- компоненты тензора напряжений есть линейные функции компонентов тензора скоростей деформации.

В соответствии с первым утверждением тензор напряжений представим в виде

$$\Pi = \Pi^0 + \Pi' = -pE + \Pi', \quad (3.3.5)$$

где E — единичный тензор; Π' — вязкий тензор напряжений, компоненты которого стремятся к нулю, если вязкость стремится к нулю. Компоненты тензора Π' предполагаются линейными функциями компонентов тензора Φ . Наиболее общий вид такой зависимости выражается формулой

$$\Pi' = \lambda E \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu\Phi, \quad (3.3.6)$$

где λ и μ — скалярные характеристики среды, присутствие которых в (3.3.6) отражают свойство изотропности среды. Коэффициент μ называют *первым коэффициентом вязкости*, λ — *вторым коэффициентом вязкости*. Соотношения (3.3.5), (3.3.6) представляют собой закон *Навье–Стокса*.

Представим (3.3.5) покомпонентно:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu\varepsilon_1, & p_{xy} &= p_{yx} = \mu\theta_3, \\ p_{yy} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu\varepsilon_2, & p_{xz} &= p_{zx} = \mu\theta_2, \\ p_{zz} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu\varepsilon_3, & p_{yz} &= p_{zy} = \mu\theta_1. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

В рамках рассматриваемой модели часто полагают $\mu = \text{const}$ и $\lambda = -2/3\mu$, считая, что гидродинамическое давление p равно среднему арифметическому от трех нормальных давлений p_{xx} , p_{yy} и p_{zz} , взятому со знаком минус:

$$p = -\frac{1}{3} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}).$$

Из (3.3.7) непосредственно следует, что вязкий тензор Π' обращается в ноль, если жидкость покоится или движется с постоянной скоростью, а силы трения возникают только в тех случаях, когда различные части жидкости движутся с разными скоростями.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу о течении жидкости между двумя параллельными бесконечными пластинами (рис. 3.1). Очевидно, что течение является одномерным:

$$v_x = v(y), \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Определим силу трения, возникающую между слоями жидкости при ее движении.

Напряжение, действующее в сечении с нормалью, ориентированной вдоль оси OY , равно p_y . Поэтому сила вязкого трения $\boldsymbol{\tau}$ определяется как

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_x p_{yx} + \mathbf{e}_z p_{yz},$$

где \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_z — координатные орты. Согласно (3.3.7) и (3.2.6)

$$\begin{aligned} p_{yx} &= \mu\theta_3 = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ p_{yz} &= \mu\theta_1 = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned}$$

В итоге приходим к закону трения Ньютона:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$.

В заключение этого параграфа приведем выражения для составляющих тензора напряжений в цилиндрической и сферической системах координат. Тензор напряжений в цилиндрической (сферической) системе координат состоит из величин нормальных и касательных напряжений, действующих в сечениях с нормальными в виде координатных ортов соответствующей системы координат.

Цилиндрические координаты (r, φ, z) связаны с декартовыми следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z, \\ 0 &\leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty. \end{aligned}$$

Для составляющих тензора напряжений имеем выражения:

$$\begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad p_{r\varphi} = p_{\varphi r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\ p_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), \quad p_{\varphi z} = p_{z\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad p_{zr} = p_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Сферические координаты (r, θ, φ) связаны с декартовыми координатами посредством соотношений:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \\ 0 &\leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

Составляющие тензора напряжений представимы как

$$\begin{aligned}
 p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\
 p_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \\
 p_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right), \\
 p_{r\theta} &= p_{\theta r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\
 p_{r\varphi} &= p_{\varphi r} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\
 p_{\theta\varphi} &= p_{\varphi\theta} = \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} \right).
 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

§ 3.4. Уравнения Навье–Стокса. Векторная форма уравнений движения вязкой жидкости

В соответствии с принципом Даламбера уравнение движения произвольного жидкого объема V , выделенного внутри жидкости и ограниченного поверхностью S , имеет вид

$$\int_V (\mathbf{F} - \mathbf{w}) \rho d\tau + \oint_S \mathbf{p}_n ds = 0, \tag{3.4.1}$$

где \mathbf{F} — плотность массовых сил; \mathbf{w} — ускорение жидкого объема единичной массы; ρ — плотность среды; \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности S , \mathbf{p}_n — напряжение, определяемое соотношением (3.3.1).

Применим преобразования Гаусса (2.4.1а–в) к компонентам вектора \mathbf{p}_x :

$$\begin{aligned}
 \oint_S p_{xx} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) ds &= \int_V \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} d\tau, \\
 \oint_S p_{xy} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) ds &= \int_V \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} d\tau, \\
 \oint_S p_{xz} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) ds &= \int_V \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} d\tau.
 \end{aligned}$$

Умножая первое выражение на \mathbf{e}_x , второе — на \mathbf{e}_y , третье — на \mathbf{e}_z и складывая результаты умножения, имеем

$$\oint_S \mathbf{p}_x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) ds = \int_V \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} d\tau.$$

Аналогично получаются равенства:

$$\oint_S \mathbf{p}_y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) ds = \int_V \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} d\tau,$$

$$\oint_S \mathbf{p}_z \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}) ds = \int_V \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} d\tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{p}_n ds &= \oint_S (\mathbf{p}_x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + \mathbf{p}_y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + \mathbf{p}_z \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z})) ds = \\ &= \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Подставляя (3.4.2) в (3.4.1), имеем

$$\int_V \left[(\mathbf{F} - \mathbf{w}) \rho + \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \right] d\tau = 0.$$

В силу произвольности объема V приходим к уравнению

$$\mathbf{F} - \mathbf{w} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Назовем *дивергенцией тензора Π* следующий вектор:

$$\operatorname{div} \Pi \equiv \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}.$$

Тогда

$$\mathbf{w} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi. \quad (3.4.3)$$

Уравнение (3.4.3) называется *уравнением движения сплошной среды в напряжениях*.

Проецируя (3.4.3) на координатные оси, находим:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (3.4.4)$$

Преобразуем уравнения (3.4.4), учитывая представления (3.3.7) для компонентов тензора напряжений. Имеем

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} \Pi)_x &\equiv \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \\ &+ \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} + \\ &+ \mu \Delta v_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta v_x.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} \Pi)_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta v_y, \\ (\operatorname{div} \Pi)_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta v_z.\end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (3.4.4) и учитывая, что $\nu = \mu/\rho$, приходим к уравнениям Навье–Стокса:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nu \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nu \Delta v_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nu \Delta v_z,\end{aligned}\quad (3.4.5)$$

или (векторная форма представления)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{v}) + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

Если жидкость несжимаема, то уравнения (3.4.5) приводятся к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z,\end{aligned}\quad (3.4.6)$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (3.4.7)$$

В соответствии с формулами векторного анализа

$$\Delta \mathbf{v} = \text{grad} (\text{div } \mathbf{v}) - \text{rot} (\text{rot } \mathbf{v}) = -\text{rot} (\text{rot } \mathbf{v}). \quad (3.4.8)$$

Если ввести в рассмотрение вектор $\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v}$, то (3.4.8) примет вид

$$\Delta \mathbf{v} = -\text{rot } \mathbf{\Omega}. \quad (3.4.9)$$

Поскольку *

$$\frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{v}^2 = (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v},$$

то

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}. \quad (3.4.10)$$

Подставляя (3.4.9), (3.4.10) в (3.4.7), находим

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \nu \text{rot } \mathbf{\Omega}.$$

Если массовые силы являются потенциальными, т. е. $\mathbf{F} = -\text{grad } U$, а жидкость — баротропной (существует такая функция P , что $\text{grad } P = 1/\rho \text{grad } p$), то, вводя функцию Гамильтона

$$H = P + U + \frac{\mathbf{v}^2}{2},$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} = -\text{grad } H - \nu \text{rot } \mathbf{\Omega}. \quad (3.4.11)$$

В отдельных случаях из-за специфики задачи целесообразно пользоваться не декартовыми координатами, а цилиндрическими или сферическими. При этом уравнения движения могут оказаться интегрируемыми. Соответствующие уравнения движения вязкой жидкости представлены в последней главе.

В заключение этого параграфа разъясим суть функции $p(t, x, y, z)$, входящей в уравнение (3.4.5).

Учитывая представления (3.3.7), найдем выражение для проекции p_{nn} напряжения на нормаль:

$$\begin{aligned}
 p_{nn} &= (\mathbf{p}_n, \mathbf{n}) = \\
 &= p_x \mathbf{n} \cos(\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{n}}) + p_y \mathbf{n} \cos(\widehat{\mathbf{e}_y, \mathbf{n}}) + p_z \mathbf{n} \cos(\widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{n}}) = \\
 &= p_{xx} \cos^2(\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{n}}) + p_{xy} \cos(\widehat{\mathbf{e}_y, \mathbf{n}}) \cos(\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{n}}) + \\
 &+ p_{xz} \cos(\widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{n}}) \cos(\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{n}}) + p_{yx} \cos(\widehat{\mathbf{e}_y, \mathbf{n}}) \cos(\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{n}}) + \\
 &+ p_{yy} \cos^2(\widehat{\mathbf{e}_y, \mathbf{n}}) + p_{yz} \cos(\widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{n}}) \cos(\widehat{\mathbf{e}_y, \mathbf{n}}) + \\
 &+ p_{zx} \cos(\widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{n}}) \cos(\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{n}}) + p_{zy} \cos(\widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{n}}) \cos(\widehat{\mathbf{e}_y, \mathbf{n}}) + \\
 &+ p_{zz} \cos^2(\widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{n}}) = -p - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu(\varepsilon_1 \cos^2(\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{n}}) + \\
 &+ \varepsilon_2 \cos^2(\widehat{\mathbf{e}_y, \mathbf{n}}) + \varepsilon_3 \cos^2(\widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{n}}) + \theta_1 \cos(\widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{n}}) \cos(\widehat{\mathbf{e}_y, \mathbf{n}}) + \\
 &+ \theta_2 \cos(\widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{n}}) \cos(\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{n}}) + \theta_3 \cos(\widehat{\mathbf{e}_y, \mathbf{n}}) \cos(\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{n}})) = \\
 &= -p + \mu P_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3).
 \end{aligned}$$

Отсюда находим нормальную составляющую напряжения

$$\mathbf{n} p_{nn} = -\mathbf{n} p + \mu \mathbf{n} P_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3).$$

Величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ даны в (3.2.6). Значение функции $P_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ зависит от положения сечения и производных скорости по пространственным переменным. Если $-p + \mu P_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3) < 0$, то вектор $\mathbf{n} p_{nn}$ направлен вглубь объема и определяет давление. Если же $-p + \mu P_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3) > 0$, то вектор нормального напряжения совпадает по направлению с внешней нормалью. При $\mu \rightarrow 0$ $p_{nn} \rightarrow -p$, где величина p не зависит от выбора направления. Этот случай отвечает идеальной жидкости. Следует понимать, что в уравнениях Навье–Стокса фигурирует та часть величины нормального напряжения p_{nn} , которая не зависит от положения сечения, степени вязкости и характера изменения скорости по пространственным переменным.

§ 3.5. Модели жидких вязких сред

Построение математической модели, описывающей движение жидкой среды, связано с получением замкнутой системы уравнений движения. Этой задаче для различных случаев течения вязкой жидкости посвящается настоящий параграф.

Если среда однородна и $\mu = \text{const}$, то уравнения Навье–Стокса принимают вид (3.4.6). При добавлении к (3.4.6) уравнения несжимаемости

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (3.5.1)$$

получается замкнутая система из четырех скалярных уравнений относительно четырех неизвестных функций: v_x , v_y , v_z и p .

Если же несжимаемая жидкость неоднородна, то к уравнениям (3.4.6), (3.5.1) следует добавить уравнение для определения плотности среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right),$$

которое замыкает соответствующую систему.

В общем случае уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3.5.2)$$

Объединяя уравнение (3.5.2) с уравнениями Навье–Стокса (3.4.5), приходим к незамкнутой системе, которую можно замкнуть, если воспользоваться законом сохранения энергии с целью получения недостающего уравнения.

Интегральная форма закона сохранения энергии для движущегося объема жидкости была получена в § 2.5 и давалась формулой (2.5.4а). Вычислим второе слагаемое в правой части (2.5.4а), имеющее смысл работы поверхностных сил за единицу времени. Для этого воспользуемся формулой (3.3.1) и преобразованиями Гаусса (2.4.1а–в):

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} \, ds &= \oint_S \left[\mathbf{p}_x \mathbf{v} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + \mathbf{p}_y \mathbf{v} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{p}_z \mathbf{v} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}) \right] ds = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p}_x \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{p}_y \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{p}_z \mathbf{v}) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Подставляя (3.5.3) в (2.5.4а) и учитывая (2.5.4б), получаем

$$\begin{aligned} \int_V \rho \left(\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dE}{dt} \right) d\tau &= \int_V \mathbf{F} \mathbf{v} \rho \, d\tau + \int_V \varepsilon \, d\tau + \\ &+ \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p}_x \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{p}_y \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{p}_z \mathbf{v}) \right] d\tau + \int_V \text{div} (k \text{ grad } T) \, d\tau. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

В силу произвольности выбора объема V в (3.5.4) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \frac{dE}{dt} = \\ = \varepsilon + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + \rho \mathbf{F} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \Pi + \mathbf{p}_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнение движения в напряжениях (3.4.3), имеем искомое уравнение притока тепла:

$$\rho \frac{dE}{dt} = \varepsilon + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + \mathbf{p}_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (3.5.5)$$

Если в систему уравнений (3.4.5), (3.5.2), (3.5.5) включить уравнение состояния среды

$$\Theta(p, \rho, T) = 0, \quad (3.5.6)$$

то, считая, что плотность внутренней энергии E полностью определяется параметрами T и p :

$$E = \Psi(T, p), \quad (3.5.7)$$

приходим к замкнутой системе уравнений.

В системе (3.4.5), (3.5.2), (3.5.5), (3.5.6) предполагается постоянство коэффициента вязкости. Для многих жидких сред такое допущение является вполне удовлетворительным. В общем случае зависимость коэффициента вязкости газов от температуры дается формулой Сатерленда:

$$\mu = \frac{C_1}{T + T_0} T^{3/2}, \quad T_0 \approx 114 \text{ К},$$

или степенным законом вида

$$\mu = C_2 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\omega, \quad 0,5 \leq \omega \leq 1,$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Итак, модель вязкой сжимаемой теплопроводящей жидкости, подчиняющейся закону Фурье, включает следующие элементы:

- уравнения Навье–Стокса (3.4.5);
- уравнение неразрывности (3.5.2);
- уравнение притока энергии (3.5.5);
- уравнение состояния (3.5.6);
- выражение (3.5.7) для плотности внутренней энергии через параметры T и p ;

— значения коэффициента вязкости μ и коэффициента теплопроводности k .

Плотность массовых сил \mathbf{F} и интенсивность внутренних источников тепла ε являются внешними параметрами и должны быть заданы.

§ 3.6. Начально-краевые задачи

3.6.1. Внешняя задача гидроаэродинамики. Одной из основных проблем механики жидкостей является задача обтекания тела конечного размера однородным неограниченным потоком. Пусть S_T — поверхность тела, D_e — внешняя часть пространства по отношению к телу. Требуется найти решение задачи (3.4.6), (3.5.1), соответствующее течению, переходящему на бесконечности в однородный поток, движущийся со скоростью U_∞ вдоль оси X . На бесконечности имеем условие

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}_x U_\infty, \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty. \quad (3.6.1)$$

Так как жидкость вязкая, то на поверхности S_T выполняется условие прилипания частиц жидкости к поверхности:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_T, \quad \mathbf{r} \in S_T, \quad t \geq t_0. \quad (3.6.2)$$

Если обтекаемое тело покоится, то, очевидно, справедливо граничное условие

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T, \quad t \geq t_0.$$

В уравнения (3.4.6), (3.5.1) входят первые производные по времени. Поэтому следует задать начальное распределение скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(x, y, z), \quad \mathbf{r} \in S_T \cup D_e, \quad t = t_0. \quad (3.6.3)$$

Совокупность уравнений (3.4.6), (3.5.1), краевых условий (3.6.1), (3.6.2) и начального условия (3.6.3) составляют *нестационарную начально-краевую задачу об обтекании тела вязким потоком*.

3.6.2. Внутренняя задача. Внутренняя задача формулируется для течения внутри области D , которая не содержит бесконечно удаленные точки. Пусть ∂D — непроницаемая граница области D . Тогда требуется найти решение задачи (3.4.6), (3.5.1) с дополнительными условиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{V}_T, & \mathbf{r} &\in \partial D, & t &\geq t_0, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0(x, y, z), & \mathbf{r} &\in \partial D \cup D, & t &= t_0. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Кроме этого, следует принять во внимание условие ограниченности решения в D :

$$|\mathbf{v}| < \infty, \quad \mathbf{r} \in D, \quad (3.6.5)$$

поскольку именно такие решения являются физически обоснованными.

3.6.3. Условия на поверхности раздела. Рассмотрим воображаемую поверхность S_p , разделяющую жидкости с различными физическими свойствами, образующие единый поток. Тогда на поверхности S_p выполняются условия:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (3.6.6)$$

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{n}_2), \quad |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (3.6.7)$$

где \mathbf{n}_1 — нормаль к одной из сторон поверхности S_p ; \mathbf{p}_1 , \mathbf{v}_1 — напряжение и скорость частиц на соответствующей стороне поверхности S_p , $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$. Условие (3.6.6) называется *кинематическим* и выражает равенство скоростей соприкасающихся частиц на поверхности раздела при отсутствии перемешивания жидкостей. Условие (3.6.7), называемое *динамическим условием*, выражает равенство нормальных и касательных напряжений по обе стороны от поверхности раздела.

Поскольку на свободной поверхности при отсутствии внешних касательных напряжений частицы жидкости совершают движения, перпендикулярные к поверхности раздела, то

$$p_{n_s} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (3.6.8)$$

где p_{n_s} — проекция напряжения на любое касательное к свободной поверхности S_p направление. Если \mathbf{n} — нормаль к свободной поверхности, то напряжение \mathbf{p} на свободной поверхности равно $\mathbf{p} = -p_0\mathbf{n}$, где p_0 — величина атмосферного давления. Поэтому

$$(\mathbf{p}, \mathbf{n}) = -p_0, \quad \mathbf{r} \in S_p. \quad (3.6.9)$$

Таким образом, требования (3.6.8), (3.6.9) образуют *динамическое условие на свободной поверхности вязкой жидкости*. *Кинематическое условие на свободной поверхности* формулируется следующим образом: скорость жидких частиц на свободной поверхности совпадает со скоростью перемещения свободной поверхности.

§ 3.7. Диссипация механической энергии

Выделим в жидкости некоторый объем V , который все время состоит из одних и тех же частиц. В соответствии с результатами

§ 2.5 работа поверхностных и массовых сил, совершаемая над объемом за время $\Delta t = t_2 - t_1$, равна

$$\begin{aligned} A_S + A_\tau &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} ds + \int_V \mathbf{F} \mathbf{v} \rho d\tau \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p}_x \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{p}_y \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{p}_z \mathbf{v}) + \mathbf{F} \mathbf{v} \rho \right] d\tau dt. \end{aligned}$$

Умножая уравнение (3.4.3) скалярно на \mathbf{v} , получаем

$$\rho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{v} \mathbf{F} = \mathbf{v} \operatorname{div} \Pi.$$

Принимая во внимание это соотношение и выражения для компонентов тензора напряжений (3.3.7), находим

$$\begin{aligned} A_S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\mathbf{v} \operatorname{div} \Pi + \mathbf{p}_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right] d\tau dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\rho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{v} \mathbf{F} + \Phi \right] d\tau dt, \end{aligned}$$

где $\Phi = \mu(2\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) = \mu \left[2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right]$ — диссипативная функция. Следовательно,

$$\begin{aligned} A_S + A_\tau &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \Phi d\tau dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\int_V \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} d\tau \right) dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_V \Phi d\tau dt = K(t_2) - K(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \Phi d\tau dt. \quad (3.7.1) \end{aligned}$$

Соотношение (3.7.1) показывает, что работа, совершаемая силами над объемом τ , только частично идет на изменение кинетической энергии объема. Часть механической энергии переходит в тепло. Количество энергии, диссипирующее в единицу времени

в единице объема, численно равно Φ . В этом состоит физический смысл диссипативной функции.

С диссипацией механической энергии связано свойство необратимости течений вязкой жидкости во времени (в отличие от течений идеальной жидкости, которые являются обратимыми). Напомним, что необратимый процесс не допускает возможности возвращения системы в первоначальное состояние без дополнительных энергетических затрат со стороны окружающей среды.

§ 3.8. Подобие течений вязкой жидкости

Если для двух потоков около или внутри геометрически подобных тел картины линий тока также геометрически подобны, то такие потоки называются *механически подобными*. Отыскание условий механического подобия потоков является важной прикладной задачей, поскольку это открывает определенные возможности для моделирования реальных процессов (можно проводить испытания не реальных объектов, а их геометрически подобных моделей). Выбор параметров потока и модели в эксперименте с моделью осуществляется в соответствии с *законом подобия*.

Переменные, входящие в уравнения движения вязкой жидкости и начально-краевые условия, были до сих пор размерными. Перейдем к безразмерным представлениям. Для простоты будем рассматривать движение однородной жидкости в поле силы тяжести. Выберем для данной задачи характерные величины: длину L (радиус обтекаемой сферы, диаметр трубы, внутри которой исследуется течение, и т. д.), скорость U (скорость потока на бесконечности, средняя скорость течения и т. д.), время T (период колебаний тела и т. д.). Введем в рассмотрение безразмерные величины посредством соотношений (величины со штрихами являются безразмерными):

$$\mathbf{r} = L\mathbf{r}', \quad \mathbf{v} = U\mathbf{v}', \quad p = \rho U^2 p', \quad t = Tt'. \quad (3.8.1)$$

Движение однородной вязкой жидкости в поле силы тяжести описывается системой

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = g\mathbf{k} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (3.8.2)$$

где \mathbf{k} — единичный вектор в направлении действия силы тяжести. С учетом (3.8.1) система (3.8.2) преобразуется к виду

$$\frac{U}{T} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} (\mathbf{v}', \nabla) \mathbf{v}' = g\mathbf{k} - \frac{U^2}{L} \text{grad } p' + \frac{\nu U}{L^2} \Delta \mathbf{v}', \quad \text{div } \mathbf{v}' = 0. \quad (3.8.3)$$

Умножая обе части первого уравнения в (3.8.3) на L/U^2 , имеем

$$\frac{L}{UT} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}', \nabla) \mathbf{v}' = \frac{gL}{U^2} \mathbf{k} - \text{grad } p' + \frac{\nu}{LU} \Delta \mathbf{v}', \quad \text{div } \mathbf{v}' = 0. \quad (3.8.4)$$

Система (3.8.4) содержит три безразмерных параметра: $\text{Re} = UL/\nu$ — число Рейнольдса, $\text{Fr} = U^2/gL$ — число Фруда, $\text{St} = UT/L$ — число Струхала.

Рассмотрим два течения в геометрически подобных областях G_1 и G_2 с характерными размерами L_1 и L_2 и характерными скоростями U_1 и U_2 . Для простоты положим, что $T_1 = L_1 U_1^{-1}$, $T_2 = L_2 U_2^{-1}$. Приведем соответствующие системы уравнений к безразмерному виду (3.8.4). Очевидно, что полученные таким образом системы будут полностью совпадать за исключением безразмерных параметров: чисел Re_1 и Re_2 , Fr_1 и Fr_2 . Если значения параметров совпадают:

$$\text{Re}_1 = \text{Re}_2, \quad \text{Fr}_1 = \text{Fr}_2, \quad (3.8.5)$$

то при одинаковых граничных условиях безразмерные решения этих двух задач будут совпадать. Следовательно, течения в геометрически подобных областях окажутся механически подобными. Условие (3.8.5) называется *законом подобия*. Если безразмерные задачи включают в себя другие параметры, то требуется равенство и этих параметров.

Предположим, что однородная жидкость находится в поле силы тяжести, причем граница области не является свободной поверхностью. Тогда силу тяжести можно исключить из уравнения Навье–Стокса, а значит из системы уравнений в целом. В самом деле, введем новую функцию q посредством соотношения

$$q = p - \rho g z. \quad (3.8.6)$$

Тогда уравнение Навье–Стокса примет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = g\mathbf{k} - \frac{1}{\rho} \text{grad } (q + \rho g z) + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

Если ось Z сонаправить с вектором \mathbf{k} , то

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } q + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (3.8.7)$$

Отсюда получаем *закон подобия Рейнольдса*: для вязкой однородной жидкости при отсутствии массовых сил или при действии силы тяжести, но в случае отсутствия свободной поверхности,

два течения в геометрически подобных областях, обладающие одинаковыми числами Рейнольдса, механически подобны.

Если же жидкость ограничена свободной поверхностью S_p с нормалью \mathbf{n} , то на поверхности S_p должно выполняться динамическое условие (3.6.9):

$$(\mathbf{p}, \mathbf{n}) = -p_0, \quad \mathbf{r} \in S_p.$$

Поскольку в соответствии с (2.3.1)

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}, \mathbf{n}) &= p_x \mathbf{n} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + p_y \mathbf{n} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + p_z \mathbf{n} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}) = \\ &= p_{xx} \cos^2(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + p_{yy} \cos^2(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + p_{zz} \cos^2(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}) + \dots = \\ &= -p + \dots = -p_0, \quad \mathbf{r} \in S_p, \end{aligned}$$

то замена (3.8.6) приведет к возникновению слагаемого $\rho g z$ в граничном условии.

§ 3.9. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости. Стационарные задачи

3.9.1. Течение вязкой жидкости между двумя неподвижными параллельными стенками под действием продольного градиента давления. Рассмотрим стационарное течение однородной вязкой жидкости между двумя бесконечными плоскопараллельными стенками $z = -h$ и $z = h$ в случае отсутствия массовых сил (*плоскопараллельное течение Пуазейля*). Пусть жидкость движется в направлении оси X . Тогда в уравнениях (3.4.6)

$$X = Y = Z = 0, \quad v_x = v_x(x, y, z), \quad v_y = v_z = 0.$$

Следовательно, система уравнений гидродинамики имеет вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (3.9.1)$$

Тогда $v_x = v_x(y, z)$ и (3.9.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (3.9.2)$$

Так как в первом уравнении из системы (3.9.2) левая часть зависит только от x , а правая — только от y и z , то равенство возможно, если $\partial p / \partial x = \text{const}$ (предполагается, что градиент

давления задан). Таким образом, для определения скорости получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.9.3)$$

с граничными условиями

$$v_x|_{z=\pm h} = 0. \quad (3.9.4)$$

Задача (3.9.3), (3.9.4) является двумерной задачей для уравнения Пуассона в полосе.

Найдем решение задачи (3.9.3), (3.9.4), зависящее только от переменной z . Оно определяется из задачи

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_x|_{z=\pm h} = 0. \quad (3.9.5)$$

Общее решение уравнения из (3.9.5) представимо как

$$v_x(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + Az + B. \quad (3.9.6)$$

Неизвестные коэффициенты определяются из системы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 + Ah + B &= 0, \\ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 - Ah + B &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$v_x(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - h^2).$$

Покажем, что найденное таким образом решение является единственным классическим решением задачи (3.9.3), (3.9.4). Доказательство проведем от противного, предположив существование еще одного отличного от нуля классического решения $V(y, z)$ задачи (3.9.3), (3.9.4). В силу линейности задачи функция

$$\tilde{v}(y, z) = v_x(z) + V(y, z)$$

также является решением (3.9.3), (3.9.4). Подставляя эту функцию в систему, приходим к задаче

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad V|_{z=\pm h} = 0,$$

которая имеет только тривиальное решение, что противоречит нашему предположению.

В соответствии с полученным распределением скоростей максимальное значение скорости принимает при $z = 0$, а минимальное — при $z = \pm h$. Жидкость течет в направлении падения давления, причем скорости распределены по параболическому закону (рис. 3.3).

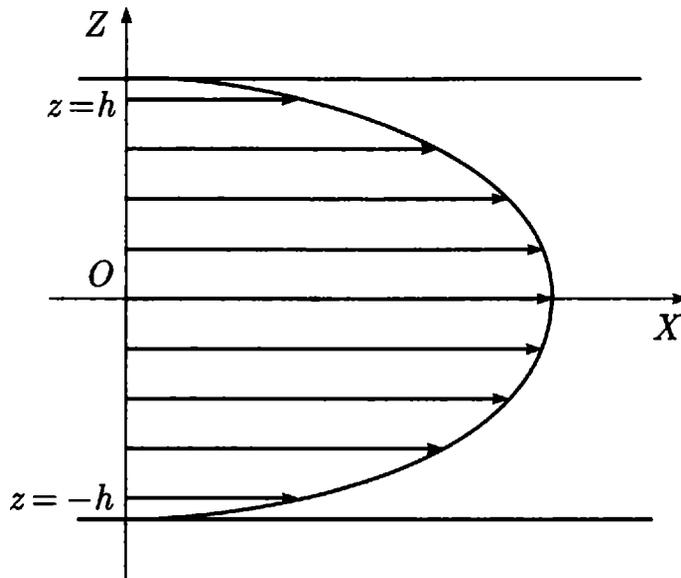


Рис. 3.3

Определим расход жидкости, т. е. количество жидкости, протекающее в единицу времени через торец призмы $z = -h$, $z = h$, $y = 0$, $y = b$. Если S — площадь торца, то расход жидкости Q равен потоку вектора скорости через поверхность S с нормалью \mathbf{n} , ориентированной в направлении движения потока ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$):

$$Q = \int_S \mathbf{v} \mathbf{n} \, ds = \int_S v_x(z) \, ds = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^b \int_{-h}^h (z^2 - h^2) \, dz \, dy = -\frac{2h^3 b}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.9.7)$$

Количество жидкости, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, определяется как средняя скорость течения \bar{v} :

$$\bar{v}_x = \frac{-\frac{2h^3 b}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x}}{2hb} = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Поскольку зависимость давления от координаты x является линейной ($dp/dx = \text{const}$), то легко получить формулу для падения давления на единицу длины. В самом деле, если в точках

M_0 и M_1 давления соответственно равны p_0 и p_1 , а расстояние между точками равно l , то

$$\frac{p_1 - p_0}{l} = \frac{dp}{dx},$$

или с учетом (3.9.7)

$$\frac{p_0 - p_1}{l} = \frac{3\mu Q}{2bh^3}.$$

Падение давления на единицу длины прямо пропорционально коэффициенту вязкости и расходу жидкости и обратно пропорционально кубу расстояния между стенками.

3.9.2. Течение вязкой жидкости между двумя параллельными стенками, одна из которых движется. Предположим, что стенка $z = h$ движется в своей плоскости со скоростью U в направлении оси X , причем процесс установился (*течение Куэтта*). Тогда распределение скоростей по-прежнему определяется из уравнения (3.9.3), но с граничными условиями вида:

$$v_x|_{z=-h} = 0, \quad v_x|_{z=h} = U.$$

Зависящее от переменной z решение уравнения (3.9.3) дается формулой (3.9.6), причем коэффициенты определяются из следующей системы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 - Ah + B &= 0, \\ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 + Ah + B &= U. \end{aligned}$$

Таким образом, распределение скоростей представимо как

$$v_x(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - h^2) + \frac{U}{2h} z + \frac{U}{2}.$$

В частности, если давление в жидкости постоянно ($dp/dx = 0$), то получаем линейное распределение скоростей (рис. 3.1):

$$v_x(z) = \frac{U}{2h} z + \frac{U}{2}.$$

В соответствии с законом Ньютона (3.1.1) величина силы трения τ между слоями жидкости равна

$$\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

или с учетом полученного распределения скоростей

$$\tau = \mu \frac{U}{2h}.$$

Найдем расход жидкости Q :

$$Q = \int_S \mathbf{v} \mathbf{n} ds = \int_S v_x(z) ds = \int_0^b \int_{-h}^h \left(\frac{U}{2h} z + \frac{U}{2} \right) dz dy = Uhb.$$

Отсюда средняя скорость течения определяется как

$$\bar{v}_x = \frac{Uhb}{2hb} = \frac{U}{2}.$$

3.9.3. Стеkanie слоя жидкости по поверхности вертикально расположенного цилиндра в поле силы тяжести.

Предположим, что процесс стекания установился во времени. Пусть a — радиус цилиндра, h — толщина слоя.

Для решения этой задачи естественно выбрать цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , причем ось Z удобно направить вниз. Очевидно, что вектор скорости \mathbf{v} , также как и вектор плотности массовых сил \mathbf{F} , имеет только одну отличную от нуля составляющую:

$$\begin{aligned} v_z &= v_z(r, z), & v_r &= 0, & v_\varphi &= 0, \\ F_z &= g, & F_r &= 0, & F_\varphi &= 0, \end{aligned}$$

где g — величина ускорения свободного падения. С учетом этого в цилиндрической системе координат уравнения Навье–Стокса и неразрывности принимают вид (см. дополнение):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= 0, \\ v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), & \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad g + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.9.8)$$

Следовательно, $p = p(z)$, $v_z = v_z(r)$.

В третьем уравнении из (3.9.8) левая часть зависит только от переменной r , а правая — только от переменной z . Поэтому равенство возможно тогда, когда обе части уравнения равны некоторой постоянной величине: $\partial p / \partial z = \text{const}$. Пусть

течение жидкости обусловлено только действием силы тяжести: $\partial p / \partial z = 0$. Тогда приходим к уравнению

$$g + \nu \left(\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) = 0 \quad (3.9.9)$$

с граничным условием на поверхности цилиндра

$$v_z|_{r=a} = 0. \quad (3.9.10)$$

На свободной поверхности должно выполняться динамическое условие (3.6.8), (3.6.9). Учитывая выражения (3.3.8) для компонентов тензора напряжений в цилиндрической системе координат, а также тот факт, что орт цилиндрической системы координат e_r является нормалью к свободной поверхности, получаем граничные условия на свободной поверхности:

$$\begin{aligned} p_{rr}|_{r=a+h} &= -p|_{r=a+h} = -p_0, \\ p_{r\varphi}|_{r=a+h} &= 0, \quad p_{rz}|_{r=a+h} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=a+h} = 0. \end{aligned} \quad (3.9.11)$$

Для определения давления имеем задачу

$$\frac{dp}{dz} = 0, \quad p|_{r=a+h} = p_0,$$

решением которой является функция $p(z) = p_0$. Распределение скоростей находится из задачи (3.9.9), (3.9.10) с граничным условием на свободной поверхности следующего вида:

$$\mu \frac{dv_z}{dr} \Big|_{r=a+h} = 0. \quad (3.9.12)$$

Общим решением уравнения

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} = -\frac{g}{\nu} \quad (3.9.13)$$

является функция

$$v_z(r) = C_1 \ln r + C_2 + \tilde{v}(r),$$

где частное решение $\tilde{v}(r)$ уравнения (3.9.13) удобно искать в виде $\tilde{v}(r) = Ar^2$. После подстановки $\tilde{v}(r)$ в (3.9.13) находим, что $A = -g/4\nu$. Учитывая условия (3.9.10), (3.9.12), неизвестные коэффициенты C_1 и C_2 определяем из системы

$$C_1 \ln a + C_2 - \frac{ga^2}{4\nu} = 0, \quad \frac{C_1}{a+h} - \frac{2g(a+h)}{4\nu} = 0.$$

Окончательно имеем распределение скоростей

$$v_z(r) = \frac{g}{2\nu} (a+h)^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{g}{4\nu} (a^2 - r^2).$$

Количество жидкости Q , протекающее в единицу времени через кольцо $S = \{(r, \varphi)/a \leq r \leq a+h, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, определяется как

$$\begin{aligned} Q &= \int_S v_z(r) r dr d\varphi = \frac{\pi g}{2\nu} \left[2(a+h)^2 \int_a^{a+h} r \ln \frac{r}{a} dr + \int_a^{a+h} (a^2 - r^2) r dr \right] = \\ &= \frac{\pi g}{2\nu} \left[2(a+h)^2 \left(\frac{r^2}{2} \ln \frac{r}{a} \Big|_a^{a+h} - \int_a^{a+h} \frac{r}{2} dr \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_a^{a+h} (a^2 - r^2) d(a^2 - r^2) \right] = \\ &= \frac{\pi g}{2\nu} \left[(a+h)^4 \left(\ln \frac{a+h}{a} - \frac{3}{4} \right) + a^2(a+h)^2 - \frac{a^4}{4} \right]. \end{aligned}$$

3.9.4. Стеkanie слоя жидкости по наклонной плоскости.

Пусть слой однородной жидкости толщиной h стекает под действием силы тяжести по плоскости, наклоненной под углом α к горизонту (рис. 3.4). Направим ось X по течению жидкости.

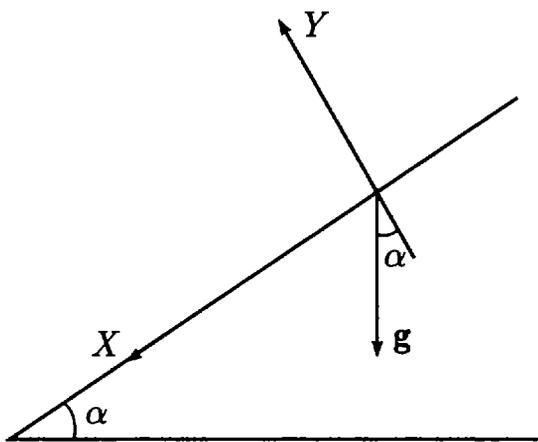


Рис. 3.4

Тогда вектор скорости имеет только одну ненулевую компоненту:

$$v_x = v_x(x, y), \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Так как движение считается установившимся, то система уравнений гидродинамики (3.4.6), (3.5.1) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 &= g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ 0 &= -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{3.9.14}$$

Из первого и последнего уравнений в (3.9.14) находим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho \sin \alpha + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Рассмотрим случай, когда жидкость стекает под действием силы тяжести ($\partial p / \partial x = 0$).

Поскольку поверхность слоя является свободной, то при $y = h$ справедливы граничные условия:

$$p_{yy}|_{y=h} = -p_0, \quad p_{yx}|_{y=h} = p_{yz}|_{y=h} = 0.$$

В соответствии с (3.3.7) находим

$$p|_{y=h} = p_0, \quad -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0.$$

Учитывая граничное условие на плоскости, получаем краевые задачи для определения распределений скоростей и давлений:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\mu} g \sin \alpha, \quad v_x|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0, \quad (3.9.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha, \quad p|_{y=h} = p_0. \quad (3.9.16)$$

Решения (3.9.15), (3.9.16) имеют вид:

$$v_x(y) = -\frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha \left(\frac{1}{2} y^2 - hy \right), \quad (3.9.17)$$

$$p = p_0 - \rho g \cos \alpha (y - h).$$

Количество жидкости Q , протекающее в единицу времени через сечение $y = 0$, $y = h$, $z = 0$, $z = b$ (расход жидкости), определяется как

$$Q = \int_S \mathbf{v} \mathbf{n} dS = \int_S v_x(y) dS = -\frac{\rho g b}{\mu} \sin \alpha \int_0^h \left(\frac{1}{2} y^2 - hy \right) dy =$$

$$= \frac{\rho g h^3 b}{3\mu} \sin \alpha.$$

Важным свойством течения (3.9.17) является его неустойчивость, приводящая к образованию волн. При увеличении расхода жидкости волны в слое становятся беспорядочными трехмерными.

3.9.5. Стационарное течение в трубах. Рассмотрим течение в трубе с гладким сечением, вызванное продольным градиентом давления, не зависящим от времени: $\partial p/\partial x \neq 0$, $\partial p/\partial y = 0$, $\partial p/\partial z = 0$. Будем считать, что ось X направлена вдоль оси трубы по течению жидкости.

Пусть число Рейнольдса меньше некоторого критического значения: $Re < Re_{кр}$. Тогда течение будет *ламинарным (слоистым)*. Типичным свойством ламинарных течений является изменение характера течения только в связи с изменением внешних условий и внешних сил. В остальных случаях течение сохраняет свой спокойный характер. Когда $Re > Re_{кр}$, течение может стать беспорядочным (*турбулентным*). В опытах с трубой круглого сечения Рейнольдсом было установлено критическое значение: $Re_{кр} \approx 2300$. Однако при $Re > Re_{кр}$ движение все же может оставаться ламинарным, но характер течения будет неустойчивым по отношению к малейшим возмущениям.

Если труба в сечении имеет кривую l_T , то для описания течения жидкости получаем систему уравнений гидродинамики

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (3.9.18)$$

с граничными условиями:

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T, \quad |\mathbf{v}| < \infty, \quad \mathbf{r} \in G, \quad (3.9.19)$$

где G — область, расположенная внутри поверхности трубы S_T .

Наиболее важным частным случаем является течение по трубе с круговым сечением радиуса a . Для решения этой задачи выберем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , причем ось Z направим по оси трубы в направлении течения. Поскольку $v_r = v_\varphi = 0$, $v_z \neq 0$, то соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (3.9.20)$$

Далее, так как $p = p(z)$, а $v_z = v_z(r, \varphi)$, то выполнение третьего уравнения в системе (3.9.20) возможно, если $\partial p/\partial z = \text{const}$. В итоге для определения скорости получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad v_z|_{r=a} = 0, \quad |v_z| < \infty. \quad (3.9.21)$$

Решение задачи (3.9.21) ищем в виде $v_z(r, \varphi) = w(r, \varphi) + \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$, где функция $w(r, \varphi)$ удовлетворяет краевой задаче Дирихле для оператора Лапласа:

$$\Delta w = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad w|_{r=a} = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}, \quad |w| < \infty.$$

Решение краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри круга, ограниченное при $r = 0$, дается формулой [9]

$$w(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad A_n, B_n = \text{const.}$$

Учитывая граничное условие при $r = a$, находим $A_0 = -\frac{a^2}{2\mu} \frac{dp}{dz}$, $A_n = 0$, $n \neq 0$, $B_n = 0$. Следовательно,

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2). \quad (3.9.22)$$

Заметим, что функция (3.9.22) является классическим решением задачи (3.9.21), и, значит, единственным ее решением в силу теоремы единственности [9].

Течение с профилем скорости (3.9.22) также называется *плоскопараллельным течением Пуазейля*.

Если p_1 и p_2 — давления в двух точках, отстоящих на расстояние l друг от друга, то

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p_1 - p_2}{l}.$$

Поэтому распределение (3.9.22) можно переписать в виде

$$v_z(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (a^2 - r^2). \quad (3.9.23)$$

Найдем расход жидкости:

$$\begin{aligned} Q &= \int_S \mathbf{v} \mathbf{n} ds = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a v_z(r) r dr d\varphi = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\mu l} \int_0^a (a^2 - r^2) r dr = \frac{\pi a^4 (p_1 - p_2)}{8\mu l}. \end{aligned}$$

Тогда средняя скорость течения равна

$$\bar{v}_z = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2(p_1 - p_2)}{8\mu l} = \frac{1}{2} v_{z\max}, \quad (3.9.24)$$

где $v_{z\max} = \frac{a^2(p_1 - p_2)}{4\mu l}$ — максимальное значение скорости, достигаемое на оси трубы.

Из формулы (3.9.24) следует закон Гагена–Пуазейля: при ламинарном течении падение давления пропорционально средней скорости течения и длине трубы и обратно пропорционально квадрату радиуса трубы, или

$$\Delta p = \frac{8\mu l \bar{v}_z}{a^2}. \quad (3.9.25)$$

Закон (3.9.25) хорошо согласуется с экспериментальными данными. При увеличении числа Рейнольдса до критического значения наблюдается нарушение соответствия теории и эксперимента.

Другое частное решение задачи (3.9.18), (3.9.19) будем искать в виде

$$v_x(y, z) = Ay^2 + Bz^2 + C. \quad (3.9.26)$$

Подставляя (3.9.26) в (3.9.18), получаем

$$(2A + 2B) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.9.27)$$

Условие на поверхности трубы

$$v_x|_{S_T} = (Ay^2 + Bz^2 + C)|_{l_T} = 0$$

означает, что сечением трубы, для которого распределение скоростей представимо формулой (3.9.26), является эллипс

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

где $a^2 = -C/A$, $b^2 = -C/B$, a и b — полуоси эллипса. Поэтому, в соответствии с (3.9.27),

$$\frac{C}{a^2} + \frac{C}{b^2} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

или

$$C = \frac{1}{2\mu} \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Следовательно, распределение скоростей при ламинарном течении в трубе с эллиптическим сечением имеет вид

$$v_x(y, z) = \frac{1}{2\mu l} \frac{(p_1 - p_2) a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right). \quad (3.9.28)$$

При $a = b$ из формулы (3.9.28) получаем профиль скорости для течения Пуазейля.

Найдем силу трения, отнесенную к единице длины боковой поверхности жидкого объема, заключенного внутри трубы. Напряжение \mathbf{p}_n , действующее на боковой поверхности, можно представить в виде

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{e}_x p_{nx} + \mathbf{e}_y p_{ny} + \mathbf{e}_z p_{nz} = \mathbf{e}_x p_{nx} + \mathbf{n} p_{nn},$$

где p_{n_x} — проекция вектора напряжения \mathbf{p}_n на направление движения потока (касательное напряжение), p_{nn} — нормальное напряжение; \mathbf{n} — внешняя нормаль к боковой поверхности трубы (рис. 3.5). На элемент поверхности $ds = 1 \cdot dl$ действует сила трения

$$dT = p_{n_x} ds.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} p_{n_x} &= p_{xx} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + p_{yx} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + p_{zx} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}) = \\ &= p_{yx} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + p_{zx} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}), \end{aligned}$$

то

$$T = \oint_{l_T} (p_{yx} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + p_{zx} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z})) dl,$$

где l_T — длина контура сечения.

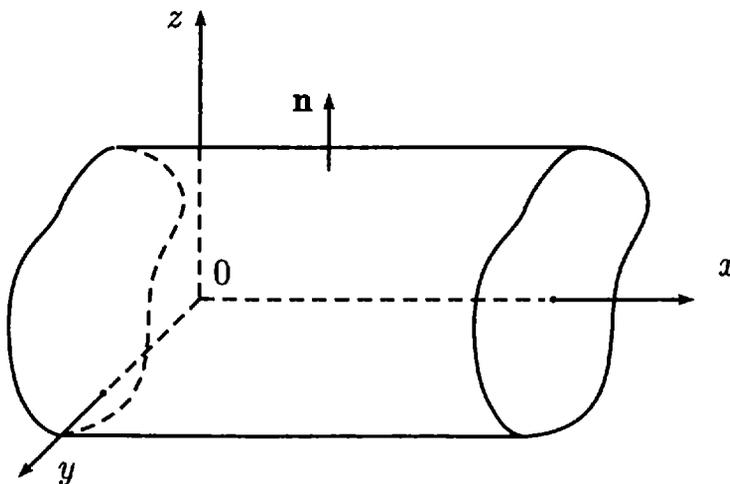


Рис. 3.5

Из системы (3.9.18) следует, что $v_x = v_x(y, z)$. Поэтому

$$T = \mu \oint_{l_T} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}) \right) dl = \\ = \mu \oint_{l_T} \mathbf{n} \operatorname{grad} v_x dl = \mu \oint_{l_T} \frac{\partial v_x}{\partial n} dl. \quad (3.9.29)$$

Для расчетов вместо (3.9.29) удобно использовать другое представление:

$$T = \oint_{l_T} (p_{yx} dz + p_{zx} dy) = \mu \oint_{l_T} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} dz - \frac{\partial v_x}{\partial z} dy \right), \quad (3.9.30)$$

здесь учтено, что $dz = dl \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y})$, $dy = -dl \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z})$.

В частности, при движении жидкости по трубе с эллиптическим сечением сила трения, отнесенная к единице длины боковой поверхности жидкого объема, равна

$$T = \frac{(p_2 - p_1) a^2 b^2}{2l(a^2 + b^2)} \oint_{l_T} \left(\frac{2y}{a^2} dz - \frac{2z}{b^2} dy \right).$$

Задавая эллипс с помощью уравнений $y = a \cos t$, $z = b \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$ и полагая, что $\Delta p = p_2 - p_1$ — падение давления на единицу длины, имеем

$$T = \frac{\Delta p a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{b}{a} \cos^2 t + \frac{a}{b} \sin^2 t \right) dt = \frac{\Delta p a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{(a^2 + b^2)\pi}{ab} = \pi ab \Delta p. \quad (3.9.31)$$

На правом торце выделенного объема действует напряжение \mathbf{p}_x . Поэтому сила давления, приложенная к правому торцу с площадью S , равна $p_{xx} S = -p_2 \pi ab$. На левом торце действует напряжение $\mathbf{p}_{-x} = -\mathbf{p}_x$. Соответствующая сила давления определяется как $-p_{xx} S = p_1 \pi ab$. Суммарная сила давления, действующая на боковую поверхность цилиндра, равна нулю. Таким образом, на выделенный объем жидкости действует сила давления $-(p_2 - p_1) \pi ab$, которая уравновешивается силой трения (3.9.31), вследствие чего жидкость движется равномерно.

Если сечение поверхности трубы является кусочно-гладкой кривой, то процедура построения решения усложняется. Рассмотрим, например, течение в трубе, сечение которой —

прямоугольник, ограниченный прямыми $y = \pm b$, $z = \pm a$. Решение системы (3.9.18), (3.9.19) будем искать в виде

$$v_x(y, z) = -\frac{\Delta p}{2\mu l} (a^2 - z^2 + \bar{v}(y, z)).$$

Тогда функция $\bar{v}(y, z)$ определяется из краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} = 0, \quad \bar{v}|_{z=\pm a} = 0, \quad \bar{v}|_{y=\pm b} = z^2 - a^2. \quad (3.9.32)$$

Частные решения уравнения (3.9.32), удовлетворяющие граничным условиям при $z = \pm a$, ищем в соответствии с методом разделения переменных [9]:

$$\bar{v}(y, z) = Y(y) Z(z).$$

Подставляя это представление в уравнение (3.9.32), находим

$$-\frac{Y''}{Y} = \frac{Z''}{Z} = -\lambda, \quad \lambda = \text{const}.$$

С учетом однородного граничного условия из системы (3.9.32) получаем задачу на собственные функции и собственные значения отрезка:

$$Z'' + \lambda Z = 0, \quad Z(\pm a) = 0. \quad (3.9.33)$$

Решение задачи (3.9.33) представимо как

$$Z(z) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} z + C_2 \cos \sqrt{\lambda} z,$$

где коэффициенты C_1 и C_2 определяются из системы

$$\begin{aligned} C_1 \sin \sqrt{\lambda} a + C_2 \cos \sqrt{\lambda} a &= 0, \\ -C_1 \sin \sqrt{\lambda} a + C_2 \cos \sqrt{\lambda} a &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если

$$\begin{vmatrix} \sin \sqrt{\lambda} a & \cos \sqrt{\lambda} a \\ -\sin \sqrt{\lambda} a & \cos \sqrt{\lambda} a \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем дисперсионное уравнение относительно параметра λ :

$$\sin 2\sqrt{\lambda} a = 0,$$

и систему собственных значений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Если $n = 2k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то решение (3.9.33) представимо как

$$Z_k = \sin \sqrt{\lambda_k} z, \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{a} \right)^2.$$

Если $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то решение (3.9.33) имеет вид

$$Z_k = \cos \sqrt{\lambda_k} z, \quad \lambda_k = \left[\frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]^2.$$

Постоянные C_1 и C_2 положили равными единице, так как значения собственных функций определены с точностью до постоянного множителя.

Заметим, что собственные функции задачи (3.9.33) обладают свойством ортогональности на отрезке $[-a; a]$ [9]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_{-a}^a \sin \frac{\pi k}{a} z \sin \frac{\pi k'}{a} z dz &= \delta_{kk'}, \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) z \cos \frac{\pi}{a} \left(k' + \frac{1}{2} \right) z dz &= \delta_{kk'}, \\ \int_{-a}^a \sin \frac{\pi k}{a} z \cos \frac{\pi}{a} \left(k' + \frac{1}{2} \right) z dz &= 0 \end{aligned} \quad (3.9.33a)$$

при любых k и k' . Здесь $\delta_{kk'} = 1$, если $k = k'$; $\delta_{kk'} = 0$, если $k \neq k'$.

Для определения функции $Y(y)$ получаем уравнение

$$Y'' - \lambda_k Y = 0,$$

фундаментальную систему решений которого удобно записать в виде $\{ \text{sh } \sqrt{\lambda_k} y, \text{ch } \sqrt{\lambda_k} y \}$. Таким образом, построены системы частных решений уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} \text{sh } \frac{\pi k}{a} y \sin \frac{\pi k}{a} z, & \quad \text{sh } \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) y \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) z, \\ \text{ch } \frac{\pi k}{a} y \sin \frac{\pi k}{a} z, & \quad \text{ch } \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) y \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) z. \end{aligned}$$

Решение задачи (3.9.32) представим в виде разложения по этим частным решениям:

$$\bar{v}(y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[A_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{a} y + B_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{a} y \right] \sin \frac{\pi k}{a} z + \right. \\ \left. + \left[C_k \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) y + D_k \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) y \right] \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) z \right\},$$

где коэффициенты ряда определяются из граничных условий при $y = \pm b$:

$$z^2 - a^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\pm A_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{a} b + B_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{a} b \right] \sin \frac{\pi k}{a} z + \right. \\ \left. + \left[\pm C_k \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) b + D_k \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) b \right] \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) z \right\}. \quad (3.9.33б)$$

В соответствии с теоремой разложимости Стеклова [9] функция $z^2 - a^2$ может быть представлена единственным образом в виде разложения по собственным функциям задачи (3.9.33). Поэтому $A_k = 0$, $C_k = 0$ для любого значения k .

Далее, умножая обе части равенства (3.9.33б) на $\sin(\pi k'/a)z$, затем интегрируя по z от $-a$ до a и используя свойство ортогональности (3.9.33а), имеем $B_k = 0$ для любого значения k . Умножая обе части равенства (3.9.33б) на $\cos \pi/a(k' + 1/2)z$ и интегрируя по z , находим

$$\int_{-a}^a (z^2 - a^2) \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) z dz = a D_k \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) b,$$

или

$$D_k \operatorname{ch} \lambda_k b = \frac{1}{a} \int_{-a}^a (z^2 - a^2) \cos \lambda_k z dz = (-1)^{k+1} \frac{32a^2}{(2k+1)^3 \pi^3}, \\ \lambda_k = \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, распределение скоростей в трубе с прямоугольным сечением дается формулой

$$v_x(y, z) = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \left[a^2 - z^2 + \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \lambda_k y}{\operatorname{ch} \lambda_k b} \cos \lambda_k z \right], \quad (3.9.34) \\ \lambda_k = \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right).$$

При $b \rightarrow \infty$ из (3.9.34) получаем распределение скоростей в плоском канале между двумя твердыми поверхностями $z = \pm a$:

$$v_x(y, z) = -\frac{\Delta p}{2\mu l} (a^2 - z^2). \quad (3.9.35)$$

Результат (3.9.35) согласуется с ранее полученным (см. пример 9.1). Следовательно, течение между двумя плоскопараллельными стенками можно рассматривать как предельный случай течения по трубе с прямоугольным сечением. При плоскопараллельном течении с профилем скоростей (3.9.35) теоретические выводы совпадают с экспериментальными данными при значениях числа Рейнольдса, меньших чем 1400. Если $Re > 1400$, то в плоском канале может наблюдаться переход к турбулентному течению.

3.9.6. Стационарное течение с осевой симметрией. Если стационарное течение с осевой симметрией рассмотреть относительно цилиндрической системы координат (r, φ, z) , то будут характерны следующие зависимости:

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = v_\varphi(r), \quad v_z = v_z(r), \quad p = p(r).$$

В частном случае, когда частицы жидкости движутся по окружностям, v_z также обращается в ноль. Типичным примером такого течения является стационарное течение жидкости между двумя цилиндрами.

Пусть жидкость заключена между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов $r_1 < r_2$, вращающихся с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 в одном направлении. Предположим, что значения

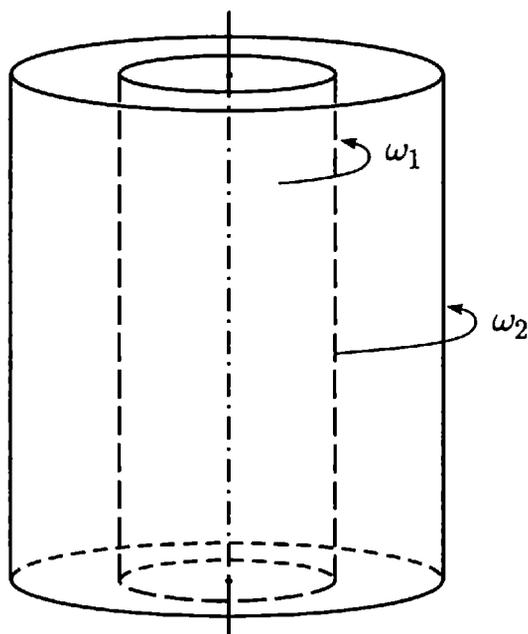


Рис. 3.6

угловых скоростей малы, так что движение жидкости можно считать ламинарным (рис. 3.6). В цилиндрической системе координат уравнения движения и граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{v_\varphi^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2v_\varphi}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad v_\varphi|_{r=r_1} = \omega_1 r_1, \quad v_\varphi|_{r=r_2} = \omega_2 r_2, \end{aligned} \quad (3.9.36)$$

откуда следует, что $p = p(r, \varphi)$, $v_\varphi = v(r, z)$. Следовательно, система преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{v_\varphi^2}{r}, \quad \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad v_\varphi|_{r=r_1} = \omega_1 r_1, \quad v_\varphi|_{r=r_2} = \omega_2 r_2. \end{aligned} \quad (3.9.37)$$

Если $\partial p / \partial \varphi \neq 0$, то движение частиц жидкости по окружностям невозможно. Заметим, что $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{v_\varphi^2}{2} < 0$. Полагая $\partial p / \partial \varphi = 0$, из системы (3.9.37) находим: $p = p(r)$, $v_\varphi = v_\varphi(r)$. Таким образом, для определения проекции скорости на ось φ получаем следующую краевую задачу:

$$\frac{d^2 v_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\varphi}{dr} - \frac{v_\varphi}{r^2} = 0, \quad v_\varphi|_{r=r_1} = \omega_1 r_1, \quad v_\varphi|_{r=r_2} = \omega_2 r_2. \quad (3.9.38)$$

Функции, образующие фундаментальную систему решений уравнения из (3.9.38), ищем в виде $v_\varphi(r) = r^k$. Относительно k получаем алгебраическое уравнение

$$k(k-1) + k - 1 = 0,$$

и, значит, общее решение соответствующего дифференциального уравнения представимо как

$$v_\varphi(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий

$$C_1 r_1 + \frac{C_2}{r_1} = \omega_1 r_1, \quad C_1 r_2 + \frac{C_2}{r_2} = \omega_2 r_2.$$

Итак,

$$v_\varphi(r) = \frac{(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) r^2 + (\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r(r_2^2 - r_1^2)}.$$

Определим силы трения, действующие на внутренний и внешний цилиндры единичной высоты. Рассмотрим, например, внутренний цилиндр. На поверхности $r = r_1$ сила трения определяется двумя компонентами $p_{r\varphi}$ и p_{rz} тензора напряжений, которые можно рассматривать как касательные компоненты вектора напряжений \mathbf{p}_r , действующего на этой поверхности.

Поскольку $p_{rz} = 0$, а $p_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)$, то сила трения, действующая на элемент поверхности $dS_1 = r_1 d\varphi$, равна $p_{r\varphi}|_{r=r_1} r_1 d\varphi$.

Поэтому искомая сила трения T_1 определяется интегралом

$$\begin{aligned} T_1 &= \mu \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=r_1} r_1 d\varphi = 2\pi\mu r_1 \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=r_1} = \\ &= -4\pi\mu \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{r_2^2 - r_1^2} r_1 r_2^2. \end{aligned}$$

При вычислении силы трения, действующей на внешний цилиндр, необходимо учесть, что напряжение \mathbf{p}_{-r} , действующее на внутренней поверхности внешнего цилиндра, равно $\mathbf{p}_{-r}|_{r=r_2} = -\mathbf{p}_r|_{r=r_2}$. Поэтому на элемент поверхности $dS_2 = r_2 d\varphi$ действует сила трения $-p_{r\varphi}|_{r=r_2} r_2 d\varphi$. Следовательно, на цилиндр единичной высоты с радиусом r_2 действует сила

$$T_2 = -4\pi\mu \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{r_2^2 - r_1^2} r_2 r_1^2.$$

§ 3.10. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости. Нестационарные задачи

3.10.1. Слоистые нестационарные течения. Рассмотрим нестационарное течение вязкой жидкости, полагая, что относительно выбранной системы координат жидкость движется

в направлении оси X . В этом случае $v_x = v_x(x, y, z, t)$, $v_y = v_z = 0$. Поскольку, в соответствии с уравнением неразрывности, $\partial v_x / \partial x = 0$, то функция v_x не зависит от переменной x , и значит, уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial v_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (3.10.1)$$

Так как левая часть в первом уравнении из системы (3.10.1) зависит только от переменных x и t , а правая — от переменных y, z и t , то уравнение разрешимо, если $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(t)$. Здесь $f(t)$ — произвольная функция времени.

При условии, что $f(t) = 0$, функция $v_x(y, z, t)$ удовлетворяет двумерному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (3.10.2)$$

Если же $f(t) \neq 0$, то замена

$$v_x(y, z, t) = \tilde{v}_x(y, z, t) - \int_0^t f(t) dt$$

сводит соответствующее уравнение к уравнению (3.10.2), но уже относительно функции $\tilde{v}_x(y, z, t)$.

Вид частных решений уравнения (3.10.2) определяется видом начальных и граничных условий. Так, если эти условия не зависят от переменной y , то и решение задачи также не будет зависеть от этой переменной. Такие математические модели описывают течения из класса *одномерных нестационарных течений*.

Пусть требуется найти решение уравнения (3.10.2) в бесконечной области при условии, что начальная функция не зависит от переменной y . Таким образом, приходим к начальной задаче для одномерного уравнения теплопроводности на бесконечной прямой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad z \in R^1, \\ v_x(z, 0) &= F(z), \quad z \in R^1. \end{aligned} \quad (3.10.3)$$

Ограниченные при $z \in R^1$, $t \geq 0$ частные решения уравнения (3.10.3) ищем в виде

$$v_x(z, t) = Z(z)T(t). \quad (3.10.4)$$

Подставляя (3.10.4) в уравнение (3.10.3), находим

$$\frac{T'}{\nu T} = \frac{Z''}{Z} = -\lambda,$$

где λ — произвольная константа. Для определения функции $Z(z)$ получаем задачу Штурма–Лиувилля на бесконечной прямой:

$$Z'' + \lambda Z = 0, \quad z \in R^1, \quad |Z| < M, \quad M > 0. \quad (3.10.5)$$

При $\lambda > 0$ задача (3.10.5) имеет систему ограниченных линейно независимых решений $e^{\pm i\sqrt{\lambda}z}$, $z \in R^1$. Пусть $\lambda = k^2$, $-\infty < k < \infty$. Тогда совокупность частных решений системы (3.10.5) можно представить в виде

$$Z_k(z) = e^{ikz}, \quad \lambda_k = k^2, \quad z \in R^1, \quad k \in R^1.$$

Функция $T(t)$ удовлетворяет уравнению

$$T' + \nu \lambda_k T = 0,$$

общее решение которого

$$T_k(t) = C e^{-\nu k^2 t} \quad (3.10.6)$$

стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, ограниченные частные решения уравнения из системы (3.10.3) представимы как

$$v_{xk}(z, t) = C(k) e^{-\nu k^2 t + ikz}.$$

Поскольку спектр задачи (3.10.5) непрерывен, то решение задачи (3.10.3) будем искать в виде интеграла

$$v_x(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{-\nu k^2 t + ikz} dk. \quad (3.10.7)$$

Неизвестный коэффициент $C(k)$ определяется в соответствии с начальным условием:

$$v_x(z, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikz} dk = F(z).$$

Отсюда, используя обратное преобразование Фурье, имеем

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-ik\xi} d\xi.$$

Итак,

$$\begin{aligned} v_x(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{-\nu k^2 t + ikz} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(z, \xi, t) F(\xi) d\xi, \quad (3.10.8) \end{aligned}$$

$$\text{где } G(z, \xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu k^2 t + ik(z-\xi)} dk.$$

Определим функцию $G(z, \xi, t)$, вычислив соответствующий интеграл. Введем обозначения:

$$I(\beta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2 + ik\beta} dk, \quad \alpha^2 = \nu t > 0, \quad \beta = z - \xi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\beta} &= i \int_{-\infty}^{\infty} k e^{-\alpha^2 k^2 + ik\beta} dk = -\frac{i}{2\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\beta} d e^{-\alpha^2 k^2} = \\ &= -\frac{i}{2\alpha^2} \left(e^{ik\beta} e^{-\alpha^2 k^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2} d e^{ik\beta} \right) = \\ &= -\frac{\beta}{2\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2 + ik\beta} dk = -\frac{\beta}{2\alpha^2} I(\beta). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $I(\beta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dI}{d\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha^2} I(\beta).$$

Отсюда

$$I(\beta) = C \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right),$$

где

$$C = I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2} dk = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

Итак,

$$G(z, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \exp \left[-\frac{(z - \xi)^2}{4\nu t} \right].$$

В соответствии с формулой (3.10.8) для решения задачи (3.10.3) получаем представление

$$v_x(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(z - \xi)^2}{4\nu t} \right] F(\xi) d\xi, \quad (3.10.9)$$

называемое *интегралом Пуассона*.

Заметим, что интеграл Пуассона был получен в предположении непрерывности и ограниченности начальной функции $F(z)$. Однако, в приложениях нередко встречаются случаи, для которых начальная функция является кусочно-непрерывной и ограниченной с конечным числом точек разрыва. Здесь формула (3.10.9) также применима, но решение соответствующей задачи непрерывно примыкает к начальной функции только в точках ее непрерывности, оставаясь при этом везде ограниченным [9].

3.10.1.1. Тангенциальный разрыв. Пусть в начальный момент времени задано распределение скоростей, отвечающее тангенциальному разрыву в плоскости $z = 0$:

$$v_x(z, 0) = \begin{cases} v_0, & z > 0, \\ -v_0, & z < 0. \end{cases}$$

Найдем распределение скоростей при $t > 0$, пользуясь представлением (3.10.9). Подставляя начальное распределение в (3.10.9), имеем

$$v_x(z, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{(z - \xi)^2}{4\nu t} \right] v_0 d\xi + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{(z - \xi)^2}{4\nu t} \right] v_0 d\xi.$$

Делая замену переменной интегрирования

$$\lambda = \frac{-z + \xi}{2\sqrt{\nu t}}, \quad d\lambda = \frac{d\xi}{2\sqrt{\nu t}},$$

$$-\infty < \xi < 0 \Rightarrow -\infty < \lambda < -\frac{z}{2\sqrt{\nu t}},$$

$$0 < \xi < \infty \Rightarrow -\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} < \lambda < \infty,$$

приходим к следующему результату:

$$v_x(z, t) = - \int_{-\infty}^{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda + \int_{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda =$$

$$= - \left[\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda + \int_0^{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda \right] +$$

$$+ \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda + \int_{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}^0 e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda = v_0 \Phi \left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} \right), \quad (3.10.10)$$

где $\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\lambda^2} d\lambda$ — функция ошибок. Так как $\Phi(\pm\infty) = \pm 1$, $\Phi(0) = 0$, то скорость в любой точке пространства изменяется по абсолютной величине от v_0 при $t = 0$ до 0 при $t \rightarrow \infty$.

Вычислим компоненты вихря:

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \Omega_z = 0.$$

Следовательно,

$$\Omega_y(z, t) = \frac{v_0}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp \left(-\frac{z^2}{4\nu t} \right).$$

Найдем производную от функции $\Omega_y(z, t)$ по t при фиксированном значении z :

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial t} = \frac{v_0}{\sqrt{\pi \nu t}} \left(\frac{z^2}{4\nu t^2} - \frac{1}{2t} \right) \exp \left(-\frac{z^2}{4\nu t} \right).$$

Так как $\Omega_y > 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_y = 0$, то точка экстремума $t = z^2/2\nu$ является точкой положительного максимума, причем

$$\Omega_{y \max} = \frac{v_0}{|z|} \sqrt{\frac{2}{\pi e}}.$$

Если рассмотреть малую окрестность плоскости $z = 0$ ($|z| \leq \delta$, где δ — малая величина), то при $t \leq \delta^2/2\nu$ значение $\Omega_{y \max} \geq \frac{v_0}{\delta} \sqrt{\frac{2}{\pi e}}$ и, значит, вихревой слой при малых временах оказывается локализованным в окрестности плоскости $z = 0$.

При фиксированном значении $z \neq 0$ величина вихря возрастает от нуля при $t = 0$ до максимального значения при $t = z^2/2\nu$ и затем убывает до нуля при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, с течением времени происходит диффузия вихревого слоя.

3.10.1.2. Движение твердой поверхности. Пусть неподвижная непроницаемая стенка $z = 0$, ограничивающая жидкость снизу, в момент времени $t = 0$ начинает движение с постоянной скоростью U_0 в своей плоскости. Будем считать, что направление движения совпадает с направлением оси X . Тогда

$$v_x(z, 0) = \begin{cases} U_0, & z = 0, \\ 0, & z > 0, \end{cases} \quad v_x(0, t) = U_0, \quad t \geq 0.$$

В силу симметрии задачи $v_y = v_z = 0$, $v_x = v_x(z)$, причем $v_x(z)$ удовлетворяет уравнению из системы (3.10.3). Однако, представлением (3.10.9) воспользоваться нельзя, так как исследуемая задача является начально-краевой.

Рассмотрим функцию

$$v_x(z, t) = U_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right], \quad z \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (3.10.11)$$

Функция (3.10.11) удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности при $z > 0$, $t > 0$. Если $z > 0$, $t \rightarrow 0$, то $\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} \rightarrow +\infty$.

Поэтому $\Phi \left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} \right) \rightarrow 1$, и

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ z > 0}} v_x(z, t) = 0.$$

Если рассмотреть одновременный переход к пределу при $z \rightarrow 0 + 0$, $t \rightarrow 0$, например, вдоль кривой $\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} = \alpha$, $0 \leq \alpha < \infty$,

то в результате получим

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0+0 \\ t \rightarrow 0 \\ z/2\sqrt{\nu t} = \alpha}} v_x(z, t) = U_0 [1 - \Phi(\alpha)].$$

Таким образом, значение искомого предела зависит от значения α , т. е. от способа перехода к пределу. Таким образом, функция (3.10.11) оказывается решением задачи, которое не имеет предела при $z \rightarrow +0$, $t \rightarrow 0$, что обусловлено разрывным свойством начальной функции.

Заметим, что решение задачи о движении твердой поверхности как решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой может быть получено при помощи общего метода решения данного класса линейных начально-краевых задач, известного под названием принципа Дюамеля [9].

3.10.1.3. Течение под действием касательного напряжения. Исследуем проблему возникновения морских течений под действием ветра постоянной силы с помощью простейшей математической модели, описывающей это явление.

Пусть жидкость, занимающая полупространство $z \leq 0$, в начальный момент времени покоится:

$$v_x(z, 0) = 0, \quad z \leq 0. \quad (3.10.12)$$

При $t = 0$ на свободную поверхность жидкости в направлении оси X начинает действовать постоянное касательное напряжение величины τ , которое остается постоянным в последующие моменты времени, так что $p_{zx}|_{z=0} = \tau$, $t \geq 0$.

Поскольку $v_y = v_z = 0$, $v_x = v_x(z)$, то на границе выполняется условие

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau, \quad t \geq 0. \quad (3.10.13)$$

Определим распределение скоростей в жидкости, течение которой описывается одномерным уравнением теплопроводности с дополнительными условиями (3.10.12), (3.10.13).

Выполним замену неизвестной функции:

$$w(z, t) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Очевидно, что новая неизвестная функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,$$

причем

$$\begin{aligned} w(z, 0) &= 0, & z \leq 0, \\ w(0, t) &= \tau, & t \geq 0. \end{aligned}$$

Решение этой задачи представимо формулой (3.10.11) с заменой U_0 на τ , z на $-z$:

$$w(z, t) = \tau \left[1 - \Phi \left(-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right], \quad z \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \tau \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-z/2\sqrt{\nu t}} e^{-\xi^2} d\xi \right) = \\ &= \tau \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\xi^2} d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z/2\sqrt{\nu t}} e^{-\xi^2} d\xi \right) = \frac{2\tau}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z/2\sqrt{\nu t}} e^{-\xi^2} d\xi. \end{aligned}$$

Дифференцируя это выражение по z , находим производную $\partial^2 v_x / \partial z^2$:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} &= \frac{2\tau}{\sqrt{\pi}} \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{\partial}{\partial z} \int_a^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{2\tau}{\sqrt{\pi}} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \times \right. \\ &\times \left. \exp \left(-\frac{z^2}{4\nu t} \right) - e^{-a^2} \frac{da}{dz} \right] = \frac{\tau}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp \left(-\frac{z^2}{4\nu t} \right) = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \end{aligned}$$

в силу уравнения $\frac{\partial v_x}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0$. Следовательно,

$$v_x(z, t) = \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{\pi \mu \rho \bar{t}}} \exp \left(-\frac{z^2}{4\nu \bar{t}} \right) d\bar{t},$$

где учтено, что $v_x(z, 0) = 0$. Полагая $\frac{z}{2\sqrt{\nu \bar{t}}} = \lambda$, находим

$$\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{z}{2\sqrt{\nu}} \lambda^{-2} d\lambda, \quad 0 \leq \bar{t} \leq t \Rightarrow -\infty < \lambda \leq \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Поэтому

$$v_x(z, t) = \frac{z\tau}{\mu\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\lambda^2} d\frac{1}{\lambda}.$$

Интегрируя полученное выражение по частям, окончательно имеем

$$v_x(z, t) = \frac{\tau}{\mu} \left[2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu t}\right) + z + z\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right], \quad z \leq 0.$$

Таким образом, скорость на свободной поверхности равна

$$v_x(0, t) = \frac{2\tau}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}.$$

При больших временах ($t \gg 1$) и фиксированных z оказываются справедливыми оценки: $\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right) \approx 0$, $\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu t}\right) = \frac{z}{2\sqrt{\pi}\lambda} e^{-\lambda^2} \approx \frac{z}{2\sqrt{\pi}\lambda} \gg z$, где $\lambda = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}} \ll 1$. Следовательно,

$$v_x(z, t) = \frac{2\tau}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}, \quad z \leq 0, \quad t \gg 1,$$

и, значит, жидкость стремится принять скорость свободной поверхности. Определим, за какое время скорость на фиксированной глубине z будет равна $\frac{1}{2} v_x(0, t)$. Для этого нужно решить уравнение

$$\frac{\tau}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} = \frac{\tau}{\mu} \left[2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu t}\right) + z + z\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right], \quad z < 0.$$

Если положить $\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} = \lambda$, то численное решение алгебраического уравнения

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} + \lambda + \lambda\Phi(\lambda) \right]$$

дает значение $\lambda \approx 0,35$. Отсюда,

$$z \approx 0,7\sqrt{\nu t}.$$

В соответствии с полученной формулой на глубине в 100 м частицы воды будут двигаться со скоростью свободной поверхности только спустя 359 лет. Такое описание является примером

простейшего моделирования течения жидкости в приповерхностном слое под действием ветра постоянной силы.

3.10.2. Нестационарное течение в трубе с круговым сечением. Пусть в горизонтальной цилиндрической трубе радиуса a с покоящейся жидкостью внутри в момент времени $t = 0$ задается постоянный продольный градиент давления $-\partial p/\partial z = \gamma$, который остается постоянным в последующие моменты времени. Если ввести цилиндрическую систему координат таким образом, чтобы ось Z совпадала с осью трубы, то распределение скоростей в жидкости будет описываться задачей:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{1}{\rho} \gamma, \quad (3.10.14)$$

$$v_z(a, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad v_z(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a.$$

Введем неизвестную функцию иначе:

$$u(r, \varphi, t) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2) - v_z(r, \varphi, t).$$

Тогда для определения функции $u(r, \varphi, t)$ получаем задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad 0 \leq r < a,$$

$$u(a, \varphi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.10.15)$$

$$u(r, \varphi, 0) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2), \quad 0 \leq r \leq a.$$

Частные решения уравнения (3.10.15), удовлетворяющие граничному условию при $r = a$, ищем в соответствии с методом разделения переменных [9]:

$$u(r, \varphi, t) = \bar{u}(r, \varphi) T(t).$$

Тогда, подставляя это представление в уравнение из системы (3.10.15), находим

$$\frac{T'}{\nu T} = \frac{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}}{\bar{u}} = -\frac{\lambda}{a^2},$$

где λ — произвольная постоянная величина. Учитывая граничное условие из системы (3.10.15), для нахождения функции

$\bar{u}(r, \varphi)$ получаем задачу Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа в круге:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{\lambda}{a^2} \bar{u} = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (3.10.16)$$

$$\bar{u}(a, \varphi) = 0, \quad |\bar{u}| < \infty.$$

Решение задачи (3.10.16) ищем в виде $\bar{u}(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$. Подставляя этот вид в уравнение и разделяя переменные, имеем

$$\frac{r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{a^2} r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu,$$

где ν — произвольная постоянная величина. Для определения функции $\Phi(\varphi)$ получаем задачу Штурма–Лиувилля на отрезке с условиями периодичности

$$\Phi'' + \nu \Phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Решение этой задачи дается в [9]: $\nu_n = n^2$, $\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При каждом значении $\nu_n = n^2$ имеем задачу Штурма–Лиувилля для оператора Бесселя:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \left(\frac{\lambda}{a^2} r^2 - n^2 \right) R = 0, \quad 0 \leq r < a,$$

$$R(a) = 0, \quad |R(0)| < \infty.$$

Решение этой задачи также построено в [9]:

$$R_n(r) = J_n \left(\frac{\sqrt{\lambda_k^n}}{a} r \right),$$

где J_n — функция Бесселя n -го порядка; λ_k^n — k -й корень уравнения $J_n(\sqrt{\lambda^n}) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Далее, приходим к уравнению

$$T' + \frac{\nu \lambda_k^n}{a^2} T = 0,$$

общее решение которого представимо как

$$T_{nk}(t) = A \exp \left(-\frac{\nu \lambda_k^n}{a^2} t \right).$$

Следовательно, решение задачи (3.10.15) будем искать в виде ряда

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left(\frac{\sqrt{\lambda_k^n} r}{a} \right) (A_{nk} \cos n\varphi + B_{nk} \sin n\varphi) \exp \left(- \frac{\nu \lambda_k^n}{a^2} t \right).$$

Учитывая вид начального условия из системы (3.10.15), полученное представление можно несколько упростить:

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k} J_0 \left(\frac{\sqrt{\lambda_k^0} r}{a} \right) \exp \left(- \frac{\nu \lambda_k^0}{a^2} t \right). \quad (3.10.17)$$

С целью нахождения коэффициентов разложения (3.10.17) воспользуемся следующим свойством ортогональности собственных функций задачи Штурма–Лиувилля для оператора Бесселя [9]:

$$\int_0^a r J_n \left(\frac{\sqrt{\lambda_k^n} r}{a} \right) J_n \left(\frac{\sqrt{\lambda_{k'}^n} r}{a} \right) dr = \frac{a^2}{2} J_n'^2(\sqrt{\lambda_k^n}) \delta_{kk'}, \quad (3.10.18)$$

где $\delta_{kk'}$ — символ Кронекера.

Коэффициенты A_{0k} определяются путем подстановки решения (3.10.17) в начальное условие из (3.10.15):

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{0k} J_0 \left(\frac{\sqrt{\lambda_k^0} r}{a} \right) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2).$$

Умножая обе части полученного выражения на $r J_0 \left(\frac{\sqrt{\lambda_{k'}^0} r}{a} \right)$, интегрируя по r от 0 до a и используя условие (3.10.18), имеем

$$A_{0k'} \frac{a^2}{2} J_1^2(\sqrt{\lambda_{k'}^0}) = \frac{\gamma}{4\mu} \int_0^a r (a^2 - r^2) J_0 \left(\frac{\sqrt{\lambda_{k'}^0} r}{a} \right) dr.$$

Отсюда

$$A_{0k'} = \frac{2\gamma a^2}{\mu \lambda_{k'}^{3/2} J_1(\sqrt{\lambda_{k'}^0})}.$$

Итак, решение системы (3.10.14) имеет вид

$$v_z(r, t) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2) - \frac{2\gamma a^2}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\sqrt{\lambda_k^0} r/a)}{\lambda_k^{03/2} J_1(\sqrt{\lambda_k^0})} \exp\left(-\frac{\nu \lambda_k^0}{a^2} t\right),$$

где λ_k^0 — k -й корень уравнения $J_0(\sqrt{\lambda^0}) = 0$. При $t \rightarrow \infty$ получаем распределение скоростей, отвечающее течению Пуазейля (3.9.22).

3.10.3. Нестационарные течения с осевой симметрией.

3.10.3.1. Диффузия цилиндрического вихря. Пусть в начальный момент времени в вязкой жидкости задано распределение скоростей:

$$v_\varphi|_{t=0} = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r}, & r \neq 0, \\ 0, & r = 0. \end{cases}$$

Нужно описать движение жидкости при $t > 0$, считая, что

$$\begin{aligned} v_\varphi(0, t) &= 0, & t \geq 0, \\ v_\varphi(r, t) &\rightarrow 0, & r \rightarrow \infty, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Такой процесс можно интерпретировать как диффузию вихревой нити, положение которой в жидкости, совершающей безвихревое движение, в начальный момент времени совпадает с положением оси Z цилиндрической системы координат.

Поскольку движение частиц жидкости происходит по окружностям, то $v_r = v_z = 0$, $\partial p / \partial \varphi = 0$. В силу независимости начального условия от переменных φ и z , функция v_φ зависит только от переменных r и t . Учитывая это, для определения функции $v_\varphi(r, t)$ получаем задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), & t > 0, \quad 0 < r < \infty, \\ v_\varphi(r, 0) &= \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r}, & r \neq 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases} & v_\varphi(r, t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.10.19}$$

Частное решение уравнения из системы (3.10.19) ищем в виде, согласованном с видом начального условия:

$$v_\varphi(r, t) = C \frac{f(\xi)}{r}, \tag{3.10.20}$$

где C — неопределенная константа, $\xi = rt^\alpha$, α — неизвестно. Подставляя решение (3.10.20) в уравнение (3.10.19), находим

$$r^2 f'_\xi \alpha t^{-1} = \nu (\xi f''_\xi - f'_\xi).$$

При $\alpha = -1/2$ соответствующее уравнение разрешимо в квадратурах. Действительно, если положить $y = f'_\xi$, то приходим к уравнению

$$\nu (\xi y' - y) = -\frac{1}{2} \xi^2 y,$$

решение которого

$$y(\xi) = C_1 \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\nu}\right)$$

можно получить, используя метод разделения переменных. Отсюда

$$f(r, t) = C_2 \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые константы. Следовательно,

$$v_\varphi(r, t) = \frac{C_2}{r} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) + \frac{C_3}{r}.$$

Если $C_2 = -C_3$, то, используя правило Лопиталья, имеем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_3}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right] = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_3 r}{2\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) = 0, \quad t \neq 0.$$

Далее, в соответствии с начальным условием:

$$v_\varphi(r, 0) = \frac{C_3}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad r \neq 0.$$

Отсюда

$$C_3 = \frac{\Gamma}{2\pi},$$

и решение представимо в виде

$$v_\varphi(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right].$$

Решение $v_\varphi(r, t)$ не имеет предела при одновременном переходе $r \rightarrow 0, t \rightarrow 0$, что объясняется разрывным свойством начальной функции.

Вычислим компоненты вихря:

$$\Omega_r = 0, \quad \Omega_\varphi = 0, \quad \Omega_z = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right).$$

Рассматривая $\Omega_z(r, t)$ при фиксированном r как функцию t , видим, что $\Omega_z(r, t)$ достигает максимума при $t = r^2/4\nu$, и максимальное значение завихренности равно

$$\Omega_{z \max} = \frac{\Gamma}{\pi e r^2}.$$

Таким образом, сосредоточенная в начальный момент времени в малой окрестности $|r| \leq \delta$ (величина δ мала) завихренность с течением времени расплывается на всю жидкость, постепенно полностью рассеиваясь.

Диффузия вихрей является характерной чертой вязких вихревых течений, заметно отличающей их от вихревых течений идеальных жидкостей, для которых в ряде случаев перемещение вихрей возможно только с перемещением частиц жидкости (см. § 2.15).

В гл. 2 при рассмотрении вихревых движений идеальных жидкостей в рамках, установленных условиями теоремы Томсона, было получено уравнение Гельмгольца. Рассмотрим обобщенные уравнения Гельмгольца на случай вязкой жидкости.

В соответствии с уравнением (3.4.11)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\text{grad } H - \nu \text{rot } \boldsymbol{\Omega}.$$

Вычислим ротор от обеих частей этого уравнения:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \text{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = -\nu \text{rot}(\text{rot } \boldsymbol{\Omega}).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \text{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) &= \boldsymbol{\Omega} \text{div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{div } \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{v}, \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega}, \nabla) \mathbf{v} = \\ &= \boldsymbol{\Omega} \text{div } \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega}, \nabla) \mathbf{v}, \end{aligned}$$

где $\text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) = 0$, то, учитывая, что в соответствии с (3.4.8)

$$\Delta \boldsymbol{\Omega} = -\text{rot}(\text{rot } \boldsymbol{\Omega}),$$

находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \text{div } \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega}, \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}.$$

Используя формулу (1.2.5), окончательно имеем

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \text{div } \mathbf{v} = (\boldsymbol{\Omega}, \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.10.21)$$

Уравнение (3.10.21) является искомым обобщением уравнения Гельмгольца на случай вязкой жидкости. Если $\nu = 0$, то уравнение (3.10.21) вырождается в уравнение Гельмгольца, полученное ранее в гл. 2.

3.10.3.2. Нестационарное вращение цилиндра. Пусть бесконечный вертикальный круговой цилиндр радиуса a в момент времени $t = 0$ начинает вращаться с угловой скоростью ω_0 . Требуется найти распределение скоростей в вязкой жидкости, которая находится внутри цилиндра.

Если считать, что частицы жидкости движутся по окружностям, то течение будет обладать осевой симметрией. Следовательно, задачу удобно решать в цилиндрической системе координат, для которой ось Z совпадает с осью цилиндра. Поскольку $v_r = v_z = 0$, $v_\varphi = v_\varphi(r, t)$ и $\partial p / \partial \varphi = 0$, то определяющая начально-краевая задача имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \quad 0 \leq r < a, \\ v_\varphi(a, t) &= \omega_0 a, \quad t \geq 0, \\ v_\varphi(r, 0) &= \begin{cases} \omega_0 a, & r = a, \\ 0, & 0 \leq r < a. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10.22)$$

Вводя новую неизвестную функцию

$$w(r, t) = \omega_0 r - v_\varphi(r, t),$$

относительно $w(r, t)$ получаем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right), \quad 0 \leq r < a, \\ w(a, t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ w(r, 0) &= \begin{cases} 0, & r = a, \\ \omega_0 r, & 0 \leq r < a. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10.23)$$

В соответствии с методом разделения переменных [9], полагая, что

$$w(r, t) = R(r) T(t),$$

из уравнения системы (3.10.23) находим

$$\frac{T'}{\nu T} = \frac{R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{R}{r^2}}{R} = -\frac{\lambda}{a^2},$$

где λ — неизвестный параметр. Учитывая граничное условие из системы (3.10.23), для нахождения функции $R(r)$ получаем

краевую задачу:

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\frac{\lambda}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) R = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad (3.10.24)$$

$$R(a) = 0, \quad |R(0)| < \infty.$$

Замена $x = (\sqrt{\lambda}/a)r$ сводит уравнение из системы (3.10.24) к уравнению Бесселя первого порядка:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0,$$

ограниченными решениями которого на отрезке $0 \leq x \leq \sqrt{\lambda}$ являются функции [9]

$$y(x) = C J_1(x).$$

Здесь $J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка. Далее положим $C = 1$. Тогда собственные функции задачи (3.10.24) имеют вид

$$R(r) = J_1 \left(\frac{\sqrt{\lambda_k} r}{a} \right),$$

где λ_k — k -й корень уравнения

$$J_1(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Решения этого уравнения обозначим иначе:

$$\mu_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда собственные функции и собственные значения задачи (3.10.24) представимы в виде

$$R_k(r) = J_1 \left(\frac{\mu_k}{a} r \right), \quad \lambda_k = \mu_k^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поскольку

$$T' + \frac{\nu \lambda_k}{a^2} T = 0,$$

то

$$T(t) = A \exp \left(- \frac{\nu \lambda_k}{a^2} t \right),$$

и, значит, наиболее общий вид частного решения уравнения из системы (3.10.23), удовлетворяющего однородному краевому условию представим как

$$w(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_1 \left(\frac{\sqrt{\lambda_k} r}{a} \right) \exp \left(- \frac{\nu \lambda_k}{a^2} t \right). \quad (3.10.25)$$

Используя условие ортогональности (3.10.18) функций $J_n\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^n}}{a} r\right)$ на сегменте $0 \leq r \leq a$, находим коэффициенты A_k в разложении (3.10.25) с учетом начального условия из системы (3.10.23):

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_1\left(\frac{\sqrt{\lambda_k}}{a} r\right) = \omega_0 r,$$

$$A_{k'} \frac{a^2}{2} J_1'^2(\sqrt{\lambda_{k'}}) = \int_0^a \omega_0 r^2 J_1\left(\frac{\sqrt{\lambda_{k'}}}{a} r\right) dr.$$

Отсюда

$$A_{k'} = \frac{2\omega_0 a J_2(\sqrt{\lambda_{k'}})}{\sqrt{\lambda_{k'}} J_1'^2(\sqrt{\lambda_{k'}})}.$$

Окончательно получаем решение задачи (3.10.22) в виде

$$v_\varphi(r, t) = \omega_0 r - 2\omega_0 a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2(\sqrt{\lambda_k}) J_1(\sqrt{\lambda_k} r/a)}{\sqrt{\lambda_k} J_1'^2(\sqrt{\lambda_k})} \exp\left(-\frac{\nu \lambda_k}{a^2} t\right).$$

При $t \rightarrow \infty$ нестационарные члены затухают, и жидкость начинает вращаться как твердое тело.

§ 3.11. Приближенные решения уравнений движения вязкой жидкости в случае малых чисел Рейнольдса

Основная трудность, возникающая при интегрировании уравнений движения вязкой жидкости, связана с нелинейностью уравнений Навье–Стокса. Поэтому вполне оправданным является использование приближенных методов интегрирования, которые в отдельных случаях позволяют избавиться от нелинейных членов.

При изучении течений вязкой жидкости традиционно выделяют три категории сил, которым соответствуют определенные слагаемые в уравнениях движения: силы инерции, силы вязкости и силы давления. В зависимости от ситуации действие тех или иных сил может оказаться несущественным, так что соответствующие этим силам члены в уравнениях движения могут быть опущены. Рассмотрению таких случаев посвящаются два следующих параграфа.

Введем безразмерные скорость и координаты как отношения соответствующих размерных величин к характерным для данной задачи значениям скорости U и размера L :

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{L}. \quad (3.11.1)$$

Считая процесс стационарным, а жидкость несжимаемой, выполним обезразмеривание соответствующей системы уравнений движения путем подстановки (3.11.1) в эту систему:

$$\frac{U^2}{L}(\mathbf{v}', \nabla) \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho L} \text{grad } p + \frac{\nu U}{L^2} \Delta \mathbf{v}', \quad \text{div } \mathbf{v}' = 0. \quad (3.11.2)$$

Умножая обе части первого уравнения в (3.11.2) на L/U^2 и полагая, что $-\frac{1}{\rho U^2} \text{grad } p = -\frac{1}{\rho'} \text{grad } p'$, где ρ' , p' — безразмерные плотность и давление, находим

$$(\mathbf{v}', \nabla) \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho'} \text{grad } p' + \text{Re}^{-1} \Delta \mathbf{v}', \quad \text{div } \mathbf{v}' = 0. \quad (3.11.3)$$

В вязких потоках, характеризуемых малыми числами Рейнольдса, силы вязкости преобладают над силами инерции. Поэтому слагаемым, стоящим слева в первом уравнении из системы (3.11.3) и описывающим силы инерции, можно пренебречь по сравнению с вязким членом. Очевидно, что такое упрощение пригодно для описания процессов движения (обтекания) малых тел с малыми скоростями или течений сильно вязких сред.

При больших числах Рейнольдса, напротив, силы вязкости малы по сравнению с силами инерции, что непосредственно следует из системы (3.11.3). Но отбрасывание вязкого члена приводит нас к уравнению движения идеальной жидкости, решение которого не обязано удовлетворять условиям прилипания частиц жидкости на границах. Поэтому основной вклад вязких членов в движение должен быть учтен. Несложно понять, что такие случаи реализуются при движении протяженных тел, больших скоростях течения (обтекания) в средах с малой вязкостью.

В настоящем параграфе рассмотрен ряд типичных течений, характеризуемых малыми числами Рейнольдса. Отбрасывание инерционного члена в уравнениях Навье–Стокса позволяет успешно проинтегрировать уравнения движения.

3.11.1. Двумерное течение жидкости между плоскопараллельными пластинами при малых числах Рейнольдса. В качестве числа Рейнольдса можно выбрать следующую комбинацию характерных величин: $\text{Re} = \bar{v}h/\nu$, где \bar{v} — средняя

скорость течения, h — расстояние между пластинами. Пусть зазор между пластинами мал. При медленном течении жидкости процесс будет описываться приближенной системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11.4)$$

Считая, что движение происходит параллельно плоскости XU , находим $v_z(x, y, z) = 0$. В силу малости h и эффекта прилипания частиц жидкости к пластинам компоненты скорости v_x и v_y в направлении оси Z изменяются гораздо быстрее, чем в направлениях осей X и Y . Вследствие этого

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial z} &\gg \frac{\partial v_x}{\partial y}, & \frac{\partial v_y}{\partial z} &\gg \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} &\gg \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \frac{\partial v_y}{\partial z} &\gg \frac{\partial v_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} &\gg \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} &\gg \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} &\gg \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} &\gg \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Пренебрегая соответствующими членами в системе (3.11.4), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, & \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11.5)$$

Из первого уравнения находим

$$v_x(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + A(x, y) z + B(x, y).$$

С учетом условий на границе

$$v_x|_{z=0} = 0, \quad v_x|_{z=h} = 0,$$

приходим к решению

$$v_x(x, y, z) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z(h-z). \quad (3.11.6)$$

Аналогично, используя второе уравнение из системы (3.11.5) и граничные условия, находим

$$v_y(x, y, z) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} z(h-z). \quad (3.11.7)$$

Подставляя (3.11.6) и (3.11.7) в уравнение неразрывности, убеждаемся в том, что давление удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} z(h-z), \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^3 p}{\partial y^2 \partial x} z(h-z), \end{aligned}$$

то функция v_x также удовлетворяет уравнению Лапласа. Аналогичный вывод можно сделать относительно функции v_y . Следовательно, суммы первых двух членов в скобках в первом и во втором уравнениях из системы (3.11.4) равны нулю и решения (3.11.6), (3.11.7) удовлетворяют системе (3.11.4) точно.

3.11.2. Медленное вращение сферы. При медленном вращении вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω сферы радиуса a (рис. 3.7) в качестве числа Рейнольдса можно выбрать следующую комбинацию характерных величин:

$$Re = \frac{\omega a^2}{\nu},$$

где ωa — линейная скорость движения на экваторе; ν — кинематический коэффициент вязкости.

Считая число Рейнольдса малым и пренебрегая инерционными членами в уравнениях движения, приходим к следующей системе уравнений гидродинамики:

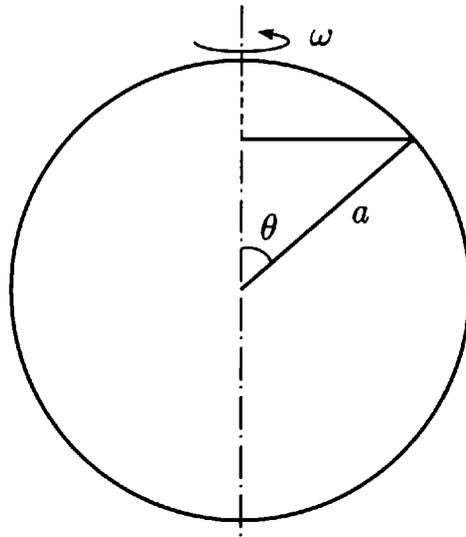


Рис. 3.7

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2\nu}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, & -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{2\nu \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \\
 -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \right. \\
 \left. - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) &= 0, & \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \quad (3.11.8)
 \end{aligned}$$

где r, θ, φ — сферические координаты, $v_r(r, \theta, \varphi) = 0, v_\theta(r, \theta, \varphi) = 0$ в силу постановочных особенностей задачи.

Из последнего уравнения в (3.11.8) следует, что $v_\varphi = v_\varphi(r, \theta)$. Тогда согласно первым двум уравнениям в (3.11.8) $p = p(\varphi)$ и, значит, третье уравнение в (3.11.8) разрешимо, если $\partial p / \partial \varphi = \text{const}$.

Пусть $\partial p / \partial \varphi = 0$. Тогда для определения скорости имеем краевую задачу:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} &= 0, \\
 a < r < \infty, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\
 v_\varphi(a, \theta) &= \omega a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \\
 v_\varphi(r, \theta) \rightarrow 0, & r \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.
 \end{aligned} \quad (3.11.9)$$

Принимая во внимание вид граничного условия, решение системы (3.11.9) будем искать в виде

$$v_\varphi(r, \theta) = A(r) \sin \theta. \quad (3.11.10)$$

Подставляя (3.11.10) в уравнение из системы (3.11.9), находим

$$\sin \theta \frac{d^2 A(r)}{dr^2} - \frac{A(r) \sin \theta}{r^2} + \frac{2 \sin \theta}{r} \frac{dA(r)}{dr} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} A(r) \cos \theta - \frac{A(r)}{r^2 \sin \theta} = 0.$$

Тогда относительно функции $A(r)$ получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dA(r)}{dr} - \frac{2A(r)}{r^2} &= 0, \\ a < r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \\ A(a) = \omega a, \quad A(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.11.11)$$

Линейно независимые частные решения уравнения из (3.11.11) будем искать в виде r^α . Подставляя этот вид в соответствующее уравнение, составляем характеристическое уравнение:

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0.$$

Отсюда $\alpha = 1$ или $\alpha = -2$. Поэтому общее решение уравнения из системы (3.11.11) представимо как

$$A(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы. Учитывая условие на бесконечности, имеем $C_1 = 0$. Далее, принимая во внимание граничное условие, находим, что $C_2 = \omega a^3$. Поэтому

$$v_\varphi(r, \theta) = \frac{\omega a^3 \sin \theta}{r^2}. \quad (3.11.12)$$

3.11.3. Медленное вращение двух сфер вокруг общего диаметра. Пусть две сферы радиусов $a_1 < a_2$ медленно вращаются в одном направлении вокруг общего диаметра с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Движение жидкости между сферами в сферической системе координат с началом отсчета в центре сфер описывается системой уравнений (3.11.8) с граничными условиями:

$$\begin{aligned} v_\varphi(a_1, \theta) &= \omega_1 a_1 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \\ v_\varphi(a_2, \theta) &= \omega_2 a_2 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (3.11.13)$$

Частные решения уравнения из системы (3.11.9), вид которых согласован с видом граничных условий (3.11.13), представимы как

$$v_\varphi(r, \theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из условий (3.11.13):

$$\begin{aligned} \left(C_1 a_1 + \frac{C_2}{a_1^2} \right) \sin \theta &= \omega_1 a_1 \sin \theta, \\ \left(C_1 a_2 + \frac{C_2}{a_2^2} \right) \sin \theta &= \omega_2 a_2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v_\varphi(r, \theta) = \frac{\sin \theta}{r^2(a_1^3 - a_2^3)} \left[\omega_1 a_1^3(r^3 - a_2^3) - \omega_2 a_2^3(r^3 - a_1^3) \right].$$

3.11.4. Медленное движение сферы. Если сфера радиуса a медленно движется со скоростью U в вязкой жидкости, то в качестве числа Рейнольдса целесообразно выбрать комбинацию характерных величин: $Re = aU/\nu$. Поскольку задача о равномерном движении сферы динамически эквивалентна задаче об обтекании покоящейся сферы потоком, который на бесконечности имеет постоянную скорость, то удобно рассмотреть задачу об обтекании сферы, связав систему координат с центром сферы. Выберем сферическую систему координат так, как показано на рис. 3.8. Так как сферу обтекает поступательный поток, то $v_\varphi(r, \theta, \varphi) = 0$. Кроме этого, в силу симметрии задачи $v_r = v_r(r, \theta)$, $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$.

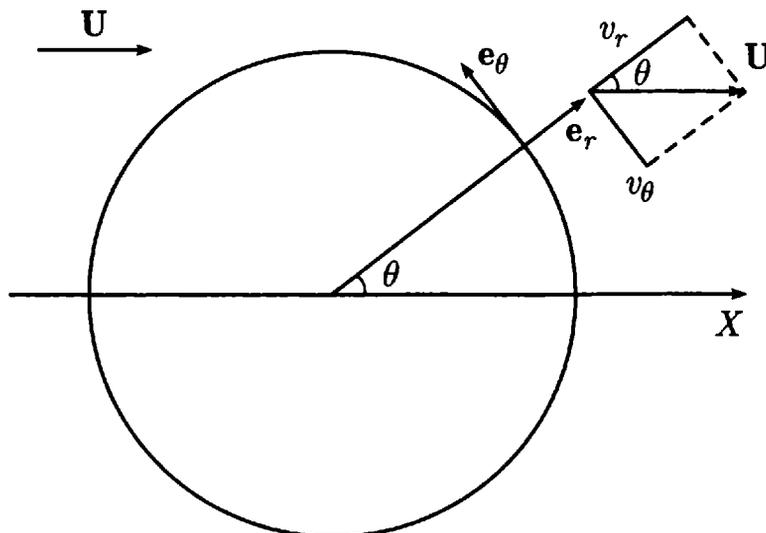


Рис. 3.8

Поэтому приближенные выражения для уравнений движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11.14)$$

На поверхности сферы выполняются граничные условия:

$$v_r(a, \theta) = 0, \quad v_\theta(a, \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (3.11.15)$$

На бесконечности предполагается, что движение жидкости происходит параллельно оси X :

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &\rightarrow U \cos \theta, \\ v_\theta(r, \theta) &\rightarrow U \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -U \sin \theta, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.11.16)$$

В соответствии с условиями на бесконечности решение задачи (3.11.14)–(3.11.16) будем искать в следующей виде:

$$v_r(r, \theta) = f(r) \cos \theta, \quad v_\theta(r, \theta) = -g(r) \sin \theta. \quad (3.11.17)$$

Подставляя (3.11.17) в (3.11.14), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \left[f'' \cos \theta + \frac{2}{r} f' \cos \theta - \frac{4 \cos \theta}{r^2} (f - g) \right], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \mu \left[-g'' \sin \theta - \frac{2}{r} g' \sin \theta + \frac{2 \sin \theta}{r^2} (g - f) \right], \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \\ f' \cos \theta - \frac{g}{r} \cos \theta + \frac{2f \cos \theta}{r} - \frac{g \cos \theta}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (3.11.18)$$

из которой следует, что функцию $p(r, \theta)$ следует искать в виде

$$p(r, \theta) = \mu h(r) \cos \theta. \quad (3.11.19)$$

Подставляя (3.11.19) в (3.11.18), имеем систему относительно неизвестных функций $f(r)$, $g(r)$ и $h(r)$:

$$\begin{aligned} h' &= f'' + \frac{2}{r}f' - \frac{4}{r^2}(f - g), \\ -\frac{1}{r}h &= -g'' - \frac{2}{r}g' + \frac{2}{r^2}(g - f), \\ f' - \frac{g}{r} + \frac{2f}{r} - \frac{g}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (3.11.20)$$

с дополнительными условиями

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0, \quad f(\infty) = U, \quad g(\infty) = U. \quad (3.11.21)$$

Из последнего уравнения в (3.11.20) находим

$$g = \frac{1}{2}rf' + f. \quad (3.11.22)$$

С учетом этого из второго уравнения в (3.11.20) получаем представление для $h(r)$ через $f(r)$:

$$h = \frac{1}{2}r^2f''' + 3rf'' + 2f'. \quad (3.11.23)$$

Дифференцируя выражение (3.11.23) по r и подставляя результат в первое уравнение из (3.11.20), имеем

$$r^3f^{IV} + 8r^2f''' + 8rf'' - 8f' = 0. \quad (3.11.24)$$

Здесь также учтена формула (3.11.22). Частные линейно независимые решения уравнения (3.11.24) ищем в виде r^α , подставляя который в (3.11.24) приходим к характеристическому уравнению:

$$\alpha(\alpha - 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3) = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.11.24) представимо как

$$f(r) = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2. \quad (3.11.25)$$

Подставляя представление (3.11.25) в уравнения (3.11.22), (3.11.23), находим

$$\begin{aligned} g(r) &= -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2, \\ h(r) &= \frac{B}{r^2} + 10Dr. \end{aligned} \quad (3.11.26)$$

Коэффициенты в (3.11.25), (3.11.26) подбираются в соответствии с дополнительными условиями (3.11.21):

$$A = \frac{Ua^3}{2}, \quad B = -\frac{3Ua}{2}, \quad C = U, \quad D = 0. \quad (3.11.27)$$

Учитывая (3.11.25)–(3.11.27), из (3.11.17), (3.11.19) получаем решение задачи (3.11.14)–(3.11.16):

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= U \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right), \\ v_\theta(r, \theta) &= -U \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right), \\ p(r, \theta) &= -\frac{3\mu U a}{2r^2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.11.28)$$

3.11.5. Сила сопротивления. Формула Стокса. При рассмотрении задач о движении тел в жидкостях естественным является вопрос о величине силы сопротивления, испытываемой движущимся телом. Напомним, что *силой сопротивления* называется составляющая силы, действующей на тело со стороны потока, которая ориентирована по направлению движения тела. Она складывается из силы давления и силы трения.

Если на единицу поверхности S тела действует сила \mathbf{p}_n , где \mathbf{n} — внешняя нормаль к S , то $\tau(\mathbf{p}_n, \boldsymbol{\tau})|_S$ есть сила сопротивления, отнесенная к единице поверхности тела. Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, ориентированный в направлении движения тела. Тогда сила сопротивления \mathbf{T} , действующая на все тело, выражается интегралом

$$\mathbf{T} = \oint_S (\mathbf{p}_n, \boldsymbol{\tau})|_S ds, \quad (3.11.29)$$

где $\oint_S (\mathbf{p}_n, \boldsymbol{\tau})|_S ds$ — проекция силы сопротивления на направление движения тела.

В декартовой системе координат для вектора \mathbf{p}_n справедливо представление (3.3.1):

$$\mathbf{p}_n = p_x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + p_y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + p_z \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}). \quad (3.11.30)$$

С другой стороны,

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{e}_x p_{nx} + \mathbf{e}_y p_{ny} + \mathbf{e}_z p_{nz}, \quad (3.11.31)$$

где p_{nx} , p_{ny} , p_{nz} — проекции вектора \mathbf{p}_n на оси системы координат; \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z — координатные орты. Умножая обе части

(3.11.30) поочередно на \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z , находим выражения для проекций вектора \mathbf{p}_n на координатные оси:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= (\mathbf{p}_n, \mathbf{e}_x) = p_{xx} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + p_{yx} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + p_{zx} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}), \\ p_{ny} &= (\mathbf{p}_n, \mathbf{e}_y) = p_{xy} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + p_{yy} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + p_{zy} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}), \\ p_{nz} &= (\mathbf{p}_n, \mathbf{e}_z) = p_{xz} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + p_{yz} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) + p_{zz} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_z}). \end{aligned} \quad (3.11.32)$$

Подставляя (3.11.32) в (3.11.31) и, далее, (3.11.31) в (3.11.29), видим, что в общем случае сила сопротивления выражается через все девять компонентов тензора напряжений (3.3.2).

Рассмотрим некоторые частные случаи, для которых удается вычислить интеграл (3.11.29).

3.11.5.1. Медленное вращение цилиндра. Стационарное течение жидкости между двумя медленно вращающимися цилиндрами изучалось в § 3.9. В цилиндрической системе координат, ось Z которой совпадала с общей осью цилиндров, скорость имела одну ненулевую компоненту $v_\varphi(r)$, которая определялась из системы (3.9.38). В случае медленного вращения одного цилиндра аналог системы (3.9.38) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\varphi}{dr} - \frac{v_\varphi}{r^2} &= 0, \quad a < r < \infty, \\ v_\varphi(a) &= \omega a, \quad v_\varphi(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.11.33)$$

где a — радиус цилиндра; ω — угловая скорость вращения. Решением системы (3.11.33) является функция

$$v_\varphi(r) = \frac{\omega a^2}{r}. \quad (3.11.34)$$

Поскольку в каждой точке боковой поверхности цилиндра ось r перпендикулярна к этой поверхности, то напряжение, приложенное к поверхности цилиндра, представимо как

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{e}_r p_{rr} + \mathbf{e}_\varphi p_{r\varphi} + \mathbf{e}_z p_{rz},$$

где p_{rr} , $p_{r\varphi}$, p_{rz} — компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат, \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z — орты цилиндрической системы координат.

Пусть направление вращения цилиндра совпадает с направлением орта \mathbf{e}_φ . Тогда проекция полной силы, отнесенной к единице поверхности цилиндра, на направление вращения равна

$$(\mathbf{p}_n, \mathbf{e}_\varphi)|_S = p_{r\varphi}|_S,$$

и, значит, проекция T силы сопротивления, отнесенной к единице длины цилиндра, выражается интегралом

$$T = \int_S p_{r\varphi}|_S ds = a \int_S p_{r\varphi}|_{r=a} d\varphi. \quad (3.11.35)$$

Принимая во внимание формулы (3.3.8), (3.11.34), находим

$$p_{r\varphi}|_{r=a} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=a} = -2\omega\mu.$$

Следовательно,

$$T = -2\omega\mu a \int_0^{2\pi} d\varphi = -4\pi\omega\mu a.$$

Заметим, что в рассмотренном случае сила сопротивления оказалась силой трения, так как $p_{r\varphi}$ — касательное напряжение.

3.11.5.2. Медленное вращение сферы. На поверхности сферы действует напряжение

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{e}_r p_{rr} + \mathbf{e}_\theta p_{r\theta} + \mathbf{e}_\varphi p_{r\varphi},$$

где p_{rr} , $p_{r\theta}$, $p_{r\varphi}$ — компоненты тензора напряжений в сферической системе координат; \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_φ — орты сферической системы координат. Если направление вращения сферы совпадает с направлением орта \mathbf{e}_φ , то проекция T силы сопротивления на направление вращения определяется формулой

$$T = \int_S p_{r\varphi}|_S ds,$$

где в соответствии с (3.3.9) $p_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)$, $ds = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ — элемент поверхности сферы. Распределение скоростей $v_\varphi(r, \theta)$ дается формулой (3.11.12). Следовательно,

$$\begin{aligned} T &= \mu a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=a} \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= -3\mu\omega a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta d\varphi = -3\pi^2 \mu\omega a^2. \end{aligned}$$

3.11.5.3. Медленное движение сферы. В § 2.8 была получена вычислительная формула для определения силы сопротивления, действующей на сферу радиуса a , движущуюся со скоростью $v_0(t)$ в идеальной несжимаемой жидкости:

$$T = -\frac{2}{3} \pi a^3 \rho \dot{v}_0(t).$$

Из этой формулы следует так называемый парадокс Даламбера, согласно которому равномерно движущаяся в идеальной несжимаемой жидкости сфера не испытывает сопротивления.

Получим аналогичную формулу для случая медленного равномерного движения сферы в вязкой несжимаемой жидкости. Рассматривая динамически эквивалентную задачу об обтекании покоящейся сферы, для распределения скоростей и давлений получаем формулы (3.11.28). Считая, что поток движется в направлении оси X , для проекции на это направление силы сопротивления, отнесенной к единице поверхности сферы, имеем выражение

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_n, \mathbf{e}_x)|_S &= (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_x p_{rr} + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_x p_{r\theta} + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_x p_{r\varphi}) \Big|_S = \\ &= \left(p_{rr} \cos \theta + p_{r\theta} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right) \Big|_S = (p_{rr} \cos \theta - p_{r\theta} \sin \theta) \Big|_S. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} T &= \int_S (p_{rr} \cos \theta - p_{r\theta} \sin \theta) \Big|_S ds = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (p_{rr} \cos \theta - p_{r\theta} \sin \theta) \Big|_{r=a} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3.11.36) \end{aligned}$$

Из формул (3.3.9) с учетом распределений (3.11.28) находим:

$$p_{rr} \Big|_{r=a} = \left[-p + 2\mu U \left(\frac{3a}{2r^2} - \frac{3a^3}{2r^4} \right) \cos \theta \right] \Big|_{r=a} = \frac{3\mu U}{2a} \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} p_{r\theta} \Big|_{r=a} &= \left[-\frac{U}{r} \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta - U \left(\frac{3a}{4r^2} + \frac{3a^3}{4r^4} \right) \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{U}{r} \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin \theta \right] \Big|_{r=a} = -\frac{3\mu U}{2a} \sin \theta. \quad (3.11.37) \end{aligned}$$

Подставляя (3.11.37) в (3.11.36), окончательно имеем

$$T = 3\mu U \pi a \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 6\pi \mu U a. \quad (3.11.38)$$

Формула (3.11.38) известна как *формула Стокса*.

Определим, какая часть силы сопротивления приходится на силу давления. Для этого вычислим следующий интеграл:

$$a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p_{rr} |_{r=a} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = 3\pi \mu U a \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = 2\pi \mu U a = \frac{1}{3} T.$$

Итак, в отличие от случая ускоренного движения сферы в идеальной жидкости, когда на поверхность действует сила давления, пропорциональная ускорению сферы, при равномерном движении в вязкой жидкости на силу давления, пропорциональную скорости сферы, приходится только третья часть от силы сопротивления.

§ 3.12. Приближенные решения уравнений движения вязкой жидкости в случае больших чисел Рейнольдса

При движениях вязкой жидкости, характеризуемых большими числами Рейнольдса, силы вязкости оказываются малыми по сравнению с силами инерции, что непосредственно следует из системы (3.11.3). Такое течение совпадало бы с течением идеальной жидкости, если бы не было условия прилипания частиц жидкости к границе области, которое в случае идеальной жидкости не выполняется. Более детальное изучение этой проблемы показывает, что вдали от границы жидкость, в общем, ведет себя как идеальная. Вблизи границы формируется так называемый *пограничный слой*, внутри которого значение скорости изменяется от нуля на границе области до значения, соответствующего движению без трения. Толщина пограничного слоя зависит от степени вязкости среды. Так, для слабовязких сред толщина пограничного слоя мала, а изменение скорости в пределах пограничного слоя велико. Поэтому внутри пограничного слоя силы вязкости, пропорциональные изменению скорости в поперечном к движению направлении, сравнимы с силами инерции и должны быть учтены.

Следует особо отметить, что такой подход к описанию течений с большими числами Рейнольдса в ряде случаев оказывается неудовлетворительным. Так, если величина Δv в (3.11.3) достаточно велика вдали от границы, то слагаемое $Re^{-1} \Delta v$ в уравнении Навье–Стокса может стать вполне сравнимым с инерционным членом. При этом наличие вязкости должно учитываться во всем объеме с жидкостью.

В зависимости от значения числа Рейнольдса и от условий обтекания пограничные слои делятся на *ламинарные* и *турбулентные*. Далее будет рассмотрена элементарная теория ламинарного пограничного слоя.

Исследуем плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости вблизи твердой поверхности S_T . Такое течение описывается безразмерной системой вида

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (3.12.1)$$

где $\varepsilon^2 \equiv Re^{-1}$ — малый безразмерный параметр.

Система дифференциальных уравнений, содержащая малые параметры при старших производных, называется *сингулярно возмущенной системой*, а начально-краевая задача для такой системы — *сингулярно возмущенной задачей*.

Дополнительные условия для системы (3.12.1) представимы как

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T, \quad (3.12.2)$$

$$v_x \rightarrow 1, \quad v_y \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty. \quad (3.12.3)$$

Условие (3.12.2) можно переформулировать иначе:

$$v_n = 0, \quad v_\tau = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T, \quad (3.12.4)$$

где v_n , v_τ — величины нормальной и касательной компонент скорости на границе S_T . Пренебрегая в (3.12.1) слагаемыми с малыми параметрами, приходим к системе, описывающей течение идеальной жидкости. Решение этой системы на поверхности S_T может быть подчинено условию $v_n|_{S_T} = 0$, но не условию $v_\tau|_{S_T} = 0$. Таким образом, понижение порядка системы привело к тому, что одно граничное условие осталось не востребуемым.

Общий подход к исследованию сингулярно возмущенных задач удобно проследить на примере решения задачи о движении материальной точки под действием активной силы f и силы трения:

$$\mu \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - f = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad (3.12.5)$$

где $\mu > 0$ — малый параметр. Точное решение задачи (3.12.5) легко получить аналитически [1]:

$$u(x) = (1 - f)(1 - e^{-x/\mu})(1 - e^{-1/\mu}) + fx. \quad (3.12.6)$$

Найдем приближенное решение задачи (3.12.5), которое аппроксимирует точное решение (3.12.6). Пренебрегая в системе (3.12.5) слагаемым с малым параметром, приходим к уравнению вида

$$\frac{d\bar{u}}{dx} - f = 0,$$

общее решение которого представимо как

$$\bar{u}(x) = fx + C.$$

Константу C можно найти, используя одно из граничных условий (3.12.5), например, на правом конце отрезка. Тогда

$$\bar{u}(x) = 1 + f(x - 1). \quad (3.12.7)$$

Таким образом, функция (3.12.7) удовлетворяет уравнению из (3.12.5) и граничному условию на правом конце отрезка. Сравнивая (3.12.7) и (3.12.6), видим, что эти решения близки при $N\mu < x \leq 1$, где N — некоторая константа. Если $0 \leq x \leq N\mu$, то решения существенно отличаются. Поэтому приближенное решение (3.12.7) задачи (3.12.5) является таковым всюду, кроме μ -окрестности нуля.

Для того чтобы построить приближенное решение задачи (3.12.5) на всем отрезке $[0; 1]$, рассмотрим μ -окрестность точки $x = 0$, где введем новую переменную $\tau = x/\mu$. Тогда уравнение из системы (3.12.5) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\tau^2} + \frac{d\tilde{u}}{d\tau} - \mu f = 0.$$

Отбрасывая малое слагаемое μf , приходим к уравнению

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\tau^2} + \frac{d\tilde{u}}{d\tau} = 0,$$

решение которого представимо как

$$\tilde{u}(\tau) = C_1 + C_2 e^{-\tau}. \quad (3.12.8)$$

Подчиним решение (3.12.8) граничному условию на левом конце:

$$\tilde{u}(0) = C_1 + C_2 = 0.$$

Следовательно,

$$\tilde{u}(\tau) = C_1(1 - e^{-\tau}). \quad (3.12.9)$$

Теперь попытаемся согласовать решения (3.1.27) и (3.12.9) так, чтобы они представляли одну и ту же функцию на разных частях отрезка $[0; 1]$. При стремлении x к нулю из (3.12.7) находим, что $\bar{u} \rightarrow 1 - f$. При удалении от точки $\tau = 0$ решение $\tilde{u}(\tau) \rightarrow C_1$. Приравнивая эти предельные значения, имеем

$$C_1 = 1 - f.$$

Следовательно,

$$\tilde{u}(\tau) = (1 - f)(1 - e^{-\tau}). \quad (3.12.10)$$

Сравнивая (3.12.10) и (3.12.6), видим, что эти функции близки в окрестности нуля.

Итак, приближенное решение системы (3.12.5) представимо функциями (3.12.7), (3.12.10). Поскольку (3.12.7) аппроксимирует решение вдали от точки $x = 0$, то функцию (3.12.7) будем называть *внешним решением*, в то время как функцию (3.12.10) удобно назвать *внутренним решением*.

3.12.1. Стационарное обтекание тонкой полубесконечной пластины. Пусть в постановке задачи (3.12.1)–(3.12.3) поверхность S_T является поверхностью полубесконечной пластины конечной толщины, на которую набегают поступательный поток, имеющий на бесконечности постоянную скорость U . Будем отсчитывать координату x вдоль поверхности пластины от переднего края, при этом кривизной оси X у переднего края вблизи поверхности пластины можно пренебречь, так как пластина предполагается достаточно тонкой (рис. 3.9).

Полагая в системе (3.12.1) $\varepsilon = 0$, приходим к уравнениям движения идеальной жидкости, решения которых, удовлетворяющие на бесконечности условиям

$$v_x \rightarrow 1, \quad v_y \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_\infty, \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty,$$

не удовлетворяют условию прилипания частиц жидкости на поверхности пластины. Для описания решения вблизи поверхности пластины в окрестности плоскости $y = 0$ вводится новая пере-

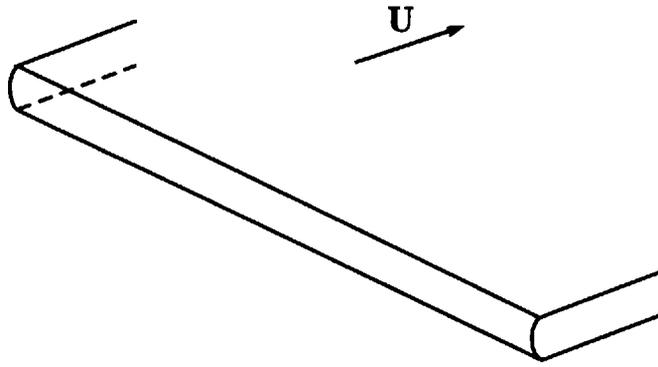


Рис. 3.9

менная $\tau = y/\varepsilon$. Для того чтобы сохранить прежний вид уравнения неразрывности введем новую функцию $\tilde{v}_y = v_y/\varepsilon$. Тогда система (3.12.1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tilde{v}_y \frac{\partial v_x}{\partial \tau} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial \tau^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}, \\ \varepsilon^2 \left(v_x \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tau} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tau^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tau} &= 0, \end{aligned}$$

где функции v_x и \tilde{v}_y уже зависят от x и τ .

Отбрасывая члены порядков ε^2 и ε^4 , получаем уравнения, описывающие пограничный слой. При возвращении к исходным переменным и функциям приходим к системе

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (3.12.11)$$

Уравнения (3.12.11) называются *уравнениями пограничного слоя*, или *уравнениями Прандтля*.

В уравнениях Прандтля от вязкого члена сохранилось только одно наиболее значимое слагаемое: $\text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, которое внутри пограничного слоя не мало. Действительно, в направлении оси Y проекция v_x изменяется от нуля до значения скорости в невязком течении, при этом координата y изменяется от нуля до значения ширины пограничного слоя. Следовательно, производная $\partial^2 v_x / \partial y^2$ компенсирует малость параметра Re^{-1} , так что слагаемое $\text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ оказывается сравнимым с инерционным членом.

Система (3.12.11) имеет смысл внутри ε -окрестности плоскости $y = 0$. Таким образом, можно оценить *толщину δ пограничного слоя*:

$$\delta = O(\varepsilon) = O(\text{Re}^{-1/2}).$$

В размерных величинах уравнения (3.12.11) формально сохраняют свой вид при замене Re^{-1} на ν .

Из второго уравнения в (3.12.11) следует, что значение давления $p(x)$ внутри пограничного слоя равно значению давления на внешней границе пограничного слоя. Если течение вне пограничного слоя считать потенциальным, то в силу стационарности течения давление и скорость на внешней границе пограничного слоя связаны через интеграл Бернулли–Эйлера:

$$\frac{1}{\rho} p(x) + \frac{1}{2} U^2(x) = \text{const}, \quad (3.12.12)$$

где скорость $U(x)$ равна скорости идеального потока при потенциальном обтекании. Дифференцируя (3.12.12), находим

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}.$$

Поскольку толщина пограничного слоя мала, то $U(x)$ можно считать равной скорости на поверхности пластины при ее потенциальном обтекании идеальным потоком. Тогда $U(x) = U_\infty = \text{const}$, где U_∞ — значение скорости потока на бесконечности. Поэтому уравнения Прандтля примут вид:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

К полученной системе следует добавить граничные условия:

$$\begin{aligned} v_x &= 0, \quad v_y = 0, \quad y = 0, \\ v_x &\rightarrow U_\infty, \quad v_y \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.12.13)$$

3.12.2. Стационарное обтекание плоского тонкого тела.

Пусть поверхность S_T представляет собой поверхность тонкого (в поперечном направлении) бесконечного цилиндра с образующими, перпендикулярными направлению течения. Допустим, что в нормальном сечении цилиндра имеется гладкий контур C . Тогда в каждой точке этого контура определена нормаль.

Выберем ортогональную криволинейную систему координат следующим образом: координату x будем отсчитывать вдоль

поверхности тела; ось Y в каждой точке x проведем перпендикулярно поверхности тела, начало координат разместим в передней точке торможения потока. В такой системе координат уравнения Навье–Стокса отличны от этих же уравнений в декартовой системе. Однако, полагая, что вблизи поверхности цилиндра кривизной осей можно пренебречь, вновь приходим к системе (3.12.11). Далее, учитывая связь (3.12.12) давления и скорости на внешней границе пограничного слоя, приходим к системе уравнений пограничного слоя, которую удобно записать в виде

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (3.12.14)$$

где $U(x)$ — значение скорости на контуре C в случае потенциального обтекания невязким потоком. Это значение может быть найдено при решении задачи о потенциальном обтекании контура идеальным потоком.

Скорость вязкого потока в пограничном слое обязана переходить в скорость невязкого потока по мере удаления от границы тела так, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} v_x &= 0, \quad v_y = 0, \quad y = 0, \\ v_x &\rightarrow U(x), \quad v_y \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.12.15)$$

3.12.3. Автомодельные решения. С целью поиска частных решений уравнений пограничного слоя (3.12.14) часто используется замена

$$\psi(x, y) = \sqrt{\nu U x} f(x, \eta), \quad \eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}, \quad (3.12.16)$$

где $\psi(x, y)$ — функция тока, связанная с компонентами скорости через соотношения:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Поскольку уравнение неразрывности в системе (3.12.14) при замене (3.12.16) удовлетворено автоматически, то остается выяснить, к какому виду преобразуется первое уравнение из (3.12.14). Так как

$$v_x = U \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad v_y = -\sqrt{\nu U x} \left[\frac{1}{2} \frac{(Ux)'}{Ux} f + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right],$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{U} \frac{dU}{dx} \right) f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{x}{U} \frac{dU}{dx} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ = x \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned} \quad (3.12.17)$$

Граничные условия для уравнения (3.12.17) получаются из условий (3.12.15):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad f|_{\eta=0} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.12.18)$$

Заметим, что одно из условий в (3.12.15) оказалось невостремленным, что является существенным недостатком уравнений пограничного слоя.

Уравнение (3.12.17) имеет класс частных решений, не зависящих от переменной x , если $\frac{x}{U} \frac{dU}{dx} = m$, где m от x не зависит. Такие частные решения называются *автомодельными*. В этом случае система (3.12.17), (3.12.18) принимает вид

$$\begin{aligned} f''' + \frac{1}{2} (1 + m) f f'' + m[1 - f'^2] = 0, \\ f = 0, \quad f' = 0, \quad \eta = 0, \\ f' \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.12.19)$$

Примерами течений, для которых задача о пограничном слое сводится к краевой задаче (3.12.19) для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, являются потоки со степенной зависимостью скорости невязкого течения от продольной координаты: $U(x) = U_1 x^m$, $U_1 = \text{const}$. Рассмотрим некоторые из таких течений.

3.12.3.1. Обтекание полубесконечной пластины. При $m = 0$ автомодельное решение, определяемое из системы

$$\begin{aligned} f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0, \\ f = 0, \quad f' = 0, \quad \eta = 0, \\ f' \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

отвечает задаче об обтекании тонкой полубесконечной пластины вязким поступательным потоком, имеющим на бесконечности скорость U_1 . Эта задача может быть решена численно.

Толщиной пограничного слоя δ назовем расстояние до воображаемой стенки, на которой скорость в пограничном слое отличается от скорости невязкого течения на малую величину μ .

Поскольку продольная компонента скорости в пограничном слое равна

$$v_x = U_1 \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

то толщина слоя определяется из неравенства

$$\left| U_1 \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\delta \sqrt{\frac{U_1}{\nu x}} \right) - U_1 \right| < \mu.$$

Например, при $\mu = 0,01U_1$ на основании численного счета можно найти, что

$$\delta \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_1}}.$$

Таким образом, толщина пограничного слоя равна нулю на переднем крае пластины и далее возрастает как \sqrt{x} .

3.12.3.2. Течение в суживающемся канале. Рассмотрим течение вязкой жидкости между двумя наклоненными друг к другу пластинами, предполагая, что жидкость движется в направлении уменьшения расстояния между пластинами. Такое течение может быть реализовано, если в начало координат поместить сток определенной мощности, а пластины ориентировать по полю скоростей.

В § 2.12 рассматривалось течение идеальной жидкости, порождаемое источником (стоком), расположенным в начале координат. В полярной системе координат было получено соответствующее распределение скоростей:

$$v_r = \frac{U_1}{r}, \quad v_\varphi = 0, \quad (3.12.20)$$

где $U_1 < 0$ в случае стока. При внесении в поток плоских пластин, ориентированных по полю скоростей, распределение скоростей между пластинами не изменится и будет иметь вид (3.12.20). В самом деле, на поверхности пластин ∂D_1 и ∂D_2 должны выполняться условия непротекания жидкости:

$$\mathbf{v} \mathbf{n}_1|_{\partial D_1} = 0, \quad \mathbf{v} \mathbf{n}_2|_{\partial D_2} = 0, \quad (3.12.21)$$

которые выполнялись и ранее на воображаемых поверхностях ∂D_1 и ∂D_2 . Здесь \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — нормали к поверхностям пластин.

Выясним, как изменится распределение скоростей между пластинами в случае вязкого течения с большим числом Рейнольдса.

Вдали от пластин распределение скоростей по-прежнему имеет вид (3.12.20). Для описания пограничного слоя вблизи одной из пластин введем декартову систему координат, где координату x будем откладывать вдоль поверхности пластины. Тогда скорость невязкого течения вблизи этой пластины равна

$$U(x) = \frac{U_1}{x},$$

и, значит, $m = -1$. Поскольку $U(x) < 0$, то вместо (3.12.16) следует использовать замену

$$\psi(x, y) = \sqrt{-\nu U x} f(x, \eta), \quad \eta = y \sqrt{-\frac{U}{\nu x}}.$$

Тогда для определения автомодельного решения получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} f''' + 1 - f'^2 &= 0, \\ f &= 0, \quad f' = 0, \quad \eta = 0, \\ f' &\rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.12.22)$$

Умножая обе части уравнения из системы (3.12.22) на f'' и интегрируя полученное выражение от 0 до η , с учетом граничных условий находим

$$\frac{f''^2}{2} - \frac{f''^2}{2} \Big|_{\eta=0} + f' - \frac{f'^3}{3} = 0. \quad (3.12.23)$$

Рассмотрим это равенство при $\eta \rightarrow \infty$:

$$\frac{f''^2}{2} \Big|_{\eta \rightarrow \infty} - \frac{f''^2}{2} \Big|_{\eta=0} + \frac{2}{3} = 0.$$

Поскольку $f' \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow \infty$, то $f'' \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\frac{f''^2}{2} \Big|_{\eta=0} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, (3.12.23) преобразуется к виду

$$f''^2 + 2f' - \frac{2}{3}(f'^3 + 2) = 0,$$

или

$$f''^2 = \frac{2}{3} (f' + 2)(f' - 1)^2.$$

Так как $f' < 1$, то $|f' - 1| = 1 - f'$. Поэтому

$$f'' = \sqrt{\frac{2}{3}} (1 - f') \sqrt{f' + 2}.$$

Отсюда

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{df'}{(1 - f') \sqrt{f' + 2}} = d\eta.$$

Интегрируя это уравнение от 0 до η , имеем

$$\sqrt{2} \left(\operatorname{Arth} \sqrt{\frac{f' + 2}{3}} - \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) = \eta,$$

или

$$\frac{df}{d\eta} = 3 \operatorname{th}^2 \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} + \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - 2.$$

Поскольку $v_x = U(x) \frac{df}{d\eta}$, то v_x монотонно возрастает при удалении от границы и достигает значения $U(x)$ при

$$\frac{\eta_\delta}{\sqrt{2}} + \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1.$$

Учитывая, что $\eta_\delta = \sqrt{-U/\nu x} \delta$, оцениваем толщину δ пограничного слоя:

$$\delta \approx \sqrt{-\frac{2\nu x}{U(x)}} \left(1 - \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \approx 3 \sqrt{-\frac{\nu x}{U(x)}} = 3x \sqrt{-\frac{\nu}{U_1}}, \quad U_1 < 0.$$

ДОПОЛНЕНИЕ

Содержание четвертой главы представляет собой справочный материал. В ней приводятся уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрических и сферических координатах, а также выражения для основных дифференциальных операций, которые использовались на протяжении всего изложения.

§ 4.1. Уравнения движения вязкой жидкости и основные дифференциальные операции в ортогональных криволинейных координатах

4.1.1. Цилиндрические координаты. Цилиндрические координаты (r, φ, z) связаны с прямоугольными координатами уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= z, \\ 0 &\leq r < \infty, & 0 &\leq \varphi < 2\pi, & -\infty &< z < \infty. \end{aligned}$$

Координатные поверхности: $r = \text{const}$ — цилиндры; $\varphi = \text{const}$ — плоскости; $z = \text{const}$ — плоскости.

Три компоненты уравнения Навье–Стокса имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) v_r - \frac{v_\varphi^2}{2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z. \end{aligned}$$

Здесь операторы (\mathbf{v}, ∇) и Δ определяются формулами:

$$(\mathbf{v}, \nabla)u = v_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Если $\mathbf{A} = \{A_1; A_2; A_3\}$ — произвольный вектор, $A_s = A_s(r, \varphi, z)$, $s = 1, 2, 3$, u — скаляр, то

$$\text{grad } u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_3}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial r} \right) +$$

$$+ \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_2) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} \right).$$

4.1.2. Сферические координаты. Сферические координаты (r, θ, φ) связаны с прямоугольными координатами соотношениями

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Координатные поверхности: $r = \text{const}$ — концентрические сферы, $\theta = \text{const}$ — конусы, $\varphi = \text{const}$ — плоскости.

Уравнения Навье–Стокса:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+ \nu \left(\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right),$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)v_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \text{ctg } \theta}{r} =$$

$$= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\varphi v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} = \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \nabla)u &= v_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \Delta u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} u, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_{\theta\varphi} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

— угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

Для основных дифференциальных операций имеем представления:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u &= \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_1) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_2 \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_3}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_3 \sin \theta) - \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right] + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial r} (r A_3) \right] + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right]. \end{aligned}$$

§ 4.2. Некоторые формулы векторного анализа

4.2.1. Дифференциальные операции первого порядка.

Если \mathbf{A} и \mathbf{B} — некоторые векторные функции, u и v — скалярные функции, то

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u \mathbf{A} &= \mathbf{A} \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \mathbf{A}, \\ \operatorname{grad} uv &= v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v, \\ \operatorname{rot} u \mathbf{A} &= u \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} u \times \mathbf{A}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A},$$

где

$$(\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{B} = A_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}.$$

$$\operatorname{grad} \mathbf{A} \mathbf{B} = (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

В частности, положив в последней формуле $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, получим

$$\operatorname{grad} \frac{\mathbf{A}^2}{2} = (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

4.2.2. Дифференциальные операции второго порядка.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla^2 u = \Delta u,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}.$$

Список литературы

1. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.–Ижевск: РХД, 2003.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 2001.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Части 1, 2. — М.: Физматгиз, 1963.
5. *Елизарова Т. Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. — М.: Научный мир, 2007.
6. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 1998.
7. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. — М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 2002.
8. *Ильин В. И., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 1999.
9. *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Лекции по математической физике. — М.: Наука, 2004.
10. *Каменкович В. М., Монин А. С., Бреховских Л. М. и др.* Океанология. Физика океана. Т. 2. Гидродинамика океана. — М.: Наука, 1978.
11. *Бухтеев В. Г., Доронин Ю. П., Зубова М. М. и др.* Динамика океана. — Л.: Гидрометеиздат, 1980.
12. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 1999.
13. *Шулейкин В. В.* Физика моря. — М.: Наука, 1968.
14. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1970.
15. *Петкевич В. В.* Основы механики сплошных сред. — М.: Эдиториал УРСС, 2001.
16. *Шкадов В. Я., Запryanов З. Д.* Течения вязкой жидкости. — М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984.

Предметный указатель

Автомодельное решение 204

Бароклинная среда 49

Баротропная среда 48

Векторное поле 12

Вихревое движение 28

— состояние жидкости 37

Вихревая линия 37

— нить 38, 98

— точка 85, 98

— трубка 38

Вихревые цепочки Кармана 111

Вихреисточник 87

Внешняя задача гидроаэродинамики 54, 143

Внутренняя задача гидроаэродинамики 54, 143

Внешнее решение 200

— трение жидкости 126

Внутреннее решение 200

— трение жидкости 126

Волновое сопротивление 72

Вязкая жидкость 126

Вязкость 7, 127

Градиент скалярного поля 14

Давление идеальной жидкости 44

— статическое 63

Деформация 8

Дивергенция поля скоростей 16

— тензора напряжений 137

Динамическое приращение давления 63

— условие на свободной поверхности идеальной жидкости 54

— условие на свободной поверхности вязкой жидкости 144

Диполь 83

Диссипативная функция 145

Жидкая частица 8

Жидкий объем 25

Закон Гагена–Пуазейля 158

— Навье–Стокса 134

— подобия 147

— подобия Рейнольдса 147

— сохранения интенсивности трубки тока 17

— трения Ньютона 126, 135

Идеальная жидкость 43

Изопотенциальная линия 75

Интеграл Бернулли (энергий) 55

— Бернулли–Коши 56

— Бернулли–Эйлера 57

— Пуассона 170

Интенсивность вихревой точки 85

— вихревой трубки 38

— погонная 86

— трубки тока 18

Источник 36, 80

Кинематическое условие на свободной поверхности идеальной жидкости 53

— на свободной поверхности вязкой жидкости 144

Комплексная скорость 77

Коэффициент вязкости 126, 134

— вязкости кинематический 127

Критерий консервативности векторного поля 20

Критическая точка 63

Ламинарное (слоистое) течение 156

Линия тока 13, 29, 75

Метод Лагранжа 9

— конформных отображений 123

— Эйлера 10

- Механически подобные потоки 146
 Многосвязная область 84
 Модель вязкой жидкости 133
 — вязкой сжимаемой теплопроводящей жидкости 142
 — идеальной теплопроводящей бароклинной жидкости 52
Напряжение 41
 — касательное 42
 — нормальное 42
 Несжимаемая жидкость 17
 Нестационарное одномерное течение 167
Однородная жидкость 26
 Односвязная область 30
Парадокс Даламбера 71
 Первый интеграл движения 54
 Переменные Лагранжа 10
 — Эйлера 10
 Подпор жидкости 63
 Плоское потенциальное движение 74
 — поле скоростей 13
 Пограничный слой 197
 Потенциальное движение 28
 — движение с циркуляцией 85
 — (консервативное) поле 20
 Потенциал комплексный 77
 — скорости 20
 Преобразование Коши 130
 Принцип Даламбера 42
 Производная поля вдоль нормали 14
Ротор (вихрь) поля скоростей 20
Сила внутреннего трения (вязкости) 42, 126
 — инерции даламберова 42
 — массовая 41
 — подъемная 70
 — поверхностная 41
 — сопротивления 70, 193
 Сингулярно возмущенная задача 198
 — — система 198
 Скалярное поле 12
 Скалярный поток 15
 Соленоидальное (трубчатое) поле 17
 Сопряженные линии 75
 Сплошная среда 8
 Стационарное (установившееся) течение 13, 54
 Сток 36, 80
 Стратифицированная жидкость 28
Тензор скоростей деформации 131
 — напряжений 132, 135
Теорема Лагранжа 95
 — о сохранении вихревой линии (Гельмгольца–Фридмана) 94
 — о сохранении интенсивности вихревой трубки 95
 — Томсона о кинетической энергии потенциального движения идеальной жидкости 72
 — Томсона о циркуляции скорости при движении идеальной жидкости в консервативном поле 94
 Течение Куэтта 151
 — Пуазейля 148, 157
 Толщина пограничного слоя 202, 205
 Трубка Вентури 58
 — Пито 63
 — тока 14
 Турбулентное течение 156
Уравнение движения сплошной среды в напряжениях 137
 — Гельмгольца 97, 182
 — Навье–Стокса в векторной форме 138
 — неразрывности 25
 — притока тепла 142
 — Эйлера в векторной форме 46

- Уравнения Навье–Стокса 138
— Прандтля (пограничного слоя) 201
— Эйлера 45
— движения идеальной жидкости в форме Ламба 46
— движения идеальной жидкости в форме Лагранжа 47
- Условия граничные 52
— начальные 52
— на поверхности раздела 144
- Формула Остроградского–Гаусса 16
- Сатерленда 142
— Стокса 19, 197
- Формулы Коши–Гельмгольца 130
- Функция тока 75
- Центр инерции системы вихрей 100
- Цилиндрический вихрь 98
- Циркуляция скорости 19
- Число Рейнольдса 147
— Струхаля 147
— Фруда 147

Учебное издание

ДАВЫДОВА Марина Александровна

ЛЕКЦИИ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ

Редактор *О.В. Максимова*

Оригинал-макет: *Е.Н. Водоватова*

Оформление переплета: *В.Ф. Киселев*

Подписано в печать 24.03.11. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 14,85. Тираж 500 экз.
Заказ №2946

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано
в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-9221-1303-8



9 785922 113038



Марина Александровна Давыдова

Родилась в городе Рославле Смоленской области. В 1991 году с серебряной медалью закончила среднюю школу №9 города Рославля и поступила на физический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, в 1997 году получила диплом с отличием. В том же году поступила в аспирантуру физического факультета, по окончании которой в 2000 году ей была присвоена ученая степень кандидата физико-математических наук. С 2000 года по настоящее время работает на физическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова. В течение ряда лет читала курс лекций по механике сплошных сред для студентов отделения геофизики физического факультета. Автор ряда печатных научных работ.