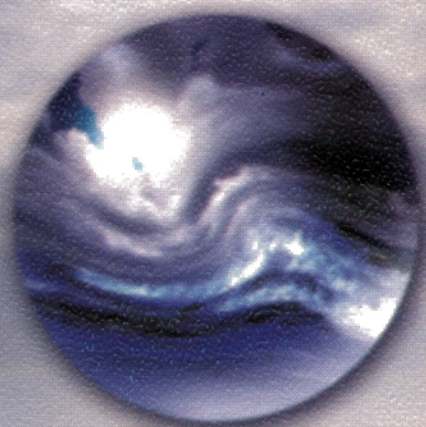


К. Эккарт

ГИДРОДИНАМИКА ОКЕАНА И АТМОСФЕРЫ



R&C
Dynamics



HYDRODYNAMICS OF OCEANS AND ATMOSPHERES

by
Carl Eckart

University of California
Scripps Institution of Oceanography

PERGAMON PRESS
OXFORD — LONDON — NEW YORK — PARIS
1960

К. ЭККАРТ

ГИДРОДИНАМИКА ОКЕАНА И АТМОСФЕРЫ

Перевод с английского
Л. А. Дикого и П. Н. Успенского

Под редакцией
А. М. Обухова

R&C
Dynamics

РХД

Москва • Ижевск

2004

Интернет-магазин
MATHESIS
<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- техника

Эккарт К.

Гидродинамика океана и атмосферы. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004, 328 стр.

Оригинальная монография К. Эккарта, известного специалиста по акустике и гидродинамике, представляет собой систематическое введение в механику расслоенных сред, движущихся в поле силы тяжести и в поле силы Кориолиса. В монографии подробно исследованы различные волновые процессы — звуковые волны в неоднородной сплошной среде, внутренние гравитационные волны и поверхностные волны (волны Ламба). Эти быстрые волновые процессы являются «фоном», на котором протекают медленные вихревые динамические процессы, которые в атмосфере ответственны за погоду.

Многие частные задачи динамики атмосферы и моря, которым посвящено огромное количество отдельных статей, книга К. Эккарта охватывает с единой точки зрения, что позволило автору выявить гидродинамическую сущность этих задач.

Книга рассчитана на специалистов по атмосферной и морской акустике, научных работников в области динамической метеорологии и океанологии, и будет полезной гидродинамикам, интересующимся спецификой проблем механики атмосферы и океана.

Репринтное издание (оригинальное издание: Москва: Из-во иностранной литературы, 1963 г.).

ISBN 5-93972-321-7

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004

<http://rcd.ru>

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	13
Предисловие	15
Глава I. Основные уравнения	17
§ 1. Введение	17
§ 2. Термодинамика	18
§ 3. Термодинамические функции идеального газа	20
§ 4. Термодинамические коэффициенты для воды	21
§ 5. Гидродинамика	24
Потенциал силы тяжести 24. Вращение	25
Силы 25. Приток тепла 25. Адвекция 25. Исключение энтропии 26. Сохранение энергии	26
Литература	27
Глава II. Уравнения возмущений	28
§ 6. Введение	28
§ 7. Решение нулевого порядка	29
Баротропные состояния 29. Градиенты	30
§ 8. Состояния нулевого порядка идеального газа	31
Изотермическая атмосфера 31. Изэнтропическая (адиабатическая) атмосфера 32. Атмосфера с постоянным градиентом температуры 32. Общий случай	33
§ 9. Уравнения первого порядка	34
Интерпретация 35. Вертикальное смещение	36
§ 10. Аддитивные баротропные члены	36
§ 11. Граничные условия	38
Литература	39
Глава III. Установившиеся движения	40
§ 12. Введение	40
Среднее давление 40. Зональная составляющая 42. Незональная составляющая 43. Океаны 45. Атмосфера и океаны как тепловая машина 45. Уравнения	47

§ 13. Свободное установившееся движение без вращения	48
Плоские поверхности уровня 48. Сферические поверхности уровня	50
§ 14. Нестационарность во втором приближении	50
Вековое уравнение	50
Вековые уравнения 51. Связь с теоремой о вихре 53. Первый интеграл векового уравнения 53. Связь с теоремой Бернулли	54
§ 15. Свободное установившееся движение с вращением	54
Уравнение геострофичности 54. Соотношение между плотностью и давлением 55. Планетарный вихрь 55. Плоские поверхности уровня 56. Сферические поверхности уровня	57
§ 16. Чистая конвекция без вращения	58
Вертикальная скорость 59. Граничные условия 61. Следствия сохранения вещества 62. Явное решение уравнений 64. Плоские поверхности уровня 64. Сферические поверхности уровня	64
§ 17. Чистая конвекция с вращением	65
Термобарическое движение 65. Давление и плотность 66. Плоские поверхности уровня 67. Сферические поверхности уровня	67
§ 18. Гипотеза зонального нагревания Гадлея	68
Отсутствие вращения 68. Нестационарность вихрей Гадлея	70
§ 19. Анализ постоянного поля давления на Земле	71
Зональная составляющая давления 71. Незональная составляющая давления 72. Влияние подстилающей поверхности	74
Литература	75
Глава IV. Уравнения поля	76
§ 20. Введение	76
§ 21. Внешняя энергия и термобарическая энергия	77
§ 22. Параметры поля	79
Случай океана 80. Изотермическая атмосфера 80. Атмосфера с постоянным градиентом температуры	80
§ 23. Уравнения поля	81

§ 24. Смысл коэффициентов N и Γ	82
§ 25. Частные формулы для коэффициентов	86
Идеальный газ 86. Пресная вода 86. Морская вода	87
Литература	88
Глава V. Атмосфера Земли, океаны и озера	89
§ 26. Введение	89
§ 27. Стратификация океанов	90
Крупномасштабные средние 90. Мелкомасштабные средние	93
§ 28. Стратификация пресных озер	94
§ 29. Стратификация земной атмосферы	97
§ 30. Планетарное вращение и циклогенез	100
Ранние идеи 101. Наблюдения Редфилда и Рида; циклоны 101. Теория Трэси 102. Теория Ганна 102. Циклоны и антициклоны; завихренность 103. Теоремы о вихре Гельмгольца и Бьеркнесса 104.	
§ 31. Циклогенез первого порядка	105
Отсутствие вращения 105. Вращение 106. Вращение со сферическими поверхностями уровня 107.	
Резюме	108
Литература	109
Глава VI. Общие теоремы относительно уравнений поля 110	110
§ 32. Введение	110
§ 33. Собственные решения типа собственных колебаний 111	111
§ 34. Теорема разложения	113
Теорема разложения (для конечного объема) 114.	
Теорема разложения (для бесконечного объема) . .	115
Глава VII. Постановка основных математических задач . 117	117
§ 35. Введение	117
§ 36. Случай отсутствия вращения	119
Плоские поверхности уровня 119. Остаточные уравнения 119. Разделение переменных. Двумерное волновое уравнение 120. Сферические поверхности уровня 121. Остаточные уравнения 121. Разделение переменных. Волновое уравнение для сферической поверхности	122

§ 37. Вращение при плоских поверхностях уровня . . .	122
Традиционные приближения 123. Разделение переменных. Двумерное волновое уравнение 125. Вычисления без дополнительных упрощений 126. Разделение переменных	127
§ 38. Вращение при сферических поверхностях уровня	127
Традиционные приближения 128. Разделение переменных. Приливное уравнение Лапласа 129. Отказ от традиционных приближений	129
§ 39. <i>Комплексные векторы и годограф</i>	129
Отсутствие вращения 130. Вращение (традиционное приближение) 130. Вращение (без приближения) .	131
Литература	131

Глава VIII. Изотермическая атмосфера. Плоские поверхности уровня при отсутствии вращения . . .

§ 40. Введение	132
§ 41. Волны Ламба	133
§ 42. Другие собственные решения. Простые волны . . .	135
§ 43. Поверхность распространения. Фазовая скорость	137
§ 44. Лучи и групповая скорость	139
§ 45. Импеданс давления — энтропия	143
§ 46. Поток и распределение энергии в простых волнах	144
§ 47. Собственные решения	146
Фазовая диаграмма 146. Годограф	147
§ 48. Гравитационные волны и флуктуационный ветер	149
Литература	150

Глава IX. Изотермическая атмосфера. Плоские поверхности уровня с вращением

§ 49. Вертикальная ось вращения	151
§ 50. Волны Ламба	152
§ 51. Простые волны и собственные решения	154
§ 52. Докритическая устойчивость	159
§ 53. Наклонная ось вращения	160
Волны Ламба 161. Законы отражения 163. Вы-	
воды	164

Глава X. Океаны с постоянными коэффициентами . . .	166
§ 54. Введение	165
§ 55. Теория однородного сжимаемого океана	169
§ 56. Теория расслоенного, но несжимаемого океана . . .	174
§ 57. Общий случай	177
§ 58. Простая аппроксимация внутренних гравитационных типов	180
§ 59. Типы колебаний в прямоугольном резервуаре . .	182
§ 60. Другие боковые границы	184
Литература	185
 Глава XI. Общая теория лучей	 186
§ 61. Введение	186
§ 62. Уравнение Гамильтона — Якоби	187
§ 63. Плоские поверхности уровня. Вертикальная ось . .	189
Общие и полные решения 190. Функция Гамильтона — Якоби	190
§ 64. Лучи и групповая скорость	191
Вывод формулы для лучей 191. Групповая скорость 192. Интерпретация лучевой точки 193. Явное уравнение для лучей 194. Общие свойства лучей 194. Предельные формы лучей	194
§ 65. Сферические поверхности уровня при отсутствии вращения	195
Полное решение 196. Лучи 198. Лучи представляют собой плоские кривые 198. Высота лучей	199
§ 66. Сферические поверхности уровня при наличии вращения. Традиционное приближение	200
Следы лучей 201. Замечание относительно аппроксимации 203. Период следов лучей 203. Высота лучей	204
Литература	205
 Глава XII. Слой скачка	 207
§ 67. Постановка задачи	207
§ 68. Предварительное изучение лучей	208
§ 69. Звуковые волны области II	211
§ 70. Гравитационные волны области III	213
§ 71. Волны областей IV и V	215

§ 72. Остаточные уравнения	216
Изменения в случае, когда слой скачка прости-	
рается от поверхности до дна	223
§ 73. Аналитическое решение остаточных уравнений . .	225
§ 74. Дальнейшее применение ВКБ-метода	227
Акустические волновые типы в области II	227.
Внутренние гравитационные волновые типы	
области III.	228
§ 75. Двухслойная модель	232
Литература	233
Глава XIII. Термосфера	234
§ 76. Введение	234
§ 77. Случай отсутствия вращения	236
Формальное вычисление лучей 237. Интерпретация	
результатов	238
§ 78. Вертикальная ось вращения	242
§ 79. Решение остаточных уравнений	244
§ 80. ВКБ-аппроксимация	248
Литература	250
Глава XIV. Общая теория остаточных уравнений	251
§ 81. Введение	251
§ 82. Каноническая форма остаточных уравнений	252
Канонические переменные 252. Канонические урав-	
нения 253. Постоянные коэффициенты 254. Фазо-	
вая диаграмма	254
§ 83. Общие теоремы, относящиеся к фазовым траек-	
ториям	255
§ 84. Теорема сравнения Штурма	260
Формула Штурма 260. Осцилляционные тео-	
ремы 261. Зависимость от параметров	262
§ 85. ВКБ-аппроксимация	263
Литература	265
Глава XV. Приложения общей теории	266
§ 86. Термосфера	266
§ 87. Кривые волновых типов и теорема сравнения . .	273
§ 88. Атмосфера с одним минимумом температуры . . .	275
§ 89. Уравнение кривой волновых типов для океана по-	
стоянной глубины	282

Глава XVI. Волновое уравнение для сферической поверхности	284
§ 90. Введение	284
§ 91. Функции Лежандра	285
Разделение переменных 285. Уравнение Лежандра 286. Функции Лежандра 287. Выражения для скоростей 289. Естественные граничные условия 290. Фазовые диаграммы	290
§ 92. Секториальный океан	291
Литература	294
Глава XVII. Сферические поверхности уровня при наличии вращения	295
§ 93. Введение	295
§ 94. Уравнение приливов первого порядка	296
§ 95. Зональные колебания	297
Случай $L = 0$ 298. Связь со сфероидальными волновыми функциями 298. Функции $S_{ml}(h\tau)$ 301. Фазовые траектории	301
§ 96. Решения вблизи полюсов	302
§ 97. Уравнение приливов в канонической форме	305
Сигнатуры 305. Фазовые траектории 306. Кривые волновых типов 308. Переход к плоскости $\chi\omega$	309
§ 98. Предельный случай высоких частот	311
§ 99. Полусуточные колебания	313
§ 100. Колебания второго рода и „длинные волны“	315
Собственные решения 316. Фазовые траектории 317. Положительная скорость 317. Волны Россби	318
Литература	319
Приложение. Меркаторские координаты	320
Предметный указатель	324

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга известного специалиста по акустике и гидродинамике К. Эккарта, предлагаемая вниманию советского читателя в русском переводе, является весьма оригинальной по замыслу монографией. Цель автора — дать систематическое введение в механику тех сред, с которыми имеют дело метеорологи и океанологи, а именно расслоенных сред, движущихся в поле силы тяжести, а также в поле силы Кориолиса.

Систематический, чисто дедуктивный подход к трактовке весьма трудных проблем динамики расслоенных сред (атмосфера, океан) является и преимуществом и одновременно, пожалуй, недостатком книги. Преимуществом потому, что при огромном количестве отдельных статей по частным вопросам динамики атмосферы и моря в настоящее время особенно ценны работы, позволяющие охватить эти задачи с некоторой единой точки зрения, выявить то гидродинамическое зерно, которое в них содержится. Вместе с тем принятый автором последовательный, порой несколько суховатый метод изложения вопросов динамики расслоенных сред затруднил показ конкретных задач, что можно отнести к недостаткам книги. В тексте приводятся отдельные примеры и числовые иллюстрации, но они весьма немногочисленны.

Можно согласиться с автором, что применение методов теории возмущений (метода линеаризации) к задачам динамики атмосферы и моря далеко не исчерпано и что на этом пути (при соответствующем критическом подходе) можно получить еще много интересных и полезных результатов.

В связи с этим в монографии подробно изучены различного типа волновые процессы — звуковые волны в неоднородной и тяжелой среде, внутренние гравитационные волны и поверхностные волны — волны Ламба. Все эти процессы, представляющие непосредственный интерес для атмосферной и мор-

ской акустики, являются тем своеобразным „фоном“, на котором протекают медленные вихревые динамические процессы, ответственные за погоду. Следует также иметь в виду, что быстрые волновые процессы в атмосфере являются тем механизмом, с помощью которого устанавливается „квазиравновесное состояние“ атмосферы, являющееся предметом изучения большинства работ по численным методам прогноза погоды. В этом отношении книга К. Эккарта является ценным дополнением к недавно вышедшему переводу книги Ф. Томпсона „Анализ и предсказание погоды численными методами“.

Из сказанного выше можно сделать вывод, что перевод монографии К. Эккарта „Гидродинамика океана и атмосферы“ представит интерес для специалистов по атмосферной и морской акустике, научных работников в области динамической метеорологии и океанологии, а также для тех специалистов-гидродинамиков, которые захотят узнать, в чем же состоит специфика проблем механики атмосферы и океана.

А. М. Обухов

Февраль 1963 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Большая часть этой книги могла бы быть написана пятьдесят или шестьдесят лет назад. Она дает систематическое описание простейших движений расслоенной (стратифицированной) сжимаемой жидкости. Известные нам движения океанов и атмосферы Земли далеко не все столь просты, поэтому неизбежно эта книга многим читателям будет казаться устаревшей и не отражающей многие положения, ставшие общепринятыми. В некоторых случаях автор сомневается в ценности теорий, которыми обычно пользуются, чтобы обосновать эти положения. Однако не представляется возможным вдаваться в детальное критическое обсуждение этих теорий, не теряя из виду главной цели книги.

Так, например, на ее страницах не будет освещено действие вязкости и турбулентности, которые современная метеорология и океанография так широко привлекают для объяснения многих явлений. Основанием этого служит то, что в геофизике имеются два числа Рейнольдса. Первое — это обычное число Рейнольдса

$$R = \frac{VL}{\nu},$$

где V — характерная скорость, L — характерная длина и ν — кинематическая вязкость. Второе число Рейнольдса

$$R_g = \frac{NL^2}{\nu},$$

где N — частота Вьясяля-Брента (см. стр. 85). В лабораторных экспериментах $R_g \ll R$ и число R будет доминирующим в явлениях. Для явлений большого и среднего масштаба, которые являются предметом изучения геофизики, $R_g \gg R$ и доминирующим будет число Рейнольдса R_g . Поэтому крайне маловероятно, чтобы результаты лабораторных исследований

турбулентности могли быть с успехом применены к турбулентности в воздухе или океанах. В частности, теория изотропной турбулентности будет мало приложима к тем флуктуациям ветра, которые возмущают горизонтальный полет самолета.

Однако теория геофизической турбулентности относится к той „надстройке“, для которой эта книга по замыслу является чем-то вроде фундамента. По этой причине турбулентности здесь не уделено места.

К. Э.

Ла-Холья, 15 марта 1960 г.

Глава I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Введение

Наиболее характерным свойством земной атмосферы является уменьшение ее плотности с высотой. Это расслоение — стратификация — наделяет атмосферу устойчивостью, полнотой отсутствующей в однородной жидкости. Океаны на Земле также обладают стратификацией и имеют устойчивость того же порядка, что и атмосфера. С другой стороны, классическая гидродинамика занимается почти исключительно движением однородной несжимаемой жидкости. Вероятно, по этой причине она не имела заметного успеха в объяснении метеорологических и океанографических явлений.

Попыток создать систематическую теорию устойчиво стратифицированной жидкости не делалось. Просмотр литературы обнаруживает больше сомнительных допущений, чем хорошо установленных результатов [4]. Целью этой книги будет вывод достаточно общих уравнений и систематическое изучение их решений с помощью общепринятого аппарата теории волн. Нашей целью будет скорее иллюстрировать законы динамики, чем имитировать природу. Конечный шаг — введение в вычисления эмпирических данных и сравнение результатов с наблюдением — мы обычно делать не будем.

Вывод уравнений неизбежно будет основываться на допущениях, причем некоторые из них будут весьма смелыми. Первое из этих допущений касается природы жидкости. И воздух, и морская вода представляют собой смеси; мы будем этим пренебрегать и предполагать, что к ним приложимы термодинамические соотношения, отвечающие химически чистым жидкостям.

В соответствии со вторым допущением нелинейные уравнения термодинамики и гидродинамики будут изучаться методами теории возмущений. Это значит, что будут рассматриваться только малые отклонения от состояния статического

равновесия, так что решаемые нами уравнения будут линейными. Это, несомненно, исключает из рассмотрения некоторые явления. Граница, где это упрощение становится чрезмерным, неизвестна; вместе с тем автор склонен думать, что таким путем можно трактовать более широкую область вопросов, чем это обычно предполагают.

§ 2. Термодинамика

Состояние чистой жидкости можно определить с помощью любых двух из четырех параметров: v , p , θ , η , которые являются соответственно удельными объемом, давлением, температурой и энтропией [3, 6]. Внутреннюю энергию жидкости ϵ (эрг/г) лучше всего выражать как функцию v и η . Тогда уравнение состояния жидкости можно получить, исключив из двух фундаментальных уравнений

$$p = -\frac{\partial \epsilon}{\partial v}, \quad \theta = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta}. \quad (2.1)$$

Этими уравнениями можно воспользоваться также, чтобы совершить переход от одной пары независимых переменных (параметров) к другой.

Результат дифференцирования уравнений (2.1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta p &= -X \delta v + Y \delta \eta, \\ \delta \theta &= -Y \delta v + Z \delta \eta, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $+X$, $-Y$ и Z — три вторых производных от ϵ . Эти величины можно выразить через более обычные характеристики следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= \rho^2 c^2, \\ Y &= \frac{\rho(\gamma - 1)}{a}, \\ Z &= \frac{\theta}{C_v}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$\rho = 1/v$ — плотность, c — скорость звука, a — коэффициент теплового расширения, C_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, γ — отношение удельных теплоемкостей.

Эти формулы выводятся следующим образом. Определение скорости звука, как оно дается в курсах акустики [9], можно свести к формуле

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\delta \eta = 0}.$$

Так как $\delta v = -\delta \rho / \rho^2$, первое из уравнений (2.1) сразу же дает $X = \rho^2 c^2$. Заметим, что ρc — удельное акустическое сопротивление жидкости [9]. Точно так же по определению

$$C_v = \left(\frac{\delta \varepsilon}{\delta \theta} \right)_{\delta v = 0} = \theta \left(\frac{\delta \eta}{\delta \theta} \right)_{\delta v = 0}.$$

откуда сразу же следует, что $Z = \theta / C_v$. Чтобы установить формулу для Y , необходимо сначала вычислить удельную теплоемкость при постоянном давлении, которая определяется следующим образом:

$$C_p = \left(\frac{\delta \varepsilon + p \delta v}{\delta \theta} \right)_{\delta p = 0} = \theta \left(\frac{\delta \eta}{\delta \theta} \right)_{\delta p = 0}.$$

Когда $\delta p = 0$, из первого уравнения (2.2) следует $\delta v = (Y/X) \delta \eta$ и из второго уравнения (2.2) $\delta \theta = (1 - Y^2/XZ) Z \delta \eta$. Отсюда

$$C_p = \left(1 - \frac{Y^2}{XZ} \right)^{-1} C_v.$$

или

$$\frac{C_v}{C_p} = \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{Y^2}{XZ}.$$

Следовательно,

$$Y^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} XZ = \frac{(\gamma - 1) \rho^2 c^2 \theta}{\gamma C_v}. \quad (2.4)$$

Это уравнение позволяет определить Y (с точностью до знака) безотносительно к коэффициенту теплового расширения, который определяется как

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\delta v}{\delta \theta} \right)_{\delta p = 0}.$$

Если воспользоваться предыдущим выражением для γ , то это приведет к выражению $Y = \rho(\gamma - 1)/\alpha$, которое было дано

выше. Тогда уравнение (2.4) можно преобразовать следующим образом:

$$\gamma(\gamma - 1) C_v = a^2 c^2 \theta.$$

Это термодинамическое тождество представляет некоторый интерес.

§ 3. Термодинамические функции идеального газа

В качестве более конкретного примера общих термодинамических соотношений — такого, который будет полезен и дальше, — рассмотрим случай идеального газа. Идеальный газ — это газ, все молекулы которого тождественны и взаимодействуют только путем соударений, а между соударениями движутся прямолинейно. Его удельные теплоемкости — постоянные величины. В этом случае можно воспользоваться общими принципами статистической механики [7] и показать, что внутренняя энергия идеального газа равна

$$\epsilon = A v^{-\gamma+1} \exp[(\gamma - 1) \eta/R], \quad (3.1)$$

где A , γ и R — постоянные.

В частности, γ является отношением удельных теплоемкостей, как было определено выше. Для воздуха с молекулярным весом 29 $R = 2,87 \cdot 10^6$ эрг/г · град и $\gamma = 1,40$. Значение A дальше не понадобится.

Из уравнения (2.1) следует, что

$$p = - \frac{\partial \epsilon}{\partial v} = (\gamma - 1) A v^{-\gamma} \exp[(\gamma - 1) \eta/R], \quad (3.2)$$

$$\theta = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} = [(\gamma - 1) A/R] v^{-\gamma+1} \exp[(\gamma - 1) \eta/R].$$

Эти уравнения можно преобразовать в следующие:

$$\begin{aligned} p v &= R \theta, \\ p v^\gamma &= (\gamma - 1) A \exp[(\gamma - 1) \eta/R], \end{aligned} \quad (3.3)$$

которые будут соответственно уравнением состояния и уравнением изэнтроп.

Вторая производная от ϵ дает

$$X = \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial v^2} = \gamma(\gamma - 1) A v^{-\gamma-1} \exp[(\gamma - 1) \eta/R] = \gamma p^2 R \theta. \quad (3.4)$$

Соединяя это с предыдущим результатом $X = \rho^2 c^2$, мы получаем, что скорость звука c дается формулой Лапласа

$$c^2 = \gamma R \theta. \quad (3.5)$$

Аналогично

$$+Y = -\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial v \partial \eta} = [(\gamma - 1)^2 / R] A v^{-\gamma} \exp [(\gamma - 1) \eta / R] = (\gamma - 1) \rho \theta. \quad (3.6)$$

Соединяя с результатом $Y = \rho (\gamma - 1) / a$, мы находим, что коэффициент теплового расширения

$$a = \frac{1}{\theta}. \quad (3.7)$$

Наконец,

$$Z = \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \eta^2} = [(\gamma - 1) / R]^2 A v^{-\gamma+1} \exp [(\gamma - 1) \eta / R] = (\gamma - 1) \frac{\theta}{R}. \quad (3.8)$$

Из формулы $Z = \theta / C_v$ найдем, что удельная теплоемкость

$$C_v = \frac{R}{(\gamma - 1)}. \quad (3.9)$$

Подстановка уравнений (3.5), (3.7) и (3.9) в уравнение (2.5) подтверждает, что последнее удовлетворяется.

§ 4. Термодинамические коэффициенты для воды

Было бы заманчиво принять, что основные коэффициенты для пресной и морской воды являются постоянными величинами. Это было бы равносильно предположению, что на p, v -диаграмме и *изотермы* и *адиабаты* приближенно можно представить равномерно размещенными параллельными прямыми линиями. К сожалению, при изучении пресных озер нельзя игнорировать явление *максимума плотности*; изотермы заметно искривлены даже в соленой воде, хотя максимум плотности в ней достигается только в переохлажденном состоянии (см. рис. 1 и 2). В частности, коэффициент теплового расширения этих жидкостей непостоянен и при некоторой температуре, которая сама является функцией давления, обращается в нуль. В свою очередь термодинамическое тождество

$$\gamma (\gamma - 1) C_v = a^2 c^2 \theta$$

показывает, что $\gamma - 1$ имеет при этой температуре двойной корень, а отсюда Y имеет простой корень. Таким образом,

наиболее простое предположение, которое является допустимым, требует, чтобы Y было линейной функцией давления и температуры.

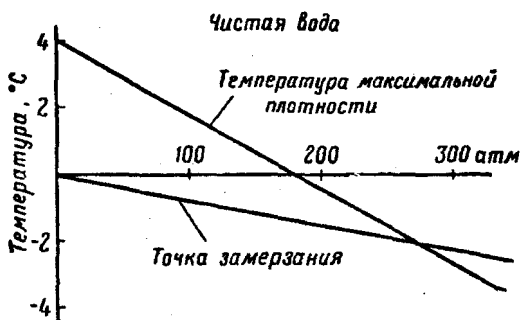


Рис. 1. Изменение с давлением точки замерзания и температуры максимальной плотности чистой воды.

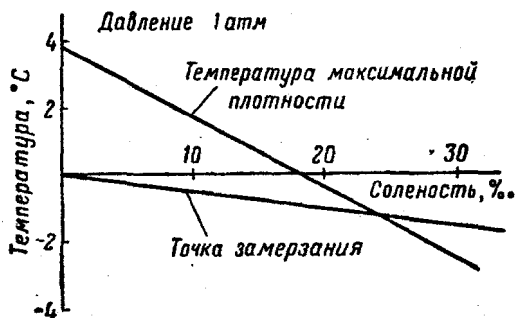


Рис. 2. Изменение с соленостью точки замерзания и температуры максимальной плотности морской воды при давлении в 1 атм.

Можно принять тогда, что для чистой воды, какую мы находим в озерах, температура максимальной плотности дается формулой

$$T_{\text{макс}} = 4 - 2 \cdot 10^{-8} p^{\circ}\text{C},$$

хотя большой точности от этой формулы требовать нельзя. Удобно ввести величину

$$T_M = T - 4,0 + 2 \cdot 10^{-8} p, \quad (4.1)$$

где T — температура ($^{\circ}\text{C}$). Тогда в области от 0 до 7°C и от 0 до 20 *атм* коэффициент теплового расширения равен приблизительно

$$a = 15 \cdot 10^{-6} T_M, \quad (4.2)$$

а отношение удельных теплоемкостей

$$\gamma = 1 + 3,0 \cdot 10^{-5} T_M^2. \quad (4.3)$$

В данном случае три основных коэффициента, X , Y , Z , приближенно равны

$$\begin{aligned} X &= 2,0 \cdot 10^{10}, \\ Y &= 2,0 T_M, \\ Z &= 6,6 \cdot 10^{-6}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

в единицах CGS. В этом приближении

$$(\rho c)^{1/2} = X^{1/4} = 375. \quad (4.5)$$

В настоящей книге скорость звука обычно рассматривается как постоянная; однако несколько более точная формула для скорости звука будет

$$c = 1,42 \cdot 10^5 (1 + 35 \cdot 10^{-4} T_M + 2 \cdot 10^{-9} p) \text{ см/сек.} \quad (4.6)$$

Для морской воды с соленостью 35‰ и в области 0 — 15°C , 00—1000 *атм*, соответствующие формулы будут

$$T_M = T + 7,0 + 2 \cdot 10^{-9} p, \quad (4.7)$$

$$a = 9,3 \cdot 10^{-6} T_M, \quad (4.8)$$

$$\gamma = 1 + 1,2 \cdot 10^{-5} T_M^2, \quad (4.9)$$

$$X = 2,1 \cdot 10^{10}, \quad (4.10)$$

$$Y = 1,3 T_M, \quad (4.11)$$

$$Z = 6,7 \cdot 10^{-6}. \quad (4.12)$$

Необходимо заметить, что уравнение (4.7) не дает того же значения температуры максимальной плотности, что рис. 1. Расхождение связано с тем, что значения констант были выбраны так, чтобы получить наилучшее согласие во всей области давлений от 0 до 1000 *атм*, а это приводит к значительной ошибке на границах данного интервала.

Эти выражения для термодинамических характеристик чистой и морской воды являются очень приближенными. В конечном счете их следовало бы заменить более точными выражениями [5]. Однако приведенные формулы представляют свойства этих жидкостей с большей близостью к реальности, чем это имело бы место при допущении, что коэффициенты сжимаемости, теплового расширения и т. д. совершенно не зависят от температуры и давления.

§ 5. Гидродинамика

Вывод уравнений гидродинамики можно найти в работах [1, 3, 8] и здесь он не приводится. Уравнения гидродинамики имеют вид

$$\frac{Du}{Dt} + v \nabla p + g \nabla \chi + \Omega \times u = f, \quad (5.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} - v \nabla \cdot u = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{q}{\theta}, \quad (5.3)$$

где p , v , η , θ — сохраняют смысл, данный им выше, u — скорость ($см/сек$), $g\chi$ — потенциал силы тяжести (геопотенциал), $g = 980 \text{ см/сек}^2$ по международному соглашению, χ — „динамическая высота“ ($см$), Ω — вектор Кориолиса ($рад/сек$), f — результирующая всех других сил ($дин/г$), q — приток тепла ($эрг/г \cdot сек$), $D/Dt = \partial/\partial t + u \cdot \nabla$ — эйлера производная.

Потенциал силы тяжести. С точностью, достаточной для настоящих целей, можно считать, что „динамическая высота“ равна вертикальной координате или отличается от нее на аддитивную постоянную. Если поверхности уровня приближенно представлять плоскостями, то $\chi = z$, где z — вертикальная декартова координата. Если же поверхности уровня приближенно представляются сферами, то

$$\chi = r - r_s,$$

где r — расстояние точки от центра Земли, а r_s — радиус твердой Земли (или среднего уровня моря).

Вращение. Вектор Кориолиса имеет направление оси вращения Земли и направлен к Полярной звезде. Величина его определяется из условия

$$\frac{2\pi}{\Omega} = 12 \text{ звездных часов,}$$

что дает

$$\Omega = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ рад/сек.}$$

Это удвоенная угловая скорость вращения Земли (см. § 30).

Силы. Сила f включает несколько составляющих. Наиболее значительной из них является приливообразующая сила [8], которая, с высокой степенью приближения, не зависит от скорости и термодинамических параметров; ее можно поэтому считать известной функцией пространственных координат и времени. Другая составляющая силы f образуется за счет вязких напряжений, но в геофизических задачах крупного масштаба ею обычно можно пренебречь.

Приток тепла. Приток тепла обусловлен тремя причинами: теплопроводностью, радиацией и диссипацией энергии за счет вязкости. Третьей компонентой можно полностью пренебречь. Первая компонента дается формулой

$$q = \sigma \nabla \cdot (\sigma \nabla \theta),$$

где σ — теплопроводность жидкости. Этот вид притока тепла q часто изучался. В то же время он, вероятно, много меньше, чем поступление тепла за счет солнечной радиации и обратного, инфракрасного излучения в сторону неба. Теория переноса тепла посредством излучения сложна и здесь рассматриваться не будет [2]. Вместо этого q , подобно f , будет приниматься за известную функцию пространственных координат и времени.

Адвекция. Уравнения (5.1)—(5.3) содержат эйлерову производную D/Dt . Смысл этой производной в отличие от частной производной $\partial/\partial t$ требует разъяснения. Всякая величина, такая, как скорость, плотность, температура и т. д., может быть отнесена или к частице жидкости, или к точке (x, y, z) , которая на мгновение будет занята этой частицей жидкости. Первый способ описания является более глубоким. Скорость,

с которой меняется температура частицы жидкости, по определению равна $D\theta/Dt$. Скорость, с которой меняется температура в точке (x, y, z) снова по определению есть $\partial\theta/\partial t$. Различие между двумя этими величинами вызвано тем, что точку (x, y, z) занимают последовательно различные частицы жидкости, и можно показать, что разность этих величин

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{D\theta}{Dt} = -\mathbf{u} \cdot \nabla\theta.$$

Последовательная смена различных частиц жидкости в одной и той же точке пространства называется адвекцией, а величина $-\mathbf{u} \cdot \nabla\theta$ означает скорость изменения θ в точке (x, y, z) , обусловленного адвекцией. Если температура каждой частицы жидкости остается постоянной (хотя различные частицы имеют различные температуры), то адвекция является единственной причиной изменения температуры во всякой точке. В этом рассуждении температура была использована только как пример, но та же самая терминология может быть применена к любому другому свойству жидкости, допускающему численную характеристику.

Исключение энтропии. Уравнение (5.3) можно дать в другом виде, где понятие энтропии явно не фигурирует. В силу уравнения (2.2)

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{1}{Y} \left(\frac{Dp}{Dt} + X \frac{Du}{Dt} \right) = \frac{1}{Y} \left(\frac{Dp}{Dt} - c^2 \frac{D\rho}{Dt} \right),$$

так что уравнение (5.3) эквивалентно уравнению

$$\frac{Dp}{Dt} - c^2 \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho a c^2}{C_p} q. \quad (5.4)$$

Эта форма уравнения часто встречается в литературе.

Сохранение энергии. Уравнения (5.1)–(5.3) имеют одно важное следствие. Если уравнение (5.1) умножить почленно на $\rho\mathbf{u}$, то результатом этого будет

$$\frac{1}{2} \rho \frac{Du^2}{Dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + \rho g \mathbf{u} \cdot \nabla \chi.$$

Воспользовавшись уравнениями (2.1), (5.2), (5.3), получим первый закон термодинамики

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho q. \quad (5.5)$$

Складывая эти два уравнения и замечая, что

$$\frac{D\chi}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \nabla \chi,$$

получим

$$\rho \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \varepsilon + g\chi \right\} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + \rho q. \quad (5.6)$$

Это — уравнение, которое выражает закон сохранения энергии; величина $\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \varepsilon + g\chi$ — плотность энергии (эрг/г) и $\rho \mathbf{u}$ — поток энергии ($\text{эрг/см}^2 \cdot \text{сек}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bjerknes V., Bjerknes J., Solberg H., Bergeron T., *Physikalische Hydrodynamik*, Berlin, Springer, 1933.
2. Chandrasekhar S., *Radiative Transfer*, Oxford Univ. Press, 1950. (Русский перевод: Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.)
3. Eckart C., *Thermodynamics of irreversible processes*, Phys. Rev., 58, 267—275 (1940).
4. Eckart C., Ferris H. G., *Equations of motion of the ocean and atmosphere*, Rev. Modern. Phys., 28, 48—52 (1956).
5. Eckart C., *The equation of state of water and sea water at low temperatures and pressures*, Amer. J. Sci., 256, 225—240 (1958).
6. Gibbs J. W., *Scientific Papers*, Vol. I, Thermodynamics, New York, Longmans, Green & Co., 1906. (Русский перевод: Гиббс Дж. В., Термодинамические работы, Гостехиздат, М. — Л., 1950.)
7. Gibbs J. W., *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, New Haven, Yale Univ. Press, 1914. (Русский перевод: Гиббс Дж. В., Основные принципы статистической механики, излагаемые со специальным применением к рациональному обоснованию термодинамики, Гостехиздат, М. — Л., 1946.)
8. Lamb H., *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 6th ed., 1932. (Русский перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М. — Л., 1947.)
9. Morse P. W., *Vibration and Sound*, New York, McGraw-Hill, 1948. (Русский перевод: Морз Ф., Колебания и звук, Гостехиздат, М. — Л., 1949.)

Глава II

УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 6. Введение

Метод решения сложных дифференциальных уравнений, называемый методом возмущений, был развит главным образом для обыкновенных дифференциальных уравнений астрономии. В этой области им пользовались с заметным успехом. Дифференциальные уравнения гидродинамики являются уравнениями в частных производных, но общие идеи теории возмущений остаются приложимыми и здесь. В явной форме они были сформулированы в гл. VII „Физической гидродинамики“ В. Бьеркнеса, Я. Бьеркнеса, Сульберга и Бержерона [1]. Ими воспользовались также с успехом при изучении уравнений квантовой теории.

Часто говорят, что в гидродинамике эти идеи не привели к полезным результатам. Для этого могут быть основания двоякого рода: или неверны основные уравнения гидродинамики, или метод возмущений применялся без достаточной осторожности. Просмотр литературы [2] говорит как будто в пользу второго предположения. Во всяком случае, принимать первое допущение, не проделав значительно более тщательного исследования, чем это делалось до сих пор, преждевременно.

В этой главе содержатся отправные точки такого исследования. Из последовательных приближений, какие дает метод возмущений, большей частью рассматриваются только первые два. Согласно терминологии, которая была принята в других областях, это члены нулевого и первого порядка некоторого бесконечного ряда. Едва ли есть сомнение в том, что для адекватного описания явлений необходимы также и члены второго порядка. Однако маловероятно, чтобы можно было достигнуть большого прогресса в вычислении членов второго порядка, пока не понаты полностью результаты вычисления членов нулевого и первого порядка.

§ 7. Решение нулевого порядка

Рассмотрим статическое состояние жидкости, в котором $u=0$ и все величины не зависят от времени t . Пусть, кроме того, $f=0$ и $q=0$. Уравнения (5.2)—(5.3) приводятся тогда к единственному векторному уравнению

$$\sigma \nabla p = -g \nabla \chi, \quad (7.1)$$

которое имеет решение

$$p = p_0(\chi), \quad (7.2)$$

$$\frac{1}{\sigma} = \rho = - \frac{p'_0(\chi)}{g},$$

где p_0 — положительная монотонно убывающая функция χ , а штрих указывает на дифференцирование по χ . Уравнение (7.2) называется уравнением гидростатики. Двух величин p и σ достаточно, чтобы определить величины θ и η из уравнений (2.1). Поэтому θ и η также являются функциями одного χ , как и X, Y, Z . Будем называть эти статические значения любой величины ее значениями нулевого порядка и указывать это нижним индексом нуль.

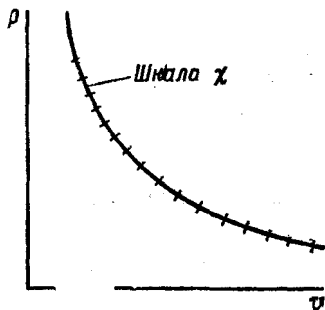


Рис. 3. Иллюстрация понятия баротропного состояния.

Баротропные состояния. Всякий раз, когда и давление, и плотность являются функциями только динамической высоты, мы говорим о баротропном состоянии, которое вполне характеризуется тем, что любая из трех величин — p , σ или χ — определяет две другие. Баротропное состояние удобно представить графически, если взять p и σ в качестве прямоугольных координат; на таком графике баротропное состояние изображается кривой, причем на последней можно указать и шкалу динамических высот (рис. 3).

Это составляет заметный контраст с общим случаем, в котором p , σ и χ — будут различными функциями пространственных координат и времени и на p, σ -диаграмме могут изменяться независимо друг от друга. Таким образом, небаротропное состояние будет изображаться на p, σ -диаграмме некоторой областью (площадью).

Во многих случаях p , η -диаграмма позволяет с большим удобством показать соотношения, существующие в переменном состоянии движения (см. § 47). Это соответствует практике применения диаграммы давление — потенциальная температура в метеорологии.

Градиенты. Уравнения (2.2) приводят к тождества

$$\begin{aligned} p'_0 &= -X_0 v'_0 + Y_0 \eta'_0, \\ \theta'_0 &= -Y_0 v'_0 + Z_0 \eta'_0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

которые нам часто будут нужны. Если воспользоваться уравнением (7.2), то первое из них примет вид

$$\eta'_0 = \frac{X_0 v'_0 - p_0 g}{Y_0}$$

или, после того как мы подставим выражения X_0 и Y_0 по формулам (2.3), —

$$\eta'_0 = \frac{a_0 c_0^2}{\gamma_0 - 1} \left(\frac{p'_0}{p_0} + \frac{g}{c_0^2} \right). \quad (7.4)$$

В силу уравнения (2.5)

$$\frac{a_0 c_0^2}{\gamma_0 - 1} = \frac{\gamma_0 C_{v0}}{a_0 \theta_0} = \frac{C_{p0}}{a_0 \theta_0} \quad (7.5)$$

— формула, которая часто более удобна.

Примерно тем же самым путем можно показать, что градиенты температуры и плотности связаны соотношением

$$\theta'_0 = -\frac{1}{a_0} \left(\frac{p'_0}{p_0} + \frac{\gamma_0 g}{c_0^2} \right), \quad (7.6)$$

а отсюда

$$\theta'_0 - \frac{\theta_0 \eta'_0}{C_{p0}} = -\frac{(\gamma_0 - 1)g}{a_0 c_0^2}. \quad (7.7)$$

Если градиент энтропии обращается в нуль, то говорят об адиабатической стратификации; в этом случае

$$\theta'_0 = -\frac{(\gamma_0 - 1)g}{a_0 c_0^2} = -\frac{g a_0 \theta_0}{C_{p0}} = -\theta'_{A'}. \quad (7.8)$$

Величина θ'_A называется адиабатическим градиентом температуры. Поэтому уравнение (7.7) можно вообще написать так

$$\eta'_0 = \frac{C_{p0}}{\theta_0} (\theta'_0 + \theta'_A). \quad (7.9)$$

§ 8. Состояния нулевого порядка идеального газа

Часто бывает желательно пользоваться моделью атмосферы, состоящей из идеального газа, так как воздух на малых высотах во многих отношениях ведет себя как идеальный газ. Число возможных состояний нулевого порядка бесконечно велико, но несколько частных случаев заслуживает упоминания.

Изотермическая атмосфера. Этот тип атмосферы послужил Лапласу в качестве примера в его „Небесной механике“ [4, т. II]. Барометрическое уравнение в этом случае интегрируется с результатом

$$p_0 = p_s \exp(-g\chi/R\theta_0), \quad (8.1)$$

где p_s — значение p_0 при $\chi = 0$, т. е. на поверхности твердой Земли. Закон Бойля—Мариотта дает

$$\rho_0 = \rho_s \exp(-g\chi/R\theta_0), \quad (8.2)$$

и уравнение энтропии принимает вид

$$\eta_0 = \frac{g\chi}{\theta_0} + \eta_s. \quad (8.3)$$

Отсюда градиент энтропии равен $\eta'_0 = g/\theta_0 = \text{const}$ и больше нуля. Величина

$$H = \frac{R\theta_0}{g} \quad (8.4)$$

в этом случае постоянна. Можно сказать, что она является характерной высотой для изотермической атмосферы¹. Ее значение приблизительно равно 8,0 км при 273° К и 8,6 км при 293° К.

¹ Это высота однородной атмосферы, т. е. такой, у которой плотность на всех высотах одна и та же, а давление на уровне моря равно давлению в действительной атмосфере. — *Прим. ред.*

Каждый из термодинамических коэффициентов имеет свою характерную зависимость от высоты:

$$\begin{aligned} X_0 &= X_s \exp(-2\chi/H), \\ Y_0 &= Y_s \exp(-\chi/H), \\ Z_0 &= Z_s. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Изэнтропическая (адиабатическая) атмосфера. Моделью атмосферы, в которой энтропия не зависит от высоты, пользовались многие авторы. Часто говорят, что к образованию такого состояния нулевого порядка приводит конвекция, но это весьма сомнительно¹.

Если ввести соотношение адиабатичности (закон адиабаты)

$$p_0 v_0^\gamma = \text{const} > 0 \quad (8.6)$$

в барометрическое уравнение, то в результате интегрирования получим

$$p_0^{1-\gamma/\gamma} = -b\chi + \text{const}, \quad b > 0. \quad (8.7)$$

Вместе с уравнением состояния и с барометрическим уравнением это дает

$$R\theta_0 = R\theta_s - b\chi, \quad (8.8)$$

где θ_s — поверхностная температура. Следовательно, абсолютная температура θ_0 делается равной нулю на высоте $R\theta_s/b$ и отрицательной на больших высотах. Мы видим, таким образом, что эта модель приводит к ненужным парадоксам.

Атмосфера с постоянным градиентом температуры. Если температура с высотой меняется линейно, то ее градиент может быть только положительным при условии, что мы не желаем допускать тех же самых парадоксов. Пусть

$$\theta_0 = \frac{g\chi}{Rv} + \theta_s, \quad (8.9)$$

где v — положительная постоянная. Для градиента температуры 1 град/км, $v = 34$. Характерная высота будет в таком

¹ Основания для такого утверждения остаются неясными. Общеизвестно, что интенсивное динамическое перемешивание в атмосфере приближает температурный градиент к адиабатическому. — *Прим. ред.*

случае линейной функцией χ

$$H = \frac{R\theta_0}{g} = \frac{\chi + \chi_s}{\gamma}, \quad (8.10)$$

где χ_s — положительная постоянная. На этом основании некоторые авторы вместо θ_0 или χ пользуются в своих уравнениях величиной H ; но, как мы увидим дальше, упрощение достигается только в одном этом примере.

Если воспользоваться уравнением (8.9), то интегрирование барометрического уравнения даст

$$\begin{aligned} p_0 &= p_s \left[\frac{\chi_s}{(\chi_s + \chi)} \right]^\gamma, \\ \rho_0 &= \rho_s \left[\frac{\chi_s}{(\chi_s + \chi)} \right]^{\gamma+1}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

и уравнение энтропии приобретает вид

$$\eta_0 = R \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right] \ln (\chi_s + \chi) + \text{const.} \quad (8.12)$$

Поэтому градиент энтропии обратно пропорционален $\chi + \chi_s$ или θ_0 :

$$\eta'_0 = \left[1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right] \frac{g}{\theta_0}.$$

Три термодинамических коэффициента имеют вид

$$\begin{aligned} X_0 &= X_s \left[\frac{\chi_s}{(\chi_s + \chi)} \right]^{2\gamma+1}, \\ Y_0 &= Y_s \left[\frac{\chi_s}{(\chi_s + \chi)} \right]^\gamma, \\ Z_0 &= Z_s \left[\frac{(\chi_s + \chi)}{\gamma_s} \right]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Общий случай. Барометрическое уравнение показывает, что в наиболее общем случае p_0 должно быть положительной монотонно убывающей функцией χ ; это приводит к уравнению

$$H = \frac{R\theta_0}{g} = - \frac{p_0}{p'_0}. \quad (8.14)$$

В действительной атмосфере (см. § 29) величина H не является монотонной функцией высоты и поэтому бесполезна в качестве координаты; она может служить просто мерой температуры.

Пользоваться же двумя единицами температуры нет никаких серьезных оснований, и поэтому характерная высота в последующих уравнениях применяться не будет.

Остальные термодинамические функции легко выразить через p_0 и p'_0 , но в явной форме они не понадобятся.

§ 9. Уравнения первого порядка

Рассмотрим дальше состояние жидкости, в котором

$$u = u_1, \quad v = v_0 + v_1, \quad p = p_0 + p_1, \text{ и т. д.}$$

Подстановка этих выражений в уравнения (2.1) и разложение в ряд Тэйлора дают следующие результаты:

$$\begin{aligned} p_1 &= -X_0 v_1 + Y_0 \eta_1 + \dots \\ \theta_1 &= -Y_0 v_1 + Z_0 \eta_1 + \dots, \end{aligned} \quad (9.1)$$

где точки указывают на члены более высоких степеней относительно v_1 , η_1 . Предположим, что u_1 , v_1 , p_1 в некотором смысле малы, так что законно пренебречь этими членами более высоких степеней.

Уравнения (5.1) — (5.3) также следует взять в приближенной форме, причем всюду нужно пренебречь членами второй и более высоких степеней малых величин. Так как u_1 мало, приращение какой-либо величины $w = w_0 + w_1 + \dots$ за счет адвекции будет равно

$$-u_1 \cdot \nabla w_0 = -w'_0 u_1 \cdot \nabla \chi = -w'_0 u_1 \cdot \zeta,$$

где $\zeta = \nabla \chi$. То же самое приближение дает

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w_1}{\partial t},$$

так как w_0 не зависит от t . Следовательно,

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w_1}{\partial t} + w'_0 u_1 \cdot \zeta + \dots$$

Важно заметить, что адвективные производные первого порядка пропорциональны градиентам нулевого порядка. Это как раз те члены, которые служат причиной того, что теория расслоенной (стратифицированной) жидкости отличается от теории однородной жидкости; поэтому все они должны быть сохранены в уравнениях первого порядка.

Если воспользоваться этим общим результатом, то уравнения (5.1) — (5.3) дают

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v_0 \nabla p_1 + v_1 p_0' \zeta + \Omega \times u_1 = f_1, \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0' u_1 \cdot \zeta - v_0 \nabla \cdot u_1 = 0, \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \eta_0' u_1 \cdot \zeta = \frac{q_1}{\theta_0}. \quad (9.4)$$

Воспользовавшись уравнениями (7.3) и (9.1), найдем затем, что

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + p_0' u_1 \cdot \zeta + X_0 v_0 \nabla \cdot u_1 = \frac{Y_0 q_1}{\theta_0}, \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \theta_0' u_1 \cdot \zeta + Y_0 v_0 \nabla \cdot u_1 = \frac{Z_0 q_1}{\theta_0}, \quad (9.6)$$

Это — уравнения движения первого порядка; из последних четырех уравнений независимыми являются только два. Обычно удобно работать с уравнениями (9.2), (9.4), (9.5), хотя уравнения (9.2) — (9.4) в отдельных случаях могут иметь перед ними некоторое преимущество (гл. III).

Интерпретация. Интерпретация уравнений (9.2) — (9.4) ясна: они выражают соответственно ньютоновский закон движения, сохранение массы и второй закон термодинамики. В каждом случае, конечно, членами второго порядка мы пренебрегаем. Уравнения (9.5), (9.6) являются производными и не имеют аналогичной простой интерпретации.

Если мы воспользуемся уравнениями (2.3) и (2.5), то сможем переписать уравнение (9.5) следующим образом:

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial t} + p_0' u_1 \cdot \zeta \right) + \nabla \cdot u_1 = \frac{a_0 q_1}{C_{p0}}. \quad (9.7)$$

Если нагревание происходит при постоянном давлении, то величина q_1/C_{p0} равна скорости увеличения температуры частицы жидкости. Следовательно, $a_0 q_1/C_{p0}$ при этих же условиях измеряет увеличение удельного объема. Множитель $K_d = 1/\rho_0 c_0^2$ следует понимать как адиабатическую сжимаемость, а выражение в скобках является величиной Dp/Dt .

Таким образом, это уравнение выражает тот факт, что дивергенция скорости равна тепловому расширению за вычетом некоторой величины сжатия.

Аналогично уравнение (9.6) можно написать так:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \theta'_0 \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\zeta} + \frac{\gamma_0 - 1}{a_0} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = \frac{q_1}{C_{v0}}. \quad (9.8)$$

Если нагревание происходит при постоянном объеме, то правая часть этого уравнения будет скоростью увеличения температуры; $(\gamma_0 - 1) \nabla \cdot \mathbf{u}_1 / a_0$ — скорость охлаждения вследствие расширения. Это дает необходимую интерпретацию последнего уравнения.

Вертикальное смещение. Уравнению (9.4) можно придать другую форму, если ввести вертикальное смещение h жидкости из ее положения нулевого порядка. Эта величина удовлетворяет уравнению

$$\frac{Dh}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\zeta}. \quad (9.9)$$

По определению $h_0 = 0$, так что $h = h_1 + \dots$ и первым приближением для уравнения (9.9) будет

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\zeta}. \quad (9.10)$$

Отсюда уравнение (9.4) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta_1 + h_1 \eta'_0) = \frac{q_1}{\theta_0} \quad (9.11)$$

и указывает на тесную связь между нагреванием и вертикальным смещением. Явления, которые при этом происходят, называются конвекцией. Если приток тепла равен нулю, то интегрирование уравнения (9.11) дает

$$\eta_1 = -h_1 \eta'_0 \quad (9.12)$$

— уравнение, которое будет полезно ниже.

§ 10. Аддитивные баротропные члены

Уравнения первого порядка весьма сложны, и решение их является трудной задачей. Однако они имеют одно очень простое решение, которое является тривиальным с точки зрения физики, но имеет значительный практический интерес.

Это — статическое решение, для которого u_1 , f_1 , q_1 и все производные по времени обращаются в нуль. Как и в случае точных уравнений, все уравнения первого порядка обращаются в тождества, за исключением первого. Это уравнение приводится к следующему:

$$v_0 \nabla p_1 - v_1 p'_0 \zeta = 0. \quad (10.1)$$

Поскольку

$$\frac{v_1}{v_0} = - \frac{p_1}{p_0}, \quad (10.2)$$

уравнение (10.1) эквивалентно уравнению

$$\nabla p_1 + \frac{p_1 p'_0}{p_0} \zeta = 0. \quad (10.3)$$

Кроме того,

$$p'_0 = - \rho_0 g, \quad (10.4)$$

так что

$$\nabla p_1 = \rho_1 g \nabla \chi. \quad (10.5)$$

что формально совпадает с уравнением нулевого порядка и удовлетворяется, когда p_1 будет произвольной функцией динамической высоты и

$$\rho_1 = - \frac{p'_1}{g}. \quad (10.6)$$

Это снова уравнение гидростатики. Если воспользоваться уравнением (9.1), то становится ясным, что не только p_1 и v_1 , но также θ_1 и η_1 определяются, когда задано $p_1(\chi)$.

Кроме того, распределение термодинамических параметров снова является баротропным. Это статическое решение представляет собой всего лишь модификацию состояния нулевого порядка.

Предположим теперь, что найдено какое-либо решение уравнений первого порядка. Так как эти уравнения линейные, мы получим некоторое другое решение, прибавив к первому произвольное только что рассмотренное баротропное решение. Это баротропное решение во многом играет ту же роль, что и аддитивная постоянная интегрирования, и часто так же важно, как эта постоянная. В других случаях аддитивные

баротропные члены, опять-таки по аналогии с постоянной интегрирования, можно произвольно положить равными нулю, при этом без существенной потери общности.

§ 11. Граничные условия

Не всякое решение уравнений первого порядка будет приемлемо, так как жидкость, вообще говоря, имеет границы. Эти границы могут быть твердыми поверхностями, такими, как граница соприкосновения воздуха с земной поверхностью, или свободными поверхностями, такими, как граница раздела воздуха и моря. Идеализируя, можно представлять себе твердые поверхности как абсолютно твердые; если n — единичная нормаль к такой поверхности, то в каждой ее точке

$$n \cdot u_1 = 0. \quad (11.1)$$

Поверхность раздела воздуха и моря для наших целей можно идеализировать, предположив, что атмосферное давление постоянно во всех ее точках. Однако это утверждение будет относиться только к воде; в дальнейшем мы не будем рассматривать вопрос о воздухе над морем. Таким образом, в нулевом приближении свободная поверхность океана будет поверхностью уровня — скажем, поверхностью $\chi = 0$. В первом приближении уравнение свободной поверхности будет

$$p = p_0 + p_1 = \text{const.} \quad (11.2)$$

Должно быть выполнено, однако, и другое, не менее важное условие. Свободная поверхность должна перемещаться вместе с жидкостью, а не самостоятельно. Это [3] можно формулировать так:

$$\frac{Dp}{Dt} = 0 \text{ на свободной поверхности.} \quad (11.3)$$

Если сохранить только члены первого порядка, то это соотношение примет вид

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0' u_1 \cdot \zeta = 0 \quad \text{при} \quad \chi = 0$$

или, в силу уравнения гидростатики,

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \rho_0 g u_1 \cdot \zeta \quad \text{при} \quad \chi = 0. \quad (11.4)$$

Вводя вертикальное смещение, согласно уравнению (9.10), преобразуем наше последнее уравнение таким образом:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \rho_0 g \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad \text{при} \quad \chi = 0$$

или, после интегрирования,

$$p_1 = \rho_s g h_1 \quad \text{при} \quad \chi = 0. \quad (11.5)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bjerknes V., Bjerknes J., Solberg H., Bergeron T., *Physikalische Hydrodynamik*, Berlin, Springer, 1933.
2. Eckart C., Ferris H. G., Equations of motion of the ocean and atmosphere, *Rev. Modern. Phys.*, 28, 48—52 (1956).
3. Lamb H., *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 6th ed., 1932. (Русский перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М.—Л., 1947.)
4. Laplace P. S. *Mécanique Céleste*, 4 vols., trans. by N. Bowditch, Boston, 1832.

Глава III

УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 12. Введение

Решения уравнений первого порядка будут вообще описывать движения, изменяющиеся во времени; но эти уравнения имеют также частные решения, характеризующие установившиеся состояния. Удобно начать с изучения этих стационарных решений, для которых все производные по времени равны нулю, но любая величина, такая, как скорость или давление, может изменяться в пространстве.

Возникает вопрос, представляют ли такие решения вообще какой-либо интерес, поскольку именно временные и притом сложные изменения, наблюдаемые в атмосфере, а также и в океанах, в первую очередь привлекают наше внимание. Это происходит до некоторой степени благодаря чувствительности человеческого тела. Так, изменение температуры или давления атмосферы всего на десять процентов оказывает несомненно большое влияние на самочувствие человека. При менее субъективном рассмотрении этих вопросов скорее можно было бы убедиться именно в малой величине отклонений от установившегося состояния: почти все они лежат ниже уровня в 10%. Единственным исключением является скорость ветра, но и она почти всегда составляет малую долю скорости звука и на этом основании может рассматриваться как малая.

Среднее давление. Если усреднять за некоторое число лет какую-нибудь переменную характеристику атмосферы — такую, как ветер или давление, — то, очевидно, мы получим величину, зависящую лишь от географических координат, но постоянную во времени (рис. 4). Эту величину удобно называть стационарной компонентой изучаемой характеристики поля; в силу линейности уравнений первого порядка ее можно рассматривать независимо от других составляющих, которые меняются с течением времени.

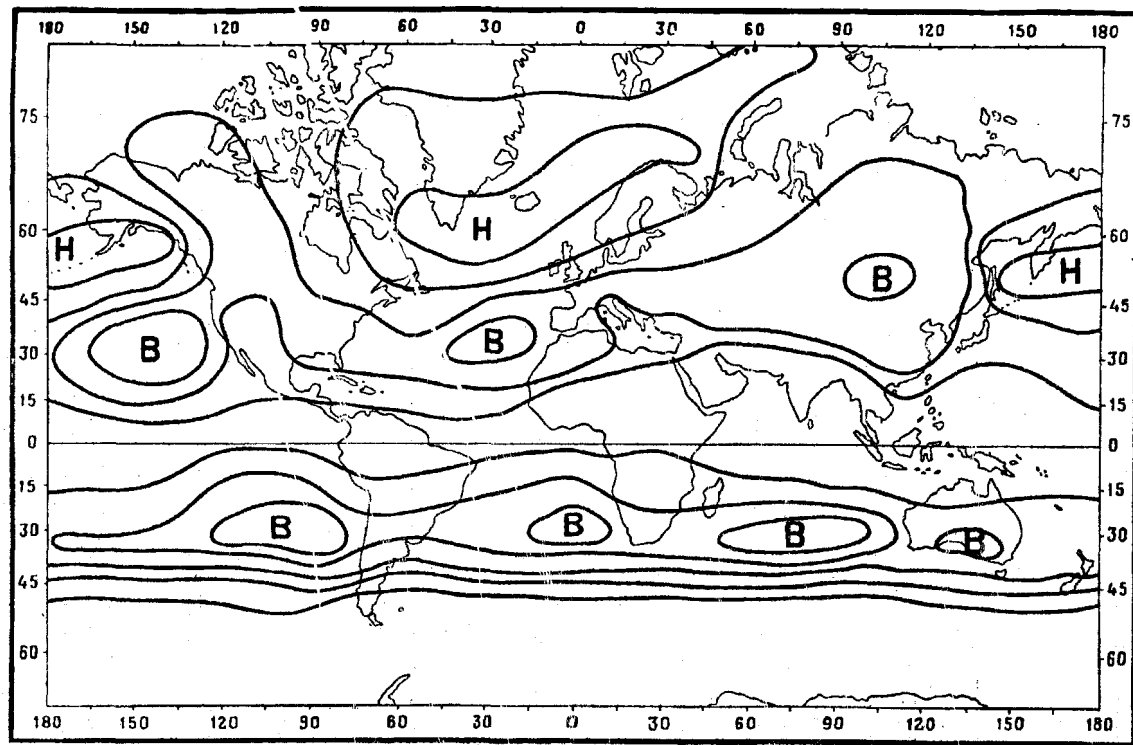


Рис. 4. Среднее давление атмосферы на уровне моря. Расстояние между изобарами 3 мб.

Стационарную компоненту барического поля можно далее разложить на три составляющие

$$p = p_0(\chi) + p_z(\varphi, \chi) + p_T(\lambda, \varphi, \chi),$$

где χ — высота, φ — широта и λ — долгота. Первая из этих составляющих — баротропная, и ее можно отождествить с введенным ранее давлением нулевого порядка. Вторая зависит только от широты и высоты; ее можно назвать *зональной составляющей*. Третья зависит от всех координат и может быть названа *незональной составляющей*.

Зональная составляющая. На рис. 4 показаны значения давления p на уровне моря. Усредняя их по долготе, мы получим сумму $p_0 + p_z$. Из оснований, которые станут ясны

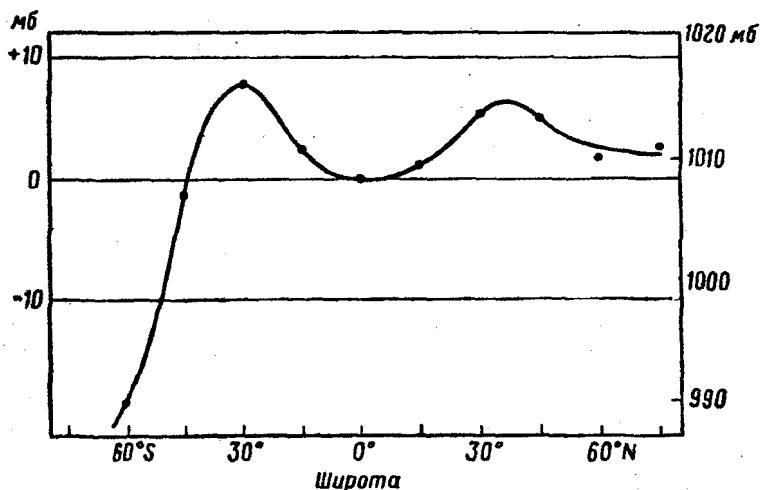


Рис. 5. Зональная составляющая среднего давления атмосферы на уровне моря.

позднее, удобно определить p_z так, чтобы оно обращалось в нуль на экваторе: тогда мы найдем, что $p_0 = 1010$ мб на уровне моря. Рис. 5 показывает значения зональной составляющей на уровне моря. Мы видим, что она имеет ясно выраженный минимум на экваторе или вблизи экватора и становится отрицательной приблизительно на широте мыса

Горн. Численное значение зональной составляющей не превосходит 1% от p_0 всюду, кроме широт Антарктиды. Такая малая пропорция вообще сохраняется на большинстве высот, и это служит оправданием для трактовки зональной составляющей как возмущения баротропной, т. е. составляющей нулевого порядка $p_0(\chi)$.

Общий ход изменения, показанный на рис. 5, несомненно правилен, но в то же время следует иметь в виду и возможные ошибки наблюдений. Пункты наблюдения по Земле распределены не наилучшим образом, и весьма немногочисленны для областей, занятых океанами. Следовательно, некоторые черты полученной картины (например, кривизна графика на экваторе) в количественном отношении могут быть неточными.

Незональная составляющая. Рис. 6 показывает значения на уровне моря для незональной составляющей, полученные из графика рис. 4 путем вычитания $p_0 + p_z$. На большей части земной поверхности значение незональной составляющей не превышает 0,5% от p_0 , и поэтому ее также можно рассматривать как возмущение. Вдоль экватора ее значения отличаются от нуля — если они вообще не равны нулю — немногим больше, чем возможные ошибки наблюдения. В более высоких широтах в распределении незональной составляющей выделяются области высокого и низкого давления. Надо думать, что общее расположение последних представлено достаточно точно, хотя на их очертания, конечно, влияют довольно значительные ошибки в данных наблюдений и в их анализе.

Два континентальных барических максимума, над Северной Америкой и над Азией, на многих картах замаскированы не только большим зональным градиентом, но также большими сезонными и другими изменениями. Океанские максимумы более заметны и связаны с пассатами. Все эти области высокого давления расположены приблизительно вдоль трех кругов широты и разделены областями низкого давления примерно на тех же самых широтах. Особенно бросается в глаза асимметрия северного и южного полушарий, которая настолько велика, что ее едва ли можно приписать ошибкам наблюдения; вероятнее всего, она является отражением асимметрии в расположении континентов.

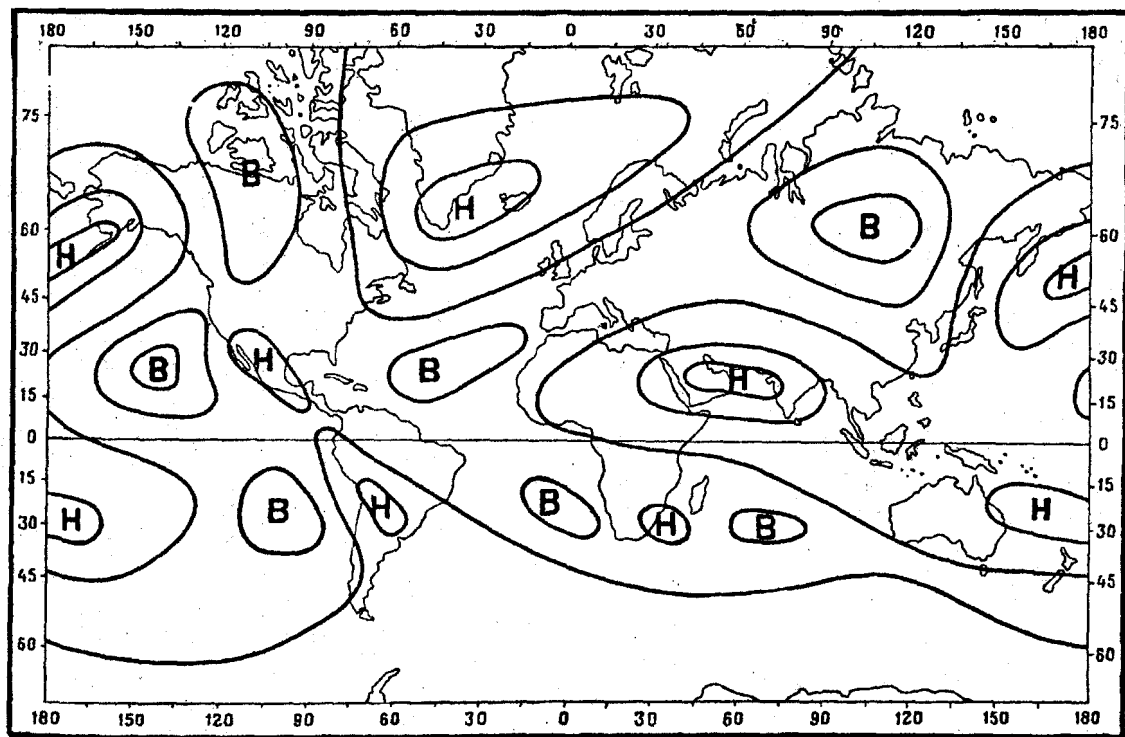


Рис. 6. Незональная составляющая среднего давления атмосферы на уровне моря.

На рис. 4—6 приведены данные только для уровня моря. Подобные же карты можно построить и для больших высот. В стратосфере поразительное явление представляет собой сильный зональный ветер в средних широтах, носящий название струйных течений. Он связан со сравнительно большим градиентом зонального давления. В связи с этим можно было бы высказать пожелание включить зональную составляющую в решение нулевого порядка и не рассматривать ее как возмущение. Это, однако, сильно усложнило бы не только последующие, но также и предыдущие главы. В настоящей книге возможности этого второго метода расчета изучаться не будут.

Океаны. Если перейти от атмосферы к океанам, то здесь мы также найдем стационарные компоненты скорости и давления. Наиболее известные из них — системы течений Гольфстрима и Куроисио-Оясио. Анализ таких вопросов для океанов менее прост, чем анализ соответствующих вопросов для атмосферы. Поэтому данная глава будет посвящена главным образом изучению описанных выше явлений в атмосфере.

Атмосфера и океаны как тепловая машина. Обычно предполагают, что причиной всех движений в системе океан — атмосфера служит превращение солнечной радиации в кинетическую энергию. Иногда это высказывают в форме утверждения, что данная система является тепловой машиной, однако подобная аналогия может быть обманчивой. Обычное определение тепловой машины охватывает системы, которые совершают работу над внешней средой. Если пренебречь такими незначительными явлениями, как эрозия, случайное уничтожение деревьев и созданных человеком сооружений, то представляется, что система атмосфера — океан не совершает в среднем никакой внешней работы. Между твердой Землей и ее жидкой оболочкой имеется сезонный обмен моментом количества движения. Доказательством этого является сезонное изменение длины суток; участвующее здесь количество энергии мало и в среднем за период нескольких лет стремится к нулю. Поэтому наиболее разумно предположить, что с точностью до величины первого порядка система атмосфера — океан не совершает внешней работы и в этом

отношении сильно отличается от создаваемых человеком тепловых машин.

В каждой тепловой машине происходят необратимые тепловые процессы, которые создают энтропию. Наиболее обычные из них — трение (или вязкость) и теплопроводность. Простые вычисления показывают, что для крупномасштабных движений как в океане, так и в атмосфере ими можно полностью пренебречь. Необратимая сторона явлений несущественна даже в турбулентных пограничных слоях¹⁾. Разумно поэтому предположить (опять-таки с точностью величин первого порядка), что система атмосфера — океан будет обратимой в термодинамическом смысле термина. Это означает только то, что система с точностью до указанного приближения не создает энтропии.

Однако это не значит, что не существует тех явлений, которые довольно неопределенно описываются выражением „турбулентная диссипация“ и которые также необратимы, но совсем в ином смысле. Можно различать два вида нетермодинамической необратимости. Первый иногда называют „расползанием волновых пакетов“; он встречается всюду, где скорость простых волн в среде является функцией частоты, т. е. имеется явление дисперсии. Основы трактовки этих явлений будут изложены в последующих главах. Второй вид нетермодинамической необратимости возникает вследствие взаимодействия между двумя собственными решениями, обусловленного как нелинейностью основных уравнений, так и „шероховатостью“ границ. Рассмотрение этого механизма турбулентной диссипации целиком выходит за рамки этой книги.

Предыдущие гипотезы предполагают, что $f_1 = 0$; во втором и в более высоких порядках могут иметься силы, которые не включены в левые части уравнений гидродинамики. В тех же гипотезах содержится некоторое утверждение, относящееся к притоку тепла q_1 . В § 5 уже было отмечено, что первичной причиной нагревания атмосферы является баланс между поглощаемой солнечной радиацией и инфракрасной радиацией, испускаемой атмосферой. Движение атмосферы безусловно влияет на эти процессы, однако взаимодействие между радиационными и механическими процессами является, по-видимому, слабым.

¹⁾ С этим вряд ли можно согласиться. — *Прим. ред.*

Вместе с тем соответствующий „механизм обратной связи“ является, несомненно, очень сложным; этот механизм до сих пор еще не понят, даже в наиболее общих его чертах. Можно сказать почти наверное, что наличие обратной связи (влияние динамики атмосферы на радиационные процессы) служит одной из главных причин (а возможно, и единственной) „климатической неустойчивости“, о которой свидетельствуют геологические и антропологические данные. Если же отвлечься от возможных изменений климата, то нет необходимости заботиться о деталях процесса. Вместо этого можно обратиться к наблюдениям и вычислить из них результат этой связи.

Наблюдение дает простой ответ: если пренебречь изменением климата, то в движении атмосферы налицо будет только стационарная компонента. Теория должна ответить на следующий вопрос: каким ограничениям должна удовлетворять стационарная компонента притока тепла q_1 , чтобы могла существовать такая же стационарная компонента в атмосферных движениях?

Следует принять, что упомянутые выше сложные процессы в целом протекают так, что они обеспечивают необходимый приток тепла в соответствии с условием стационарности режима.

Уравнения. В связи с предыдущим исследование установившихся движений безусловно не лишено смысла, и эта глава будет посвящена именно этим движениям. Она будет основываться на уравнениях (9.2) — (9.4), после того как мы упростим их, приравняв к нулю все производные по времени. Эти уравнения приведутся тогда к следующим:

$$\nabla p_1 + \rho_1 g \zeta + \rho_0 \Omega \times u_1 = \rho_0 f_1. \quad (12.1)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 u_1) = 0, \quad (12.2)$$

$$\eta'_0 u_1 \cdot \zeta = \frac{q_1}{\theta_0}. \quad (12.3)$$

Это уравнения первого порядка для установившегося движения. Если $f_1 = 0$ и $q_1 = 0$, то движение будет „свободным“; если $f_1 = 0$, но $q_1 \neq 0$, движение „чисто конвективное“. Ниже будут рассматриваться только два этих случая, хотя можно было бы трактовать и вынужденную конвекцию, сделав определенные предположения относительно силы f_1 .

§ 13. Свободное установившееся движение без вращения

Пример простейших задач дает свободное движение без силы Кориолиса. В этом случае нужно решать следующие уравнения:

$$\nabla p_1 + \rho_1 g \zeta = 0, \quad (13.1)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_1) = 0, \quad (13.2)$$

$$\eta'_0 \mathbf{u}_1 \cdot \zeta = 0. \quad (13.3)$$

Первое из этих уравнений не зависит от скорости и позволяет получить только аддитивные баротропные члены, которые уже рассматривались в § 10. В дальнейшем будем ими пренебрегать.

Уравнение (13.3) распадается на два уравнения соответственно двум множителям: $\eta'_0 = 0$ и $\mathbf{u}_1 \cdot \zeta = 0$. Первый случай может иметь место при изэнтропической стратификации и будет рассмотрен в § 28. Во втором случае уравнения (13.2) и (13.3) приводятся к следующим:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (13.4)$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \zeta = 0. \quad (13.5)$$

Движение, таким образом, чисто горизонтальное, но зависит и от высоты χ .

Общее решение уравнений (13.4) и (13.5) будет следующим:

$$\mathbf{u}_1 = \nabla \times (\chi \nabla \psi) = \nabla \chi \times \nabla \psi = \zeta \times \nabla \psi, \quad (13.6)$$

где ψ — функция тока. Часто удобно воспользоваться обозначением

$$\mathbf{M} = \zeta \times \nabla. \quad (13.7)$$

Плоские поверхности уровня. В этом случае $\zeta = \mathbf{k}$ и $\chi = z$, так что

$$\mathbf{M} = -i \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial x},$$

и если

$$\mathbf{u}_1 = i u_{1x} + j u_{1y} + k u_{1z}.$$

то уравнение (13.6) сведется к соотношениям

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u_z = 0. \quad (13.8)$$

Уравнения линий тока будут

$$\psi(x, y, z) = a, \quad z = b, \quad (13.9)$$

где a и b — постоянные. Линии тока — кривые, лежащие на плоских поверхностях уровня; ни одна из них не пересекает другую, и исключением являются только точки остановки.

Линии тока должны быть касательными ко всякой стационарной границе; а так как они не пересекаются, уравнения (13.9) должны для некоторых значений a и b давать очертания границы. В простейшем случае границ, совмещающихся с некоторыми поверхностями уровня, это не налагает никакого условия на функцию тока. Пусть, более общо, нижняя граница океанов или атмосферы выражается уравнением

$$z = B(x, y). \quad (13.10)$$

Тогда, если функция тока — аналитическая функция z , то она должна иметь форму

$$\psi(x, y, z) = F[B(x, y), z] + [B(x, y) - z]^n G(x, y), \quad (13.11)$$

где F и G — неопределенные функции и $n > 0$ ¹. Вблизи границы в определении движения будет доминировать функция F . Вне пограничного слоя доминирующей будет функция G ; толщина пограничного слоя будет определяться одновременно и функциями F , G и показателем n . Внутри пограничного слоя движение описывается простым образом: если на контурах, расположенных на дне океанов или атмосферы, построить цилиндры с вертикальными осями, то линии тока будут горизонтальными сечениями этих цилиндров. Короче говоря, эти цилиндры являются поверхностями тока. Такое движение было названо „батистрофическим“ [4]. Вне пограничного слоя второй член влияет таким образом, что движение более слабо зависит от очертаний дна.

¹ Утверждение автора слишком категорично. Формула (13.11) описывает нужный тип движений, но обратное утверждение не очевидно и, по-видимому, неправильно. — *Прим. ред.*

Сферические поверхности уровня. Если $\chi = r - r_s$ (см. § 5), то поверхностями уровня будут сферы, и здесь удобно воспользоваться меркаторскими координатами. В этом случае

$$M = \frac{\text{ch } \mu}{r} \left(-\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mu} + \gamma \frac{\partial}{\partial \lambda} \right),$$

$$u_1 = \varepsilon u_\varepsilon + \gamma u_\gamma + \zeta u_\zeta,$$

где λ — долгота, μ — параметр, связанный с широтой φ соотношением

$$\text{ch } \mu = \frac{1}{\cos \varphi}$$

(подробнее см. приложение), и уравнение (13.6) имеет вид

$$u_\varepsilon = -\frac{\text{ch } \mu}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \quad u_\gamma = \frac{\text{ch } \mu}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad u_\zeta = 0. \quad (13.12)$$

Близкая аналогия между уравнениями (13.8) и (13.12) связана с применением меркаторских координат. Множитель $1/r$ можно, если это желательно, ввести в функцию ψ , но сделать то же с множителем $\text{ch } \mu$, не нарушая аналогии, нельзя.

Чтобы скорость не становилась бесконечно большой на полюсах, там должны обращаться в нуль производные от ψ по μ и λ . В остальном про функцию тока можно сказать то же самое, что и в случае плоских поверхностей уровня.

§ 14. Нестационарность во втором приближении. Вековое уравнение

Мы не намерены давать в этой книге исчерпывающее рассмотрение явлений второго порядка, но, чтобы не допустить ошибочных выводов, необходимо несколько остановиться и на этих явлениях. Пусть вообще

$$p = p_0 + p_1 + p_2 \dots$$

$$p = p_0 + p_1 + p_2 \dots$$

$$u = u_1 + u_2 \dots \text{ и т. д.}$$

В § 7 было принято, что p_0 и p_0 не зависят от времени; в последнем параграфе p_1 , p_1 и u_1 были определены также не зависящими от времени.

Не следует думать, что из этих двух допущений вытекает, что p_2 , p_2 , u_2 также элементы установившегося движения. На самом деле мы покажем, что это будет третьим допущением и что оно налагает некоторые новые ограничения в дополнение к тем, которые налагаются первыми двумя допущениями. Таким образом, удобно различать понятия стационарности движения в нулевом, первом и втором порядке. Если от свободного движения потребовать, чтобы оно было стационарным также и во втором порядке, то уравнения

$$v_0 \nabla p_2 + v_2 p_0' \zeta = -u_1 \cdot \nabla u_1 - v_1 \nabla p_1, \quad (14.1)$$

$$v_0' u_2 \cdot \zeta - v_0 \nabla \cdot u_2 = -u_1 \cdot \nabla v_1 + v_1 \nabla \cdot u_1, \quad (14.2)$$

$$\eta_0' u_2 \cdot \zeta = -u_1 \cdot \nabla \eta_1 \quad (14.3)$$

можно получить с помощью соображений, аналогичных тем, которые развиты в § 9.

Опять-таки показательно, что в уравнение (14.1) входят только v_2 и p_2 , но не входит u_2 . Если величины нулевого и первого порядка трактовать как известные, то уравнение (14.1) содержит как раз два скалярных неизвестных. Так как векторное уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям, то число уравнений, таким образом, больше числа неизвестных. Но мы как раз видели, что $p_1(\chi)$ и $\psi(x, y, z)$ — произвольны. Их можно поэтому рассматривать как два дополнительных скалярных неизвестных, а это дает четыре неизвестных и три уравнения, что в математическом отношении значительно более удобно.

Вековые уравнения. Аналогичная ситуация очень часто встречается в применении метода возмущений и к обыкновенным дифференциальным уравнениям и к уравнениям в частных производных. Она может быть описана следующим образом: общее решение уравнений первого порядка содержит произвольные элементы (постоянные интегрирования или произвольные функции). Уравнения второго порядка часто являются излишними, если только мы не будем рассматривать в качестве неизвестных произвольные элементы первого порядка. В таких случаях можно исключить переменные второго порядка и получить уравнение (или несколько уравнений), в которых встречаются только величины первого

порядка. Такие уравнения в одном смысле являются уравнениями второго порядка, так как они могут быть выведены лишь из рассмотрения членов второго порядка. В другом смысле они — уравнения первого порядка, так как не содержат членов второго порядка. Часто они квадратичные или по крайней мере нелинейные. Для удобства их можно назвать вековыми уравнениями, хотя это несколько расширяет общепринятый смысл термина.

В остальной части этого параграфа мы будем предполагать, что поверхности уровня плоские. Воспользовавшись обозначением предыдущего параграфа, мы можем написать

$$u_1 \cdot \nabla = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (14.4)$$

и уравнение (14.1) приобретает вид

$$v_0 \frac{\partial p_2}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (14.5)$$

$$v_0 \frac{\partial p_2}{\partial y} = +\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (14.6)$$

$$v_0 \frac{\partial p_2}{\partial z} - \rho_0 g v_2 = v_1 p_1 g. \quad (14.7)$$

При этом мы воспользовались соотношениями $p'_0 = -\rho_0 g$, $p'_1 = -\rho_1 g$. Здесь сразу же видно, что уравнения (14.5) и (14.6) содержат только p_2 и ψ и могут трактоваться независимо от уравнения (14.7). Так как v_0 зависит только от z , величину p_2 можно исключить перекрестным дифференцированием по x и по y . Это дает вековое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Оно квадратичное, но содержит только одно неизвестное — функцию тока первого порядка. Предположение о том, что движение является установившимся во втором порядке, налагает, следовательно, это новое условие на движение первого порядка. Если оно не удовлетворено, то движение на самом деле будет лишь приближенно установившимся; эти изменения принято называть вековыми изменениями; обычно они

являются в некотором смысле медленными. Таким образом, мы видим, что движения, установившиеся в первом порядке, часто могут быть неустановившимися при учете эффектов второго порядка.

Связь с теоремой о вихре. Вековому уравнению можно придать другую форму. После выполнения указанных в нем дифференцирований уравнение (14.8) принимает вид

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)=0. \quad (14.9)$$

Но из уравнения (13.8) следует, что

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}=\tilde{\omega} \quad (14.10)$$

есть вихрь потока и что

$$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)=u_1\cdot\nabla=\frac{D}{Dt}. \quad (14.11)$$

Отсюда уравнение (14.9) примет форму

$$\frac{D\tilde{\omega}}{Dt}=0. \quad (14.12)$$

Это уравнение означает, что вихрь каждой частицы жидкости остается постоянным во время ее движения. Это — частная и приближенная форма общих теорем, доказанных Гельмгольцем и В. Бьеркнесом [2, гл. IV; 5, гл. VII].

Важно заметить, что эта теорема относится к вековому уравнению, но не к самим уравнениям первого порядка.

Первый интеграл векового уравнения. Уравнение (14.9) можно сразу же проинтегрировать. Это дает

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\tilde{\omega}(\psi, z), \quad (14.13)$$

где вихрь $\tilde{\omega}$ является некоторой произвольной дифференцируемой функцией ее аргументов. В силу произвольности $\tilde{\omega}$ уравнение (14.13) налагает лишь слабые ограничения на функцию тока ψ . Можно найти многочисленные частные решения уравнения, хотя его общее решение не может быть написано. Легко указать численные методы его решения.

Связь с теоремой Бернулли. Уравнение (14.5) можно написать следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_2}{\partial x} &= -\rho_0(z) \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] = \\ &= -\rho_0(z) \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \tilde{\omega}(\psi, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right].\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно преобразовать уравнение (14.6). Полученные уравнения можно сразу же проинтегрировать, что дает

$$p_2 = -\rho_0 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \int \tilde{\omega}(\psi, z) d\psi \right\} \quad (14.14)$$

или

$$\frac{1}{2} \rho_0 u_1^2 + p_2 = \rho_0 \int \tilde{\omega}(\psi, z) d\psi. \quad (14.15)$$

Это уравнение определяет p_2 , если были фиксированы ψ и $\tilde{\omega}$; в этом случае v_2 сразу же определяется из уравнения (14.7).

Уравнение (14.15) будет пониматься как приближенная форма теоремы Бернулли [6]; это уравнение опять является следствием не уравнений первого порядка, а уравнений второго порядка. Связь между вихрем и теоремой Бернулли очень важна.

§ 15. Свободное установившееся движение с вращением

Если ввести силу Кориолиса¹, то уравнения первого порядка для свободного движения будут иметь форму

$$\nabla p_1 + \rho_1 g \zeta + \rho_0 \Omega \times u_1 = 0, \quad (15.1)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 u_1) = 0, \quad (15.2)$$

$$\eta'_0 u_1 \cdot \zeta = 0. \quad (15.3)$$

Уравнение геострофичности. Как и выше, здесь будет предполагаться, что $\eta'_0 > 0$, $u_1 \cdot \zeta = 0$. В этом случае в уравнение (15.1) входит как u_1 , так и p_1 и ρ_1 ; второе из этих

¹ Сила Кориолиса должна вводиться, как известно, при рассмотрении процессов во вращающейся системе координат. Последнее целесообразно, если в нулевом приближении поле скоростей описывается как вращение твердого тела, обладающее вихрем $\Omega = 2\omega$.—*Прим. ред.*

переменных можно исключить, умножив векторно каждый член на ζ

$$\zeta \times \nabla p_1 + \rho_0 \zeta \times (\Omega \times u_1) = 0. \quad (15.4)$$

Последний член левой части можно преобразовать следующим образом:

$$\zeta \times (\Omega \times u_1) = \Omega (\zeta \cdot u_1) - (\zeta \cdot \Omega) u_1; \quad (15.5)$$

это можно упростить, так как $\zeta \cdot u_1 = 0$. В результате уравнение (15.4) приведет к следующему:

$$u_1 = \frac{M p_1}{\rho_0 \Omega \cdot \zeta}. \quad (15.6)$$

Это хорошо известное уравнение геострофичности позволяет вычислить скорость, когда известно p_1 . Оно означает, что линии тока лежат на изобарических поверхностях и направление движения вдоль них таково, что в северном полушарии более высокое давление находится справа, если представить себе, что мы идем по изобаре в направлении течения.

Соотношение между плотностью и давлением. Аналогично скалярное умножение на Ω исключает u_1 из уравнения (15.1) и приводит к формуле

$$\rho_1 g = - \frac{\Omega \cdot \nabla p_1}{\Omega \cdot \zeta}, \quad (15.7)$$

которая позволяет вычислить ρ_1 из p_1 .

Планетарный вихрь. Остается рассмотреть уравнение (15.2); подстановка из уравнения геострофичности (15.6) превращает его в уравнение

$$\nabla \cdot \{(\zeta \times \nabla p_1) / \Omega \cdot \zeta\} = 0, \quad (15.8)$$

которое является уравнением только для p_1 . Это уравнение можно сильно упростить. Заметим, что, как и в уравнении (13.6),

$$\zeta \times \nabla p_1 = \nabla \chi \times \nabla p_1 = \nabla \times (\chi \nabla p_1)$$

и что дивергенция от ротора равна нулю. Таким образом, числитель в фигурных скобках в уравнении (15.8) при выполнении указанного дифференцирования можно рассматривать как постоянную, и поэтому

$$(\zeta \times \nabla p_1) \cdot \nabla (\Omega \cdot \zeta) = 0.$$

Наконец, введем вектор

$$\begin{aligned}\beta &= -\zeta \times \nabla(\Omega \cdot \zeta) = \\ &= \nabla \times (\Omega \cdot \zeta) \zeta = \\ &= -M(\Omega \cdot \zeta),\end{aligned}\quad (15.9)$$

после чего уравнение (15.8) можно написать так:

$$\beta \cdot \nabla p_1 = 0. \quad (15.10)$$

Вектор β был назван планетарным вихрем, и последнее уравнение показывает, что, если β не обращается в нуль, градиент давления должен быть перпендикулярен к планетарному вихрю¹.

Плоские поверхности уровня. Если поверхности уровня — плоскости, то координатную систему можно выбрать так, чтобы Ω лежало в плоскости (y, z) . В этом случае

$$\begin{aligned}\zeta &= k, \\ \Omega &= \Omega_H j + \Omega_V k,\end{aligned}$$

и из уравнения (15.6) мы получим

$$\begin{aligned}u_x &= -\frac{1}{\rho_0 \Omega_V} \frac{\partial p_1}{\partial y}, \\ u_y &= +\frac{1}{\rho_0 \Omega_V} \frac{\partial p_1}{\partial x}.\end{aligned}\quad (15.11)$$

Интересно отметить, что в эти уравнения входит только вертикальная компонента угловой скорости Ω_V ; в дальнейших параграфах мы увидим, что в аналогичные уравнения входит также и горизонтальная компонента.

Уравнение (15.7) принимает вид

$$p_1 g = -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\Omega_H}{\Omega_V} \frac{\partial p_1}{\partial y} \quad (15.12)$$

¹ Терминология автора представляется несколько искусственной, так как обычно планетарным вихрем называют сам вектор Ω . Мы, однако, не сочли возможным вводить новое название для вектора β и ограничимся этим замечанием. — *Прим. ред.*

и в этой форме отличается от уравнения гидростатики только за счет последнего члена. Но и в атмосфере, и в океанах

$$\left| \frac{\partial p_1}{\partial y} \right| \ll \left| \frac{\partial p_1}{\partial z} \right|,$$

так что этим членом обычно можно пренебречь.

Так как $\zeta \cdot \Omega = \Omega_V = \text{const}$, планетарный вихрь в этом случае обращается в нуль и уравнение (15.10) не налагает никакого ограничения на p_1 . В этом случае также функция тока

$$\psi = \frac{p_1}{\rho_0 \Omega_V};$$

поэтому можно ожидать, что вековое уравнение будет налагать ограничения на давление, если требуется, чтобы движение было установившимся во втором порядке.

Сферические поверхности уровня. Вектор Кориолиса теперь запишется в виде

$$\Omega = \Omega (\nu \operatorname{sech} \mu + \zeta \operatorname{th} \mu) \quad (15.13)$$

[см. приложение, уравнение (9)], так что из уравнения (15.6) получаем

$$u_1 = \frac{\operatorname{ch} \mu \operatorname{cth} \mu}{\rho_0 \Omega r} \left(-\varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial p_1}{\partial \lambda} \right). \quad (15.14)$$

Общая аналогия с уравнением (15.11) очевидна. Уравнение (10) приложения дает

$$\Omega \cdot \nabla = \frac{\Omega}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} + \Omega \operatorname{th} \mu \frac{\partial}{\partial r},$$

так что уравнение (15.7) принимает вид

$$\rho_1 g = - \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{\operatorname{cth} \mu}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \mu}. \quad (15.15)$$

Так как u_1 и p_1 должны быть всюду конечными, то отсюда следует, что $\partial p_1 / \partial \lambda$ и $\partial p_1 / \partial \mu$ должны обращаться в нуль одновременно на полюсах ($\mu = \pm \infty$) и на экваторе ($\mu = 0$). Вообще второй член правой части уравнения (15.15) снова будет мал по сравнению с первым.

В этом случае $\Omega \cdot \zeta = \Omega \sin \mu$ не является постоянной и планетарный вихрь равен

$$\beta = M\Omega \cdot \zeta = e \frac{\Omega \operatorname{sech} \mu}{r}. \quad (15.16)$$

Следовательно, уравнение (15.9) показывает, что p_1 должно быть независимым от долготы, а $\partial p_1 / \partial \lambda$ должно тождественно обращаться в нуль. Уравнение (15.14) показывает тогда, что северная компонента u_1 обращается в нуль и движение является зональным.

Таким образом, кривизна поверхностей уровня в соединении с вращением очень серьезно ограничивает разнообразие установившихся движений и возникает вопрос: что же произойдет с теми движениями, которые были бы установившимися, если бы поверхности уровня были плоскостями? В гл. XVII мы покажем, что эти движения будут не установившимися, но медленно изменяющимися. Временные изменения зависят от угловой скорости Ω и исчезают, когда вращение отсутствует или когда поверхности уровня не имеют кривизны.

Итак, вращение сферической Земли делает неустановившимися в первом порядке все геострофические движения, кроме зональных, в отсутствие же вращения они являются неустановившимися самое большее во втором порядке. На это обстоятельство до настоящего времени, по-видимому, не обращалось должного внимания¹.

§ 16. Чистая конвекция без вращения

В чистой конвекции результирующая сила f_1 всюду исчезает, но с полным притоком тепла q_1 этого не происходит. Исчезновение механической силы означает, что отсутствует и диссипация и превращение кинетической энергии в теплоту. Жидкость совершает работу только против силы тяжести. В связи с этим возникают два вопроса. Один чисто теорети-

¹ Автор здесь не вполне прав. Впервые эффект „оживания“ стационарных решений первого порядка при наложении на систему общего вращения был обнаружен Хафом (Hough) в 1897 г. при рассмотрении задач теории приливов. Эта работа упоминается далее в гл. VII. См. также А. М. Яглом, Динамика крупномасштабных процессов в баротропной атмосфере, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4 (1953). — *Прим. ред.*

ческий: могут ли существовать при этих условиях установившиеся движения? Если допустить, что на этот вопрос можно ответить утвердительно, то имеется второй, более трудный вопрос: имеют ли какое-либо отношение эти движения к действительному установившемуся движению атмосферы или океана?

Первый вопрос не является тривиальным. Рассмотрим случай замкнутой линии тока. Частица жидкости, которая движется вдоль этой линии, будет испытывать периодические изменения в объеме и давлении почти такие же, как рабочая жидкость в машине Карно. Но так как сила тяжести консервативна, полная работа, совершаемая этой частицей (или над этой частицей) в течение одного цикла, будет обращаться в нуль. Если рассматривать частицу как тепловую машину, то коэффициент полезного действия этой машины должен быть, таким образом, равен нулю. Простое применение формулы Карно показывает, что это может иметь место только при условии, если от частицы жидкости при данной температуре отнимается столько же тепла, сколько ей при той же самой температуре тепла сообщается. Другими словами, установившееся чисто конвективное движение возможно только для определенных распределений источников и стоков тепла. Задача заключается в том, чтобы определить эти частные распределения.

Если пренебречь вращением, то рассматриваемые уравнения будут иметь следующий вид:

$$\nabla p_1 + \rho_1 g \zeta = 0. \quad (16.1)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 u_1) = 0, \quad (16.2)$$

$$u_1 \cdot \zeta = \frac{q_1}{\eta_0 \theta_0} = w. \quad (16.3)$$

В § 5 было отмечено, что q_1 , а также η'_0 и θ_0 , следует рассматривать как известные данные: то же будет поэтому верно и относительно w — вертикальной составляющей скорости.

Вертикальная скорость. Чтобы получить некоторую оценку порядка величин, можно рассмотреть сперва изотермическую атмосферу, для которой $\eta'_0 \theta_0 = g$ (§ 8). Поэтому вертикальная скорость 1 см/сек требует [по формуле (16.3)]

притока энергии в $980 \text{ эрг/г} \cdot \text{сек}$; если плотность воздуха 10^{-3} г/см^3 , то в пересчете на единицу объема это составляет около $1 \text{ эрг/см}^3 \cdot \text{сек}$ или $0,75 \text{ кал/см}^3$ в год. Но солнечная постоянная $\sigma = 2 \text{ кал/см}^2 \cdot \text{мин}$, так что Земля захватывает солнечную энергию со скоростью $\pi r_s^2 \sigma$. Так как площадь сферической поверхности равна $4\pi r_s^2$, то на единицу этой площади придется $\sigma/4 = 0,5 \text{ кал/см}^2 \cdot \text{мин}$, или $0,26 \cdot 10^6 \text{ кал/см}^2 \cdot \text{год}$. Если бы вся эта энергия поглощалась в столбе воздуха высотой 10 км , то общее годовое поступление тепла на единицу объема составило бы $0,26 \text{ кал/см}^3 \cdot \text{год}$, но вследствие прозрачности и обратного излучения приток тепла будет, конечно, меньше этой цифры. Таким образом, мы можем отсюда заключить, что в изотермической атмосфере вертикальная скорость w не может превосходить 1 см/сек и, вероятно, она еще меньше. За счет эффектов скрытой теплоты локальные значения могут быть больше, но только что найденный предел будет приложим к крупномасштабным явлениям.

Более общей является формула (§ 7)

$$\eta'_0 \theta_0 = C_{p0} (\theta'_0 + \theta'_A),$$

так что

$$w = \frac{q_1}{C_{p0} (\theta'_0 + \theta'_A)}, \quad (16.4)$$

где $\theta'_A = a_0 \theta_0 g / C_p$ — адиабатический градиент (см. § 7). Но если нагревание происходило при постоянном давлении и без движения, то скорость изменения температуры будет

$$\tau = \frac{q_1}{C_{p0}}, \quad (16.5)$$

и отсюда уравнение (16.4) можно написать так:

$$w = \frac{\tau}{\theta'_0 + \theta'_A}. \quad (16.6)$$

Это уравнение можно истолковать следующим образом: частица жидкости находится в гидростатическом равновесии при наличии температурного градиента θ'_0 . От нагревания она становится легче и должна подниматься; если нагревание происходит при постоянном давлении и при этом частица всегда остается в гидростатическом равновесии, то она будет

подниматься со скоростью τ/θ'_0 . Но если она поднимается, то встречает пониженное давление, которое вызывает дополнительное расширение и последующее охлаждение вследствие работы, совершаемой частицей над окружающей ее средой. Чтобы оставаться в гидростатическом равновесии, частица должна поэтому подниматься со скоростью w , т. е. со скоростью, меньшей τ/θ'_0 . Член θ'_A в знаменателе уравнения (16.6) количественно учитывает это понижение скорости подъема, обязанное адиабатическому охлаждению.

Возвратимся к оценкам порядка величин. Уравнение (16.6) можно записать также следующим образом:

$$w = \frac{w_{\text{изотерм}}}{1 + \frac{\theta'_0}{\theta'_A}}, \quad (16.7)$$

где $w_{\text{изотерм}}$ — скорость для случая, когда стратификация изотермическая. Отсюда, если $\theta'_0/\theta'_A = 1$, скорость в 1 см/сек образуется за счет 1,5 кал/см³ · год. Но если $\theta'_0/\theta'_A = -1$, то $w = \infty$. Последний результат указывает на то, что отрицательные градиенты температуры ведут к неустойчивости, и, действительно, вычисления этой главы определенно теряют силу как раз тогда, когда $\theta'_0 \leq \theta'_A$.

Граничные условия. Из уравнения (16.3) следует, что приток тепла должен быть равен нулю всюду, где вертикальная скорость обращается в нуль. Это имеет место на всех границах, положение которых не зависит от времени и которые совпадают с поверхностями уровня; если w не принимает нулевого значения на таких границах, то жидкость будет там становиться теплее (или холоднее) и движение не будет установившимся.

Если стационарная граница не является поверхностью уровня ($\chi = \text{const}$), то w не обязано обращаться там в нуль. В этом проявляется фундаментальное различие между границами, совпадающими с поверхностями уровня, и наклонными границами, и это требует дальнейшего рассмотрения. Во всех случаях линии тока должны лежать на поверхности, служащей границей; пусть P будет точкой, в которой граница наклонена под некоторым углом α к горизонтали, а линия

тока, проходящая через P , под углом β ; тогда

$$-\alpha \leq \beta \leq +\alpha.$$

Пусть u — величина скорости в P , так что вертикальная компонента равна $w = u \sin \beta$. Отсюда сразу же следует, что

$$u > \frac{w}{\sin \alpha}. \quad (16.8)$$

Для данного w минимальная скорость на стационарной границе тем больше, чем более близка эта граница к поверхности уровня. Если скорость на истинной горизонтальной границе должна быть в одно и то же время конечной и установившейся, то приток тепла должен здесь обращаться в нуль.

Во многих лабораторных экспериментах по конвекции уделяют большое внимание тому, чтобы жидкость имела горизонтальную границу и чтобы приток тепла на границе не был равен нулю. Если, например, подогревать снизу неглубокий цилиндрический сосуд, то это как раз и будет тот случай, о котором мы говорили. При этих условиях конвекция обычно будет турбулентной, а не установившейся. Рассуждая по аналогии с такими экспериментами по турбулентной конвекции, часто полагают, что всякий процесс конвекции, являющийся предметом изучения геофизики, должен быть турбулентным. Это рассуждение ошибочно; и если бы даже само заключение было правильным, то важно найти условия, при которых может иметь место установившаяся конвекция¹. Если затем удастся показать, что этих условий в природе быть не может, то станет возможным указать причину наблюдаемых неустановившихся движений.

Следствия сохранения вещества. Несколько иное условие налагается на q_1 , если жидкость содержится в замкнутом бассейне. В этом случае из уравнения (16.2) и в силу того,

¹ Рассуждения автора приводят к кажущемуся парадоксу вследствие смешения понятий „приток тепла“ и „поток тепла“. Приток тепла к единице объема равен дивергенции полного теплового потока со знаком минус. Условие обращения в нуль дивергенции теплового потока на границе жидкости отнюдь не противоречит существованию конечного значения потока тепла через стенку, если, например, стенка сосуда является теплопроводящей. — *Прим. ред.*

что жидкость не может вытечь через твердые границы бассейна, следует, что

$$\int \int u_1 \cdot \zeta \, dS = 0,$$

где интеграл распространен на часть уровенной поверхности внутри границы бассейна на любом уровне χ . Так как η'_0 и θ_0 зависят только от χ , уравнение (16.3) обращает предыдущий интеграл в следующий:

$$\int \int q_1 \, dS = 0. \quad (16.9)$$

При этих условиях установившаяся конвекция может, следовательно, быть только в том случае, когда полный приток тепла равен нулю на каждом уровне ниже дна бассейна.

Такое же рассуждение показывает, что полный приток тепла должен обращаться в нуль на каждом уровне в планетарной атмосфере со сферическими поверхностями уровня. Но если с целью идеализации считать поверхности уровня плоскими и простирающимися в бесконечность, когда границ, препятствующих горизонтальному течению жидкости, нет, то нарушится и аналогия с уравнением (16.9) и полный приток тепла на каждом уровне может быть конечным. В этом случае необходимо лишь, чтобы некоторые линии тока на этом уровне уходили в бесконечность.

Так как температура нулевого порядка является функцией только χ , то уравнение (16.9) можно перефразировать следующим образом: полный приток тепла при любой температуре равен с точностью до величины первого порядка нулю. Следовательно, каждый тепловой источник при данной температуре уравнивается равным по интенсивности тепловым стоком при той же температуре. При этих условиях коэффициент полезного действия тепловой машины по формуле Карно, согласно с приведенными выше соображениями, равен нулю.

Мы получаем ответ на теоретический вопрос: атмосфера (или океан) может совершать движение, как тепловая машина с нулевым коэффициентом полезного действия, оставаясь в установившемся состоянии, при условии, что тепловые источники распределены в согласии с уравнением (16.9). Остается вопрос геофизический: распределены ли они именно так, а если да, то какой механизм ответствен за это?

Явное решение уравнений. Возвращаясь к решению уравнений движения, мы можем написать их в следующей форме:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u}_1 &= -\frac{\rho'_0 w}{\rho_0}, \\ \zeta \cdot \mathbf{u} &= w.\end{aligned}\quad (16.10)$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\mathbf{u}_1 = M\psi - \nabla V, \quad (16.11)$$

где потенциал скоростей V определяется уравнениями

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= -\frac{\rho'_0 w}{\rho_0}, \\ \zeta \cdot \nabla V &= -w,\end{aligned}\quad (16.12)$$

между тем как функция тока ψ произвольна.

Плоские поверхности уровня. В этом случае уравнения (16.12) приводятся к такому

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \Delta, \quad (16.13)$$

где вертикальная дивергенция дается формулой

$$\Delta = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 w) \quad (16.14)$$

и

$$\begin{aligned}u_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}, \\ u_y &= +\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}, \\ u_z &= w.\end{aligned}\quad (16.15)$$

Любые стационарные границы, конечно, будут налагать дополнительные условия на ψ и V .

Сферические поверхности уровня. В меркаторских координатах уравнения принимают вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} = r^2 (\operatorname{sech}^2 \mu) \Delta, \quad (16.16)$$

где вертикальная дивергенция

$$\Delta = \frac{1}{\rho_0 r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 r^2 w), \quad (16.17)$$

между тем как

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{ch\mu}{r} \left(-\frac{\partial\psi}{\partial\mu} - \frac{\partial V}{\partial\lambda} \right), \\ u_\lambda &= \frac{ch\mu}{r} \left(+\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{\partial V}{\partial\mu} \right), \\ u_z &= w. \end{aligned} \quad (16.18)$$

Пользование меркаторскими координатами снова подчеркивает аналогию между формулами для плоских и сферических поверхностей уровня.

§ 17. Чистая конвекция с вращением

Если ввести в рассмотрение вращение и в связи с этим изменить предположения последнего параграфа, то нужно будет решать следующие уравнения:

$$\nabla p_1 + \rho_1 g \zeta + \rho_0 \Omega \times u_1 = 0, \quad (17.1)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 u_1) = 0, \quad (17.2)$$

$$u_1 \cdot \zeta = \frac{q_1}{\eta_0 \theta_0} = w. \quad (17.3)$$

Так как последние два уравнения те же, что и прежде, приток тепла подчинен всем ограничениям, обсуждавшимся в предыдущем параграфе.

Термобарическое движение. Как и в § 15, уравнение (17.1) дает

$$\zeta \times \nabla p_1 + \rho_0 \zeta \times (\Omega \times u_1) = 0,$$

и тождество (15.5) позволяет привести это равенство к виду

$$u_1 = \frac{M p_1}{\rho_0 \Omega \cdot \zeta} + \frac{\Omega w}{\Omega \cdot \zeta}, \quad (17.4)$$

что аналогично уравнению (15.6) и определяет скорость через p_1 и w . В дополнение к геострофическому движению скорость теперь имеет компоненту

$$\frac{\Omega w}{\Omega \cdot \zeta},$$

параллельную оси вращения; будем называть это движение термобарическим. Отметим, что эта термобарическая компонента независима от величины угловой скорости, но зависит от угла между направлением последней и вертикалью.

Аналогичное положение встречается в акустике, где причиной некоторых явлений служит вязкость, но они не зависят от величины коэффициента вязкости [3,7]. Такие явления обнаруживаются только в форме существования стационарных компонент и могут быть названы автостатическими. Грубо говоря, они являются результатом равновесия двух сил, величины которых пропорциональны одному и тому же параметру (в этом случае Ω). Сам этот параметр выпадает из уравнений равновесия или уравнений установившегося состояния. Однако приближение к установившемуся состоянию во всех автостатических явлениях существенно зависит от этого параметра.

Давление и плотность. Уравнение (17.1) приводит также к уравнению

$$p_1 g = - \frac{\Omega \cdot \nabla p_1}{\Omega \cdot \zeta}, \quad (17.5)$$

которое тождественно с уравнением (15.7) и не требует дальнейшего обсуждения. Подстановка из уравнения (17.4) в уравнение (17.2) дает

$$\nabla \cdot \left(\zeta \times \frac{\nabla p_1}{\Omega \cdot \zeta} \right) = -\delta, \quad (17.6)$$

где δ — дивергенция термобарического потока массы

$$\delta = \Omega \cdot \nabla \left(\frac{\rho_0 w}{\Omega \cdot \zeta} \right). \quad (17.7)$$

Как и в § 15, уравнение (17.6) можно написать через планетарный вихрь

$$\beta \cdot \nabla p_1 = (\Omega \cdot \zeta)^2 \delta, \quad (17.8)$$

а это равенство формально снова представляет собой уравнение для определения p_1 через δ .

Уравнение (17.8) является более или менее прямым следствием уравнения

$$\nabla \cdot (\rho_0 u_1) = 0$$

и поэтому выражает закон сохранения вещества. Поскольку в него входит также планетарный вихрь, уравнение (17.8) можно назвать „уравнением планетарной дивергенции“.

Плоские поверхности уровня. В этом случае планетарный вихрь β исчезает и уравнение (17.8) приводится к $\delta = 0$ и ограничивает скорее δ , чем p_1 . Если пользоваться тем же обозначением, что и в § 15, то это значит, что

$$\left(\Omega_H \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_V \frac{\partial}{\partial z} \right) (\rho_0 \omega) = 0. \quad (17.9)$$

Общее решение этого уравнения есть

$$\rho_0 \omega = F \left(x, y - \frac{\Omega_H z}{\Omega_V} \right), \quad (17.10)$$

где F — некоторая произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

Если жидкость имеет горизонтальную границу, скажем, при $z = 0$, то ω должно на ней обращаться в нуль. Отсюда $F(x, y) = 0$ для всех x и y и ω должно обращаться в нуль тождественно. В этом очень частном случае установившаяся конвекция не может существовать.

Если границы жидкости не являются уровнем, то функция F может быть определена произвольно. Давление p_1 также может быть определено произвольно, за исключением ограничений, вытекающих из условия, что линии тока лежат на границе.

Сферические поверхности уровня. В этом случае планетарный вихрь не обращается в нуль и уравнение планетарной дивергенции (17.8) приводится, как это вытекает из уравнения (15.16), к следующему:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \lambda} = \Omega r \operatorname{th}^2 \mu \left(\frac{\partial}{\partial \mu} + r \operatorname{th} \mu \frac{\partial}{\partial r} \right) (\rho_0 \omega \operatorname{cth} \mu). \quad (17.11)$$

Вообще оно определяет p_1 через ω ; обратно, если известно p_1 , то можно найти ω . Дальнейшее рассмотрение этого уравнения мы отложим до следующего параграфа.

§ 18. Гипотеза зонального нагрева Гадлея

Развитие теории притока тепла выходит за рамки этой книги. Поэтому рассмотрение всяких примеров чистой конвекции должно основываться на некоторой гипотезе относительно q_1 . В случае вращающейся сферической планеты, получающей энергию излучения от Солнца, q_1 , вероятно, будет испытывать большие суточные и сезонные колебания и, кроме того, будет зависеть от широты и долготы. Если усреднять колебания по времени, то получим стационарную компоненту q_1 ; в этой главе и рассматривается только эта стационарная компонента.

В связи с наличием вращения будет достаточно разумным предположить, что эта компонента q_1 независима от долготы и зависит только от широты и высоты:

$$q_1 = q_1(\chi, \varphi).$$

Эта гипотеза зонального нагрева. Она была впервые высказана Гадлеем в 1735 г. [1,5]. Следует, однако, заметить, что а priori имеются основания сомневаться в этой гипотезе в случае Земли: континенты и океаны не распределены зонально и их изменчивые характеристики вполне могут ввести зависимость от долготы в q_1 .

В силу своей простоты гипотеза зонального нагрева Гадлея оказала значительное влияние на метеорологическую мысль, но в настоящее время она пользуется довольно плохой славой [8]. Тем не менее мы разберем эту гипотезу детально из-за ее исторического интереса. Достаточно будет рассмотреть только изотермическую атмосферу (§ 8).

Отсутствие вращения. Если пренебрегать вращением, то приложимы уравнения (16.15), (16.17) и (16.18). Предположим, что

$$w = (w_m \chi / h) \exp(1 - \chi/h) \cos 3\varphi, \quad (18.1)$$

следовательно, имеется нагревание в экваториальной зоне при $|\varphi| < 30^\circ$ и охлаждение в остальных зонах; полный приток тепла на любой высоте обращается в нуль в согласии с уравнениями (16.9). Максимум направленной вверх скорости w_m имеет место при $\chi = h$, $\varphi = 0$. Если h — малая

доля радиуса твердой планеты r_s , то вертикальная дивергенция с достаточным приближением будет равна

$$\Delta = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \chi} (\rho_0 \omega) \quad (18.2)$$

и уравнение (16.16) можно написать так:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} = r_s^2 \operatorname{sech}^2 \mu \Delta. \quad (18.3)$$

Так как для изотермической атмосферы

$$\rho_0 = \rho_s \exp(-\chi/H), \quad (18.4)$$

где $H = R\theta_0/g$, то уравнения (18.1) и (18.2) дают

$$\Delta = (\omega_m/h)(1 - \chi/h_1) \exp(1 - \chi/h) \cos 3\varphi, \quad (18.5)$$

где

$$\frac{1}{h_1} = \frac{1}{h} + \frac{1}{H}.$$

Таким образом, вертикальная дивергенция обращается в нуль на некоторой высоте h_1 , меньшей, чем высота максимальной вертикальной скорости.

Уравнение (18.3) имеет зонально симметричное решение, для которого направленная к востоку слагающая скорости u_s обращается в нуль, между тем как слагающая, направленная к северу, с достаточным приближением равна

$$\begin{aligned} u_s &= -\frac{ch\mu}{r} \frac{\partial V}{\partial \mu} = \\ &= -(\omega_m r_s/h)(1 - \chi/h_1) \times \\ &\times \exp(1 - \chi/h) \cdot \sin \varphi \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (18.6)$$

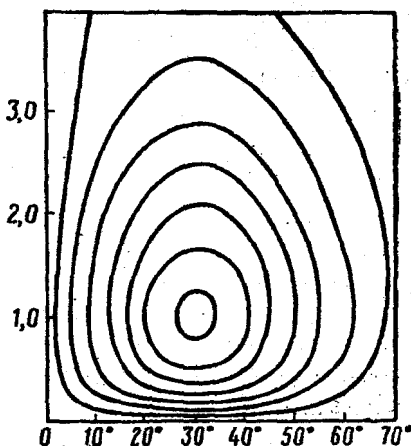


Рис. 7. Ячейка Гадлея.

Линии тока этого течения показаны на рис. 7 для случая $H \gg h$; оно состоит, как видим, из двух кольцевых вихрей (ячейки Гадлея), оси которых проходят через точки с координатами $\chi = h_1$, $\varphi = \pm 30^\circ$. На малых высотах движение

направлено к экватору, а для $\chi > h_1$ — к полюсу. Для других значений h/H эта картина качественно не меняется.

На уровне почвы (поверхность земли $\chi = 0$) скорость по направлению к экватору равна

$$v = (\omega_m e r_s / h) \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

и имеет максимальное значение

$$v_m = \omega_m (r_s / h) (2e \sqrt{3} / 9) \quad (18.7)$$

на широтах, где

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{2}$$

или $\varphi = \pm 35^\circ 16'$. Интересно отметить, что этот максимальный приземный ветер имеет место внутри зоны чистого охлаждения.

В случае Земли $r_s = 6370$ км, в то время как h , возможно, достигает самое большее нескольких километров. Можно поэтому заключить, что $v_m / \omega_m \sim 10^3$. Но мы видели, что ω может достигать 1 см/сек. Таким образом, в результате конвекции могут возникать приземные ветры со скоростью до 10 м/сек, что значительно превосходит наблюдаемую стационарную составляющую приземных ветров. Таким образом, согласно гипотезе Гадлея, зональное нагревание Солнцем может приводить к образованию на Земле заметных ветров, направленных к экватору.

Нестационарность вихрей Гадлея. Остается рассмотреть вопрос об устойчивости только что описанного движения. На неподвижной Земле оно могло бы стать нестационарным за счет эффектов *второго* порядка. Мы не будем исследовать этот вопрос; вместо этого мы покажем, что вращение делает вихри Гадлея нестационарными в *первом* порядке. Этот результат прямо следует из уравнения планетарной дивергенции (17.11).

Это уравнение является необходимым условием для того, чтобы движение было установившимся на вращающейся сферической Земле. Если нагревание зональное, то ω , а следовательно, и вся правая часть этого уравнения должны быть независимыми от долготы λ . То же должно быть верно и для $\partial p_1 / \partial \lambda$, так что p_1 будет самое большее линейной функ-

цией λ . Непрерывность давления требует тогда, чтобы оно не зависело от λ , т. е. чтобы правая часть уравнения (17.11) обращалась в нуль. Это не имеет места для функции, рассмотренной выше, и не может быть верно для любого физически приемлемого распределения вертикальной скорости.

Такое заключение покоится на двух гипотезах: 1) гипотеза чистой конвекции; 2) гипотеза зонального нагревания.

Они не могут оправдываться одновременно, так как принятие той и другой повлекло бы за собой необходимость допущения постоянно ускоряющегося течения в направлении к экватору, а это не имеет места.

§ 19. Анализ постоянного поля давления на Земле

В связи с тем что а priori возникают сомнения в справедливости гипотезы зонального нагревания, дальше она рассматриваться не будет. Гипотеза чистой конвекции будет изучена нами непосредственно на наблюдаемом стационарном поле давления Земли. Об этом частично уже было сказано в § 12.

Зональная составляющая давления. Уравнение планетарной дивергенции дает возможность вычислить вертикальную скорость w из наблюдаемого отклонения поля давления от баротропного. Так как в это уравнение входит только $\partial p_1 / \partial \lambda$, вертикальная скорость будет независима от зональной составляющей давления. Это служит дополнительным оправданием для отделения этой составляющей от незональной в § 12.

Однако зональная составляющая будет связана со свободным геострофическим движением вдоль кругов широты, которое дается уравнением

$$u_e = - \frac{1}{\rho_0 r \Omega \sin \varphi} \frac{\partial p_z}{\partial \varphi}. \quad (19.1)$$

Эта скорость будет бесконечно большой на экваторе ($\varphi = 0$), если $\partial p_z / \partial \varphi$ не обращается там в нуль. Рис. 5 показывает, что эта производная действительно равна нулю на экваторе или вблизи экватора. Эмпирический материал недостаточен, чтобы установить положение этого минимума с точностью, большей $\pm 5^\circ$, но не противоречит допущению о его расположении у экватора. Если мы примем это, то по рис. 5 сможем

направлено к экватору, а для $\chi > h_1$ — к полюсу. Для других значений h/H эта картина качественно не меняется.

На уровне почвы (поверхность земли $\chi = 0$) скорость по направлению к экватору равна

$$v = (\omega_m e r_s / h) \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

и имеет максимальное значение

$$v_m = \omega_m (r_s / h) (2e \sqrt{3} / 9) \quad (18.7)$$

на широтах, где

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{2}$$

или $\varphi = \pm 35^\circ 16'$. Интересно отметить, что этот максимальный приземный ветер имеет место внутри зоны чистого охлаждения.

В случае Земли $r_s = 6370$ км, в то время как h , возможно, достигает самое большее нескольких километров. Можно поэтому заключить, что $v_m / \omega_m \sim 10^3$. Но мы видели, что ω может достигать 1 см/сек. Таким образом, в результате конвекции могут возникать приземные ветры со скоростью до 10 м/сек, что значительно превосходит наблюдаемую стационарную составляющую приземных ветров. Таким образом, согласно гипотезе Гадлея, зональное нагревание Солнцем может приводить к образованию на Земле заметных ветров, направленных к экватору.

Нестационарность вихрей Гадлея. Остается рассмотреть вопрос об устойчивости только что описанного движения. На неподвижной Земле оно могло бы стать нестационарным за счет эффектов *второго* порядка. Мы не будем исследовать этот вопрос; вместо этого мы покажем, что вращение делает вихри Гадлея нестационарными в *первом* порядке. Этот результат прямо следует из уравнения планетарной дивергенции (17.11).

Это уравнение является необходимым условием для того, чтобы движение было установившимся на вращающейся сферической Земле. Если нагревание зональное, то ω , а следовательно, и вся правая часть этого уравнения должны быть независимыми от долготы λ . То же должно быть верно и для $\partial p_1 / \partial \lambda$, так что p_1 будет самое большее линейной функ-

цией λ . Непрерывность давления требует тогда, чтобы оно не зависело от λ , т. е. чтобы правая часть уравнения (17.11) обращалась в нуль. Это не имеет места для функции, рассмотренной выше, и не может быть верно для любого физически приемлемого распределения вертикальной скорости.

Такое заключение покоится на двух гипотезах: 1) гипотеза чистой конвекции; 2) гипотеза зонального нагревания.

Они не могут оправдываться одновременно, так как принятие той и другой повлекло бы за собой необходимость допущения постоянно ускоряющегося течения в направлении к экватору, а это не имеет места.

§ 19. Анализ постоянного поля давления на Земле

В связи с тем что а priori возникают сомнения в справедливости гипотезы зонального нагревания, дальше она рассматриваться не будет. Гипотеза чистой конвекции будет изучена нами непосредственно на наблюдаемом стационарном поле давления Земли. Об этом частично уже было сказано в § 12.

Зональная составляющая давления. Уравнение планетарной дивергенции дает возможность вычислить вертикальную скорость w из наблюдаемого отклонения поля давления от баротропного. Так как в это уравнение входит только $\partial p_1 / \partial \lambda$, вертикальная скорость будет независима от зональной составляющей давления. Это служит дополнительным оправданием для отделения этой составляющей от незональной в § 12.

Однако зональная составляющая будет связана со свободным геострофическим движением вдоль кругов широты, которое дается уравнением

$$u_e = - \frac{1}{\rho_0 r \Omega \sin \varphi} \frac{\partial p_z}{\partial \varphi}. \quad (19.1)$$

Эта скорость будет бесконечно большой на экваторе ($\varphi = 0$), если $\partial p_z / \partial \varphi$ не обращается там в нуль. Рис. 5 показывает, что эта производная действительно равна нулю на экваторе или вблизи экватора. Эмпирический материал недостаточен, чтобы установить положение этого минимума с точностью, большей $\pm 5^\circ$, но не противоречит допущению о его расположении у экватора. Если мы примем это, то по рис. 5 сможем

вычислить зависимость скорости u_1 на уровне моря от широты; график этой скорости дан на рис. 8. Тропическая зона характеризуется сильным движением к западу, между тем как умеренные зоны являются местами нахождения ветров, направленных к востоку. Эта слагающая ветра обладает заметной асимметрией и достигает приблизительно 9 м/сек на 45° ю. ш., но едва превышает 1 м/сек на 45° с. ш.

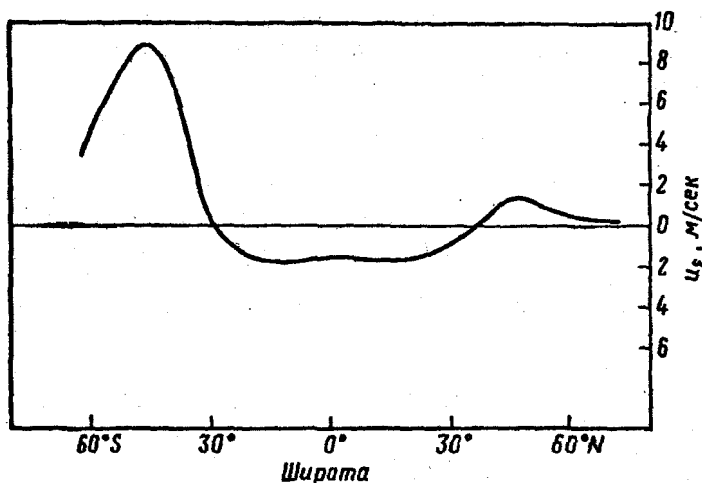


Рис. 8. Свободный геострофический ветер на уровне моря.

Аналогичный анализ можно выполнить и для других уровней в атмосфере. Стоит напомнить, что в стратосфере наблюдаются воздушные потоки очень высоких скоростей — струйные течения. В силу того что знаменатель правой части уравнения (19.1) имеет множителем ρ_0 , эти необычно высокие скорости не связаны с необычно высокими градиентами давлений.

Незональная составляющая давления. Согласно уравнениям (17.4) и (17.11), которые имеют вид

$$u_1 = \frac{M p_1}{\rho_0 \Omega \cdot \zeta} + \frac{\Omega w}{\Omega \cdot \zeta}, \quad (19.2)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \lambda} = \Omega r \operatorname{th}^2 \mu \left(\frac{\partial}{\partial \mu} + r \operatorname{th} \mu \frac{\partial}{\partial r} \right) (\rho_0 w \operatorname{cth} \mu), \quad (19.3)$$

незональная слагающая движения связана одновременно и с горизонтальным, и с вертикальным движениями. Исключение составляло бы движение непосредственно на поверхности идеально сферической планеты, где вертикальная слагающая обращалась бы в нуль и, согласно уравнению (19.2), движение было бы геострофическим. Даже в том случае, когда отсутствует влияние подстилающей поверхности, движение на некоторой высоте над сферической поверхностью не было бы в точности геострофическим. В связи со сделанными раньше оценками величины w (§ 16) можно предвидеть, что второй, или термобарический, член в уравнении (19.2) по величине будет мал по сравнению с первым, или геострофическим, членом. Однако в другом смысле термобарическим движением ни в коем случае нельзя пренебречь, так как оно определяет поднятие и опускание воздуха.

Чтобы оценить величину градиента давления по долготе, связанного с термобарическим движением, можно двумя путями упростить уравнение планетарной дивергенции (19.3): во-первых, пренебречь членом с операцией $\partial/\partial\mu$ по сравнению с членом, содержащим операцию $r\partial/\partial r$; во-вторых, так как $r = r_s + \chi$, можно заменить $r\partial/\partial r$ через $r_s\partial/\partial\chi$ и т. д. Тогда

$$\frac{\partial p_1}{\partial \lambda} = \Omega r_s^2 \sin^2 \mu \frac{\partial (p_0 w)}{\partial \chi} = \Omega r_s^2 \sin^2 \varphi \frac{\partial (p_0 w)}{\partial \chi}. \quad (19.4)$$

Чтобы оценить порядок величин, предположим, что $w = 1$ см/сек, $p_0 = 10^{-3}$ г/см³ при $\chi = 1$ км, между тем как при $\chi = 0$, $w = 0$; среднее значение $\partial(p_0 w)/\partial\chi$ составит тогда 10^{-8} единиц CGS. Взяв $\Omega r_s = 2$ км/сек, найдем, что оцениваемый градиент давления равен

$$\frac{1}{r_s \sin \varphi} \frac{\partial p_1}{\partial \lambda} = 10^{-3} \text{ дин/см}^3 = 0,1 \text{ мб/км}.$$

Это очень высокое значение по сравнению с наблюдаемыми. Поэтому разумно принять, что уравнение (19.4) может служить для учета наблюдаемых градиентов.

На рис. 6 можно видеть, что поле незональной компоненты давления на Земле состоит попеременно из областей высокого и низкого давлений, расположенных примерно вдоль кругов широты. Уравнение (19.4) показывает, что градиент вертикального потока имеет тот же знак, что и $\partial p_T / \partial \lambda$, а если $w = 0$ при $\chi = 0$, то это же верно в нижних слоях

атмосферы для самого ω . Отсюда следует, что воздух поднимается над западной частью барического максимума и над восточной частью барического минимума; он опускается над восточной частью максимума и над западной частью минимума.

Кроме того, так как атмосфера имеет устойчивую стратификацию, ω имеет тот же знак, что и приток тепла q . Отсюда следует, что западная часть антициклона и восточная часть циклона являются областями нагревания и т. д. Эти заключения, как будто, не противоречат известным фактам.

Влияние подстилающей поверхности. Сделав предположение, что планета — идеально гладкая сфера, мы пренебрегли всяким влиянием подстилающей поверхности. Оно может быть двоякого рода: влияние, причиной которого являются плавные изменения уровня земной поверхности, и влияние, обязанное малым препятствиям, как, например, скалы и деревья.

Рассмотрим сперва гладкий склон $1 : 100$ и предположим, что вдоль этого склона вверх на уровне земли дует постоянный ветер со скоростью 1 м/сек. Для этого нужно, чтобы воздух имел слагающую скорость, направленную вертикально вверх и равную 1 см/сек. Но выше мы видели, что это близко к наибольшей скорости поднятия воздуха, какая может поддерживаться солнечным нагреванием. Следовательно, нельзя ожидать, что вдоль этого склона вверх будет дуть *постоянный* ветер со скоростью больше 1 м/сек. *Переменные* же ветры и более высоких скоростей могут существовать и поддерживаться за счет теплоемкости воздуха или скрытой теплоты испарения водяного пара, содержащегося в воздухе.

Отсюда следует, что даже подстилающая поверхность с плавно меняющимися очертаниями может оказывать заметное влияние на приземный ветер, а это в свою очередь должно сильно влиять на значения постоянного поля давления на Земле вблизи ее поверхности. Такое влияние проявится в детальной структуре изобар, показанных на рис. 6. По-видимому, попыток наблюдать эффект такого рода не делалось.

Меньшие препятствия, которые можно классифицировать как шероховатость, будут вызывать **турбулентность**. Энергия, требующаяся для образования и поддержания турбулентности,

должна поступать в основном из крупномасштабного движения воздуха. Потерю энергии на паразитическую турбулентность можно рассматривать как результат действия силы, тормозящей крупномасштабное движение и тем самым делающей недействительной гипотезу чистой конвекции. Эта сила, несомненно, имеет значительную величину в самом нижнем слое атмосферы. Для более высоких слоев ее величина неизвестна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abbè C., *Mechanics of the Earth's atmosphere*, Smithsonian Miscellaneous Collections, 51, No. 4. p. 5, 7. Washington, D. C., 1910.
2. Bjerknes V., Bjerknes J., Solberg H., Bergeron T., *Physikalische Hydrodynamik*, Berlin, Springer, 1933.
3. Eckart C., Vortices and streams caused by sound waves, *Phys. Rev.*, 73, 68—76 (1948).
4. Freeman J. C., Jr., Baer L., Jung G. H., The bathystrophic storm tide, *J. Marine Res.*, 16, 12 (1957).
5. Hadley G., Concerning the cause of the general trade winds, *Phil. Trans. (London)* 39, 58 (1735—36). (Вновь напечатано в работе, указанной выше в ссылке 1.)
6. Lamb H., *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 6th ed., 1932. (Русский перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М. — Л., 1947.)
7. Rayleigh, *Scientific Papers*, No. 108, p. 246, Cambridge Univ. Press; *Phil. Trans. (London)*, 175, p. 1 (1883).
8. Starr V. P., *Compendium of Meteorology*, Amer. Meteorol. Soc., Boston, 1951.

Глава IV

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

§ 20. Введение

Дальнейшее развитие теории будет существенно зависеть от использования соответствующих понятий и обозначений. В этой главе мы и будем в основном заниматься задачей отыскания этих средств исследования.

Понятие энергии является фундаментальным во всех областях науки, поэтому целесообразно начать настоящую главу с его рассмотрения. В § 5 мы видели, что плотность энергии жидкости выражается так:

$$W = \frac{1}{2} u^2 + \varepsilon + g\chi \text{ эрг/г}, \quad (20.1)$$

а поток энергии

$$J = \rho u \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек}. \quad (20.2)$$

Выше было получено уравнение, выражающее закон сохранения энергии (5.6):

$$\rho \frac{DW}{Dt} + \nabla \cdot J = \rho (f \cdot u + q). \quad (20.3)$$

Если разложить различные величины, входящие в это уравнение, в ряды, члены которых будут являться возмущениями различного порядка, то мы получим следующую совокупность уравнений:

$$\rho_0 \frac{\partial W_0}{\partial t} = 0, \quad (20.4)$$

$$\rho_0 \frac{\partial W_1}{\partial t} + \rho_0 u_1 \cdot \nabla W_0 + \nabla \cdot (\rho_0 u_1) = \rho_0 q_1, \quad (20.5)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial W_2}{\partial t} + \rho_0 (u_1 \cdot \nabla W_1 + u_2 \cdot \nabla W_0) + \rho_1 \frac{\partial W_1}{\partial t} + \\ + \rho_1 u_1 \cdot \nabla W_0 + \nabla \cdot (\rho_1 u_1 + \rho_0 u_2) = \rho_0 (f_1 \cdot u_1 + q_2) + \rho_1 q_1. \end{aligned} \quad (20.6)$$

Так как W_0 зависит только от величин нулевого порядка, а эти величины не зависят от t , уравнение (20.4) тождественно удовлетворяется. Аналогично W_1 зависит только от величин нулевого и первого порядка; в явной форме W_1 дается выражением

$$W_1 = p_0 v_1 + \theta_0 \eta_1.$$

Следовательно, легко проверить, что уравнение (20.5) является прямым следствием уравнений первого порядка § 9.

Однако в W_2 входят как величины второго порядка p_2 , p_2 , ..., так и квадраты и произведения величин первого порядка p_1 , p_1 , u_1 и т. д. Поэтому уравнение (20.6) не может быть следствием уравнений первого порядка, которые не содержат p_2 , p_2 , Это — важное заключение, так как одним из членов в W_2 является $\frac{1}{2} u_1^2$ — кинетическая энергия (на один грамм массы) движения первого порядка. Мы стоим, таким образом, перед необходимостью выбора одного из трех возможных путей решения задачи:

- 1) отбросить всякую мысль рассматривать уравнения первого порядка отдельно от уравнений более высоких порядков;
- 2) как минимум, не пользоваться понятием кинетической энергии, когда имеем дело с уравнениями первого порядка;
- 3) наметить какой-нибудь путь, который позволял бы пользоваться понятием кинетической энергии, не прибегая к уравнению (20.6), а ограничиваясь лишь уравнениями первого порядка § 9.

Два первых пути непривлекательны; к счастью, оказывается возможным выбрать, как будет показано в следующем параграфе, третий путь. При разработке требуемого метода появятся новые понятия и обозначения, которые оправдают себя в дальнейшей работе.

§ 21. Внешняя энергия и термобарическая энергия

Если умножить уравнение (9.2) почленно на $p_0 u_1$, уравнение (9.4) — на $-p_0 p'_0 Y_0 \eta_1 / \eta'_0 X_0$, уравнение (9.5) — на $p_0 p_1 / X_0$ и сложить результаты, то многие члены уничтожатся. Полученное уравнение можно записать так:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (p_1 u_1) = p_0 \left\{ f_1 \cdot u_1 + p_1 q_1 \frac{Y_0}{\theta_0 X_0} - \frac{p'_0 Y_0}{\eta'_0 X_0} \frac{\eta_1 q_1}{\theta_0} \right\}, \quad (21.1)$$

где

$$E = \frac{1}{2} \rho_0 u_1^2 + \frac{p_1^2}{2\rho_0 c_0^2} - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{p_0' Y_0}{\eta_0' X_0} \eta_1^2. \quad (21.2)$$

Уравнение (21.1) имеет некоторые черты, общие с уравнением (20.6): оба содержат члены $\nabla \cdot (p_1 u_1)$ и $\rho_0 f_1 \cdot u_1$, а E содержит член кинетической энергии $\frac{1}{2} (\rho_0 u_1^2)$. Однако уравнение (21.1) и выражение для E не содержат членов с p_2 , p_2 и т. д. и были выведены исключительно из уравнений первого порядка.

Следовательно, уравнение (21.1) не является уравнением энергии второго порядка, а величина E не совпадает с величиной $\rho_0 W_2$. Очевидно, для настоящих целей уравнение (21.1) более полезно, чем уравнение (20.6), а величина E более полезна, чем величина W_2 . Основания для этого были указаны во введении и станут яснее из дальнейшего.

Чтобы сохранить, когда это необходимо, различие, будем называть $\rho_0 W_2$ плотностью энергии второго порядка, а E — плотностью внешней энергии. Слово „внешняя“ имеет только одно преимущество сравнительно с другими, какие можно предложить: оно указывает, что E мало связано с ϵ , „внутренней“ энергией термодинамики. Когда не будет опасений, что возникнет путаница, будем называть величину E просто энергией; аналогично величину $p_1 u_1$ — поток внешней энергии — будем называть просто потоком энергии, опять-таки, когда нельзя ожидать, что возникнет какая-либо неясность из-за того, что опущено слово „внешний“. Внешняя энергия — сумма трех членов. Первый член — это кинетическая энергия второго порядка $\frac{1}{2} (\rho_0 u_1^2)$. Член $p_1^2/2\rho_0 c_0^2$ знаком из акустики [1], где он называется упругой энергией. Член

$$-\frac{1}{2} \rho_0 \frac{p_0' Y_0}{\eta_0' X_0} \eta_1^2 = \frac{1}{2} \rho_0 g \frac{Y_0}{\eta_0' X_0} \eta_1^2$$

— необычный. Так как в него входят и термодинамические и гравитационные величины, его можно назвать термобарической энергией.

Мы видим, что термобарическая энергия будет иметь тот же знак, что и градиент энтропии η_0 . Так как отрицательная энергия обычно связывается с неустойчивостью, это является еще одним указанием на то, что состояние нулевого

порядка будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от знака градиента энтропии.

Если воспользоваться формулами § 2, то термобарическую энергию можно выразить многими различными способами. Два из них следующие:

$$\frac{1}{2} \rho_0 g \left(\frac{\gamma_0 - 1}{a_0 c_0^2} \right) \frac{\eta_1^2}{\eta_0} = \frac{1}{2} \rho_0 g \left(\frac{a_0 \theta_0}{C_{p0}} \right) \frac{\eta_1^2}{\eta_0}.$$

В случае идеального газа эти выражения приводятся к следующему:

$$\frac{1}{2} \rho_0 g \frac{\gamma - 1}{\gamma R} \frac{\eta_1^2}{\eta_0},$$

а если изотермическое состояние является его состоянием нулевого порядка, то к такому выражению:

$$\frac{1}{2} \rho_0 \theta_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma R} \eta_1^2.$$

Более простые формулы для термобарической энергии будут выведены ниже.

§ 22. Параметры поля

Чтобы идти дальше, необходимо упростить обозначения, которыми мы пользовались до сих пор. Рассмотрим плотность внешней энергии

$$E = \frac{1}{2} \left(\rho_0 u_1^2 + \frac{p_1^2}{\rho_0 c_0^2} - \rho_0 \frac{p_0' Y_0}{\eta_0' X_0} \eta_1^2 \right). \quad (22.1)$$

Она может быть записана как

$$E = \frac{1}{2c_0} (U^2 + P^2 + N^2 Q^2), \quad (22.2)$$

если ввести следующие определения:

$$U = u_1 (\rho_0 c_0)^{1/2}, \quad P = p_1 (\rho_0 c_0)^{-1/2}, \quad Q = (\eta_1 / \eta_0) (\rho_0 c_0)^{1/2} \quad (22.3)$$

$$N^2 = \rho_0 g \eta_0' \frac{Y_0}{X_0} = g \eta_0' \frac{(\gamma_0 - 1)}{a_0 c_0^2}. \quad (22.4)$$

Величины U , P , Q будут называться параметрами поля. Мы будем пользоваться ими в большинстве вычислений вместо

α_1 , p_1 , η_1 . Коэффициент N имеет размерность частоты и является функцией только χ . Он будет очень полезен во всех вычислениях. Поля U , P имеют размерности $g^{1/2} \cdot \text{сек}^{-1/2}$; Q — размерность $g^{1/2} \cdot \text{сек}^{-1/2}$. Термобарическая энергия будет $N^2 Q^2 / 2c_0$.

Когда приток тепла равен нулю, из уравнения (9.12) вытекает, что Q пропорционально вертикальному смещению h_1 . Наиболее общим образом Q можно истолковать как энтропию первого порядка, измеренную в соответствующих единицах. Другие параметры поля являются, очевидно, мерой скорости и давления в переменных единицах, приспособленных к природе задачи.

Таким образом, единицы, в которых U , P и Q измеряют скорость, давление и энтропию, не являются постоянными и будут вообще зависеть от высоты χ . Это неудобство более чем компенсируется упрощением дифференциальных уравнений, обязанным применению таких единиц. Дальше даются примеры применения этих переменных единиц.

Случай океана. Значения единиц в системе CGS определяются удельным акустическим сопротивлением $\rho_0 c_0$ и для Q — градиентом энтропии η'_0 . В случае океана $(\rho_0 c_0)^{1/2}$ очень близко к постоянной и лишь незначительно отклоняется от значения 380 единиц CGS; соответствующее значение для пресной воды составляет 375 единиц CGS. Градиент энтропии — очень сильно меняющаяся величина и будет рассматриваться в § 24 и 27.

Изотермическая атмосфера. Изменение удельного акустического сопротивления с высотой дается следующим уравнением:

$$(\rho_0 c_0)^{1/2} = (\rho_s c_s)^{1/2} \exp(-g\chi / 2R\theta_0), \quad (22.5)$$

где индекс s указывает, что соответствующие значения берутся для поверхности $\chi = 0$. Градиент энтропии постоянен: $\eta'_0 = g/\theta_0$.

Атмосфера с постоянным градиентом температуры. В обозначениях § 8

$$(\rho_0 c_0)^{1/2} = (\rho_s c_s)^{1/2} \left[\frac{\chi_s}{\chi + \chi_s} \right]^{1/2 + 1/\alpha}, \quad (22.6)$$

между тем как

$$\eta'_0 = R \frac{\left[\frac{\nu + \gamma}{\gamma - 1} \right]}{\chi + \chi_s}. \quad (22.7)$$

§ 23. Уравнения поля

Если заменить величины первого порядка параметрами поля, то уравнения (9.2), (9.4) и (9.5) примут вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c_0 (\nabla + \Gamma_0) P - N^2 Q_0 + \mathbf{Q} \times \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (23.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c_0 (\nabla - \Gamma_0) \cdot \mathbf{U} = G, \quad (23.2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \zeta \cdot \mathbf{U} = H, \quad (23.3)$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{(\rho_0 c_0)'}{\rho_0 c_0} + \frac{g}{c_0^2}, \quad (23.4)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_1 (\rho_0 c_0)^{1/2},$$

$$G = \frac{Y_0 q_1}{\theta_0} (\rho_0 c_0)^{-1/2}, \quad (23.5)$$

$$H = \frac{q_1}{\theta_0 \eta_0} (\rho_0 c_0)^{1/2}.$$

Следует заметить, что G и H не являются независимыми

$$G = \frac{c_0 N^2}{g} H. \quad (23.6)$$

Левые части первых трех уравнений зависят только от трех параметров: N , Γ и c_0 — и в других отношениях много проще, чем первоначальные уравнения первого порядка. Например, вывод уравнения внешней энергии можно формулировать следующим образом: умножаем уравнения (23.1), (23.2) и (23.3) соответственно на $\mathbf{U}$, P и $N^2 Q$; складывая результаты, получаем

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (P\mathbf{U}) = \frac{1}{c_0} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} + GP + N^2 HQ). \quad (23.7)$$

Попутно этим устанавливается тот важный факт, что уравнения поля являются самосопряженными.

Граничное условие на твердой поверхности существенно не изменяется (см. уравнение (11.1))

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (23.8)$$

Условие на свободной поверхности океана или озера следующее (см. уравнение (11.4)):

$$c_0 \frac{\partial P}{\partial t} = gU \cdot \zeta, \quad (23.9)$$

и смещение этой свободной поверхности будет

$$h_1 = \frac{P c_0}{g} (\rho_0 c_0)^{-1/2}. \quad (23.10)$$

Аддитивные баротропные члены (§ 10) даются менее краткими уравнениями, чем прежде. Мы найдем их, полагая $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$, G , H и все производные по времени равными нулю. Уравнения поля приводятся тогда к одному уравнению

$$c_0 (\nabla + \Gamma \zeta) P = N^2 Q \zeta, \quad (23.11)$$

которое удовлетворяется, когда P — некоторая дифференцируемая функция χ и

$$Q = \frac{c_0}{N^2} (P' + \Gamma P). \quad (23.12)$$

Легко проверить, что это уравнение эквивалентно более знакомому уравнению

$$P'_1 = -\rho_1 g.$$

выведенному ранее в § 10.

Вообще мы убедимся в том, что уравнения поля практически необходимы, когда приходится иметь дело с решениями, меняющимися во времени. Попытка найти эти решения, не пользуясь понятием поля, приводит к очень громоздким уравнениям. С другой стороны, для решений, относящихся к установившемуся состоянию, обычно удобнее пользоваться обозначениями гл. II и III.

§ 24. Смысл коэффициентов N и Γ

Чтобы вникнуть в смысл коэффициентов, необходимо найти такие условия, в которых тот или другой коэффициент динамически имеет доминирующее влияние. Скорость звука является доминирующей во всех акустических явлениях: ве-

роятно, читатель достаточно знаком с последними, чтобы нужно было еще говорить о c_0 .

Чтобы найти интерпретацию Γ , примем, что поверхности уровня плоские, так что $\chi = z$, ζ — постоянный, направленный вертикально единичный вектор. Пренебрежем граничными условиями. Пусть жидкость движется с установившейся, т. е. не зависящей от времени, вертикальной скоростью: $\mathbf{u} = 0, 0, w$. Пусть $\mathbf{f}_1, \mathbf{q}_1 = 0$; в этом случае вертикальное движение будет сопровождаться адиабатическими изменениями плотности, а w должно быть функцией z .

Сохранение вещества требует, чтобы

$$\frac{d}{dz}(\rho w) = 0. \quad (24.1)$$

Так как нагревание отсутствует, уравнение (5.3) примет вид

$$\frac{d\eta}{dz} = 0. \quad (24.2)$$

Уравнение количества движения (5.1) приводится к следующему:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (24.3)$$

Так как $d\eta/dz = 0$, то его можно записать так:

$$c^2 \frac{d\rho}{dz} = -\rho g. \quad (24.4)$$

Уравнение (24.1) дает тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{g}{c^2} w. \quad (24.5)$$

Если ввести параметр поля $W = w(\rho c)^{1/2}$, то уравнение (24.5) примет вид

$$\frac{dW}{dz} - \Gamma W = 0. \quad (24.6)$$

Это уравнение, в которое входят Γ и W , описывает, таким образом, адиабатическое расширение жидкости при выбранных идеальных условиях.

Второе уравнение, содержащее Γ , всего легче получить из уравнения энергии (10.6), которое при тех же самых условиях приводится к следующему:

$$\frac{d}{dz}(PW) = 0. \quad (24.7)$$

В соединении с уравнением (24.6) это дает уравнение

$$\frac{dP}{dz} + \Gamma P = 0. \quad (24.8)$$

Величина Γ в уравнениях (24.6) и (24.8) связана весьма характерным образом с величинами P , W и производными от них. Дальше это станет привычным для нас. Всякий раз, когда будут появляться эти характерные комбинации, читатель должен вспоминать об адиабатическом расширении.

Смысл коэффициента N легче всего понять, если рассмотреть колебание малой массы жидкости. Сместим такую массу жидкости из ее положения нулевого порядка, а затем позволим ей свободно двигаться. Для определенности удобно предположить, что эта масса жидкости заключена в легкую оболочку, подобную оболочке шара-пилота, которая должна быть мягкой и полностью податливой, так чтобы давления внутри и снаружи были одинаковыми и изменения плотности могли происходить беспрепятственно. Будем снова предполагать, что эти изменения происходят адиабатически.

Пусть баллон, находившийся на уровне z , смещается на уровень $z + \xi$; давление в нем изменится на величину

$$\delta p = -\rho g \xi. \quad (24.9)$$

Что касается плотности внутри баллона, она изменится на величину

$$(\delta \rho)_{\text{внутр}} = \frac{\delta p}{c^2}. \quad (24.10)$$

Перед смещением плотность вне баллона была $\rho(z)$; после смещения она равна $\rho(z + \xi)$, или

$$(\delta \rho)_{\text{внешн}} = \frac{\xi d\rho}{dz}. \quad (24.11)$$

Баллон испытывает, таким образом, выталкивающую силу (в дин/см^3), равную

$$g [(\delta \rho)_{\text{внешн}} - (\delta \rho)_{\text{внутр}}] = g \xi \left[\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{c^2} \right] = -\rho N^2 \xi, \quad (24.12)$$

если положить

$$N^2 = -g \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{g}{c^2} \right]. \quad (24.13)$$

Если величину, которая дается уравнением (24.12), приравнять силе инерции баллона, то мы найдем его уравнение движения

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + N^2\xi = 0. \quad (24.14)$$

Баллон будет, следовательно, совершать колебания с частотой N , которая дается уравнением (24.13), при условии, что эта частота действительная. Если же N^2 — отрицательное число, то баллон окажется неустойчивым и далеко уйдет от своего начального положения. Этот вывод частоты N принадлежит Виясяля [3]; остается показать, что уравнение (24.13) совпадает с уравнением (22.4). Это можно сделать следующим образом. Из уравнения (7.4)

$$\eta'_0 = -\frac{a_0 c_0^2}{\gamma_0 - 1} \left(\frac{1}{p_0} \frac{dp_0}{dz} + \frac{g}{c_0^2} \right).$$

Подстановка в уравнение (24.13) сразу же приводит к формуле

$$N^2 = \frac{(\gamma_0 - 1) g}{a_0 c_0^2} \eta'_0. \quad (24.15)$$

что мы и хотели показать.

Таким образом, можно сказать, что, в то время как коэффициент Γ отражает влияние стратификации на крупномасштабные процессы в условиях адиабатического расширения, коэффициент N описывает динамику мелкомасштабных явлений.

Этой формуле для N^2 можно придать другую форму. Согласно уравнению (7.8), адиабатический градиент температуры равен

$$\theta'_A = \frac{g(\gamma_0 - 1)}{a_0 c_0^2} = \frac{g a_0 \theta_0}{C_{p0}},$$

так что

$$N^2 = \eta'_0 \theta'_A. \quad (24.16)$$

Уравнение (7.9) выражает градиент энтропии через температурный градиент

$$\eta'_0 = -\frac{C_{p0}}{\theta_0} (\theta'_0 + \theta'_A).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{C_{p0} \theta'_A}{\theta_0} (\theta'_0 + \theta'_A), \\ &= g a_0 (\theta'_0 + \theta'_A) \end{aligned} \quad (24.17)$$

— формула, которая часто является наиболее удобной.

§ 25. Частные формулы для коэффициентов

Идеальный газ. Для сухого воздуха, который можно рассматривать как идеальный газ,

$$\begin{aligned} \gamma &= 1,4, \\ a &= \frac{1}{\theta}, \\ c^2 &= \gamma R \theta. \end{aligned}$$

Отсюда адиабатический температурный градиент равен

$$\theta'_A = \frac{g(\gamma - 1)}{\gamma R} \quad (25.1)$$

и имеет постоянное численное значение $10^\circ/\text{км}$. Частота Ваянсяля дается поэтому формулой

$$N^2 = \frac{g(\theta'_0 + \theta'_A)}{\theta_0}. \quad (25.2)$$

Уравнение состояния можно представить в такой форме:

$$\rho^2 c^2 = \gamma p \rho = \frac{\gamma p^2}{R \theta},$$

так что

$$\frac{(\rho c)'}{\rho c} = \frac{p'}{p} - \frac{1}{2} \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{\rho g}{p} - \frac{1}{2} \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{g}{R \theta} - \frac{1}{2} \frac{\theta'}{\theta},$$

откуда уравнение (23.4) дает

$$\Gamma = \frac{1}{\theta_0} \left[\frac{2-\gamma}{\gamma-1} \theta'_A - \frac{1}{4} \theta'_0 \right]. \quad (25.3)$$

Пресная вода. Приближения § 4 дают выражение

$$a = 15 \cdot 10^{-6} T_M$$

для коэффициента теплового расширения пресной воды, где T_M — температура, отсчитанная от температуры максимальной

плотности (см. уравнение (4.1)). Удельная теплоемкость может быть принята за постоянную

$$C_p = 1 \text{ кал/г} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ эрг/г};$$

поэтому адиабатический градиент температуры равен

$$\theta'_A = 3,5 \cdot 10^{-10} T_M \theta_0 \text{ } ^\circ\text{C/см.} \quad (25.4)$$

Это дает $\theta'_A = 0,11^\circ \text{C/км}$ при 15°C , $p = 1 \text{ атм}$ и $\theta'_A = 0$ при температуре максимальной плотности.

Частота Вайсяля дается выражением

$$N^2 = 1,47 \cdot 10^{-2} (\theta'_0 + \theta'_A) T_M, \quad (25.5)$$

и, если принять $\rho c = 375$, т. е. постоянным, то

$$\Gamma = \frac{g}{c^2} = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1}. \quad (25.6)$$

Для всех практических целей Γ можно положить равным нулю, но численным значением N пренебрегать нельзя.

Морская вода. Приближения § 4 дают выражение

$$a = 9,3 \cdot 10^{-6} T_M$$

для теплового расширения воды с соленостью 35‰ . Отсюда соответствующие формулы для морской воды будут

$$\theta'_A = 2,2 \cdot 10^{-10} T_M \theta_0 \text{ } ^\circ\text{C/см}, \quad (25.7)$$

$$N^2 = 0,91 \cdot 10^{-2} (\theta'_0 + \theta'_A) T_M, \quad (25.8)$$

$$\Gamma = \frac{g}{c^2} = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1}. \quad (25.9)$$

Эти выражения и значения пригодны для общих оценок, но ими нельзя пользоваться для интерпретации эмпирических данных по следующим причинам:

1. Данные выше формулы для теплового расширения не дают требуемого представления общепринятых значений при высоких и при низких давлениях, а являются результатом компромисса между точностью и простотой.

2. Общепринятые значения теплового расширения, по-видимому, весьма неточны при низких температурах и высоких давлениях, какие встречаются в глубоком море.

3. Физически очевидно, что градиенты солености (которыми мы всюду выше пренебрегали) влияют на устойчивость океанской стратификации.

Этот вопрос рассматривался Хессельбергом и Свердрупом, опубликовавшими таблицы для вычисления $E = N^2/g$ при наличии градиентов солености [2].

В следующей главе даются эмпирические значения N^2 для океана. Они были определены с учетом сделанных выше замечаний. К сожалению, сейчас невозможно уточнить данные, относящиеся к условиям в глубоком море (низкие температуры в сочетании с высоким давлением).

ЛИТЕРАТУРА

1. Morse P. M., Vibration and Sound, p. 237 McGraw-Hill, New York, 1948. (Русский перевод: Морз Ф., Колебания и звук, Гостехиздат, М.— Л., 1949.)
2. Hesselberg T., Sverdrup H. V., Die Stabilitäts-verhältnisse des Seewassers bei vertikalen Verschiebungen, Bergens Museum's Aarbok, No. 15, 1915.
3. Välsälä V., Über die Wirkung der Windschwankungen auf die Pilot beobachtungen, Soc. Sci. Fennica, Commentationes Phys.—Math. II 19, 37 (1925).

Глава V

АТМОСФЕРА ЗЕМЛИ, ОКЕАНЫ И ОЗЕРА

§ 26. Введение

Разложение какого-либо эмпирического состояния движения жидкости на члены нулевого и более высоких порядков является в значительной степени произвольным. Метод возмущений, если пользоваться им полно и правильно, должен приводить к одному и тому же конечному результату независимо от того, какое состояние нулевого порядка в определенных границах было выбрано в качестве исходного.

Однако сходимость последовательных приближений может быть более быстрой, если удачно выбрано решение нулевого порядка; в самом деле, могут быть и такие решения нулевого порядка, для которых вычисления расходятся; существование таких состояний и налагает границы, упомянутые выше. На практике при приближенных вычислениях можно сделать лишь небольшое число последовательных шагов. Если состояние нулевого порядка не удалось выбрать так, чтобы сходимость была быстрой, то достигаемая степень приближения будет недостаточной. К сожалению, известно очень мало принципов, которые могли бы служить основой для такого выбора.

В гл. I мы уже обращались к статическому баротропному состоянию нулевого порядка. Представляется разумным искать такие состояния, которые возможно меньше отличались бы от наблюдаемых состояний атмосферы или океана, и выбирать одно из них как основу для вычислений. Но так как наблюдаемые состояния редко бывают статическими и баротропными, то необходимо прибегнуть к некоторой форме усреднения по пространству и времени, какой мы пользовались в гл. III. Природа такого среднего будет зависеть от цели предполагаемого вычисления.

Если эта цель климатологическая, то усреднение нужно производить по всему имеющемуся объему жидкости и по

многим сезонам. Для обсуждения явлений, характер которых меняется более быстро, усреднение следует производить по меньшим объемам и по более коротким промежуткам времени в надежде, что этим путем удастся получить более быструю сходимость для исследуемых частных явлений.

Однако можно сказать почти с полной уверенностью, что такое усреднение не даст статического состояния: усредненная скорость обычно не равна нулю. При этом может случиться, что мы будем поставлены перед необходимостью или отказаться от статического состояния как состояния нулевого порядка, или каким-либо другим путем видоизменить среднее. Это видоизмененное среднее может, кроме того, оказаться небаротропным, а это приведет к необходимости дальнейшей модификации, которая позволила бы всё же сохранить статическое состояние в качестве состояния нулевого порядка.

Таким образом, едва ли возможно говорить об *эмпирическом* состоянии нулевого порядка для любой из жидких сред на Земле, изучаемых геофизикой.

Эти трудности до некоторой степени теоретические. Если положить в основу, что состояние нулевого порядка должно быть тем статическим баротропным состоянием, которое наиболее близко подходит к некоторому среднему состоянию океана или атмосферы, то практически нетрудно определить общую природу нулевого порядка. Трудности появляются только тогда, когда делают попытку определить его с большой точностью. Поэтому в следующих параграфах будут рассматриваться эмпирические состояния нулевого порядка, но всегда нужно иметь в виду, что абсолютной является только первая значащая цифра. Часто, чтобы указать на различия в устойчивости и т. д. на различных высотах, необходимо иметь большее число значащих цифр.

§ 27. Стратификация океанов

Крупномасштабные средние. Если рассматривать сезонные изменения как эффекты первого порядка, то состояние нулевого порядка должно определяться усреднением по многим сезонам. Некоторые данные этого рода имеются для океанов. В общих чертах они подтверждают баротропное распределение переменных, но имеются и заметные отклоне-

ния. Их нужно каким-либо образом исключить, обращаясь к усреднению и по широте, и по долготе.

На рис. 9 дан график изменения скорости звука с глубиной. Он неизбежно несколько схематичен, но в глубоких частях океана имеется мало мест, которые давали бы существенно иную картину. Следует указать, что масштаб графика сильно преувеличен — полное изменение составляет всего около 3%. Для многих целей c_0 можно считать постоянной величиной. Однако минимум, достигаемый

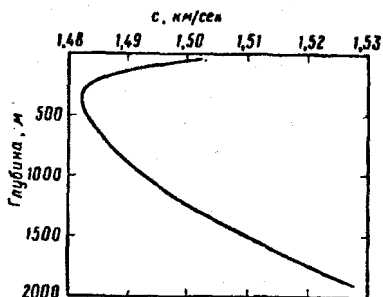


Рис. 9. Скорость звука в море.

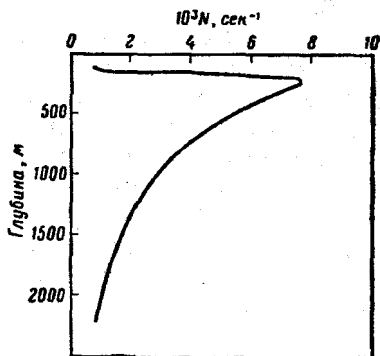


Рис. 10. Частота устойчивости N для моря.

скоростью звука, заметно влияет на распространение звука на большие расстояния. Этот минимум является результатом противоположного действия градиентов температуры и давления; глубина минимума называется „осью“ звукового канала.

Значительно более заметны изменения в коэффициенте N , показанные на рис. 10. Ясно выраженный максимум вызван довольно большим градиентом температуры на глубине нескольких сот метров. Эта область известна как постоянный слой скачка. Заметим, что в слое скачка величина $2\pi/N$ достигает своего минимального значения — около двенадцати минут. Всюду выше 2000 м $2\pi/N$ — меньше двух часов. Ниже 2000 м $2\pi/N$ возрастает, если можно верить существующим данным, примерно по экспоненциальному закону, а это сомнительно.

Температурные градиенты на больших глубинах не могут быть измерены с большой точностью, а величина коэффи-

циента теплового расширения для рассматриваемой области давлений и температур, как было отмечено, возбуждает серьезные сомнения. Отношение N/Ω является критическим безразмерным параметром; сила Кориолиса имеет вертикальную компоненту, и если $N/\Omega > 1$, то ее влияние будет иметь подчиненный характер сравнительно с влиянием, связанным с термобарическими силами. Если же $N/\Omega < 1$, то вертикальная компонента силы Кориолиса будет доминировать над термобарической. Эти вопросы рассматриваются более полно в § 52.

Табл. 1 была получена с помощью приближенных формул § 25. Она показывает, что если температурный градиент на больших глубинах положителен, то $N/\Omega > 1$. Однако отрицательный градиент температуры, равный 1 град/10 км, уже достаточен, чтобы понизить значение отношения до нуля. Это порядок величины отрицательного градиента, наблюдаемого ниже 5000 м глубины. Едва ли можно заключить, что отношение N/Ω всюду больше единицы, и было бы крайне желательно располагать более обширными сведениями по этому вопросу.

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ N НА ГЛУБИНЕ 4000 м В ОКЕАНЕ
ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ
ГРАДИЕНТОВ И 0°C

θ'_0 $^\circ\text{C}/\text{км}$	$10^4 N^2$, сек^{-2}	$10^4 N$, сек^{-1}	N/Ω
-1,0	-139	—	—
-0,1	0	0,0	0,0
0,0	+ 14	3,7	2,6
+0,1	+ 28	5,2	3,6
+1,0	+141	12	8,3

Коэффициент Γ имеет в океане настолько малые значения, что позволительно положить его в уравнениях равным нулю. Оценку величины этого коэффициента можно получить из формулы (§ 25)

$$\Gamma = g/c^2 = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км},$$

так что

$$\frac{2\pi}{T} = 1420 \text{ км/цикл.}$$

Эту величину следует сравнивать с глубиной океанов, но не с их горизонтальным протяжением. Так как средняя глубина D составляет около 5 км, то отсюда следует, что TD будет всего около $1/50 \text{ рад}$, а этим для многих целей можно пренебречь.

Мелкомасштабные средние. Если усреднение (или сглаживание) распространяется на небольшие области пространства и небольшие интервалы времени, то предыдущее описание не требует изменений, исключая глубины менее 200 м. Этот верхний слой является ареной сезонных изменений и в открытом океане состоит из самого верхнего слоя почти изотермической воды с устойчивостью $N^2 = g\alpha_0 \theta'_A$ (§ 24). Если принять, что наибольшая температура равна 30°C и наибольшая соленость 35‰ , то $N = 10^{-3} \text{ рад/сек}$. Однако при 0°C и той же солености $N = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ рад/сек}$. Так как $\Omega = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ рад/сек}$, отношение N/Ω будет тогда иметь критическую зависимость от малых градиентов температуры и солености. Вообще формулы § 25 при этих условиях недостаточно точны для вычисления N из эмпирических данных.

Этот изотермический слой, или слой перемешивания, всего отчетливее выражен зимой и может тогда простирается до глубины постоянного слоя скачка. Летом он менее развит и может вовсе не существовать. В области между слоем перемешивания и постоянным слоем скачка температурные градиенты выражены более отчетливо и могут давать один и более максимумов N . Эти максимумы могут быть довольно высокими, но они ограничены слоями сравнительно малой толщины, как это видно из рис. 11. Могут существовать

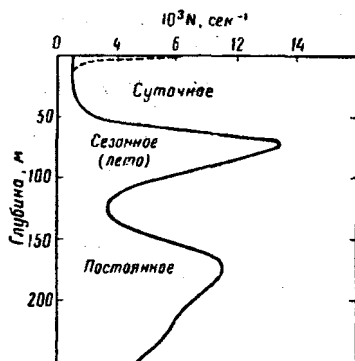


Рис. 11. Иллюстрация сезонного и суточного изменений устойчивости верхних слоев моря.

также заметные градиенты солености, которые смещают и искажают постоянный слой скачка.

Сезонный цикл с некоторой идеализацией можно описать следующим образом. После зимних штормов слой перемешивания очень глубокий; ниже его устойчивость резко возрастает до максимума, а затем монотонно убывает ниже слоя скачка. Поздним летом, после продолжительной теплой, сравнительно спокойной погоды, слой перемешивания отсутствует и устойчивость неравномерно возрастает с глубиной. Можно указать на один или больше ясно выраженных максимумов — сезонных слоев скачка — выше постоянного слоя скачка. Устойчивость в этих мелких максимумах может быть очень велика и полностью исчезает после нескольких штормов и более низких температур воздуха осенью.

В областях слабых ветров и высоких температур воздуха могут иметь место также и суточные эффекты. Обычно это поверхностные слои с высокой устойчивостью, которые становятся отчетливо выраженными вскоре после полудня и исчезают поздним вечером.

§ 28. Стратификация пресных озер

Тепловой режим пресных озер настолько изменчив, что состояния нулевого порядка, базирующиеся на годовичных средних, в значительной степени

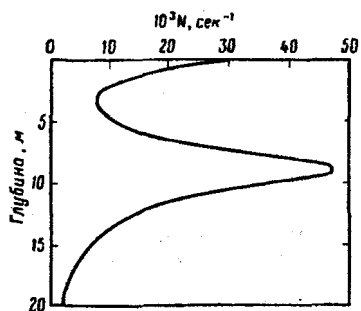


Рис. 12. Типичное изменение частоты устойчивости с глубиной в пресном озере (летний сезон).

бесполезны. Здесь вообще средние, распространенные на срок свыше нескольких дней, имеют сомнительную ценность (исключая зиму).

В течение летних месяцев в озерах и водохранилищах имеется тенденция к развитию сильно выраженного слоя скачка, как это видно на рис. 12. Минимум устойчивости часто или почти всегда располагается между слоем скачка и поверхностью озера. Типичные значения

N в 5—10 раз больше, чем в океане. В этой стратификации имеется значительное разнообразие: так, минимум

устойчивости выше слоя скачка может быть на самой поверхности; максимум в самом слое скачка может быть или ниже и шире или выше и уже, чем это показано на рис. 12.

Существует как будто грубая корреляция между устойчивостью и размерами водной массы, причем малые водные массы имеют тенденцию быть более устойчивыми. Эта закономерность распространяется даже на бассейны с водой. В своей классической работе по турбулентности Рейнольдс уделял значительное внимание использованию возможно более спокойной и изотермической воды. Его успокоительный бассейн имел 46 см глубины и горизонтальное сечение $46 \text{ см} \times 183 \text{ см}$. Несмотря на осторожность Рейнольдса, значения N в различных экспериментах были от 0,03 до 0,16 рад/сек; можно быть уверенным в том, что в отсутствие специальных предосторожностей встречались даже большие значения.

Зимой на эту общую корреляцию накладывается другой эффект, который связан с температурой максимальной плотности пресной воды. При первом же случае, когда температура воздуха падает ниже 4°C и имеется ветер, развивается сложный переходный процесс, который называется „переворачиванием“ (поверхностных слоев). Конечный результат этого процесса заключается в уменьшении вертикальных градиентов температуры и в понижении температуры всей воды в озере до значения, близкого к температуре максимальной плотности воды. Весною вертикальные температурные градиенты восстанавливаются несколько более равномерно.

Черч [2] изучил эти явления на оз. Мичиган. В сентябре 1942 г. он нашел, что озеро обладало сильной стратификацией. На поверхности был слой с малым температурным градиентом при температуре около 20°C . Слой скачка находился на глубине 10—20 м и температура упала до 10°C в слое менее 5 м толщины. Ниже этого слоя вертикальный градиент был все еще ясно выражен — на глубине 70 м температура была $4,5^{\circ}\text{C}$.

Это сильно отличается от его наблюдений в феврале 1942 г.; тогда температура во всех точках одного и того же разреза заключалась в интервале от $1,0$ до $3,75^{\circ}\text{C}$. Кроме того, вертикальные температурные градиенты были почти неизмеримо малы; наиболее холодная вода была вблизи берега, самая теплая в центре озера. Немного идеализируя, но основываясь все же на скудных данных, можно было

рассматривать изотермические поверхности как цилиндры, имевшие своим основанием дно. Наклон осей этих цилиндров к горизонту трудно определить с большой точностью, но он почти наверное был больше 10° ; это наводит на мысль о батистрофическом движении.

Зимняя температура озера не равна в точности температуре максимальной плотности. В то же время ясно, что малость вертикальных температурных градиентов и коэффициента расширения понижает устойчивость до очень малого значения. В основу табл. 2 была положена приближенная

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЯ N ДЛЯ ПРЕСНЫХ ОЗЕР ДЛЯ
РАЗЛИЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И РАЗЛИЧНЫХ
ТЕМПЕРАТУРНЫХ ГРАДИЕНТОВ

T_m , °C	θ'_0 °C/км	$10^4 N_1$, сек $^{-2}$	$10^4 N_2$, сек $^{-1}$	$N/2$
-0	-1	30	5,5	3,8
	0	0,6	0,8	0,5
	+1	-30	—	—
-1	-1	15	3,9	2,7
	0	0,15	0,4	0,3
	+1	-15	—	—
+1	-1	-15	—	—
	0	0,15	0,4	0,3
	+1	+15	3,9	2,7
+2	-1	-30	—	—
	0	0,6	0,8	0,5
	+1	+30	5,5	3,8

формула § 25. Изучение этой таблицы и эмпирических данных по оз. Мичиган позволяет думать, что N/Q меньше единицы всюду в значительной части его объема. При этом неизбежно возникает мысль о том, что подходящим состоянием нулевого порядка здесь может быть состояние, характеризующееся значениями $T_m = 0$ и $N = 0$, и что наблюдаемые отклонения от этого состояния должны рассматриваться как эффекты скорее первого, чем нулевого порядка.

§ 29. Стратификация земной атмосферы

На рис. 13, *а* показано изменение температуры в земной атмосфере с высотой. Терминология для различных слоев твердо еще не установилась, но область *St* примерно соответствует тропосфере, *mM* — стратосфере, *Mn* — мезосфере и *n∞* — термосфере. Различные наблюдатели помещают

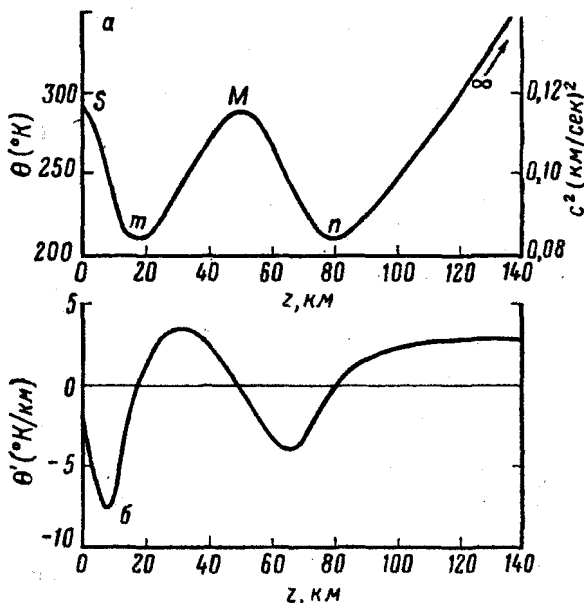


Рис. 13. Изменение с высотой температуры и температурного градиента в земной атмосфере.

а — температура атмосферы; *б* — температурный градиент.

экстремумы на несколько различных высотах, а также приписывают различные значения экстремальным температурам [7], но все соглашаются в том, что касается общего характера кривой; некоторые авторы, впрочем, полагают, что наклон кривой претерпевает разрывы.

Так как $c^2 = \gamma R \theta$, скорость звука дается тем же самым графиком. Мы видим, что она меняется в более широких пределах, чем в океане, и едва ли может трактоваться как постоянная. На рис. 13, *б* дан график температурного градиента, полученный из кривой рис. 13, *а*.

На рис. 14 дается изменение N^2 с высотой, вычисленное по формулам § 25. Мы видим, что максимум в А соответствует периоду $2\pi/N = 4,5$ мин. Эта максимальная устойчивость в стратосфере, таким образом, несколько больше, чем

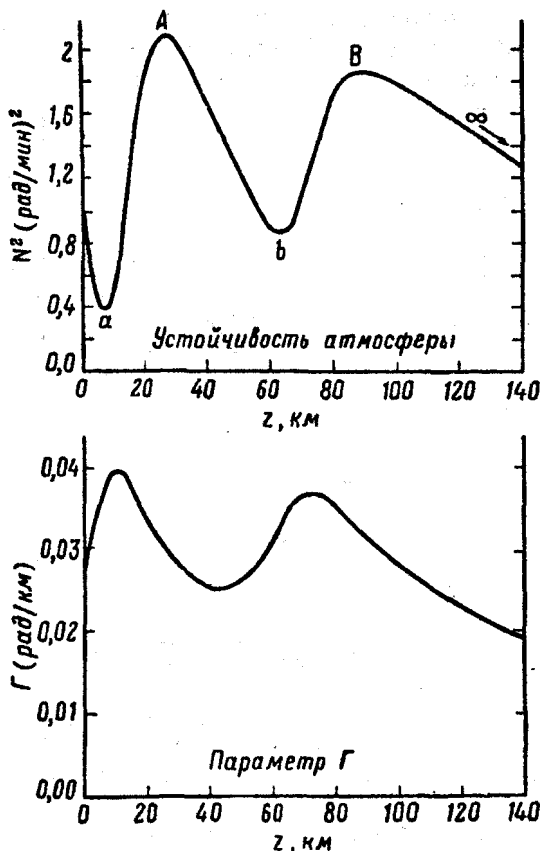


Рис. 14. Изменение с высотой параметров устойчивости N и Γ в земной атмосфере.

устойчивость океана в слое скачка, однако не на порядок величины. У поверхности Земли устойчивость сильно зависит от метода сглаживания чрезвычайно изменчивых данных, но по порядку величины $N = 1$ рад/мин.

На рис. 14 дано также изменение параметра Γ ; его значения для атмосферы значительно больше, чем для океана,

а так как атмосфера имеет неограниченное протяжение, недопустимо принимать Γ равным нулю, не выясняя, к каким последствиям приведет такое допущение.

Хотя для очень больших высот имеется весьма мало данных и хорошо известно, что воздух на таких высотах уже

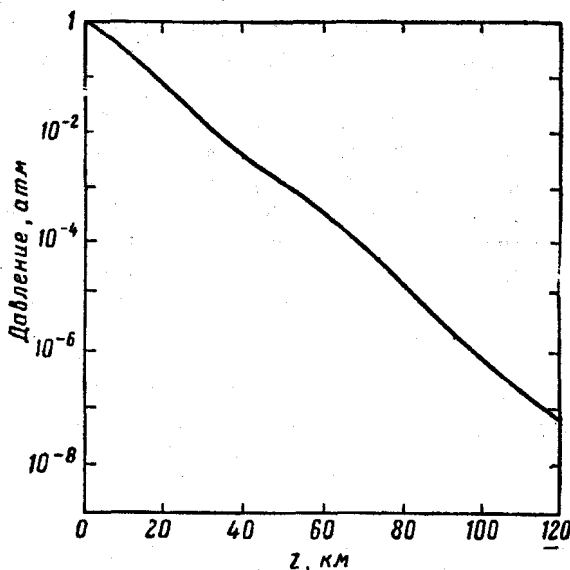


Рис. 15. Изменение с высотой давления в земной атмосфере.

не подчиняется законам для непрерывной жидкости, практически необходимо экстраполировать температуру для бесконечно больших высот. Кривая на рис. 13 была продолжена так, чтобы показать постоянный градиент температуры в $2,8^\circ\text{C}/\text{км}$ выше 120 км. Это не противоречит имеющимся данным, хотя возрастание температуры не может продолжаться неизменно до бесконечности. Указанный температурный градиент соответствует давлению на больших высотах, которое изменялось бы обратно пропорционально двенадцатой степени высоты (см. § 8).

На рис. 15 дано изменение давления с высотой, полученное из температурной кривой рис. 13. В связи с тем что этот график дает очень низкие давления, естественно возник-

кает вопрос о том, насколько законно рассматривать разреженные газы как непрерывные жидкости. На высоте 100 км давление составляет около 10^{-6} атм и средняя длина свободного пути молекул воздуха около 10 см. Поэтому пользоваться непрерывной теорией позволительно только при условии, что масштаб явлений несколько больше 1 м. Таким образом, даже на этой высоте для приложения теории остается еще много возможностей. На больших высотах минимальный размер будет возрастать.

Кинематическая вязкость воздуха на высоте 100 км приблизительно в 10^6 раз больше, чем на уровне моря; в таком же отношении находятся и другие диссипативные коэффициенты. Это очень большие значения, однако пренебрежение ими все же оправданно, если масштаб явления достаточно велик.

На высотах, много больших 200 км, сомнительно, чтобы настоящая теория вообще была применима. Тем не менее практически необходимо распространить решение уравнений до бесконечности, как это было замечено выше. Поскольку это по общему признанию является несколько искусственным, предпочтительнее „накрыть атмосферу крышкой“ или даже наложить более искусственные граничные условия на конечной высоте.

Если быть ближе к языку физики, то вопрос связан с судьбой энергии, излучаемой вверх от возмущений на малых высотах. Эта энергия в значительной своей степени отражается максимумами A и B и возвращается на более низкие уровни; та небольшая ее доля, которой удастся проникнуть через эти барьеры, поглотится в областях выше, где средняя длина свободного пути очень велика. Поглощение в этих областях оказывает лишь незначительное влияние на явления, протекающие на более низких уровнях. Более того, если бы эта энергия распространялась до бесконечно больших высот без поглощения, то отличие было бы невелико. Такие соображения дают ключ к соответствующей математической идеализации, когда в ней возникнет необходимость.

§ 30. Планетарное вращение и циклогенез

До сих пор вращение Земли вводилось в гидродинамические уравнения без комментариев. Возникает вопрос, будет ли сила Кориолиса и $\times \Omega$ оказывать на движения за-

метное влияние. Этот член появляется в состоянии нулевого порядка в силу того, что жидкости находятся в покое только в системе координат, вращающейся вместе с Землей [3]. В инерциальной системе координат жидкость описывалась бы как движущаяся подобно твердому телу с угловой скоростью $\Omega/2$. В этом параграфе будет дан короткий схематический обзор истории вопроса о влиянии вращения Земли на ее атмосферу. В следующем параграфе будет показано, что уравнения поля воплощают эти идеи в удовлетворительной математической форме.

Ранние идеи. Важность вращения Земли в метеорологических и океанографических явлениях неоднократно подчеркивалась очень давно. Большинство ранних авторов удовлетворялись установлением одного простого факта: относительная скорость двух неподвижных точек на одном и том же меридиане вращающейся Земли зависит от разности их широт и может быть очень заметной. Понятие силы Кориолиса не появлялось в литературе до 1835 г. [3], хотя Лаплас [9] вывел правильные уравнения несколько раньше (около 1805 г.); возможно, что они были известны Эйлеру даже ранее этого.

Гадлей [5] в 1735 г. воспользовался этой концепцией относительного движения для объяснения пассатов. Он предположил, что вследствие этого движения линии тока круговых вихрей, рассмотренных в § 18, будут отклоняться так, что их скорость на уровне моря приобретет слагающую, направленную на запад относительно твердой Земли. (Точка на экваторе твердой Земли имеет скорость, направленную на восток относительно других точек на ее меридиане.) От его внимания, естественно, ускользнуло то, что другим эффектом вращения Земли является нарушение стационарности вихрей, существование которых он постулировал. Это явилось следствием того, что Гадлей не исследовал динамику проблемы.

Наблюдения Редфилда и Рида; циклоны. Приблизительно в то же время, когда понятие о силе Кориолиса развивалось физиками, свой независимый вклад в это дело внесли два проницательных наблюдателя. Говорят, что один из них, Редфилд, наблюдал опустошения, произведенные ураганом, пересекшим Новую Англию. Совершив поездку по району непосредственно после урагана, он заметил, что

деревья, вырванные с корнем, указывали направление ветра, и сделал правильное заключение, что воздушные массы, вовлеченные в ураган, имели вращательное движение. Его наблюдения и наблюдения Рида были резюмированы Чарльзом Трэси [10] в 1843 г. следующим образом.

„Эти факты свидетельствуют о том, что в сильных бурях, охватывающих обширные районы, а также в свирепых торнадо, которые опустошают небольшую область, имеются два движения: вращательное и поступательное; что вращательное движение имеет исключительно бурный характер и ему свойственно одно и то же направление вращения: справа налево в северном полушарии и обратное — в южном... Эти утверждения... были восприняты с сомнением и недоверием многими из-за незнания причины, которой можно было бы приписать названные явления“.

Теория Трэси. Очевидно, Трэси не был осведомлен о работе своих предшественников, так как он выдвигает объяснение, которое в существенных чертах совпадает с объяснением пассатов Гадлея. Подчеркивается роль восходящих потоков воздуха: „Необходимое условие — центростремительное движение — может возникать всякий раз, когда центральная область, подверженная интенсивному нагреванию, окружена холодной атмосферой“. Дается отчетливое объяснение роли вращения Земли в отклонении центростремительного движения, а также содержится следующее замечание: „В северных штатах огонь, достаточно большой, чтобы подействовать на атмосферу на площади в несколько акров, может обладать силой, необходимой для образования воздушного вихря, и действительно может образовать его, если день спокойный“.

Мы хотели бы привлечь внимание читателя к высказыванию о восходящем и центростремительном движении и к отсутствию указания на возмущения давления. Важность последнего была подчеркнута Эрманом в 1868 г. [4]; однако Эрман пренебрег вращением Земли.

Теория Ганна. Идеи американских ученых не были сразу же восприняты в Европе. В 1875 г. они были вновь выдвинуты Ганном [6], который их значительно видоизменил, включив эрмановские градиенты давления. Он говорит: „Но-

вая теория... первой причиной притока воздуха со всех сторон считает образование некоторого локального уменьшения давления, а сопутствующее возникновение вихря — следствием суточного вращения Земли*. Работа Ганна, в основном нематематическая, содержит формулу, аналогичную общепринятому теперь „уравнению геострофичности“ (§ 15). Он рассматривает стационарный ветер со скоростью v в направлении оси x и заключает, что изобарические поверхности будут тогда наклонены в направлении оси y . Его формула по существу следующая:

$$g \frac{\partial h}{\partial y} = \Omega v \sin \varphi,$$

где h — высота поверхности и φ — широта рассматриваемого места. Однако Ганн не воспользовался этой формулой для объяснения отклонения центростремительных потоков Трэси; его целью было только „сделать несколько более ясным вопрос о влиянии вращения Земли на происхождение барометрических разностей“.

Циклоны и антициклоны; завихренность. Вращательные движения Трэси называют теперь циклоническими движениями. Простейшей иллюстрацией циклона может служить установившееся геострофическое движение (§ 15), когда оно происходит вокруг минимума давления. Если установившееся геострофическое движение происходит около максимума давления, оно называется антициклоническим. Однако циклоническое движение не обязательно должно быть установившимся. За последнее время с концепцией циклона (или антициклона) связывается более общая концепция вихря.

Пусть u , v , w — слагающие скорости в прямоугольных координатах, тогда

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

— вертикальная слагающая вектора вихря (§ 14). В циклоне $\tilde{\omega}$ не равно нулю, однако не все движения, для которых $\tilde{\omega} \neq 0$, будут циклонами или антициклонами. Таким образом, отличное от нуля значение $\tilde{\omega}$ есть необходимое, но не достаточное условие для циклонического или антициклонического движения.

Теоремы о вихре Гельмгольца и Бьеркнеса. Значение концепции вихря в связи с циклоническим движением становится ясным благодаря двум теоремам о вихре (см. [8, гл. VII]). Гельмгольцем в 1858 г. было впервые доказано, что если привести в движение несжимаемую невязкую жидкость, выводя ее из состояния покоя помешиванием или приливанием новой порции, то вихрь в этом ее движении будет равен нулю. Точная связь этой теоремы с метеорологическими задачами непосредственно не ясна, но из теоремы следует как будто указание, что в такой жидкости нельзя с легкостью образовать циклоны. Кроме того, вязкость не является важным метеорологическим или океанографическим явлением. Это говорит о том, что циклогенез должен быть связан или со сжимаемостью жидких сред геофизики, или с их вращением.

Вторая теорема обычно приписывается В. Бьеркнесу (1918). Верно, во всяком случае, то, что она заняла важное место в метеорологической литературе благодаря его работе. Эта теорема утверждает, по существу, что всякий раз, когда состояние тяжелой несжимаемой жидкости не является баротропным (§ 7), производная по времени от ее вихря будет отлична от нуля.

Свободное движение тяжелой жидкости описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g \nabla \chi = 0, \quad (30.1)$$

если пренебречь силой Кориолиса. Член $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ является усложнением в этом уравнении и на время им также можно пренебречь. Взяв ротор от всех членов, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p. \quad (30.2)$$

Производная по времени от вихря $\nabla \times \mathbf{u}$ пропорциональна, таким образом, векторному произведению градиентов плотности и давления. Для несжимаемой жидкости постоянной плотности $\nabla \rho = 0$ и, следовательно, $\nabla \times \mathbf{u}$ постоянно во времени. В баротропном состоянии два градиента имеют одно и то же (вертикальное) направление, и их векторное произведение равно нулю. Когда два градиента имеют различные направления, состояние жидкости называется бароклинным.

В бароклиных состояниях изобарические и изопикнические поверхности пересекаются.

Когда принимаются во внимание члены $u \cdot \nabla u$, предыдущее заключение усложняется, но в основном остается неизменным (см. также § 14). Эта бароклиная теория циклогенеза сильно зависит от нелинейных членов

$$\nabla \times (u \cdot \nabla u) \quad \text{и} \quad \nabla p \times \nabla p$$

и поэтому представляет большие математические трудности. Можно считать определенным, что этот тип циклогенеза имеет место в атмосфере, особенно в таких бурных штормах, как торнадо. Затем он еще больше усложняется за счет осадков.

Однако ясно, что к этому бароклинному циклогенезу идеи Гадлея и Трэси имеют мало отношения. Существенным пунктом в их рассуждениях было то, что вращение Земли может вызвать циклогенез другим путем (см. также [1]).

§ 31. Циклогенез первого порядка

Теорию циклогенеза Трэси легче всего рассмотреть на основе уравнений поля. Для начала будем предполагать, что поверхности уровня плоские. Пусть U , V , W — декартовы составляющие U , причем W — вертикальная составляющая. Во всех случаях принимается чистая конвекция так, что $F = 0$.

Отсутствие вращения. Если $\Omega = 0$, то уравнение (23.1) имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -c \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (31.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -c \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (31.2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -c \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \Gamma P \right) + N^2 Q. \quad (31.3)$$

Определяя заново

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (31.4)$$

легко получить из первых двух уравнений

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = 0, \quad (31.5)$$

так что циклогенез первого порядка в этом случае отсутствует.

Вращение. Если имеется вращение, то оси можно выбрать так, что

$$\Omega = \Omega_H j + \Omega_V k \quad (31.6)$$

и уравнения (31.1) и (31.2) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - \Omega_V V + \Omega_H W &= -c \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \Omega_V U &= -c \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \quad (31.7)$$

Исключая P перекрестным дифференцированием, получаем

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \Omega_V \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \Omega_H \frac{\partial W}{\partial y} = 0. \quad (31.8)$$

В большинстве случаев член, пропорциональный Ω_H , будет мал, так как мала вертикальная скорость; поэтому производная по времени от $\tilde{\omega}$ будет пропорциональна горизонтальной конвергенции

$$- \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right).$$

Вихрь $\tilde{\omega}$ является таким же обобщением вращательного движения Трэси, как горизонтальная конвергенция является обобщением его центростремительного движения.

При этих же условиях уравнение (23.2) будет

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - \Gamma W \right) = G. \quad (31.9)$$

Снова пренебрегая всеми членами с вертикальной скоростью W , за исключением $\partial W / \partial z$, получаем из уравнений (31.8) и (31.9)

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = \Omega_V \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial z} - G \right). \quad (31.10)$$

Отсюда видно, что нагревание, вертикальный градиент W и изменения давления — факторы, порождающие вихрь во вращающейся атмосфере.

Другое соотношение между вихрем и горизонтальной дивергенцией можно получить из уравнения (31.7) дифференцированием

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \Omega_V \tilde{\omega} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right). \quad (31.11)$$

Следовательно, и вихрь, и горизонтальная конвергенция в общем согласии с идеями Ганна и Эрмана порождают градиенты давления.

Горизонтальную конвергенцию можно исключить из уравнений (31.8) и (31.11); и это дает (если, как обычно, пренебречь W)

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial t^2} + \Omega_V^2 \tilde{\omega} = \Omega_V c \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right), \quad (31.12)$$

что является выражением прямой связи между циклогенезом и горизонтальными изменениями давления.

Вращение со сферическими поверхностями уровня. Когда принимается во внимание кривизна поверхности уровня, соответствующие вычисления будут совершенно аналогичными, но несколько более сложными. Воспользуемся меркаторскими координатами (см. приложение):

$$\begin{aligned} \Omega_H &= \Omega \operatorname{sech} \mu, \\ \Omega_V &= \Omega \operatorname{th} \mu. \end{aligned} \quad (31.13)$$

Соответствующие определения вертикального вихря ω и горизонтальной конвергенции Δ будут

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\operatorname{ch} \mu}{r} \left[\frac{\partial U_s}{\partial \lambda} - \operatorname{ch} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (U_s \operatorname{sech} \mu) \right], \\ \Delta &= - \frac{\operatorname{ch} \mu}{r} \left[\frac{\partial U_s}{\partial \lambda} + \operatorname{ch} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (U_s \operatorname{sech} \mu) \right]. \end{aligned} \quad (31.14)$$

Уравнения (31.7) заменяются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_s}{\partial t} - \Omega_V U_s + \Omega_H U_c &= - \frac{c \operatorname{ch} \mu}{r} \frac{\partial P}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial U_s}{\partial t} + \Omega_V U_s &= - \frac{c \operatorname{ch} \mu}{r} \frac{\partial P}{\partial \mu}, \end{aligned} \quad (31.15)$$

и после некоторых алгебраических преобразований мы получим следующее уравнение, аналогичное уравнению (31.8):

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - \Omega_V \Delta + \frac{1}{r} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{U} - \frac{\Omega_H}{r} \frac{\partial U_\zeta}{\partial \mu} = 0. \quad (31.16)$$

Дополнительный член $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{U}/r$ всегда очень мал по сравнению с другими членами, и им можно пренебречь вместе с членом, содержащим Ω_H .

Уравнение (31.9) заменяется уравнением

$$\frac{\partial P}{\partial t} - c\Delta + c \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U_\zeta) - \Gamma U_\zeta \right] = G, \quad (31.17)$$

откуда можно получить уравнение, аналогичное (31.10), практически того же вида.

Уравнение, аналогичное (31.11), также можно получить из уравнения (31.15) в форме

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \Omega_V \tilde{\omega} = - \frac{\Omega_H}{r} U_\zeta - \frac{\Omega}{r} \frac{\partial U_\zeta}{\partial \lambda} + \frac{c \operatorname{ch}^2 \mu}{r} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} \right]. \quad (31.18)$$

Пренебрегая малыми членами, получим тогда уравнение, аналогичное (31.12):

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial t^2} + \Omega_V^2 \tilde{\omega} = \frac{c \Omega_V \operatorname{ch}^2 \mu}{r} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} \right]. \quad (31.19)$$

Резюме. Таким образом, было показано, что классические идеи циклогенеза на вращающейся Земле неявно заключены в уравнениях полей первого порядка. Они не предполагают бароклинного циклогенеза, и впервые он появляется в вековых уравнениях, полученных в результате вычислений второго порядка (см. § 14). В случае спокойных крупномасштабных атмосферных явлений бароклинные члены, вероятно, являются причиной лишь малых скоростей изменения в $\tilde{\omega}$ сравнительно с теми, которые рассматривались здесь. Однако эти вековые изменения могут накапливаться за длительные периоды времени и значительно искажать движения первого порядка. Когда интенсивность возмущения увеличивается, а его масштаб уменьшается, значения этих вековых изменений будут, несомненно, возрастать.

ЛИТЕРАТУРА

- 1a. Abbé C., The mechanics of the Earth's atmosphere, Smithsonian Miscellaneous Collections, 51, No. 4, Washington, D. C., 1910.
- 1b. Abbé C., Annual Report, Smithsonian Institution, pp. 376—478, Washington, D. C., 1887.
2. Church P. E., The Annual Temperature Cycle of Lake Michigan. Univ. of Chicago, Dept. of Meteorology, Part I, 1942; Part II, 1945.
3. Coriolis G., Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps, J. École Polytechnique, 5, 142, Paris (1835).
4. Erman A., On the steady motion or the average condition of the average condition of the Earth's atmosphere, Astronomische Nachrichten, 70, 369 (1868).
5. Hadley G., Concerning the cause of the general trade winds, Phil. Trans. (London), 39, 58 (1735).
6. Hann J., On the relation between the difference of pressure and the velocity of the wind..., Z. Austrian Meteorological Assoc., 10, 81 (1875).
7. Kaplan J., Schilling G. F., Kallman H. K., Methods and results of upper atmosphere research, Univ. of California, Inst. of Geophysics; Sci. Rep., No. 3, 1954.
8. Lamb H., Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, 6th ed., 1932. (Русский перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М. — Л., 1947.)
9. Laplace P. S., Mécanique céleste, 4 vols. (Trans. by N. Bowditch), Boston, 1832. Part I, Book IV, Section 3. p. 543.
10. Tracy C., On the rotary action of storms, Am. J. Sci. Arts, 45, 65 (1843).

Глава VI

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

§ 32. Введение

В этой главе дается краткая сводка наиболее важных теорем, относящихся к уравнениям поля. Эти уравнения являются обобщениями волнового уравнения

$$c^2 \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Мы будем предполагать, что читатель знаком с математическим аппаратом для его решения и поймет интересные нас теоремы как обобщения теорем, которые справедливы для волнового уравнения.

Решения уравнений поля можно классифицировать несколькими путями; в интересах ясности потребуется дать некоторые предварительные определения. Если параметры полей U , P , Q непрерывны и дифференцируемы во всех точках, занятых жидкостью, то можно говорить о регулярном решении. Другие решения имеют до известной степени характер ударных волн и испытывают разрывы на некоторых движущихся поверхностях; строго говоря, они являются нерегулярными решениями, и рассмотрение вопроса сильно упростится, если принять это точное определение регулярного решения. Если жидкость простирается в бесконечность, то дальнейшим требованием, которое налагается на регулярные решения, будет требование о том, чтобы параметры полей не становились бесконечно большими даже на больших расстояниях от начала координат.

Все регулярные решения дают конечные значения плотности и потока внешней энергии, как было определено в § 21 и 22. Если жидкость занимает лишь конечный объем, то ее полная энергия также будет конечной; но если объем бесконечно большой, то полная энергия жидкости может быть и бесконечно большой. Решения, соответствующие конечной

полной энергии, называются ограниченными, остальные — неограниченными. Это вторая классификация. Неограниченным решениям свойственны некоторые парадоксы, источником которых является возможность того, что энергия излучается в бесконечность и уходит из частей жидкости, расположенных на конечном расстоянии. Предполагается, что читатель настолько знаком с волновым уравнением, что это позволит ему разрешать подобные парадоксы, когда они будут возникать.

§ 33. Собственные решения типа собственных колебаний

Уравнения поля имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} + c(\nabla + \Gamma_0)P - N^2 Q \zeta + \Omega \times U &= F, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + c(\nabla - \Gamma_0) \cdot U &= G, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \zeta \cdot U &= H,\end{aligned}\tag{33.1}$$

$$\begin{aligned}n \cdot U &= 0 \quad \text{на твердых границах,} \\ c \frac{\partial P}{\partial t} &= g \zeta \cdot U \quad \text{на свободной поверхности.}\end{aligned}\tag{33.2}$$

Методы решения этой краевой задачи связаны с тем фактом, что левые части написанных выше уравнений не содержат явно t ни в одном из коэффициентов c , N , Γ .

В число свободных решений, для которых $F=0$, $G=0$ и $H=0$, войдут поэтому некоторые решения, имеющие вид

$$U = U_e e^{-i\omega t}, \quad P = P_e e^{-i\omega t}, \quad Q = Q_e e^{-i\omega t}, \tag{33.3}$$

где ω — некоторая постоянная, а U_e , P_e , Q_e не зависят от t . Если эти частные решения регулярные (не обязательно ограниченные), то они называются собственными решениями типа собственных колебаний. Чтобы избежать бесполезных исключений, тривиальные решения $U_e \equiv 0$, $P_e \equiv 0$, $Q_e \equiv 0$ не будут рассматриваться в дальнейшем и не будут включаться в число собственных решений.

Собственные решения типа собственных колебаний удовлетворяют, таким образом, уравнениям

$$\begin{aligned} i\omega U_e &= c(\nabla + \Gamma_e)P_e - N^2 Q_e \zeta + \Omega \times U_e, \\ i\omega P_e &= c(\nabla - \Gamma_e) \cdot U_e, \\ i\omega Q_e &= \zeta \cdot U_e. \end{aligned} \quad (33.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{U}_e &= 0 \quad \text{на твердых границах,} \\ g\zeta \cdot \mathbf{U}_e + i\omega c P_e &= 0 \quad \text{на свободной поверхности.} \end{aligned} \quad (33.5)$$

Необходимо заметить, что граничные условия включаются как в определение собственного решения, так и в требование регулярности.

В общем случае последние пять уравнений не будут иметь регулярного решения (отличного от тривиального); они будут иметь нетривиальное решение только для некоторых значений ω . Последние называются собственными частотами или собственными значениями. Если параметр $N^2 > 0$ для всех точек пространства, занятых жидкостью, то все собственные значения будут действительными; если $N^2 < 0$ в отдельных точках жидкости, то некоторые из собственных значений могут быть мнимыми или комплексными. В дальнейшем будем всегда предполагать, что $N^2 > 0$ во всех точках жидкости, так что нужно будет рассматривать только действительные собственные значения¹.

Собственные решения будут вообще комплексными функциями положения, так как i входит явным образом в уравнения (33.4) и (33.5). Легко видеть, что если U_e, P_e, Q_e — собственное решение, соответствующее ω , то U_e^*, P_e^*, Q_e^* (звездочка указывает на комплексно-сопряженную величину) будет решением для $-\omega$. Отсюда, если ω является собственным значением, то $-\omega$ также будет собственным значением. Это иногда позволяет не рассматривать отрицательные значения ω . Так как собственные решения комплексны, оказывается необходимым видоизменить определения плотности энергии и потока энергии; наиболее пригодными определе-

¹ Напомним читателю, что условие $N^2 > 0$ означает устойчивую стратификацию среды. — Прим. ред.

ниями будут следующие:

$$E = \frac{1}{2c} [|U_e|^2 + |P_e|^2 + N^2 |Q_e|^2]. \quad (33.6)$$

$$J = \frac{1}{2} [P_e U_e^* + P_e^* U_e] \quad (33.7)$$

Пусть a — некоторая численная константа, а остальные обозначения те же, что в последнем параграфе. Тогда aU_e , aP_e , aQ_e будет вторым собственным решением, соответствующим ω . Более удобно такие два решения не рассматривать как различные, или, точнее, одно из них можно выбрать в качестве типичного для всех образованных этим путем решений и не обращать внимания на остальные. Если собственное решение ограничено, то выберем это типичное решение так, чтобы полная энергия жидкости была равна единице. В случае неограниченных собственных решений нужно будет принять какой-нибудь другой метод выбора типичного решения, которое в дальнейшем будет всюду называться собственным решением типа собственных колебаний, соответствующим ω .

§ 34. Теорема разложения

Собственные решения типа собственных колебаний важны потому, что из них можно построить наиболее общее ограниченное решение уравнений (33.1) и (33.2), причем для этого построения будут нужны только суммирования и интегрирования.

Теорема имеет различные формы, причем простейшая из них относится к случаю конечного объема жидкости. В этом случае она аналогична разложению функции в ряд Фурье. Собственные значения образуют тогда счетное множество, т. е. они могут быть перенумерованы с помощью индекса n , принимающего только целые значения. Пусть U_n , P_n , Q_n — собственные решения типа собственных колебаний, соответствующие собственной частоте ω_n ; подготовительная теорема утверждает, что собственные решения могут быть выбраны так, что

$$\begin{aligned} \iiint [U_n^* U_m + P_n^* P_m + N^2 Q_n^* Q_m] \frac{1}{2c} dx dy dz = \\ = 0, \quad \text{если } n \neq m, \\ = 1, \quad \text{если } n = m. \end{aligned} \quad (34.1)$$

Интеграл в этом уравнении следует распространить на весь объем, занимаемый жидкостью; это — теорема ортогональности. На языке этих собственных решений можно высказать следующую теорему разложения.

Теорема разложения (для конечного объема). Каждое регулярное решение уравнений (33.1) и (33.2) имеет вид

$$\begin{aligned} U &= \sum_n A_n(t) U_n(x, y, z), \\ P &= \sum_n A_n(t) P_n(x, y, z), \\ Q &= \sum_n A_n(t) Q_n(x, y, z); \end{aligned} \quad (34.2)$$

кроме того,

$$\frac{dA_n}{dt} + i\omega_n A_n = B_n(t), \quad (34.3)$$

где

$$B_n = \iiint [U_n^* \cdot F + P_n^* G + N^2 Q_n^* H] \frac{1}{2c} dx dy dz. \quad (34.4)$$

Заметим, что одна и та же функция $A_n(t)$ входит во все три уравнения (34.2) и что она связана некоторым определенным образом с обобщенными силами F, G, H уравнениями (34.3) и (34.4). Если эти силы исчезают (свободное движение), то решение уравнения (34.3) будет

$$A_n(t) = C_n e^{-i\omega_n t},$$

где C_n — постоянная интегрирования. Общее решение уравнения (34.3) будет лишь немногим сложнее.

Можно также заметить, что хотя теорема разложения высказана только для регулярных решений, она применима также и к некоторым нерегулярным решениям, которые представляют ударные волны, штормовые фронты, точечные источники энергии и т. д. Однако ко всем нерегулярным решениям она неприменима.

Если объем жидкости бесконечно велик, эти теоремы становятся много более сложными по причинам, которые связаны с излучением энергии. Конечный объем жидкости необходимо ограничить замкнутой поверхностью, и уравнения предполагают, что энергия полностью отражается от этой границы. При бесконечно большом объеме жидкости ее граница необходимо открытая и энергия *может* излучаться в бесконечность. Ниже мы увидим, что для определенных состояний нулевого порядка это *невозможно*, если бы даже

жидкость и простиралась в бесконечность; в этих случаях лучи преломляются так, что энергия всегда возвращается на тот уровень, из которого она исходила. Для этих состояний нулевого порядка все собственные решения ограничены и предыдущие теоремы прилагаются к существенного видоизменения.

Однако для многих состояний нулевого порядка (включая изотермическую атмосферу идеального газа) энергия может излучаться до бесконечно больших высот, если только она не отражается какой-нибудь физической поверхностью. Когда жидкость не имеет физических границ, некоторые или все собственные решения являются неограниченными и теоремы становятся аналогичными теоремам о разложении в интеграл Фурье или в комбинацию ряда и интеграла.

В простейшем из этих случаев все собственные решения неограниченные; их можно поставить в соответствие с единственным непрерывно изменяющимся параметром ν , как это было сделано для собственных частот. Пусть

$$U(x, y, z, \nu) \equiv U(\nu) \text{ и т. д.}$$

поставлено в соответствие собственной частоте $\omega(\nu)$. Тогда теорема ортогональности говорит, что эти функции могут быть выбраны так, что

$$\begin{aligned} \int \int \int [U^*(\nu) \cdot U(\mu) + P^*(\nu) P(\mu) + \\ + N^2 Q^*(\nu) Q(\mu)] \frac{1}{2c} dx dy dz = \delta(\nu - \mu), \end{aligned} \quad (34.5)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; в частности, $\delta(0) = \infty$, так что это уравнение выявляет неограниченность собственных решений. С помощью этих функций мы получаем следующую теорему разложения.

Теорема разложения (для бесконечного объема). Каждое регулярное и ограниченное решение уравнений (33.1) и (33.2) имеет вид

$$\begin{aligned} U &= \int A(t, \nu) U(x, y, z, \nu) d\nu, \\ P &= \int A(t, \nu) P(x, y, z, \nu) d\nu, \\ Q &= \int A(t, \nu) Q(x, y, z, \nu) d\nu; \end{aligned} \quad (34.6)$$

кроме того,

$$\frac{dA(t, v)}{dt} + l\omega(v) A(v, t) = B(v, t), \quad (34.7)$$

где

$$B(v, t) = \iiint [U^*(v) \cdot F + P^*(v) G + N^2 Q^*(v) H] \frac{1}{2c} dx dy dz. \quad (34.8)$$

Аналогию со случаем конечного объема можно видеть без детальных объяснений. Следует отметить, однако, что *неограниченные* собственные решения уравнения также нужны как „материал“ для построения *ограниченных* решений уравнений (33.1) и (33.2). Это делает полезным рассмотрение неограниченных собственных решений, если они когда-либо появляются. Данный вывод служит принципиальным основанием для включения этого замечания; вопрос о том, законно ли пользоваться в метеорологии неограниченными собственными решениями, был предметом большой, но малопродуктивной дискуссии.

Мы прилагали уравнения (34.5) — (34.8) только к одному частному случаю, в котором все собственные решения неограниченные и могут быть поставлены в соответствие одному-единственному параметру. Возможны более сложные случаи; одни собственные решения могут быть ограниченными, другие — неограниченными; может оказаться, что необходимо будет для различения неограниченных решений между собой поставить их в соответствие не одному, а нескольким параметрам, или даже комбинации нескольких параметров и целых чисел. Мы не будем, однако, заниматься детальным исследованием этих сложных вопросов.

Глава VII

ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§ 35. Введение

Вместе с выводом уравнений поля была неявным образом сформулирована общая теория эффектов первого порядка. Остается изучить ее систематически и детально и приложить к частным случаям. По существу для этого потребовалось бы решить уравнения поля для характерного ряда граничных условий, вынуждающих сил и состояний нулевого порядка. В настоящее время невозможно исчерпать все непосредственно представляющиеся возможности и приходится довольствоваться очень ограниченным числом их.

Первое, что можно сделать, — избрать некоторые собственные решения типа собственных колебаний для дальнейшего изучения и отказаться от всех других задач. Это представляется разумным после соображений, изложенных в гл. VI; однако результаты гл. III показывают, что тем самым многие интересные и важные задачи будут исключены. В дальнейшем мы будем обозначать собственные решения (типа собственных колебаний) просто через U , P , Q , опуская индексы, применявшиеся в предыдущей главе. Эти величины будут тогда удовлетворять уравнениям

$$i\omega U - \Omega \times U = c(\nabla + \Gamma_\zeta)P - N^2 Q \zeta, \quad (35.1)$$

$$i\omega P = c(\nabla - \Gamma_\zeta) \cdot U, \quad (35.2)$$

$$i\omega Q = \zeta \cdot U. \quad (35.3)$$

Второй путь — рассматривать лишь те случаи, в которых жидкость ограничена только поверхностями уровня. Этим также исключаются такие очень важные задачи, как влияние континентов на океанские течения и приливы, влияние подстилающей поверхности на атмосферные явления и т. д. Мы сделаем попытку смягчить недостатки этого подхода тем,

что введем параграфы, посвященные особенно простым задачам, но в этой главе пересматривать его мы не будем. В связи с этим не будет необходимости явно формулировать граничные условия.

Для ограниченного класса определенных таким путем задач решение приведенных выше трех уравнений можно свести к решению более простых уравнений, которые выводятся в этой главе; более или менее детальное их решение будет рассмотрено в дальнейших главах.

Сначала мы покажем, что если можно определить поля P и Q , то скорость U вычисляется по формулам, которые содержат только дифференцирование и алгебраические операции. Эти два поля заменяют место потенциалов, применяющихся в классической гидродинамике.

Затем мы покажем, что поля P и Q можно найти из решения более простых уравнений. Первые два из них — это система двух обыкновенных дифференциальных уравнений с высотой в качестве независимого переменного. Эти уравнения удобно называть остаточными уравнениями. Они всегда имеют форму уравнений (36.12). Третье уравнение — дифференциальное уравнение в частных производных, в горизонтальных координатах. Оно принимает различный вид при различных условиях. Если вращение отсутствует и поверхности уровня принимаются за плоскости, то это — обыкновенное двумерное волновое уравнение (36.11). Если вращение отсутствует и поверхности уровня — сферы, то это — уравнение (36.23) и его можно назвать волновым уравнением для сферической поверхности. В гл. XVI будет показано, что его решение можно выразить через полиномы Лежандра.

Когда силой Кориолиса пренебречь нельзя, эти задачи становятся намного труднее. Впервые они встретились Лапласу в его теории приливов [3]. Хаф [2] замечает относительно них: «... теория..., первоначально представленная Лапласом в его „Небесной механике“, была охарактеризована Эри как „может быть, наиболее неясная, чем всякая другая часть того же объема в этой работе“. Однако неясность, о которой мы сожалеем, как будто не удалось устранить целиком и преемникам Лапласа».

Подобные трудности и неясности продолжали тормозить развитие этой фундаментальной части океанологической и метеорологической теории, что в свою очередь, несомненно,

задержало развитие этих наук в прошлом столетии. Трудности здесь реальные, и они не могут быть полностью преодолены в настоящее время. Неясности же, которые мешали пионерской работе Лапласа, теперь уже более непростительны, даже если бы вопрос сам по себе и не годился для сжатого изложения.

§ 36. Случай отсутствия вращения

Плоские поверхности уровня. Если $\Omega = 0$ и $\zeta = k$ (постоянной), то можно ввести прямоугольные координаты с осью z , расположенной вдоль ζ . Если U, V, W — составляющие U , то уравнения (35.1) — (35.3) примут вид

$$i\omega U = c \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (36.1)$$

$$i\omega V = c \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (36.2)$$

$$i\omega W = c \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \Gamma P \right) - N^2 Q, \quad (36.3)$$

$$i\omega P = c \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - \Gamma W \right), \quad (36.4)$$

$$i\omega Q = W. \quad (36.5)$$

Первые два уравнения показывают, что горизонтальные составляющие скорости пропорциональны горизонтальному градиенту давления; пятое уравнение показывает, что амплитуда вертикального перемещения, измеренная в принятой системе единиц, равна $|Q|$. Эти выводы можно объединить в уравнении

$$U = \frac{c}{i\omega} \nabla_H P + i\omega Q k, \quad (36.6)$$

если принять обозначение

$$\nabla_H = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}. \quad (36.7)$$

Первый член шестого уравнения можно назвать градиентной скоростью, второй — термобарической скоростью.

Остаточные уравнения. Таким образом, скорость определяется, если определены поля P и Q . Однако при отсутствии детальных сведений о P и Q относительные величины

горизонтальной градиентной скорости и вертикальной термобарической скорости оценить нельзя. Если исключить составляющую скорости W из уравнений (36.3) и (36.5), то получим уравнение

$$c \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \Gamma P \right) = (N^2 - \omega^2) Q. \quad (36.8)$$

Оно содержит только P и Q и будет называться первым остаточным уравнением. Второе остаточное уравнение получим, исключив с помощью других уравнений составляющие скорости из уравнения (36.4):

$$c \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \Gamma Q \right) = P + \frac{c^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right). \quad (36.9)$$

Разделение переменных. Двумерное волновое уравнение. В остаточных уравнениях независимые переменные легко разделяются, так как ни один из коэффициентов уравнений не зависит от x или y . Следовательно, они будут иметь частные решения вида

$$P = P_2(z) P_1(x, y), \quad Q = Q_2(z) Q_1(x, y). \quad (36.10)$$

Чтобы эти функции представляли собой решение уравнений (36.8) и (36.9), множители должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + x^2 P_1 = 0, \quad P_1 = Q_1, \quad (36.11)$$

$$\begin{aligned} c \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} + \Gamma P_2 \right) &= (N^2 - \omega^2) Q_2, \\ c \left(\frac{\partial Q_2}{\partial z} - \Gamma Q_2 \right) &= \left(1 - \frac{x^2 c^2}{\omega^2} \right) P_2, \end{aligned} \quad (36.12)$$

где x^2 — постоянная, носящая название постоянной разделения.

Уравнения (36.12) — обыкновенные дифференциальные уравнения; теория их будет изложена в дальнейших главах. Уравнение (36.11) известно как двумерное волновое уравнение; для наших целей потребуются только его простейшие решения; они будут рассмотрены в гл. VIII.

Сферические поверхности уровня. В этом случае уравнения (35.1) — (35.3) в меркаторских координатах имеют вид

$$i\omega U_\epsilon = \frac{c}{r} \operatorname{ch} \mu \frac{\partial P}{\partial \lambda}, \quad (36.13)$$

$$i\omega U_\nu = \frac{c}{r} \operatorname{ch} \mu \frac{\partial P}{\partial \mu}, \quad (36.14)$$

$$i\omega U_\zeta = c \left(\frac{\partial P}{\partial r} + \Gamma P \right) - N^2 Q, \quad (36.15)$$

$$i\omega P = \frac{c}{r} \operatorname{ch} \mu \left[\frac{\partial U_\epsilon}{\partial \lambda} + \operatorname{ch} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (U_\nu \operatorname{sech} \mu) \right] + \\ + c \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U_\zeta) - \Gamma U_\zeta \right], \quad (36.16)$$

$$i\omega Q = U_\zeta. \quad (36.17)$$

Ознакомление с уравнениями (36.13), (36.14) и (36.17) показывает, что уравнение (36.6) остается справедливым, если ввести обозначение

$$\nabla_H = \frac{1}{r} \operatorname{ch} \mu \left[\epsilon \frac{\partial}{\partial \lambda} + \nu \frac{\partial}{\partial \mu} \right].$$

Скорость опять состоит из горизонтальной градиентной и вертикальной термобарической составляющих.

Остаточные уравнения. Подстановка уравнения (36.17) в уравнение (36.15) дает первое остаточное уравнение

$$c \left(\frac{\partial P}{\partial r} + \Gamma P \right) = (N^2 - \omega^2) Q, \quad (36.18)$$

а подстановка в уравнение (36.16) — второе остаточное уравнение

$$c \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 Q) - \Gamma Q \right] = P + \frac{c^2 \operatorname{ch}^2 \mu}{\omega^2 r^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} \right). \quad (36.19)$$

Уравнение (36.18) практически тождественно с уравнением (36.8), а сходство уравнений (36.9) и (36.19) очевидно. Сходство можно увеличить и дальше, если воспользоваться приближением, которое достаточно в большинстве случаев. Поскольку

$$r = r_s + \chi,$$

где r_s — радиус среднего уровня моря и χ — высота, отсчитываемая от этого уровня, и поскольку $r_s \gg \chi$ во всех случаях, представляющих интерес, уравнения (36.18) и (36.19) приближенно можно записать так:

$$c \left(\frac{\partial P}{\partial \chi} + \Gamma P \right) = (N^2 - \omega^2) Q. \quad (36.20)$$

$$c \left(\frac{\partial Q}{\partial \chi} - \Gamma Q \right) = P + \frac{c^2 \text{ch}^2 \mu}{\omega^2 r_s^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} \right). \quad (36.21)$$

Разделение переменных. Волновое уравнение для сферической поверхности. В последних двух уравнениях независимые переменные опять легко разделяются. Уравнения будут иметь частные решения вида

$$P = P_1(\lambda, \mu) P_2(\chi), \quad Q = Q_1(\lambda, \mu) Q_2(\chi). \quad (36.22)$$

Функции P_2 и Q_2 должны удовлетворять уравнению (36.12), где χ заменит z . Следовательно, эти уравнения приложимы независимо от характера поверхностей уровня.

При сферических поверхностях уровня P_1 и Q_1 должны удовлетворять уравнению

$$\text{ch}^2 \mu \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial \mu^2} \right) + \chi^2 r_s^2 P_1 = 0, \quad P_1 = Q_1, \quad (36.23)$$

которое является волновым уравнением для сферической поверхности. Решение этого уравнения было получено Лежандром и будет рассмотрено в гл. XVI.

§ 37. Вращение при плоских поверхностях уровня

Три явления являются основными факторами в гидродинамике жидких сред, изучаемых геофизикой:

- 1) стратификация этих сред;
- 2) кривизна поверхностей уровня;
- 3) вращение Земли (или планеты).

Требуется не так уж много наблюдений, чтобы установить существование этих трех факторов, но их динамическое взаимодействие в жидкости настолько сложно, что даже весьма обильный материал наблюдений мало помогает пониманию вопроса. Представляется, что теоретический анализ — единственный путь, который может внести ясность.

В предыдущем параграфе мы дали первоначальное изложение математической теории для случая, когда вращение не учитывается. В этом и в следующем параграфах вопрос будет рассмотрен аналогичным образом для случая, когда в уравнения включена сила Кориолиса. В настоящем параграфе мы пренебрегаем тем усложнением, которое вносит кривизна поверхностей уровня. Это может быть оправданным для явлений малого масштаба и, во всяком случае, послужит полезным введением к изучению более реального случая сферических поверхностей уровня.

Пользуясь тем же обозначением, что и в § 36, и направляя ось u на север, так что

$$\Omega = \Omega_H j + \Omega_V k, \quad (37.1)$$

найдем следующие уравнения, которые мы должны решить (ср. уравнения (36.1) — (36.3)):

$$i\omega U + \Omega_V V - \Omega_H W = c \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (37.2)$$

$$i\omega V - \Omega_V U = c \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (37.3)$$

$$i\omega W + \Omega_H U = c \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \Gamma P \right) - N^2 Q, \quad (37.4)$$

$$i\omega P = c \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \Gamma W \right) \right], \quad (37.5)$$

$$i\omega Q = W. \quad (37.6)$$

Традиционные приближения. Все опубликованные исследования этих уравнений содержат приближения. В силу уже упомянутых неясностей не всегда возможно до конца понять эти приближения. Неясности связаны с двумя обстоятельствами: авторы не всегда проявляли заботу о правильном выводе уравнений, и они не пользовались переменными поля, а продолжали иметь дело с громоздкими обозначениями § 9.

Очевидно, одно приближение состояло в том, что полагали $W = 0$ в уравнениях (37.2) и (37.4) [4, гл. II]. Если бы это делалось последовательно, то было бы найдено, что не все собственные частоты действительны, так что такое приближение полностью изменило бы характер решения. Это ускользнуло от внимания авторов по причинам, которые нелегко определить. По-видимому, это связано с неявными

приближениями или с действительными ошибками, которые влияют на уравнения (37.4) — (37.6) [1].

Целью этих приближений является, конечно, упрощение уравнений до такой степени, чтобы их можно было легко решить. При этом возникает вопрос: какие члены уравнений ответственны за математические трудности? Нетрудно сообразить, что это члены, пропорциональные Ω_H в уравнениях (37.2) и (37.4), и что наибольшие трудности возникают из-за члена $\Omega_H W$ в уравнении (37.2). Кроме того, во всех опубликованных по этому вопросу работах этим членом пренебрегают. Таким образом, это можно назвать традиционным приближением.

Это приближение можно считать оправданным во многих случаях. Оно верно всякий раз, когда вертикальная скорость W много меньше, чем горизонтальные скорости U и V . Мы видели в гл. III, что оно законно для установившейся конвекции; согласно наблюдениям, оно верно для всех крупномасштабных движений на Земле. Без детального изучения трудно предвидеть, будет ли оно законным при всех условиях. Тем не менее оно должно рассматриваться как гипотеза, заслуживающая серьезного изучения из практических соображений.

Если бы в уравнении (37.2) был отброшен только член $\Omega_H W$, а член $\Omega_H U$ в уравнении (37.4) был сохранен, то уравнения перестали бы быть самосопряженными. При этом по крайней мере некоторые из собственных частот стали бы комплексными и природа уравнений поля полностью изменилась бы. Это указывает на то, что имеется тесная связь между двумя членами, содержащими Ω_H , и если одним членом мы пренебрегаем, то нужно пренебречь также и другим, иначе приближенные уравнения будут наверняка описывать совершенно другие явления, чем первоначальные уравнения.

В такой расширенной форме традиционная гипотеза доходит до пренебрежения горизонтальной слагающей Ω_H вектора Кориолиса. Этой расширенной формой гипотезы без объяснения пользовались некоторые ранние авторы. При условии, что поверхности уровня плоские и ось вращения к ним перпендикулярна, обсуждаемая гипотеза перестает быть приближением и становится идеализацией; этот случай будет изучаться в гл. IX.

Если принять традиционное приближение, то уравнения (37.4) и (37.6) дают первое остаточное уравнение

$$c \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \Gamma P \right) = (N^2 - \omega^2) Q. \quad (37.7)$$

Уравнения (37.2) и (37.3) примут вид

$$i\omega U + \Omega_V V = c \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$i\omega V - \Omega_V U = c \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Эти уравнения можно решить относительно U и V :

$$\begin{aligned} U &= \frac{c}{\Omega_V^2 - \omega^2} \left(i\omega \frac{\partial P}{\partial x} - \Omega_V \frac{\partial P}{\partial y} \right), \\ V &= \frac{c}{\Omega_V^2 - \omega^2} \left(i\omega \frac{\partial P}{\partial y} + \Omega_V \frac{\partial P}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (37.8)$$

Уравнения (37.6) и (37.8) можно объединить в следующем уравнении:

$$U = \frac{c}{\Omega_V^2 - \omega^2} (i\omega \nabla_H P + \Omega_V \mathbf{k} \times \nabla_H P) + i\omega Q \mathbf{k}. \quad (37.9)$$

Первый член в скобках — обобщенная градиентная, второй — обобщенная геострофическая и последний член — термобарическая скорость.

Подставляя уравнения (37.6) и (37.8) в уравнение (37.5) и учитывая, что Ω_V — постоянная, между тем как c зависит только от z , получим второе остаточное уравнение

$$c \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \Gamma Q \right) = P + \frac{c^2}{\omega^2 - \Omega_V^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right). \quad (37.10)$$

Оно отличается от уравнения (36.8) только тем, что ω^2 заменено на $\omega^2 - \Omega_V^2$.

Разделение переменных. Двумерное волновое уравнение. Переменные в остаточных уравнениях снова легко разделяются, и последние имеют решения, распадающиеся на произведение функции от x и y на функцию от z . Урав-

нения, которые нам предстоит решить, в прежних обозначениях будут

$$\begin{aligned} c \left(\frac{dP_2}{dz} + \Gamma P_2 \right) &= (N^2 - \omega^2) Q_2, \\ c \left(\frac{dQ_2}{dz} - \Gamma Q_2 \right) &= \frac{1 - x^2 c^2}{\omega^2 - \Omega_V^2} P_2 \end{aligned} \quad (37.11)$$

(они лишь незначительно отличаются от уравнений (36.12) и двумерного волнового уравнения (36.11)).

Вычисления без дополнительных упрощений. Эти вычисления можно, конечно, провести, не делая упрощений, связанных с приближениями, но уравнения при этом получаются весьма сложными. Вместо уравнения (37.8) мы получим

$$\begin{aligned} U &= \frac{c}{\Omega_V^2 - \omega^2} \left(i\omega \frac{\partial P}{\partial x} - \Omega_V \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\omega^2 \Omega_H Q}{c} \right), \\ V &= \frac{c}{\Omega_V^2 - \omega^2} \left(i\omega \frac{\partial P}{\partial y} + \Omega_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{i\omega \Omega_V \Omega_H Q}{c} \right). \end{aligned} \quad (37.12)$$

Если воспользоваться сокращением

$$\mathbf{G} = \nabla_H P + i \frac{i\omega \Omega_H Q}{c}, \quad (37.13)$$

то уравнение, соответствующее (37.9), будет иметь вид

$$U = \frac{c}{\Omega_V^2 - \omega^2} (i\omega \mathbf{G} + \Omega_V \mathbf{k} \times \mathbf{G}) + i\omega Q \mathbf{k}. \quad (37.14)$$

Для первого остаточного уравнения, соответствующего уравнению (37.7), получим

$$\begin{aligned} c \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \Gamma P \right) + \frac{c \Omega_H}{\omega^2 - \Omega_V^2} \left[i\omega \frac{\partial P}{\partial x} - \Omega_V \frac{\partial P}{\partial y} \right] = \\ = \left[N^2 - \omega^2 \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega_V^2 - \omega^2} \right] Q, \end{aligned} \quad (37.15)$$

а второе остаточное уравнение превратится в следующее:

$$\begin{aligned} c \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \Gamma Q \right) - \frac{c \Omega_H}{\omega^2 - \Omega_V^2} \left[i\omega \frac{\partial Q}{\partial x} + \Omega_V \frac{\partial Q}{\partial y} \right] = \\ = P + \frac{c^2}{\omega^2 - \Omega_V^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (37.16)$$

Разделение переменных. Переменные в этих двух последних уравнениях разделяются, но не столь симметрично, как в случаях, с которыми мы встречались выше. Функции x и y могут выражаться только так:

$$P_1(x, y) = Q_1(x, y) = \exp(\alpha x + i\beta y), \quad (37.17)$$

где α и β — постоянные. Функции $P_2(z)$, $Q_1(z)$ должны тогда удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} c \left(\frac{dP_2}{dz} + \Gamma_e P_2 \right) &= \left[N^2 - \omega^2 \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega_V^2 - \omega^2} \right] Q_2, \\ c \left(\frac{dQ_2}{dz} - \Gamma_e^* Q_2 \right) &= \left[1 - \frac{x^2 c^2}{\omega^2 - \Omega_V^2} \right] P_2, \end{aligned} \quad (37.18)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_e &= \Gamma - \frac{\Omega_H}{\omega^2 - \Omega_V^2} (\omega \alpha + i \Omega_V \beta), \\ x^2 &= \alpha^2 + \beta^2. \end{aligned} \quad (37.19)$$

Форма уравнения (37.18) во многом одинакова с прежней, но тот факт, что Γ_e теперь имеет комплексные значения, не является тривиальным отличием.

§ 38. Вращение при сферических поверхностях уровня

Когда поверхности уровня сферические, снова оказываются полезными меркаторские координаты: с их применением выкладки предыдущего параграфа дают ключ для вычислений, предстоящих нам сейчас. Вектор Ω постоянен в пространстве, но его вертикальная и горизонтальная составляющие будут теперь функциями широты

$$\Omega = \Omega_H \nu + \Omega_V \zeta, \quad (38.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_H &= \Omega \cos \varphi = \Omega \operatorname{sech} \mu, \\ \Omega_V &= \Omega \sin \varphi = \Omega \operatorname{th} \mu \end{aligned} \quad (38.2)$$

теперь — функции горизонтальной координаты μ . Уравнения для собственных решений типа собственных колебаний —

уравнения (35.1) — (35.3) — запишутся так:

$$i\omega U_* + \Omega_V U_* - \Omega_H U_\zeta = \frac{c}{r} \operatorname{ch} \mu \frac{\partial P}{\partial \lambda}, \quad (38.3)$$

$$i\omega U_* - \Omega_V U_* = \frac{c}{r} \operatorname{ch} \mu \frac{\partial P}{\partial \mu}, \quad (38.4)$$

$$i\omega U_\zeta + \Omega_H U_* = c \left(\frac{\partial P}{\partial r} + \Gamma P \right) - N^2 Q, \quad (38.5)$$

$$i\omega P = \frac{c}{r} \operatorname{ch} \mu \left[\frac{\partial U_*}{\partial \lambda} + \operatorname{ch} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (U_* \operatorname{sech} \mu) \right] + \\ + c \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U_\zeta) - \Gamma U_\zeta \right], \quad (38.6)$$

$$i\omega Q = U_\zeta. \quad (38.7)$$

Как и в § 36, эти уравнения можно несколько упростить, заменяя r через r_s , $\partial/\partial r$ через $\partial/\partial \chi$. Это приближение почти всегда законно и будет принято в дальнейшем.

Традиционные приближения. Следуя плану предыдущего параграфа, можно проделать вычисления, пренебрегая обоими членами, содержащими Ω_H . Тогда из уравнения (38.5) получим первое остаточное уравнение

$$c \left(\frac{\partial P}{\partial \chi} + \Gamma P \right) = (N^2 - \omega^2) Q. \quad (38.8)$$

Уравнения (38.3) и (38.4) можно решить относительно U_* и U_ζ :

$$U_* = \frac{c \operatorname{ch} \mu}{r_s (\Omega_V^2 - \omega^2)} \left[i\omega \frac{\partial P}{\partial \lambda} - \Omega_V \frac{\partial P}{\partial \mu} \right], \\ U_\zeta = \frac{c \operatorname{ch} \mu}{r_s (\Omega_V^2 - \omega^2)} \left[i\omega \frac{\partial P}{\partial \mu} + \Omega_V \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right]. \quad (38.9)$$

Подставив выражения (38.7) и (38.9) в уравнение (38.6), получим второе остаточное уравнение

$$c \left(\frac{\partial Q}{\partial \chi} - \Gamma Q \right) = P + \frac{c^2}{\omega^2 r_s^2} \Delta_Q P, \quad (38.10)$$

где дифференциальный оператор Δ_Q определяется следующим образом:

$$\Delta_Q P = \operatorname{ch}^2 \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_V^2} \left[\frac{\partial P}{\partial \lambda} + i \frac{\Omega_V}{\omega} \frac{\partial P}{\partial \mu} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_V^2} \left[\frac{\partial P}{\partial \mu} - i \frac{\Omega_V}{\omega} \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right] \right\}. \quad (38.11)$$

Разделение переменных. Приливное уравнение Лапласа. Переменные в этом уравнении опять легко разделяются. Уравнения имеют частные решения, распадающиеся на множители аналогично тому, как это было для уравнения (36.23). Множители P_2, Q_2 опять удовлетворяют уравнениям (36.12), между тем как множители P_1, Q_1 , зависящие только от меркаторских координат λ, μ , удовлетворяют уравнению

$$\Delta_2 P_1 + \kappa^2 r_s^2 P_1 = 0, \quad P_1 = Q_1. \quad (38.12)$$

Лаплас был первый, кто получил уравнение этого вида [3] в связи с теорией приливов. Мы видим, что это уравнение вполне можно было бы назвать „волновым уравнением на вращающейся сфере“, если бы в его вывод не входили упрощающие допущения.

Отказ от традиционных приближений. Эти вычисления можно также проделать, не пользуясь традиционными приближениями. Уравнения, которые мы получим, не только более сложны, чем только что выведенные, но и переменные в них не разделяются. Они до сих пор не изучались, и мы не будем пытаться это делать в настоящей работе.

§ 39. Комплексные векторы и годограф

Во всех вычислениях с собственными решениями мы будем свободно пользоваться комплексными числами. Вообще поле $P = P_r + iP_i$, где P_r и P_i — действительные функции координат. Кроме этого, зависимость от времени дается множителем $\exp(-i\omega t)$; отрицательный знак в показателе функции обычен для теоретической физики в противоположность принятому в электротехнике. Полное выражение для поля P , таким образом, будет

$$P = (P_r + iP_i) \exp(-i\omega t) = [P_r \cos \omega t + P_i \sin \omega t] + i[-P_r \sin \omega t + P_i \cos \omega t]. \quad (39.1)$$

То же самое выражение получается и для векторного поля U :

$$U = (U_r + iU_i) \exp(-i\omega t) = [U_r \cos \omega t + U_i \sin \omega t] + i[-U_r \sin \omega t + U_i \cos \omega t]. \quad (39.2)$$

Заметим, что мнимые части обоих этих выражений можно получить из действительных частей, подставив $t + \pi/2\omega$ вместо t ; поэтому достаточно изучать действительные части.

В случае первого уравнения P можно представить графически посредством двумерного вращающегося вектора; чтобы сделать то же самое для второго уравнения, потребовались бы шесть измерений. Поэтому удобнее изучать только действительную часть

$$\Re U = U_r \cos \omega t + U_i \sin \omega t, \quad (39.3)$$

которую можно представить в форме подвижного трехмерного вектора. Если начало этого вектора сохранять фиксированным, то его вершина описывает эллипс, а в предельных случаях — круг и отрезок прямой линии. Эллипс лежит в плоскости двух векторов: U_r и U_i , которые являются сопряженными радиусами. Он носит название годографа; собственные решения называют эллиптически, по кругу или линейно поляризованными, в зависимости от характера годографа. Так как векторы U_r и U_i являются функциями положения в пространстве, то очертания годографа могут меняться от точки к точке и соответственно этому будет меняться поляризация. Однако во многих случаях поляризация будет иметь один и тот же характер во всех точках пространства.

Отсутствие вращения. Уравнения (36.8) и (36.9) и уравнения (36.18) и (36.19) показывают, что поля P и Q в этом случае можно предполагать действительными. Из уравнения (36.6) в этом случае следует, что

$$\begin{aligned} U_r &= 0, \\ U_i &= -\frac{c}{\omega} \nabla_H P + \omega Q \mathbf{k} \end{aligned} \quad (39.4)$$

и собственные решения все линейно поляризованные. Направление и величина U_i будут меняться от точки к точке; эти изменения нельзя рассмотреть, не зная более детально решений остаточных уравнений.

Вращение (традиционное приближение). В этом случае из уравнения (37.9) получаем

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{c \Omega_V}{\Omega_V^2 - \omega^2} \mathbf{k} \times \nabla_H P, \\ U_i &= \frac{c \omega}{\Omega_V^2 - \omega^2} \nabla_H P + \omega Q \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (39.5)$$

Так как эти векторы взаимно перпендикулярны, они являются главными радиусами эллиптического годографа и U , горизонтально. Если $\Omega_V > \omega$ и Q не слишком велико, то главная ось будет горизонтальной и будет иметь направление геострофической скорости. С другой стороны, если $\omega > \Omega_V$, геострофическая скорость будет обычно меньшей осью эллипса, а градиентная и термобарическая скорости будут определять его большую ось.

Вращение (без приближения). Такое вычисление было сделано выше только для случая плоских поверхностей уровня, но следующие замечания, вероятно, могут относиться также и к кривым поверхностям уровня. Уравнения (37.18) показывают, что сами P и Q будут комплексными. То же самое будет приложимо к вектору G (37.13), так что

$$\begin{aligned} G_r &= \nabla_H P_r - i \frac{\Omega_H \omega Q_l}{c}, \\ G_l &= \nabla_H P_l + i \frac{\Omega_H \omega Q_r}{c}. \end{aligned} \quad (39.6)$$

Вектор G , таким образом, будет сам описывать эллипс в горизонтальной плоскости, форму которого нелегко определить. Годограф можно определить из уравнения (37.14), но о нем можно сказать самое большее, что он обычно будет эллипсом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eckart C., Ferris H. G., Equations of motion of the ocean and atmosphere, Rev. Mod. Phys., 28, 48 (1956).
2. Hough S. S., An application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides, Part I, Phil. Trans. (London) A189, 201 (1897).
3. Laplace P. S., Mécanique céleste, 4 vols., Trans. by N. Bowditch, Boston, 1832, Part I, Book IV, Sect. 3, p. 543.
4. Wilkes M. V., Oscillations of the Earth's Atmosphere, Cambridge Univ. Press, 1949.

Глава VIII

ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ АТМОСФЕРА. ПЛОСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ ВРАЩЕНИЯ

§ 40. Введение

Следующие две главы будут посвящены вычислениям, относящимся к изотермической атмосфере. Земная атмосфера, конечно, далеко не является изотермической. Однако эта модель имеет иллюстративное значение в связи с тем, что коэффициенты c , N и Γ в уравнениях поля будут постоянными, не зависящими от высоты, что очень заметно упрощает вычисления и позволяет сосредоточиться на некоторых сторонах проблемы, не отвлекаясь аналитическими трудностями. В гл. X будет изучена модель океана с постоянными коэффициентами. К тому времени будут найдены некоторые общие методы и принципы и будет подготовлен путь для исследования более сложных вопросов.

В настоящей главе детально разобран случай, когда вращение отсутствует. Это будет связано с некоторым повторением материала, кратко рассмотренного в предыдущей главе. Если поверхности уровня плоские, то горизонтальная скорость состоит только из градиентной составляющей, а термобарическая скорость — вертикальна. Мы начнем дальнейшее рассмотрение с уравнений (36.8) и (36.9), именно

$$\begin{aligned} c \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \Gamma P \right) &= (N^2 - \omega^2) Q, \\ c \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \Gamma Q \right) &= P + \frac{c^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (40.1)$$

Поверхность планеты будет рассматриваться как плоскость $z=0$, и поэтому единственное граничное условие требует, чтобы вертикальная скорость здесь обращалась в нуль. Это эквивалентно условию

$$Q=0 \quad \text{при} \quad z=0, \quad (40.2)$$

если только ω не равно нулю. Последний случай дальше рассматриваться не будет.

Первые два уравнения можно свести к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям, если рассматривать только те собственные решения типа собственных колебаний, для которых P и Q пропорциональны

$$\exp [i(\alpha x + \beta y)],$$

где α и β — постоянные; множители пропорциональности должны быть функциями одного z . Воспользуемся теперь P и Q для обозначения этих множителей. Уравнения (40.1) примут вид

$$\begin{aligned} c \left(\frac{dP}{dz} + \Gamma P \right) &= (N^2 - \omega^2) Q, \\ c \left(\frac{dQ}{dz} - \Gamma Q \right) &= \left(1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right) P, \end{aligned} \quad (40.3)$$

где

$$\kappa^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Эти уравнения надо решить при граничном условии, выраженном уравнением (40.2). Постоянная κ дальше будет всюду очень важна: будем называть ее горизонтальным волновым числом, а $2\pi/\kappa$ — горизонтальной длиной волны. Вектор $\alpha i + \beta j$ будет вектором горизонтального распространения. Отношение ω/κ имеет размерность скорости и будет называться горизонтальной скоростью волн (trace velocity).

§ 41. Волны Ламба

Ламб [2] нашел некоторые собственные решения для этой задачи. Граничное условие (40.2) будет, конечно, удовлетворено, если $Q=0$ для всех z , так что волны всюду будут локально изэнтропическими. Уравнения (40.3) в этом случае дают

$$P = \exp(-\Gamma z), \quad (41.1)$$

$$\kappa^2 c^2 = \omega^2; \quad (41.2)$$

следовательно, горизонтальная скорость волн равна скорости звука. Это решение будет регулярным (§ 20), если $\Gamma \geq 0$, а мы видели (§ 25), что это и будет случай изотермической атмосферы:

$$\Gamma = \frac{g(2-\gamma)}{2\gamma R\theta_0}.$$

Вспоминая, что для изотермической атмосферы (§ 22)

$$\rho_0 c_0 = \rho_s c_s \exp(-gz/R\theta_0),$$

мы можем так написать уравнение (41.1):

$$p_1 = (\rho_s c_s)^{1/2} \exp[-gz/\gamma R\theta_0].$$

Так как $Q=0$, энтропия первого порядка равна нулю: изменения в давлении и плотности не изменяют локального значения энтропии. На том же основании термобарическая составляющая скорости исчезает, и волна будет линейно поляризованной в направлении распространения

$$U = \frac{i\alpha + j\beta}{\alpha} P; \quad (41.3)$$

кинетическая энергия $|U|^2/2c$ равна упругой энергии $|P|^2/2c$, а термобарическая энергия равна нулю. Этот результат можно записать также следующим образом:

$$|U_1| = \left| \frac{p_1}{\rho c} \right|.$$

так что удельное акустическое сопротивление равно ρc . Все это, исключая изменение амплитуды с высотой, сильно напоминает звуковую волну в однородной жидкости. Изменение плотности с высотой влияет только в двух отношениях: оно заставляет амплитуду уменьшаться согласно уравнению (41.1) и не позволяет волнам распространяться во всех других направлениях, кроме горизонтальных.

Строго говоря, волны Ламба являются неограниченными собственными решениями. Но если вычислить энергию, содержащуюся в столбе воздуха с поперечным сечением 1 см^2 , простирающимся от $z=0$ до $z=\infty$, то она будет конечна. Таким образом, в другом, измененном смысле волны Ламба будут ограниченными. Они не являются единственными собственными решениями задачи, однако все другие решения будут неограниченными даже в этом измененном смысле. Это, может быть, и послужило основанием к тому, что Ламб не рассматривал других решений.

§ 42. Другие собственные решения. Простые волны

Граничное условие, уравнение (40.2), будет удовлетворено, если Q пропорционально

$$\sin \gamma z \exp [i(\alpha x + \beta y)],$$

где γ — третья постоянная. Такие решения будут регулярными только в том случае, когда γ действительная величина, — факт, который неоднократно будет использоваться ниже. Из второго уравнения (40.1) тогда следует, что P будет пропорционально

$$[\gamma \cos \gamma z - \Gamma \sin \gamma z] \exp [i(\alpha x + \beta y)].$$

Алгебраические выкладки намного упростятся, если эти функции записать соответственно следующим образом:

$$(1/2i) [\exp \{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)\} - \exp \{i(\alpha x + \beta y - \gamma z)\}]$$

и

$$(1/2i) [-(i\gamma - \Gamma) \exp \{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)\} + (i\gamma + \Gamma) \exp \{i(\alpha x + \beta y - \gamma z)\}].$$

Вторые члены этих функций представляют собой волны, падающие на землю по направлению α , β , — γ ; первые же члены — волны, отраженные от земли в направлении α , β , γ .

Падающие и отраженные волны, взятые в отдельности, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям, однако граничному условию удовлетворяет только их разность. Позволительно поэтому отложить учет граничных условий (а для некоторых целей даже отказаться от него) и исследовать два члена отдельно. Каждый из них можно назвать простой волной; простые волны сами по себе не являются собственными решениями, но должны быть так скомбинированы, чтобы удовлетворить граничному условию. Вектор $\alpha i + \beta j + \gamma k$ есть вектор распространения, и его величина

$$k = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}$$

представляет собой волновое число; длина волны равна $2\pi/k$.

Для простых волн уравнения (40.1) имеют вид

$$\begin{aligned} c(\Gamma + i\gamma)P - (N^2 - \omega^2)Q &= 0, \\ \left(1 - \frac{x^2 c^2}{\omega^2}\right)P + c(\Gamma - i\gamma)Q &= 0. \end{aligned} \quad (42.1)$$

Чтобы эти уравнения могли иметь решения, отличные от тривиальных, их детерминант должен обращаться в нуль:

$$c^2(\Gamma^2 + \gamma^2) + (N^2 - \omega^2)\left(1 - \frac{x^2 c^2}{\omega^2}\right) = 0. \quad (42.2)$$

Различные авторы дают различные названия уравнениям этого рода; будет меньше неясностей, если принять для второго уравнения название „уравнение распространения“, чем пользоваться более привычным термином „характеристическое уравнение“.

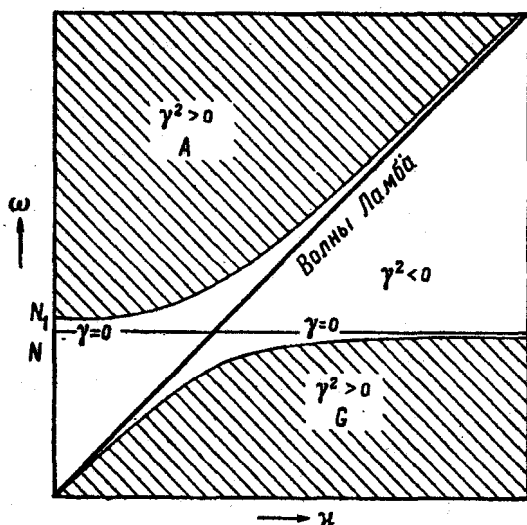


Рис. 16. Диагностическая x, ω -диаграмма для изотермической атмосферы.

Если ω и x заданы, то уравнение распространения определяет γ^2 . Определенные этим путем значения могут быть отрицательными: так как γ должно быть действительным, такие значения ω и x не приводят к собственным решениям. Это положение удобно представить графически, как это сделано на рис. 16; уравнение (42.2) эквивалентно соотношению

$$\gamma^2 c^2 = (\omega^2 - N_1^2) + \frac{x^2 c^2}{\omega^2} (N^2 - \omega^2), \quad (42.3)$$

где

$$N_1^2 = N^2 + \Gamma^2 c^2. \quad (42.4)$$

Кривая $\gamma^2 = 0$ состоит из двух ветвей, одна из которых пересекает ось ω при $\omega = N_1$ и асимптотически приближается к линии $\omega = \kappa c$. Другая ветвь проходит через начало координат и асимптотически приближается к горизонтальной линии $\omega = N$. В начале координат она имеет наклон $(N/N_1)c$, который сравним с наклоном кривой для волн Ламба, равным c . Эти ветви делят первый квадрант плоскости (ω, κ) на три области: две области, где $\gamma^2 > 0$, которые называем A и G , и третья область, где $\gamma^2 < 0$. В этой третьей области собственные решения (т. е. волны Ламба) дают только точки на линии $\omega = \kappa c$. В областях A и G каждая точка приводит к некоторому собственному решению.

Подобные диаграммы будут крайне необходимы при рассмотрении этих задач. Для настоящих задач они так же важны, как диаграммы уровней энергии в атомной физике; в математическом отношении у них имеется ряд общих черт. Мы будем называть эту κ, ω -диаграмму диагностической диаграммой.

Уравнения (25.1) — (25.3) показывают, что для изотермического газа

$$\frac{\Gamma^2 c^2}{N^2} = \frac{(2 - \gamma)^2}{4(\gamma - 1)},$$

где γ — здесь отношение удельных теплоемкостей. (Эта двойственность обозначения γ не вызовет серьезных затруднений.) Для воздуха $\gamma = 1.40$, так что $N_1 = 1.11N$.

§ 43. Поверхность распространения. Фазовая скорость

Если написать уравнение распространения в форме

$$\frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\omega^2 - N^2)}{\omega^2(\omega^2 - N_1^2)} + \frac{\gamma^2}{\omega^2 - N_1^2} = \frac{1}{c^2}, \quad (43.1)$$

то можно построить диаграмму другого рода. Если величине ω дается фиксированное значение, то уравнение (43.1) представляет собой некоторую поверхность второго порядка в пространстве (α, β, γ) , которую обычно называют поверхностью распространения [3, стр. 292].

Когда $\omega^2 > N_1^2$ (область A диагностики), поверхность распространения будет сплюснутым эллипсоидом вращения,

горизонтальные полуоси которого имеют длину

$$\frac{\omega}{c} \left(\frac{\omega^2 - N_1^2}{\omega^2 - N^2} \right)^{1/2},$$

а вертикальная полуось равна

$$\frac{(\omega^2 - N_1^2)^{1/2}}{c}.$$

Вектор распространения $\mathbf{k}$ есть радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку на поверхности. Поскольку его направление изменяется, а ω сохраняется постоянным, волновое число k будет изменяться по закону, который будет ясен из рис. 17. Фаза простых волн будет постоянной на плоскости

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \text{const},$$

которая перпендикулярна к $\mathbf{k}$ и след которой показан пунктирной линией на рис. 17.

Когда $N^2 < \omega^2 < N_1^2$, поверхность распространения мнимая (см. незаштрихованную площадь на рис. 16).

Когда $0 < \omega^2 < N^2$ (площадь G на рис. 16), поверхность распространения будет гиперboloидом вращения, как показано на рис. 17. Его полуоси имеют длину

$$\frac{\omega}{c} \left(\frac{N_1^2 - \omega^2}{N^2 - \omega^2} \right)^{1/2}$$

и

$$\frac{(N_1^2 - \omega^2)^{1/2}}{c}.$$

Рис. 17. Поверхности распространения для волн в изотермической атмосфере, показывающие связь между вектором распространения и лучом.

Асимптотический конус гиперboloида имеет своей осью положительную ось γ ; тангенс половинного угла θ гипербо-

лоида дается формулой

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega}{(N^2 - \omega^2)^{1/2}}. \quad (43.2)$$

Рис. 17 показывает, что вектор распространения всегда образует с γ -осью угол, больший θ :

$$\frac{x}{\gamma} \geq \operatorname{tg} \theta.$$

В частности, волны типа G не могут иметь вертикального вектора распространения. Те волны, у которых вектор распространения попадает на асимптотический конус, имеют бесконечно большое волновое число и нулевую длину волны.

Фазовая скорость простых волн равна

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = c \left\{ \frac{\omega^2 - \frac{N^2 x^2}{k^2}}{\omega^2 - N_1^2} \right\}^{1/2}. \quad (43.3)$$

Для $\omega > N$ $c_{\text{фаз}} > c$, но когда $\omega \rightarrow \infty$, $c_{\text{фаз}} \rightarrow c$. Для $\omega < N$ $c_{\text{фаз}}$ меньше c и приближается к $c(x/k)(N/N_1)$, когда $\omega \rightarrow 0$. Так как фазовая скорость зависит и от частоты и от направления, то распространение обладает дисперсией и анизотропно.

§ 44. Лучи и групповая скорость

Чтобы прийти к предварительному определению лучей и групповой скорости, удобно предположить, что уравнение распространения (42.2) решено для ω как функции α , β и γ . Так как это уравнение второй степени относительно ω^2 , оно будет иметь четыре корня

$$\omega = \pm H_1(\alpha, \beta, \gamma), \quad \omega = \pm H_2(\alpha, \beta, \gamma).$$

Пусть H будет одним из этих корней. Рассмотрим суперпозицию двух волн с равными амплитудами, но слегка отличными векторами распространения, так что, например,

$$Q = \sin[\alpha'x + \beta'y + \gamma'z - H(\alpha', \beta', \gamma')t] + \\ + \sin[\alpha''x + \beta''y + \gamma''z - H(\alpha'', \beta'', \gamma'')t].$$

Если $\alpha' = \alpha + \delta\alpha$, $\alpha'' = \alpha - \delta\alpha$ и т. д., то это дает приближенно

$$Q = 2 \sin(\alpha x + \beta y + \gamma z - Ht) \cos \left[\left(x - t \frac{\partial H}{\partial \alpha} \right) \delta\alpha + \right. \\ \left. + \left(y - t \frac{\partial H}{\partial \beta} \right) \delta\beta + \left(z - t \frac{\partial H}{\partial \gamma} \right) \delta\gamma \right].$$

Этот результат можно описать как модулированную несущую волну, причем сама несущая волна имеет частоту H и вектор распространения (α, β, γ) . Модулирующая волна является волной с вектором распространения $(\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma)$ и частотой

$$\delta\omega = \frac{\partial H}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial H}{\partial \beta} \delta\beta + \frac{\partial H}{\partial \gamma} \delta\gamma.$$

Ее направление распространения не совпадает с направлением распространения несущей волны, но совершенно независимо от последнего. Частота ее зависит от всех шести переменных, $\alpha, \beta, \gamma, \delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$, и будет низкой.

Однако безотносительно к значениям $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ модуляция будет постоянной во всякой точке, которая движется согласно уравнениям

$$\begin{aligned} x - t \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= \text{const} = x_0, \\ y - t \frac{\partial H}{\partial \beta} &= \text{const} = y_0, \\ z - t \frac{\partial H}{\partial \gamma} &= \text{const} = z_0. \end{aligned} \quad (44.1)$$

Эти прямые линии имеют направление, которое независимо от $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$, а движущаяся точка имеет скорость $c_{\text{гр}}$, определяемую формулой

$$c_{\text{гр}} = \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \gamma} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (44.2)$$

Прямые линии представляют собой лучи, а $c_{\text{гр}}$ — групповую скорость. Функции $\pm H_1$ и $\pm H_2$ являются гамильтонианами лучей [1].

Мы видим сразу же, что направление лучей не совпадает с направлением вектора распространения: лучи перпендикулярны к поверхности $H = \omega = \text{const}$. Другими словами, они перпендикулярны к поверхности распространения, которая проходит через конец вектора распространения, как показано на рис. 17.

Уравнение распространения можно написать в форме

$$W(\alpha, \beta, \gamma, \omega) = 0 \quad (44.3)$$

при условии, что

$$W = c^2(\alpha^2 + \beta^2)(\omega^2 - N^2) + \gamma^2 c^2 \omega^2 - \omega^2(\omega^2 - N_1^2). \quad (44.4)$$

Очевидно,

$$W = -(\omega^2 - H_1^2)(\omega^2 - H_2^2). \quad (44.5)$$

Отсюда независимо от того, какой корень может представлять H ,

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = - \frac{\partial W}{\partial \alpha} / \frac{\partial W}{\partial \omega} \text{ и т. д.,}$$

но при условии, что $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ удовлетворяют уравнению (44.3). Уравнения лучей (44.1) можно поэтому записать в таком виде:

$$\begin{aligned} (x - x_0) \frac{\partial W}{\partial \omega} + t \frac{\partial W}{\partial \alpha} &= 0, \\ (y - y_0) \frac{\partial W}{\partial \omega} + t \frac{\partial W}{\partial \beta} &= 0, \\ (z - z_0) \frac{\partial W}{\partial \omega} + t \frac{\partial W}{\partial \gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (44.6)$$

Эти уравнения рациональные, между тем как уравнения (44.1) содержат радикалы; W можно назвать рациональным гамильтонианом лучей [1, стр. 412; 3, стр. 286].

В настоящем случае уравнения (44.4) и (44.6) дают явные уравнения для лучей в форме

$$x - x_0 = c_x t, \quad y - y_0 = c_y t, \quad z - z_0 = c_z t, \quad (44.7)$$

где

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{\alpha c^2}{\omega} R, \\ c_y &= \frac{\beta c^2}{\omega} R, \\ c_z &= \frac{\gamma c^2}{\omega} \frac{\omega^2}{\omega^2 - N^2} R \end{aligned} \quad (44.8)$$

и

$$R = \frac{\omega^2 - N^2}{2\omega^2 - N_1^2 - k^2 c^2}. \quad (44.9)$$

Легко проверить алгебраические тождества

$$\frac{1}{R} = 1 + (\gamma^2 + \Gamma^2) c^2 \frac{N^2}{(\omega^2 - N^2)^2} - \frac{W}{(\omega^2 - N^2)^2}, \quad (44.10)$$

$$\frac{1}{R} = 1 + \frac{N^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \chi^2 c^2}{\omega^2 - N^2} - \frac{W}{\omega^2 (\omega^2 - N^2)}; \quad (44.11)$$

так как $W=0$, они дают две формулы для R . Уравнение (44.9) показывает, что R не зависит от направления распространения; уравнение (44.10) показывает, что для $W=0$ и для действительных значений γ $R \leq 1$; уравнение (44.11) удобно для построения кривых $R = \text{const}$ на плоскости (ω, χ) , как это и сделано на рис. 18.

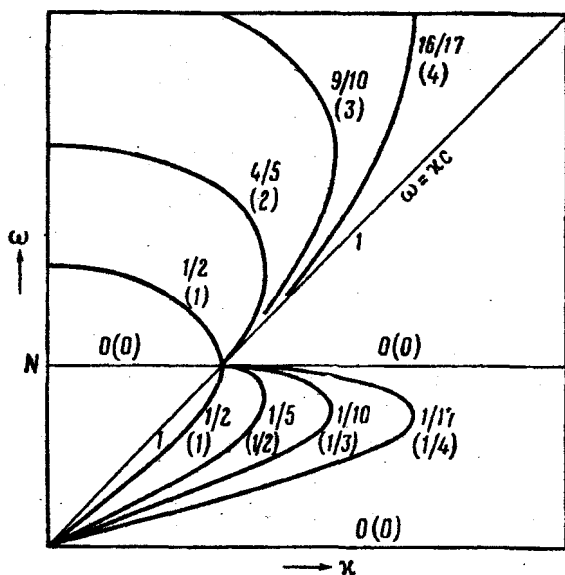


Рис. 18. Безразмерные импедансы R и S как функции χ и ω .

Числа в скобках — значения S ; без скобок — значения R .

Мы увидим в § 45, что R — удельное акустическое сопротивление волн в единицах ρc . На большей части области A его значение близко к единице, что является значением этой величины в классической акустике. R уменьшается, приближаясь к нулю (но никогда не достигает его) в самых нижних

частях области A . Его значение близко к нулю на большей части области G , но возрастает, не достигая, однако, значения единицы в левой части области.

§ 45. Импеданс давление — энтропия

Уравнение (42.1) показывает, что в простой волне

$$Q = \frac{Pc(i\gamma + \Gamma)}{(N^2 - \omega^2)}. \quad (45.1)$$

Вообще P и Q — комплексные числа. Только что приведенное уравнение показывает, что их фазовые углы отличаются на $\arctg(\gamma/\Gamma)$. В волнах типа G энтропия опережает давление (во времени) на угол, который близок к 90° всюду в области G , исключая ее часть, непосредственно примыкающую к кривой — границе G , где $\gamma = 0$ и энтропия с давлением находятся в фазе. В волнах типа A энтропия отстает от давления на угол, близкий к 90° всюду в области A , исключая часть, примыкающую к границе $\gamma = 0$, где он равен 180° .

Амплитуды изменения двух полей пропорциональны

$$N|Q| = \frac{|P|}{S}, \quad (45.2)$$

где $S > 0$ и

$$S^2 = \frac{(N^2 - \omega^2)}{N^2 c^2 (\gamma^2 + \Gamma^2)} = \frac{(\omega^2 - N^2)}{N^2 c^2 \left(1 - \frac{x^2 c^2}{\omega^2}\right)}$$

в силу уравнения распространения (42.2). Сравнение этого последнего уравнения с уравнением (44.11) показывает, что

$$S^2 = \frac{R}{1 - R}. \quad (45.3)$$

Значения S даны на рис. 18 числами в скобках.

Для волн типа A S обычно очень велико, так что изменения в локальном термодинамическом состоянии являются приблизительно изэнтропическими. Это значит, что упругая энергия (§ 21, 22) будет много больше, чем термобарическая, за исключением нижней части области A . В классической акустике принимается, что термобарическая энергия в точности равна нулю; следовательно, волны типа A можно

отождествить со звуковыми волнами, видоизмененными действием тяжести. Это отождествление подтверждается их фазовой скоростью (§ 43) и получит дальнейшее подтверждение ниже.

Для волн типа $G S$ обычно очень мало и локальные термодинамические изменения происходят почти при постоянном давлении. Термобарическая энергия много больше, чем упругая, и эти волны можно назвать внутренними гравитационными волнами, хотя слово „термобарические“, может быть, отвечало бы более точному описанию.

§ 46. Поток и распределение энергии в простых волнах

В простых волнах соотношение между полями скорости и полем давления дается уравнениями ср. уравнения (36.1) — (36.3)

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{\alpha c}{\omega} P, \\ U_y &= \frac{\beta c}{\omega} P, \\ U_z &= \frac{(\gamma - i\Gamma) \omega c}{(\omega^2 - N^2)} P. \end{aligned} \quad (46.1)$$

Жидкость не движется ни в направлении вектора распространения, ни в направлении групповой скорости; исключением является высокочастотный предел, где все три направления совпадают.

Плотность энергии, согласно уравнению (33.6), равна

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2c} (|U|^2 + |P|^2 + N^2 |Q|^2) = \\ &= \frac{1}{2c} \left[\left(1 + \frac{\alpha^2 c^2}{\omega^2} \right) + \frac{(\gamma^2 + \Gamma^2) c^2 (N^2 + \omega^2)}{(N^2 - \omega^2)^2} \right] |P|^2, \end{aligned} \quad (46.2)$$

а поток энергии, согласно уравнению (33.7),

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2} [P U_x^* + P^* U_x] = \frac{\alpha c}{\omega} |P|^2, \\ J_y &= \frac{\beta c}{\omega} |P|^2, \\ J_z &= \frac{\gamma c \omega}{\omega^2 - N^2} |P|^2, \end{aligned} \quad (46.3)$$

Сравнивая это последнее уравнение с уравнением (44.8), мы видим, что

$$\begin{aligned} J_x &= |P|^2 \frac{c_x}{Rc}, \\ J_y &= |P|^2 \frac{c_y}{Rc}, \\ J_z &= |P|^2 \frac{c_z}{Rc}. \end{aligned} \quad (46.4)$$

так что лучи являются линиями тока потока энергии. Это второе, более фундаментальное, определение лучей.

Кроме того, если написать уравнение (46.2) в форме $E = A |P|^2 / c$, то легко проверить тождество

$$2\omega^2 (\omega^2 - N^2)^2 \left(A - \frac{1}{R} \right) = (3\omega^2 - N^2) W. \quad (46.5)$$

Так как $W = 0$, то уравнение (46.2) эквивалентно уравнению

$$E = \frac{|P|^2}{Rc}. \quad (46.6)$$

Поэтому энергия течет вдоль лучей с групповой скоростью, так как уравнения (46.4) и (46.5) соединяются в $J_x = E c_x$ и т. д. Уравнение (46.6) можно также записать в форме

$$E = \frac{|p_1|^2}{R \rho c^2}. \quad (46.7)$$

Отсюда $R \rho c$ — удельное акустическое сопротивление волн в единицах CGS. Определения R и S позволяют также показать, что плотность упругой энергии равна

$$\frac{1}{2c} |P|^2 = \frac{1}{2} R E, \quad (46.8)$$

между тем как плотность термобарической энергии

$$\frac{N^2}{2c} |Q|^2 = \frac{1}{2} (1 - R) E. \quad (46.9)$$

Вместе с тем плотность кинетической энергии

$$\frac{1}{2c} |U|^2 = \frac{1}{2} E, \quad (46.10)$$

§ 47. Собственные решения

Фазовая диаграмма. Простые волны не удовлетворяют граничному условию $Q = 0$ при $z = 0$; построение собственных решений, которые удовлетворяли бы этому условию, было описано в § 42. Если опустить экспоненциальный множитель, то эти решения следующие:

$$\begin{aligned} P &= P_0 \sin(\psi - \gamma z), \\ NQ &= \pm \frac{P_0}{S} \sin \gamma z, \end{aligned} \quad (47.1)$$

где

$$P_0 > 0, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\gamma}{\Gamma}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad (47.2)$$

и P_0 — постоянная. Двойной знак появляется из условия $S > 0$; положительный знак должен быть взят, когда $\omega^2 > N^2$, отрицательный — когда $\omega^2 < N^2$. Величины P и NQ выражены в одних и тех же единицах и могут быть взяты в качестве прямоугольных координат фазовой точки (ср. § 7). Когда высота z изменяется, фазовая точка описывает некоторый эллипс, способ построения которого показан на рис. 19, где $OA = P_0$, $OB = P_0/S$. Когда z возрастает, фазовая точка описывает этот эллипс в положительном направлении для волн типа A ($\omega^2 > N^2$) и в отрицательном направлении для волн типа G ($\omega^2 < N^2$). Мы увидим дальше, что направление движения фазовой точки имеет фундаментальное значение в классификации собственных решений.

Собственные решения можно описывать как волны, амплитуда которых изменяется с высотой, как в уравнении (47.1), — волны, которые распространяются горизонтально со скоростью ω/κ . Обращение к диагностической диаграмме показывает, что горизонтальная скорость волн больше c для волн типа A и меньше c для волн типа G .

Рис. 18 показывает, что для волн типа A при $\omega \gg N$ $S \gg 1$, так что $NQ \ll P$ и эллипс фазовой диаграммы сильно удлинён в направлении P . В пределе $S \rightarrow \infty$, поэтому данные волны изэнтропические и обладают всеми свойствами обыкновенных звуковых волн. Эти свойства меняются, когда $\omega \rightarrow N$ и $S \rightarrow 0$; эллипс тогда удлиняется в направлении NQ и волны будут приблизительно изобарическими, что также служит характеристикой волн типа G , для которых S вообще

мало. Левее области G S , однако, увеличивается, волны становятся изэнтропическими и несколько похожими на обычные звуковые волны.

Когда S не очень велико и не очень мало, характер волн меняется с высотой, причем они изэнтропические при $\gamma z = n\pi + \psi$

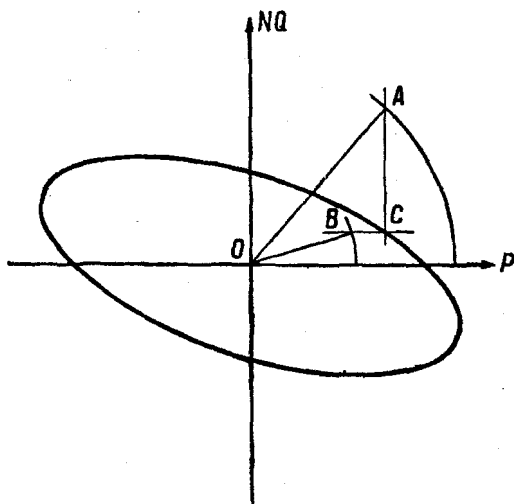


Рис. 19. Фазовая диаграмма для собственных решений изотермической атмосферы.

При возрастании высоты z точка C описывает эллипс. Движение C происходит по часовой стрелке для звуковых волн и против часовой стрелки для гравитационных волн.

и изобарические при $\gamma z = N\pi$. На остальных промежуточных высотах они становятся изотермическими или изопикническими; вообще они не могут быть отнесены целиком ни к одной из этих четырех категорий. Эта термодинамическая общность собственных решений — фундаментальный физический факт для изотермической атмосферы; в то же время слишком часто допускают, что изменения ее состояния происходят изэнтропически или изотермически.

Годограф. Годограф волн описывается формулами

$$\begin{aligned} U_H &= P_0 \frac{\kappa c}{\omega} \sin(\gamma z - \psi), \\ U_V &= \pm i P_0 \frac{\omega}{NS} \sin \gamma z, \end{aligned} \quad (47.3)$$

где U_H и U_V — поля горизонтальной и вертикальной скорости. Годограф всегда лежит в вертикальной плоскости, содержащей вектор распространения, и представляет собой эллипс с отношением осей

$$\left| \frac{U_V}{U_H} \right| = \left| \frac{\omega^2}{\kappa c N S} \right| \frac{\sin \gamma z}{\sin(\gamma z - \psi)}.$$

На высотах $\gamma z = n\pi$ он превращается в горизонтальную прямую линию, в то время как при $\gamma z = n\pi + \psi$ он будет

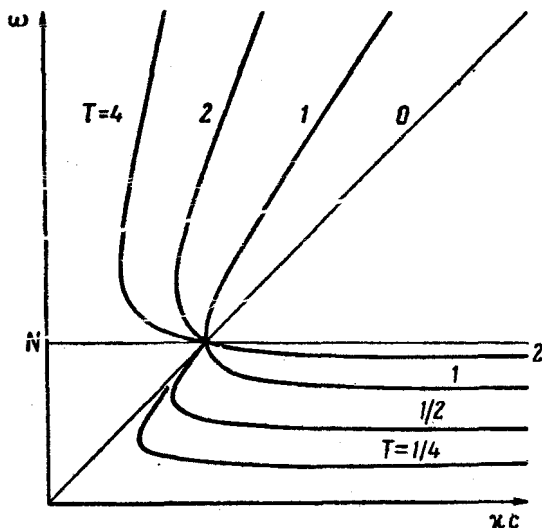


Рис. 20. Отношение T как функция κ и ω .

вертикальной прямой линией. Тригонометрический множитель будет всюду иметь величину порядка единицы, исключая очень узкие области значений z . Отношение осей будет вообще иметь порядок величины T , где

$$T^2 = \left(\frac{\omega}{\kappa c} \right)^2 \left(\frac{\omega}{N} \right)^2 \frac{1}{S^2} = \frac{\omega^2 (\omega^2 - \kappa^2 c^2)}{\kappa^2 c^2 (\omega^2 - N^2)}. \quad (47.4)$$

Рис. 20. показывает формы кривых T на диагностической диаграмме. Для малых значений ω/N (волны типа G) справедливо приближение

$$T = \frac{\omega}{N}$$

при условии, что $\kappa c/N$ не слишком мало.

Таким образом, для малых значений ω/N вертикальная скорость будет мала сравнительно с горизонтальной. Мы увидим, что это имеет значение в связи с традиционным приближением, рассмотренным в § 37. Для волн типа А всюду справедливо приближение

$$T = \frac{1}{\kappa};$$

исключением будут те части области А, которые непосредственно примыкают к ограничивающей ее кривой.

§ 48. Гравитационные волны и флуктуационный ветер

До сих пор ударение делалось на дедуктивных аспектах теории. Нам остается отождествить различные типы рассмотренных решений с известными атмосферными явлениями. Это просто сделать в случае решений типа А; они, очевидно, являются звуковыми волнами. Обычная теория, излагаемая в акустике, отличается от теории, развитой здесь, только в одном отношении: в акустике почти всегда пренебрегают гравитационными эффектами, обязанными стратификации.

Мы видели, что влияние стратификации очень мало для частот, значительно превышающих N . Так как можно полагать, что N имеет порядок 1 рад/мин , мы заключаем, что эти гравитационные явления становятся заметными только для звуков с длиной волны больше 50 км . Еще более поразителен тот факт, что звуковых волн с частотами меньше N не существует. Вместо этого роль звуковых волн на малых частотах в большей или меньшей степени берут на себя волны Ламба.

Подобное же отождествление гравитационных волн, может быть, менее очевидно. Короткие гравитационные волны (большие значения κ) имеют одну характеристику, которая резко отличает их от звуковых волн. У последних отношение скорости частицы к амплитуде давления очень мало — порядка величины $1/\rho c$. У гравитационных волн это отношение становится много больше и приближается к бесконечности для коротких волн. Это служит также и характеристикой флуктуаций скорости ветра, которые происходят без заметных флуктуаций давления. Можно поэтому попытаться отождествить гравитационные волны с флуктуационной составляющей ветра.

Однако это отождествление не свободно от некоторых внутренних трудностей. Нужно вспомнить, что атмосфера, к которой относятся настоящие вычисления, чрезвычайно идеализирована и что многие расчеты сами по себе приближенны. В этой главе наиболее существенная идеализация относится к нижней границе жидкости, которая была принята за плоскую уровенную поверхность. Действительная поверхность Земли далека от этого — она включает в себя скалы, деревья, холмы и горы. Когда воздух обтекает более малые из этих препятствий, образуются турбулентные вихри, как это хорошо известно из экспериментов в аэродинамических трубах. Эти вихри во многом ответственны за более быстрые локализованные флуктуации скорости ветра. Они, несомненно, являются основными явлениями в самых нижних слоях атмосферы. При идеализированной нижней границе атмосферы ни одно из этих явлений не учитывается в вычислениях. Вероятно, если бы даже можно было рассматривать менее идеализированную границу, то другие приближения не позволили бы дать соответствующее математическое описание этих явлений.

Следовательно, интересующее нас отождествление волн можно осуществить только тогда, когда масштабы пространства и времени этих явлений достаточно велики и достаточно велико расстояние от границы, так что ее действительное отклонение от идеальной плоскости не имеет большого значения.

Однако на этом этапе ощущается другой недостаток этих вычислений: земная атмосфера далека от изотермической. Мы увидим в гл. XII, что лучшее свидетельство в пользу этого отождествления гравитационных волн с флуктуационным ветром получается из наблюдений, когда их делают при наличии заметной температурной инверсии в нижнем километре атмосферы. При этих условиях можно получить почти количественное согласие между теорией и наблюдением.

ЛИТЕРАТУРА

1. E s k a r t C., Approximate solution of one-dimensional wave equations, *Rev. Modern. Phys.*, 20, 399 (1948).
2. L a m b H., *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press., 6th ed., 1932. (Русский перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М.—Л., 1947.)
3. P o i n c a r é H., *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière*, Paris, Carré, 1889.

Глава IX

ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ АТМОСФЕРА. ПЛОСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ С ВРАЩЕНИЕМ

§ 49. Вертикальная ось вращения

Если поверхности уровня плоские и атмосфера вращается около вертикальной оси, то соображения предыдущей главы усложняются лишь незначительно и можно пользоваться прежней системой обозначений. Скорость удобно представить в виде суммы трех членов

$$U = U_1 + U_2 + U_3,$$

где в случае простых волн

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{\omega c}{D} (i\alpha + j\beta) P, \\ U_2 &= \frac{i\Omega c}{D} (-i\beta + j\alpha) P, \\ U_3 &= i\omega Qk, \end{aligned} \quad (49.1)$$

причем

$$D = \Omega^2 - \omega^2. \quad (49.2)$$

Первая составляющая — градиентная скорость, вторая — геострофическая и третья — термобарическая.

Остаточные уравнения запишутся так:

$$\begin{aligned} c \left(\frac{d}{dz} + \Gamma \right) P &= (N^2 - \omega^2) Q, \\ c \left(\frac{d}{dz} - \Gamma \right) Q &= \left(1 + \frac{x^2 c^2}{D} \right) P, \end{aligned} \quad (49.3)$$

и граничное условие

$$Q = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (49.4)$$

Коэффициенты уравнения (49.3) — постоянные, когда атмосфера изотермическая и все этапы вычислений аналогичны тем, что были в гл. VIII, но алгебраические трудности возрастают из-за наличия знаменателя D , а не из-за ω^2 .

Некоторые выводы можно сделать сразу же, не решая этих уравнений. Для больших значений ω/Ω знаменатель D отличается от $-\omega^2$ только членами порядка Ω^2/ω^2 , но не Ω/ω . Отсюда и поля P и Q будут отличаться от полей предыдущей главы только на величины того же порядка Ω^2/ω^2 . Если бы даже период $2\pi/\omega$ был равен одному часу, то влияние вращения на P и Q оценивалось бы приблизительно в один лишь процент; для периода же в одну минуту эффект был бы около одной тысячной процента.

С другой стороны, отношение геострофической скорости к градиентной равно

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\Omega}{\omega},$$

и поэтому влияние вращения на скорость много больше: для колебания с периодом в час эффект вращения в составляющих скорости достигает 8%. Если не говорить о направлении, то на величину скорости вращение влияет лишь в малой степени.

Следовательно, для высоких частот эффект вращения незначителен: для промежуточных частот влиянием вращения на P и Q можно пренебречь, а полностью этот эффект описывается уравнениями (49.1). Вращение будет вносить большие изменения в собственные решения только тогда, когда ω/Ω имеет величину порядка единицы или меньше.

§ 50. Волны Ламба

Те же приемы, что и выше, дают решения Ламба в виде

$$\begin{aligned} Q &= 0, \\ P &= \exp(-\Gamma z), \\ \omega^2 &= x^2 c^2 + \Omega^2; \end{aligned} \tag{50.1}$$

график последнего уравнения показан на рис. 21. Геострофическая составляющая более уже не равна нулю, а годограф волн представляет собой горизонтальный эллипс. Так как из уравнения (50.1) следует, что для этих волн $\omega^2 > \Omega^2$, то большая ось эллипса будет иметь направление $i\alpha + j\beta$, а отношение осей будет Ω/ω . Градиентная составляющая скорости всегда имеет большую амплитуду, чем геострофическая.

Уравнение (50.1) показывает также, что волны обладают дисперсией, так как имеют фазовую скорость

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega_c}{(\omega^2 - \Omega^2)^{1/2}}. \quad (50.2)$$

Эта величина всегда больше c и стремится к бесконечности.

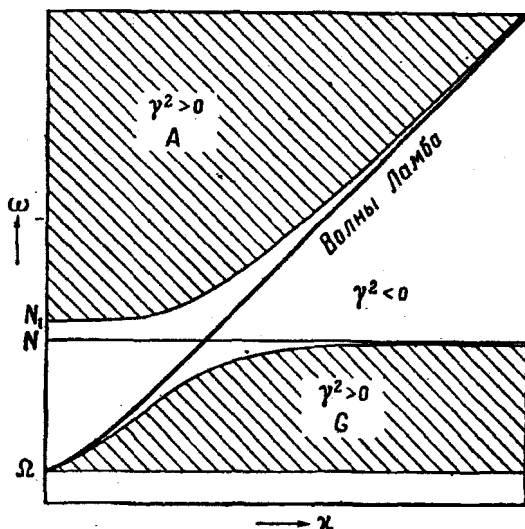


Рис. 21. Диагностическая κ, ω -диаграмма для изотермической атмосферы, вращающейся вокруг вертикальной оси.

когда $\omega \rightarrow \Omega$. Групповая скорость имеет направление $i\alpha + j\beta$, а ее величина равна

$$c_{\text{гр}} = \frac{c^2}{c_{\text{фаз}}}. \quad (50.3)$$

Она всегда меньше, чем c , и стремится к нулю, когда $\omega \rightarrow \Omega$.
Плотность энергии

$$E = \frac{\omega^2 |P|^2}{\kappa^2 c^2}, \quad (50.4)$$

а поток энергии в направлении вектора горизонтального распространения

$$J = \frac{\omega |P|^2}{\kappa c} = c_{\text{гр}} E. \quad (50.5)$$

Характеристический импеданс

$$R = \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2}. \quad (50.6)$$

Он обращается в нуль, когда $\omega \rightarrow \Omega$, и в единицу, когда $\omega \rightarrow \infty$.

Дисперсия волн Ламба незначительна, если исключить частоты, сравнимые с Ω . Так, для волн с периодом в 1 час $c_{\text{фаз}}/c = 1,03$, а для волн с более коротким периодом это отношение еще ближе к единице. Длина волны $\frac{2\pi}{\kappa}$, соответствующая периоду в 1 час, составляет около 1200 км. Для таких длинных волн начинает сказываться кривизна поверхностей уровня Земли, так что настоящие вычисления едва ли будут приложимы к Земле.

§ 51. Простые волны и собственные решения

Для простых волн приведенные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} c(i\gamma + \Gamma)P - (N^2 - \omega^2)Q &= 0, \\ \left(1 + \frac{\kappa^2 c^2}{D}\right)P - c(i\gamma - \Gamma)Q &= 0. \end{aligned} \quad (51.1)$$

Для того чтобы эти уравнения имели нетривиальное решение, необходимо, чтобы

$$\gamma^2 c^2 = \omega^2 - N_1^2 + \frac{\kappa^2 c^2 (N^2 - \omega^2)}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (51.2)$$

Это решение будет регулярным для действительного γ , что разделяет диагностическую диаграмму на четыре области, как это показано на рис. 21. Область *A*, область акустических волн, в основном та же, что и прежде; однако область *G*, область внутренних гравитационных волн, имеет теперь своей нижней границей $\omega = \Omega$, а не $\omega = 0$. Между собственными решениями для случая с вращением и собственными решениями при отсутствии вращения имеется общее соответствие. Собственные решения на нижней границе *G* на рис. 21 соответствуют некоторым из собственных решений на нижней границе *G* на рис. 16. Однако первые имеют собственную частоту $\omega = \Omega$, а последние $\omega = 0$. Это тесно связано с некоторыми различиями между результатами § 13 и 15. Все решения, полученные в § 15 для

плоских поверхностей уровня и вертикального Ω , соответствуют собственной частоте нуль и, следовательно, оси x на рис. 21, а не нижней границе области G .

Следует заметить, что диаграмма рис. 21 была построена при $N/\Omega = 5$. Если $2\pi/\Omega = 12$ час, то это значит, что температура больше $100\,000^\circ\text{C}$. Более реальным было бы значение $N/\Omega = 125$, но график, построенный для этого значения, был бы невыразительным.

Уравнение (51.2) также является уравнением поверхности распространения. Как и раньше, это эллипсоид, когда $\omega^2 > N_1^2$, и гиперboloид, когда $\Omega^2 < \omega^2 < N_1^2$. Во всех остальных интервалах частоты он мнимый. Фазовая скорость для постоянного ω снова обратно пропорциональна радиусу-вектору поверхности распространения, поэтому мало что можно прибавить к сказанному ранее по данному вопросу; исключением служит случай гиперboloида, где половинный угол асимптотического конуса теперь дается выражением

$$\operatorname{tg} \theta = \left[\frac{\omega^2 - \Omega^2}{N^2 - \omega^2} \right]^{1/2} \quad (51.3)$$

и обращается в нуль при $\omega = \Omega$.

Общая теория лучей и групповой скорости та же, что и прежде, но рациональный гамильтониан будет

$$W = (\alpha^2 + \beta^2) c^2 (\omega^2 - N^2) + \gamma^2 c^2 (\omega^2 - \Omega^2) - (\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - N_1^2). \quad (51.4)$$

Групповую скорость опять можно вычислять из уравнений

$$c_x = - \frac{\partial W}{\partial \alpha} \frac{\partial W}{\partial \omega} \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{\alpha \omega c^2}{\omega^2 - \Omega^2} R, \\ c_y &= \frac{\beta \omega c^2}{\omega^2 - \Omega^2} R, \\ c_z &= \frac{\gamma \omega c^2}{\omega^2 - N^2} R, \end{aligned} \quad (51.5)$$

где

$$R = \frac{(\omega^2 - N^2)(\omega^2 - \Omega^2)}{\omega^2(2\omega^2 - N_1^2 - \Omega^2 - k^2 c^2)} \quad (51.6)$$

– характеристический импеданс. Справедливы алгебраические тождества

$$\frac{1}{R} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - N^2} - \kappa^2 c^2 \frac{(N^2 - \Omega^2) \omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 (\omega^2 - N^2)} - W \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 (\omega^2 - N^2)}; \quad (51.7)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} + (\gamma^2 + \Gamma^2) c^2 \frac{(N^2 - \Omega^2) \omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2) (\omega^2 - N^2)^2} - W \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2) (\omega^2 - N^2)^2}. \quad (51.8)$$

Для заданных ω и k R снова не зависит от направления распространения. Для $W=0$, действительного γ и $N^2 > \Omega^2$ R

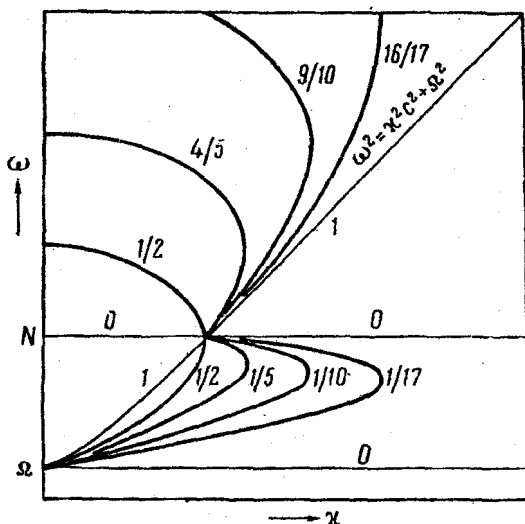


Рис. 22. Безразмерный импеданс R как функция κ и ω для изотермической атмосферы, вращающейся вокруг вертикальной оси.

все еще меньше единицы. Зависимость R от κ и ω показана на рис. 22.

Соотношение между полями P и Q остается таким, как если бы вращения не было:

$$Q = \frac{c(i\gamma + \Gamma)}{N^2 - \omega^2} P. \quad (51.9)$$

Импеданс давление — энтропия дается поэтому формулой

$$S^2 = \frac{(N^2 - \omega^2)^2}{N^2 (\gamma^2 + \Gamma^2) c^2} = R \frac{\omega^2 (N^2 - Q^2)}{N^2 [(1-R)\omega^2 - Q^2]}. \quad (51.10)$$

Его график почти не отличается от графика на рис. 22 даже в том случае, когда $Q/N = 5$.

Составляющие скорости будут

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{(\alpha\omega + i\beta Q) Pc}{\omega^2 - Q^2}, \\ U_y &= \frac{(\beta\omega - i\alpha Q) Pc}{\omega^2 - Q^2}, \\ U_z &= \frac{(\gamma - i\Gamma) \omega Pc}{\omega^2 - N^2}. \end{aligned} \quad (51.11)$$

Поэтому плотность энергии

$$E = \frac{A |P|^2}{c}, \quad (51.12)$$

где

$$A = \frac{1}{2} \left\{ 1 + x^2 c^2 \frac{Q^2 + \omega^2}{(\omega^2 - Q^2)^2} + (\gamma^2 + \Gamma^2) c^2 \frac{N^2 + \omega^2}{(\omega^2 - N^2)^2} \right\}. \quad (51.13)$$

Поток энергии

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\alpha\omega |P|^2 c}{\omega^2 - Q^2} = \frac{|P|^2 c_x}{Rc}, \\ J_y &= \frac{\beta\omega |P|^2 c}{\omega^2 - Q^2} = \frac{|P|^2 c_y}{Rc}, \\ J_z &= \frac{\gamma\omega |P|^2 c}{\omega^2 - N^2} = \frac{|P|^2 c_z}{Rc}, \end{aligned} \quad (51.14)$$

так что лучи снова служат линиями тока для потока энергии. Величины A , R и W связаны тождеством

$$2 \left(A - \frac{1}{R} \right) = \frac{W}{(\omega^2 - N^2)(\omega^2 - Q^2)} \left[\frac{2\omega^2}{\omega^2 - N^2} + \frac{2\omega^2}{\omega^2 - Q^2} - 1 \right], \quad (51.15)$$

так что в силу равенства $W = 0$

$$E = \frac{|P|^2}{Rc}. \quad (51.16)$$

Этим завершается доказательство того, что R опять является характеристическим импедансом и энергия перемещается с групповой скоростью.

Как и в случае отсутствия вращения, упругая энергия

$$\frac{1}{2c} |P|^2 = \frac{1}{2} RE, \quad (51.17)$$

но термобарическая энергия

$$\frac{1}{2c} N^2 |Q|^2 = \frac{1}{2} \frac{RE}{S^2}. \quad (51.18)$$

Следовательно, кинетическая энергия уже не равна половине полной, а

$$\frac{1}{2c} |U|^2 = \frac{1}{2} \left[1 - R \left(1 + \frac{1}{S^2} \right) \right] E. \quad (51.19)$$

Как и в случае волн Ламба, количественные различия между этими уравнениями и уравнениями гл. VIII незначительны, исключая случай, когда ω/Ω близко к единице. Однако рис. 21 показывает, что в данном случае это уже не будет связано с большой длиной волны.

Рассмотрение здесь собственных решений и их фазовых диаграмм вполне соответствует изложенному в § 47 и не нуждается в повторении. Отношение геострофической скорости к горизонтальной градиентной скорости, как замечено выше, равно Ω/ω и меньше единицы для всех собственных решений, за исключением решений для собственной частоты нуль. Отношение вертикальной термобарической скорости к горизонтальной градиентной скорости

$$\left| \frac{U_3}{U_1} \right| = T \left| \frac{\sin \gamma z}{\sin (\gamma z - \phi)} \right|,$$

где

$$T^2 = \frac{(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - \kappa^2 c^2 - \Omega^2)}{\kappa^2 c^2 (\omega^2 - N^2)}. \quad (51.20)$$

График этой функции лишь незначительно отличается от графика на рис. 20. Для $T=0$ график состоит из линии $\omega = \Omega$ и гиперболы $\omega^2 = \kappa^2 c^2 + \Omega^2$, но кривые для больших значений T существенно не изменяются. Для малых значений $(\omega^2 - \Omega^2)/N^2$ справедливо приближение

$$T^2 = \frac{(\omega^2 - \Omega^2)}{N^2} \quad (51.21)$$

при условии, что $\chi c/N$ не слишком мало. Внутри площади А снова справедливо приближение

$$T = \frac{\gamma}{\chi}. \quad (51.22)$$

§ 52. Докритическая устойчивость

В § 27 и 28 было отмечено, что $N = \Omega$ — критическое значение устойчивости. В последнем параграфе мы считали, что $N/\Omega > 1$. Если $N/\Omega < 1$, то необходимо предположить, что или температура воздуха, или угловая скорость имеют чрезвычайно высокие значения. Несмотря на это, для теории вопроса интересно хотя бы кратко остановиться на количественных различиях между этими двумя случаями.

На рис. 23 дана диагностическая диаграмма для докритической устойчивости. Кривая для волн Ламба остается неизменной и очертания области А изменяются не сильно, за исключением лишь того, что ее нижний угол имеет вершину в точке, для которой $\omega = \Omega$, а не $\omega = N_1$. Однако очертания области G совсем иные, чем на рис. 21. Наиболее поразительно изменение поверхностей распространения гравитационных волн, когда $\Omega > \omega > N$: теперь это двуполостные гиперболоиды (а не однополостные). Исключенные направления распространения — это те, которые лежат вне (а не внутри) конуса асимптот. В нормальном случае никакие гравитационные волны не распространяются вертикально; в данном случае никакие гравитационные волны не распространяются горизонтально.

Этих замечаний достаточно, чтобы показать, что обычное пренебрежение устойчивостью ($N = 0$) и сохранение силы Кориолиса ($\Omega \neq 0$) незаконны.

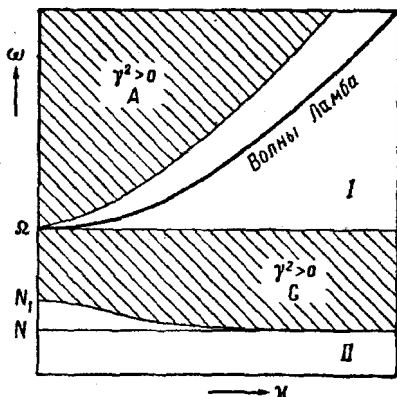


Рис. 23. Диагностическая χ, ω -диаграмма для изотермической атмосферы с докритической устойчивостью $N < \Omega$.

§ 53. Наклонная ось вращения

Если ось вращения наклонна, то все предыдущие вычисления становятся значительно более сложными, если только не пренебрегать горизонтальной составляющей вектора Кориолиса Ω (§ 37). Если это приближение сделано, то в вычислениях последних четырех параграфов нужно только заменить во всех уравнениях Ω на Ω_V . В этом параграфе мы рассмотрим некоторые из простейших эффектов, зависящих от Ω_H , но полного разбора решений уравнений поля делать не будем.

Остаточные уравнения (37.18) следующие:

$$c \left(\frac{d}{dz} + \Gamma_1 - i\Gamma_2 \right) P = (N^2 - \nu) Q, \quad (53.1)$$

$$c \left(\frac{d}{dz} - \Gamma_1 - i\Gamma_2 \right) Q = \left(1 - \frac{c^2}{\mu} \right) P, \quad (53.2)$$

где введены сокращенные обозначения

$$\Gamma_1 = \Gamma - \frac{\omega \Omega_H^\alpha}{\omega^2 - \Omega_V^2}, \quad (53.3)$$

$$\Gamma_2 = \frac{\Omega_V \Omega_H^\beta}{\omega^2 - \Omega_V^2}, \quad (53.4)$$

$$\nu = \frac{\omega^2 (\omega^2 - \Omega^2)}{\omega^2 - \Omega_V^2}, \quad (53.5)$$

$$\mu = \frac{\omega^2 - \Omega_V^2}{\kappa^2}. \quad (53.6)$$

Граничное условие $Q = 0$ при $z = 0$ остается неизменным.

Сразу же можно заметить, что когда $\omega \gg \Omega$, эти уравнения отличаются от уравнений (49.3) главным образом членами порядка величины $(\Omega/\omega)^2$. Единственное исключение составляет

$$\frac{\Gamma - \Gamma_1}{\Gamma} = \frac{\alpha}{\Gamma} \frac{\omega \Omega_H}{\omega^2 - \Omega_V^2}.$$

Этот член не только имеет порядок величины Ω/ω , но и содержит множитель α/Γ , который может быть велик. В этом

интервале частот от Ω_H зависит, следовательно, только эффект первой степени для P и Q , и мы пренебрегаем им, если пренебрегаем Ω_H .

Влияние Ω_V на соотношение между скоростью U и полями P и Q было рассмотрено в § 49. Дополнительное влияние Ω_H можно усмотреть из уравнений (37.13) и (37.14): горизонтальный градиент давления $\nabla_H P$ заменяется через

$$\mathbf{G} = \nabla_H P + i \frac{i\omega\Omega_H Q}{c}.$$

Можно предположить, что уравнение (51.9)

$$Q = \frac{P}{NS}$$

все еще дает оценку величины отношения Q к P , так что отношение двух членов в $\mathbf{G}$ имеет порядок величины

$$\frac{\omega}{\kappa c} \frac{\Omega_H}{NS}.$$

Для акустических волн высокой частоты обе величины, $\omega/\kappa c$ и S , равны единице; дополнительный член, таким образом, создает эффекты порядка величины Ω_H/N . Они будут малы, но все еще больше, чем Ω/ω . Однако для волн типа Q как $\omega/\kappa c$, так и S становятся малыми и никакие общие выводы невозможны.

Волны Ламба. Если атмосфера изотермическая, то коэффициенты уравнений (53.1) и (51.2) постоянны и решение Ламба принимает вид

$$Q = 0, \quad P = e^{-(\Gamma_1 - \Gamma_2)z}, \quad (53.7)$$

$$\mu = c^2, \quad \text{или} \quad \omega^2 = \kappa^2 c^2 + \Omega_V^2. \quad (53.8)$$

Решение будет регулярным (конечным при $z = \infty$) и будет собственным решением только в том случае, если $\Gamma_1 > 0$, т. е. если

$$\omega\Omega_H \leq \Gamma(\omega^2 - \Omega_V^2). \quad (53.9)$$

Чтобы рассмотреть уравнения (53.8) и (53.9) геометрически, необходимо обобщить идею диагностической диаграммы. Вместо двухмерной диаграммы теперь требуется

рассматривать трехмерное пространство, в котором α , β и ω являются прямоугольными координатами. Достаточно рассмотреть только полупространство $\omega > 0$, так как основные уравнения (37.15) и (37.16) остаются неизменными, когда четыре величины I , α , β и ω — заменяются одновременно на $-I$, $-\alpha$, $-\beta$ и $-\omega$. Следует поэтому считать, что все описания трехмерной диагностической диаграммы относятся

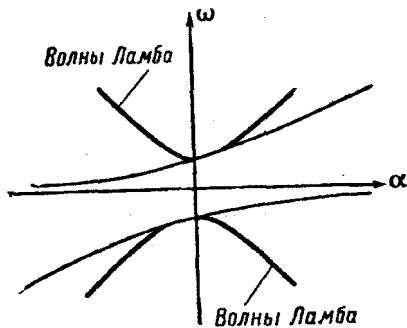


Рис. 24. Иллюстрация трехмерной диагностики для волн Ламба в изотермической атмосфере, вращающейся вокруг наклонной оси.

только к ее верхней половине и могут быть распространены на ее нижнюю половину в согласии с этим принципом симметрии. Предположим также, что обе величины Ω_H и Ω_V — положительны, тогда будет проще пользоваться географическими терминами.

В этом полупространстве уравнение (53.8) представляет одну половину поверхности гиперboloида вращения, а уравнение (53.9) — отверстие в этом гиперboloиде. Оно ограничено пересечением гиперboloида с поверхностью $\Gamma_1 = 0$, которая является гиперболическим цилиндром

$$\omega \Omega_H = \Gamma(\omega^2 - \Omega_V^2). \quad (53.10)$$

Когда $\Omega_H < \Gamma c$, отверстие представляет собой овал, расположенный к востоку от вершины гиперboloида; когда $\Omega_H > \Gamma c$, отверстие становится длинным разрезом, простирающимся на восток в бесконечность. Первый случай нормальный и иллюстрируется рис. 24.

Как и в случае вертикальной оси, волны Ламба можно рассматривать как неотраженные плоские волны, амплитуда которых убывает по экспоненциальному закону с высотой. Однако направление распространения этих волн не горизонтально; их вектор распространения

$$\alpha, \beta, \gamma = -\Gamma_2$$

и образует угол δ с горизонталью, где

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{\Gamma_2}{\chi} = \frac{\beta}{\chi} \frac{\Omega_H \Omega_V}{\omega^2 - \Omega_V^2}. \quad (53.11)$$

Для высоких частот этот угол очень мал, и им можно пренебречь. В этом приближении вся картина не зависит от Ω_H . Для азимутов восток-запад $\delta = 0$ для всех ω и Ω_H не входит в формулы до тех пор, пока можно пренебрегать отверстием в гиперboloиде.

Для всех других азимутов $\delta \rightarrow \pi/2$, когда $\omega \rightarrow \Omega_V$ и Ω_H является необходимым параметром решения. В этом предельном случае волны Ламба распространяются вертикально, между тем как пренебрежение величиной Ω_H привело бы к выводу, что они распространяются горизонтально.

Может показаться странным, что волны, вектор распространения которых наклонен к горизонтальной границе, не отражаются там. Но эти волны горизонтально поляризованы, и их энергия течет горизонтально. Мы увидим, что родственные явления происходят и с другими собственными решениями.

Законы отражения. Уравнения (53.1) и (53.2) имеют простые волновые решения; полезно будет написать вертикальную компоненту вектора распространения в таком виде:

$$\gamma = \gamma_0 + \Gamma_2.$$

Тогда остаточные уравнения в обозначениях § 53 будут

$$\begin{aligned} c(i\gamma_0 + \Gamma_1)P &= (N^2 - \nu)Q, \\ c(i\gamma_0 - \Gamma_1)Q &= \left(1 - \frac{c^2}{\mu}\right)P, \end{aligned} \quad (53.12)$$

а уравнение распространения —

$$c^2(\gamma_0^2 + \Gamma_1^2) + (N^2 - \nu)\left(1 - \frac{c^2}{\mu}\right) = 0. \quad (53.13)$$

Для заданных α , β и ω это уравнение имеет два корня $\pm \gamma_0$. Граничное условие будет удовлетворено, если

$$Q = \{e^{i(\gamma_0 + \Gamma_2)z} - e^{-i(\gamma_0 - \Gamma_2)z}\} e^{i(\alpha x + \beta y)}, \quad (53.14)$$

так что это и есть вид собственных решений. Два члена уравнения (53.14) еще можно истолковать как отраженную

и падающую волны, но углы падения и отражения неравны. Векторы распространения будут

$$k_{\text{пад}} = \alpha, \beta, -(\gamma_0 + \Gamma_2) \text{ для падающей волны,}$$

$$k_{\text{отр}} = \alpha, \beta, (\gamma_0 - \Gamma_2) \text{ для отраженной волны.}$$

Их длины неравны, и, следовательно, при отражении происходит изменение длины волны, величина которого определяется Γ_2 и становится большой, когда $\omega \rightarrow \Omega_V$.

Это явление легче всего описать с помощью среднего вектора распространения $(k_{\text{пад}} + k_{\text{отр}})/2$. Если $\alpha = \kappa \cos \varphi$, $\beta = \kappa \sin \varphi$, то этот средний вектор имеет компоненты

$$\kappa \cos \varphi, \quad \kappa \sin \varphi, \quad \kappa \operatorname{tg} \delta,$$

где δ — угол, определенный уравнением (53.11). Соотношения между падающим и отраженным векторами распространения показаны на рис. 25. Когда ω/Ω_V очень

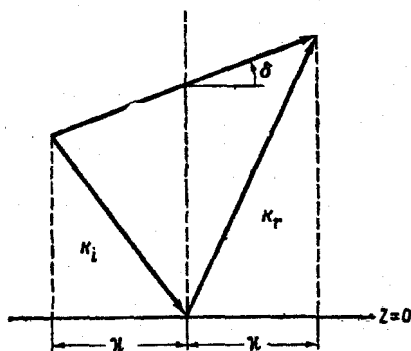


Рис. 25. Отражение простых волн горизонтальной поверхностью в изотермической атмосфере, вращающейся вокруг наклонной оси.

велико, δ очень мало; изменением длины волны и неравенством углов падения и отражения можно пренебречь. Однако, когда это отношение приближается к единице, соответствующими изменениями пренебрегать нельзя и они зависят как раз от Ω_H .

Эти аномальные законы отражения становятся еще более сложными, если отражающая поверхность не будет уровневой. Они являются результатом моноклинальной симметрии, которая вытекает из наклона оси вращения.

Выводы. Эти вычисления ни в какой степени не являются полными. Можно было бы рассмотреть свойства простых волн — их фазовую и групповую скорости, импедансы и т. д., но при этом мы столкнулись бы с большими алгебраическими трудностями. Эти два случая вычислений говорят, однако, об одном: существуют эффекты, которые зависят от Ω_H .

они могут быть очень заметными для частот, близких к $\omega = \Omega_V$.

Это было установлено только для плоских поверхностей уровня. Если поверхности уровня — сферы, то Ω_V будет зависеть от широты. Можно показать, что эффекты, о которых идет речь, будут тогда иметь место лишь в сравнительно узкой полосе широт и эта полоса будет особая для каждого значения ω . На любой заданной широте значения ω , для которых эти эффекты велики, могли бы считаться несущественными по сравнению со значительно большим интервалом частот, для которых эффекты малы.

Это, конечно, только предположение, проверить которое, оставаясь в рамках „традиционного приближения“ (пренебрежение членами с Ω_H), нельзя. Мы вернемся к этому вопросу в § 64.

Глава X

ОКЕАНЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 54. Введение

Мы видели, что тяжелый газ, температура которого всюду одна и та же, характеризуется постоянными значениями всех трех коэффициентов: N , Γ и c . Это прямое следствие законов идеальных газов. Жидкость, термодинамические свойства которой совершенно другие, чем у идеального газа, не может быть расслоена таким образом, чтобы все три коэффициента не зависели от высоты (или глубины). Тем не менее математическая простота, вносимая предположением постоянных коэффициентов, столь велика, что, несмотря на физическую невозможность этой модели, ее изучение представляет методический интерес, как первое введение в теорию океанов.

Эта глава будет посвящена случаю океана постоянной глубины D , для которого N и c имеют постоянные значения, а $\Gamma = 0$ всюду. Последнее предположение приводит к дальнейшим математическим упрощениям и оправдывается малостью значения Γ в реальных земных океанах. Как и в двух предшествующих главах, предположим, что поверхности уровня плоские, и будем рассматривать лишь случай вертикальной оси вращения.

При этих условиях многие из математических выводов гл. IX можно применить без изменения (если не считать того, что здесь мы полагаем $\Gamma = 0$). В частности, теория простых волн может быть взята целиком. Нужно лишь изменить способ построения собственных решений из простых волн.

В случае изотермической атмосферы простые волны отражаются лишь от нижней твердой границы. В настоящем случае они будут отражаться как от твердого дна, так и от верхней свободной поверхности. Выбирая координаты таким образом, чтобы невозмущенная свободная поверхность была

при $z=0$, получим для дна $z=-D$. При $z=0$ имеем граничное условие [ср. уравнение (23.9)]

$$-i\omega P_c = gW = g i\omega Q, \quad (54.1)$$

в то время как при $z=-D$ условие таково:

$$Q = 0. \quad (54.2)$$

Если в атмосферной теории вводилось лишь одно граничное условие, то теория океанов требует двух; в этом и состоит вся разница между обеими теориями.

Вместо того чтобы пытаться строить собственные решения из простых волн, более удобно опять начинать от остаточных уравнений в форме

$$c \left(\frac{dP}{dz} \right) = (N^2 - \omega^2) Q, \quad (54.3)$$

$$c \left(\frac{dQ}{dz} \right) = \left[1 - \frac{x^2 c^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right] P. \quad (54.4)$$

Собственные решения должны удовлетворять всем этим четырем уравнениям.

Условие (54.2) будет удовлетворено, если

$$Q = Q_0 \sin \gamma (z + D), \quad (54.5)$$

а из уравнения (54.4) тогда следует, что

$$P = P_0 \cos \gamma (z + D). \quad (54.6)$$

Здесь P_0 и Q_0 — константы. Уравнения (54.3) и (54.4) приводят к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \gamma c P_0 + (N^2 - \omega^2) Q_0 &= 0, \\ \left[1 - \frac{x^2 c^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right] P_0 - \gamma c Q_0 &= 0, \end{aligned} \quad (54.7)$$

из которых следует уравнение распространения

$$\gamma^2 c^2 (\omega^2 - \Omega^2) + (N^2 - \omega^2) (\omega^2 - \Omega^2 - x^2 c^2) = 0, \quad (54.8)$$

как условие того, что P_0 и Q_0 одновременно не равны нулю.

Пока все аналогично случаю атмосферы, но уравнение (54.1) еще не использовано. В комбинации с (54.5) и (54.6) оно дает

$$c P_0 \cos \gamma D + g Q_0 \sin \gamma D = 0,$$

а в силу (54.7) приводится к такому виду:

$$N^2 - \omega^2 = g\gamma \operatorname{tg} \gamma D. \quad (54.9)$$

Это — соотношение между γ и ω , не встречающееся в теории атмосферы. Решая уравнение (54.8) относительно γ и подставляя в (54.9), мы получим уравнение, содержащее лишь ω и x :

$$N^2 - \omega^2 = \frac{g}{c} \left[\frac{(\omega^2 - N^2)(\omega^2 - Q^2 - x^2 c^2)}{\omega^2 - Q^2} \right] \times \\ \times \operatorname{tg} \left\{ \frac{D}{c} \left[\frac{(\omega^2 - N^2)(\omega^2 - Q^2 - x^2 c^2)}{\omega^2 - Q^2} \right] \right\}. \quad (54.10)$$

Никакого похожего соотношения между ω и x мы не имели в теории атмосферы. Полученное уравнение дает кривую или, точнее, серию кривых на диагностической ω , x -диаграмме, точки которых соответствуют собственным значениям.

Связь этих результатов с результатами обычной теории поверхностных волн в однородной несжимаемой жидкости [1] может быть пояснена следующим образом. Если жидкость предполагается однородной, то $N=0$; обычная теория не принимает также в расчет вращения, так что $Q=0$; в этом случае уравнение (54.8) принимает вид

$$\gamma^2 + x^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (54.11)$$

Поскольку для несжимаемой жидкости $c=\infty$, это уравнение приводится к такому:

$$\gamma^2 = -x^2$$

или

$$\gamma = \pm ix. \quad (54.12)$$

Полагая в уравнении (54.9) $N=0$, получим из него и (54.12)

$$-\omega^2 = gix \operatorname{tg} (ixD)$$

или

$$\omega^2 = gx \operatorname{th} (xD), \quad (54.13)$$

что представляет собой обычное соотношение между ω и x для поверхностных волн в мелкой воде [1, гл. IX].

§ 55. Теория однородного сжимаемого океана

Поскольку уравнение (54.10) довольно сложное, полезно рассмотреть сперва случай $N=0$, $\Omega=0$, оставляя лишь скорость звука c в качестве единственного дополнительного параметра, не рассматриваемого в обычной теории. Так как c предполагается постоянной, волновые лучи все еще остаются прямыми и отражаются в соответствии с обычным законом равных углов. Можно применить уравнение (54.11) и написать

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \gamma^2 + \kappa^2 = k^2, \quad (55.1)$$

что сразу дает $\omega/k = c = \text{const.}$ Если k вещественно, фазовая скорость оказывается независимой от частоты и дисперсия отсутствует.

Однако в дальнейшем k не обязательно будет вещественным. Мы увидим, что уравнение (54.9)

$$\omega^2 = -g\gamma \operatorname{tg} \gamma D \quad (55.2)$$

имеет бесконечное множество вещественных решений для γ и одно чисто мнимое. Этот мнимый корень соответствует поверхностным волнам. Более того, мы увидим, что эти волны аналогичны волнам Ламба в атмосфере.

Прежде чем решать уравнения (55.1) и (55.2) количественно, полезно провести графическое исследование. Этому поможет введение безразмерных величин, определяемых следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= (\gamma D)^2, \\ y &= \frac{\omega^2 D}{g}, \\ y_x &= \frac{\kappa^2 c^2 D}{g}, \\ a &= \frac{c^2}{gD}. \end{aligned} \quad (55.3)$$

Величина a характеризует океан; как хорошо известно, $(gD)^{1/2}$ есть скорость длинных поверхностных волн, так что a определяется как квадрат отношения скорости звука к скорости поверхностных волн. Реальное значение для c — 1,5 км/сек, а для D — 4,5 км. При этих значениях $a = 50$, что может считаться большим числом. Приводимый график

построен для много меньшего значения, для того чтобы проиллюстрировать задачу яснее.

При использовании (55.3) уравнение (55.1) превращается в

$$y = ax + y_*, \quad (55.4)$$

а уравнение (55.2) в

$$y = -x^{1/2} \operatorname{tg} x^{1/2} \quad (55.5)$$

Для отрицательных значений x как γ , так и $x^{1/2}$ мнимы, но

$$f(x) = -x^{1/2} \operatorname{tg} x^{1/2} = (-x)^{1/2} \operatorname{th} (-x)^{1/2} \quad (55.6)$$

остается вещественным. Следовательно, функция $f(x)$ может быть построена во всей области $-\infty < x < +\infty$, что и

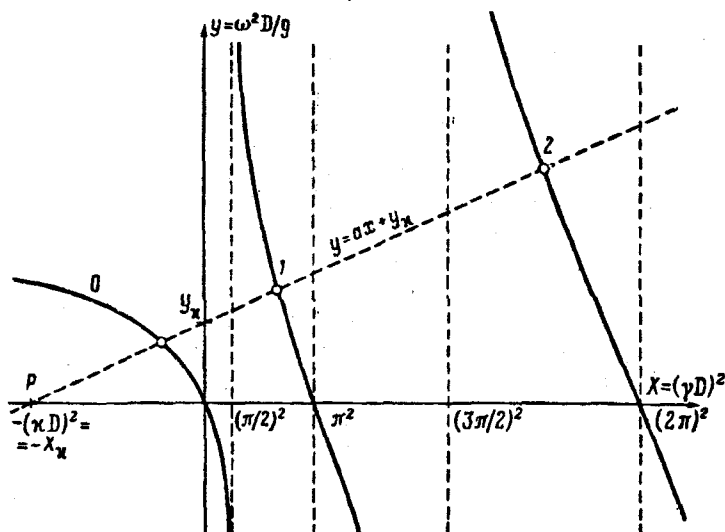


Рис. 26. Диаграмма для графического решения системы уравнений

$$\gamma^2 + x^2 = \omega^2 / c^2 \quad \text{и} \quad -\omega^2 = g \gamma \operatorname{tg} \gamma D.$$

показано на рис. 26. График имеет бесконечное множество ветвей, изображенных сплошными линиями и пронумерованных цифрами 0, 1, 2, Эти ветви пересекаются с осью абсцисс при

$$x = (n\pi)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

где n — порядковый номер ветви; они асимптотически уходят в бесконечность при

$$x = \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для больших отрицательных значений x ветвь $n=0$ аппроксимируется следующим образом:

$$f(x) = \sqrt{-x} + \dots, \quad (55.7)$$

а вблизи n -й асимптоты так:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi} + \dots \quad (55.8)$$

График уравнения (55.4) показан пунктирной прямой, пересекающей ось x в точке P , в которой

$$x = -(xD)^2 = -x_x.$$

Пересечения этой прямой с различными ветвями $f(x)$ (показанные кружками) дают значения x и y , удовлетворяющие уравнениям (55.4) и (55.5) одновременно. Рассматривая чертеж, мы легко можем проследить изменение этих корней при изменении y_x .

Сперва рассмотрим корень, лежащий на ветви $n=0$. Если y_x (или x) изменяется от 0 до $+\infty$, то соответствующее значение x (или γ^2) изменяется от 0 до $-\infty$, а y (или ω^2) — от 0 до $+\infty$ (см. ветвь $n=0$ на рис. 27). Как сказано выше, наиболее интересны большие значения a ; для таких значений прямая $y = ax + y_x$ почти вертикальна, и ее пересечение с ветвью $n=0$ находится почти по вертикали над точкой P и имеет абсциссу, близкую к $-x_x = (xD)^2$. Следовательно, в этом приближении ее ордината равна

$$y = xD \operatorname{th} xD.$$

Так как $y = \omega^2 D/g$, мы опять получаем обычную формулу для поверхностных волн [1, гл. IX]. Было бы нетрудно провести аппроксимацию далее и получить ω как функцию x , разложенную по степеням $1/a$.

Рассмотрим далее корень, лежащий на n -й ветви $f(x)$. Если $y_x = 0$, то его абсцисса есть n -й корень уравнения

$$a \sqrt{x} = -\operatorname{tg} \sqrt{x}. \quad (55.9)$$

Когда u_x возрастает, эта абсцисса убывает и приближается к $(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2$ при $u_x \rightarrow \infty$; одновременно соответствующее значение u возрастает до бесконечности (см. ветви $n = 1, 2 \dots$ на рис. 27). Мы опять интересуемся большими значениями a :

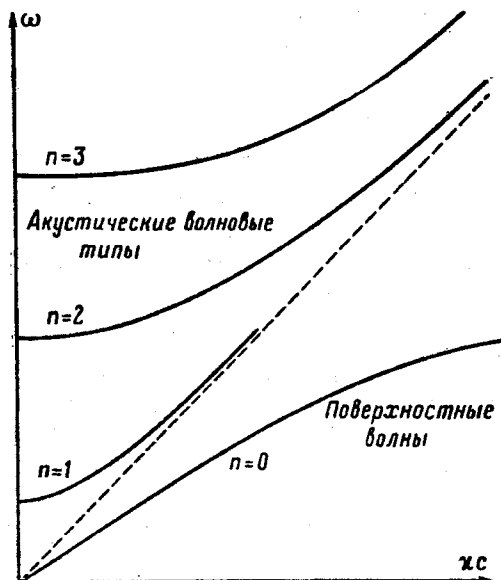


Рис. 27. Диагностическая диаграмма для однородного сжимаемого океана постоянной глубины.

для них корни уравнения (55.9) весьма мало отличаются от асимптотических значений

$$x = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

или

$$\gamma D = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi. \quad (55.10)$$

Компонента γ волнового вектора по оси z почти не зависит, таким образом, от x . Соотношение (55.10) есть так называемая формула „открытой органной трубы“. Соответствующее

значение y получается из уравнения (55.4)

$$y = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 a + y_x$$

и все-таки зависит от y_x ; это равенство можно записать иначе:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{D^2} + x^2. \quad (55.11)$$

В таком виде оно хорошо известно в теории подводного распространения звука.

И здесь нетрудно провести эти вычисления для больших порядков $1/a$ и силы исследовать влияние тяжести на распространение звука в океане, обладающем принятыми гипотетическими свойствами. Интересно отметить, что эти эффекты невелики, порядка gD/c^2 . Они не превышают чисто упругих эффектов, если только не имеет места неравенство $D > c^2/g$; поскольку $c^2/g = 225$ км, то все земные океаны в этом отношении можно считать мелкими.

Прежде чем продолжать дальше, важно отметить значение порядкового числа n , появившегося в предыдущих рассуждениях. Из того, что

$$Q = Q_0 \sin \gamma (z + D),$$

$$P = P_0 \cos \gamma (z + D)$$

и γ вещественно для $n > 0$, следует, что и P и Q при некоторых значениях z обращаются в нуль. Число этих корней, или узловых поверхностей, когда z меняется от $-D$ до 0, в точности равно n : в соответствии с этим n иногда называют узловым числом, однако в нашей книге будет принят термин *порядковое число*. Эта интерпретация порядкового числа распространяется на случай $n = 0$, так как тогда

$$Q = iQ_0 \operatorname{sh} (i\gamma)(z + D),$$

$$P = P_0 \operatorname{ch} (i\gamma)(z + D)$$

и P не имеет корней, хотя Q все же имеет корень при $z = -D$.

Узловые поверхности имеют значение также при описании движения жидкости. На тех плоскостях, на которых $Q = 0$,

скорость горизонтальна; на тех, на которых $P=0$, движение вертикально. Далее, поскольку поток энергии $J=PU$, через плоскости $P=0$ движение энергии не имеет места.

Из этого следует, что все собственные решения для данного n описывают качественно сходные виды движения; и хотя они могут иметь даже различные значения χ , γ и ω , число узловых плоскостей у них одинаково. Удобно и общепринято группировать вместе все собственные решения, имеющие одно и то же n , и называть их „типом“, собственно, типом движения или колебания.

§ 56. Теория расслоенного, но несжимаемого океана

Так как земные океаны являются мелкими, то для нас важно рассмотреть сейчас случай $a=\infty$. Это равнозначно тому, чтобы положить $c=\infty$ в уравнениях § 54 и рассматривать океан как несжимаемую жидкость. Содержание настоящего параграфа находится в близкой связи с теорией волновых движений в неоднородной жидкости Лява ([2], см. также [1]).

В этом предельном случае уравнение (54.8) принимает вид

$$\gamma^2(\omega^2 - \Omega^2) - \chi^2(N^2 - \omega^2) = 0, \quad (56.1)$$

а (54.9) — вид

$$\omega^2 = N^2 - g\gamma \operatorname{tg} \gamma D. \quad (56.2)$$

И в этом случае анализ упрощается введением безразмерных переменных

$$\begin{aligned} x &= (\gamma D)^2, & x_x &= (\chi D)^2, \\ y &= \frac{\omega^2 D}{g}, & y_N &= \frac{N^2 D}{g}, & y_\Omega &= \frac{\Omega^2 D}{g}. \end{aligned} \quad (56.3)$$

Уравнения (56.1) и (56.2) могут быть тогда записаны как

$$x = x_x \frac{y_N - y}{y - y_\Omega}, \quad (56.4)$$

$$y = y_N - \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}. \quad (56.5)$$

График (56.5) совершенно такой же, как и график (55.5), и состоит из ветвей $n=0, 1, 2, \dots$, показанных на рис. 28; однако кривые теперь сдвинуты относительно оси x , так как

$y_N \neq 0$. График (56.4) представляет собой гиперболу, и здесь следует различать два случая:

А) $x_z > y_N - y_Q$

и

Б) $x_z < y_N - y_Q$.

На рис. 28 показаны примеры на каждый из этих случаев. В случае А пересечение гиперболы с ветвью $n=0$ происходит при $x < 0$, в случае Б — при $x > 0$.

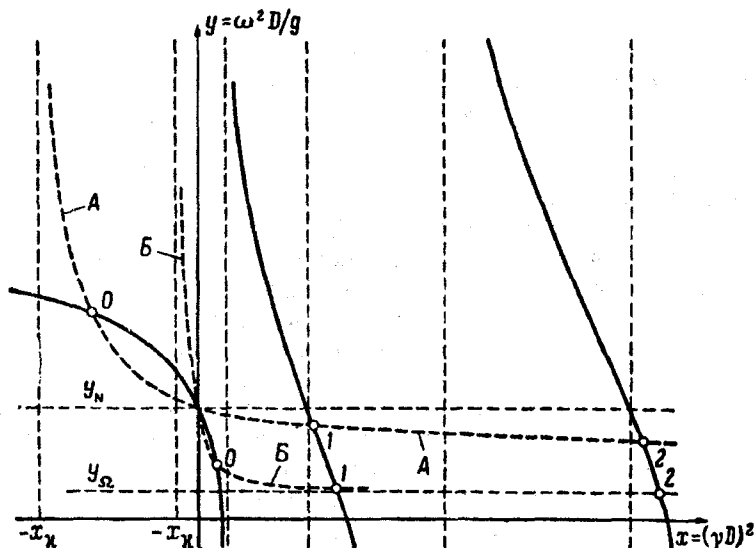


Рис. 28. Диаграмма для графического решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \gamma^2 (\omega^2 - \Omega^2) &= x^2 (N^2 - \omega^2), \\ N^2 - \omega^2 &= g \gamma \lg \gamma D. \end{aligned}$$

В размерных переменных написанные выше условия А и Б выглядят следующим образом:

$$x^2 \geq \frac{N^2 - \Omega^2}{gD}. \quad (56.6)$$

Здесь можно пренебречь Ω^2 по сравнению с N^2 , и поэтому критическое волновое число равно $N/\sqrt{gD}$. Это — волновое число „глубокой воды“, соответствующее частоте N . Чтобы получить оценку его величины, можно принять $D = 4$ км,

так что $\sqrt{gD} = 0,2$ км/сек, и если предположить, что $N = 1$ час⁻¹ — значение, соответствующее устойчивости на глубинах ниже постоянно присутствующего в океанах Земли слоя скачка, то мы получим для критической длины волны значение 720 км, а случай А будет иметь место для меньших длин волн.

Различие между случаями А и Б имеет значение лишь для поверхностных волн, соответствующих пересечению гиперболы с ветвью $n = 0$ графика уравнения (56.5). Если x_* очень велико, то можно видеть, что $y \gg y_N$, следовательно, уравнение (56.4) допускает приближение $x = -x_* = -x^2 D^2$, а уравнение (56.5) приводит к классической формуле

$$\omega^2 = g x \operatorname{th} x D.$$

В этом приближении устойчивость не оказывает влияния на поверхностные волны.

Однако, если x убывает и приближается к своему критическому значению, появляются отклонения от классической формулы, а когда x достигает критического значения, x обращается в нуль. Для больших значений x как P , так и Q достигают своих наибольших значений на свободной поверхности жидкости, но для критического его значения $Q = 0$, а $P = \text{const}$ для всех значений z . В случае А имеем также $\omega \geq N$, причем равенство справедливо для критического значения x . Для значений x , меньших критического, $\omega < N$ и x положительно. Следовательно, γ вещественно, а формула (54.6) показывает, что P достигает наибольшего значения на дне; Q по-прежнему достигает максимума на свободной поверхности жидкости. Наконец, для $x = 0$, как легко видеть, $\omega = \Omega$, в то время как γ определяется уравнением

$$(N^2 - \Omega^2) = g \gamma \operatorname{tg} \gamma D.$$

В самом деле, если $\omega < N$, решения для $n = 0$ являются внутренними гравитационными волнами, а не поверхностными волнами в классическом смысле. Полученное соотношение между ω и x показано графически на рис. 29 в виде ветви $n = 0$.

Остальные корни уравнений (56.4) и (56.5) для $n > 0$ не подвержены подобным качественным изменениям, когда x проходит через критическое значение. Из рис. 28 можно видеть, что при возрастании x_* от 0 до ∞ возрастает также

и y от y_Q до y_N или ω от Ω до N . Во всей этой области решение сохраняет характер внутренних гравитационных волн. Рис. 29 изображает соотношение между ω , x и n ; каждая из кривых на этом рисунке связана с отдельным типом.

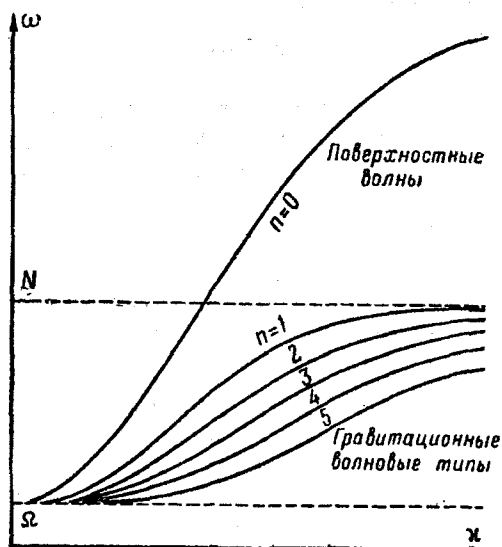


Рис. 29. Диагностическая диаграмма для расслоенного, но несжимаемого океана постоянной глубины.

В заключение этого параграфа считаем полезным обратить внимание еще на одну деталь рис. 28. Все гиперболы пересекают ветвь $n=0$ при $x=0$, $y=y_N$ независимо от значений x_x . Эта точка дает решение уравнений (56.4) и (56.5), но это приводит лишь к тривиальному решению исходных уравнений (54.3) и (54.4), так как из (54.5) видно, что при $\gamma=0$ для всех z Q оказывается равным 0, а (54.6) и (54.7) дают $P=0$.

§ 57. Общий случай

Исследовав в деталях специальные случаи двух предшествующих параграфов, можно теперь сравнительно кратко разобрать общую задачу, сформулированную в § 54. В обо-

значениях безразмерных переменных, введенных ранее, уравнение (54.8) имеет вид

$$ax(y - y_2) + (y_N - y)(y - y_2 - y_*) = 0, \quad (57.1)$$

а уравнение (54.9) по-прежнему

$$y = y_N - \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}. \quad (57.2)$$

Уравнение (57.1) опять представляет гиперболу, но в то время как соответствующее уравнение из предыдущего параграфа давало гиперболу с перпендикулярными асимптотами,

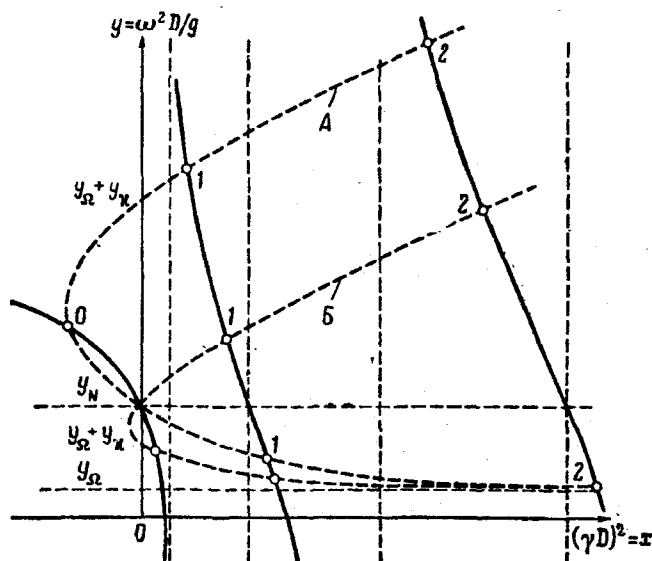


Рис. 30. Диаграмма для графического решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \gamma^2 c^2 (\omega^2 - \Omega^2) &= (N^2 - \omega^2) (\chi^2 c^2 - \omega^2 + \Omega^2), \\ N^2 - \omega^2 &= g \gamma \operatorname{tg} \gamma D. \end{aligned}$$

здесь мы имеем асимптоты, образующие между собой острый угол. Это горизонтальная прямая

$$y = y_2 \quad (57.3)$$

и наклонная прямая

$$y = ax + y_1 + y_N. \quad (57.4)$$

(Ср. последнее уравнение с уравнением (55.4), к которому оно приводится при $y_N = 0$.) Как показано на рис. 30, эта гиперболa пересекает ось y при

$$y = y_x + y_z,$$

и здесь представляются два случая, подобно тому как это было в § 56. Условия теперь следующие:

$$\begin{aligned} \text{A) } y_x + y_z &> y_N, \\ \text{B) } y_x + y_z &< y_N. \end{aligned} \quad (57.5)$$

Как и выше, в случае А пересечение с ветвью $n = 0$ происходит при $x < 0$, а в случае Б — при $x > 0$. Точка пересечения при $x = 0$, $y = y_N$ опять приводит лишь к тривиальным решениям исходных уравнений.

Рис. 30 показывает, что теперь имеются два корня уравнений (57.1) и (57.2) при каждом значении $n > 0$. Один из них относится к пересечению верхней ветви гиперболы с n -й ветвью кривой (57.2), другой — к нижней ветви гиперболы. Первый представляет собой акустическую волну, второй — гравитационную. Для классификации удобно, как это станет яснее в дальнейшем, обозначать положительными значениями n акустические типы, а отрицательными — гравитационные типы в соответствии со схемой:

Акустические типы	$n = 1, 2, 3, \dots$
Поверхностный тип	$n = 0$
Гравитационные типы	$n = -1, -2, -3, \dots$

Таким образом, мы опять получаем взаимно однозначное соответствие между порядковыми числами и типами волн.

Это соотношение между n , ω и x показано качественным образом на рис. 31; для ясности рисунка расстояние между акустическими типами сильно уменьшено, а наклон других кривых сильно увеличен. Этот рисунок соответствует диаграмме для изотермической атмосферы (рис. 21). Акустические типы на рис. 21 находятся в области А, а гравитационные — в области О. Заметив это, мы поймем, что поверхностные волны в случае океана соответствуют волнам Ламба в атмосфере. Это соответствие не исчерпывается общим расположением x , ω -кривой относительно других типов, но и характеризуется максимумом амплитуды тех и других волн на

горизонтальной границе и отсутствием горизонтальной узловой поверхности. Оба вида волн связаны самым тесным образом с существованием поверхностей раздела и могут быть названы

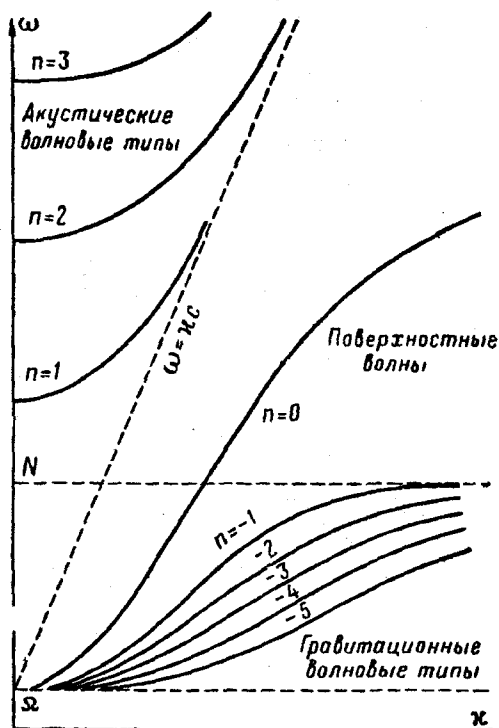


Рис. 31. Диагностическая диаграмма для общего случая океана постоянной глубины и постоянных N , Γ , c .

волнами поверхности раздела. Аналогичные волны встречаются в теории упругих волн в твердых телах, где они известны под названием волн Лява и Рэлея.

§ 58. Простая аппроксимация внутренних гравитационных типов

Значительно более простое приближенное представление может быть получено непосредственно из рис. 30. Из этого рисунка видно, что при $\omega < N$ и $n < 0$ можно написать

$$\gamma D = (|n| + \Delta) \pi, \quad (58.1)$$

где Δ есть функция ω и n . Видно также, что $\Delta \rightarrow 0$, когда $\omega \rightarrow N$ или когда $|n| \rightarrow \infty$. Следовательно, на значительной части x , ω -диаграммы ниже $\omega = N$ подходящей аппроксимацией является $\Delta = 0$. Для получения более точных результатов можно предложить разные методы вычисления Δ . Если воспользоваться термином теории атомных спектров, то Δ может быть

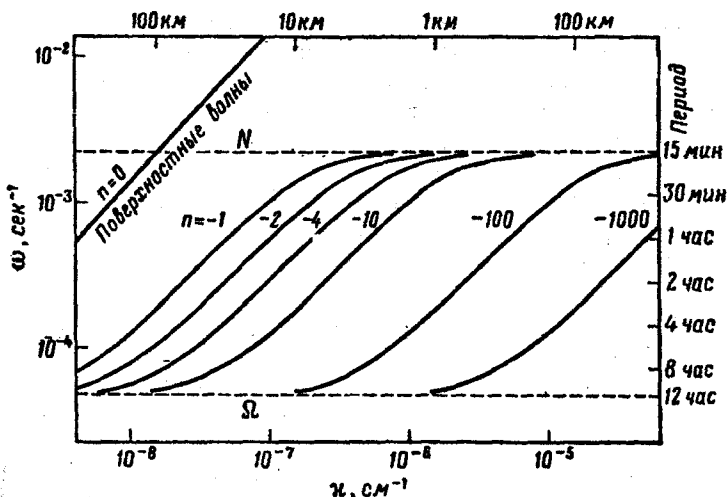


Рис. 32. Часть диагностической диаграммы для $D = 4$ км,
 $2\pi/N = 15$ мин, $2\pi/\Omega = 12$ час.

названо дефектом порядка; к этому понятию мы будем возвращаться в последующих разделах.

Решая уравнение (54.8) относительно γ и используя (58.1), будем иметь

$$\left\{ (N^2 - \omega^2) \left[\frac{x^2 c^2}{(\omega^2 - \Omega^2)} - 1 \right] \right\}^{1/2} = (|n| + \Delta) \frac{\pi c}{D}, \quad (58.2)$$

что представляет собой точное соотношение между ω , x и n при условии, что дефект порядка вычислен. Как было сказано выше, вполне приемлемое приближение получается, если положить $\Delta = 0$. При использовании дополнительного приближения $c = \infty$ можно получить простую формулу

$$x \left(\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right)^{1/2} = |n| \frac{\pi}{D}. \quad (58.3)$$

Рис. 32 изображает график этого уравнения для некоторых значений $n < 0$ при $D=4$ км, $2\pi/N=15$ мин, $2\pi/Q=12$ час. Для сравнения здесь же представлен график уравнения (54.3) при $n=0$.

§ 59. Типы колебаний в прямоугольном резервуаре

В гл. VI было отмечено, что собственные решения для жидкости в конечном объеме обычно совершенно отличны от решений для бесконечного объема. В обоих случаях плотность энергии всюду конечна, но в последнем случае полная энергия часто бесконечна. Это различие находит свое отражение в числе решений: для конечного объема их множество счетно, для бесконечного объема оно часто бывает несчетным.

В § 35 было принято условие рассматривать лишь течения жидкости, ограниченные поверхностями уровня. Отсутствие боковых границ приводит к бесконечному объему. В этом параграфе, хотя и не исчерпывающим образом, будет изучен эффект боковых границ.

Рассмотрим прямоугольный резервуар с дном, являющимся поверхностью уровня, свободной поверхностью и вертикальными стенками.

Пусть горизонтальные размеры резервуара равны A и B , а его глубина D ; координатные оси можно расположить по ребрам резервуара. В дополнение к граничным условиям

$$Pc + gQ = 0 \quad \text{при } z=0, \quad (59.1)$$

$$Q = 0 \quad \text{при } z=D \quad (59.2)$$

появятся условия на вертикальных стенках

$$U = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=A, \quad (59.3)$$

$$V = 0 \quad \text{при } y=0 \text{ и } y=B. \quad (59.4)$$

Чтобы избежать аномальных отражений, о которых шла речь в § 53, будем предполагать, что $Q=0$. Собственные решения могут быть тогда построены из простых волн, отражающихся от стенок. Они будут иметь вид

$$\begin{aligned} P &= P_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma (z+D), \\ Q &= Q_0 \cos \alpha x \cos \beta y \sin \gamma (z+D), \\ U &= -acP_0 \sin \alpha x \cos \beta y \cos \gamma (z+D), \\ V &= -\beta cP_0 \cos \alpha x \sin \beta y \cos \gamma (z+D). \end{aligned} \quad (59.5)$$

Условия (59.3) и (59.4) будут удовлетворены, если

$$\alpha = \frac{k\pi}{A}, \quad \beta = \frac{m\pi}{B}, \quad (59.6)$$

где k и m — положительные целые числа. Соответственно

$$\chi = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} = \pi \left[\left(\frac{k}{A} \right)^2 + \left(\frac{m}{B} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (59.7)$$

Эффект вертикальных стенок виден непосредственно: без стенок α , β и χ могут изменяться непрерывно, при наличии стенок они ограничены рядом дискретных значений, определяемых целыми числами k и m .

Но как только χ фиксируется, вычисления, приведенные в предыдущих параграфах этой главы, остаются в силе и здесь. Порядковое число n по-прежнему дается уравнением (58.1)

$$\gamma = (|n| + \Delta) \frac{\pi}{D}, \quad (59.8)$$

сходство которого с (59.6) очевидно. Целые числа k и m также могут быть названы порядковыми числами: они определяют число вертикальных узловых плоскостей для P и Q , аналогично тому как n определяет их горизонтальные узлы.

Сказанное находит свое отражение в диагностической диаграмме. Предположим для простоты, что жидкость несжимаема, так что применимы вычисления § 56 при $\Omega = 0$. Узловые кривые, соответствующие разным типам, показаны на рис. 33 тонкими линиями. Однако не все значения χ совместны с уравнением (59.6); те, которые ему удовлетворяют, показаны вертикальными линиями. Следовательно, собственные решения относятся лишь к тем значениям χ и ω , которые определяются пересечением кривых с этими вертикальными линиями. Дискретные значения частоты ω , определенные таким образом, известны под различными наименованиями: резонансные частоты, натуральные частоты или свободные частоты.

Положение вертикальных линий на рис. 33 приведено для частного примера $A = 2B$. При этом нарисованы лишь те, которые соответствуют $k, m = 1, 2, 3$, однако существует бесконечное число таких линий, и они располагаются теснее, когда k и m возрастают. Соответственно при возрастании

порядковых чисел теснее располагаются и резонансные частоты. Частота $\omega = N$ есть предельное значение множества резонансных частот. Опять позаимствовав термин из квантовой теории, можно сказать, что резонансные частоты, соот-

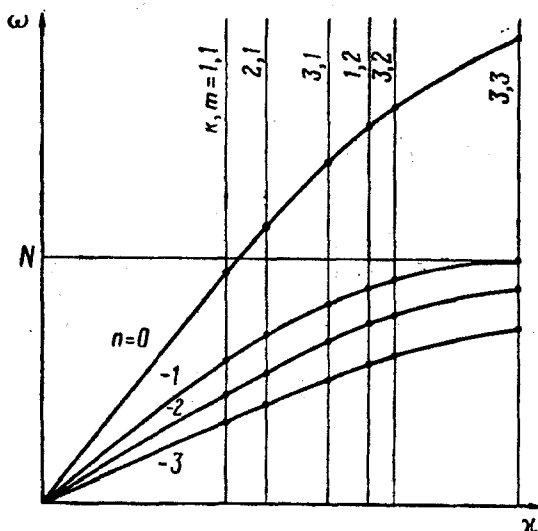


Рис. 33. Диагностическая диаграмма для прямоугольного резервуара.

ветствующие одному и тому же значению вертикального порядкового числа n , но разным значениям горизонтальных порядковых чисел k, t , образуют серию.

§ 60. Другие боковые границы

Математические задачи для тех случаев, когда жидкость имеет границы различных форм, не совпадающие с поверхностями уровня, многочисленны и обычно сложны. Случай свободного стационарного течения в бассейне с произвольной топографией дна рассмотрен в § 13, и там мы видим, что существует пограничный слой, в котором поток стремится быть батистрофическим. Вне этого слоя влияние границ сохраняется, но не является доминирующим. Этих затруднений удастся избежать, предположив, что все границы совпадают с поверхностями уровня, либо считая, что все боковые гра-

ницы вертикальны, как это было сделано в последнем параграфе.

В общем задачи в случае вертикальных боковых границ (даже если их форма в остальном произвольна) менее сложны, чем в случаях бассейнов более естественных очертаний. В частности, остаточные уравнения (36.12) показывают, что собственные решения зависят от вертикальной координаты, но эта зависимость одна и та же во всех точках резервуара. Их зависимость от горизонтальных координат определяется двумерным волновым уравнением (36.11)

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \kappa^2 P_1 = 0. \quad (60.1)$$

Это уравнение должно быть решено при условии, что нормальная составляющая скорости должна обращаться в нуль на вертикальных стенках. Для случая прямоугольного резервуара решение получено в предыдущем параграфе. Решение также известно для случаев резервуаров круглой, эллиптической и параболической форм [1, гл. VIII]. Для других очертаний задача может быть решена численно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H., Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, 6th ed., 1932.
(Русский перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М. — Л., 1947.)
2. Love A. E. H., Wave motion in a heterogeneous heavy liquid, Proc. Lond. Math. Soc., 22, 307 (1891).

Глава XI

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛУЧЕЙ

§ 61. Введение

Теперь нам предстоит решить, в каком направлении мы будем развивать дальше теорию. Мы можем заняться либо простыми волнами и лучами, связанными с ними, либо теорией собственных решений, основанной на остаточных уравнениях. Настоящая глава в основном посвящена теории лучей, а систематическое рассмотрение остаточных уравнений отложено до гл. XIV. Промежуточные главы будут содержать преимущественно иллюстрации к теории лучей, хотя в них мы также будем иметь возможность получить некоторые частные результаты из остаточных уравнений.

Существует два рода теорий лучей, результаты которых иногда совпадают, порой же очень различны. Один из них основан на понятии характеристических кривых и поверхностей, соответствующих дифференциальным уравнениям в частных производных. Результаты таких теорий всегда строги и играют важную роль при изучении ударных волн и для некоторых технических целей [10, стр. 526; 3, стр. 342; 1, стр. 132].

Теории другого рода строги лишь в том случае, если дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты. Примером является как раз та теория, которая в предшествующих главах была применена к случаю изотермической атмосферы. Чтобы распространить ее на случай переменных коэффициентов, необходимо использовать метод аппроксимации, связываемый обычно с именами Венцеля [12], Крамерса [8] и Бриллюэна [5], хотя полный очерк его истории должен включать ссылки на Гюйгенса, Гамильтона, Кирхгофа, де Бройля и многих других. Этот ВКБ-метод, как уже было сказано, строг лишь при постоянных коэффициентах, но он дает исключительно хорошие результаты и в более общих случаях [6, 7]. Этот приближенный метод, при-

мененный к простому волновому уравнению

$$c^2 \nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (61.1)$$

приводит к историческим построениям волновых фронтов, принадлежащим Гюйгенсу, что явилось первой формулировкой волновой теории. Результаты, которые мы должны получить от применения этого метода к уравнениям поля, являются, следовательно, обобщением принципа Гюйгенса, несмотря на то что геометрическая интерпретация их гораздо более сложна.

В последнее время интерес к ВКБ-методу ожил и был достигнут прогресс, заслуживающий упоминания. С математической точки зрения особенно интересны работы Бреммера [4], Беллмена и Калаба [2].

Поскольку два варианта теории лучей, будучи применены к нашим уравнениям поля, приводят к различным результатам, было бы желательным исследовать их оба. Соображения экономии места препятствуют этому, и здесь будет развит лишь второй из них. Можно только высказать предположение, что первый приводит к математической теории фронтальных возмущений в атмосфере.

§ 62. Уравнение Гамильтона — Якоби

Если коэффициенты уравнений поля постоянны, то, как мы видели, все простые волновые поля имеют вид

$$P = P_0 \exp(i\Phi) \text{ и т. д.,} \quad (62.1)$$

где

$$\Phi = \alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t, \quad (62.2)$$

а P_0 , α , β , γ , ω — вещественные постоянные. Функция Φ — это фаза, а $P_0 \dots$ — амплитуды волны. Очевидно, следует предположить, что, если коэффициенты переменны, решения могут иметь тот же самый вид, но с Φ , являющейся вещественной нелинейной функцией от x , y , z , t и $P_0 \dots$ также переменными. Но в этом случае уравнение (62.1) не накладывает никаких ограничений на P , и чтобы наше предположение перестало быть тривиальным, нужно его уточнить.

Если продифференцировать уравнение (62.1), мы получим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = iP \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial P_0}{\partial x} \exp(i\Phi),$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} = iP \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial P_0}{\partial t} \exp(i\Phi).$$

Может случиться, что второй член правой части каждого из этих уравнений пренебрежимо мал по сравнению с первым, — это более сильное предположение, оно и представляет собой ВКБ-аппроксимацию.

Мы используем обозначения

$$\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \omega = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = \nabla \Phi. \quad (62.3)$$

Если Φ — линейная функция от x, y, z, t (62.2), то эти обозначения тождественны с обычно употребляемыми в теории простых волн; $\mathbf{k}$ — волновое число, или вектор распространения, а ω — частота. Когда Φ — более общая функция, то $\alpha, \dots, \omega$ уже не постоянные, а функции от x, y, z, t , тогда $\mathbf{k}$ — локальный вектор распространения, а ω — локальная частота. ВКБ-аппроксимация ведет к таким уравнениям:

$$\nabla P = i\mathbf{k}P, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = i\omega P,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{U} \text{ и т. д.}$$

Если ввести такие приближения в уравнения поля, они примут вид

$$\begin{aligned} i\omega \mathbf{U} - \mathbf{Q} \times \mathbf{U} &= cP(i\mathbf{k} + \Gamma_{\zeta}) - N^2 Q_{\zeta}, \\ c(i\mathbf{k} - \Gamma_{\zeta}) \cdot \mathbf{U} &= i\omega P, \\ \zeta \cdot \mathbf{U} &= i\omega Q. \end{aligned} \quad (62.4)$$

При условии, что фазовая функция известна, это — линейные алгебраические уравнения для $\mathbf{U}, P$ и Q . Так как они однородны, то они имеют нетривиальное решение только тогда, когда их детерминант обращается в нуль [ср. (42.1) и (42.2)]. Этот детерминант будет зависеть лишь от $\alpha, \dots, \omega$, а условие его обращения в нуль в силу (62.3) приводит к диффе-

ренциальному уравнению для фазы Φ . Оно известно как дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби, соответствующее уравнениям поля [11].

§ 63. Плоские поверхности уровня. Вертикальная ось

Это уравнение будет выведено в первую очередь для случая плоских поверхностей уровня и вертикальной оси вращения. Уравнения (62.4), записанные в составляющих, примут тогда вид

$$\begin{aligned} i\omega U + \Omega V &= i\alpha cP, \\ i\omega V - \Omega U &= i\beta cP, \\ i\omega W &= (i\gamma + \Gamma) cP - N^2 Q, \\ i\omega P &= c[i\alpha U + i\beta V + (i\gamma - \Gamma) W], \\ i\omega Q &= W. \end{aligned} \quad (63.1)$$

Путем очевидных алгебраических преобразований приведем их к виду

$$\begin{aligned} U &= -\frac{c(\alpha\omega + i\beta\Omega)P}{\Omega^2 - \omega^2}, \\ V &= -\frac{c(\beta\omega - i\alpha\Omega)P}{\Omega^2 - \omega^2}, \\ W &= i\omega Q; \end{aligned} \quad (63.2)$$

$$\begin{aligned} [i\gamma + \Gamma]P - (N^2 - \omega^2)Q &= 0, \\ \left[1 - \frac{c^2(\alpha^2 + \beta^2)}{\omega^2 - \Omega^2}\right]P + [i\gamma - \Gamma]Q &= 0. \end{aligned} \quad (63.3)$$

Уравнения (63.2), очевидно, представляют собой аппроксимацию прежних выражений для скорости через поля P и Q . Уравнения (63.3) аналогичным образом представляют собой аппроксимацию остаточных уравнений. Чтобы P и Q не обращались одновременно в нуль, детерминант системы (63.3) должен быть равен нулю. Это приводит к уравнению распространения, формально совпадающему с (51.2):

$$\gamma^2 c^2 = (\omega^2 - N_1^2) + \frac{c^2(\alpha^2 + \beta^2)(N^2 - \omega^2)}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (63.4)$$

Освобождаясь от дробей и подставляя выражения из (62.3), мы увидим, что это есть дифференциальное уравнение в частных производных для фазы

$$c^2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - N^2 \right] + \\ + \left[N_1^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - \Omega^2 \right] = 0. \quad (63.5)$$

Мы получили уравнение Гамильтона — Якоби, соответствующее уравнениям поля.

Общие и полные решения. Так как уравнение Гамильтона — Якоби является уравнением в частных производных, его наиболее общее решение должно содержать произвольные функции. Можно, например, задать значения Φ во всех точках пространства при $t = 0$, и уравнение (63.5) однозначно определит его для всех последующих моментов времени.

Однако для наших целей будет достаточно менее общего решения. Если частное решение уравнения (63.5) содержит четыре произвольные постоянные (четыре — число независимых переменных), оно называется полным решением. В данном случае будет достаточно найти полное решение этого уравнения. Существуют геометрические методы построения общего решения, если получено полное решение, но здесь нет необходимости обсуждать этот вопрос.

Поскольку уравнение (63.5) содержит лишь производные от Φ , то отсюда следует, что если Φ — решение, то $\Phi + \text{const}$ также будет решением. Поэтому одна из четырех произвольных постоянных в полном решении — это аддитивная постоянная, и в дальнейшем ее рассматривать не нужно.

Функция Гамильтона — Якоби. В настоящем случае определение полного решения упрощается в силу того факта, что c , N и N_1 не зависят от x , y , t , а лишь от z . Вследствие этого уравнение (63.5) имеет решения вида

$$\Phi = \alpha x + \beta y - \omega t + S(z), \quad (63.6)$$

где α , β , ω теперь снова постоянные, а функция S удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\kappa^2 c^2 (\omega^2 - N^2) + (\omega^2 - \Omega^2) \left[N_1^2 - \omega^2 + c^2 \left(\frac{dS}{dz} \right)^2 \right] = 0, \quad (63.7)$$

$(\kappa^2 = \alpha^2 + \beta^2, \text{ как обычно}).$

которое получается путем подстановки (63.6) в (63.5). Поскольку (63.6) содержит три произвольные неаддитивные постоянные, полное решение тем самым получено.

Решая уравнение (63.7) относительно $\frac{dS}{dz}$, получим

$$\frac{dS}{dz} = \left\{ x^2 \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{N_1^2 - \omega^2}{c^2} \right\}^{1/2} = \gamma(\alpha, \beta, \omega, z), \quad (63.8)$$

что может быть немедленно проинтегрировано

$$S = \int_{z_1}^z \gamma dz. \quad (63.9)$$

Нижний предел интегрирования, z_1 , определяет четвертую (аддитивную) постоянную и может быть выбран тем или иным способом. Однако, поскольку S должна быть вещественной функцией, необходимо выбрать z_1 таким образом, чтобы γ была вещественной во всей области между z_1 и z .

§ 64. Лучи и групповая скорость

Вывод формулы для лучей. Уравнение для лучей может быть получено с использованием функции Гамильтона — Якоби Φ при помощи в основном того же метода, который был применен в § 44. В вещественных обозначениях поля простых волн имеют вид

$$P = \sin[\alpha x + \beta y - \omega t + S(\alpha, \beta, \omega, z)] \text{ и т. д.} \quad (64.1)$$

Рассмотрим суперпозицию двух таких волн, имеющих одинаковую амплитуду, но разные значения параметров α' , β' , ω' и α'' , β'' , ω'' :

$$P = \sin[\alpha' x + \beta' y - \omega' t + S'] + \sin[\alpha'' x + \beta'' y - \omega'' t + S'']. \quad (64.2)$$

Поступая, как и ранее, положим $\alpha' = \alpha + \delta\alpha$, $\alpha'' = \alpha - \delta\alpha$ и т. д. и заметим, что

$$S' = S(\alpha, \beta, \omega, z) + \frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial S}{\partial \beta} \delta\beta + \frac{\partial S}{\partial \omega} \delta\omega + \dots,$$

$$S'' = S(\alpha, \beta, \omega, z) - \frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta\alpha - \frac{\partial S}{\partial \beta} \delta\beta - \frac{\partial S}{\partial \omega} \delta\omega + \dots$$

Тогда, если пренебречь квадратами и более высокими степенями приращений, (64.2) будет иметь вид

$$P = 2 \sin(\alpha x + \beta y - \omega t + S) \cos \left[\left(x + \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha + \right. \\ \left. + \left(y + \frac{\partial S}{\partial \beta} \right) \delta \beta - \left(t - \frac{\partial S}{\partial \omega} \right) \delta \omega \right]. \quad (64.3)$$

Это выражение и в данном случае может быть интерпретировано как распространяющаяся модулированная волна. Распространение определяется тремя параметрами: α , β , ω , а модуляция — шестью величинами: α , β , ω , $\delta \alpha$, $\delta \beta$, $\delta \omega$. Рассуждение продолжается так же, как и ранее: модуляция имеет одну и ту же величину

$$\cos(x_0 \delta \alpha + y_0 \delta \beta - t_0 \delta \omega)$$

для всех значений x , y , z , t , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} x + \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= x_0 (= \text{const}), \\ y + \frac{\partial S}{\partial \beta} &= y_0 (= \text{const}), \\ t - \frac{\partial S}{\partial \omega} &= t_0 (= \text{const}). \end{aligned} \quad (64.4)$$

Уравнения (64.4) при постоянных α , β , ω , x_0 , y_0 , t_0 определяют движение точки в пространстве. Эту точку назовем лучевой точкой. Тогда траектория этой точки есть кривая, определяемая первыми двумя уравнениями (64.4). Форма и расположение этой кривой зависят от α , β , ω , x_0 и y_0 . Третье из уравнений (64.4) определяет время, за которое лучевая точка достигнет заданной высоты z .

Групповая скорость. Скорость, с которой лучевая точка движется вдоль луча, может быть вычислена следующим образом: ее составляющая по оси x , согласно уравнениям (64.4), равна

$$c_x = \frac{\frac{dx}{dz}}{\frac{dt}{dz}} = - \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right) \right]}{\left[\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right) \right]}.$$

Используя уравнение (63.8), получим из этого выражения

$$c_x = - \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \gamma}{\partial \omega}} = \frac{\alpha \omega c^2}{\omega^2 - Q^2} R, \quad (64.5)$$

где

$$\frac{1}{R} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - N^2} - \kappa^2 c^2 \frac{(N^2 - Q^2) \omega^2}{(\omega^2 - N^2)(\omega^2 - Q^2)^2}. \quad (64.6)$$

Аналогично для составляющих по осям y и z имеем

$$c_y = \frac{\beta \omega c^2}{\omega^2 - Q^2} R, \quad (64.7)$$

$$c_z = \frac{\gamma \omega c^2}{\omega^2 - N^2} R. \quad (64.8)$$

Эти выражения совпадают по форме с (51.5) и (51.7), однако в то время как в случае изотермической атмосферы c_x , c_y , c_z не зависели от высоты, теперь они от высоты зависят. Лучевая точка движется с местным значением групповой скорости на той высоте, которой эта точка достигла.

Интерпретация лучевой точки. Существует еще одно различие между настоящими результатами и теми, которые были получены в § 51. Те были получены вполне строго для изотермической атмосферы, настоящие же приближенны, но применимы к любой жидкости. Это соответствует тому факту, что ВКБ-метод становится строгим, когда коэффициенты уравнений поля постоянны.

Однако в рамках ограничений рассматриваемой аппроксимации интерпретация лучей и групповой скорости та же, что и в гл. VIII и IX. Лучи представляют собой линии тока для потока энергии, а групповая скорость есть скорость распространения энергии. Следовательно, лучевую точку можно рассматривать как небольшую частицу энергии, движущуюся вдоль луча с групповой скоростью.

Явное уравнение для лучей. Используя (63.9) и (64.4), получим

$$x - x_0 = -\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\int \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} dz = \\ = -\frac{\alpha}{\kappa} \int \frac{\partial \gamma}{\partial \kappa} dz = \frac{\alpha}{\omega^2 - Q^2} \int \frac{\omega^2 - N^2}{\gamma} dz, \quad (64.9)$$

$$y - y_0 = \frac{\beta}{\omega^2 - Q^2} \int \frac{\omega^2 - N^2}{\gamma} dz, \quad (64.10)$$

$$t - t_0 = \omega \int \left[\frac{1}{c^2} - \frac{\kappa^2 (N^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - Q^2)^2} \right] \frac{1}{\gamma} dz. \quad (64.11)$$

Общие свойства лучей. Так как N , N_1 и c — известные функции от z , определение лучей и времени движения сводится к вычислению двух интегралов. Частные случаи будут рассмотрены в следующих главах, а здесь будут приведены лишь некоторые общие выводы. Уравнения (64.9) и (64.10) показывают, что

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\alpha}{\beta} = \text{const}, \quad (64.12)$$

Следовательно, лучи целиком располагаются в вертикальных плоскостях. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\alpha = \kappa$, $\beta = 0$.

Так как $x - x_0$ и т. д. должны быть вещественны, лучи не могут проникнуть в область, где $\gamma^2 < 0$. Это по форме то самое условие, которое в гл. VIII привело к диагностической диаграмме. Но поскольку γ теперь зависит от z , можно считать, что для каждой высоты имеется своя диагностическая диаграмма. Однако представляется более полезным рассматривать α , β , ω как константы, а z считать основным переменным в γ .

Предельные формы лучей. Уравнения (64.9) — (64.11) могут быть упрощены в предельных случаях. Если N^2 и N_1^2 имеют верхнюю границу, частоту ω можно выбрать настолько большой, что хорошее приближение дают следующие формулы:

$$x - x_0 = \kappa \int \frac{dz}{\left[\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2 \right]^{1/2}}, \\ t - t_0 = \omega \int \frac{dz}{c^2 \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2 \right]^{1/2}}. \quad (64.13)$$

Это хорошо известные уравнения, выражающие закон Снеллиуса для преломления звуковых лучей. На тех высотах z , на которых $c(z) = \pm \omega/\kappa$, подынтегральное выражение обращается в бесконечность и луч становится горизонтальным $(dz/dx) = 0$. Это вершины, или точки поворота, лучей. Лучи не могут войти в области, где $\omega^2 < \kappa^2 c^2$, а вынуждены оставаться в каналах, определенных неравенством $\omega^2 > \kappa^2 c^2$ (см. рис. 52).

Так же, если c имеет нижнюю границу, κ^2 может быть выбран настолько больше $(\omega^2 - N_1^2)/c^2$, что можно использовать следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int \left\{ \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right\}^{1/2} dz, \\ t - t_0 &= - \frac{\omega \kappa}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} \int (N^2 - \Omega^2) \left\{ \frac{\omega^2 - \Omega^2}{N^2 - \omega^2} \right\}^{1/2} dz. \end{aligned} \quad (64.14)$$

Оба эти уравнения не зависят от c , а первое из них не зависит и от κ . Поэтому форма лучей не зависит от длины волны и полностью определяется частотой; время движения просто пропорционально κ . Чтобы лучи были вещественными, $(N^2 - \omega^2)/(\omega^2 - \Omega^2)$ должно быть положительным. Если $N^2(z) > \Omega^2$ для всех z , это эквивалентно неравенствам $N^2 > \omega^2 > \Omega^2$; при этом мы имеем лучи коротких гравитационных волн. На уровнях, определяемых условием $N(z) = \pm \omega$, подынтегральное выражение первого уравнения обращается в нуль и луч становится вертикальным, $(dx/dz) = 0$. Лучи отражаются от этих уровней своеобразным образом, как показано на рис. 40. Более полно это разобрано в § 70.

§ 65. Сферические поверхности уровня при отсутствии вращения

Если поверхности уровня — сферы, рассуждения предыдущего параграфа нуждаются в некоторых изменениях. Сперва мы рассмотрим этот вопрос для случая $\Omega = 0$. Формулы приложения тогда показывают, что

$$\nabla \Phi = \frac{ch\mu}{r} \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right) + \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Используя, как и в § 36, формулу $r = r_s + \chi$, представим последнее уравнение приближенно в виде

$$\nabla \Phi = \frac{ch\mu}{r_s} \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right) + \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \chi}.$$

Используя обозначения

$$\alpha = \frac{1}{r_s} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \quad \beta = \frac{1}{r_s} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}, \quad \gamma = \frac{\partial \Phi}{\partial \chi}, \quad \omega = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (65.1)$$

[более подходящие для настоящего случая, чем (62.3)], можно записать это так:

$$\mathbf{k} = \nabla \Phi = \text{ch } \mu (\alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{v}) + \gamma \boldsymbol{\zeta}. \quad (65.2)$$

ВКБ-аппроксимация по-прежнему будет

$$\nabla P = ikP, \quad \nabla Q = ikQ, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = ik \cdot \mathbf{U}. \quad (65.3)$$

Поэтому приближенные уравнения поля таковы:

$$\begin{aligned} i\omega U_s &= i\alpha c \text{ch } \mu P, \\ i\omega U_v &= i\beta c \text{ch } \mu P, \\ i\omega U_\zeta &= (i\gamma + \Gamma) cP - N^2 Q, \\ i\omega P &= ic \text{ch } \mu (\alpha U_s + \beta U_v) + (i\gamma - \Gamma) U_\zeta, \\ i\omega Q &= U_\zeta. \end{aligned} \quad (65.4)$$

Путем исключения $\mathbf{U}$ из этих уравнений получим остаточные уравнения в приближенной форме

$$\begin{aligned} (i\gamma + \Gamma) cP - (N^2 - \omega^2) Q &= 0, \\ \left[1 - \frac{c^2 (\alpha^2 + \beta^2) \text{ch}^2 \mu}{\omega^2} \right] P - (i\gamma - \Gamma) cQ &= 0. \end{aligned} \quad (65.5)$$

Условие обращения в нуль детерминанта этой системы приводит к уравнению распространения

$$(\gamma^2 + \Gamma^2) c^2 + (N^2 - \omega^2) \left[1 - \frac{c^2 (\alpha^2 + \beta^2) \text{ch}^2 \mu}{\omega^2} \right] = 0. \quad (65.6)$$

Подстановка (65.1) в последнее уравнение дает уравнение Гамильтона — Якоби

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)^2 + \Gamma^2 \right] + \left[N^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right] \times \\ \times \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{c^2 \text{ch}^2 \mu}{r_s^2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)^2 \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (65.7)$$

Полное решение. Коэффициенты этого уравнения зависят от χ и μ , но не зависят от λ и t . Поэтому оно имеет решения вида

$$\Phi = V(\mu, \chi) + r_s \alpha \lambda - \omega t, \quad (65.8)$$

где α и ω теперь постоянные. Функция V должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2(N^2 - \omega^2)} \left[c^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \chi} \right)^2 + N_1^2 - \omega^2 \right] = \\ = \frac{\text{ch}^2 \mu}{r_s^2} \left[r_s^2 \alpha^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \mu} \right)^2 \right], \quad (65.9) \end{aligned}$$

полученному подстановкой (65.8) в уравнение (65.7) и перегруппировкой членов. Переменные в этом уравнении разделены таким образом, что члены слева не зависят от μ , а члены справа не зависят от χ . Следовательно, существует решение вида

$$V(\mu, \chi) = S(\chi) + T(\mu), \quad (65.10)$$

где

$$\left[\frac{1}{r_s^2} \left(\frac{dT}{d\mu} \right)^2 + \alpha^2 \right] \text{ch}^2 \mu = x^2, \quad (65.11)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2(N^2 - \omega^2)} \left[c^2 \left(\frac{dS}{d\chi} \right)^2 + N_1^2 - \omega^2 \right] = x^2, \quad (65.12)$$

а x^2 — постоянная разделения. Решая эти уравнения относительно производных, получим

$$\frac{1}{r_s} \frac{dT}{d\mu} = \{x^2 \text{sech}^2 \mu - \alpha^2\}^{1/2} = \beta(\alpha, x, \mu), \quad (65.13)$$

$$\frac{dS}{d\chi} = \left\{ x^2 \frac{(N^2 - \omega^2)}{\omega^2} - \frac{N_1^2 - \omega^2}{c^2} \right\}^{1/2} = \gamma(x, \omega, \chi). \quad (65.14)$$

Последнее уравнение можно сопоставить с (63.8). Явные выражения для T и S таковы:

$$T = r_s \int_{\mu_1}^{\mu} \beta(x, \alpha, \mu) d\mu, \quad (65.15)$$

$$S = \int_{\chi_1}^{\chi} \gamma(x, \omega, \chi) d\chi, \quad (65.16)$$

где μ_1 и χ_1 и в этом случае представляют собой постоянные, которые должны быть выбраны любым удобным способом с учетом вещественности T и S . Так как решение зависит от трех неаддитивных постоянных: x , α и ω , оно и есть полное решение.

Лучи. Уравнения для лучей могут быть выведены повторением рассуждений § 64. Не проводя этого в деталях, сформулируем результат. Лучи определяются уравнениями

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = -t_0 = \text{const},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = r_S \lambda_0 = \text{const},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} = r_S \varphi_0 = \text{const},$$

которые могут быть записаны в более явной форме

$$t - t_0 = \int \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} d\chi, \quad (65.17)$$

$$\lambda - \lambda_0 = - \int \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} d\mu, \quad (65.18)$$

$$r_S \varphi_0 = r_S \int \frac{\partial \beta}{\partial \kappa} d\mu + \int \frac{\partial \gamma}{\partial \kappa} d\chi. \quad (65.19)$$

Лучи представляют собой плоские кривые. Если подставить явное выражение для β в уравнение (65.18), оно превратится в уравнение большого круга [ср. приложение, уравнение (16)]. Другими словами, лучи представляют собой плоские кривые, и их плоскость проходит через центр сферической поверхности уровня. Это можно показать следующим образом: подстановка из (65.13) обращает уравнение (65.18) в

$$\lambda - \lambda_0 = \int_0^\mu \frac{\alpha d\mu}{\{x^2 \operatorname{sech}^2 \mu - \alpha^2\}^{1/2}}, \quad (65.20)$$

если произвольный нижний предел интегрирования взять равным нулю. Определяя величину μ_0 из уравнения

$$\operatorname{ch}^2 \mu_0 = \frac{x^2}{\alpha^2}, \quad \mu_0 \geq 0, \quad (65.21)$$

запишем уравнение (65.20) в виде

$$\lambda - \lambda_0 = \int_0^\mu \frac{\operatorname{ch} \mu d\mu}{\{\operatorname{ch}^2 \mu_0 - \operatorname{ch}^2 \mu\}^{1/2}} = \int_0^\mu \frac{d(\operatorname{sh} \mu)}{\{\operatorname{sh}^2 \mu_0 - \operatorname{sh}^2 \mu\}^{1/2}}, \quad (65.22)$$

что легко интегрируется и дает

$$\operatorname{sh} \mu = \operatorname{sh} \mu_0 \sin(\lambda - \lambda_0). \quad (65.23)$$

Это — уравнение большого круга, что и доказывает результат, сформулированный выше.

Если изобразить уравнение (65.23) на меркаторской карте поверхности планеты, то полученная кривая будет центральной проекцией луча на эту поверхность; она называется следом луча. Рис. 34 изображает следы лучей для различных значений μ_0 . Можно видеть, что они остаются в экваториальной зоне, определяемой неравенствами $-\mu_0 \leq \mu \leq \mu_0$, и что они замыкаются: μ есть периодическая функция λ с периодом 2π .

Высота лучей. Уравнение (65.19) содержит интеграл

$$I = \int_0^{\mu} \frac{\partial \beta}{\partial \chi} d\mu = \int_0^{\mu} \frac{\chi \operatorname{sech}^2 \mu d\mu}{\{\chi^2 \operatorname{sech}^2 \mu - \alpha^2\}^{1/2}}. \quad (65.24)$$

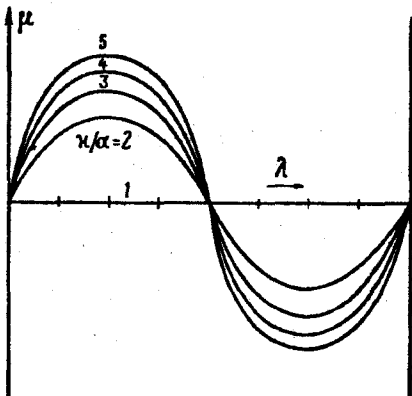


Рис. 34. Следы лучей на меркаторской карте (при отсутствии вращения).

Этот интеграл может быть без труда вычислен, но его интерпретация оказывается проще, если заметить, что наша задача обладает сферической симметрией. Поэтому достаточно рассматривать лишь те лучи, следы которых совпадают с меридианом; для них $\alpha = 0$ и интеграл в (65.24) приводится к

$$I = \int_0^{\mu} \operatorname{sech} \mu d\mu = \varphi, \quad (65.25)$$

где φ определяется уравнением (2) приложения и представляет собой широту. Следовательно, уравнение (65.19) обращается в

$$r_S(\varphi - \varphi_0) = - \int_{\chi_1}^{\chi} \frac{\partial \gamma}{\partial \chi} d\chi, \quad (65.26)$$

что может быть сопоставлено с (64.9). Даже если след луча не есть меридиан, из симметрии следует, что интеграл в правой части уравнения (65.26) дает расстояние вдоль следа как функцию высоты луча.

**§ 66. Сферические поверхности уровня
при наличии вращения.
Традиционное приближение**

Влияние вращения на лучи будет исследовано лишь при традиционном пренебрежении горизонтальной составляющей Ω_H вектора Кориолиса. Используя обозначение (65.1), запишем приближенные уравнения поля:

$$\begin{aligned} i\omega U_e + \Omega \operatorname{th} \mu U_0 &= iac \operatorname{ch} \mu P, \\ i\omega U_v - \Omega \operatorname{th} \mu U_e &= i\beta c \operatorname{ch} \mu P, \\ i\omega U_c &= (i\gamma + \Gamma) cP - N^2 Q, \\ i\omega P &= i\alpha \operatorname{ch} \mu (\alpha U_e + \beta U_v) + (i\gamma - \Gamma) cU_c, \\ i\omega Q &= U_c. \end{aligned} \quad (66.1)$$

Исключая составляющие поля скорости, получим приближенные остаточные уравнения

$$\begin{aligned} (i\gamma + \Gamma) cP - (N^2 - \omega^2) Q &= 0, \\ \left[1 - \frac{c^2 (\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{ch}^2 \mu}{\omega^2 - \Omega^2 \operatorname{th}^2 \mu} \right] P - (i\gamma - \Gamma) cQ &= 0. \end{aligned} \quad (66.2)$$

Уравнение распространения тогда таково:

$$\gamma^2 c^2 = (\omega^2 - N_1^2) + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) c^2 \operatorname{ch}^2 \mu (N^2 - \omega^2)}{\omega^2 - \Omega^2 \operatorname{th}^2 \mu}, \quad (66.3)$$

что можно сопоставить с уравнением (51.2).

Проведя рассуждения, во всех отношениях идентичные рассуждениям предыдущего параграфа, можно найти, что фазовая функция имеет вид

$$\Phi = S(\chi) + T(\mu) + r_S \alpha \lambda - \omega t, \quad (66.4)$$

где

$$\left[\frac{1}{r_S^2} \left(\frac{dT}{d\mu} \right)^2 + \alpha^2 \right] \frac{\omega^2 \operatorname{ch}^2 \mu}{\omega^2 - \Omega^2 \operatorname{th}^2 \mu} = \kappa^2, \quad (66.5)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2 (N^2 + \omega^2)} \left[c^2 \left(\frac{dS}{d\chi} \right)^2 + N_1^2 - \omega^2 \right] = \kappa^2. \quad (66.6)$$

κ^2 — постоянная разделения. Уравнение (66.5) приводится к (65.11), если $\Omega = 0$, а уравнение (66.6) то же самое, что и (65.12). Следовательно,

$$\frac{1}{r_s} \frac{dT}{d\mu} = \left\{ \kappa^2 \operatorname{sech}^2 \mu \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \operatorname{th}^2 \mu \right] - \alpha^2 \right\}^{1/2} = \beta(\alpha, \kappa, \omega, \mu), \quad (66.7)$$

$$\frac{dS}{d\chi} = \gamma(\kappa, \omega, \chi). \quad (66.8)$$

где γ снова дается формулой (65.14) и не зависит от Ω . Интегральные формы для T и S поэтому такие:

$$T = r_s \int_{\mu_1}^{\mu} \beta(\alpha, \kappa, \omega, \mu) d\mu, \quad (66.9)$$

$$S = \int_{\chi_1}^{\chi} \gamma(\kappa, \omega, \chi) d\chi, \quad (66.10)$$

а уравнения для лучей —

$$t - t_0 = \int \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} d\chi + r_s \int \frac{\partial \beta}{\partial \omega} d\mu, \quad (66.11)$$

$$\lambda - \lambda_0 = - \int \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} d\mu, \quad (66.12)$$

$$s_0 = \int \frac{\partial \gamma}{\partial \kappa} d\chi + r_s \int \frac{\partial \beta}{\partial \kappa} d\mu; \quad (66.13)$$

t_0, λ_0, S_0 — опять постоянные.

Следы лучей. Уравнение (66.12) снова дает соотношение между λ и μ и приводит к уравнению следов лучей на поверхности планеты. Однако это уже не большие круги. В явной форме уравнение (66.12) таково:

$$\lambda - \lambda_0 = \int_0^{\mu} \frac{\alpha d\mu}{\left\{ \kappa^2 \operatorname{sech}^2 \mu \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \operatorname{th}^2 \mu \right] - \alpha^2 \right\}^{1/2}}. \quad (66.14)$$

Замена переменных

$$\tau = \operatorname{th} \mu, \quad \frac{d\tau}{d\mu} = \operatorname{sech}^2 \mu = 1 - \tau^2 \quad (66.15)$$

преобразует его в

$$\lambda - \lambda_0 = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{(1 - \tau^2) F}, \quad (66.16)$$

где

$$F = \left\{ \left(\frac{\kappa}{\alpha} \right)^2 (1 - \tau^2) \left[1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \tau^2 \right] - 1 \right\}^{1/2}. \quad (66.17)$$

Это эллиптический интеграл третьего рода, и хотя он может быть вычислен с помощью таблиц [9], здесь будет достаточно получить лишь некоторые качественные выводы относительно его поведения.

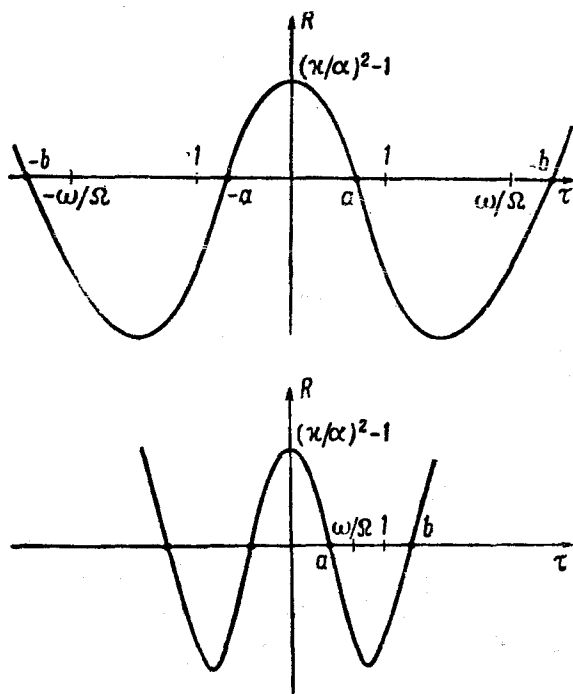


Рис. 35. Корни функции F .

Подкоренное выражение R в F есть многочлен второй степени относительно τ^2 ; график $R = F^2$ показан на рис. 35 для двух случаев: $\omega > \Omega$ и $\omega < \Omega$. Он имеет четыре корня: $\tau = \pm a, \pm b$; можно заметить, что a всегда меньше единицы

и что F^2 положительно, когда $-a \leq \tau \leq a$. Следовательно, луч заключен в этой области τ . Многочлен также положителен для $\tau > b > 1$, но, поскольку $\tau = \text{th } \mu$, эта область не приводит к физически возможным лучам.

Замечание относительно аппроксимации. Можно видеть также, что $a < \omega/\Omega$, даже если $\omega < \Omega$. Если κ^2/α^2 не слишком велико, a будет даже значительно меньше, чем ω/Ω . При этих предположениях весь ход луча будет ограничен областью, где $\omega \ll \Omega \tau = \Omega \text{th } \mu = \Omega_V$. Далее, в гл. IX указывалось, что ошибка, вызванная традиционным приближением, возрастает, когда ω приближается к Ω_V . Поэтому интересно отметить, что имеется некоторая тенденция лучей избегать области, где ошибка становится очень большой. Это, разумеется, не исключает возможности значительных ошибок.

Период следов лучей. Предположив, что интеграл в уравнении (66.16) вычислен, можно выразить $\lambda - \lambda_0$ в виде функции от $\tau = \text{th } \mu$. Эту функцию можно преобразовать к виду

$$\text{sh } \mu = f(\lambda - \lambda_0). \quad (66.18)$$

В случае $\Omega = 0$ это должно приводиться к (65.23)

$$\text{sh } \mu = \text{sh } \mu_0 \sin(\lambda - \lambda_0).$$

В данном случае f есть периодическая функция своего аргумента с периодом 2π .

В общем случае, $\Omega \neq 0$,

f остается периодической функцией, но ее период уже не равен 2π . Вместо этого, как можно показать, период равен

$$\Lambda = 4 \int_0^a \frac{d\tau}{(1-\tau^2)^2 F}. \quad (66.19)$$

Для больших значений ω/Ω , Λ приближается к 2π , разность $\Lambda - 2\pi$ оказывается пропорциональной $(\Omega/\omega)^2$. С другой стороны, для малых значений ω/Ω уравнение (66.14) может быть

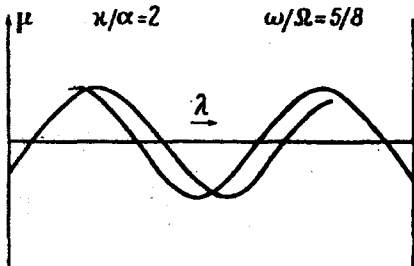


Рис. 36. Следы лучей на меркаторской карте (при наличии вращения).

аппроксимировано как

$$\lambda - \lambda_0 = \int_0^\mu \frac{\alpha d\mu}{\left\{ x^2 \left(1 - \frac{\Omega^2 \mu^2}{\omega^2} \right) - 1 \right\}^{1/2}}, \quad (66.20)$$

что интегрируется

$$\mu = \frac{\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2} \right)^{1/2} \sin \left[\frac{x\Omega}{\alpha\omega} (\lambda - \lambda_0) \right]. \quad (66.21)$$

В этом предельном случае период равен

$$\Lambda = 2\pi \frac{\alpha\omega}{x\Omega} \quad (66.22)$$

и он много меньше 2π . След луча пересекает экватор при долготе

$$\lambda_n = \lambda_0 + n\pi \frac{\alpha\omega}{x\Omega}. \quad (66.23)$$

Высота лучей. Уравнение (66.13) дает соотношение между высотой лучей и меркаторской координатой μ . При рассмотрении соответствующего соотношения в § 65 можно было сделать существенное упрощение ввиду сферической симметрии задачи. Вращение разрушает эту симметрию, и уравнение (66.13) поэтому значительно более сложно, чем предыдущее уравнение (65.19). Координата μ входит в уравнение (66.13) в интеграле

$$I = r_s \int \frac{\partial \beta}{\partial x} d\mu = r_s \int \frac{x \operatorname{sech}^2 \mu \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \operatorname{th}^2 \mu \right]}{\beta(\alpha, x, \omega, \mu)} d\mu. \quad (66.24)$$

Этот интеграл можно сравнить теперь с интегралом, определяющим расстояние вдоль следа луча; в § 65, где Ω было нулем, два соответствующих интеграла оказались равны.

Используя уравнение (4) приложения, будем иметь для элемента длины ds :

$$(ds)^2 = r_s^2 \operatorname{sech}^2 \mu (d\lambda^2 + d\mu^2).$$

Из уравнения (66.12)

$$d\lambda = - \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} d\mu,$$

так что

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= r_s^2 \operatorname{sech}^2 \mu \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right)^2 + 1 \right] d\mu^2 = \\ &= r_s^2 \operatorname{sech}^2 \mu \left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1 \right] d\mu^2. \end{aligned} \quad (66.25)$$

Используя уравнение (66.7) для β , легко найти, что

$$ds = r_s \frac{\alpha \operatorname{sech}^2 \mu \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \operatorname{th}^2 \mu \right]^{1/2}}{\beta(\alpha, \alpha, \omega, \mu)} d\mu. \quad (66.26)$$

Отсюда следует, что

$$I = \int \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \operatorname{th}^2 \mu \right]^{1/2} ds. \quad (66.27)$$

Если $\Omega = 0$, это приводится к $I = s$ и, таким образом, результат предыдущего параграфа получен снова. В общем случае можно видеть, что $I < s$. Следовательно, изменения высоты луча вдоль следа происходят более медленно, чем в том случае, если бы вращения не было. Это выражено особенно ярко для малых значений ω/Ω .

ЛИТЕРАТУРА

1. Bateman H., Partial differential equations of mathematical physics, 1st american ed., New York, Dover, 1944.
2. Bellman R., Kalaba R., Invariant imbedding, wave propagation, and the WKB-Approximation, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., 44, 317 (1958).
3. Bieberbach L., Theorie der Differentialgleichungen, 3rd. ed., New York, Dover, 1944.
4. Bremmer H., The WKB-Approximation as the first term of a geometric-optical series, Theory of Electromagnetic Waves — A Symposium, New York, Interscience, 1951.
5. Brillouin L., J. Phys., 7, 353 (1926).
6. Eckart C., Note on the correspondence principle in the new quantum theory, Proc. Natl. Acad. Sci., U. S., 12, 685 (1926).
7. Eckart C., Die Korrespondenzmässige Beziehung zwischen den Matrizen und den Fourierkoeffizienten des Wasserstoffs, Z. Phys., 48, 295 (1928).
8. Kramers H. A., Z. Phys., 39, 829 (1926).

9. Milne-Thompson L. M., Jacobian Elliptic Functions, New York, Dover, 1950.
10. Frank und von Mises (ed.), Riemann-Weber's Partiellen Differentialgleichungen, Braunschweig, Vieweg, 1925.
11. Webster A. G., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Leipzig, Teubner, 1927. (Русский перевод: Вебстер А. Г. и Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики., ч. 1 и 2, Гостехиздат, М. — Л., 1934.)
12. Wentzel G., Z. Phys., 38, 518 (1926).

Глава XII

СЛОЙ СКАЧКА

§ 67. Постановка задачи

Самой замечательной особенностью земных океанов является наличие в них постоянного слоя скачка параметров. Область быстрого изменения температуры есть в то же время область большой устойчивости, что выражено в подчеркнутом максимуме параметра N , показанном на рис. 10 § 27. Настоящая глава будет посвящена изучению явлений, связанных с этим типом стратификации.

С этой целью мы предположим, что N задано простой аналитической формулой (67.1). Несомненно, что зависимость N от z по этой формуле в значительной степени отклоняется от эмпирической кривой для N как функции глубины (ср. рис. 10 и 37), но обе кривые имеют характерный максимум слоя скачка. Формула (67.1) имеет то преимущество, что многие вычисления могут быть проведены аналитически, в то время как использование эмпирических зависимостей потребует обращения к численным методам. Кроме того, многие качественные выводы будут зависеть не от принятой частной аналитической формы, а лишь от существования единственного максимума N в слое скачка. Чтобы упростить обозначения, выберем начало координат выше свободной поверхности океана. Тогда вертикальная координата этой поверхности будет $z = -S$, а дна $z = -S - D$. Для N примем следующее выражение:

$$N^2 = -N_M^2 \left(\frac{2Z}{z} + \frac{Z^2}{z^2} \right). \quad (67.1)$$

График этой кривой показан на рис. 37. N_M и Z — постоянные; N_M — величина максимума параметра устойчивости, а Z — глубина слоя скачка. Очевидно, лишь область $-S - D \leq z \leq -S$ имеет физический смысл. Поскольку в теории простых волн не принимаются во внимание краевые условия, параметры S и D не будут играть большой роли

в начале этой главы и при вычислении лучей будет учитываться вся область $-\infty \leq z \leq 0$. Ясно, что „глубина“ $z=0$ окажется особой, но эта особенность не имеет физического смысла. Следует заметить также, что на обоих концах этого интервала параметр устойчивости оказывается докритическим (см. § 52) и даже отрицательным вблизи $z=0$; этот факт

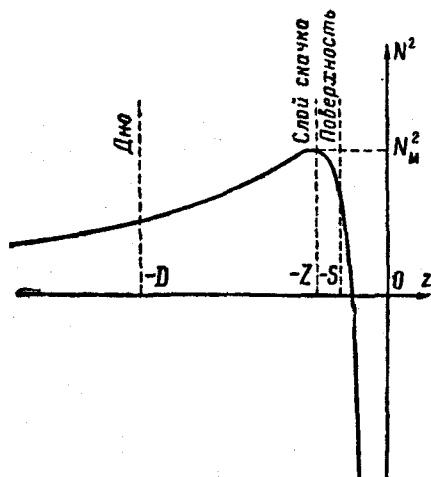


Рис. 37. Изменение N^2 с глубиной, принятое для иллюстративных целей в настоящей главе.

также не является физически важным. Можно предположить, что докритическая область не простирается до области тех значений z , которые действительно соответствуют океану.

Можно добиться дальнейшего упрощения, приняв $\Gamma=0$ и предполагая скорость звука с постоянной. Первое влечет за собой лишь пренебрежимо малые количественные изменения, последнее же приводит к тому, что лучи высокочастотного звука окажутся прямыми. В действительном океане рефракция

высокочастотного звука часто имеет большое значение, но здесь ее учет был бы усложнением, в котором нет необходимости. Сейчас нашей главной целью является изучение внутренних гравитационных волн, связанных с существованием слоя скачка, а эти волны едва ли зависят от скорости звука, что становится очевидным, если принять во внимание результаты гл. X.

§ 68. Предварительное изучение лучей

Исследование будет сперва основываться на теории лучей, несмотря на то что эта теория может дать лишь приближенные результаты. Позднее мы сравним эти результаты с теми, которые будут получены из остаточных уравнений. Для лучей, лежащих в плоскости xz , имеем $\alpha = x$ и $\beta = 0$, так что урав-

нение (64.9) превращается в

$$x - x_0 = - \int_{z_1}^z \frac{\partial \gamma}{\partial x} dz. \quad (68.1)$$

Так как $\Gamma = 0$, уравнение (63.8) приводится к виду

$$\gamma = \frac{1}{c} \left[(\omega^2 - N^2) \left(1 - \frac{x^2 c^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right) \right]^{1/2}, \quad (68.2)$$

так что (68.1) в явной форме записывается так:

$$x - x_0 = xc \int_{z_1}^z \left(\frac{\omega^2 - N^2}{(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - \Omega^2 - x^2 c^2)} \right)^{1/2} dz. \quad (68.3)$$

Как и всегда, подкоренное выражение должно быть положительным во всей области интегрирования от z_1 до z , так как в противном случае координаты x и x_0 оказались бы комплексными числами.

Поскольку c постоянен, знаменатель в подкоренном выражении также постоянен, и лишь числитель зависит от z . Однако знак определяется как числителем, так и знаменателем. Знаменатель меняет знак на гиперболе

$$\omega^2 = \Omega^2 + x^2 c^2$$

и на прямой

$$\omega = \Omega,$$

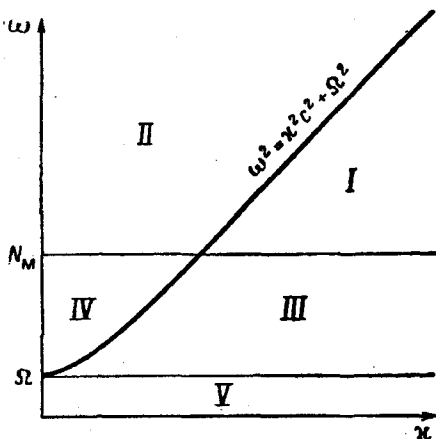


Рис. 38. Пять подлежащих рассмотрению случаев расположения точек (x, ω) на диагностической диаграмме.

каждая из которых изображена на рис. 38. Вместе с прямой

$$\omega = N_M$$

они делят x, ω -диаграмму на пять областей, как показано на рис. 38. Удобно изучать каждую из этих областей отдельно. Следует отметить общее соответствие между рис. 38 и рис. 21 § 50.

Область I

$\omega^2 > N^2$ для всех отрицательных значений z , так что $\omega^2 - N^2 \geq 0$. Множитель $\omega^2 - Q^2$ также положителен, в то время как $\omega^2 - Q^2 - k^2 c^2$ отрицателен; поэтому корень в (68.3) мнимый для всех значений z и с точками этой области диагностической диаграммы не связано никаких лучей.

Область II

Все три множителя положительны для всех отрицательных z . Лучи вещественны и могут простираются от $-\infty$ до 0. Эти лучи соответствуют акустическим волнам, что станет очевидным ниже, если не ясно уже сейчас.

Область III

Знаменатель подкоренного выражения отрицателен; поэтому лучи ограничены областью, где $N^2 > \omega^2$. Пусть z_1 и z_2 — корни уравнения

$$N^2(z) = \omega^2, \quad z_1 \leq z_2.$$

Тогда z_1 удобно принять в качестве нижнего предела интегрирования в (68.3), а лучи сосредоточены в области $z_1 \leq z \leq z_2$. На обоих концах этого интервала

$$\frac{dx}{dz} = \gamma = 0$$

и лучи вертикальны. Эти лучи соответствуют внутренним гравитационным волнам. Поскольку лучи эти заключены в области скачка плотности, мы можем говорить о канале (волноводе) слоя скачка для внутренних гравитационных волн.

Области IV и V

Знаменатель подкоренного выражения положителен в обеих областях, и радикал оказывается вещественным вне отрезка, определяемого корнями уравнения $N^2 = \omega^2$. Имеются два канала. В нижнем канале лучи приходят из $-\infty$ в точку, соответствующую нижнему корню, не дойдя до слоя скачка; здесь происходит поворот с вертикальной касательной, затем лучи снова возвращаются в $-\infty$. Второй канал находится выше точки, соответствующей верхнему корню, и простирается до $z = 0$. Конечно, лучи достигнут дна или повер-

ности и затем отразятся в соответствии с простым законом равных углов. Следовательно, эти каналы могут быть названы соответственно придонным и поверхностным. Точная природа этих волн не может быть предугадана на данном этапе исследования.

Этот предварительный анализ показывает, что при вычислении интеграла (68.1) следует различать три случая, относящиеся соответственно к областям II, III и IV вместе с V.

§ 69. Звуковые волны области II

Если (x, ω) — точка области II, то уравнение (68.3) может быть записано так:

$$x - x_0 = AZ \int \frac{(a^2 - 2u + u^2)^{1/2}}{u^2} du = \\ = AZ \int \frac{[b^2 + (u-1)^2]^{1/2}}{u^2} du, \quad (69.1)$$

где

$$u = -\frac{Z}{z}, \\ a = \frac{\omega}{N_M} > 1, \quad b = (a^2 - 1)^{1/2}, \quad (69.2) \\ A = \kappa c N_M [(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - \Omega^2 - \kappa^2 c^2)]^{1/2}.$$

Подынтегральное выражение вещественно для всех вещественных u . Случай больших a очень важен, так как он относится к звуковым волнам слышимой частоты. Сначала мы исследуем форму этих лучей вблизи слоя скачка. Здесь $(u-1)/b$ оказывается малой величиной и

$$(a^2 - 2u + u^2)^{1/2} = b \left[1 + \frac{(u-1)^2}{2b^2} + \dots \right].$$

Отсюда

$$x - x_0 = Ab \left\{ z + \frac{Z}{2b^2} \left[\frac{z}{Z} + 2 \ln \left(-\frac{z}{Z} \right) + \dots \right] \right\}, \quad (69.3)$$

так что лучи лишь слабо отклоняются от прямой с наклоном Ab . С известным приближением этот наклон можно считать равным $\omega/(\omega^2 - \kappa^2 c^2)^{1/2}$, что является классической формулой для звуковых лучей. Однако отклонения от прямой представляют теоретический интерес, так как они указывают

на небольшую рефракцию звуковых волн, несмотря на постоянство скорости звука c .

В точках, лежащих намного ниже слоя скачка, u оказывается очень малым и

$$(a^2 - 2u + u^2)^{1/2} = a \left[1 - \frac{u}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{a^2} \left(1 - \frac{1}{2a^2} \right) + \dots \right],$$

так что

$$x - x_0 = Aa \left[z + \frac{Z}{a^2} \ln \left(-\frac{z}{Z} \right) + \dots \right]. \quad (69.4)$$

Следовательно, имеются отклонения от прямой даже на таких глубинах. Кроме того, наклоны лучей у слоя скачка и на больших глубинах не равны между собой; их отношение отличается от единицы на величины порядка $(N_M/\omega)^4$. Это, как правило, слишком малые величины, чтобы их можно было обнаружить экспериментальной проверкой.

Большие значения u (малые z) лишены физического смысла, но формально уравнение (69.1) приводит в этом случае к выражению

$$x - x_0 = AZ \ln \left(-\frac{Z}{z} \right) + \dots \quad (69.5)$$

Рис. 39. Звуковой луч из области II. Большие отрицательные значения N^2 привели бы к очень значительной рефракции звуковых волн, но они физически не реализуемы.

Интеграл в (69.1) может быть вычислен точным образом. Для этого нужно ввести параметры φ и ψ подстановкой

$$u = 1 + b \operatorname{sh} \varphi = \frac{a^2}{(1 + b \operatorname{sh} \psi)} = -\frac{Z}{z}. \quad (69.6)$$

Тогда интеграл вычисляется и (69.1) примет вид

$$x - x_0 = AZ \left(\varphi - \frac{\psi + b \operatorname{ch} \psi}{a} \right). \quad (69.7)$$

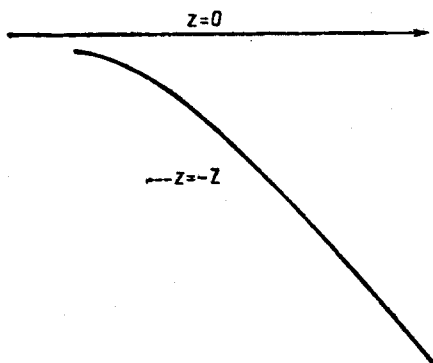


Рис. 39 изображает график этого уравнения; численные значения, использованные для построения этой кривой, выбраны из соображений ясности рисунка, а не соответствия действительности.

§ 70. Гравитационные волны области III

Если (x, ω) — точка области III, уравнение (68.3) может быть записано так:

$$x - x_0 = AZ \int \frac{(-a^2 + 2u - u^2)^{1/2}}{u^2} du, \quad (70.1)$$

где теперь

$$u = -\frac{Z}{z},$$

$$a = \frac{\omega}{N_M} < 1, \quad b = (1 - a^2)^{1/2}, \quad (70.2)$$

$$A = \kappa c N_M [(\omega^2 - \Omega^2)(x^2 c^2 + \Omega^2 - \omega^2)]^{-1/2}.$$

Подынтегральное выражение имеет корни $u = 1 \pm b$ и вещественно, только если u находится между этими корнями. Его поведение вблизи корня $u = 1 + b$ может быть исследовано введением переменного

$$v = 1 + b - u, \quad (70.3)$$

так что

$$x - x_0 = \pm AZ \int \frac{[v(2b - v)]^{1/2}}{(1 + b - v)^2} dv. \quad (70.4)$$

Мы не обращали до сих пор внимания на произвол в знаке корня, но сейчас он должен быть учтен в вычислениях. Считая v малой величиной, можно записать (70.4) так:

$$x - x_0 = \pm AZ b^{1/2} \frac{(2v)^{3/2}}{3(1 + b)^2} + \dots \quad (70.5)$$

Как видно отсюда, луч отражается от уровня $z/Z = -1/(1 + b)$ и имеет здесь вертикальную касательную. Поведение луча при другом корне аналогично.

Это характерное поведение лучей вблизи корней тесно связано с поверхностями распространения, рассмотренными в § 43. Так как N — функция от z , то с каждой точкой

луча будет связана своя поверхность — локальная поверхность распространения. Параметры x и ω одни и те же для всех локальных поверхностей, а γ и N изменяются вместе с z . Вдоль всех этих лучей $\omega^2 > N^2$, так что поверхность распространения представляет собой всюду гиперboloид, как это показано на нижней части рис. 17. Когда z приближается к одному из корней уравнения $N^2 = \omega^2$, асимптотический конус гиперboloида становится все более плоским, а наклон лучей делается все более крутым, что совершенно ясно видно на рис. 17.

Интеграл в (70.1) и здесь выражается точным образом через φ и ψ , определяемые на этот раз формулами

$$u = 1 + b \sin \varphi = \frac{a^2}{1 + b \sin \psi} = -\frac{Z}{z}. \quad (70.6)$$

В данном случае мы имеем

$$x - x_0 = -AZ \left(\varphi + \frac{\psi + b \cos \psi}{a} \right). \quad (70.7)$$

На рис. 40 показан график этого уравнения.

Может, конечно, оказаться, что поверхность или дно пересекают эти лучи. Так случится при достаточно малых

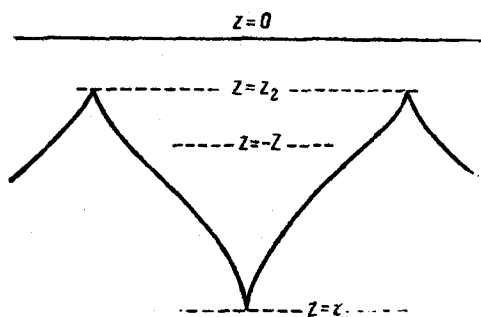


Рис. 40. Луч гравитационной волны из области III.

значениях ω , если устойчивость не докритична на всех глубинах. В этом случае луч отразится от поверхности раздела в согласии с законом равных углов. Если же лучи не отражаются ни от какой поверхности раздела, они на всем своем протяжении находятся внутри канала слоя скачка,

§ 71. Волны областей IV и V

С аналитической точки зрения теории областей IV и V совпадают, однако имеются физические различия, которые предстоит рассмотреть. Уравнение (68.3) может быть записано так:

$$x - x_0 = AZ \int \frac{(a^2 - 2u + u^2)^{1/2}}{u^2} du, \quad (71.1)$$

если использовать обозначения

$$u = -\frac{Z}{z}, \quad a = \frac{\omega}{N_M} < 1, \quad b = (1 - a^2)^{1/2}, \quad (71.2)$$

$$A = \kappa c N_M [(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - \Omega^2 - \kappa^2 c^2)]^{-1/2}.$$

Подынтегральное выражение в (71.1) теперь положительно вне отрезка между двумя корнями; мы будем различать два случая с помощью параметра $\sigma = \pm 1$. Если u больше обоих корней, то $\sigma = 1$, если u меньше обоих корней, то $\sigma = -1$. Определение φ и ψ теперь такое:

$$\begin{aligned} u &= 1 + \sigma b \operatorname{ch} \varphi = \\ &= \frac{a^2}{1 - \sigma b \operatorname{ch} \psi} = -\frac{Z}{z}. \end{aligned} \quad (71.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \\ &= AZ \left(\sigma \varphi - \frac{\sigma \psi + b \operatorname{sh} \psi}{a} \right). \end{aligned} \quad (71.4)$$

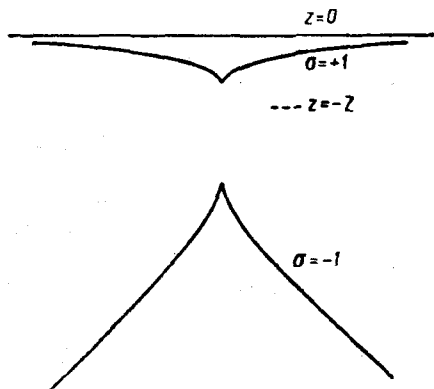


Рис. 41. Лучи из областей IV и V.

Графики этих лучей показаны на рис. 41.

В области V имеем $\omega < \Omega$, следовательно, лучи заключены в докритическом интервале, где $N < \Omega$. Если они не достигают той части пространства, где в самом деле имеется вода, то такие лучи целиком фиктивны и не существуют решений для $\omega < \Omega$. Это замечание подчеркивает важность исследования того, может ли устойчивость океана становиться докритической на больших глубинах.

В области IV имеем $\omega > Q$, и, следовательно, любая ветвь луча может простирается в район, фактически занятый водой, даже если устойчивость нигде не является докритической для физически значимых величин z . Однако если лучи попадают в этот район, то они пересекаются с дном или с поверхностью и должны от них отражаться. Поэтому лучи заключены в поверхностном или придонном канале.

§ 72. Остаточные уравнения

После сделанного нами обзора проблемы слоя скачка с точки зрения теории лучей изучим эту проблему с использованием остаточных уравнений. Эти уравнения при $\Gamma = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} c \frac{dP}{dz} &= (N^2 - \omega^2) Q, \\ c \frac{dQ}{dz} &= \left(1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2 - Q^2}\right) P. \end{aligned} \quad (72.1)$$

Граничные условия таковы:

$$Q = 0 \quad \text{при} \quad z = -S - D \quad (\text{дно}), \quad (72.2)$$

$$cP + gQ = 0 \quad \text{при} \quad z = -S \quad (\text{поверхность}). \quad (72.3)$$

Исключение поля P из этой системы при учете постоянства c приводит к уравнению

$$\frac{d^2 Q}{dz^2} + \gamma^2 Q = 0, \quad (72.4)$$

где γ по-прежнему дается выражением (68.2)

$$\gamma^2 c^2 = \left(1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2 - Q^2}\right) (\omega^2 - N^2). \quad (72.5)$$

Условие (72.2) остается неизменным, в то время как (72.3) обращается в

$$\frac{dQ}{dz} = -\frac{g}{c^2} \left(1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2 - Q^2}\right) Q \quad \text{при} \quad z = -S. \quad (72.6)$$

Напомним, что Q — это по существу амплитуда вертикального смещения воды, измеренная в подходящих единицах.

Далее мы докажем, что решения уравнения (72.4) имеют разный характер в каждой из пяти областей рис. 38 и что

корни уравнения $N^2 = \omega^2$ и здесь являются существенными параметрами задачи. Другими словами, теория остаточных уравнений в этом важном отношении развивается параллельно теории лучей.

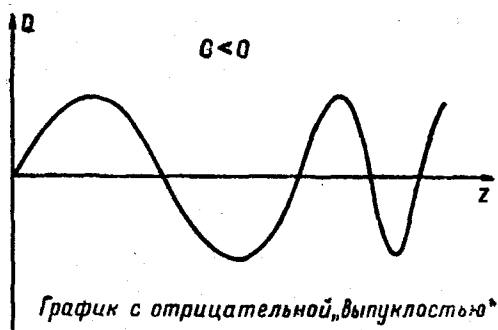
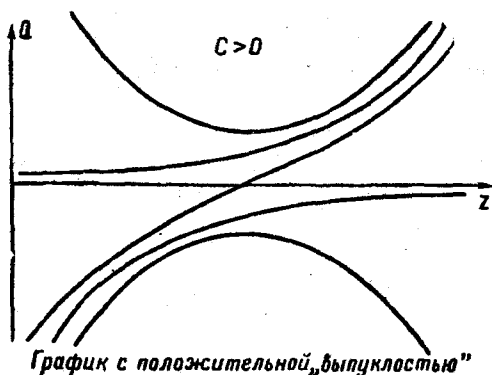


Рис. 42. Характерные графики с положительной и отрицательной „выпуклостью“.

Решение уравнения (72.4) может быть представлено графически. Важной геометрической характеристикой графика Q является его „выпуклость“ C , определяемая как

$$C = \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{dz^2}. \quad (72.7)$$

Если „выпуклость“ положительна, график обращен своей выпуклой стороной к оси z , если же $C < 0$, он обращен выпуклой стороной от оси. Эти два случая показаны на рис. 42.

Рассмотрим интервал оси z , где C не меняет знака. Если на этом интервале „выпуклость“ положительна, то Q может иметь не более одного корня и не более одного экстремума (причем не может быть того и другого одновременно), как это показано в верхней части рис. 42. Если, с другой стороны, „выпуклость“ отрицательна в этом интервале, Q может иметь много корней и экстремумов, как показано на нижней части рис. 42.

Если $C > 0$, а Q имеет минимум, это минимальное значение окажется положительным; если $C < 0$, минимумы отрицательны. Соответственно максимумы Q имеют знак, противоположный знаку C . Отсюда следует, что при $C < 0$ экстремумы Q разделены корнями; поэтому Q называется колеблющимся в тех интервалах, где $C < 0$. Если $C \neq 0$, корни Q являются и точками перегиба его графика; корни же C — только точки перегиба, но не корни Q .

Эти простые замечания позволяют без пространных вычислений построить достаточно детальные, хотя и только качественные, графики решений уравнения (72.4).

Выполним такие качественные построения по отношению к различным областям диагностической диаграммы (рис. 38).

Область I

В области I

$$\Omega^2 < N_M^2 < \omega^2 < x^2 c^2 + \Omega^2. \quad (72.8)$$

Следовательно, $\gamma^2 < 0$ и „выпуклость“ графика Q положительна для всех значений z . Условие (72.2) показывает, что Q имеет корень при $z = -S - D$, следовательно, других корней оно иметь не может. Поэтому график должен иметь приблизительно такую форму, как указано на рис. 43, если считать, что $dQ/dz > 0$ на дне.

Уравнения (72.2) и (72.4) не определяют величины этого наклона, поэтому он остается произвольным параметром решения. Однако величина

$$\frac{1}{Q} \frac{dQ}{dz} = f \quad (72.9)$$

однозначно определяется этими уравнениями и в каждой точке она есть функция от x и ω : $f = f_0(x, \omega, z)$. Она определяется однозначно, хотя вычисление этой функции по-

требовало бы значительной работы. Кроме того, очевидно, что $f_0 > 0$ для $z > -S - D$.

Подстановка в (72.6) приводит к уравнению

$$f_0(x, \omega, -S) = \frac{g}{c^2} \left(\frac{x^2 c^2}{\omega^2 - Q^2} - 1 \right), \quad (72.10)$$

связывающему x и ω ; следует сравнить это с изложенным в § 54.

Наконец, уравнение (72.1) показывает, что P с точностью до постоянного отрицательного множителя совпадает с dQ/dz ,

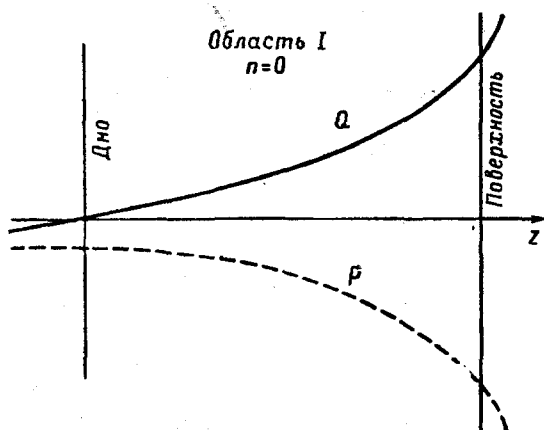


Рис. 43. Примерный вид собственного решения при $n=0$ и (x, ω) в области I.

так что график P должен быть в существенных чертах таков, как показано на рис. 43. Таким образом, поля P и Q отличаются на 180° по фазе, оба поля достигают наибольшей амплитуды на поверхности и P не имеет узлов. Все это, согласно сказанному в гл. X, характерно для поверхностного волнового типа $n=0$.

Область II

Следует предположить, что расположение точек (x, ω) в области II приведет к акустическим волновым типам. Здесь

$$\begin{aligned} \omega^2 &> x^2 c^2 + Q^2, \\ \omega^2 &> N_M^2 > Q^2, \end{aligned} \quad (72.11)$$

так что $\gamma^2 > 0$ и „выпуклость“ отрицательна на всей оси z . Поэтому график Q окажется колеблющимся, причем условие (72.2) требует, как и прежде, чтобы он имел узел при $z = -S - D$, как показано на рис. 44. Могут быть также и другие узлы в области $-S - D < z < -S$; пусть n — общее их число. Функция f , заданная формулой (72.9),

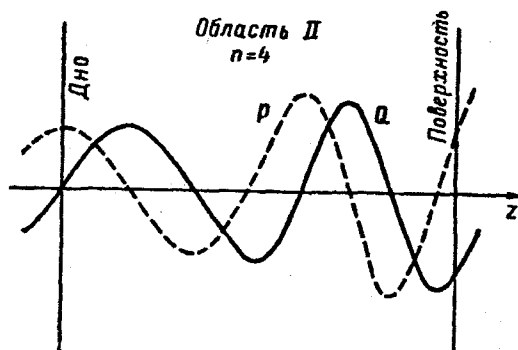


Рис. 44. Примерный вид собственного решения $n = 4$ и (x, ω) в области II.

по-прежнему однозначно определена, но она оказывается уже другой функцией от x , ω и z : $f = f_n(x, \omega, z)$. Из граничного условия на поверхности вытекает, что

$$f_n(x, \omega, -S) = \frac{g}{c^2} \left(\frac{x^2 c^2}{\omega^2 - Q^2} - 1 \right). \quad (72.12)$$

Так как правая часть (72.12) отрицательна, Q и dQ/dz должны иметь на поверхности противоположные знаки. Поле давления теперь пропорционально dQ/dz с положительным множителем и, следовательно, также имеет n узлов в физически значимом интервале значений z . Таковы характерные черты n -го акустического волнового типа.

Область III

Это, вероятно, наиболее интересный случай, поскольку он должен привести к внутренним гравитационным волнам. Здесь также будет видно, как слой скачка влияет на низкочастотные поверхностные волны. В области III

$$\Omega^2 < \omega^2 < N_M^2 \quad \text{и} \quad \omega^2 < x^2 c^2 + \Omega^2. \quad (72.13)$$

Поэтому уравнение

$$N^2 = \omega^2 \quad (72.14)$$

имеет два корня: $z = -z_1$ и $z = -z_2$, а τ^2 меняет знак. Легко видеть, что „выпуклость“ кривой Q удовлетворяет неравенствам

$$C > 0 \quad \text{при} \quad z < -z_1 \quad \text{или} \quad z > -z_2,$$

$$C < 0 \quad \text{при} \quad -z_1 < z < -z_2.$$

Можно также видеть, что когда ω убывает, расстояние между корнями растет, так же как и общая величина „выпуклости“. Как следствие этих обстоятельств, графики Q и P не столь просты, как в случаях, рассмотренных выше, но тем не менее могут быть изображены на основе тех же принципов. Рис. 45, 46 и 47 показывают три случая, в которых P имеет 0, 1 и 2 узла. В соответствии с соглашением, принятым в гл. X, эти случаи имеют порядковые номера $n = 0, -1, -2$.

Случай $n = 0$

В этом случае Q имеет лишь один узел на дне, $z = -S - D$ (рис. 45). График этой функции выпуклый в направлении от оси z в интервале между $-z_1$ и $-z_2$ и

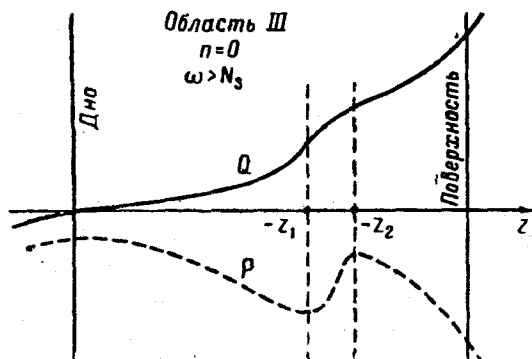


Рис. 45. Примерный вид собственного решения при $n = 0$ и (z, ω) в области III.

выпуклый по направлению к оси вне этого интервала. Однако его наклон не меняет знака. Отношение P к dQ/dz отрицательно в этой области, и поэтому P имеет отрицательный минимум при $z = -z_1$ и отрицательный максимум при

$z = -z_2$. За исключением этих экстремумов P , характеристики этого волнового типа такие же, как и у поверхностных волн. Соображения непрерывности позволяют предположить, что график функции (72.10) переходит из области I в область III и в этой области частот поверхностные волны преобразуются устойчивостью.

Случай $n = -1$

В этом случае Q имеет максимум в интервале $-z_1 < z < -z_2$. Так как Q и dQ/dz должны теперь иметь один и тот же знак, чтобы удовлетворялось граничное условие на поверхности, Q должно иметь узел между этим максимумом и поверхностью. На рис. 46 мы видим этот узел между

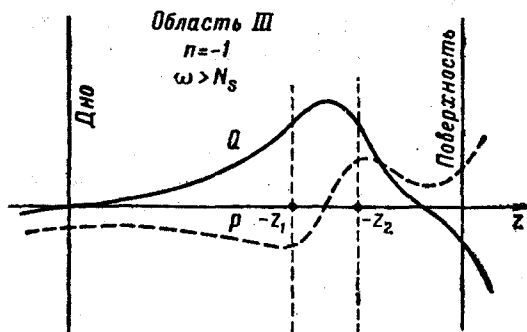


Рис. 46. Примерный вид собственного решения при $n = -1$ и (α, ω) в области III.

$z = -z_2$ и $z = -S$, но читатель может построить график, также реальный, в котором узел лежал бы между максимумом и $z = -z_2$. Отношение P к dQ/dz отрицательно, следовательно, P имеет отрицательный минимум при $z = -z_1$ и положительный максимум при $z = -z_2$. P должно иметь также узел в точке максимума Q ; это единственный узел P ; порядковое число $n = -1$. Q представляет собой амплитуду вертикального движения. Самое интенсивное движение окажется в канале слоя скачка. Амплитуда быстро убывает по обе стороны от интервала $-z_1 < z < -z_2$; ради ясности графика этот факт не отражен количественным образом на рисунке. Движение можно, вероятно, описать в виде колебания слоя скачка как целого.

Случай $n = -2$

В этом случае Q имеет три узла, а P — два, которые находятся в интервале $-z_1 \leq z \leq -z_2$; это показано на рис. 47. Следовательно, жидкость в верхней и нижней частях этого интервала колеблется в противоположных фазах. Этот волновой тип может быть описан как пульсация слоя скачка, при которой он попеременно растягивается и сжимается.

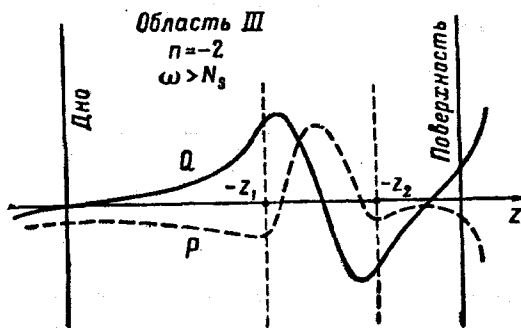


Рис. 47. Примерный вид собственного решения при $n = -2$ и (z, ω) в области III, $\omega > N_s$.

Бóльшие отрицательные порядковые числа из-за большего числа узлов приводят к типам движения, еще более сложным. Читатель сумеет построить их диаграммы в соответствии с принципами, использованными выше.

Изменения в случае, когда слой скачка простирается от поверхности до дна. До сих пор молчаливо предполагалось, что оба корня уравнения $N^2 = \omega^2$ лежат в области $-S - D \leq z \leq -S$, фактически занятой водой. Если обратиться к рис. 37, можно видеть, что для достаточно малых значений ω один или оба эти корня могут попасть в интервал, не имеющий физического смысла. Для простоты предположим, что значение N на поверхности (N_s) больше, чем значение на дне (N_B), как изображено на рис. 36. Когда ω убывает, $-z_2$ возрастает и в конечном счете станет больше, чем $-S$; дальнейшее убывание ω приведет к тому, что $-z_1 < -S - D$.

Поэтому нужно рассмотреть отдельно три случая:

- 1) $\omega > N_S$, 2) $N_S > \omega > N_B$, 3) $N_B > \omega$.

Нами был рассмотрен лишь случай 1.

Мы не приводим детального исследования оставшихся двух случаев, потому что читатель сможет провести его самостоя-

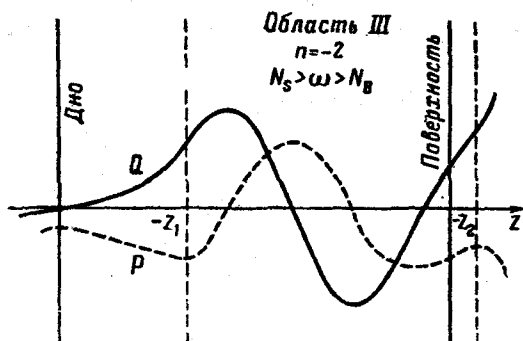


Рис. 48. Примерный вид собственного решения при $n = -2$ и (z, ω) в области III, $N_S > \omega > N_B$.

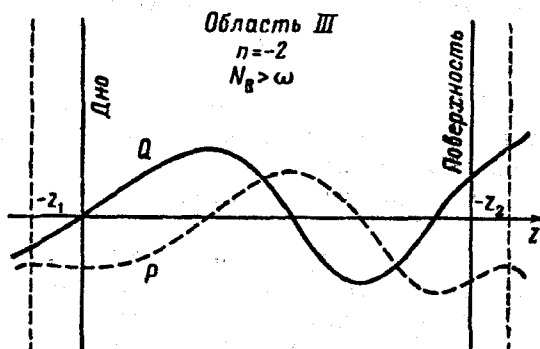


Рис. 49. Примерный вид собственного решения при $n = -2$ и (z, ω) в области III, $N_B > \omega$.

тельно, пользуясь высказанными выше соображениями и рис. 48 и 49. На них показаны соответствующие графики для случаев

$$n = -2, N_S > \omega > N_B \text{ и } n = -2, N_B > \omega.$$

Области IV и V

Можно также построить качественные графики собственных решений, относящихся к точкам областей IV и V, но вполне вероятно, что более точный количественный анализ покажет, что для земных океанов этим областям не соответствуют никакие собственные решения. В случае области IV так может случиться потому, что земные океаны являются мелкими (в смысле § 55). Мы уже видели, что точки области V не дают никаких волн, если только самые глубокие слои не находятся в состоянии докритической устойчивости.

§ 73. Аналитическое решение остаточных уравнений

Сейчас мы воспользуемся в явном виде тем, что параметр устойчивости N дается уравнением (67.1)

$$N^2 = -N_M^2 \left[\frac{2Z}{z} + \left(\frac{Z}{z} \right)^2 \right]. \quad (73.1)$$

Тогда (72.4) принимает вид

$$\frac{d^2 Q}{dz^2} = -\frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right) \left[\omega^2 + N_M^2 \frac{2Z}{z} + N_M^2 \left(\frac{Z}{z} \right)^2 \right] Q. \quad (73.2)$$

Решение этого уравнения может быть записано через функции Виттекера; последние удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{\xi} + \left(\frac{1}{4} - l^2 \right) \frac{1}{\xi^2} \right] W = 0 \quad (73.3)$$

[7, гл. 16, 23]. Уравнение (73.2) может быть приведено к этому виду заменой переменных

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{z}{\alpha}, \\ \alpha &= \frac{c}{2\omega} \left(\frac{\omega^2 - \Omega^2}{\kappa^2 c^2 + \Omega^2 - \omega^2} \right)^{1/2}, \\ k &= \frac{N_M^2 Z}{2\omega^2 \alpha}, \\ l^2 - \frac{1}{4} &= \frac{N_M^2 Z^2}{4\omega^2 \alpha^2} = \frac{1}{2} \frac{kZ}{\alpha}. \end{aligned} \quad (73.4)$$

Два частных линейно независимых решения уравнения (73.3)—функции Виттекера $W(k, l, \xi)$ и $W(-k, l, -\xi)$; несколько более детальное описание этих функций будет дано в § 79. Поэтому самое общее решение уравнения (73.2) таково:

$$Q = AW\left(k, l, -\frac{z}{a}\right) + BW\left(-k, l, \frac{z}{a}\right), \quad (73.5)$$

где A и B — постоянные. Следует заметить, что a , k и l могут быть либо вещественными, либо чисто мнимыми.

Второе из уравнений (72.1) дает выражение для P :

$$P = \frac{4\omega^2\alpha}{c} \left[AW'\left(k, l, -\frac{z}{a}\right) - BW'\left(-k, l, \frac{z}{a}\right) \right], \quad (73.6)$$

где использовано обозначение

$$W'(k, l, \xi) = \frac{\partial W(k, l, \xi)}{\partial \xi}.$$

Осталось использовать граничные условия (72.2) и (72.3):

$$\begin{aligned} Pc + gQ &= 0 & \text{при} & \quad z = -S, \\ Q &= 0 & \text{при} & \quad z = -S - D. \end{aligned}$$

Подстановка из уравнений (73.5) и (73.6) приводит их к виду

$$\begin{aligned} A \left[W\left(k, l, \frac{S}{a}\right) + \frac{4\omega^2\alpha}{g} W'\left(k, l, \frac{S}{a}\right) \right] + \\ + B \left[W\left(-k, l, -\frac{S}{a}\right) - \frac{4\omega^2\alpha}{g} W'\left(-k, l, -\frac{S}{a}\right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (73.7)$$

$$AW\left[k, l, \frac{S+D}{a}\right] + BW\left[-k, l, -\frac{S+D}{a}\right] = 0. \quad (73.8)$$

Чтобы эта система уравнений имела нетривиальные решения для A и B , ее детерминант должен обращаться в нуль:

$$\begin{aligned} W\left(k, l, \frac{S+D}{a}\right) \left[W\left(-k, l, -\frac{S}{a}\right) - \right. \\ \left. - \frac{4\omega^2\alpha}{g} W'\left(-k, l, -\frac{S}{a}\right) \right] - W\left(-k, l, -\frac{S+D}{a}\right) \times \\ \times \left[W\left(k, l, \frac{S}{a}\right) + \frac{4\omega^2\alpha}{g} W'\left(k, l, \frac{S}{a}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (73.9)$$

Это уравнение получено как следствие граничных условий на поверхности и на дне. Поэтому оно аналогично уравнениям, изученным в главе X, и уравнениям (72.10) и (72.12), встретившимся выше. К сожалению, теория функций Витте-

кере недостаточно развита, чтобы оказалось возможным графическое исследование уравнения (73.9), аналогичное тому, которое было проведено с помощью рис. 26, 28 и 30. Следовательно, вместо этого нужно использовать приближенное вычисление, основанное на ВКБ-методе; это и будет сделано в следующем параграфе.

§ 74. Дальнейшее применение ВКБ-метода

Приближенное вычисление, упомянутое в конце предыдущего параграфа, основано на очень простой идее. В той части оси z , где график Q колеблется, ВКБ-аппроксимация такова:

$$Q = Q_0 \sin(S + \text{const}), \quad (74.1)$$

если x , y и t не изменяются. Следовательно, если S возрастает на π в некотором интервале оси z , Q будет иметь в этом интервале только один корень или узел. Поэтому

$$\frac{S(z'') - S(z')}{\pi} \quad (74.2)$$

представляет собой приближенное выражение для числа узлов в интервале $(z'; z'')$. Вспоминая, что

$$S(z) = \int \gamma dz \quad (74.3)$$

и обозначая через m число узлов в интервале (z', z'') , можно написать

$$\int_{z'}^{z''} \gamma dz = (m + \Delta) \pi, \quad (74.4)$$

где Δ — общая погрешность приближений (74.1) и (74.2) — снова может быть названа дефектом порядка. Существуют уточнения ВКБ-метода, дающие в некоторых случаях возможность вычисления Δ [5].

Акустические волновые типы в области II. Уравнение (74.4) будет сперва применено к собственным решениям, представляющим акустические волны. Мы уже видели, что для точек (x, ω) в области II n -й волновой тип имеет точно n узлов в интервале $-S - D \leq z \leq -S$. Пользуясь этим

обстоятельством и уравнением (68.2) для γ , запишем уравнение (74.4) таким образом:

$$\frac{1}{c} \left(1 - \frac{x^2 c^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right)^{1/2} \int_{-S-D}^{-S} (\omega^2 - N^2)^{1/2} dz = (n + \Delta) \pi. \quad (74.5)$$

Как было замечено выше, интеграл в левой части (74.4) может быть точно вычислен через элементарные функции. Однако, если $\omega \gg N$, как это обычно бывает, подынтегральное выражение приблизительно равно ω с относительной ошибкой порядка $(N/\omega)^2$. Если воспользоваться этим приближением, то уравнение (74.5) будет таким:

$$\frac{\omega D}{c} \left\{ 1 - \frac{x^2 c^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right\}^{1/2} = (n + \Delta) \pi.$$

При принятом нами условии ω намного больше Ω , так что вместо предыдущего соотношения можно написать

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - x^2 \right)^{1/2} = \frac{(n + \Delta) \pi}{D}. \quad (74.6)$$

При $\Delta = -1/2$ эта формула превращается в формулу „открытой органной трубы“, рассмотренную в § 55.

Этот результат очень поучителен, так как показывает, что дефект порядка не обязательно мал по сравнению с единицей. Поэтому для малых порядковых чисел важно придумать метод для вычисления Δ . Для больших порядковых чисел приближенная формула $\Delta = 0$ по-прежнему дает лишь малую относительную ошибку.

Земные океаны мелки, поэтому нет необходимости рассматривать более сложные формулы, которые получаются при более точном вычислении интеграла.

Внутренние гравитационные волновые типы области II. В области III $\omega < N_M$, и, следовательно, уравнение (74.5) должно быть заменено на

$$\frac{1}{c} \left(\frac{x^2 c^2}{\omega^2 - \Omega^2} - 1 \right)^{1/2} \int_{z'}^{z''} (N^2 - \omega^2)^{1/2} dz = (m + \Delta) \pi, \quad (74.7)$$

а интеграл должен быть вычислен без всяких упрощений. Кроме того, z' , z'' и m окажутся различными в трех случаях, изображенных на рис. 47, 48 и 49.

Случай $\omega > N_S$

В этом случае $z' = -z_1$, $z'' = -z_2$ и $m = |n| - 1$, что легко обнаружить, рассматривая рис. 47. Используя обозначения § 70, запишем уравнение (74.7) в виде

$$-\frac{N_M Z}{c} \left(\frac{x^2 c^2}{\omega^2 - Q^2} - 1 \right) \int_{1-b}^{1+b} \frac{(a^2 - 2u + u^2)^{1/2}}{u^2} du =$$

$$= (|n| - 1 + \Delta) \pi. \quad (74.8)$$

Интеграл может быть легко вычислен с помощью (70.6) и (70.7), и тогда (74.8) примет вид

$$\frac{N_M Z}{c} \frac{N_M - \omega}{\omega} = (|n| - 1 + \Delta) \left(\frac{x^2 c^2}{\omega^2 - Q^2} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (74.9)$$

Случай $N_S > \omega > N_B$

В этом случае из рис. 48 видно, что $z' = -z_1$, $z'' = -S$, $m = |n|$. Следовательно, верхний предел интегрирования в (74.8) должен быть заменен на

$$u_S = \frac{Z}{S}, \quad (74.10)$$

а правая часть — на $(|n| + \Delta) \pi$. Определяя φ_S и ψ_S с помощью соотношений

$$\frac{Z}{S} = 1 + b \sin \varphi_S = \frac{a^2}{1 + b \sin \psi_S}, \quad (74.11)$$

получим [ср. (70.7)]

$$\frac{N_M Z}{c} \left(\frac{\pi}{2} \frac{N_M - \omega}{\omega} - \varphi_S - \frac{\psi_S + b \cos \psi_S}{a} \right) =$$

$$= (|n| + \Delta) \pi \left(\frac{x^2 c^2}{\omega^2 - Q^2} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (74.12)$$

Случай $N_B > \omega$

В этом случае $z' = -S - D$, $z'' = -S$, $m = |n| + 1$; определение φ_B и ψ_B таково:

$$\frac{Z}{S + D} = 1 + b \sin \varphi_B = \frac{a^2}{1 + b \sin \psi_B}. \quad (74.13)$$

Тогда

$$\frac{N_M Z}{c} \left(\varphi_B + \frac{\psi_B + b \cos \psi_B}{a} - \varphi_S - \frac{\psi_S + b \cos \psi_S}{a} \right) = \\ = (|n| + 1 + \Delta) \pi \left(\frac{\pi^2 c^2}{\omega^2 - Q^2} - 1 \right)^{-1/4}. \quad (74.14)$$

Полученные результаты иллюстрируются численно рис. 51. При этом были взяты следующие значения параметров:

$$\frac{2\pi}{N_M} = 15 \text{ мин.}$$

$$\frac{2\pi}{N_S} = 30 \text{ мин.}$$

$$\frac{2\pi}{N_B} = 60 \text{ мин.}$$

$$\frac{2\pi}{Q} = 12 \text{ час.}$$

$$D = 4 \text{ км.}$$

Сопоставив эти значения с (67.1), найдем

$$Z = 133,5 \text{ м.}$$

$$S = 71,5 \text{ м.}$$

$$Z - S = 62 \text{ м.}$$

По сравнению с тем, что имеет место в земных океанах, взятый нами слой скачка расположен слишком мелко, а устойчи-

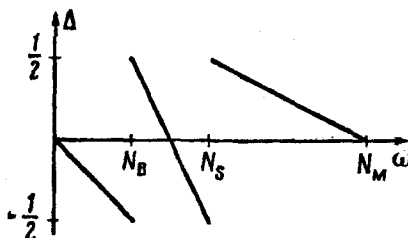


Рис. 50. Предполагаемое изменение дефекта порядка Δ с частотой ω .

чивость на дне слишком велика. Было бы желательным рассмотреть более реальные численные примеры, но такие расчеты до сих пор не произведены [1, 2].

Чтобы получить приемлемые результаты для меньших порядковых чисел, необходимо оценить дефекты порядка в уравнениях (74.9), (74.12) и (74.14). Вообще

говоря, эти оценки также следовало бы получить из строгих расчетов, которые до сих пор не сделаны. Вместо этого мы произвольно предположим, что Δ не зависит от n , а зависит

от ω так, как показано на рис. 50. Величина разрывов на графике выбрана с таким расчетом, чтобы уравнения (74.8) и (74.12) дали одно и то же значение κ для $\omega = N_S$, а уравнения (74.12) и (74.14) — одно и то же значение для $\omega = N_B$.

На рис. 51 показаны графики ω как функции от κ и λ , полученные описанным только что образом. Произвольность

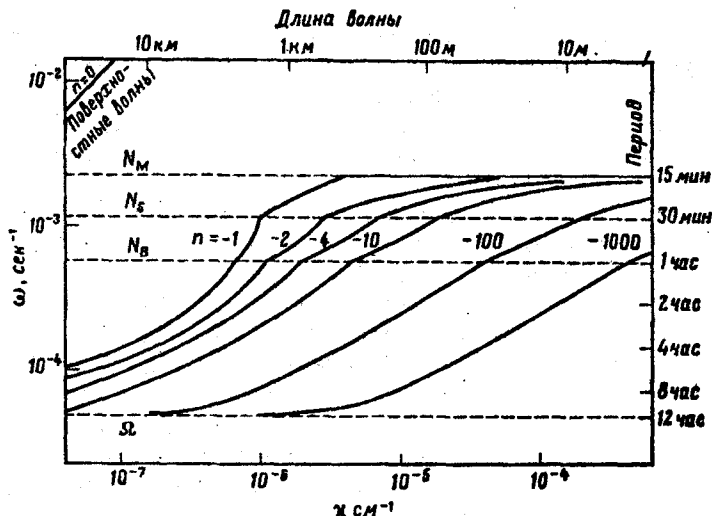


Рис. 51. Часть диагностической диаграммы для океана со слоем скачка и постоянной глубиной $D = 4$ км (ВКБ-аппроксимация).

предположения относительно дефекта порядка проявилась в скачках наклона кривых. Ошибка вследствие введенного допущения велика для кривой $n = -1$, однако относительная ошибка убывает с ростом $|n|$.

Этот рисунок следует сравнить с рис. 32; в обоих случаях использована одна и та же логарифмическая шкала, но начало координат смещено на один порядок вдоль оси длины волн. Разница между случаем постоянного N и случаем слоя скачка оказывается небольшой для периодов, близких к 12 час. Эта разница растет с убыванием периода. Заданной длине волны и порядковому числу на рис. 51 соответствует намного больший период, чем на рис. 32.

Следует заметить, что уравнение (58.3), на котором основан рис. 32, может быть выведено методами, использованными в настоящем параграфе, если в интеграле формулы (74.7) положить

$$N = \text{const}, \Delta = 0, z'' = -S, z' = -S - D.$$

§ 75. Двухслойная модель

Мы уже заметили, что уравнение (67.1) для изменения N с глубиной основано на не вполне реальных значениях величин. Слой скачка расположен слишком мелко и является слишком толстым, а устойчивость в глубоких слоях чрезмерно велика, если сравнивать все это со значениями, приведенными на рис. 10.

Можно перейти к другой крайности и рассматривать случай очень узкого и резкого скачка. Это проявится в соответствии с формулой (24.13) в очень большом градиенте плотности в слое скачка, что может быть приближенно представлено как скачок плотности. Таким образом, мы приходим к двухслойной модели океана, состоящего из двух жидкостей различных плотностей, причем более легкая находится над более тяжелой. Эта модель детально изучена (для случая $\Omega = 0$) Ламбом [4] и др. Аффорд [6] провел эмпирические измерения внутренних волн и интерпретировал их, исходя из такой модели.

Было получено, что эта модель дает лишь два собственных решения: для $n = 0$ и $n = -1$ в наших обозначениях. Более точно, собственные решения для $n \leq -2$ соответствуют одной и той же частоте $\omega = 0$ независимо от x . Это крайняя степень возрастания периода, вызванного существованием слоя скачка.

Слои скачка встречаются и в атмосфере, но они там носят менее постоянный характер, чем в океане. В метеорологии они часто называются температурными инверсиями. Стратосфера (рис. 14, точка А) также может рассматриваться как слой скачка, и тогда она окажется лучшим аналогом постоянного слоя скачка в океане. Однако изучение стратосферы осложняется факторами, которые отсутствуют в океане, и будет пока отложено.

В слоях температурных инверсий образуются внутренние волны, что сразу следует из предшествовавших рассуждений.

Эти волны часто можно наблюдать в характерных облачных образованиях, так называемых барашках. В иных местах температурная инверсия существует длительное время, и при этом могут наблюдаться и другие явления. Госсард и Мунк [3] изучили некоторые из таких явлений и показали, что облака, связанные с инверсией, перемещаются со скоростью внутренних волн, а не со скоростью ветра. Хотя такие облачные образования часто наблюдаются в различных географических районах, с количественной стороны они пока не изучены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fjeldstad J. E., *Interne Wellen*, Geofys. Publ., 10, No. 6 (1933) (Oslo).
2. Groen P., *Contribution to the theory of internal waves*, Koninklijk, Nederlands, Meteorologisch Instituut de Bilt, Medelingen en Verhandelingen B, No. 225.
3. Gossard E., Munk W. H., *On gravity waves in the atmosphere*, J. Meteorol., 11, 259 (1954).
4. Lamb H., *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 6th ed., 1932. (Русский перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, 1947.)
5. Morse P. M., Feschbach H., *Methods of Theoretical Physics*, New York, McGraw-Hill, 1953, pp. 528, 583, 870—880. (Русский перевод: Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, т. 1 и 2, ИЛ, М., 1958—1960.)
6. Ufford C. W., *Internal Waves in the Ocean*, Trans. Amer. Geophys. Union, 28, 79—99 (1947).
7. Whittaker E. T., Watson G. N., *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1927. (Русский перевод: Виттекер Э. Г. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, 2-е изд., ч. 1, Физматгиз, М., 1962.)

Глава XIII

ТЕРМОСФЕРА

§ 76. Введение

В предыдущей главе рассматривалось влияние на характер собственных решений, оказываемое наиболее замечательной особенностью океанов — наличием слоя скачка. Стратификация атмосферы отличается столькими характерными чертами, что очень трудно выделить какую-либо одну из них для аналогичного рассмотрения. Тем не менее существует одна особенность, которая сама по себе служит причиной отличия собственных решений для земной атмосферы от тех, которые были получены при изучении изотермической атмосферы в главах VIII и IX.

Этой характерной чертой атмосферы является наличие термосферы — высоко расположенной области, где температура растет, по-видимому, беспредельно. Теории атмосферы естественно распадаются на две группы. В одной из них рассматриваются атмосферы, в которых температура с ростом высоты асимптотически приближается к постоянной величине. Другая группа теорий рассматривает атмосферы, в которых температура неограниченно растет с высотой. Наиболее простым возможным примером теории первого типа является рассмотренная выше изотермическая модель. Наиболее простым примером теории второго типа окажется модель атмосферы с постоянным положительным градиентом температуры — атмосферы, не имеющие ни тропосферы, ни стратосферы, а одну лишь термосферу. Эта глава будет посвящена изучению такой „чистой“ термосферы.

Различие между термосферой и изотермической атмосферой наиболее просто устанавливается при обращении к диагностической χ , ω -диаграмме. Мы уже видели, что в случае изотермической атмосферы все точки некоторых областей диаграммы относились к собственным решениям (§ 42 и 51). Это несправедливо для океана. В этом последнем случае

второе граничное условие на свободной поверхности видоизменяло χ , ω -диаграмму таким образом, что собственным значениям отвечали лишь точки, лежащие на кривых различных волновых типов (гл. X и ^{VI}).

Существование термосферы также порождает второе граничное условие — „естественное“ граничное условие на бесконечности. Отражая энергию, распространяющуюся вверх, и препятствуя ее уходу в бесконечность, термосфера является, если можно так выразиться, „крышкой“ земной атмосферы. В изотермическом случае лучи представляют собой прямые линии, простирающиеся до бесконечности. Энергия, распространяющаяся вверх вдоль такого луча, в конце концов теряется. В противоположность этому в термосфере лучи, вообще говоря, изогнуты и, за исключением немногих, целиком заключены между двумя предельными высотами (см. рис. 52). Они не достигают бесконечных высот, и поэтому энергия, движущаяся вдоль такого луча, не может

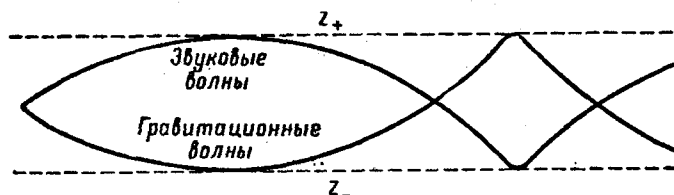


Рис. 52. Два луча в термосфере.

уйти, а задерживается в нижних слоях атмосферы. В этом и состоит фундаментальное физическое различие между модами атмосферы с термосферой и без нее.

Это обстоятельство очевидным образом проявляется в природе собственных решений. В случае атмосферы с термосферой они ограничены (§ 32 и 34). Они представляют собой движения с ограниченной энергией на единицу площади. В случае сферических поверхностей уровня у них конечна даже полная энергия. Для атмосферы же, не имеющей термосферы, большинство собственных решений представляет собой движения с бесконечной энергией.

Настоящая глава будет посвящена доказательству этих фактов. В первом параграфе будут рассмотрены лучи и их отражение благодаря наличию температурного градиента. После

этого будет строго выведено „естественное“ граничное условие. Непосредственные вычисления здесь слишком трудны, и поэтому кривые волновых типов будут получены с помощью ВКБ-аппроксимации, как в § 74.

Мы сделаем все это лишь в предположении постоянного положительного градиента температуры и для плоских поверхностей уровня. Более общий случай будет отложен до главы XV. Как и в § 8, приближение нулевого порядка для температуры примем следующим:

$$R\theta_0 = \frac{c^2}{\gamma} = \frac{gz}{\nu}, \quad \nu = \text{const} > 0, \quad (76.1)$$

так что нижняя, твердая граница атмосферы будет при $z = S > 0$ (здесь γ — отношение удельных теплоемкостей). Как и в предыдущей главе, будут рассматриваться все значения z , но физический смысл будут иметь лишь те из них, которые больше S .

Формулы § 25 для параметров N и Γ можно записать так:

$$\frac{N^2}{g} = \frac{1 + \frac{\nu(\gamma - 1)}{\gamma}}{z} = \frac{\gamma r^2}{z\nu}, \quad (76.2)$$

$$\Gamma = \frac{\frac{\gamma(2 - \gamma)}{\gamma} - \frac{1}{4}}{z} = \frac{s}{z}. \quad (76.3)$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей, а параметры ν , r и s — безразмерные постоянные. Другим удобным параметром является

$$m = \frac{\gamma r}{\nu}. \quad (76.4)$$

Если положить градиент температуры равным 10 град/км, то

$$\nu = 3,42, \quad s = 1,22, \quad r = 2,20, \quad m = 0,90,$$

т. е. все эти величины порядка единицы.

§ 77. Случай отсутствия вращения

Исследование начнем с теории простых волн, которые мы будем изучать с помощью теории лучей. Формальное вычисление лучей относительно просто, так как интеграл,

входящий в это вычисление, принадлежит к числу элементарных. Окажется, что лучи представляют собой трохоиды — кривые, имеющие простое геометрическое строение. Они могут быть порождены окружностью, катящейся по прямой: каждая точка внутри окружности описывает трохоиду. Задача сводится, таким образом, к нахождению радиуса окружности, прямой, по которой движется ее центр, и расстояния от описывающей точки до центра. Все это будет зависеть от частоты ω и горизонтального волнового числа κ .

Не столь простой, как формальные вычисления, является интерпретация получаемых формул. В частности, оказывается, что необходимо различать лучи, пересекающие и не пересекающие поверхность земли. Лучи, пересекающие поверхность, очевидно, отражаются от нее.

Формальное вычисление лучей. Уравнение (63.4) для $\Omega = 0$ таково:

$$\gamma^2 c^2 = \omega^2 - N^2 - \Gamma^2 c^2 + \frac{\kappa^2 c^2 (N^2 - \omega^2)}{\omega^2}. \quad (77.1)$$

Здесь и далее γ по-прежнему вертикальная компонента вектора распространения. Полагая

$$u = \ln \frac{\omega^2}{mgz} \quad (77.2)$$

и воспользовавшись формулами последнего параграфа, получим

$$\gamma^2 = -\frac{1}{z^2} (\kappa^2 z^2 - 2r\kappa z \operatorname{ch} u + r^2 + s^2). \quad (77.3)$$

Корни γ определяют высоты, где лучи становятся горизонтальными и из восходящих превращаются в нисходящие или наоборот. Корни даются формулой

$$\kappa z_{\pm} = r \operatorname{ch} u \pm a, \quad (77.4)$$

где

$$a^2 = r^2 \operatorname{sh}^2 u - s^2.$$

Для вычисления интегралов, которые мы встретим ниже, будет удобно перейти от переменного z к новому переменному θ по следующей формуле:

$$\kappa z = r \operatorname{ch} u + a \sin \theta, \quad (77.5)$$

так что уравнение (77.3) в окончательной форме будет

$$\gamma z = a \cos \theta. \quad (77.6)$$

Уравнение лучей [ср. (64.9)] записывается в виде

$$x(x - x_0) = \frac{x^2}{\omega^2} \int \frac{\omega^2 - N^2}{\gamma} dz = \int \frac{xz - r \exp(-u)}{\gamma z} d(xz). \quad (77.7)$$

Используя (77.5) и (77.6), мы легко вычислим этот интеграл:

$$x(x - x_0) = r\theta \operatorname{sh} u - a \cos \theta. \quad (77.8)$$

Формулы (77.5) и (77.8) представляют собой уравнения трохлоиды. Радиус катящейся окружности равен $b = r \operatorname{sh} u$, а центр ее движется по прямой $xz = r \operatorname{ch} u$. Точка, которая при этом описывает нужный луч, находится на расстоянии a от центра окружности и расположена внутри нее. Следует различать два случая: при $u > 0$ окружность катится по горизонтальной прямой, находящейся ниже ее центра, и мы увидим, что такие лучи соответствуют звуковым волнам; если же $u < 0$, то окружность катится по прямой, расположенной выше ее центра, и в этом случае мы имеем дело с лучами гравитационных волн. Типичный образец кривых каждого из этих семейств представлен на рис. 52. Следует заметить, что радиус окружности и высота, на которой находится ее центр, не зависят от знака u ; следовательно, каждый звуковой луч можно сопоставить с гравитационным лучом с тем же самым значением $|u|$. Такая пара лучей и показана на рис. 52.

Интерпретация результатов. Чтобы привести в соответствие полученные результаты с прежними, было бы желательным построить x, ω -диаграмму. В качестве подготовительного шага следует изучить уравнение (77.4), так как γ вещественно лишь в интервале (z_-, z_+) . На рис. 53 изображен график уравнения (77.4); он состоит из двух ветвей, каждая из которых асимптотически приближается к одной из кривых

$$xz = re^{\pm u}.$$

Для каждого значения $|u| > u$, на кривой имеются две точки; большая ордината равна xz_+ , меньшая есть xz_- .

Значение u_c дается формулой

$$\operatorname{sh} u_c = \frac{s}{r}. \quad (77.9)$$

При $|u| < u_c$ значения $xz_{\pm}$ комплексны и не существует значений z , для которых γ вещественно

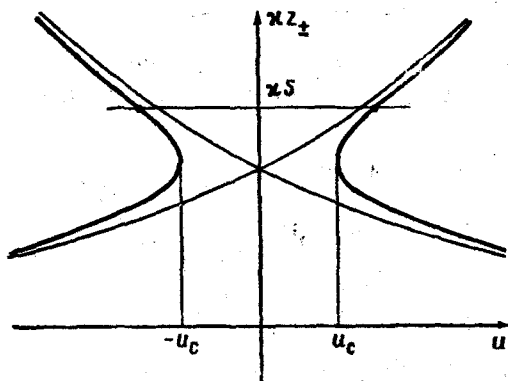


Рис. 53. График уравнения $xz_{\pm} = r \operatorname{ch} u \pm a$, где $a^2 = r^2 \operatorname{sh}^2 u - s^2$.

Эти результаты могут быть перенесены на x, ω -диаграмму. Из уравнения (77.2) следует, что $u = \pm u_c$ эквивалентно

$$\omega^2 = mgx e^{\pm u_c}. \quad (77.10)$$

а это есть уравнение двух парабол, показанных на рис. 54. Поэтому не существует лучей, соответствующих точкам (x, ω) , лежащим между этими двумя параболой.

Формально каждой точке над параболой $u = u_c$ и каждой точке над параболой $u = -u_c$ соответствует какой-то луч. Однако не все эти лучи физически реализуемы, так как они могут целиком лежать ниже уровня $z_+ = S$, следовательно, вне объема, фактически занятого жидкостью. Кроме того, лучи, для которых $z_- < S$ и $z_+ > S$, отражаются от поверхности Земли. Для исследования этих вопросов можно возвратиться к графику рис. 53 и рассмотреть две точки, ординаты которых равны xS . Если

$$xS \geq r \operatorname{ch} u + a = xz_+,$$

то $z_+ \leq S$ и луч физически невозможен. Если

$$\chi S \leq r \operatorname{ch} u - a = \chi z_-,$$

то $z_- \geq S$, луч целиком находится над поверхностью Земли и отражения не происходит. Перенесем уравнение

$$\chi S = r \operatorname{ch} u \pm a = \chi z_{\pm} \quad (77.11)$$

на χ, ω -диаграмму, чтобы получить дополнительные границы района физически возможных лучей и района, для которого

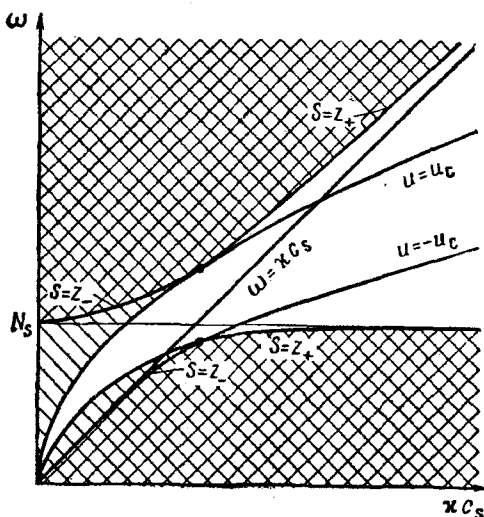


Рис. 54. Диагностическая диаграмма для термосферы (вращение отсутствует).

Точки один раз заштрихованной области представляют волны, лучи которых не достигают поверхности Земли. Точки дважды заштрихованной области представляют волны, лучи которых отражаются от поверхности Земли.

лучи отражаются от Земли. График уравнения (77.11) схематически показан на рис. 54.

На этой диаграмме значение скорости звука на уровне Земли дается выражением

$$c_s = \left(\frac{\gamma g S}{\nu} \right)^{1/2}.$$

Аналогично

$$\frac{N_S^2}{g} = \frac{\gamma r^2}{vS},$$

где N_S есть значение N на уровне Земли. Как N_S , так и c_S являются для нашей модели атмосферы предельными значениями. Можно видеть, что прямые $\omega = \chi c_S$ и $\omega = N_S$ — это асимптоты графика $S = z_+$. График уравнения $S = z_-$ пересекает ось ω в точках $\omega = N_S$ и $\omega = 0$. Наклон касательных в этих точках пересечения равен соответственно 0 и c_S .

Точки этой χ, ω -диаграммы, лежащие в незаштрихованной области, не соответствуют физически возможным лучам. Точки дважды заштрихованной области соответствуют лучам, отражающимся от поверхности Земли ($z = S$). Точки области, заштрихованной один раз, соответствуют лучам, целиком находящимся вверху и поэтому не отражающимся от земли.

Из сравнения с χ, ω -диаграммами предыдущих глав без дальнейших подробных вычислений становится ясно, что верхняя область, где $u > u_c$, соответствует акустическим волнам, а нижняя область, где $u < -u_c$, — гравитационным волнам. В предыдущих главах было также выяснено, что волнам Ламба не соответствуют никакие лучи; поэтому можно предвидеть, что значения (χ, ω) , соответствующие таким собственным решениям, будут лежать на кривой в незаштрихованной области рис. 54.

Возвращаясь к рис. 52, показывающему примеры лучей, нужно заметить, что оба луча заключены в одном и том же канале и на границах (при $z = z_{\pm}$) имеют горизонтальные касательные. Одна вершина на каждом из лучей имеет малый радиус кривизны, но не острое, как это было на рис. 40 для идеализированного океана. Причина этого усматривается в том, что для случая атмосферы $\Gamma \neq 0$ и $c \neq \text{const}$. При больших значениях $|u|$ имеем $\Gamma \rightarrow 0$, в то время как a и $r \operatorname{sh} u$ становятся почти равными. Вершины настолько обостряются, что их можно практически считать острыми. Лучи из трохойд превращаются в циклоиды — результат, хорошо известный из обычной теории атмосферной акустики. Причину, почему вторая вершина сохраняет конечный радиус кривизны, следует искать в переменности скорости звука, влияющей на преломление лучей и на расположение границ канала.

Наиболее яркое и важное различие между этими результатами и полученными ранее для изотермической атмосферы было отмечено во введении. В изотермической атмосфере лучи представляют собой прямые; если они не горизонтальны, то простираются до бесконечной высоты. Поскольку они являются линиями тока для потока энергии, энергия излучается в бесконечность или приходит из бесконечности. В рассматриваемом же случае лучи изогнуты и не достигают бесконечных высот. Поэтому энергия не излучается в бесконечность.

Пока что мы не вводили „естественных граничных условий“; это будет сделано в § 79 и 80. В § 86 и 87 изучение собственных решений будет дополнено. В следующем параграфе мы коснемся того, каким образом вращение вокруг вертикальной оси изменяет вид лучей.

§ 78. Вертикальная ось вращения

Если $\Omega \neq 0$, а ось вращения вертикальна, уравнению (77.1) соответствует следующее выражение:

$$\gamma^2 c^2 = \omega^2 - N^2 - \Gamma^2 c^2 + \frac{b^2 x^2 c^2 (N^2 - \omega^2)}{\omega^2}, \quad (78.1)$$

где использовано сокращенное обозначение

$$b^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (78.2)$$

Это выражение приводится к виду

$$\gamma^2 = -\frac{1}{z^2} (b^2 x^2 z^2 - 2rbxz \operatorname{ch} u + r^2 + s^2), \quad (78.3)$$

если u определяется так:

$$u = \ln \frac{\omega^2}{mgxb}. \quad (78.4)$$

Границы канала даются формулами

$$bxz_{\pm} = r \operatorname{ch} u \pm a, \quad (78.5)$$

где a имеет тот же смысл, что и ранее. Так как $b > 1$, расстояние $z_+ - z_-$ меньше, чем в отсутствие вращения. Уравнение лучей

$$x(x - x_0) = \frac{x^2 b^2}{\omega^2} \int \frac{\omega^2 - N^2}{\gamma} dz \quad (78.6)$$

или, если

$$bxz = r \operatorname{ch} u + a \sin \theta, \quad (78.7)$$

$$\gamma z = a \cos \theta, \quad (78.8)$$

то

$$\kappa(x - x_0) = r\theta \operatorname{ch} u - a \cos \theta. \quad (78.9)$$

Поэтому лучи представляют собой сжатые по вертикали трохонды; коэффициент сжатия равен $1:b$. Звуковые волны,

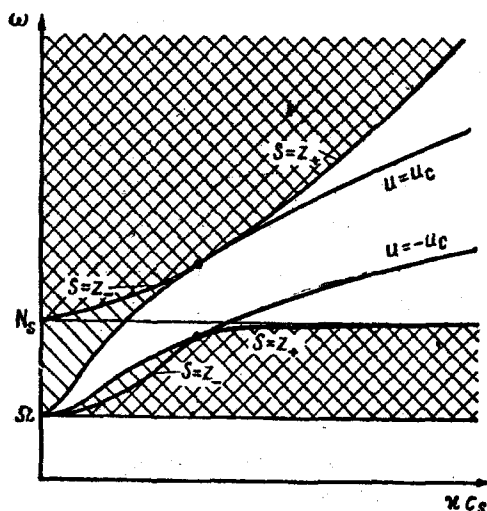


Рис. 55. Диагностическая диаграмма для термосферы при наличии вращения.

Обозначения такие же, как и на рис. 54.

для которых b очень близко к единице, не сильно изменяются под действием вращения. То же можно сказать о гравитационных волнах, для которых $\omega^2/\Omega \gg 1$. Но когда ω^2 приближается к Ω^2 , лучи становятся менее наклоненными к горизонтали и канал смещается в направлении меньших значений z . Интерпретация этих результатов и построение κ, ω -диаграммы проводится совершенно так же, как и в предыдущем параграфе. Единственная разница состоит в том, что параболы заменяются кривыми

$$\omega(\omega^2 - \Omega^2)^{1/2} = mgx e^{\pm u_c}. \quad (78.10)$$

Общий характер получаемой диаграммы показан на рис. 55.

До сих пор молчаливо предполагалось, что $\omega^2 > \Omega^2$. Если $\omega^2 < \Omega^2$, то следует изменить определения

$$b^2 = \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \quad (78.11)$$

и

$$\omega(\Omega^2 - \omega^2)^{1/2} = mgxe^u. \quad (78.12)$$

Так как левая часть уравнения (78.12) мала, u может быть лишь отрицательным. Эти определения приводят к соотношению

$$\gamma^2 z^2 = (bxz - r \operatorname{sh} u)^2 - (r^2 \operatorname{ch}^2 u + s^2), \quad (78.13)$$

так что границы канала даются формулами

$$bxz_{\pm} = -r \operatorname{sh} u \pm a, \quad (78.14)$$

$$a^2 = r^2 \operatorname{ch}^2 u + s^2. \quad (78.15)$$

Можно проверить, что $z_- < 0$ и поэтому не имеет физического смысла. Значения z для точек канала больше, чем z_+ , которое представляет собой в этом случае большое положительное число

$$z_+ \gg \frac{2mrg}{\Omega^2} = mr \cdot 10^6 \text{ км.}$$

Лучи приходят из бесконечности, поворачивают в точке z_+ и возвращаются в бесконечность. Они лежат целиком в области докритической устойчивости $N < \Omega$. Очень сомнительно, чтобы такие лучи имели какое-нибудь значение для земной атмосферы, но с формальной точки зрения они все же составляют исключения, если вспомнить сказанное во введении.

§ 79. Решение остаточных уравнений

Остаточные уравнения

$$\begin{aligned} c \left(\frac{d}{dz} + \Gamma \right) P &= (N^2 - \omega^2) Q, \\ c \left(\frac{d}{dz} - \Gamma \right) Q &= \left(1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right) P \end{aligned} \quad (79.1)$$

могут быть решены строго, если N и Γ имеют вид (76.2) и (76.3). Общая идея, лежащая в основе последующих вычислений, объяснена в [2] и § 49, 50.

Возвращаясь к обозначениям предыдущих параграфов, запишем уравнения (79.1) в виде,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + \frac{s}{z}\right)P &= \left(\frac{g\gamma r}{vz} - \omega^2\right)\left(\frac{v}{g\gamma z}\right)^{1/2}Q, \\ \left(\frac{d}{dz} - \frac{s}{z}\right)Q &= \left(1 - \frac{g\gamma z}{va}\right)\left(\frac{v}{g\gamma z}\right)^{1/2}P. \end{aligned} \quad (79.2)$$

Замена переменных

$$Q = Q_1 N^{-1/2}, \quad P = P_1 N^{1/2} \quad (79.3)$$

преобразует (79.2) в

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + \frac{s - \frac{1}{4}}{z}\right)P_1 &= \left(\frac{r}{z} - \frac{\omega^2}{gm}\right)Q_1, \\ \left(\frac{d}{dz} - \frac{s - \frac{1}{4}}{z}\right)Q_1 &= \left(\frac{r}{z} - \frac{mg}{a^2}\right)P_1, \end{aligned} \quad (79.4)$$

где

$$a^2 = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\gamma^2}. \quad (79.5)$$

При обозначениях, принятых во введении, имеем

$$\left(s - \frac{1}{4}\right)^2 + r^2 = \frac{1}{4}(\nu + 1)^2. \quad (79.6)$$

Эти формулы наводят на мысль ввести новый параметр ψ так:

$$\begin{aligned} s - \frac{1}{4} &= \frac{1}{2}(\nu + 1) \cos \psi, \\ r &= \frac{1}{2}(\nu + 1) \sin \psi. \end{aligned} \quad (79.7)$$

Если ввести безразмерную переменную

$$\xi = \frac{2\omega z}{a}, \quad (79.8)$$

то уравнения (79.4) преобразуются в следующие:

$$\begin{aligned} 2 \frac{dP_1}{d\xi} + \frac{\nu + 1}{\xi} (P_1 \cos \psi - Q_1 \sin \psi) &= -Q_1 e^u, \\ 2 \frac{dQ_1}{d\xi} - \frac{\nu + 1}{\xi} (P_1 \sin \psi + Q_1 \cos \psi) &= -P_1 e^{-u}, \end{aligned} \quad (79.9)$$

где u определяется формулой (78.4). Следует заметить, что ξ и u вещественны, когда $\omega^2 > \Omega^2$, и комплексны, когда $\omega^2 < \Omega^2$. Случай $\omega^2 = \Omega^2$ является особым и требует отдельного исследования.

Вторая замена зависимых переменных

$$\begin{aligned} P_1 &= f \cos \frac{1}{2} \psi + g \sin \frac{1}{2} \psi, \\ Q_1 &= -f \sin \frac{1}{2} \psi + g \cos \frac{1}{2} \psi \end{aligned} \quad (79.10)$$

приводит уравнения (79.9) к виду

$$\begin{aligned} 2 \frac{df}{d\xi} + \frac{\nu+1}{\xi} f &= af - b_1 g, \\ 2 \frac{dg}{d\xi} - \frac{\nu+1}{\xi} g &= -b_2 f - ag, \end{aligned} \quad (79.11)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{ch} u \sin \psi, \\ b_1 &= \operatorname{ch} u \cos \psi + \operatorname{sh} u, \\ b_2 &= \operatorname{ch} u \cos \psi - \operatorname{sh} u \end{aligned} \quad (79.12)$$

и

$$a^2 + b_1 b_2 = 1. \quad (79.13)$$

Форма уравнений (79.11) позволяет разделить переменные перекрестным дифференцированием. Результатом будет

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\xi^2} - f \left[\frac{(\nu+1)(\nu+3)}{4\xi^2} - \frac{a(\nu+1)}{2\xi} + \frac{1}{4} \right] &= 0, \\ \frac{d^2 g}{d\xi^2} - g \left[\frac{(\nu-1)(\nu+1)}{4\xi^2} - \frac{a(\nu+1)}{2\xi} + \frac{1}{4} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (79.14)$$

Оба эти уравнения имеют форму уравнений Виттекера (73.3); уравнения (79.14) и (73.3) отождествляются при

$$k = \frac{1}{2} a (\nu + 1) \quad (79.15)$$

и

$$l = \frac{1}{2} \nu + 1 \text{ для } f, \quad l = \frac{1}{2} \nu \text{ для } g. \quad (79.16)$$

Используя функции Виттекера, получим общее решение (79.13)

$$\begin{aligned} f &= AW\left(k, \frac{1}{2} \nu + 1, \xi\right) + BW\left(-k, \frac{1}{2} \nu + 1, -\xi\right), \\ g &= CW\left(k, \frac{1}{2} \nu, \xi\right) + DW\left(-k, \frac{1}{2} \nu, -\xi\right), \end{aligned} \quad (79.17)$$

где A , B , C и D — произвольные постоянные. Чтобы эти две функции удовлетворяли также уравнениям (79.11), нужно наложить на четыре постоянных следующие условия:

$$\begin{aligned}(a+1)A &= b_1 C, \\ b_2 B &= (a+1)D,\end{aligned}\tag{79.18}$$

которые можно вывести из рекуррентных формул для функций Виттекера [1, 3].

Таким образом, в наиболее общем решении уравнений (79.11) содержатся две произвольные постоянные. Их выбор ограничивается далее требованием регулярности собственных решений на бесконечности (см. § 32). Как известно [1], для больших значений ξ

$$W(k, l, \xi) = \xi^k e^{-\frac{1}{2}\xi} \left[1 + \frac{l^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2}{\xi} + \dots \right], \tag{79.19}$$

причем ряд сходится асимптотически. При $\omega^2 > \Omega^2$ все величины вещественны; следовательно, при больших z функции f и g неограниченно возрастают, если только B и D не равны нулю. С другой стороны, при $\omega^2 < \Omega^2$ переменная ξ чисто мнимая; при этом f и g остаются конечными, лишь если $A = C = 0$. Другими словами, собственное решение содержит только одну мультипликативную произвольную постоянную.

Смысл формулы (79.19) легче увидеть, если ее переписать для амплитуд давления и вертикального смещения. Возвращаясь к исходным величинам, найдем

$$\begin{aligned}p_1 &\sim z^{k - \frac{1}{2}(v+1)} e^{-\omega z/\alpha}, \\ h_1 &\sim z^{k + \frac{1}{2}v} e^{-\omega z/\alpha}.\end{aligned}\tag{79.20}$$

Поэтому обе амплитуды стремятся к нулю на больших высотах.

Осталось лишь наложить граничное условие на твердой поверхности

$$Q = 0 \quad \text{при} \quad z = S, \quad \text{или} \quad \xi = \xi_S. \tag{79.21}$$

В случае $\omega^2 > \Omega^2$ в силу (79.10) это условие принимает вид

$$b_1 W\left(k, \frac{1}{2}v + 1, \xi_S\right) \sin \frac{1}{2}\psi = (a+1) W\left(k, \frac{1}{2}v, \xi_S\right) \cos \frac{1}{2}\psi. \tag{79.22}$$

Для этого уравнения не существует аналога в случае изотермической атмосферы. Оно ближе к уравнениям (54.9) и (54.10) для океанов, которые были условием многократного отражения волн от дна и поверхности. Формула (79.22) имеет то же происхождение — это условие отражения волн от границ канала (§ 77, 78).

Как и в случае океанов, численное решение уравнения (79.22) должно быть отложено до дальнейшего прогресса в теории функций Виттекера. Однако можно предвидеть, что собственные решения для такой модели атмосферы будут подразделяться на группы — волновые типы, характеризующиеся порядковыми числами совершенно так же, как это было для случая океана. Как отмечалось во введении, это и есть основное различие между изотермической атмосферой и той, которую мы рассматриваем сейчас.

§ 80. ВКБ-аппроксимация

Как и в главе XI, вычислительные трудности, связанные с уравнением (79.22), заставляют прибегнуть к ВКБ-аппроксимации, если мы хотим ввести порядковые числа. И здесь вычисления будут основываться на уравнении (74.4)

$$\int_{z'}^{z''} \gamma dz = (m + \Delta) \pi. \quad (80.1)$$

В случае тех волновых типов, для которых соответствующие им лучи не отражаются, возьмем $z' = z_-$, $z'' = z_+$ (ср. (77.4)) и $m = |n|$, где n — порядковое число. Для простоты используем приближение $\Delta = 0$ и вычисления будем проводить лишь для случая отсутствия вращения. Тогда уравнением, связывающим χ , ω и n , будет

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{(-x^2 z^2 + 2rxz \operatorname{ch} u - r^2 - s^2)^{1/2}}{z} dz = |n| \pi. \quad (80.2)$$

Это элементарный интеграл, вычисление которого дает

$$\pi [r \operatorname{ch} u - (r^2 + s^2)^{1/2}] = |n| \pi. \quad (80.3)$$

Для каждого значения $|n|$ это уравнение имеет два корня: u_n и $-u_n$. Уравнение двух кривых волновых типов на χ , ω

диаграмме таково:

$$\omega^2 = mgx e^{\pm n x}. \quad (80.4)$$

Кривые являются параболами до тех пор, пока они остаются в дважды заштрихованной области рис. 55. Это показано для нескольких значений n на рис. 56.

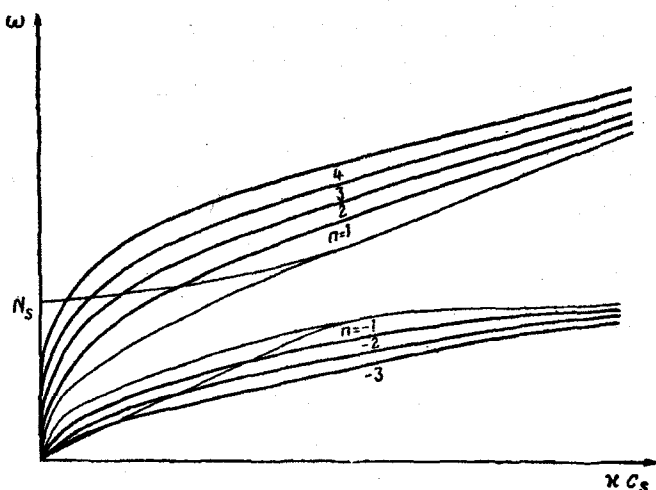


Рис. 56. Диагностическая диаграмма для термосферы, показывающая кривые волновых типов (вращение отсутствует).

Для тех же волновых типов, лучи которых отражаются от поверхности земли, уравнение (80.2) примет вид

$$\int_s^{z_+} \frac{(\dots)^{1/2}}{z} dz = |n| \pi. \quad (80.5)$$

Интеграл по-прежнему элементарный, но приводит к более сложной формуле

$$\begin{aligned} & -a \cos \theta_s + b \left(\frac{\pi}{2} - \theta_s \right) - 2 (r^2 + s^2)^{1/2} \arctg \left(\frac{b+a}{b-a} \right)^{1/2} - \\ & - \arctg \frac{a + b \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_s}{(r^2 + s^2)^{1/2}} = |n| \pi, \quad (80.6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b &= r \operatorname{ch} u, \\ \chi S &= b - a \sin \theta_s, \end{aligned} \quad (80.7)$$

а остальные величины имеют прежнее значение. Графики уравнения (80.6) для различных значений n уже не параболы. Их общий вид изображен на рис. 56.

Для достаточно малых значений χ точки всех кривых волновых типов соответствуют лучам, не отражающимся от Земли. В этой своей части кривая представляет собой параболу, выраженную уравнением (80.4). Для больших значений χ точки кривых соответствуют лучам, отражающимся от Земли (уравнение (80.6)). Самое замечательное отличие полученной сейчас χ, ω -диаграммы от диаграммы, полученной в свое время для случая океана, состоит в том, что теперь кривые волновых типов, как акустические, так и гравитационные, исходят из точки $\chi = 0, \omega = 0$. Причина этого в неограниченности c при $z \rightarrow +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Magnus W., Oberhettinger F., Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, New York, Chelsea, 1949.
2. Schlesinger L., Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Berlin, de Gruyter, 1922.
3. Whittaker E. T., Watson G. N., A Course of Modern Analysis, Cambridge Univ. Press, 1927. (Русский перевод: Э. Г. Виттекер и Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, 2-е изд., ч. I, Физматгиз, М., 1962.)

Глава XIV

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОСТАТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 81. Введение

В гл. VII было показано, что во всех случаях зависимость собственных решений от высоты в существенных чертах одна и та же. Уравнения, о которых идет речь, имеют вид

$$\begin{aligned}c \left(\frac{dP}{dz} + \Gamma P \right) &= (N^2 - \nu) Q, \\c \left(\frac{dQ}{dz} - \Gamma Q \right) &= \left(1 - \frac{c^2}{\mu} \right) P.\end{aligned}\tag{81.1}$$

Если поверхности уровня плоские или сферические и отсутствует вращение, то

$$\nu = \omega^2, \quad \mu = \frac{\omega^2}{\chi^2}.\tag{81.2}$$

При плоских поверхностях уровня и традиционном упрощении $\Omega_H = 0$

$$\nu = \omega^2, \quad \mu = \frac{\omega^2 - \Omega_V^2}{\chi^2}.\tag{81.3}$$

Если поверхности уровня — сферы, то при том же традиционном упрощении мы снова имеем формулы (81.2), но при условии, что χ^2 определяется как собственное число уравнения теории приливов Лапласа (39.12).

Частные случаи уравнений (81.1) были рассмотрены в предыдущих главах. Мы видели, что даже достаточно простые физические предположения относительно стратификации приводят к далеко не легким математическим задачам. Однако в § 72 был развит достаточно мощный метод для рассмотрения случая $\Gamma = 0$, $c = \text{const}$. Конечно, этот метод не был количественным, но он приводил к важным качественным результатам. Настоящая глава будет посвящена обобщению этого метода.

В § 72 мы начали с исключения P из первого уравнения, что приводило к уравнению (72.4), имевшему второй порядок по Q . Если попытаться применить эту процедуру в более общих случаях, то мы получим слишком сложные уравнения для Q . Кроме того, с математической точки зрения случай, рассмотренный в § 72, нужно считать совершенно исключительным. Поэтому мы попытаемся непосредственно изучать уравнения (81.1).

Метод, использованный в § 72, основывался на немногих общих теоремах, принадлежащих Штурму и Лиувиллю. Мы не давали формальных доказательств, взамен чего внимание читателя направлялось на их геометрическое содержание, дающее возможность наглядно убедиться в справедливости этих теорем. Формальное доказательство можно найти в разных книгах [1].

Наш план будет таков: сперва привести уравнения (81.1) к стандартному, или каноническому, виду, затем доказать несколько общих теорем, относящихся к таким дифференциальным уравнениям, и, наконец, применить эти теоремы к отдельным случаям. В частности, будет показано, что эти теоремы приносят существенно новые сведения, относящиеся к задаче о термосфере главы XIII.

§ 82. Каноническая форма остаточных уравнений

Канонические переменные. Вместо переменных P и Q будет удобно использовать

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= (P/\rho_S g) \exp \left\{ + \int \Gamma dz \right\}, \\ \mathcal{Q} &= Q \exp \left\{ - \int \Gamma dz \right\},\end{aligned}\tag{82.1}$$

где ρ_S — постоянная, имеющая размерность плотности; ее удобно отождествлять с плотностью воздуха или воды у поверхности. $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$ измеряются тогда в сантиметрах.

Переменные $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ можно также сопоставить с переменными p_1 и η_1 в системе CGS, использованными в главах II и III. В § 22 P и Q были определены как

$$P = p_1 (\rho_0 c_0)^{-1/2}, \quad Q = \frac{\eta_1}{\eta_0} (\rho_0 c_0)^{1/2},\tag{82.2}$$

а в § 23 было

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{(\rho_0 c_0)'}{(\rho_0 c_0)} + \frac{g}{c_0^2}. \quad (82.3)$$

Отсюда легко следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (p_1/\rho_s g) \exp(+\delta), \\ \mathcal{Q} &= (\eta_1/\eta_0') \exp(-\delta), \end{aligned} \quad (82.4)$$

где

$$\delta = g \int \frac{dz}{c_0^2}. \quad (82.5)$$

В § 9 было показано, что вертикальное перемещение жидкости равно

$$h_1 = -\frac{\eta_1}{\eta_0}, \quad (82.6)$$

так что

$$\mathcal{Q} = -h_1 \exp(-\delta). \quad (82.7)$$

Канонические уравнения. Подставляя вместо P и Q их выражения через $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, приведем остаточные уравнения (81.1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{Q}}{dz} &= A(z, \mu) \mathcal{P}, \\ \frac{d\mathcal{P}}{dz} &= -B(z, \nu) \mathcal{Q}, \end{aligned} \quad (82.8)$$

где

$$A = a \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\mu} \right), \quad (82.9)$$

$$B = \frac{1}{a} (\nu - N^2), \quad (82.10)$$

$$a = (\rho_s g / \rho_0) \exp(-2\delta). \quad (82.11)$$

Коэффициент a положителен для всех значений z . Как и в § 72, где нас большей частью интересовал знак „выпуклости“, для нас будут важны знаки A и B , не зависящие от a . Функция

$$H = \frac{1}{2} (A\mathcal{P}^2 + B\mathcal{Q}^2) \quad (82.12)$$

известна как гамильтониан системы уравнений (82.8); эта система может быть также записана в виде

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dz} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}}, \quad \frac{d\mathcal{P}}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial \mathcal{Q}}. \quad (82.13)$$

Постоянные коэффициенты. Если коэффициенты A и B не зависят от z , уравнения (82.8) или (82.13) становятся очень простыми. Исследование этого случая позволяет получить представление о тех общих теоремах, которые встретятся ниже. Дифференцируя (82.12), получим

$$\frac{dH}{dz} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{G}} \frac{d\mathcal{G}}{dz} + \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}} \frac{d\mathcal{P}}{dz},$$

так как $dA/dz = dB/dz = 0$. Сравнивая это с уравнением (82.11), можно видеть, что

$$\frac{dH}{dz} = 0$$

или

$$A\mathcal{P}^2 + B\mathcal{G}^2 = \text{const.} \quad (82.14)$$

Это уравнение может быть изображено на $\mathcal{P}$, $\mathcal{G}$ -диаграмме; если A и B имеют одинаковые знаки, то график этого уравнения есть эллипс, в противном случае это гипербола. Ведущая роль знаков A и B выясняется, таким образом, даже в этом простейшем случае.

Фазовая диаграмма. $\mathcal{P}$, $\mathcal{G}$ -диаграмма окажется очень полезной в последующих параграфах. Эта диаграмма хорошо известна как фазовая диаграмма или фазовое пространство. Если вспомнить, что $\mathcal{G}$ — это энтропия, а $\mathcal{P}$ — давление (в соответствующих единицах), то легко видеть, что фазовая диаграмма — это в сущности то же самое, что диаграмма энтропии — давление из термодинамики (§ 7). Частный случай фазовой диаграммы уже встречался в § 47, рис. 19.

В одномерной механике изучаются уравнения, имеющие канонический вид, подобный (82.13). Однако независимым переменным там является не высота, а время. Поэтому там можно представлять себе $\mathcal{P}$ и $\mathcal{G}$ как координаты точки, движущейся в фазовом пространстве и описывающей кривую. Удобно использовать эту терминологию и в настоящем случае; можно оправдать это, считая, что z растет линейно с течением какого-то фиктивного времени. Тогда мы приходим к идее движущейся фазовой точки с прямоугольными координатами $\mathcal{P}$ и $\mathcal{G}$, описывающей некоторую траекторию на фазовой диаграмме.

§ 83. Общие теоремы, относящиеся к фазовым траекториям

Мы будем предполагать в этом параграфе μ и ν постоянными; при этом будет изучаться зависимость $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ от z . Величины A и B должны быть непрерывными и ограниченными функциями z для всех рассматриваемых значений этого переменного. Теорему I мы здесь доказывать не станем; методы для построения доказательства можно найти во многих работах [2].

Теорема I

Фазовые траектории — непрерывные кривые. Если $(\mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_0)$ — произвольная точка фазовой диаграммы, отличная от начала координат, то существует одна и только одна фазовая траектория, проходящая через $(\mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_0)$ при заданном z_0 . Ни одна фазовая траектория не проходит через начало координат при конечном значении z , но некоторые траектории могут приближаться к началу координат при $z \rightarrow \pm \infty$.

Из канонических уравнений вытекает, что если z есть корень $\mathcal{P}$, то это же значение z является корнем $d\mathcal{Q}/dz$, и если z — корень $\mathcal{Q}$, то он также и корень $d\mathcal{P}/dz$. Это может быть сформулировано как

Теорема II

Все траектории пересекают координатные оси под прямыми углами.

Аналогично, если z — корень A , то это же значение z является и корнем $d\mathcal{Q}/dz$; если z — корень B , то $d\mathcal{P}/dz = 0$. Следовательно, справедлива

Теорема III

Если z — корень A (или B), то фазовая траектория имеет для этого значения z горизонтальную (или вертикальную) касательную.

Кроме того, при конечных значениях z касательная к фазовой траектории может быть горизонтальной или вертикальной лишь при условиях этих теорем.

Наиболее важным выводом является

Теорема Лиувилля

Если $\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2$ — два решения канонических уравнений, то детерминант

$$L_{12} = \begin{vmatrix} \mathcal{P}_1 & \mathcal{Q}_1 \\ \mathcal{P}_2 & \mathcal{Q}_2 \end{vmatrix}$$

не зависит от z .

В самом деле,

$$\frac{dL_{12}}{dz} = \frac{d\mathcal{P}_1}{dz} \mathcal{Q}_2 + \mathcal{P}_1 \frac{d\mathcal{Q}_2}{dz} - \frac{d\mathcal{P}_2}{dz} \mathcal{Q}_1 - \mathcal{P}_2 \frac{d\mathcal{Q}_1}{dz}.$$

Подставляя выражения для производных из уравнений (82.8), получим

$$\frac{dL_{12}}{dz} = -B\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2 + A\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 + B\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_1 - A\mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = 0. \quad (83.1)$$

Важным следствием является

Теорема IV

Если $\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2$ и $\mathcal{P}_3, \mathcal{Q}_3$ — решения канонических уравнений и $L_{12} \neq 0$, то существуют две постоянные α и β , такие, что

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3 &= \alpha\mathcal{P}_1 + \beta\mathcal{P}_2, \\ \mathcal{Q}_3 &= \alpha\mathcal{Q}_1 + \beta\mathcal{Q}_2. \end{aligned} \quad (83.2)$$

Это доказывается решением уравнений (83.2) относительно α и β , что дает

$$\alpha = \frac{L_{23}}{L_{12}}, \quad \beta = \frac{L_{31}}{L_{12}}.$$

По теореме Лиувилля α и β оказываются постоянными.

Теорема Лиувилля имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть P_i есть точка $[\mathcal{P}_i(z), \mathcal{Q}_i(z)]$; рассмотрим одновременные положения P_1 и P_2 . Тогда L_{12} есть удвоенная площадь заштрихованного треугольника на рис. 57, и, когда точки движутся по своим траекториям, эта площадь остается постоянной. Если $L_{12} > 0$, то контур OP_1P_2O обходится в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки; если $L_{12} < 0$, то обход контура происходит в отрицательном направлении. Теорема IV устанавливает, между

прочим, что траектория точки P_3 на том же рис. 57, указывающей конец вектора, полученного при сложении движущихся векторов OP_1 и OP_2 , также является фазовой траекторией. Здесь мы имеем аналогию векторным диаграммам, используемым в электротехнике.

До сих пор наши теоремы не учитывали знаков A и B ; последние войдут в наши выкладки, если ввести полярные координаты. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= R \cos \vartheta, & Q &= R \sin \vartheta, \\ R &\geq 0; \end{aligned} \quad (83.3)$$

тогда канонические уравнения примут вид

$$\frac{d\vartheta}{dz} = A \cos^2 \vartheta + B \sin^2 \vartheta, \quad (83.4)$$

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dz} = (A - B) \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (83.5)$$

Важное значение корней A и B в рассматриваемых вопросах уже проявилось в теоремах II и III.

Эти корни делят ось z , а вместе с ней и фазовые траектории на отрезки четырех типов, которые мы будем обозначать $(++)$, $(--)$, $(+-)$ и $(-+)$, что расшифровывается следующим образом:

$$(++) : A > 0, \quad B > 0;$$

$$(--) : A < 0, \quad B < 0;$$

$$(+ -) : A > 0; \quad B < 0;$$

$$(- +) : A < 0, \quad B > 0.$$

Эти символы будем называть *сигнатурами отрезков*. Из этих обозначений и формул (83.4) непосредственно вытекают две теоремы:

Теорема V

На отрезках типа $(++)$ угловая скорость фазовой точки положительна, на $(--)$ -отрезках она отрицательна.

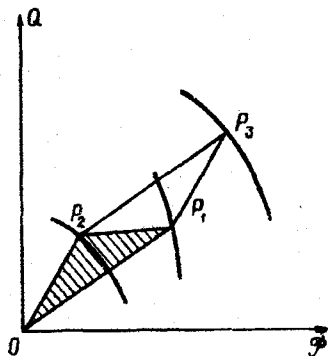


Рис. 57. Иллюстрация теоремы Лиувилля.

Теорема VI

На отрезках типа $(+ -)$ фазовая точка движется в направлении от начала координат в первой и третьей четвертях диаграммы и в направлении к началу координат во второй и четвертой четвертях. На отрезках типа $(- +)$ направление движения обратное.

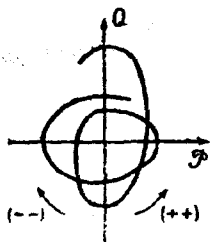


Рис. 58. Примерный вид фазовой траектории на $(+ +)$ - или $(- -)$ -отрезках.

Направление движения фазовой точки в этих двух случаях показано стрелками.

Эти теоремы иллюстрируются рис. 58 и 59, к которым мы будем в дальнейшем часто обращаться. Теоремы имеют многочисленные следствия, как, например: на отрезках типов $(+ -)$ или $(- +)$ корень может иметь самое большое одна из функций $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$; если одна из них имеет корень, то другая имеет экстремум. На отрезках типов $(+ +)$ или $(- -)$ обе функции, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, могут иметь корни и их экстремумы разделены корнями. Эти результаты аналогичны полученным в § 72. Функции $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ колеблются на отрезках типов $(+ +)$ и $(- -)$ и не колеблются на отрезках типов $(+ -)$ и $(- +)$. Но в то время как колебательный или неколебательный характер решений в § 72 определялся знаком „выпуклости“, здесь нужно учитывать знаки обеих функций A и B .

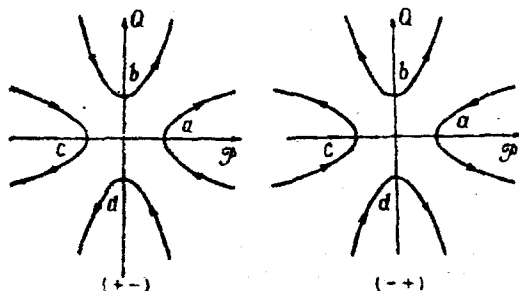


Рис. 59. Примерный вид фазовых траекторий на $(+ -)$ - и $(- +)$ -отрезках.

Если один из отрезков простирается до бесконечности, могут появиться некоторые новые явления. Если это отрезок колебательного типа, $(+ +)$ или $(- -)$, угловая скорость

может обращаться в нуль лишь при условии

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A, B \neq 0.$$

В противном случае фазовая траектория пересекает каждую ось бесконечное число раз, а логарифм расстояния от ее точек до начала координат может неограниченно расти с ростом z . Если этот логарифм стремится к отрицательной бесконечности, траектория будет спирально приближаться к началу координат, не доходя, однако, до этой точки. Если логарифм стремится к положительной бесконечности, то фазовая точка уходит в бесконечность по спиральной траектории. Если A и B приближаются к конечным пределам, траектория асимптотически превращается в эллипс. Существуют и другие возможности, и каждая из них должна быть исследована в деталях.

Если неограниченный отрезок принадлежит к одному из неколебательных типов, $(+ -)$ или $(- +)$, и простирается до $z = +\infty$, то для нас будет важен угол, определяемый формулой

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta_a = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{A}{B} \right). \quad (83.6)$$

Асимптотическое поведение фазовой траектории показано на рис. 60, где пунктирные прямые составляют с осью $\mathcal{P}$ углы $\pm \vartheta_a$. На $(+ -)$ -отрезках фазовая точка будет удаляться от начала координат в направлении ϑ_a , если она находится в первой или в третьей четверти. Во второй же и в четвертой четвертях она будет приближаться к началу координат по направлению $-\vartheta_a$, но при конечных значениях z никогда не достигнет начала координат. Для случая $(- +)$ -отрезков картина обратная. Если отрезок простирается не до $z = +\infty$, а до $z = -\infty$, то направления стрелок следует сменить на противоположные.

Способ, с помощью которого различные отрезки фазовой траектории соединяются между собой, определяется теоремой III. Чтобы получить возможность отмечать на чертеже

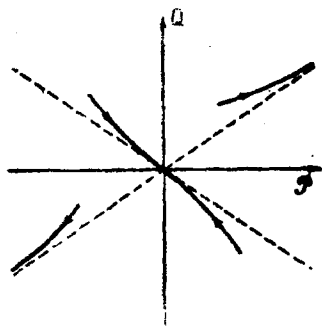


Рис. 60. Примерное асимптотическое поведение фазовых траекторий на $(+ -)$ - или $(- +)$ -отрезках.

последовательности отрезков, разделенных корнями A и B , удобно ввести обозначения $(++)$ $(-+)$ $(--)$ и т. д. В этом примере последовательность отрезков такова: A и B вначале положительны, а затем, с возрастанием z , последовательно меняют знаки. Аналогично $(++)$ $(-+)$ $(++)$

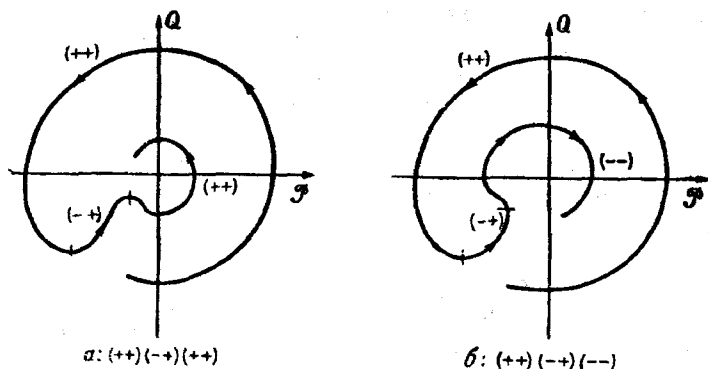


Рис. 61. Примерный вид фазовых траекторий со сложными сигнатурами.

означает, что A имеет два корня, B — ни одного. Возможные в этих случаях фазовые траектории показаны на рис. 61. Читателю не составит труда нарисовать траектории и в других случаях.

§ 84. Теорема сравнения Штурма

Формула Штурма. В предыдущем параграфе были установлены некоторые геометрические свойства фазовых траекторий. Можно получить дополнительные свойства, сравнивая две различные системы канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_1}{dz} &= -B_1\mathcal{G}_1, & \frac{d\mathcal{G}_1}{dz} &= A_1\mathcal{P}_1; \\ \frac{d\mathcal{P}_2}{dz} &= -B_2\mathcal{G}_2, & \frac{d\mathcal{G}_2}{dz} &= A_2\mathcal{P}_2. \end{aligned} \quad (84.1)$$

Образум и в этом случае детерминант Лиувилля

$$L_{12} = \mathcal{P}_1\mathcal{G}_2 - \mathcal{P}_2\mathcal{G}_1. \quad (84.2)$$

При этом теорема Ливилля обобщится:

$$\frac{dL_{12}}{dz} = (A_2 - A_1) \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2' + (B_2 - B_1) \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2. \quad (84.3)$$

Это уравнение известно как формула Штурма; она является основой многих теорем [1].

В приложениях обычно условия подбирают так, чтобы $L_{12} = 0$ в некоторой определенной точке z , например при $z = z_0$, а также чтобы было $A_2 > A_1$, $B_2 > B_1$ в некотором интервале, содержащем z_0 . Если тогда P_1 и P_2 находятся в одной и той же четверти во всем этом интервале, то правая часть (84.3) положительна в этом интервале и $L_{12} > 0$ для $z > z_0$ и $L_{12} < 0$ для $z < z_0$. Поскольку

$$L_{12} = \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1),$$

то отсюда можно вывести много геометрических заключений.

Осцилляционные теоремы. Пусть, например, $A_2 > A_1 > 0$, $B_2 > B_1 > 0$ для всех значений $z > 0$, и пусть

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = 1, \quad \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = 0$$

при $z = 0$. В таком случае отрезок $z > 0$ будет типа $(++)$ и обе точки P_1 и P_2 будут иметь положительные угловые скорости $d\vartheta_1/dz$, $d\vartheta_2/dz$. Для некоторого интервала $0 < z < z'$ обе точки лежат в первой четверти, правая часть уравнения (84.3) положительна; в этом интервале $L_{12} > 0$ или $\vartheta_2 > \vartheta_1$ (рис. 62). Это заключение остается в силе, пока P_2 не пересечет оси $\mathfrak{G}$, после чего $\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1$ станет отрицательным и заключение может перестать быть справедливым. Но, во всяком случае, установлено, что P_2 войдет во вторую четверть раньше, чем P_1 .

Когда P_1 входит во вторую четверть, P_2 может быть все еще в этой четверти, или в какой-нибудь из следующих четвертей. В последнем случае эта точка входит в третью четверть заведомо раньше, чем P_1 ; но, как можно показать, это же верно и в первом случае. В самом деле, $L_{12} > 0$, когда P_1 входит во вторую четверть, и не может убывать, пока P_2 не покинет этой четверти. Так как $L_{12} > 0$ в тот момент, когда P_2 покидает вторую четверть, то это должно произойти прежде, чем P_1 покинет эту четверть.

Продолжая таким же образом, можно установить по индукции, что если P_1 пересекает ось $\mathcal{P}$ (или $\mathcal{Q}$) n раз в интервале $(0, z_1)$, P_2 должна пересечь ось по меньшей мере n раз, а может быть, и более. Это утверждение высказывается часто в такой форме: P_2 колеблется быстрее, чем P_1 . Поэтому оно называется *осцилляционной теоремой*.

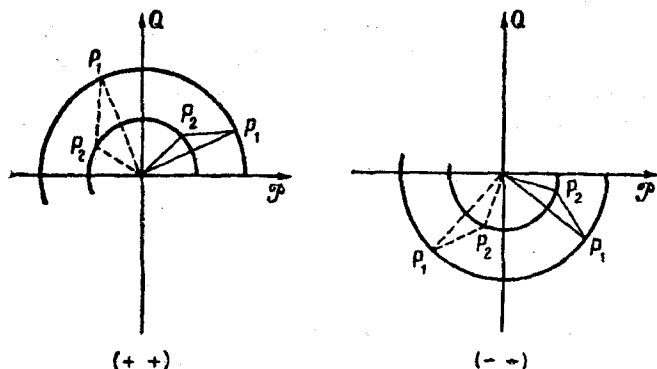


Рис. 62. Иллюстрация осцилляционной теоремы.

Существует большое количество осцилляционных теорем, различающихся по своим посылкам и заключениям, но доказываемых сходным образом. Рис. 62 иллюстрирует соответствующую теорему для $(- -)$ -отрезка, в котором $0 > A_2 > A_1$, $0 > B_2 > B_1$ для $z > 0$. В этом случае P_1 колеблется быстрее, чем P_2 .

Зависимость от параметров. Если A и B даются уравнениями (82.9), а A_2 , B_2 — теми же формулами, но с другими значениями параметров μ и ν , то формула Штурма принимает вид

$$\frac{dL_{12}}{dz} = a \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 + \frac{1}{a} (\nu_2 - \nu_1) \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2. \quad (84.4)$$

Мы применим эту формулу к случаю твердой границы, так что

$$\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (84.5)$$

Для удобства решение будет нормировано дополнительными условиями

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = 1 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (84.6)$$

Тогда $L_{12} = 0$ при $z = 0$ и уравнение (84.4) можно проинтегрировать следующим образом:

$$L_{12} = \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) \int_0^z a \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 dz + (\nu_2 - \nu_1) \int_0^z \frac{\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2}{a} dz. \quad (84.7)$$

Во всем дальнейшем будет предполагаться, что $z > 0$; тогда оба интеграла в (84.7) окажутся положительными, если допустить, что $|\mu_2 - \mu_1|$ и $|\nu_2 - \nu_1|$ не слишком велики. В самом деле, эти интегралы наверное положительны, если $\mu_2 = \mu_1$ и $\nu_2 = \nu_1$, что влечет за собой $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ и $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$, согласно теореме I. Можно также доказать, что $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ — непрерывные функции параметров μ и ν . Эта непрерывность гарантирует нас от внезапного изменения знака, если μ_1 , ν_1 слегка отличаются от μ_2 , ν_2 .

Следовательно, L_{12} положительно при $\mu_2 - \mu_1 = \delta\mu > 0$ и $\nu_2 - \nu_1 = \delta\nu > 0$, если считать, что $\delta\mu$ и $\delta\nu$ не слишком велики. Из того, что

$$L_{12} = \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \sin(\delta\vartheta),$$

следует, что $\delta\vartheta > 0$ при этих предположениях. Другими словами, $\vartheta(z, \mu, \nu)$ есть монотонно возрастающая функция как μ , так и ν для всех положительных значений z . Важно отметить, что то же самое справедливо для отрезков любого типа. Следовательно, это очень сильная осцилляционная теорема, но она применима лишь при выполнении условий, сформулированных в явном виде выше.

§ 85. ВКБ-аппроксимация

Эти же результаты можно получить быстрее, но менее строго, если опять применить ВКБ-аппроксимацию. Пусть

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cos \varphi, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 \sin \varphi. \quad (85.1)$$

Следует заметить, что углы φ и ϑ не тождественны, так как не предполагалось, что $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{Q}_0$ равны. Подставляя эти выражения в

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dz} = A\mathcal{P}, \quad \frac{d\mathcal{P}}{dz} = -B\mathcal{Q}, \quad (85.2)$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{G}_0}{dz} \sin \varphi + \mathcal{G}_0 \cos \varphi \frac{d\varphi}{dz} &= A\mathcal{P}_0 \cos \varphi, \\ \frac{d\mathcal{P}_0}{dz} \cos \varphi - \mathcal{P}_0 \sin \varphi \frac{d\varphi}{dz} &= -B\mathcal{G}_0 \sin \varphi.\end{aligned}\quad (85.3)$$

Сущность ВКБ-аппроксимации состоит в пренебрежении производными $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{G}_0$ в сравнении с производными φ . Следовательно, в этом приближении

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0 \frac{d\varphi}{dz} &= A\mathcal{P}_0, \\ \mathcal{P}_0 \frac{d\varphi}{dz} &= B\mathcal{G}_0.\end{aligned}\quad (85.4)$$

Исключая $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{G}_0$, найдем

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = AB. \quad (85.5)$$

Используя формулы (82.9), можно написать

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{\mu}\right)(\nu - N^2). \quad (85.6)$$

Сразу видно, что φ может быть вещественным лишь на $(++)$ - и $(--)$ -отрезках, в согласии с колебательным характером решений, строго установленным в предыдущих параграфах. Можно также видеть, что $d\varphi/dz$ есть монотонно возрастающая функция как μ , так и ν .

Чтобы получить аналогичное приближение для $(+-)$ - и $(-+)$ -отрезков, нужно изменить формулы (85.1) следующим образом:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \operatorname{ch} \varphi, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \operatorname{sh} \varphi. \quad (85.7)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{G}_0}{dz} \operatorname{sh} \varphi + \mathcal{G}_0 \operatorname{ch} \varphi \frac{d\varphi}{dz} &= A\mathcal{P}_0 \operatorname{ch} \varphi, \\ \frac{d\mathcal{P}_0}{dz} \operatorname{ch} \varphi + \mathcal{P}_0 \operatorname{sh} \varphi \frac{d\varphi}{dz} &= -B\mathcal{G}_0 \operatorname{sh} \varphi,\end{aligned}\quad (85.8)$$

и если опять пренебречь производными от $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{G}_0$, то мы получим уравнение

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = -AB. \quad (85.9)$$

Следовательно, при таком определении φ может быть вещественным лишь на $(+ -)$ - или $(- +)$ -отрезках, тем самым устанавливается неколебательный характер решений на таких отрезках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bôcher M., Leçons sur la méthode de Sturm, Paris, Gauthier-Villars, 1917.
2. Bellman R., Stability Theory of Differential Equations, New York, McGraw-Hill, 1953. (Русский перевод: Беллман Р., Теория устойчивости дифференциальных уравнений, ИЛ, М. 1954.)

Глава XV

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

§ 86. Термосфера

Гл. XIII была посвящена теории атмосферы с постоянным положительным температурным градиентом. Нам удалось

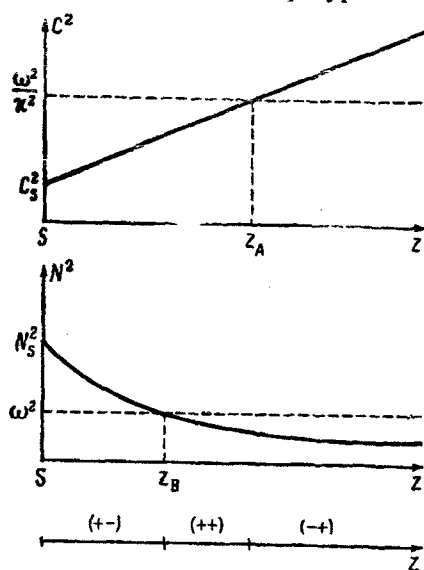


Рис. 63. Определение сигнатуры для заданных значений ω^2 и ω^2/x^2 .

изучить общие черты диагностических диаграмм, на которых указаны те значения x и ω , которые соответствуют собственным решениям. В этом параграфе мы используем общие теоремы, доказанные в гл. XIV, чтобы получить некоторые свойства собственных решений. Результаты будут аналогичны полученным в § 72 для слоя скачка.

Мы видели, что для модели атмосферы указанного вида имеют место соотношения

$$N^2 = \frac{g\gamma^2}{zv}, \quad c^2 = \frac{g\gamma z}{v}. \quad (86.1)$$

Соответствующие графики показаны на рис. 63. Так как

$$A = a \left(\frac{1}{c^2} - \frac{x^2}{\omega^2} \right) = \frac{ax^2}{\omega^2 c^2} \left(\frac{\omega^2}{x^2} - c^2 \right), \quad (86.2)$$

$$B = \frac{1}{a} (\omega^2 - N^2), \quad (86.3)$$

то горизонтальные прямые $c^2 = \omega^2/x^2$ и $N^2 = \omega^2$ играют особую роль и также показаны на этом рисунке. При изменении ω

и κ эти прямые, разумеется, меняют свое положение. Корнем A пусть будет $z = z_A$, корнем B — $z = z_B$. Функция A положительна при $z < z_A$; при $z < z_B$ функция B отрицательна. Таким образом, положительная часть оси z делится двумя корнями на три отрезка, и в нашем примере сигнатуры этих отрезков равны $(+ -)$, $(+ +)$ и $(- +)$. Символ $(+ -)$ $(+ +)$ $(- +)$ будем называть сигнатурой оси z . Кроме того, в обозначениях гл. XIII $z_A \sim z_+$, $z_B \sim z_-$. Акустический луч, соответствующий значениям ω и κ , показанным на этих графиках, не пересекает поверхности планеты, т. е. целиком расположен в воздухе, причем большая его часть находится на $(+ +)$ -отрезке. Далее, из общих теорем гл. XIV следует, что поле $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ колеблется на $(+ +)$ -отрезке и не колеблется на двух остальных.

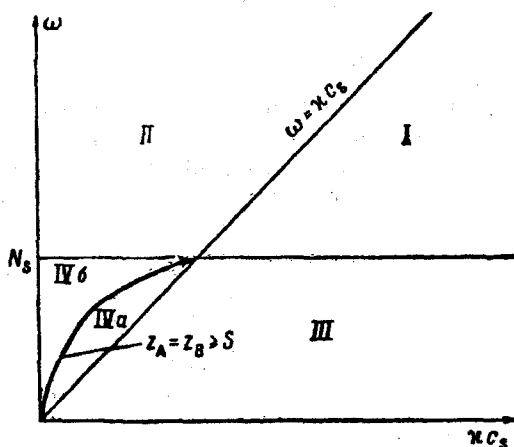


Рис. 64. Подразделение диагностической диаграммы для термосферы.

В каждой из пронумерованных областей все фазовые траектории имеют одни и те же сигнатуры, показанные в таблице.

Эти качественные выводы, относящиеся к собственным решениям, будут уточнены ниже; в первую же очередь мы исследуем все возможные сигнатуры и перенесем их на диагностическую диаграмму рис. 64. На этой диаграмме показаны прямые $\omega = N_S$, $\omega = \kappa s$ и кривая $z_A = z_B$. Они делят плоскость $\kappa\omega$ на пять областей, каждая из которых отличается от другой своей сигнатурой оси z , как отмечается ниже. Сле-

дует заметить, что во всех случаях последней сигнатурой является $(-+)$, что как раз характерно для термосферы.

$(-+)$	$z_A < S, z_B < S$	область I
$(++)(-+)$	$z_A > S, z_B < S$	область II
$(+-)(++)(-+)$	$z_A > z_B > S$	область IVб
$(--)(-+)$	$z_A < S, z_B > S$	область III
$(+-)(--)(-+)$	$z_B > z_A > S$	область IVa

Группировка сигнатур в этой таблице подчинена очевидной системе и окажется удобной для рассмотрения фазовых траекторий. Все эти траектории должны начинаться на оси $\mathcal{P}$, так как граничные условия на твердой границе атмосферы требуют, чтобы $\mathcal{Q} = 0$ при $z = S$.

Область I

Так как сигнатура в этой области $(-+)$, то общий характер фазовой траектории таков, как описанный в теореме V и показанный на рис. 59 и 60. Дополнительно заметим, что асимптотический угол ϑ_a равен здесь $\pi/2$, так как

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta_a = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(-\frac{A}{B} \right)$$

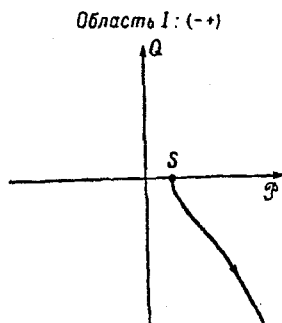


Рис. 65. Примерный вид фазовой траектории для области I, показывающий, что собственного решения быть не может.

и $-A$ неограниченно растет с z , в то время как B стремится к ω^2/a . Следовательно, фазовая траектория неколебательного типа и целиком расположена в четвертой четверти фазовой диаграммы (рис. 65). При $z \rightarrow \infty$ как $\mathcal{P}$, так и $\mathcal{Q}$ растут неограниченно, причем $\mathcal{Q}$ делается в конечном счете намного больше, чем $\mathcal{P}$.

Однако собственные решения обязаны быть конечными для всех значений z . Отсюда можно лишь заключить, что точкам области I не соответствует никаких собственных решений. Этим еще раз подтверждается заключение § 77 об отсутствии лучей, соответствующих точкам этой области.

Область II

Так как сигнатура оси z в этом случае $(++)(-+)$, то фазовые траектории начинаются как спирали, описываемые с положительной угловой скоростью (теорема IV). При $z = z_A$ коэффициент A обращается в нуль и траектория должна иметь горизонтальную касательную (теорема III). Для больших значений z траектории должны иметь характер, описываемый теоремой V и рис. 59. Асимптотический угол ϑ_a опять равен $\pi/2$.

Отсюда следует, что общий вид фазовых траекторий таков, как это показано на рис. 66. Сперва рассмотрим кривую 1 при z , возрастающем от нуля. Фазовая траектория описывает, грубо говоря, эллиптическую спираль, делая несколько более одного оборота. При $z = z_A$ фазовая точка возвращается в первую четверть и кривая имеет горизонтальную касательную (теорема III). До

сих пор кривая описывается теоремой IV, так как имеем отрезок типа $(++)$. Когда z становится больше z_A , он попадает на $(-+)$ -отрезок и поведение кривой описывается теоремой V. Кривая 1 относится к случаю, когда фазовая траектория пересекает ось $\mathcal{P}$ при некотором значении $z > z_A$. После этого она входит в четвертую четверть и $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ неограниченно возрастают, примерно так, как это было в случае области I. По этой причине кривая 1 не дает никакого собственного решения.

Кривая 3 иллюстрирует другую возможность, которая представится для значений χ и ω , незначительно отличающихся от тех, что были в случае кривой 1. Теперь фазовая точка попадает во вторую четверть и $-\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ неограниченно растут. Наконец, кривая 2 будет иметь место для

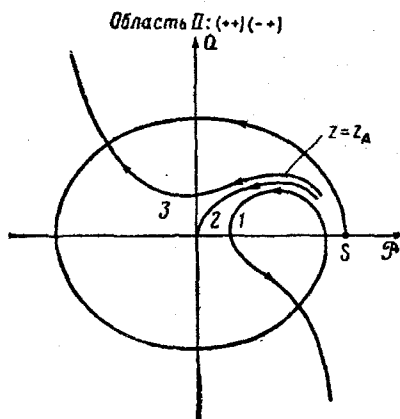


Рис. 66. Примерный вид фазовой траектории для области II, показывающий различие между собственными решениями (кривая 2) и другими решениями (кривые 1 и 3).

каких-то промежуточных значений параметров κ и ω : здесь фазовая точка с ростом z приближается к началу координат. Далее, поскольку $\vartheta_a = \pi/2$, траектория входит в начало координат с вертикальной касательной. В этом случае $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ остаются ограниченными для всех значений z и поэтому кривая 2 представляет собственное решение.

Это рассуждение показывает, что собственные решения являются редким явлением: они встречаются в случаях, предельных для других, более часто встречающихся типов решений, представленных кривыми 1 и 3. Это полностью согласуется с существованием „естественного граничного условия“, о котором шла речь в § 79.

Область II: $(++)(-+)$

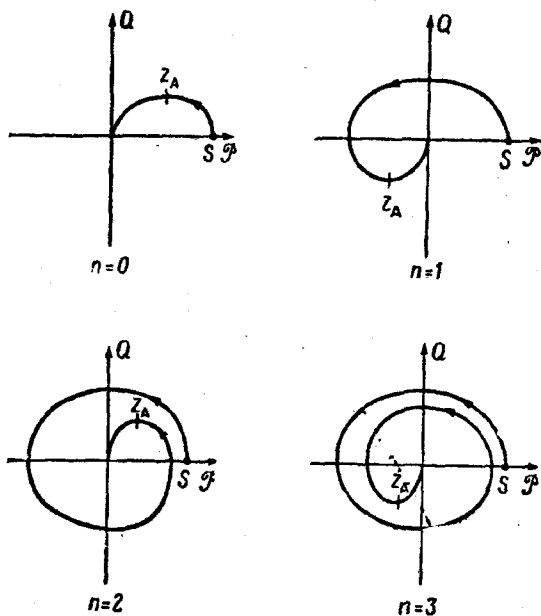


Рис. 67. Примерный вид собственных решений $n = 0, 1, 2, 3$ для области II.

На рис. 66, естественно, не показаны все возможные собственные решения в области II. На рис. 67 изображена серия собственных решений. Для $n = 0$ траектория не пересекает оси Q и z_A лежит в первой четверти. Для $n = 1$

траектория пересекает ось Q один раз и z_A оказывается в третьей четверти. (Читатель может самостоятельно убедиться в том, что невозможны собственные решения, если z_A находится во второй четверти.) Случай $n=2$ тот же, что и на рис. 66, а при $n=3$ траектория трижды пересекает ось Q .

Целое число n , определяемое таким образом, — это, очевидно, порядковый номер, уже встречавшийся в предыдущих параграфах. Случай $n=0$ относится к решению, ранее названному волнами Ламба, при этом $\mathcal{P}$ не имеет корней или узлов, отличных от $z=\infty$. Остальные случаи относятся к акустическим волновым типам, для которых $\mathcal{P}$ имеет n корней.

Область IVб

В этой области как z_A , так и z_B превосходят S , т. е. находятся в части оси z , имеющей физический смысл. Они делят ось z на три отрезка и сигнатура оси z здесь

Область IVб: $(+ -)(+ +)(- +)$

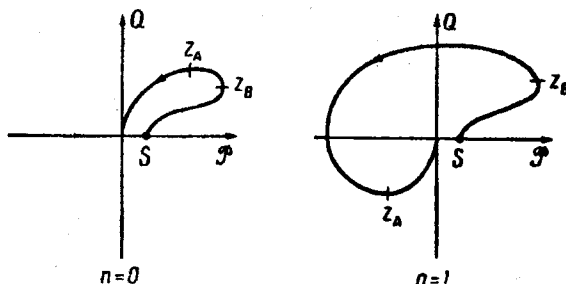


Рис. 68. Примерный вид фазовых траекторий для собственных решений $n=0, 1$ для области IVб.

$(+ -)(+ +)(- +)$. Рис. 68 показывает общий характер собственных решений при $n=0$ и $n=1$. Читатель сможет убедиться в качественной справедливости этого чертежа, обратившись к теоремам главы XIV, а также сможет построить соответствующие кривые для больших номеров n .

Область III

В этой области лишь B меняет знак при $z=z_B$ и сигнатура оси z такова: $(- -)(- +)$. Рис. 69 показывает собственные решения для $n=-1$ и -2 ; отрицательные значе-

ния порядковых чисел использованы, чтобы подчеркнуть, что фазовая траектория пересекает ось Q , двигаясь по часовой стрелке, т. е. в отрицательном направлении. Читатель сам сможет убедиться в том, что в этой области диаграммы условие $n \geq 0$ несовместимо с теоремами главы XIV.

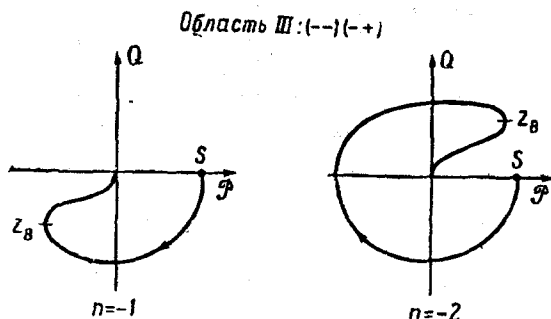


Рис. 69. Примерный вид фазовых траекторий для собственных решений $n = -1, -2$ для области III.

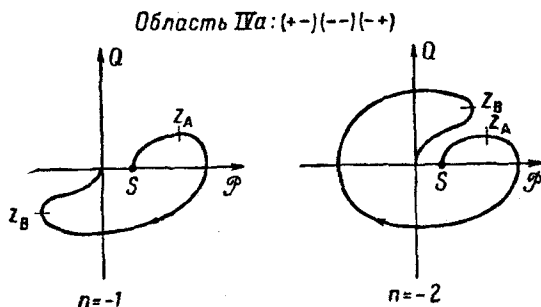


Рис. 70. Примерный вид фазовых траекторий для собственных решений $n = -1, -2$ для области IVa.

Если учесть расположение области III на κ, ω -диаграмме, то станет ясно, что полученные собственные решения описывают внутренние гравитационные волны. Сопоставление $(++)$ -отрезка с акустическими волнами, а $(--)$ -отрезка — с гравитационным окажется в дальнейшем весьма характерным.

Область IVa

Если (κ, ω) — точка из этой области, то и A и B меняют знак. Сигнатура оси z $(+ -)$ $(- -)$ $(- +)$ позволяет заключить, что собственные решения соответствуют таким фазовым траекториям, как показано на рис. 70.

§ 87. Кривые волновых типов и теорема сравнения

Фазовые траектории, изображения которых приводились в предыдущем параграфе, имеют одну общую особенность, носящую точный количественный характер. Ее проще всего сформулировать, пользуясь полярной координатой ϑ фазовой диаграммы. При $z = S$ этот угол равен нулю во всех случаях: это обеспечивается граничным условием на твердой нижней границе. При возрастании z угол ϑ может возрастать или убывать, но он обязательно стремится к пределу при $z \rightarrow \infty$. Этот предел легко увидеть на рисунках предыдущего параграфа; он равен $(n + \frac{1}{2})\pi$, где n — порядковое число. Результат остается справедливым как для положительных, так и для отрицательных порядковых чисел, что еще убедительнее оправдывает введение отрицательных порядковых чисел, чем это было возможно сделать ранее.

Используя обозначения § 84, можно записать этот результат таким образом:

$$\vartheta(\infty, \mu, \nu) = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad (87.1)$$

где

$$\mu = \frac{\omega^2}{\kappa^2}, \quad \nu = \omega^2. \quad (87.2)$$

Мы получим уравнение, связывающее κ , ω и порядковый номер n . Следовательно, оно представляет собой уравнение кривых волновых типов на диагностической диаграмме.

Теорема, доказанная в § 84, утверждает, что $\vartheta(\infty, \mu, \nu)$ является монотонно возрастающей функцией как μ , так и ν . Осталось интерпретировать этот результат в терминах кривых волновых типов. Пусть μ , ν и $\mu + \delta\mu$, $\nu + \delta\nu$ соответствуют одному и тому же значению n , тогда из (87.1) получаем

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} \delta\mu + \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} \delta\nu = 0, \quad (87.3)$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta\mu}{\delta\nu} = - \frac{\frac{\partial\vartheta}{\partial\nu}}{\frac{\partial\vartheta}{\partial\mu}}. \quad (87.4)$$

Так как обе производные положительны, то

$$\frac{\delta\mu}{\delta\nu} < 0.$$

Используя (87.2), можно переписать это неравенство так:

$$0 < \frac{\delta\omega}{\delta x} < \frac{\omega}{x}. \quad (87.5)$$

Рис. 71 иллюстрирует это соотношение; наклон кривой меньше чем наклон прямой, проведенной в начало координат, но больше нуля.

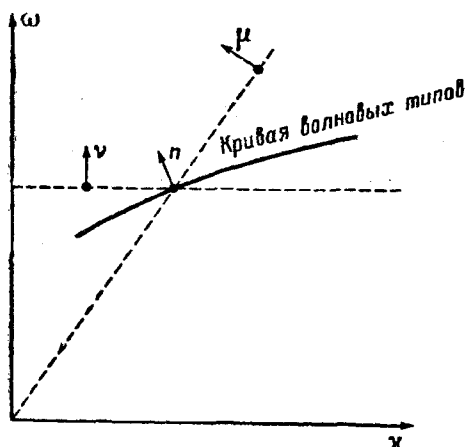


Рис. 71. Иллюстрация применения теоремы сравнения Штурма к кривым волновых типов на диагностической диаграмме.

Теорема может быть также использована, чтобы определить относительное расположение кривых волновых типов для разных порядковых чисел. Пусть n' и n'' — два целых числа; если $n' > n''$, то кривая для n' расположена выше и левее кривой для n'' .

Эти два результата совместно с полученными в предыдущем параграфе позволяют нарисовать кривые волновых типов. Фактически это уже было сделано в § 80 с использованием ВКБ-аппроксимации. Читатель может убедиться сам, что рис. 55 совместим с результатами настоящего параграфа.

Можно дать также и другую интерпретацию неравенствам (87.5). Величина

$$c_{\text{гориз}} = \frac{\omega}{\kappa} \quad (87.6)$$

была названа в § 40 горизонтальной скоростью волн (trace velocity). Ее смысл можно понять из общего вида собственных решений для плоских поверхностей уровня; это

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z) \exp[i(\alpha x + \beta y - \omega t)], \\ \mathcal{Q}(z) \exp[i(\alpha x + \beta y - \omega t)]. \end{aligned} \quad (87.7)$$

Так как $\kappa = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$, то $c_{\text{гориз}}$ есть фазовая скорость, связанная с экспоненциальными множителями в (87.7). Если порядковое число считать постоянным, то (87.1) определяет ω как функцию от κ . Поэтому с экспоненциальными множителями можно также связать групповую скорость, используя некоторые рассуждения § 44 и 64. Легко показать, что эта групповая скорость равна

$$c_{\text{гориз, гр}} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \kappa} \right)_{n = \text{const}} \quad (87.8)$$

Иными словами, горизонтальная групповая скорость (trace group velocity) представляет собой наклон кривой волновых типов. Тогда соотношение (87.5) принимает вид

$$0 < c_{\text{гориз, гр}} < c_{\text{гориз}} \quad (87.9)$$

§ 88. Атмосфера с одним минимумом температуры

Стратификация земной атмосферы описана в § 29. Рис. 13 показывает, что температура имеет два минимума и один максимум. Частота N имеет два минимума и два максимума. Все эти многообразные экстремумы порождают различные возможные типы собственных решений, которые характеризуются разными сигнатурами. Их число несколько уменьшается, если предположить, как это делалось при построении графиков рис. 13, что величины некоторых температурных

экстремумов равны между собой. Однако и в этом случае число типов собственных решений остается весьма большим.

Чтобы проиллюстрировать возникающие здесь трудности, не рассматривая чрезмерно большого количества специальных

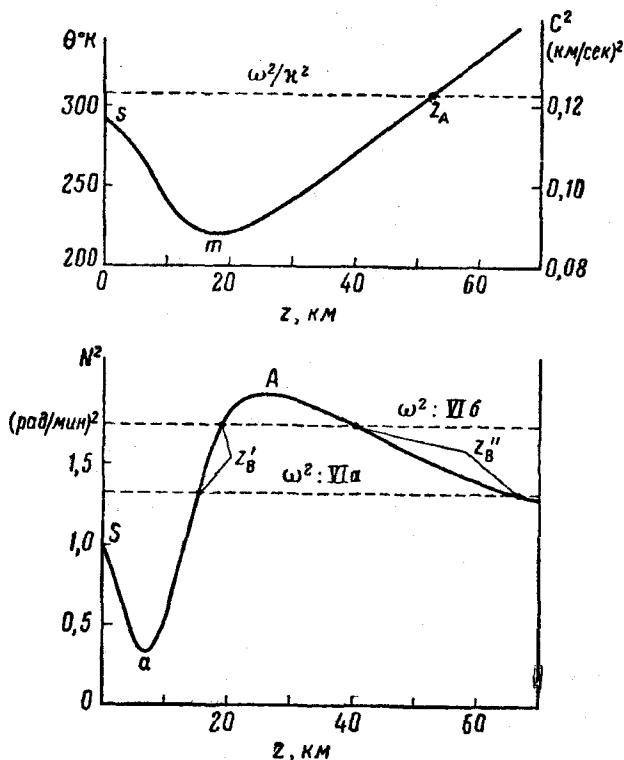


Рис. 72. Иллюстрация смены сигнатуры, когда ω^2 изменяется, а ω^2/κ^2 постоянно.

случаев, мы посвятим этот параграф изучению атмосферы, температурный профиль которой имеет один минимум, как это показано на рис. 72. Частота устойчивости N вычислена из (25.2), температурный градиент получен графически. N имеет один минимум на высоте, несколько меньшей, чем высота температурного минимума. Область, расположенная приблизительно ниже 15 км, имеет в этом гипотетическом случае свойства, аналогичные земной тропосфере. Имеется

также максимум N на высоте приблизительно 25 км; этот слой будет соответствовать земной стратосфере. Термосфера соответствует области возрастающей температуры и убывающей устойчивости.

Сложность проблемы возникает из-за того, что коэффициенты канонических уравнений могут иметь несколько корней. Так, если

$$\frac{\omega}{\chi} > c_S, \quad A \text{ имеет один корень;}$$

$$c_S > \frac{\omega}{\chi} > c_m, \quad A \text{ имеет два корня;}$$

$$c_m > \frac{\omega}{\chi}, \quad A \text{ не имеет корней;}$$

и, если

$$\omega > N_A, \quad B \text{ не имеет корней;}$$

$$N_A > \omega > N_S, \quad B \text{ имеет два корня;}$$

$$N_S > \omega > N_a, \quad B \text{ имеет три корня;}$$

$$N_a > \omega, \quad B \text{ имеет один корень.}$$

На рис. 73 изображена диагностическая диаграмма, разделенная прямыми на 12 областей; каждая область характеризуется определенным числом корней коэффициентов A и B . Например, те значения χ и ω , которые принадлежат области VI, соответствуют коэффициенту A , имеющему один корень, и коэффициенту B , имеющему два корня; это иллюстрируется горизонтальными прямыми на рис. 72. Во всей области VI корни коэффициентов A и B делят ось z на четыре отрезка, но сигнатуры отрезков зависят от порядка этих корней, а не только от их числа. Следовательно, область VI делится на две части кривой, уравнение которой

$$z_A = z_B'';$$

обозначения здесь соответствуют рис. 72. Следовательно, в области VIa

$$S < z'_B < z_A < z_B'': \quad (++) (+-) (--) (-+)$$

в то время как в области VIb

$$S < z'_B < z_B'' < z_A: \quad (++) (+-) (++) (-+).$$

Эти два случая изображены на рис. 72. Области V, VIII, IX и XII подразделены подобным же образом.

После того как возможное разделение оси z тщательно изучено, оказывается, что даже сравнительно простой график температуры (рис. 72) приводит к 20 различным типам сигнатур оси z . Они перечислены ниже с соблюдением достаточно очевидной системы их расположения. И здесь все последовательности соответствующих сигнатур заканчиваются характерной сигнатурой термосферы $(-+)$.

Сигнатуры оси z	Области
$(-+)$	I
$(-+)$ $(++)$ $(-+)$	II
$(++)$ $(-+)$	III
$(-+)$ $(++)$ $(+-)$ $(++)$ $(-+)$	Vб
$(++)$ $(+-)$ $(++)$ $(-+)$	VIб
$(+-)$ $(++)$ $(+-)$ $(++)$ $(-+)$	IXб
$(+-)$ $(++)$ $(-+)$	XIIб
$(-+)$ $(--)$ $(-+)$	IV
$(-+)$ $(--)$ $(+-)$ $(--)$ $(-+)$	Vг
$(--)$ $(-+)$ $(--)$ $(-+)$	VII
$(--)$ $(-+)$ $(--)$ $(+-)$ $(--)$ $(-+)$	VIIIб
$(--)$ $(-+)$	X
$(--)$ $(+-)$ $(--)$ $(-+)$	XI
$(+-)$ $(--)$ $(-+)$	XIIa
$(-+)$ $(++)$ $(+-)$ $(--)$ $(-+)$	Va
$(-+)$ $(++)$ $(-+)$ $(--)$ $(-+)$	Vв
$(++)$ $(+-)$ $(--)$ $(-+)$	VIa
$(--)$ $(-+)$ $(++)$ $(+-)$ $(--)$ $(-+)$	VIIIa
$(--)$ $(+-)$ $(++)$ $(+-)$ $(--)$ $(-+)$	VIIIв
$(+-)$ $(++)$ $(+-)$ $(--)$ $(-+)$	IXa

Пять из этих типов уже изучены в предыдущем параграфе; это области I, III, X, XIIa и XIIб. В качестве примера остав-

шихся 15 типов сигнатур оси z наиболее поучительно рассмотреть области VIa и VIб, так как здесь мы увидим иллюстрацию некоторых общих принципов без излишних усложнений.

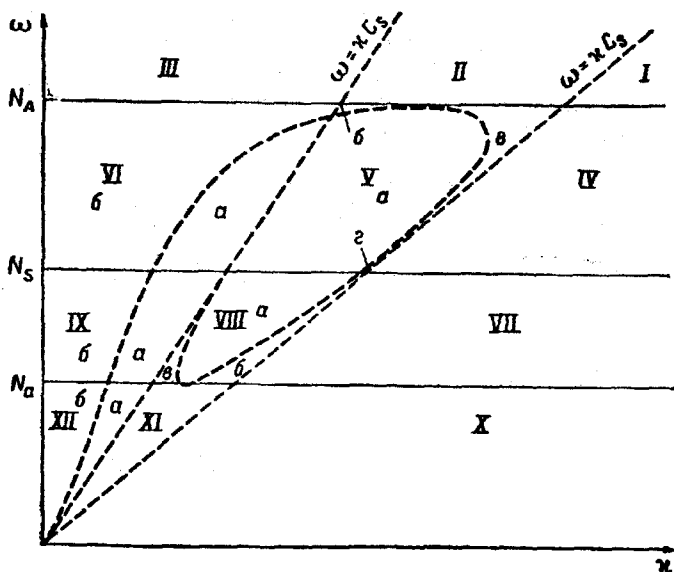


Рис. 73. Подразделение диагностической диаграммы для атмосферы с одним минимумом температуры.

Сигнатуры такие, как указано в таблице.

Область VIa

На рис. 74 изображены две возможные фазовые траектории, относящиеся к этой области. Сначала опишем траекторию, показанную слева. Отрезок $(++)$ простирается от уровня земли до z'_B ; это спираль, описываемая в положительном направлении и пересекающая ось ζ три раза. Поэтому точка z'_B оказывается в третьей четверти, а траектория имеет здесь вертикальную касательную. $(+ -)$ -отрезок простирается от z'_B до z_A и имеет в конце горизонтальную касательную; на этом отрезке радиус-вектор значительно возрастает. Вслед за ним идет $(- -)$ -отрезок, описываемый по часовой стрелке, т. е. в отрицательном направлении.

Радиус-вектор на этом отрезке остается большим. Заканчивается эта часть траектории в первой четверти в точке z_B'' . На конечном термосферном отрезке фазовая траектория приближается к нулю по направлению оси $\mathcal{Q}$.

Фазовая траектория в правой части рис. 74 отличается от той, что изображена слева, в двух отношениях. Во-первых, она нарисована в большем масштабе; начальный $(++)$ -отрезок почти одинаков в обоих случаях; эти случаи относятся к точкам (χ, ω) , не очень отдаленным друг от друга.

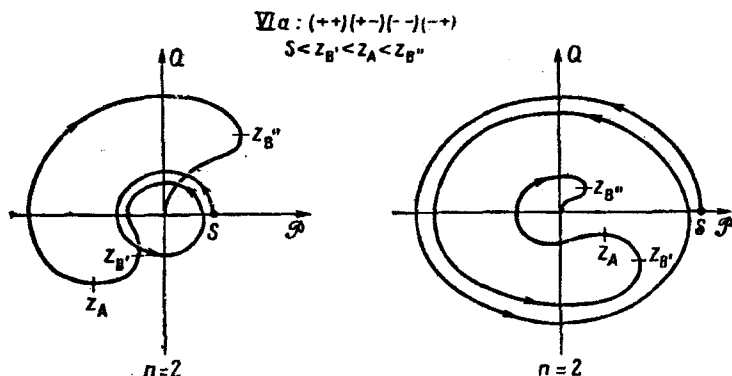


Рис. 74. Примерный вид двух возможных решений для $n=2$ и сигнатуры $(++) (+-) (-) (-+)$, область VIa.

Вследствие разницы в значениях параметров $(++)$ -отрезок кончается в четвертой четверти. Следовательно, последующий $(++)$ -отрезок характеризуется заметным убыванием радиуса-вектора (ср. рис. 59). Радиус-вектор остается малым на $(--)$ - и на $(-+)$ -отрезках.

Этот пример иллюстрирует общий принцип: если в последовательности сигнатур два осцилляционных отрезка разделены неосцилляционным, то малые изменения χ и ω могут привести к большим количественным изменениям фазовой траектории. В частности, правая часть рис. 74 представляет колебание, имеющее относительно малую амплитуду на малых высотах и большую амплитуду в $(--)$ -канале. Левая часть представляет колебание большой амплитуды в нижнем $(++)$ -канале и относительно малой амплитуды вверх.

Существует и другое различие между фазовыми траекториями: левая пересекает ось $\mathcal{Q}$ три раза в положительном

направлении и один раз в отрицательном; правая пересекает эту ось четыре раза в положительном и два раза в отрицательном направлении. Полярный угол ϑ , таким образом, имеет различные значения максимума (между $z = z'_B$ и $z = z_A$). Однако при $z \rightarrow \infty$ в обоих случаях $\vartheta \rightarrow 5\pi/2$; следовательно, на основании (68.1) обоим случаям мы припишем порядковое число $n = 2$.

Область VI6

Сигнатура оси z этой области отличается от только что описанной прежде всего тем, что оба осцилляционных отрезка теперь $(++)$. Поэтому угловая скорость фазовой точки будет положительна на всех отрезках, в то время как в предыдущем случае она меняла знак. Ось Q пересекается поэтому всегда в положительном направлении, и определение

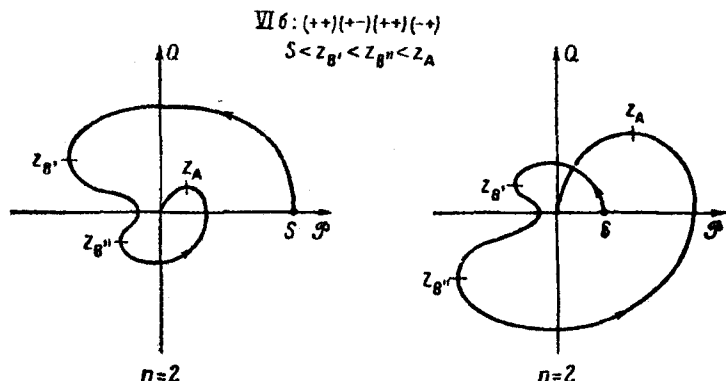


Рис. 75. Примерный вид двух возможных собственных решений для $n=2$ и сигнатуры $(++)(-+)(++)(-+)$, область VI6.

порядкового числа показывает, что обе траектории, изображенные на рис. 75, относятся к $n=2$. Траектории приведены в разных масштабах и иллюстрируют большие количественные изменения, которые могут быть следствием малых изменений значений χ и ω .

Изучение остающихся тринадцати типов сигнатур не выявляет каких-либо новых общих принципов и поэтому будет опущено.

В заключение этих глав, посвященных остаточным уравнениям, следует заметить, что каноническая форма (82.8) представляется особенно удобной для численного решения, и поэтому качественные методы, использованные здесь, могут быть, если необходимо, дополнены количественными результатами.

§ 89. Уравнение кривой волновых типов для океана постоянной глубины

Использованные выше качественные методы могут быть применены к собственным решениям и кривым волновых типов для океана постоянной глубины. Общие процедуры.

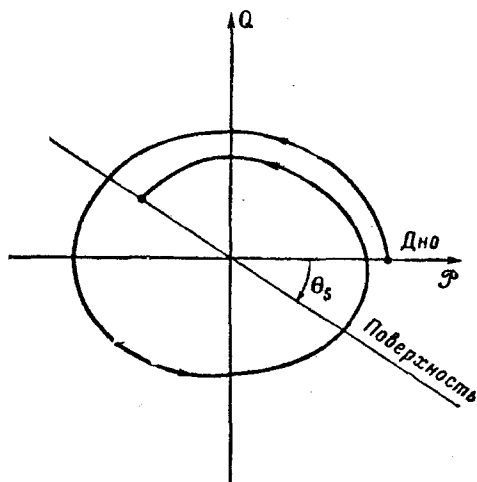


Рис. 76. Иллюстрация граничного условия на свободной поверхности океана или озера.

основанные на изучении корней $A(z)$ и $B(z)$ и сигнатур решений, остаются неизменными. Единственной новой чертой будет граничное условие на свободной поверхности (54.1)

$$cP + gQ = 0. \quad (89.1)$$

Это условие нужно выразить через $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$; с помощью уравнений § 82 найдем

$$\mathcal{Q} + \mathcal{P} \exp(-2\delta_s) = 0, \quad (89.2)$$

где

$$\delta_S = g \int_{\text{дно}}^{\text{поверхн.}} \frac{1}{c^2} dz. \quad (89.3)$$

Если скорость звука постоянна, то

$$\delta_S = \frac{gD}{c^2},$$

откуда ясно, что δ_S мало для всех земных океанов.

Граничное условие для твердого дна остается прежним

$$\mathcal{Q} = 0. \quad (89.4)$$

Поэтому на фазовой диаграмме дно представлено осью $\mathcal{P}$, в то время как свободная поверхность представлена прямой, определяемой уравнением (89.2) и показанной на рис. 76. Она проходит через начало координат и составляет с осью $\mathcal{P}$ угол — ϑ_S , где

$$\operatorname{tg} \vartheta_S = \exp(-2\delta_S). \quad (89.5)$$

Можно убедиться в том, что

$$0 \leq \vartheta_S \leq \frac{\pi}{4} \quad (89.6)$$

и что для мелких океанов $\vartheta_S \approx \pi/4$.

Фазовая траектория должна начинаться на оси $\mathcal{P}$ (дна), пересечь ось $\mathcal{Q}$ n раз и закончиться на прямой, соответствующей поверхности. Поэтому уравнение кривых волновых типов есть

$$\vartheta(\mu, \nu) = \pi - \vartheta_S, \quad (89.7)$$

считая, что полярный угол отсчитывается от оси $\mathcal{P}$.

Из всего этого следует, что общие заключения, относящиеся к наклону и относительному расположению кривых волновых типов, полученные в § 87 для атмосферы, применимы и к океанам.

Глава XVI

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 90. Введение

Математические задачи, возникающие при использовании сферических поверхностей уровня при отсутствии вращения, лишь немногим сложнее тех, которые были для плоских поверхностей. Как показано в § 36, переменные разделяются, и выражение для поля распадается на множители

$$P = P_1(\lambda, \mu) P_2(\chi) \text{ и т. д.}, \quad (90.1)$$

а P_2 , Q_2 удовлетворяют остаточным уравнениям (36.12) в практически не измененной форме. Множитель P_1 должен удовлетворять волновому уравнению для сферической поверхности (36.23), которое имеет вид

$$\text{ch}^2 \mu \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial \mu^2} \right) + \kappa^2 r_S^2 P_1 = 0, \quad (90.2)$$

где r_S — радиус поверхности планеты. Уже отмечалось большое сходство этого уравнения с двумерным волновым уравнением (36.11).

Однако между этими двумя уравнениями есть и одно различие. Если жидкость не имеет боковых границ, а поверхности уровня плоские, то для каждого значения κ имеется собственное решение. Это неверно для уравнения (90.2); оно имеет собственные решения лишь для дискретного спектра значений κr_S . Это напоминает случай плоского резервуара с боковыми границами. Причина ясна: площадь неограниченной плоскости бесконечна, в то время как полной сферы конечна. Поэтому не удивительно, что горизонтальные порядковые числа резервуара находят свой аналог в модели жидкости, покрывающей всю сферическую планету.

После того как мы выполним все вычисления для этой модели атмосферы, мы посвятим оставшуюся часть главы изучению ограниченных объемов воды на сферической поверх-

ности. Как и в § 33, мы увидим, что топография дна общего вида приводит к таким математическим трудностям, которые не дают возможности ограничиться кратким рассмотрением вопроса. Несколько меньшие трудности представляет изучение океана, дно которого есть поверхность уровня, а стенки вертикальны; при этом оказываются применимыми остаточные уравнения и уравнение (90.2). Однако если считать очертания такого океана по-прежнему произвольными, то решение все еще остается слишком сложным, чтобы обойтись без численного интегрирования. Только в случае границ в форме сферического прямоугольника, когда стенки расположены вдоль меридианов и кругов широт, решение может быть изучено в деталях.

§ 91. Функции Лежандра

Разделение переменных. Уравнение (90.2) имеет решения вида

$$P_1(\lambda, \mu) = Z(\mu) \exp(ism\lambda), \quad (91.1)$$

где

$$s = \pm 1, \quad (91.2)$$

а m — положительная постоянная. В дальнейшем мы обнаружим, что разница между случаями $s = +1$ и $s = -1$ достаточно велика, чтобы оправдать это обозначение, хотя мы могли бы и опустить множитель s , если допустить отрицательные значения m . Если включить в собственные решения также их зависимость от времени (§ 34), то они получают множитель

$$\exp[i(sm\lambda - \omega t)],$$

который представляет собой волну, перемещающуюся в западно — восточном направлении со скоростью

$$\frac{sm}{\omega} \text{ рад/сек.}$$

При $s = +1$ волны перемещаются с запада на восток — в положительном направлении, при $s = -1$ они перемещаются с востока на запад. Следовательно, s представляет собой знак скорости. При отсутствии вращения этот знак не имеет большого значения; соображения симметрии позволяют из решения для $s = +1$ получить решение для $s = -1$.

Но вращение вокруг полярной оси разрушит эту симметрию и породит существенное различие между положительными и отрицательными волнами. Это обнаружится лишь в следующей главе, но мы будем различать эти два типа волн уже здесь, чтобы облегчить в дальнейшем сравнение результатов.

Поскольку (μ, λ) и $(\mu, \lambda + 2\pi)$ — это одна и та же точка на сфере, функция P_1 , определяемая уравнением (91.1), окажется однозначной, лишь если

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (91.3)$$

Это требование существенно, если жидкость покрывает всю сферу, подобно атмосфере. Если это условие не соблюдается, то требование, чтобы m было целым, должно быть заменено каким-нибудь другим (см. § 93). Целое число m мы назовем долготным порядковым номером. Этот номер аналогичен одному из чисел (k и m), встречавшихся в § 59. В квантовой теории sm называется магнитным квантовым числом.

На полюсах ($\mu = \pm \infty$) все значения λ относятся к одной и той же точке сферы. Поэтому требование однозначности приводит к „естественным граничным условиям“:

$$Z(\pm \infty) = 0, \quad \text{если } m \neq 0; \quad (91.4)$$

$$Z \text{ ограниченно, если } m = 0.$$

Поведение составляющих скорости у полюсов потребует дальнейшего изучения (ср. (91.29)).

Уравнение Лежандра. Если подставить (91.1) в уравнение (90.2), то можно найти, что

$$\frac{d^2 Z}{d\mu^2} = (m^2 - x^2 r_s^2 \operatorname{sech}^2 \mu) Z. \quad (91.5)$$

Это уравнение имеет вид, к которому сразу же применимы качественные методы § 72. Двучлен в скобках в (91.5) представляет собой „выпуклость“ графика $Z(\mu)$ (в смысле § 72), поэтому график колеблется, если это выражение отрицательно (ср. рис. 42). Это будет иметь место, если $m \neq 0$ и

$$\operatorname{ch} \mu < \frac{x r_s}{m}.$$

Вне зоны широт, определяемой этим неравенством, функция ведет себя подобно экспоненте и должна стремиться к нулю при $\mu = \pm \infty$ (ср. уравнение 90.4). При $m=0$ функция Z колеблется во всей области значений μ .

Функции Лежандра. На протяжении этой и следующей глав будут удобны обозначения

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \operatorname{th} \mu, \\ \sigma &= \operatorname{sech} \mu = (1 - \tau^2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (91.6)$$

Очень часто в качестве независимого переменного вместо μ будет употребляться τ

$$\frac{d}{d\mu} = \sigma^2 \frac{d}{d\tau} = (1 - \tau^2) \frac{d}{d\tau}. \quad (91.7)$$

Вводя τ в качестве переменного в уравнение (91.5) и полагая

$$L = \kappa r_S, \quad (91.8)$$

будем иметь

$$\frac{d}{d\tau} \left(\sigma^2 \frac{dZ}{d\tau} \right) + \left(L^2 - \frac{m^2}{\sigma^2} \right) Z = 0. \quad (91.9)$$

Это известное уравнение Лежандра [1—3].

Это уравнение, вообще говоря, не имеет решений, удовлетворяющих условиям (91.4), но при

$$L^2 = l(l+1), \quad l = m, m+1, \dots, m+k, \dots \quad (91.10)$$

такие решения имеются. Это функции Лежандра

$$Z = P_l^{(m)}(\tau), \quad (91.11)$$

определяемые формулами

$$P_l^{(0)}(\tau) = P_l(\tau) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^l (\tau^2 - 1)^l, \quad (91.12)$$

$$P_l^{(m)}(\tau) = (-1)^m (1 - \tau^2)^{m/2} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^m P_l(\tau), \quad (91.13)$$

Первые несколько функций Лежандра содержатся в табл. 3.

Таблица 3

ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

$P_0^0 = 1$	$P_2^2 = 3\sigma^2$
$P_1^0 = \tau$	$P_3^0 = (5\tau^3 - \tau)/2$
$P_1^1 = -\sigma$	$P_3^1 = -3\sigma(5\tau^2 - 1)/2$
$P_2^0 = (3\tau^2 - 1)/2$	$P_3^2 = 15\sigma^2\tau$
$P_2^1 = -3\sigma\tau$	$P_3^3 = -15\sigma^3$

Следует заметить, что $P_l(\tau)$ представляет собой многочлен степени l относительно τ ; все корни его вещественны и содержатся в интервале $|\tau| < 1$. Аналогично этому

$$\left(\frac{d}{d\tau}\right)^m P_l(\tau)$$

есть многочлен относительно τ степени $k = l - m$; все его k корней лежат в интервале $|\tau| < 1$. В дополнение к этому множитель

$$\sigma^m = (1 - \tau^2)^{m/2}$$

имеет корни кратности $m/2$ при $\tau = \pm 1$. Следовательно, и k и l суть числа корней Z , только понимаемые по-разному. Если исключить кратные корни у полюсов, то Z имеет точно $l - m = k$ корней.

В квантовой теории l называется азимутальным квантовым числом; мы будем называть его азимутальным порядковым номером собственного решения. Аналогично этому k будет называться широтным порядковым номером.

Функции Лежандра связаны многочисленными соотношениями, многие из которых могут быть получены из двух фундаментальных формул

$$\sigma^2 \frac{dP_l^m}{d\tau} + l\tau P_l^m = (l + m) P_{l-1}^m, \quad (91.14)$$

$$\sigma^2 \frac{dP_{l-1}^m}{d\tau} - l\tau P_{l-1}^m = (l - m) P_l^m. \quad (91.15)$$

Например, из этих двух соотношений следует

$$(2l+1)\tau P_l^m = (l+1-m)P_{l+1}^m + (l+m)P_{l-1}^m. \quad (91.16)$$

Выражения для скоростей. Уравнения (36.13), (36.14) и (36.17) принимают вид

$$i\omega U_z = \frac{c}{r\sigma} \frac{\partial P}{\partial \lambda}, \quad (91.17)$$

$$i\omega U_\nu = \frac{c}{r\sigma} \frac{\partial P}{\partial \mu}, \quad (91.18)$$

$$i\omega Q = U_\zeta. \quad (91.19)$$

Если произвести подстановку (см. (91.1))

$$P = Z(\mu) e^{ism\lambda} P_2(\chi), \quad (91.20)$$

$$Q = Z(\mu) e^{ism\lambda} Q_2(\chi), \quad (91.21)$$

то составляющие скорости примут вид

$$U_z = \frac{c}{\omega r\sigma} P_2(\chi) X(\mu) e^{ism\lambda}, \quad (91.22)$$

$$U_\nu = \frac{c}{i\omega r\sigma} P_2(\chi) Y(\mu) e^{ism\lambda}, \quad (91.23)$$

$$U_\zeta = i\omega Q_2(\chi) Z(\mu) e^{ism\lambda}. \quad (91.24)$$

Легко видеть, что функции X , Y и Z связаны между собой соотношениями

$$X = smZ, \quad (91.25)$$

$$Y = \frac{dZ}{d\mu}, \quad (91.26)$$

$$L^2\sigma^2 Z = smX - \frac{dY}{d\mu}. \quad (91.27)$$

Если из этих трех уравнений исключить X и Y , то мы снова получим (91.9).

Используя $Z = P_l^m(\tau)$ и уравнение (91.16), найдем

$$Y = -l\tau P_l^m + (l+m)P_{l-1}^m. \quad (91.28)$$

Эта формула удобна для вычисления.

Несколько первых собственных решений содержатся в табл. 4.

Таблица 4

СОБСТВЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

$k=0,$	$l=0,$	$m=0:$	$Z=1,$	$Y=0$
$k=1,$	$l=1,$	$m=0:$	$Z=\tau,$	$Y=\sigma^2$
$k=0,$	$l=1,$	$m=1:$	$Z=\sigma,$	$Y=-\sigma\tau$
$k=2,$	$l=2,$	$m=0:$	$Z=(3\tau^2-1)/2,$	$Y=3\sigma^2\tau$
$k=1,$	$l=2,$	$m=1:$	$Z=-3\sigma\tau,$	$Y=3\sigma(2\tau^2-1)$
$k=0,$	$l=2,$	$m=2:$	$Z=3\sigma^2,$	$Y=-6\sigma^2\tau$

Осталось рассмотреть вопрос о том, все ли поля скоростей, соответствующие этим собственным решениям, регулярны у полюсов, где $\tau = \pm 1$, $\sigma = 0$. Это будет несомненно так, если все три составляющие обращаются в нуль при $\sigma = 0$; просмотр табл. 4 и формул (91.22) — (91.24) показывает, что последнее условие будет выполняться всегда, кроме случаев $m = 0$ или 1. При $m = 0$ как U_z , так и U_y обращаются в нуль во всех случаях, в то время как U_z отлично от нуля, но не зависит от широты, — это благоприятная ситуация для регулярности у полюсов полей скоростей. При $m = 1$ составляющая скорости U_z обращается в нуль на полюсах, но U_z и U_y в нуль не обращаются и зависят от широты. Достаточно рассмотреть случай $l = 1$, $m = 1$, тогда

$$U_z = \frac{cs}{\omega r} P_2 [\cos(s\lambda) + i \sin(s\lambda)],$$

$$U_y = \frac{c}{\omega r} P_2 [-\sin(s\lambda) + i \cos(s\lambda)].$$

Так как λ — это, по существу, полярная координата в плоскости, касающейся сферы в полярной точке, то отсюда следует, что поле скоростей не имеет особенностей.

Естественные граничные условия. Естественные граничные условия могут быть установлены теперь в более полном виде. На полюсах

$$\text{при } m=0: \frac{X}{\sigma} = \frac{Y}{\sigma} = 0, \quad Z \text{ ограничено;}$$

$$\text{при } m=1: \frac{X}{\sigma}, \frac{Y}{\sigma} \text{ ограничено, } Z=0;$$

$$\text{при } m>1: \frac{X}{\sigma} = \frac{Y}{\sigma} = Z=0.$$

Фазовые диаграммы. Исключение X с помощью (91.25) из уравнений (91.26) и (91.27) даёт

$$\frac{dZ}{d\mu} = Y, \quad (91.29)$$

$$\frac{dY}{d\mu} = -(L^2\sigma^2 - m^2)Z. \quad (91.30)$$

Эти уравнения имеют каноническую форму § 82; для сравнения следует положить

$$\begin{aligned} z &= \mu, \\ Y &= \mathcal{P}, \quad Z = \mathcal{Q}, \\ A &= 1, \quad B = L^2 \operatorname{sech}^2 \mu - m^2. \end{aligned} \quad (91.31)$$

Поэтому можно изобразить фазовые диаграммы, используя Y и Z в качестве координат (рис. 77). В настоящем случае можно получить явные выражения для этих переменных, поэтому приведенные графики можно сделать количественно точными. Уравнения (91.31) показывают, что их сигнатуры таковы:

$$(+ +) \text{ при } m = 0$$

и

$$(+ -)(+ +)(+ -)$$

$$\text{при } m \neq 0.$$

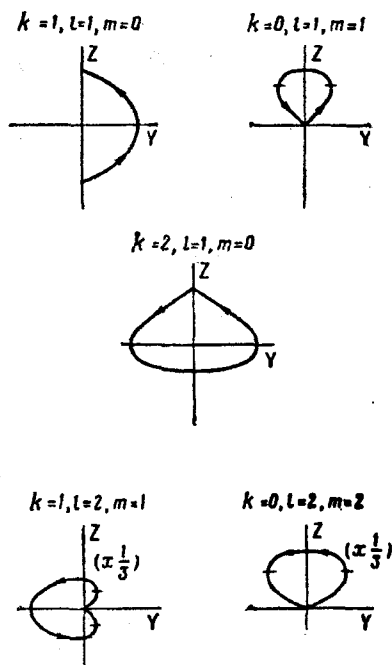


Рис. 77. Собственные решения уравнения Лежандра.

Следует заметить, что Y и Z не зависят от знака скорости s , но $X = \sin Z$.

§ 92. Секториаль ый океан

В соответствии с намеченным в § 90 планом следующей нашей задачей будет изучение океана, ограниченного вертикальными берегами. Простейший пример получится, если

океан считать сектором, простирающимся от полюса до полюса, ограниченным двумя дугами больших кругов. В качестве таковых можно выбрать меридианы $\lambda = 0$ и $\lambda = \Lambda > 0$; тем самым мы принимаем граничные условия

$$U_s = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = 0 \quad \text{и} \quad \lambda = \Lambda. \quad (92.1)$$

Обращение к формуле (91.17) показывает, что граничные условия будут удовлетворены, если

$$\begin{aligned} P &= Z(\mu) \cos(fm\lambda) P_2(\chi), \\ Q &= Z(\mu) \cos(fm\lambda) Q_2(\chi) \end{aligned} \quad (92.2)$$

и

$$f = \frac{\pi}{\Lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (92.3)$$

Тогда из уравнений (91.17) — (91.19) получаем

$$\begin{aligned} U_s &= -\frac{c}{i\omega r\sigma} X(\mu) \sin(fm\lambda) P_2(\chi), \\ U_v &= \frac{c}{i\omega r\sigma} Y(\mu) \cos(fm\lambda) P_2(\chi), \\ U_\tau &= i\omega Z(\mu) \cos(fm\lambda) Q_2(\chi), \end{aligned} \quad (92.4)$$

где

$$X = fmZ, \quad (92.5)$$

$$Y = \frac{dZ}{d\mu}, \quad (92.6)$$

$$L^2 \sigma^2 Z = fmX - \frac{dY}{d\mu}. \quad (92.7)$$

Исключив X и Y из этих трех уравнений, получим уравнение

$$\frac{d}{d\tau} \left(\sigma^2 \frac{dZ}{d\tau} \right) + \left(L^2 - \frac{m^2 f^2}{\sigma^2} \right) Z = 0, \quad (92.8)$$

которое отличается от уравнения Лежандра лишь тем, что вместо m здесь mf . Это не совсем тривиальное различие, потому что mf уже не целое число.

Собственные значения этого уравнения по-прежнему могут быть записаны как

$$L^2 = l(l+1), \quad (92.9)$$

но l не обязательно целое число. Взамен этого здесь

$$l = mf + k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (92.10)$$

Рис. 78 представляет собой график L как функции от Λ ; для различных значений m и k . Собственные решения имеют

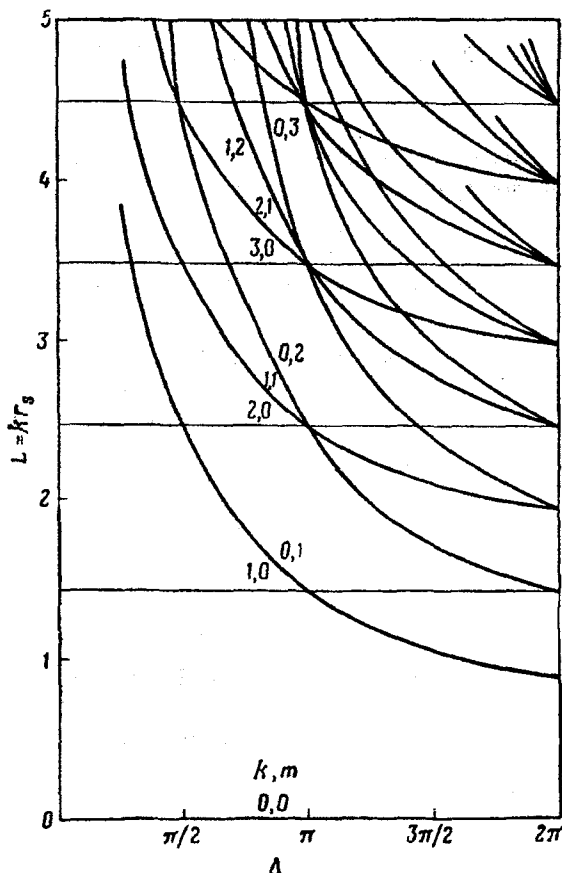


Рис. 78. Зависимость собственного значения L от угловой ширины Λ секторального океана.

слегка отличную форму в случаях, когда k четно и когда нечетно.

Если k четно, то

$$Z = A\sigma^{mf} \left[1 - \frac{k(2mf+k+1)}{2!} \tau^2 + \frac{k(k-2)(2mf+k+1)(2mf+k+3)}{4!} \tau^4 + \dots \right]. \quad (92.11)$$

а когда k нечетно, то

$$Z = A\sigma^{mf} \left[\tau - \frac{(k-1)(2mf+k+2)}{3!} \tau^3 + \right. \\ \left. + \frac{(k-1)(k-3)(2mf+k+2)(2mf+k+4)}{5!} \tau^5 + \dots \right]. \quad (92.12)$$

Удобно выбрать постоянную A таким образом, чтобы при $f=1$ эти формулы приводились к

$$Z = P_l^m(\tau).$$

Несколько первых собственных решений содержатся в табл. 5.

Таблица 5

СОБСТВЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

$k=0, \quad l=0,$	$m=0: \quad Z=0,$	$Y=0$
$k=1, \quad l=1,$	$m=0: \quad Z=\tau,$	$Y=\sigma^2$
$k=0, \quad l=f,$	$m=1: \quad Z=\sigma^f,$	$Y=-f\sigma^f\tau$
$k=2, \quad l=2,$	$m=0: \quad Z=(3\tau^2-1)/2,$	$Y=3\sigma^2\tau$
$k=1, \quad l=f+1,$	$m=1: \quad Z=-3\sigma^f\tau,$	$Y=3\sigma^f[(1+f)\tau^2-1]$
$k=0, \quad l=2f,$	$m=2: \quad Z=3\sigma^{2f},$	$Y=-6f\sigma^{2f}\tau$

ЛИТЕРАТУРА

1. Byerly W. E., Fourier's Series and Spherical Harmonics, New York, Ginn and Co., 1893.
2. MacRobert T. M., Spherical Harmonics, New York, Dover, 1948.
3. Magnus W., Oberhettinger F., Special Functions of Mathematical Physics, New York, Chelsea, 1949.

Глава XVII

СФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВРАЩЕНИЯ

§ 93. Введение

О математических трудностях, возникающих при комбинации сил Кориолиса со сферическими поверхностями уровня, уже говорилось в § 38. Там было показано, что наиболее серьезная трудность — невозможность разделения переменных в уравнениях — может быть устранена, если пренебречь горизонтальной составляющей угловой скорости вращения планеты. Оправдание этого пренебрежения — совсем другое дело, однако стало уже традицией пользоваться выводами из такого приближения.

Если следовать этой традиции, то уравнения разделяются на остаточные уравнения (уже рассмотренные в предыдущих главах) и уравнение, содержащее только λ и μ . Это уравнение является обобщением волнового уравнения на сферической поверхности и было впервые получено Лапласом в связи с теорией приливов в океане постоянной глубины. Поэтому его можно назвать уравнением приливов, хотя оно годится для значительно более широкого класса задач.

Несмотря на большое количество работ, посвященных этому уравнению, его теория находится все еще в недостаточно удовлетворительном состоянии. Она приводит к обобщенному уравнению Лежандра (91.9), решения которого уже не многообразны и могут быть выражены лишь в виде бесконечных рядов. Более того, даже вычисление коэффициентов этих рядов представляет собой довольно трудную задачу.

Без сомнения, целеустремленные усилия приведут к решению всех задач, связанных с уравнением приливов, но здесь мы не беремся достичь такой полноты. Существует много вопросов, в которых легко можно добиться прогресса и без особого труда получить новые результаты. В настоящей главе будут рассмотрены лишь такие вопросы.

§ 94. Уравнение приливов первого порядка

В § 38 уравнение приливов Лапласа было получено в форме, аналогичной волновому уравнению на сфере. Эта форма уравнения не наилучшая для практического использования, а поэтому прежде всего необходимо дать второй вывод, чтобы получить уравнение, легче приводимое к рабочему виду. Уравнение, выведенное в предыдущих главах, было

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1}{a^2 \tau^2 - 1} \left[\frac{\partial P_1}{\partial \lambda} + i a \tau \frac{\partial P_1}{\partial \mu} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \frac{1}{a^2 \tau^2 - 1} \left[\frac{\partial P_1}{\partial \mu} - i a \tau \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} \right] \right\} - \sigma^2 L^2 P_1 = 0, \quad (94.1)$$

где

$$a = \frac{\Omega}{\omega} \quad \text{и} \quad L = \tau r_s. \quad (94.2)$$

Подстановка

$$P_1 = Z(\mu) \exp(i s m \lambda)$$

(ср. (91.1)) приводит это уравнение к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d}{d\mu} - s m a \tau \right) \frac{1}{1 - a^2 \tau^2} \left(\frac{dZ}{d\mu} + s m a \tau Z \right) + (L^2 \sigma^2 - m^2) Z = 0. \quad (94.3)$$

Появление множителя $1 - a^2 \tau^2$ в знаменателе затрудняет изучение этого уравнения. Можно дать другой вид этого уравнения, к выводу которого мы сейчас и приступим.

Сделав традиционное приближение (38.3)—(38.7), получим

$$i \omega U_\epsilon + \Omega \tau U_v = \frac{c}{r \sigma} \frac{\partial P}{\partial \lambda}, \quad (94.4)$$

$$i \omega U_v - \Omega \tau U_\epsilon = \frac{c}{r \sigma} \frac{\partial P}{\partial \mu}, \quad (94.5)$$

$$i \omega U_\zeta = c \left(\frac{\partial P}{\partial r} + \Gamma P \right) - N^2 Q, \quad (94.6)$$

$$i \omega P = \frac{c}{r \sigma} \left[\frac{\partial U_\epsilon}{\partial \lambda} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mu} (\sigma U_v) \right] + c \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U_\zeta) - \Gamma U_\zeta \right], \quad (94.7)$$

$$i \omega Q = U_\zeta. \quad (94.8)$$

Если выражения для скоростей (91.22)—(91.24) подставить в эти уравнения, то можно найти, что P_2 и Q_2 должны удовлетворять остаточным уравнениям, в то время как X , Y , Z удовлетворяют следующим уравнениям:

$$X - a\tau Y = smZ, \quad (94.9)$$

$$Y - a\tau X = \frac{dZ}{d\mu}, \quad (94.10)$$

$$smX - \frac{dY}{d\mu} = L^2\sigma^2 Z. \quad (94.11)$$

Легко заметить, что при $a = 0$ они приводятся к уравнениям (91.25)—(91.27). Поскольку $a = \Omega/\omega$, то в пределе для высоких частот имеем $a = 0$, поэтому в данном предельном случае эффект вращения Земли будет пренебрежимо мал. Более полно это будет исследовано в § 98.

Исключив X из последних трех уравнений, получим

$$\frac{dZ}{d\mu} + sma\tau Z = (1 - a^2\tau^2) Y, \quad (94.12)$$

$$\frac{dY}{d\mu} - sma\tau Y = (m^2 - L^2\sigma^2) Z. \quad (94.13)$$

Если исключить также Y , то вновь будет получено уравнение (94.3). Однако работать с системой (94.12)—(94.13) намного удобнее, чем с уравнением (94.3).

Естественные граничные условия для функций X , Y , Z те же, что и прежде; они даны в явном виде формулами (91.29).

§ 95. Зональные колебания

При $m = 0$ собственные решения становятся независимыми от долготы и, следовательно, представляют зонально-симметричные колебания. В этом случае уравнения (94.12) и (94.13) приводятся к таким:

$$\frac{dZ}{d\mu} = (1 - a^2\tau^2) Y = \sigma^2 \frac{dZ}{d\tau}, \quad (95.1)$$

$$\frac{dY}{d\mu} = -L^2\sigma^2 Z = \sigma^2 \frac{dY}{d\tau}. \quad (95.2)$$

Случай $L = 0$. При $L = 0$ уравнения становятся еще проще и имеют очевидное решение

$$Y = 0, \quad z = 1, \quad (95.3)$$

откуда $X = 0$, т. е. это решение удовлетворяет граничному условию (91.29). Следовательно, это собственное решение, и $L = 0$ есть собственное значение для всех значений ω .

Связь со сфероидальными волновыми функциями. При $L \neq 0$ исключение Z приводит к уравнению

$$\sigma^2 \frac{d^2 Y}{d\tau^2} + L^2 (1 - a^2 \tau^2) Y = 0 \quad (95.4)$$

для Y . Следующая подстановка

$$Y = \sigma S \quad (95.5)$$

ведет к уравнению

$$\frac{d}{d\tau} \left(\sigma^2 \frac{dS}{d\tau} \right) + \left[L^2 (1 - a^2 \tau^2) - \frac{1}{\sigma^2} \right] S = 0. \quad (95.6)$$

Это уравнение представляет собой специальный случай сфероидального волнового уравнения

$$\frac{d}{d\tau} \left(\sigma^2 \frac{dS_{ml}}{d\tau} \right) + \left[A_{ml} - h^2 \tau^2 - \frac{m^2}{\sigma^2} \right] S_{ml} = 0, \quad (95.7)$$

изучавшегося различными авторами [1, 4]. При $h = 0$ это уравнение приводится к уравнению Лежандра (91.7). Поэтому функции S_{ml} являются обобщениями P_l^m и обозначения книги [4] выбраны таким образом, чтобы подчеркнуть это обстоятельство. Таким образом,

$$S_{ml} = S_{ml}(h, \tau) \quad (95.8)$$

представляют собой собственные решения уравнения (95.7), а

$$S_{ml}(0, \tau) = P_l^m(\tau), \quad A_{ml}(0) = l(l+1); \quad (95.9)$$

l всегда должно быть положительным целым числом и

$$l = m, m+1, m+2, \dots$$

Независимо от значения h функция S_{ml} имеет в точности $l - m$ корней для $|\tau| < 1$ и корни кратности $m/2$ при $\tau = \pm 1$. Эти свойства S_{ml} те же, что и у P_l^m , и будут использованы ниже.

Сравнивая (95.6) и (95.7), можно видеть, что

$$\begin{aligned} a^2 L^2 &= h^2, \\ m &= 1, \\ L^2 &= A_{ml}(h). \end{aligned} \quad (95.10)$$

Существуют таблицы для $A_{ml}(h)$ [4], так что можно вычислить значения пар $L = \kappa r_s$, $a = \Omega/\omega$, соответствующих разным

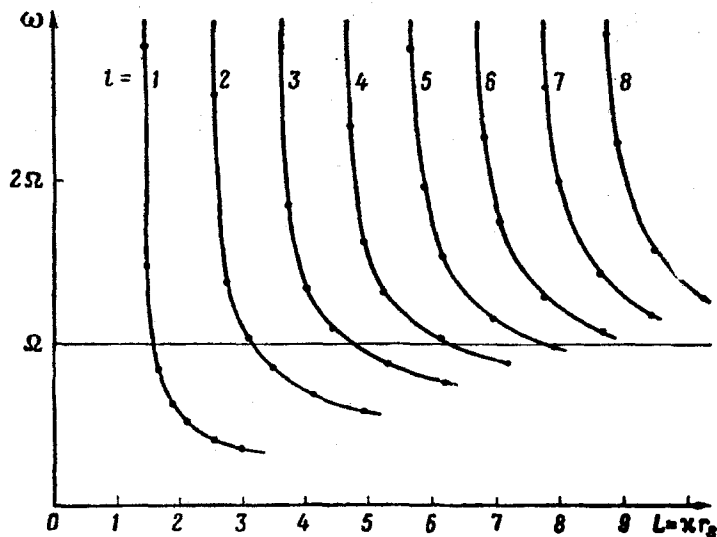


Рис. 79. Диагностическая диаграмма зональных колебаний.

значениям параметра h . Ниже приводится небольшая таблица таких сопряженных пар (табл. 6), она же представлена графически на рис. 79.

Так как $Y = \sigma S_{1l}$, то Y имеет $l-1$ корней для конечных значений μ и корни первого порядка при $\tau = \pm 1$. Согласно теории, развитой в § 72, которая применима к уравнению (95.4), эти корни должны быть разделены l экстремальными значениями. Из того что уравнение (95.2) имеет вид

$$\frac{dY}{d\tau} = -L^2 Z$$

следует, что Z имеет в точности l корней, не совпадающих с полюсами. Следовательно, целое число l , определяемое (95.10), является также азимутальным порядковым числом

Таблица 6

СОПРЯЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ χ_{r_s} И $\omega/2$ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ h И l

h	χ_{r_s}	$\omega/2$	h	χ_{r_s}	$\omega/2$
$l = 1$			$l = 2$		
0,0	1,414	∞	0,0	2,449	∞
0,5	1,432	2,863	0,5	2,471	4,942
1,0	1,482	1,482	1,0	2,535	2,535
2,0	1,654	0,8267	2,0	2,766	1,383
3,0	1,872	0,6240	3,0	3,091	1,030
4,0	2,098	0,5244	4,0	3,457	0,8642
5,0	2,313	0,4626	5,0	3,826	0,7653
6,0	2,515	0,4192	6,0	4,183	0,6971
7,0	2,704	0,3862	7,0	4,519	0,6456
8,0	2,881	0,3601	8,0	4,835	0,6044
$l = 3$			$l = 4$		
0,0	3,464	∞	0,0	4,472	∞
0,5	3,481	6,962	0,5	4,486	8,971
1,0	3,531	3,531	1,0	4,526	4,526
2,0	3,726	1,863	2,0	4,684	2,342
3,0	4,030	1,343	3,0	4,940	1,647
4,0	4,412	1,103	4,0	5,283	1,321
5,0	4,837	0,9674	5,0	5,694	1,139
6,0	5,275	0,8791	6,0	6,150	1,052
7,0	5,704	0,8149	7,0	6,625	0,9465
8,0	6,116	0,7645	8,0	7,101	0,8876
$l = 5$			$l = 6$		
0,0	5,477	∞	0,0	6,481	∞
0,5	5,488	10,977	0,5	6,490	12,980
1,0	5,522	5,522	1,0	6,519	6,519
2,0	5,654	2,827	2,0	6,631	3,316
3,0	5,870	1,957	3,0	6,817	2,272
4,0	6,165	1,541	4,0	7,073	1,768
5,0	6,531	1,306	5,0	7,394	1,479
6,0	6,958	1,160	6,0	7,776	1,296
7,0	7,430	1,061	7,0	8,213	1,173
8,0	7,928	0,9910	8,0	8,693	1,087

(продолжение табл. 6)

h	x_{r_s}	$\omega/2$	h	x_{r_s}	$\omega/2$
$l = 7$			$l = 8$		
0,0	7,483	∞	0,0	8,45	∞
0,5	7,492	14,983	0,5	8,493	16,985
1,0	7,516	7,516	1,0	8,514	8,514
2,0	7,615	3,807	2,0	8,601	4,301
3,0	7,777	2,592	3,0	8,746	2,915
4,0	8,001	2,000	4,0	8,945	2,236
5,0	8,285	1,657	5,0	9,199	1,840
6,0	8,626	1,438	6,0	9,504	1,584
7,0	9,019	1,288	7,0	9,859	1,408
8,0	9,461	1,183	8,0	10,261	1,283

собственного решения. Можно видеть, что граничные условия (91.29) удовлетворены.

Функции $S_{ml}(h, \tau)$. Точно так же как таблицы из [4] позволяют вычислить собственные числа L , они дают еще возможность найти коэффициенты бесконечных рядов, представляющих функции S_{ml} . Как уже отмечалось выше, это нетривиальная задача, поскольку вычислить коэффициенты рядов не так просто. Даже когда коэффициенты найдены, задача построения графиков этих функций остается очень трудоемкой, и мы не будем здесь пытаться ее решить. Вместо этого мы применим методы гл. XIV, чтобы получить качественные результаты, касающиеся соотношений между Y и Z .

Фазовые траектории. Уравнения (95.1) и (95.2) имеют уже каноническую форму, так что к графикам (Y, Z) можно применить теоремы гл. XIV. Типичные случаи показаны на рис. 80. При $a^2 < 1$ (или $\omega^2 > Q^2$) коэффициенты

$$\begin{aligned} A &= (1 - a^2\tau^2), \\ B &= L^2(1 - \tau^2) \end{aligned} \quad (95.11)$$

не имеют конечных корней для вещественных значений τ ; сигнатура при этом такая: $(+ +)$. При $a^2 > 1$ (или $\omega^2 < Q^2$)

коэффициент A имеет корень в точке

$$\tau = \operatorname{th} \mu = \pm \frac{1}{a} = \pm \frac{\omega}{\Omega}.$$

Поэтому сигнатура здесь такова: $(-+)(++)(-+)$. Эти результаты, в сочетании с приведенными выше, относящимися

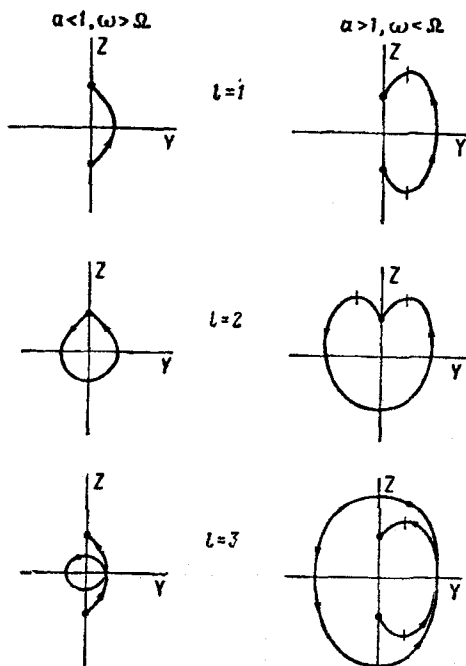


Рис. 80. Фазовые траектории зональных колебаний.

к корням Y и Z , позволяют уже сделать набросок графика, как это показано на рис. 80.

Следует заметить, что угловая скорость всех этих фазовых траекторий положительна и что полное изменение угла от $\mu = -\infty$ до $\mu = +\infty$ равно $l\pi$.

§ 96. Решения вблизи полюсов

При $m \neq 0$ решения уравнения приливов не могут быть выражены через известные функции, кроме некоторых сугубо частных случаев. Эти частные случаи будут рассмотрены

ниже, но полное понимание результатов требует некоторых общих сведений об уравнении приливов и его решениях. В настоящем параграфе будет исследовано поведение решений для очень высоких широт.

Будет показано, что как Y , так и Z обращаются на полюсах в нуль, имея множитель σ^m . Это обеспечивает выполнение граничных условий (91.29) при $m > 1$; случай $m = 1$ требует более детального исследования.

Вблизи северного полюса переменная

$$x = 1 - \tau \quad (96.1)$$

будет иметь очень малые значения; если использовать x как независимую переменную, то система уравнений приливов (94.12) — (94.13) примет вид

$$\begin{aligned} -x(2-x) \frac{dZ}{dx} + sma(1-x)Z &= [1 - a^2(1-x)^2]Y, \\ -x(2-x) \frac{dY}{dx} - sma(1-x)Y &= [m^2 - L^2x(2-x)]Z. \end{aligned} \quad (96.2)$$

Функции Y и Z могут быть разложены в ряды по степеням x :

$$\begin{aligned} Y &= x^\nu (a_0 + a_1x + \dots), \\ Z &= x^\nu (b_0 + b_1x + \dots), \end{aligned} \quad (96.3)$$

где a_0, b_0 не могут быть одновременно равны нулю. Если подставить эти ряды в уравнение (96.2) и собрать члены, имеющие одну и ту же степень по x , то мы получим уравнения

$$\begin{aligned} x^\nu [(sma - 2\nu)b_0 - (1 - a^2)a_0] + x^{\nu+1}[(\nu - sma)b_0 - \\ - 2a^2a_0 + (sma - 2\nu - 2)b_1 - (1 - a^2)a_1] + \dots = 0, \\ x^\nu [(sma + 2\nu)a_0 - m^2b_0] + x^{\nu+1}[(\nu + sma)a_0 + 2L^2b_0 - \\ - (sma + 2\nu + 2)a_1 - m^2b_1] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (96.4)$$

Коэффициенты при разных степенях x должны обращаться в нуль независимо; применив этот принцип к члену степени ν , будем иметь

$$\begin{aligned} (1 - a^2)a_0 - (sma - 2\nu)b_0 &= 0, \\ (sma + 2\nu)a_0 + m^2b_0 &= 0. \end{aligned} \quad (96.5)$$

Так как a_0 и b_0 не равны нулю одновременно, то детерминант этой системы должен обращаться в нуль

$$m^2(1 - a^2) + (m^2a^2 - 4v^2) = 0,$$

откуда

$$v = \pm \frac{m}{2}.$$

Отрицательный знак следует исключить, чтобы Y и Z не обращались в бесконечность; следовательно, $v = m/2$, и можно принять

$$a_0 = m, \quad b_0 = -(1 + sa). \quad (96.6)$$

Следовательно, для малых значений $(1 - \tau)$ будет

$$\begin{aligned} Y &= m(1 - \tau)^{m/2}[1 + \dots], \\ Z &= -(1 + sa)(1 - \tau)^{m/2}[1 + \dots]. \end{aligned} \quad (96.7)$$

Южный полярный район может быть рассмотрен аналогичным образом, но соображения симметрии позволяют сразу заключить, что собственные решения можно записать в виде

$$\begin{aligned} Y &= \pm m(1 + \tau)^{m/2}[1 + \dots], \\ Z &= \mp (1 + sa)(1 + \tau)^{m/2}[1 + \dots] \end{aligned}$$

вблизи южного полюса. Все это можно объединить формулами

$$\begin{aligned} Y &= m\sigma^m f(\tau), \\ Z &= -(1 + sa)\sigma^m g(\tau), \end{aligned} \quad (96.8)$$

где

$$\begin{aligned} f(1) &= g(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m/2}, \\ f(-1) &= -g(-1) = \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{m/2}. \end{aligned} \quad (96.9)$$

Из уравнений (94.9) получаем

$$X = \sigma^m [m\tau f(\tau) - (1 + sa)smg(\tau)]. \quad (96.10)$$

Отсюда следует, что при $m = 1$ и $\tau = \pm 1$

$$\begin{aligned} \frac{X}{\sigma} &= \mp sg(\pm 1), \\ \frac{Y}{\sigma} &= f(\pm 1), \end{aligned}$$

и граничные условия выполнены даже в этом случае, точно так же как и при $m > 1$.

§ 97. Уравнение приливов в канонической форме

Следует заметить, что при $\dot{m} = 0$ уравнение приливов имеет канонический вид гл. XIV. При $m \neq 0$ уравнения (94.12) и (94.13) приводятся к каноническому виду подстановкой

$$Y = \sigma^{-sma} y, \quad Z = m^2 \sigma^{sma} z. \quad (97.1)$$

Именно, имеем

$$\frac{dz}{d\mu} = (m^2 - b^2 \tau^2) \sigma^{-2sb} y, \quad (97.2)$$

$$\frac{dy}{d\mu} = - \left(\frac{L^2}{m^2} \sigma^2 - 1 \right) \sigma^{2sb} z, \quad (97.3)$$

где

$$b = ma. \quad (97.4)$$

Во всех дальнейших приложениях m будет принимать лишь значения 1, 2, 3 Однако сейчас необходимо рассмотреть более общие значения m и, в частности, иногда считать b постоянным, а m и L изменяющимися непрерывно.

Сигнатуры. Для каждого фиксированного значения b можно построить диаграмму, аналогичную x, ω -диаграмме гл. XIV, с m^2/L^2 и m^2/b^2 в качестве прямоугольных координат (рис. 81). Первая четверть этой диаграммы разделена на пять областей; решения, соответствующие всем точкам одной из этих областей, имеют одинаковые сигнатуры. Эти сигнатуры таковы:

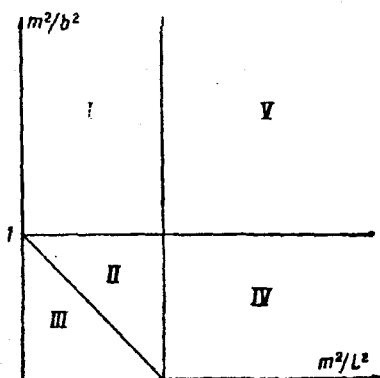


Рис. 81. Пять частных случаев уравнения приливов.

Область I	(+—)	(++)	(+—)		
Область II	(— —)	(+—)	(++)	(+—)	(— —)
Область III	(— —)	(— +)	(++)	(— +)	(— —)
Область IV	(— —)	(+—)	(— —)		
Область V	(+—)				

Фазовые траектории. Можно построить фазовую траекторию такого типа, как было описано в гл. XIV, если считать y и z функциями параметра μ (или τ). Следует заметить, что сигнатуры, перечисленные выше, не зависят от s и от величины b (или a); это уже не имеет места для фазовых траекторий. Уравнение (97.1) содержит как s , так и a , и эти величины определяют характер фазовой траектории для больших значений μ . Принимая во внимание (96.8), найдем

$$\begin{aligned} y &= m \sigma^{m(1+sa)} f(\tau), \\ z &= \frac{1}{m^2} \sigma^{m(1-sa)} g(\tau). \end{aligned} \quad (97.5)$$

Когда $\mu \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow 0$ и y обращается в нуль при $1+sa > 0$ и в бесконечность при $1+sa < 0$. Аналогично этому z обращается в нуль при $1-sa > 0$ и в бесконечность при $1-sa < 0$.

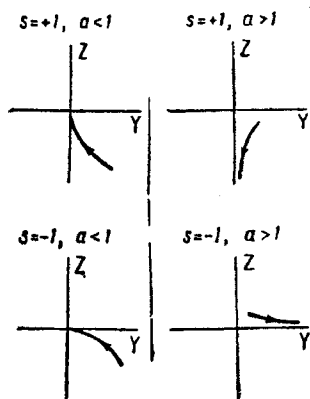


Рис. 82. Асимптотическое поведение собственных решений.

Отсюда следует, что те части фазовых траекторий, которые относятся к большим положительным значениям μ , могут быть одного из четырех типов, изображенных на рис. 82. Характер траектории для больших отрицательных значений μ может быть получен из соображений симметрии.

Используя эти сведения относительно начала и конца фазовых траекторий, легко показать, что в области V не может быть собственных решений с сигнатурой $(+ -)$. Качественный характер фазовых траекторий, соответствующих остальным четырем областям, также может быть установлен и

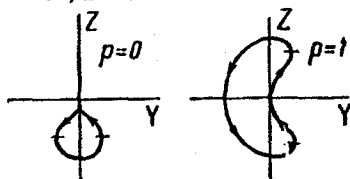
нанесен на графики в согласии с теоремами гл. XIV. Эти графики показаны на рис. 83 и 84.

Можно видеть, что полный угол, описанный радиусом-вектором, есть всегда целочисленное кратное π ; назовем это целое число p . В областях II и III p может быть положительным, отрицательным или нулем. В области I $p = 0, 1, 2, \dots$ при $s = \pm 1$, но при $s = -1$ значение $p = 0$ невозможно и $p = 1, 2, 3, \dots$. В области IV $p = 0$,

— 1, — 2, ... при $s = -1$, но при $s = +1$ значение $p = 0$ невозможно и $p = -1, -2, -3, \dots$.

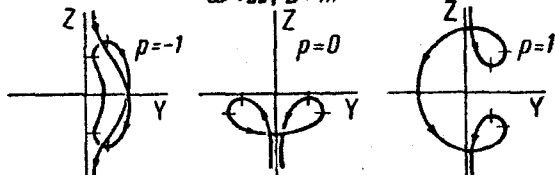
Область I: $(+-)(++)(+-)$

$\omega > \Omega, L > m$



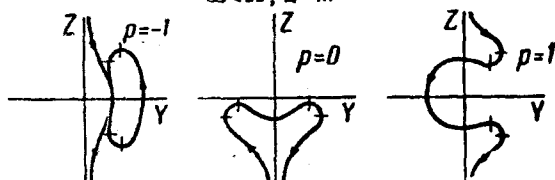
Область II: $(--)(+-)(++)(+-)(--)$

$\omega < \Omega, L > m$



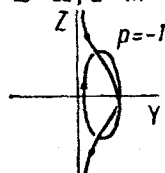
Область III: $(--)(-+)(++)(-+)(--)$

$\omega < \Omega, L > m$



Область IV: $(--)(+-)(--)$

$\omega < \Omega, L < m$



Положительная
скорость
 $s = +1$

Рис. 83. Фазовые траектории собственных решений для положительной скорости $s = +1$.

Число корней z (отличных от $\mu = \pm \infty$) также может быть сосчитано: оно уже получило обозначение k в гл. XIV. Однако сейчас необходимо будет принимать во внимание направление, в котором фазовая траектория пересекает ось y ,

и переопределить k как алгебраическую сумму таких пересечений (ср. § 87, 88). Тогда из рис. 83 и 84 можно

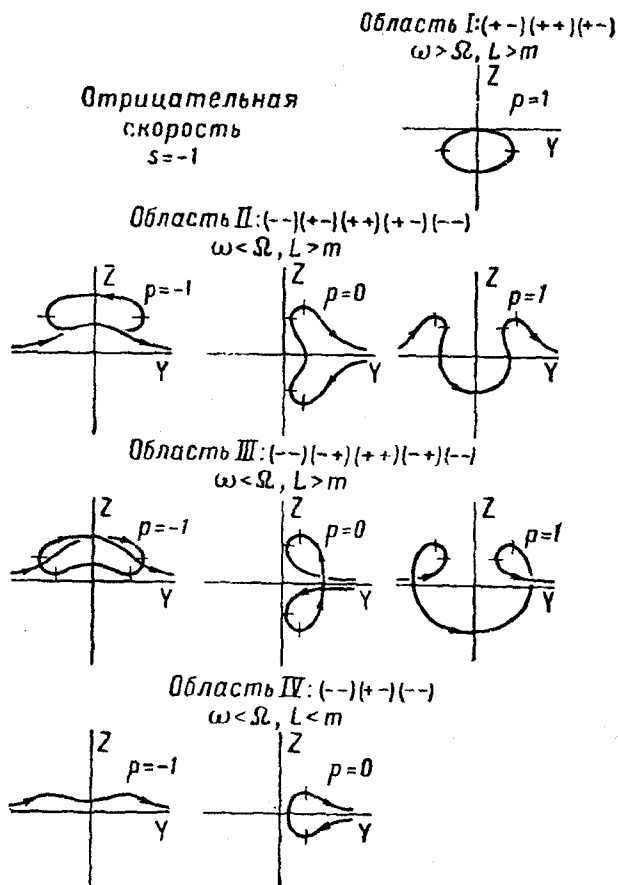


Рис. 84. Фазовые траектории собственных рещений для отрицательной скорости $s = -1$.

видеть, что $k = p$ при $s = +1$. Однако при $s = -1$ вопрос усложняется; в области I имеем $k = p - 1$, в то время как в областях II, III, IV окажется $k = p + 1$.

Кривые волновых типов. Те точки (m^2/L^2) , (m^2/b^2) -диаграммы, которые соответствуют собственным решениям, по-

прежнему лежат на кривых — кривых волновых типов, — как это было в гл. XIII. Пусть, $\vartheta(\mu, m, L, b)$ — полярный угол фазовой траектории, определенный таким образом, что $\vartheta(-\infty, m, L, b) = 0$. Тогда уравнение кривой волновых типов таково:

$$\vartheta = (+\infty, m, L, b) = p\pi, \quad (97.6)$$

где p — целое число, определенное выше.

Мы используем формулу Штурма (§ 84), чтобы доказать некоторые свойства кривых волновых типов. Пусть (y_1, z_1) и (y_2, z_2) — два собственных решения, соответствующих одним и тем же значениям b и p , но различным значениям m и L . Тогда в обозначениях, использованных в уравнениях (97.2) и (97.3), формула Штурма имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu}(z_1 y_2 - y_1 z_2) = (m_1^2 - m_2^2) \sigma^{-2sb} y_1 y_2 + \\ + \left(\frac{L_1^2}{m_1^2} - \frac{L_2^2}{m_2^2} \right) \sigma^{2sb} + 2z_1 z_2. \end{aligned} \quad (97.7)$$

Как и в § 84, отсюда можно заключить, что $\vartheta(\mu, m, L, b)$ является монотонно возрастающей функцией каждой из величин m^2 и L^2/m^2 , если μ и b считать постоянными. Отсюда, в свою очередь, следует, что график (97.6) на плоскости (m^2/L^2) (m^2/b^2) имеет всюду положительный наклон; далее, если увеличить целое число, то кривая сместится вверх и влево.

Сопоставляя все узнанное до сих пор относительно кривых волновых типов и целого числа p , мы имеем основания предположить, что полная диагностическая диаграмма будет иметь вид, близкий к изображенному на рис. 85. Следует заметить, что случаи $s = \pm 1$ отличаются по расположению кривой $p = 0$. Однако это предположение, каким бы разумным оно ни оказалось, пока лишь рабочая гипотеза, которая должна быть в дальнейшем проверена и уточнена.

Переход к плоскости ω . Строя рис. 85, мы предполагали, что $b = ma = m\Omega/\omega$ постоянно, в то время как m и $L = \mu g_s$ изменяются непрерывно. Поэтому плоская диаграмма рис. 85 представляет собой сечение трехмерного пространства, где b — третья координата. Для проверки справедливости предположений, сделанных выше, значительно

удобнее такие диаграммы, как изображенная на рис. 86, где $m = \text{const}$, а ω и $L = \kappa r_s$ — переменные координаты.

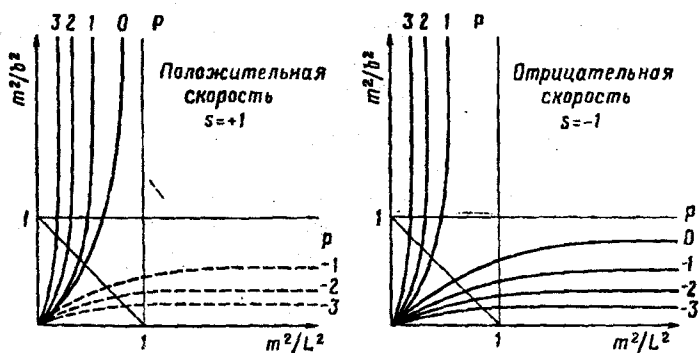


Рис. 85. Диагностические диаграммы на плоскости $(m^2/b^2) (m^2/L^2)$.

Эти κ, ω -диаграммы представляют собой существенно другие сечения упомянутой выше трехмерной фигуры, с тем

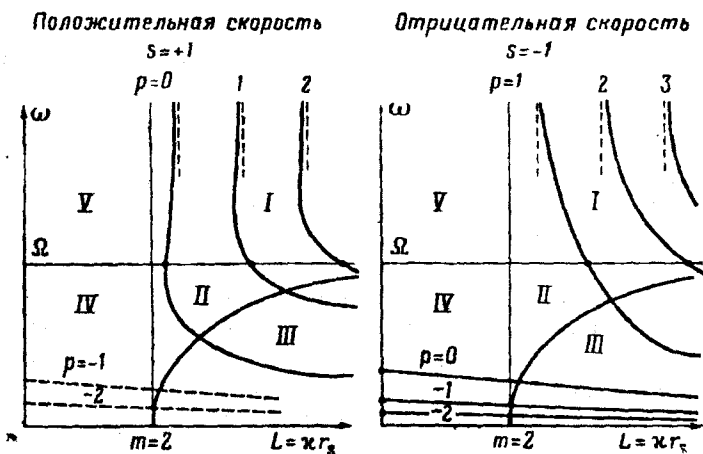


Рис. 86. Диагностические диаграммы на плоскости $\kappa\omega$.

еще различием, что в качестве декартовой координаты употребляется L вместо m^2/L . Нетрудно видеть, как будет выглядеть это другое сечение (если ограничиться качественной картиной). Рис. 86 выражает то же, что и рис. 85, но

в новой системе координат m считается постоянным, а ω и κs изменяются непрерывно. Рис. 86 следует сравнить с рис. 79, который построен количественно точно для волнового типа $m=0$; в этом частном случае величина s из уравнений исчезает. Из теории сфероидального волнового уравнения можно также заключить, что не существует собственных решений для отрицательных p ; в самом деле, это непосредственно следует из того, что сигнатура всех решений здесь $(-+)$ $(++)$ $(-+)$ (ср. рассуждение о фазовых траекториях в § 95).

§ 98. Предельный случай высоких частот

Последние два параграфа были посвящены общему обзору уравнений приливов и их собственных решений. Результаты являлись большей частью качественными; осталось получить те из количественных выводов, которые могут быть найдены без большого труда. Первая группа таких результатов относится к предельному случаю $a \rightarrow 0$, или $\omega \rightarrow \infty$. Уже было замечено выше, в § 94, что $a=0$ равносильно также $\Omega=0$; в пределе для высоких частот уравнения и их собственные решения должны стремиться к тем, которые были предметом обсуждения в гл. XVI. Однако природа такого предельного перехода требует дальнейшего изучения.

При $a=0$ собственные решения таковы:

$$\begin{aligned} Z &= P_l^m(\tau), \\ Y &= \sigma^2 \frac{dP_l^m}{d\tau}, \\ X &= smP_l^m(\tau). \end{aligned} \quad (98.1)$$

а собственные значения

$$L^2 = l(l+1), \quad l = m, m+1, \dots \quad (98.2)$$

Фазовые диаграммы некоторых из этих собственных решений показаны на рис. 77 гл. XVI.

Задача состоит в том, чтобы отразить эти количественные результаты на κ, ω -диаграмме (рис. 86). Чтобы это выполнить, необходимо определить значение P , соответствующее заданным значениям l и m . Сделать это формальным образом совершенно просто. В гл. XVI мы видели, что число корней z

равно $k = l - m$. Если a велико и $L^2 > m^2$, то точка (x, ω) лежит в области I диагностической диаграммы. Наконец, в § 97 было отмечено, что в этой области $k = p$ при $s = +1$ и $k = p - 1$ при $s = -1$, следовательно,

$$\begin{aligned} p &= l - m & \text{при } s = +1, \\ p &= l - m + 1 & \text{при } s = -1. \end{aligned} \quad (98.3)$$

На рис. 86 m для примера имеет значение 2. Следовательно, при $s = +1$ кривые с $p = 0, 1, 2$ должны стремиться к асимптотам

$$L^2 = l(l+1) = (p+m)(p+m+1) = (p+2)(p+3)$$

при $\omega \rightarrow \infty$. Эти асимптотические значения показаны пунктирными вертикальными прямыми. Аналогично этому при $s = -1$

кривые с $p = 1, 2, \dots$ должны иметь такие асимптоты:

$$\begin{aligned} L^2 &= l(l+1) = \\ &= (p+m-1)(p+m) = \\ &= (p+1)(p+2); \end{aligned}$$

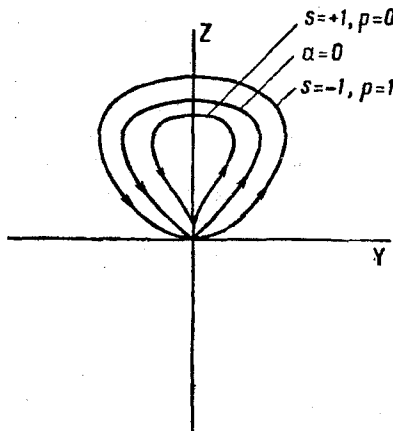
они также показаны на рис. 86.

Однако при рассмотрении рис. 77 бросается в глаза парадокс, состоящий в том, что p было определено через полный угол, описываемый радиусом-вектором фазовой точки, когда последняя проходит всю траекторию. Согласно § 97, этот угол

Рис. 87. Фазовые траектории для предельного случая высоких частот.

должен быть равен π , но фазовые траектории на рис. 77 показывают, что он не является целочисленным кратным π (кроме случая $m = 0$).

Разгадка этого парадокса состоит в том, что на рис. 77 изображены фазовые траектории при $a = 0$, в то время как сейчас мы рассматриваем малые, но все же отличные от нуля значения a . На рис. 87 средняя кривая относится к случаю $l = 2, m = 2, k = 0$. Внутренняя и внешняя кривые



соответствуют малому, но отличному от нуля значению a при $s = \pm 1$. Значения p для них равны 0 и 1. Если $a \rightarrow 0$, то обе эти кривые стремятся к средней кривой (где p не целое), но неравномерно по p .

§ 99. Полусуточные колебания

Другая возможность для получения количественных результатов представляется при $\omega = \Omega$ или $a = 1$. Уравнения приливов (94.12) и (94.13) тогда принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \mu} + sm\tau Z &= \sigma^2 Y, \\ \frac{\partial Y}{\partial \mu} - sm\tau Y &= -(L^2 \sigma^2 m^2) Z.\end{aligned}\quad (99.1)$$

Если $m = 0$, то их можно упростить еще более, тогда они будут иметь решения в виде элементарных функций. При $m \neq 0$ исключение Y приводит к уравнению второго порядка

$$\sigma^2 \frac{d^2 z}{d\tau^2} + \left[L^2 \sigma^2 - sm - \frac{m^2 - 2sm}{\sigma^2} \right] z = 0. \quad (99.2)$$

С помощью подстановки

$$z = \sigma S \quad (99.3)$$

мы получаем из (99.2) сфероидальное волновое уравнение

$$\frac{d}{d\tau} \left(\sigma^2 \frac{dS}{d\tau} \right) + \left[(L^2 - m^2) - L^2 \tau^2 - \frac{(m - s)^2}{\sigma^2} \right] S = 0. \quad (99.4)$$

Для того чтобы привести его к обозначениям, принятым в [4], следует положить

$$S = S_{m' l'}(h, \tau), \quad (99.5)$$

$$m' = m - s, \quad (99.6)$$

$$h^2 = L^2, \quad (99.7)$$

$$L^2 - sm = A_{m' l'}(h). \quad (99.8)$$

Комбинация этих уравнений дает

$$L^2 - A_{m' l'}(L) = sm' + 1. \quad (99.9)$$

Это трансцендентное уравнение определяет собственное значение L . Используя упомянутые ранее таблицы [4], можно решить это уравнение графически со значительной точностью.

Результаты вычислений даны в табл. 7, в которой содержатся не только значения $L = \chi r_S$ для различных значений l' и m' ; но также и значения m , k и p .

Таблица 7
ВЕЛИЧИНЫ χr_S
для ПОЛУСУТОЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ
Положительная скорость $s = +1$

l'	m'	$L = \chi r_S$	m	$k = l' - m' = p$
0	0	1,297	1	0
1	0	2,589	1	1
	1	2,209	2	0
2	0	4,088	1	2
	1	3,597	2	1
	2	3,209	3	0
3	0	5,622	1	3
	1	5,068	2	2
	2	4,602	3	1
	3	4,209	4	0
4	0	7,171	1	4
	1	6,577	2	3
	2	6,509	3	2
	3	5,605	4	1
	4	5,209	5	0

Отрицательная скорость $s = -1$

l'	m'	$L = \chi r_S$	m	$h = l' - m' = p - 1$
2	2	2,401	1	0
3	2	3,968	1	1
	3	3,336	2	0
4	2	5,534	1	2
	3	4,879	2	1
	4	4,303	3	0

Целое число $k = l' - m'$ — число корней Z , отличных от полюсов; это следует из известных свойств сфероидальных

волновых функций. Определение p не представляет трудностей при $s = +1$, так как в этом случае $k = p$ во всех четырех областях диагностической диаграммы (ср. § 97). Но эти точки лежат на границе между областями I и II, а при $s = -1$ в области I имеем $p = k + 1$, а в области II $p = k - 1$. Поэтому не вполне ясно, как правильно определить значение p .

Простой ответ на этот вопрос получится, если нарисовать фазовые траектории. Три такие траектории показаны на рис. 88, где принято $s = -1$, $p = 1$ и соответственно $a < 1$, $= 1$, > 1 . Сразу ясно, что $p = k + 1$ при $a \leq 1$ и $p = k - 1$ при $a > 1$.

После того как мы сумели определить значения p , мы можем данные из последней таблицы нанести на диаграммы рис. 86. Они отмечены там кружочками на прямой $\omega = \Omega$.

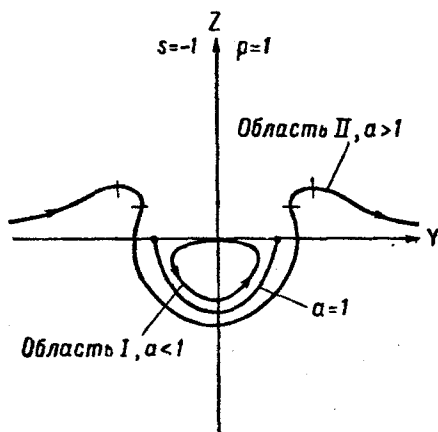


Рис. 88. Фазовые траектории для колебаний, период которых приблизительно равен 12 час.

§ 100. Колебания второго рода и «длинные волны»

Другой частный случай, когда уравнения приливов могут быть решены с помощью известных функций, представится, если положить $L = 0$. Этот случай особенно интересен, так как это единственный пример до конца вычисляемых собственных решений того вида, который Лаплас называл «колебаниями второго рода». Лаплас характеризовал их тем свойством, что их частоты ω стремятся к нулю при $\Omega \rightarrow 0$. В настоящих обозначениях они являются собственными решениями с $s = 1$, $p < 0$ или $s = -1$, $p \leq 0$ (ср. рис. 86). Существует большое количество до сих пор не решенных задач, относящихся к этим колебаниям.

При $L=0$ уравнения приливов (94.12) и (94.13) принимают вид

$$\frac{dz}{d\mu} + sm\tau Z = (1 - a^2 \tau^2) Y, \quad (100.1)$$

$$\frac{dY}{d\mu} - sm\tau Y = m^2 Z. \quad (100.2)$$

Они известны как уравнения для „длинных“ волн. По исключении Z мы увидим, что Y удовлетворяет уравнению Лежандра

$$\frac{d}{d\tau} \left(\sigma^2 \frac{dY}{d\tau} \right) + \left[-sma - \frac{m^2}{\sigma^2} \right] Y = 0. \quad (100.3)$$

Случай $m=0$ рассмотрен выше, поэтому мы можем считать, что $m > 0$.

Собственные решения. Как было выяснено в гл. XVI, это уравнение имеет собственные решения лишь в том случае, если

$$-sma = l'(l' + 1), \quad l' = m, m+1, \dots \quad (100.4)$$

Поскольку m, a и l' положительны, отсюда следует, что уравнение (100.3) не имеет собственных решений при $s=+1$, а лишь при $s=-1$. Уравнение (100.4) может быть тогда записано, если учесть соотношение $a = \Omega/\omega$, в таком виде:

$$\omega = \frac{m\Omega}{l(l+1)}. \quad (100.5)$$

Ясно, что это соответствует лапласовскому определению колебаний второго рода.

Таблица 8

СОБСТВЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

l'	m	Y	Z
1	1	$-\sigma$	$-\sigma\tau$
2	2	$3\sigma^2$	$3\sigma^2\tau$
	1	$-3\sigma\tau$	$-3\sigma(1+4\tau^2)$
3	3	$-15\sigma^3$	$-15\sigma^3\tau$
	2	$15\sigma^2\tau$	$15\sigma^2(1+9\tau^2)/4$
	1	$-3(5\tau^2-1)\sigma/2$	$-3\sigma(45\tau^3-\tau)/2$

Собственные решения, соответствующие (100.4), таковы:

$$Y = P_{l'}^m(\tau),$$

$$m^2 z = (l' + m) P_{l'-1}^m + l'^2 \tau P_{l'}^m. \quad (100.6)$$

Это выражение для Z следует из уравнений (100.2) и (91.12). Несколько первых собственных решений содержатся в табл. 8.

Фазовые траектории. Чтобы рассмотреть фазовые траектории этих собственных решений, необходимо вычислить канонические переменные y и z согласно уравнению (97.1). Выражения для этих функций приведены в табл. 9. Можно видеть, что графики этих функций соответствуют приведенным на

Таблица 9
ФУНКЦИИ y и z

l'	m	y	z	k	p
1	1	$-1/\sigma$	$-\sigma^3 \tau$	1	0
2	2	$-3\sigma^4$	$3\sigma^8 \tau/4$	1	0
3	1	$-3\tau/\sigma^5$	$-3\sigma^7(1+4\tau^2)$	0	-1
	3	$-15/\sigma^9$	$-15\sigma^{16}\tau/9$	1	0
	2	$15\tau/\sigma^{10}$	$15\sigma^{14}(1+9\tau^2)/16$	0	-1
	1	$-3(5\tau^2-1)/2\sigma^{11}$	$-3\sigma^{13}(45\tau^3-\tau)/2$	-1	-2

рис. 84 с теми значениями k и p , которые содержатся в таблице. Так как все значения p равны нулю или отрицательны, собственные значения, данные формулой (100.5), согласуются с изображенными на рис. 86 для $s = -1$, где они отмечены кружочками на оси ω .

Положительная скорость. Существование колебаний второго рода в случае $s = -1$, подтвержденное примером, ставит вопрос о их существовании в случае $s = +1$. Общие соображения § 97 не исключают возможности их существования, но, насколько нам известно, никто не привел примеров таких решений. Хотя это обстоятельство делает возможность их существования очень мало вероятной, но все же не доказывает, что их нет.

Следующее рассуждение, может быть, допустимо считать таким доказательством. Если эти решения существуют, то их кривые волновых типов должны иметь положительный наклон на m^2/L^2 , m^2/b^2 -диаграмме и целиком лежать ниже прямой $\omega = \Omega$. На χ , ω -диаграмме они должны, следовательно, пересекать ось ω при конечных значениях ω . Так как ось ω есть прямая $L=0$, то собственные решения для этих значений ω удовлетворяют (100.3). Но мы уже видели, что это уравнение не имеет собственных решений при $s = +1$. В этом и состоит противоречие. Следовательно, либо не существует собственных решений при $s = +1$, либо в приведенном анализе задачи мы сделали какое-нибудь неявное предположение.

Например, мы молчаливо предполагали, что χ вещественно, т. е. что $L^2 \geq 0$. В гл. X мы видели, что это не обязательно так. При $L^2 < 0$ сигнатура решений такова: $(- -)$ $(+ -)$ $(- -)$ и свойства решений такие же, как в области IV. Однако представляется, что даже и в этом случае уравнения приливов имеют собственные решения лишь для $s = -1$; по крайней мере, никем не было указано ни одного примера для $s = +1$.

Волны Россби. Россби [3] рассматривает периодические возмущения равномерного зонального течения на вращающейся планете. Пусть скорость этого течения u_0 положительна, если оно направлено с запада на восток. Полезно ввести безразмерные постоянные

$$\beta = \frac{\Omega \sigma}{r_S}, \quad g = \frac{\Omega \tau}{(g D_0)^{1/2}}. \quad (100.7)$$

D_0 — это „средняя глубина однородной атмосферы“. Россби вводит далее различные упрощающие предположения и получает, что фазовая скорость волн равна

$$c_{\text{фаз}} = \frac{u_0 \chi^2 - \beta}{\chi^2 + q^2}. \quad (100.8)$$

Если u_0 равно нулю, $c_{\text{фаз}} < 0$, т. е. волны распространяются только с востока на запад. Этот факт наводит на мысль, что они тождественны колебаниям второго рода.

Гаурвиц [2] дает несколько более детальную трактовку волн Россби. Он предполагает, что скорость зонального течения равна

$$u_0 = \omega_0 r_S \cos \varphi = \omega_0 r_S \sigma, \quad (100.9)$$

где ω_0 — постоянная угловая скорость, а φ — широта. По исправлении нескольких очевидных опечаток, уравнение (129) статьи [2] может быть записано так:

$$\frac{sm(\Omega + 2\omega_0)}{m\omega_0 - \omega} = l'(l' + 1). \quad (100.10)$$

При $\omega_0 = 0$ это уравнение совпадает с уравнением (100.4), приведенным выше. Поэтому едва ли остаются сомнения, что волны Россби — это по существу колебания Лапласа второго рода. Далее ясно, что они существуют и в статической атмосфере и тогда не связаны с движением нулевого порядка. Точно так же предположение Гаурвица, что $L = 0$, не является существенным элементом в определении этих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Flammer Carson, Spheroidal Wavefunctions, Stanford Univ. Press, 1957. (Русский перевод: Фламмер К., Таблицы волновых сфероидальных функций, Вычислит. центр, М., 1962.)
2. Haurwitz B., The perturbation equations in meteorology, p. 417, of Compend. Meteorol. Amer. meteorol. Soc., Boston, 1951.
3. Rossby C.-G., On the dispersion of planetary waves in a barotropic atmosphere, Tellus, 1, 1 (1949).
4. Stratton, Morse, Chu, Little, Corbató, Spheroidal Wave Functions, Technology Press of M. I. T., Cambridge, Mass., 1956.

ПРИЛОЖЕНИЕ

МЕРКАТОРСКИЕ КООРДИНАТЫ

Элемент длины dS на сфере единичного радиуса равен

$$dS^2 = \cos^2 \varphi d\lambda^2 + d\varphi^2, \quad (1)$$

где λ — долгота, а φ — широта. Вертикальная координата μ на меркаторской карте определяется формулой

$$d\varphi = \cos \varphi d\mu, \quad (2)$$

так что

$$dS^2 = \cos^2 \varphi (d\lambda^2 + d\mu^2).$$

Уравнение (2) легко интегрируется, что приводит к четырем равносильным уравнениям:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \operatorname{th} \mu, \\ \cos \varphi &= \operatorname{sech} \mu, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{sh} \mu, \\ \sec \varphi &= \operatorname{ch} \mu, \end{aligned} \quad (3)$$

так что окончательно

$$dS^2 = \operatorname{sech}^2 \mu (d\lambda^2 + d\mu^2). \quad (4)$$

Уравнения (3) могут быть записаны через функцию Гудермана

$$\varphi = g d\mu. \quad (5)$$

Приводится краткая таблица функций Гудермана (табл. 10); более пространные таблицы можно найти в *Smithsonian Mathematical Tables — Hyperbolic Functions*, Becker, van Ostrand (Washington, 1909). Рис. 89 графически показывает зависимость между φ и μ . Вместе с радиусом-вектором r меркаторские координаты могут быть использованы взамен сферических

Таблица 10

ТАБЛИЦА ФУНКЦИЙ ГУДЕРМАНА

Градусы		Радьяны	
μ	φ	μ	φ
0	0	0,0	0,000
10,05	10	0,2	0,199
20,45	20	0,4	0,390
31,5	30	0,6	0,567
43,7	40	0,8	0,726
57,8	50	1,0	0,865
75,4	60	1,2	0,986
99,4	70	1,4	1,087
139,6	80	1,6	1,172
∞	90	1,8	1,243
		2,0	1,302
		2,2	1,350
		2,4	1,390
		2,6	1,423
		2,8	1,449
		3,0	1,471
		3,5	1,510
		4,0	1,534
		5,0	1,557
		6,0	1,566

координат. Явная форма перехода к декартовой системе такова:

$$\begin{aligned}x &= r \operatorname{sech} \mu \cos \lambda, \\y &= r \operatorname{sech} \mu \sin \lambda, \\z &= r \operatorname{th} \mu.\end{aligned}\tag{6}$$

Единичные векторы в восточном, северном и зенитном направлениях (рис. 90) запишутся так:

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= -\mathbf{i} \sin \lambda + \mathbf{j} \cos \lambda, \\ \mathbf{v} &= -\mathbf{i} \cos \lambda \operatorname{th} \mu - \mathbf{j} \sin \lambda \operatorname{th} \mu + \mathbf{k} \operatorname{sech} \mu, \\ \boldsymbol{\zeta} &= \mathbf{i} \cos \lambda \operatorname{sech} \mu + \mathbf{j} \sin \lambda \operatorname{sech} \mu + \mathbf{k} \operatorname{th} \mu.\end{aligned}\tag{7}$$

Так как эти векторы ортогональны, то

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = \nu^2 = \zeta^2 = 1, \quad \varepsilon \cdot \nu = \nu \cdot \zeta = \zeta \cdot \varepsilon = 0, \\ \varepsilon \times \nu = \zeta, \quad \nu \times \zeta = \varepsilon, \quad \zeta \times \varepsilon = \nu. \end{aligned} \quad (8)$$

Любой вектор может быть разложен на компоненты по этим единичным векторам:

$$F = \varepsilon F_\varepsilon + \nu F_\nu + \zeta F_\zeta. \quad (9)$$

Формулы векторной алгебры выглядят в этих компонентах так же, как и в декартовых координатах.

Но поскольку векторы ε , ν , ζ зависят от координат λ , μ , γ ,

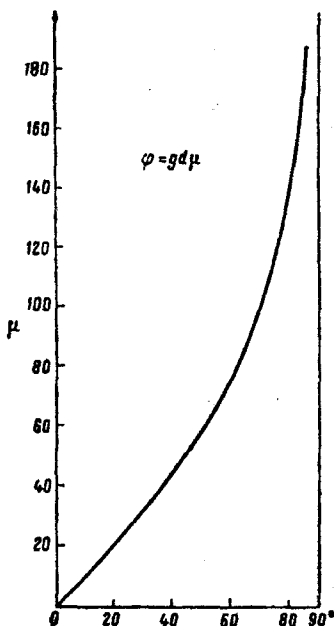


Рис. 89. Функция Гудермана.

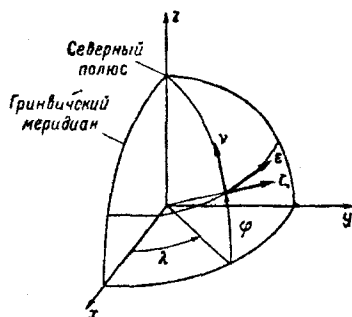


Рис. 90. Единичные векторы ε , ν , ζ и их связь с широтой и долготой.

то формулы для оператора ∇ окажутся совсем другими. Производные этих векторов приведены в табл. 11.

Таблица 11
ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЧНЫХ ВЕКТОРОВ

	ε	ν	ζ
$\frac{\partial}{\partial \lambda}$	$\nu \operatorname{th} \mu - \zeta \operatorname{sech} \mu$	$-\varepsilon \operatorname{th} \mu$	$\varepsilon \operatorname{sech} \mu$
$\frac{\partial}{\partial \mu}$	0	$-\zeta \operatorname{sech} \mu$	$\nu \operatorname{sech} \mu$

Отсюда и из (6) следует

$$\nabla \Psi = m \left(\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \nu \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \right) + \zeta \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (10)$$

$$\Delta^2 \Psi = m^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mu^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right), \quad (11)$$

где

$$m = \frac{1}{r} \operatorname{ch} \mu. \quad (12)$$

Кроме того,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = m \left[\frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda} + m \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{F_\mu}{m} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} = & \varepsilon \left[m \frac{\partial F_\zeta}{\partial \mu} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\nu) \right] + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\lambda) - m \frac{\partial F_\zeta}{\partial \lambda} \right] + \\ & + \zeta \left[m \frac{\partial F_\nu}{\partial \lambda} - m^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{F_\lambda}{m} \right) \right], \quad (14) \end{aligned}$$

так что

$$\mathbf{M} = \zeta \times \nabla = m \left(-\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial}{\partial \lambda} \right). \quad (15)$$

Часто бывает необходимо написать уравнение большого круга на единичной сфере. Так как этот круг есть пересечение сферы с плоскостью, проходящей через центр, задача эта равносильна написанию уравнения такой плоскости. Плоскость может быть определена двумя углами: λ_0 и ϑ . Прямая OP образуется при пересечении плоскости OPQ с экваториальной плоскостью $z=0$, а λ_0 — угол между OP и положительной частью оси x . Плоскость OPQ образует двугранный угол ϑ с плоскостью $z=0$. Тогда единичный вектор нормали к плоскости OPQ есть

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \sin \vartheta \sin \lambda_0 - \mathbf{j} \sin \vartheta \cos \lambda_0 + \mathbf{k} \cos \vartheta,$$

а уравнение плоскости

$$r [-\sin \vartheta \operatorname{sech} \mu \sin (\lambda - \lambda_0) + \cos \vartheta \operatorname{th} \mu] = 0.$$

Разделив на $r \operatorname{sech} \mu \cos \vartheta$, запишем это так:

$$\operatorname{sh} \mu = \operatorname{tg} \vartheta \sin (\lambda - \lambda_0).$$

Полагая

$$\operatorname{sh} \mu_0 = \operatorname{tg} \vartheta,$$

будем иметь

$$\operatorname{sh} \mu = \operatorname{sh} \mu_0 \sin (\lambda - \lambda_0). \quad (16)$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адвекция** 26
Аддитивные баротропные члены
уравнения гидродинамики первого порядка 36 и сл.
Адиабатическая атмосфера, см. Изэнтропическая атмосфера
Адиабаты 21
Азимутальный порядковый номер 288
Акустические волны 179, 219, 227, 241
Акустическое сопротивление
жидкости удельное 19
Антициклоны 103
Аппроксимация, метод 186
Атмосфера изотермическая 31, 80, 132, 151 и сл.
— изэнтропическая (адиабатическая) 32
— как тепловая машина 45
— однородная 31
— с постоянным градиентом температуры 32, 80
— стратификация 97
Барашки (облака) 233
Барическое поле 42
Баротропные состояния 29
Вековое уравнение 50
— — первый интеграл 53
Вектор горизонтального распространения 133
— Кориолиса 24, 25, 57, 200
— распространения 138
Вертикальная скорость при конвекции без вращения 59 и сл.
Вихрь планетарный 55
ВКБ-аппроксимация 227, 248, 263
— метод 186, 227 и сл.
Внешняя энергия, плотность 78
Волновод 210
Волновое уравнение двумерное 120
— — для сферической поверхности 122, 284 и сл.
Волны акустические 179
— гравитационные 149, 179
— — внутренние 144
Волны Ламба 133, 152, 161, 179, 271
— Лява 180
— поверхности раздела 180
— поверхностные 179
— простые 135, 154, 207, 236
— Россби 318
— Рэлея 180
Вращение атмосферы вокруг вертикальной оси 151
— — — наклонной оси вращения 160
— Земли 25
— — влияние на атмосферу 100 и сл.
Вязкость кинематическая воздуха 100
Гамильтониан 253
— лучей 140
— — рациональный 141
Геострофическая скорость 125, 131
Гипотеза зонального нагревания
Гадлея 68
Годограф 130
Горизонтальная длина волны 133
— скорость волн 133, 276
Горизонтальное волновое число 133
Гравитационные волны 149, 213, 241
— — — внутренние 176, 180, 220, 228, 272

- Градиент плотности жидкости 30
— температуры жидкости 30
Градиентная скорость 119, 131
— — обобщенная 125
Граничные условия при конвекции без вращения 61, 62
— — уравнения гидродинамики 38
Групповая скорость 140, 192
— — горизонтальная 275
- Давление 21—23, 55, 66
Движение антициклоническое 103
— батистрофическое 49
— конвективное установившееся 47
— свободное установившееся 47
— — — без вращения 48
— — — с вращением 54
— термобарическое 65
— циклоническое 103
Двухслойная модель океана 232
Дефект порядка 181
Диагностическая диаграмма 137, 209, 267
— — для докритической устойчивости 159
Диаграмма фазовая 146, 254
Диссипация энергии жидкостью 25
Докритическая устойчивость 159
- Закон сохранения вещества 62, 63
— — энергии 76
Законы отражения 164
Зональная составляющая давления 42, 71
- Идеальный газ 20, 86
Изотермическая атмосфера 80, 132 и сл., 234
Изотермический слой 93
Изотермы 21
Изэнтропическая атмосфера 32
Импеданс давление — энтропия
- Канал (волновод) слоя скачка 210
Канонические переменные 252
— уравнения 253
- Колебания второго рода 315
— — — собственные решения 316
Комплексные векторы 129
Конвекция без вращения 58 и сл.
— — — вертикальная скорость 59, 60, 61
— чистая с вращением 65
Континентальные барические максимумы 43
Коэффициенты термодинамические 21
— — — зависимость от высоты 32
Кривая волновых типов 273
— — — океана постоянной глубины 282
Крупномасштабные средние 90
- Лучевая точка 192, 193
Лучи 140, 145, 191 и сл., 208
— высота 199, 204
— общая теория 186 и сл.
— предельные формы 194
— следы 199, 201
- Максимум плотности пресных озер 21
Мезосфера 97
Мелкомасштабные средние 93
Меркаторские координаты 320
Метод аппроксимации 186
Морская вода 87
- Натуральные частоты 183
Незональная составляющая давления 72
— — среднего давления атмосферы 42, 43
Неограниченные решения 111, 116
Нестационарность вихрей Гадлея 70
- Облака, связанные с инверсией 233
Ограниченные решения 111, 116
Озера пресные, стратификация 94
Океан 45 и сл., 80, 207 и сл.

- Океан как тепловая машина 45
 — однородный сжимаемый 169
 — постоянной глубины 282
 — расслоенный, но несжимаемый 174
 — с постоянными коэффициентами 166 и сл.
 — секториальный 291
 Остаточные уравнения 119 и сл., 163, 216 и сл., 244 и сл.
 — — общая теория 251 и сл.
 Осцилляционная теорема 261
 Ось звукового канала 91
 «Открытая органная труба», формула 172
 Отражение волн 163
 Отсутствие вращения 68
- Первый интеграл векового уравнения 53
 Переворачивание поверхностных слоев 95
 Переменный ветер 74
 Параметры поля 79
 Планетарный вихрь 55
 Плотность 55, 66
 — энергии 27, 76
 — — второго порядка 78
 — — кинетической 145
 — — термобарической 145
 — — упругой 145
 Поверхности уровня плоские 48, 56, 64, 67, 119
 — — сферические 50, 57, 64, 67, 121
 Поверхностные волны 179
 Поверхностный канал 211
 Поверхность распространения 137
 Подстилающая поверхность 74
 Полусуточные колебания 313
 Порядковое число 173, 183
 Постоянная разделения 120
 Постоянный слой скачка 91, 93
 Потенциал силы тяжести 24
 Поток энергии 27, 76
 — — в простых волнах 144
 — — внешней 78
 Пресная вода 86
 Придонный канал 211
 Приливообразующая сила 25
- Простые волны 135, 154, 236
 Прямоугольный резервуар 182
- Резонансные частоты 183
- Свободные частоты 183
 Секториальный океан 291
 Серия резонансных частот 184
 Сигнатура оси 267
 Сигнатура отрезков 257
 Сила Кориолиса 54, 92, 101, 118, 123, 124
 Скорость геострофическая 131
 — — обобщенная 125
 — горизонтальная волн 133, 275
 — градиентная 119, 131
 — — обобщенная 125
 — групповая 140, 192
 — звука 19, 82
 — термобарическая 119, 125, 131
 — фазовая простых волн 139
 След луча 199, 201
 Слой перемещения 93
 Слой скачка 207, 232
 — — постоянный 91, 207
 — — сезонный 94
 Собственные решения 112
 Собственные частоты (собственные значения) 112
 Сопротивление жидкости удельное, акустическое 19
 Состояние жидкости 18
 — нулевого порядка идеального газа 31
 Сохранение энергии 26
 Среднее давление атмосферы 40 и сл.
 Стационарность движения нулевого порядка 51
 — — второго порядка 51
 — — первого порядка 51
 Стратификация атмосферы 97, 234
 — — адиабатическая 30
 — океанов 90, 207
 — пресных озер 94
 Стратосфера 97, 232, 277
 Температура воды 21—23
 Температура максимальной плотности воды 22

- Температурные инверсии 232
 Теорема Бернулли 54
 — Лиувилля 256
 — осцилляционная 262
 — разложения 113
 — для бесконечного объема 115
 — для конечного объема 114
 — сравнения Штурма 260
 — о вихре Гельмгольца и Бьеркнеса 53, 104
 Тепловое расширение воды 21, 23
 Теплоемкость жидкости удельная 19
 Теплопроводность жидкости 25
 Термобарическая скорость — см. *Скорость термобарическая*
 — энергия 78
 Термодинамические коэффициенты — см. *Коэффициенты термодинамические*
 — функции идеального газа 20
 Термосфера 97, 234 и сл., 266
 Тип движения (колебания) 174
 Тропосфера 97, 276
 Трохоида 237
 Удельное акустическое сопротивление волн 142, 145
 Узловая поверхность 173
 Узловое число 173
 Упругая энергия 78, 143
 Уравнение Виттекера 225, 246
 — волновое см. *Волновое уравнение*
 — для сферической поверхности 284 и сл.
 — Гамильтона — Якоби 187, 190
 — геострофичности 54, 103
 — изэнтроп идеального газа 20
 — Лапласа приливное 129
 — Лежандра 287, 295
 — приливов 295
 — в канонической форме 305
 — зональные колебания 297
 — первого порядка 296
 — предельный случай высоких частот 311
 — решение вблизи полюсов 302
 Уравнение распространения («характеристическое уравнение») 136
 — состояния жидкости 18
 — идеального газа 20
 Уравнения гидродинамики 24, 26
 — решение нулевого порядка 29
 — канонические 253
 — остаточные — см. *Остаточные уравнения*
 — поля 76 и сл., 81
 — установившегося движения первого порядка 47
 Фазовая диаграмма 146, 254, 291
 — скорость простых волн 139
 — точка 146, 254
 Фазовое пространство 254
 Фазовые траектории 255, 301, 306, 317
 Флуктуационный ветер 149
 Формула «открытой органной трубы» 172
 — Штурма 260
 Функции Виттекера 225, 246
 — волновые сфероидальные 298
 — Лежандра 287
 Функции Гамильтона — Якоби 190
 — тока 48
 Циклогенез 105
 — бароклинный 108
 — первого порядка 105
 Циклоны 101, 103
 Частота Ваясяля 85, 86
 Частоты собственные 112
 Число порядковое 173, 183
 Широтный порядковый номер 288
 Энергия внешняя 78
 — внутренняя 78
 — термобарическая 78, 143
 — упругая 78, 143
 Энтропия 18, 30 и сл., 46, 85, 143
 Ячейка Гадлея 69

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

<http://shop.rcd.ru>

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307,
тел.: 332-48-92 (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34)
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)
4. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный,
Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409-93-28)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Карл Эккарт

ГИДРОДИНАМИКА ОКЕАНА И АТМОСФЕРЫ

Редактор Г. Кузьменко

Художественный редактор Е. Подмарькова

Технический редактор Г. Бабаева

Подписано в печать 22.06.2004. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,07. Уч. изд. л. 19,76.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ №205.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru

ISBN 5-93972-321-7



9 785939 723213