КНИГА ПЕРВАЯ

ВЪ ЦАРСТВѢ СМЕКАЛКИ.

Е. И. ИГНАТЬЕВЪ.

Е. И. Игнатьевъ.

ВЪ ЦАРСТВѢ СМЕКАЛКИ

или

АРИѲМЕТИКА ДЛЯ ВСѢХЪ.

КНИГА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ.

Книга первая

(4-е пересмотрѣнное изданіе).

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
1914

Тип. Т-ва А. С. Суворина—„Новое Время". Эртелевъ. 13

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПРЕДИСЛОВІЕ КЪ ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНІЮ.

Въ настоящемъ четвертомъ изданіи первой книги «Въ царствѣ смекалки» по сравненію съ предыдущимъ ея изданіемъ не прибавлено новыхъ задачъ и упражненій. Исправлены лишь замѣченныя въ третьемъ изданіи опечатки, редактированы и дополнены почему либо нуждавшіяся въ этомъ задачи.

Существенное участіе въ этой работѣ принялъ В. И. Короленко, которому составитель считаетъ своимъ долгомъ выразить самую сердечную благодарность.

ВВЕДЕНІЕ.

I.

Изъ предисловій къ первымъ 3-мъ изданіямъ.

Наступили времена «пара и желѣза», электричества и воздухоплаванія, съ одной стороны, а съ другой, — времена проникновенія въ глубочайшіе тайники человѣческаго духа и самопознанія. Но въ какой бы области человѣческая жизнь ни стремилась къ необходимому самосовершенствованію, несомнѣнно то, что всюду въ основаніи вѣрныхъ выводовъ должны лежать «счетъ и мѣра», т. е. число въ той или иной формѣ. Явленія ли внѣшняго міра, глубины ли собственнаго духа желаетъ изслѣдовать человѣкъ и сказать свое бѣдное и жалкое «я» съ великимъ и всеобъемлющимъ «все»—всюду и вездѣ только тогда шествуетъ онъ по вѣрному пути, если великій и строгій духъ математики будетъ имъ руководить.

Счетъ, мѣра и число... Математика—эта «сухая» и «строгая» наука... Да! только эта цѣломудренная, съ глубоко-пытливымъ взглядомъ богиня можетъ ввести насъ въ святое святыхъ творенія, приподнять завѣсу, скрывающую отъ насъ великія тайны міросозданія, показать возможность пространствъ, отличныхъ отъ нашего, ввести въ область иныхъ измѣреній, дать возможность увѣренно говорить о невидимомъ, какъ о видимомъ, о будущемъ и прошедшемъ, какъ о настоящемъ, дать понятіе человѣческому духу о великой и вѣчной поэзіи творческихъ силъ природы... Станетъ ли кто въ наше время отрицать настоятоятельную необходимость самаго широкаго распространенія и популяризаціи математическихъ знаній? Желѣзная сила логической или—что то же—математической мысли, сила разумной и быстрой «смекалки» только одна въ состояніи побѣдить разнаго рода безпочвенныя самообольщенія и низринуть дурачащіе бѣдное человѣчество кумиры.

Развитіе самой энергической самодѣятельности ума, сообразительности и «смекалки» — вотъ что̀ все необходимѣе и необходимѣе дѣлается человѣку, если онъ желаетъ преуспѣвать и достигнуть гармоніи жизни. Существенно необходимо прежде всего пріобрѣтеніе самыхъ разнообразныхъ навыковъ въ счетѣ, мѣрѣ и числѣ. Нисколько не рискуя впасть въ преувеличеніе, повторимъ давно уже высказанную мысль: жизнь каждаго народа культурна по стольку, по скольку въ нее входитъ математика. Вдумайтесь, и вы съ этимъ согласитесь!

Вотъ почему, между прочимъ, первоначальныя математическія познанія должны необходимо входить съ самыхъ раннихъ лѣтъ въ наше образованіе и воспитаніе. По справедливому замѣчанію Кондорсе [1]) («Бесѣды о математикѣ»), математическія понятія, цифры и линіи говорятъ даже дѣтскому зарождающемуся воображенію болѣе, чѣмъ иные думаютъ. Но само собой разумѣется, что умственную *самодѣятельность*, сообразительность и «смекалку» нельзя ни «вдолбить», ни «вложить» ни въ чью голову. Результаты надежны единственно тогда, когда введеніе въ область математическихъ знаній совершается въ легкой и пріятной формѣ, на предметахъ и примѣрахъ обыденной и повседневной обстановки, подобранныхъ съ надлежащимъ остроуміемъ и занимательностью.

Впрочемъ, высказывая эти мысли, мы не говоримъ ничего новаго. Съ этими послѣдними положеніями согласится, кажется, нынѣ всякій педагогъ современной русской школы и всякая заботящаяся о разумномъ образованіи и воспитаніи своихъ дѣтей

---

[1]) 1743—1794 г.

семья. Тѣмъ болѣе удивительно и досадно, что на русскомъ языкѣ нѣтъ почти ни одной попытки дать въ руки семьи и школы книгу, направленную къ популяризаціи въ широкихъ кругахъ математическихъ познаній и могущую служить подходящимъ пособіемъ взрослому для обученія своего ребенка, или вообще учащемуся, послѣ нѣкоторой небольшой подготовки. Это тѣмъ болѣе удивительно и странно, что въ заграничной литературѣ мы имѣемъ въ этомъ отношеніи прекрасные и талантливо составленные образцы.

Предлагаемыя три книги имѣютъ въ виду до нѣкоторой степени пополнить указанный только что пробѣлъ. Пытаясь перенести читателя въ «царство смекалки», мы, конечно, не обольщаемъ себя надеждой, что смогли показать ему это царство во всей его прелести и полнотѣ. Для этого понадобились бы не три такихъ книги: такъ велика и обширна область только тѣхъ отдѣловъ математики, которые можно подвести подъ общее заглавіе «математическихъ игръ и развлеченій». Но что же можетъ помѣшать нашу попытку и продолжить, если она окажется удачной и полезной?

Внимательный читатель замѣтитъ, что каждая книга по возможности разбита на отдѣлы, содержащіе каждый однородныя задачи въ порядкѣ возрастанія ихъ трудности. Нѣтъ, вообще говоря, никакой надобности читать и разбираться въ такой книгѣ «подрядъ». Каждый можетъ для начала взять тотъ отдѣлъ, который его наиболѣе заинтересуетъ, и разобраться сначала въ немъ, затѣмъ перейти къ любому другому и т. д. Что касается до такъ называемыхъ «разныхъ» задачъ, то составитель и здѣсь старался по силѣ разумѣнія размѣстить ихъ въ порядкѣ возрастающей сложности или трудности. Нельзя, однако, поручиться, что принятая нами планировка матеріала удовлетворитъ всѣхъ. Слишкомъ субъективное это дѣло: что̀ одному дается трудно, то другому легко, и наоборотъ. Впрочемъ, подчеркиваемъ это еще разъ, предлагаемыя книги вѣдь не «методика», не «учебникъ» и не «задачникъ» въ обыкновенномъ смыслѣ этихъ словъ. Но всякій, кто захочетъ, можетъ воспользоваться предлагаемыми книгами примѣнительно къ своей методѣ или учебнику. Взрослый, взявши на себя трудъ познакомиться съ любой книгой, легко убѣдится, что всѣ почти предлагаемыя въ ней задачи можно видоизмѣнять и дѣлать предметомъ бесѣды даже съ маленькими дѣтьми. Съ другой стороны, смѣемъ надѣяться, что предлагаемыя книги могутъ быть недурнымъ пособіемъ для математическаго *саморазвитія* и самодѣятельности и притомъ — не для одного только учащагося юношества, а для всѣхъ вообще, чувствующихъ склонность къ работѣ ума. Въ силу послѣдняго эти книги названы также «**Ариѳметикой для всѣхъ**». Предназначая эти книги *для всѣхъ*, мы вовсе не желаемъ сказать, что книги эти можетъ читать даже едва обучившійся грамотѣ ребенокъ. Но думаемъ, что мать, отецъ, старшій братъ или сестра найдутъ въ нихъ достаточно матеріала, чтобы на легкихъ и занимательныхъ примѣрахъ, при помощи предметовъ, находящихся у нихъ же передъ глазами, или подъ руками, ввести ребенка въ кругъ математическихъ понятій. Но, «уча, мы учимся сами», и надѣемся, что предлагаемыя книги наилучше каждаго въ этомъ убѣдятъ. Сближеніе математики съ жизнью, введеніе ея въ повседневной обиходъ, умѣнье все окружающее насъ по возможности переводить на счетъ, мѣру и число—вотъ что главнымъ образомъ имѣютъ въ виду эти книги. А такъ какъ въ нихъ есть и такія задачи, усвоеніе и разборъ которыхъ не требуетъ почти никакой математической подготовки, то ихъ можно смѣло дать для самостоятельнаго чтенія и изученія даже учащимся, начиная съ 10—12 лѣтъ, и т. д. Возрастъ не ограниченъ, такъ какъ каждый найдетъ въ нихъ кое-что и для себя.

1908.

II.

Счетъ, Мѣра и Число.

(ИСТОРИЧЕСКІЯ СПРАВКИ).

Вотъ я бросаю на столъ палочку, или спичку, или камешекъ, или кубикъ, — словомъ какой-нибудь предметъ, и спрашиваю васъ: *сколько* предметовъ я бросилъ на столъ? Вы смотрите и отвѣчаете:

— *Одинъ* предметъ.

Я беру затѣмъ и бросаю передъ вами цѣлую горсть камешковъ, или спичекъ, или иныхъ какихъ предметовъ и опять спрашиваю: *сколько* здѣсь предметовъ?

Вы отвѣчаете: «*много!*» Но меня этотъ отвѣтъ не удовлетворяетъ. Я хочу знать *точно*, сколько именно предметовъ лежитъ предо мной. Для этого надо предметы *сосчитать*.

Въ чемъ состоитъ счетъ, вы тоже знаете. Вы берете одинъ предметъ и говорите *одинъ*; прикладываете къ нему еще одинъ и говорите: *два*; къ этимъ прикладываете еще одинъ и говорите: *три*; къ этимъ прикладываете еще одинъ и говорите: *четыре*, затѣмъ *пять, шесть, семь, восемь, девять* и такимъ образомъ добираетесь до *десяти* (*десятка*).

Вы считаете предметы *по одному*, или, иначе говоря, *единицами*. Но вы знаете также, что можно считать тѣ же предметы парами (по два), тройками (по три), четверками (по четыре) и т. д. Наконецъ, если предметовъ много, то можно считать ихъ и *десятками*, совсѣмъ такъ же, какъ вы считали единицами, т. е.: одинъ десятокъ, два десятка (или двадцать), три десятка (или тридцать) и т. д. Когда у васъ набирается *десять десятковъ*, вы называете это *сотней (сто)*, и считаете опять сотни, какъ единицы: сто, два ста (или двѣсти), триста, четыреста и т. д. Такъ считаете вы, пока не получите *десять сотенъ*, или *тысячу*, а затѣмъ эти тысячи считаете опять, какъ простыя единицы: одна тысяча, двѣ тысячи и т. д.

Все это вы знаете, и все это кажется такъ просто.

Итакъ, чтобы отвѣтить на вопросъ, *сколько* предметовъ, надо эти предметы *сосчитать*. Счетъ же состоитъ въ послѣдовательномъ прибавленіи къ единицѣ еще единицы, да еще единицы, да еще единицы и т. д. до конца, а затѣмъ остается *сказать* словами, что вы получили, или—иначе—*назвать результатъ счета*. Этотъ результатъ, или отвѣтъ на вопросъ: *сколько предметовъ?*—и будетъ не что иное, какъ *число*.

При первыхъ же шагахъ нашей болѣе или менѣе сознательной жизни мы учимся считать предметы и мало-по-малу вырабатываемъ въ своемъ умѣ *представленіе* о числѣ, какъ совокупности единицъ, независимо отъ самихъ предметовъ, вырабатываемъ себѣ понятіе о такъ называемомъ *отвлеченномъ числѣ*. Первое и основное математическое наше дѣйствіе состоитъ, слѣдовательно, въ *прикладываніи* къ единицѣ еще единицы да еще единицы, да еще и т. д. — въ *послѣдовательномъ* сложеніи, въ счетѣ.

Само по себѣ, какъ видимъ, это дѣйствіе не трудное. Вся трудность заключается не въ томъ, чтобы прикладывать единицу за единицей, а чтобы полученныя отъ такого прикладыванія числа *назвать*, или *написать* и запомнить. Вся трудность въ томъ, чтобы найти такой *способъ*, или *систему* счета, при которой немногими отдѣльными словами можно было бы называть, или немногими отдѣльными знаками можно было бы записывать какія угодно числа.

Человѣчество счастливо и удачно разрѣшило этотъ вопросъ. Выработана такая система устнаго и письменнаго счисленія, которая быстро дѣлается понятной каждому ребенку и усваивается имъ постепенно съ самыхъ раннихъ поръ. Выучиться считать и писать числа по нашей такъ низываемой *десятичной системѣ счисленія,* въ основаніи которой лежитъ число десять, не стоитъ почти никакого особаго труда. Вы знаете это изъ личнаго опыта, изъ того, чему научились дома и въ школѣ. Но знаете ли вы также, что тысячи и тысячи лѣтъ прошли раньше, чѣмъ люди додумались и дошли до того, чему мы теперь можемъ такъ быстро и легко обучиться уже въ дѣтскомъ возрастѣ? Исторія того, какъ люди научились считать и писать числа, очень любопытная исторія, и съ ней каждому слѣдуетъ хотя немного ознакомиться.

Въ глубокой древности, на самой ранней зарѣ своей жизни, люди считали только съ помощью камешковъ или же дѣлали царапины и зарубки на деревѣ или камнѣ. Сколько было сосчитано предметовъ, столько дѣлалось и зарубокъ. Такія зарубки, относящіяся къ наиболѣе отдаленнымъ вѣкамъ жизни человѣка и имѣющія несомнѣнно значеніе числовыхъ замѣтокъ, находятъ и теперь въ различныхъ мѣстностяхъ. Какъ видимъ, это—самый простой способъ счета, заключающій въ себѣ понятіе объ образованіи числа прибавленіемъ послѣдовательно единицы за единицей. Припомнимъ также, что не такъ еще давно на Руси были распространены, а кое-гдѣ остались въ употребленіи и теперь, «бирки». Это не что иное, какъ деревянныя палочки, на которыхъ черточками и крестиками многіе неграмотные люди ведутъ свой незамысловатый счетъ.

Какъ считали наши отдаленнѣйшіе предки, можно приблизительно судить и на примѣрахъ существующихъ нынѣ народовъ, стоящихъ на очень низкой ступени развитія, находящихся, какъ говорятъ, въ *дикомъ* состояніи. Такъ, одинъ путешественникъ разсказываетъ, что дикари Андаманскихъ острововъ считаютъ очень просто, но очень забавно и странно. Чтобы изобразить счетъ *по одному*, они, просто-на-просто, трутъ носомъ о землю столько разъ, сколько надо. Если же имъ надо считать единицами болѣе высшаго порядка (скажемъ, какъ у насъ десятками), то они столько разъ, сколько нужно, тянуть себя за уши. Какъ ни простъ и ни смѣшонъ этотъ способъ счета, онъ, однако, уже выше, чѣмъ тотъ, о которомъ мы упоминали раньше, и гдѣ просто складываются камешки, или проводятся черточки. Здѣсь мы видимъ уже счетъ единицами двухъ различныхъ порядковъ: простыми единицами — «носовыми», по способу этихъ дикарей, и единицами второго порядка или разряда—«ушными».

Древніе татары, когда дѣло шло о числахъ, сообщались между собой посредствомъ особыхъ палочекъ *Хе-му*, на которыхъ дѣлались условныя нарѣзки. По этимъ нарѣзкамъ каждая орда знала, въ какое время она должна выступить въ походъ, сколько лошадей и людей должно выставить каждое селеніе.

Обитатели древняго государства Америки, *Перу*, во времена своихъ царей — инковъ для изображенія и запоминанія чиселъ имѣли особые приборчики—*квиппосы*. Это были кольца, къ которымъ прикрѣплялись веревочки съ узелками и палочками разнаго цвѣта. Число узелковъ, ихъ завязываніе и развязываніе, а также чередованіе веревочекъ съ палочками позволяло выражать много чиселъ. Да не сохранился ли и у насъ до сихъ поръ обычай «завязывать узелокъ на память» и не имѣетъ ли онъ чего-то общаго съ этимъ квиппосомъ?

Но самымъ ближайшимъ и самымъ естественнымъ пособіемъ человѣку для счета были, конечно, его пальцы на рукахъ и ногахъ. И дѣйствительно, есть всѣ данныя предполагать, что этотъ пальцевой счетъ былъ самымъ распространеннымъ съ глубокой древности у всѣхъ почти сдѣлавшихся потомъ образованными народовъ. Каждый палецъ замѣнялъ при этомъ каждый исчисляемый предметъ. Такой способъ счета наблюдается у дикихъ народовъ и въ наше время, при чемъ слѣдуетъ замѣтить, что поднятіе пальцевъ вмѣсто того, чтобы назвать *число*, есть едва ли не единственный примѣръ, когда *отвлеченное* понятіе выражается *жестомъ*.

Но человѣческій умъ ищетъ своего выраженія въ словѣ. Извѣстное количество, извѣстное число предметовъ онъ выражаетъ *однимъ* словомъ. Такія слова иногда прямо указываютъ на пріемы счета. Такъ, и теперь еще у нѣкоторыхъ народовъ число *два* обозначается словомъ «крылья», число *три*—словомъ «клеверъ» (трилистникъ), число *пять*—словомъ «рука». У индѣйцевъ въ Америкѣ числа 11, 12 и т. д. считаются такъ: «ноги одинъ», «ноги два»... (т. е. десять пальцевъ на ногахъ да еще одинъ, десять пальцевъ на ногахъ да еще два, и т. д.), а число 20 обозначается словами «весь человѣкъ». Въ Африкѣ для обозначенія большихъ чиселъ у иныхъ народовъ употребляются такія слова, какъ «куча», «гора» и т. д. Наконецъ, не припомните ли по этому поводу, что въ иныхъ мѣстахъ нашей крестьянской Россіи, когда хотятъ выразить «много», говорятъ «гора» или «уйма»: эку «гору», эку «уйму» вывалилъ, заграбасталъ, забралъ и т. п., а въ иныхъ мѣстахъ до сихъ поръ еще ведется счетъ на «копы»? При чемъ «копа» яицъ, напримѣръ, значитъ 60 штукъ ихъ.

Подобное образованіе названій чиселъ иногда отражается даже на изображеніи ихъ посредствомъ письменныхъ знаковъ. Обратили ли вы вниманіе на начертаніе римской цифры пять? Какъ извѣстно, она пишется такъ: V и представляетъ собою не что иное, какъ изображеніе *руки* человѣка. Двѣ такихъ руки, сложенныхъ вмѣстѣ (одна вверху, другая—внизу), даютъ вамъ римское изображеніе числа десять: X.

Теперь является вопросъ, не имѣютъ ли какихъ-либо соотвѣтствующихъ, взятыхъ изъ природы, значеній наши названія чиселъ (одинъ, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять), положенныя въ основу нашей устной системы счисленія?

Трудно, даже невозможно отвѣтить на этотъ вопросъ. Можно сказать только одно, что когда развился человѣческій языкъ, то и первыя числовыя понятія вылились въ извѣстныя числовыя слова. Если же эти слова и имѣли какое-либо значеніе, взятое изъ названій окружающихъ человѣка предметовъ, то это значеніе давно забыто и утеряно, такъ какъ образованіе числовыхъ понятій и выражающихъ ихъ словъ у современныхъ образованныхъ народовъ относится къ глубочайшей древности. Чтобы судить, какъ давно это было, достаточно замѣтить, что названія числительныхъ именъ совпадаютъ въ языкахъ: санскритскомъ, зендскомъ, персидскомъ, греческомъ, латинскомъ, кельтскомъ, германскомъ и славянскомъ. Что же это значитъ? А это значитъ, что названія главныхъ чиселъ образовались еще тогда, когда всѣ эти народы составляли одну семью и говорили однимъ общимъ (арійскимъ) языкомъ. Это же было много и много тысячъ лѣтъ тому назадъ, въ *доисторическія* времена, потому что за двѣ-три тысячи лѣтъ, о которыхъ сохранились болѣе или менѣе достовѣрныя *историческія* свидѣтельства, всѣ перечисленные выше народы уже жили и развивались, живутъ и развиваются отдѣльно.

Итакъ, если когда-либо, въ глубинѣ вѣковъ, названія чиселъ и имѣли какое-либо еще иное значеніе, то оно съ теченіемъ времени утратилось, а остались только слова, дающія *отвлеченное представленіе* о числахъ. А какъ только человѣкъ научился отвлеченному счету, т. е. *просто* счету, независимо отъ тѣхъ или другихъ предметовъ, то это было и первое истинно *математическое* дѣйствіе человѣческаго сознанія.

Прибавлять по единицѣ, да еще по единицѣ, очевидно, можно сколько угодно. Значитъ и чиселъ есть сколько угодно,— ихъ, какъ говорятъ, *безконечно много*. И какъ только человѣкъ дошелъ до понятія о числѣ, то явилась тотчасъ задача, какъ уже упомянуто выше, самаго легкаго и простого названія и написанія любого, сколь угодно большого, числа. Немногими словами нужно было умѣть называть любыя числа и немногими знаками ихъ писать.

Мы знаемъ уже, какъ просто и легко это дѣлается теперь въ нашей *десятичной системѣ* счисленія. Однако, чтобы дойти до этой легкости и простоты, опять понадобился длинный рядъ вѣковъ и тысячелѣтій. Медленно и съ большими обходами достигало человѣчество цѣли. И введеніе въ человѣческій обиходъ нынѣ принятаго устнаго и письменнаго счисленія можно считать происшедшимъ уже въ несомнѣнно историческія времена. Такъ, *устное* десятичное счисленіе было извѣстно древнимъ грекамъ. Но, спрашивается, почему же наиболѣе привилось и распространилось десятичное счисленіе? Почему мы имѣемъ девять *простыхъ* единицъ, а десять ихъ принимаемъ за новую высшую единицу—*десятокъ* и считаемъ затѣмъ десятки, какъ простыя единицы; десять десятковъ принимаемъ за еще высшую единицу—*сотню*, и считаемъ сотни, какъ единицы, десять сотенъ опять принимаемъ за еще высшую единицу — *тысячу*, и считаемъ тысячи, какъ простыя единицы и т. д.?

Почему въ *основаніе* нашего счета положено число *десять?* Вѣдь можно, какъ знаемъ, считать парами, тройками, четверками, пятками и т. д. Какъ вы знаете, существуетъ счетъ «дюжинами», т. е. такой счетъ, при которомъ въ основаніи лежитъ число 12. Что не всегда и всюду число 10 признавалось за основу счета, на этотъ счетъ существуетъ много доказательствъ. Помимо счета «дюжинами», припомните хотя бы русскій счетъ «сорокъ сороковъ» или «копами». У другихъ народовъ есть несомнѣнные остатки такого счета, при которомъ въ основѣ лежитъ число 20. Однако, всѣ эти системы счета вымерли и вымираютъ, а торжествуетъ десятичная. Объясняется это прежде всего и единственно устройствомъ нашихъ рукъ, имѣющихъ въ общей сложности 10 пальцевъ, которые были первыми и главными помощниками человѣка въ выработкѣ имъ понятія о числѣ и въ развитіи устнаго счета.

Что касается письменнаго счета, т. е. умѣнья изобразить любое число съ помощью немногихъ знаковъ, то онъ усовершенствовался только сравнительно недавно, именно послѣ введенія такъ называемыхъ *арабскихъ* цифръ и прибавленія къ 9 *значащимъ* цифрамъ еще незначащей—*нуля*. Этотъ послѣдній у арабовъ назывался цифиръ (зефиръ), откуда и получилось самое слово «цифра». Самую же систему письменнаго счисленія арабы, по всей вѣроятности, позаимствовали у индусовъ или китайцевъ.

Нѣкоторыя бо̀льшія подробности относительно счисленія читатель, если заинтересуется вопросомъ, найдетъ еще въ 3-й книгѣ «Въ царствѣ смекалки».

Такъ медленно и на протяженіи многихъ вѣковъ распространялся и утверждался въ понятіи человѣчества тотъ устный и письменный счетъ, которому намъ столь нетрудно научиться нынѣ въ самое непродолжительное время и въ самомъ раннемъ возрастѣ. Неправда ли, что вы не помните даже, когда научились считать,—до десяти, напримѣръ? Какъ начали учиться говорить, такъ, само-собой, начали учиться и считать! Начали вмѣстѣ съ тѣмъ пріобрѣтать и понятіе о числѣ. А научившись считать до десяти, не трудно пойти и далѣе. Вѣдь десятки считаются, какъ простыя единицы, и, чтобы добраться до сотни, достаточно всего 11 различныхъ словъ. Затѣмъ сотни опять считаютъ какъ единицы... Такъ счетомъ вы получаете все новыя и новыя числа.

Но не только отъ одного *счета* получаются числа. Они получаются еще путемъ *сравненія* величины предметовъ. Глядя на окружающій васъ міръ, вы скоро замѣчаете, что одни предметы въ немъ *больше*, другіе *меньше*. Это понятіе о величинѣ предметовъ, о *большемъ* и *меньшемъ*, вы выражаете разными словами: выше, ниже, длиннѣе, короче, шире, уже, толще, тоньше, легче, тяжеле и т. д. Подобныя слова не даютъ, однако, настоящаго, точнаго понятія о *величинѣ* предмета. Чтобы имѣть точное понятіе объ этой *величинѣ*, необходимо *сравнить* предметъ съ другимъ подобнымъ ему предметомъ, величину котораго вы хорошо знаете. Чтобы знать *точно* неизвѣстную вамъ длину, надо сравнить ее съ другой длиной, которую вы точно знаете; чтобы узнать величину неизвѣстной вамъ площади, надо сравнить ее съ извѣстною вамъ площадью. Чтобы узнать вѣсъ тѣла, надо сравнить его съ извѣстной вамъ тяжестью и т. д.

Какъ узнать точную длину стола, за которымъ вы сидите? Что вы дѣлаете для того, чтобы это узнать? Не что другое, какъ *сравниваете* эту длину съ извѣстной вамъ длиной, напр., аршина. Вы берете аршинъ и укладываете его вдоль стола. Вотъ аршинъ помѣстился разъ да еще одинъ разъ, да еще половина аршина. Вы и говорите: «столъ имѣетъ въ длину 2 съ половиною аршина». Вы сравнили длину стола съ длиною аршина, иначе говоря, вы *измѣрили* аршиномъ длину стола. Аршинъ у васъ есть *единица мѣры длины*, — такая единица мѣры, о которой вы *должны имѣть точное представленіе* и съ которой вы сравниваете всѣ остальныя длины. Если вамъ надо измѣрить большія разстоянія, то вмѣсто аршина удобнѣе взять бо̀льшую длину — сажень, версту, милю, но о всякой такой длинѣ *вы должны имѣть точное понятіе*. Только въ такомъ случаѣ вы сможете точно измѣрить и получить *настоящее представленіе* и о другой неизвѣстной еще вамъ длинѣ и выразить эту длину *числомъ* въ единицахъ извѣстной вамъ *мѣры*.

Что значитъ, когда вы говорите, что «этотъ мѣшокъ съ хлѣбомъ *вѣситъ* 5 пудовъ»? Какъ вы это узнали? Конечно, такъ, что *взвѣсили* на вѣсахъ этотъ мѣшокъ. Въ чемъ заключается *взвѣшиваніе*, или измѣреніе вѣса? Да опять-таки въ томъ, что вѣсъ этого мѣшка съ хлѣбомъ вы *сравнили* съ *извѣстнымъ вамъ* вѣсомъ куска чугуна, или желѣза, — такого куска, который вѣситъ именно *пудъ*. Итакъ, что̀ такое значитъ измѣрить? Это значитъ, другими словами, *сравнить* одинъ предметъ съ другимъ однороднымъ ему, но извѣстнымъ вамъ предметомъ. Этотъ извѣстный вамъ предметъ, съ которымъ вы сравниваете другіе предметы, называется *мѣрой*. Какъ вы уже знаете, есть много различныхъ мѣръ: пространства, времени, вѣса, скорости, силы и т. д.

Что̀ получается въ результатѣ каждаго измѣренія? *Число!* Что̀ говоритъ вамъ это число? Оно даетъ вамъ точное понятіе о величинѣ того или другого предмета! Гдѣ находятся всѣ окружающіе васъ предметы? Въ пространствѣ! Слѣдовательно, съ развитіемъ понятія о числѣ, какое другое развивается у васъ понятіе? Понятіе о пространствѣ, объ окружающемъ васъ мірѣ!

Ясно ли вамъ теперь, что въ основаніе сознательной жизни человѣка лежитъ счетъ и мѣра? Ясно ли вамъ, что если вы хотите правильно судить объ окружающемъ васъ *пространствѣ*, если хотите знать, что̀ такое *время*, то прежде всего вы должны усвоить счетъ и мѣру, а слѣдовательно, научиться свободно обращаться съ *числомъ*? Ясно ли вамъ теперь, что истинное развитіе знанія и сознательности можетъ идти только рядомъ съ развитіемъ счета, мѣры, порядка и числа?

Вотъ почему не пренебрегайте ни малѣйшимъ случаемъ, чтобы упражняться въ счетѣ, въ мѣрѣ, порядкѣ и числѣ. Не отдѣляйте *ариѳметику*, или *математику*, вообще, отъ жизни. Нельзя этого дѣлать, потому что человѣчество только тогда вступило (а это произошло только въ самое послѣднее время) на путь истиннаго знанія, когда во всѣ свои разсужденія ввело понятіе о счетѣ, мѣрѣ и порядкѣ, т. е. понятіе о *числѣ*. Если вы хотите что-либо знать, то прежде всего вы должны ваш умъ воспитывать и упражнять въ области *математическихъ* познаній, т. е. такихъ, гдѣ прежде всего входятъ понятія о количествѣ, величинѣ и порядкѣ, выражаемыхъ тѣмъ или другимъ числомъ или сочетаніемъ чиселъ.

Трудно ли это? Нѣтъ. Стоитъ лишь только каждому изъ насъ постоянно помнить и знать, что все въ окружающемъ насъ мірѣ основано на счетѣ, числѣ и порядкѣ. Человѣкъ считалъ, вычислялъ, строилъ и мѣрилъ всегда, когда ему нужно было сдѣлать что-либо долговѣчное, даже въ то время, когда, считая, вычисляя и строя «по пальцамъ», онъ не сознавалъ и не сознаетъ, что работаетъ въ области *математики.*

Теперь, съ развитіемъ грамотности и письма, наступаетъ время, когда счетъ, мѣра и порядокъ должны проникать каждый шагъ нашей жизни.

Учитесь считать, мѣрить и вносить порядокъ въ свою жизнь, начиная съ первыхъ же шаговъ. Все остальное дастся легко. А учиться счету, порядку и мѣрѣ очень легко, какъ въ игрѣ и забавѣ, такъ и въ дѣлѣ. Стоитъ только этого захотѣть и къ этому постоянно направлять свой умъ, разбираясь во всякомъ окружающемъ насъ явленіи.

III.

Роль памяти въ математикѣ.

Относительно математики въ нашемъ обществѣ еще до сихъ поръ существуютъ самые странные предразсудки. Одни говорятъ, что заниматься математикой могутъ только исключительные, одаренные совсѣмъ особыми способностями умы, другіе утверждаютъ, что для этого необходима особая, такъ сказать, «математическая память» для запоминанія формулъ и т. д. Всѣ подобные толки являются обыкновенно плодомъ недоразумѣнія, зависящаго въ значительной степени отъ того низкаго уровня, на которомъ находится у насъ состояніе самыхъ элементарныхъ математическихъ знаній и навыковъ.

Нельзя, конечно, спорить противъ того, что существуютъ умы съ рѣзко выраженными склонностями къ той или иной сторонѣ умственной дѣятельности. Но точно также никоимъ образомъ нельзя утверждать, что существуютъ хотя мало-мальски нормальные умы, которые совсѣмъ неспособны къ воспріятію и полному усвоенію необходимыхъ математическихъ знаній, хотя бы, скажемъ, въ размѣрахъ такъ называемаго «средняго курса». Говорить противное значитъ доказывать, что для различныхъ человѣческихъ наукъ существуютъ и различныя логики, съ чѣмъ, конечно, врядъ ли кто согласится.

Будемъ справедливы и признаемъ наконецъ, что выраженіе «неспособенъ къ математикѣ» есть прежде всего горькій продуктъ нашего неумѣнія, а, пожалуй, иногда и легкомысленнаго нежеланія поставить въ семьѣ и школѣ преподаваніе математики на должную высоту.

Еще менѣе можно говорить о необходимости для математики какой-то особой, специальной памяти для запоминанія (зазубриванія?) какихъ-то формулъ или правилъ, науку сознательной и послѣдовательной логической мысли обращать въ какой-то механическій безсознательный процессъ. А, между тѣмъ, какъ далеко можетъ заходить дѣло въ этомъ отношеніи, существуютъ свидѣтельства такихъ авторитетовъ, какъ нашъ талантливѣйшій математикъ и профессоръ В. П. Ермаковъ. Вотъ что̀, между прочимъ, сообщалъ уважаемый профессоръ въ одномъ изъ своихъ докладовъ Кіевскому физико-математическому обществу:

«Когда мнѣ пришлось студентамъ читать интегральное исчисленіе, то въ первый же годъ произошелъ эпизодъ, который всегда сохранится въ моей памяти.

«Прочитавши часть теоріи, я для поясненія даю задачи. Я прошу студентовъ рѣшать задачи на скамьяхъ въ тетрадяхъ. По мѣрѣ рѣшенія, я пишу полученные результаты на доскѣ. Однажды для поясненія способовъ пониженія биноміальныхъ интеграловъ я написалъ на доскѣ подходящую задачу. И вотъ вижу, что нѣкоторые студенты вынимаютъ изъ кармановъ какія-то тетрадки и смотрятъ въ нихъ.

«— Что это?

«— Общія формулы.

«— Зачѣмъ?

«— Намъ прежній профессоръ совѣтовалъ имѣть списокъ общихъ формулъ и по нему рѣшать частные примѣры. Вѣдь не станете же вы требовать, чтобы мы заучили на память всѣ сорокъ общихъ формулъ.

«— Заучивать въ математикѣ никакихъ формулъ не слѣдуетъ. Но я нахожу также неумѣстнымъ пользованіе справочными пособіями и нахожденіе интеграловъ по общимъ формуламъ, подстановкою въ нихъ данныхъ значеній показателей и коэффиціентовъ. Вѣдь не съ неба свалились къ вамъ общія формулы; для вывода ихъ вы употребили рядъ разсужденій; примѣняйте тѣ же разсужденія къ частнымъ примѣрамъ.

«Такимъ образомъ оказалось возможнымъ находить всякіе интегралы и безъ общихъ формулъ. Пришлось, впрочемъ, нѣкоторыя выкладки видоизмѣнить такъ, чтобы онѣ непосредственно могли быть приложены къ частнымъ примѣрамъ.

«Получилась еще и та выгода, что на каждомъ частномъ примѣрѣ студенты повторяли всѣ тѣ разсужденія, которыя необходимы для вывода общей формулы. Отъ частаго повторенія пріобрѣтался навыкъ и въ результатѣ—быстрота рѣшенія задачъ.

«Разсказанный эпизодъ заставилъ меня глубже вникнуть въ сущность математики.

«Въ молодыхъ лѣтахъ и я обращалъ все вниманіе на конечные результаты. Разбирая какое-нибудь доказательство, я заботился только о томъ, чтобы убѣдиться въ его строгости. Вотъ добрался до окончательнаго результата, и довольно! Дальше я старался помнить окончательные выводы, весь же процессъ доказательства быстро испарялся. Но потомъ забывались и формулы, а часто эти формулы оказывались необходимыми при дальнѣйшихъ занятіяхъ. Что же оставалось дѣлать? Собирать библіотеку изъ справочныхъ книгъ? Но на это не хватало средствъ, да и не было помѣщенія для библіотеки. Поневолѣ приходилось припоминать самый процессъ, при помощи котораго выводилась та или иная формула. Такимъ образомъ вмѣсто формулъ мало-по-малу я пришелъ къ самимъ доказательствамъ. Оказалось, что легче припомнить процессъ математическаго мышленія, чѣмъ голыя формулы. Да и нѣтъ надобности помнить цѣликомъ весь процессъ мышленія: достаточно намѣтить этапные пункты, по которымъ должна идти наша мысль. И вотъ уже нѣсколько лѣтъ, какъ я своимъ слушателямъ твержу: **въ математикѣ слѣдуетъ помнить не формулы, а процессы мышленія.** Прочитавши какой-нибудь отдѣлъ изъ аналитической геометріи, я излагаю студентамъ конспектъ, въ которомъ, безъ формулъ, намѣчаю главные пункты мышленія.

«Если выраженъ словами процессъ математическаго мышленія, то полученіе самихъ формулъ является уже дѣломъ чисто механическимъ. Въ механизмѣ же алгебраическихъ дѣйствій ученики должны пріобрѣсти навыки еще въ средней школѣ.

«Я пришелъ къ тому убѣжденію, что указанный мною принципъ долженъ быть примѣненъ и въ средней школѣ...»

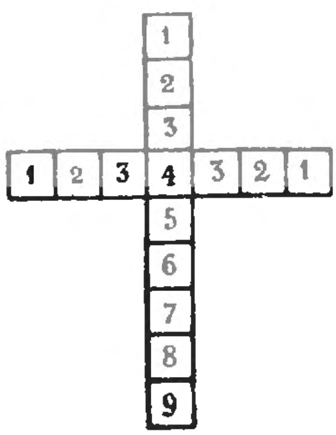
Продолжимъ мысль В. П. Ермакова и скажемъ: указанный принципъ долженъ въ особенности лечь въ основаніе начальнаго—какъ семейнаго, такъ и школьнаго—образованія въ области математическихъ знаній. Не натаскивайте ни ребятъ, ни юношей на различныхъ «табличкахъ» сложенія, вычитанія, умноженія, на механическомъ запоминаніи разныхъ «правилъ» и формулъ, а прежде всего пріучайте охотно и сознательно *мыслить.* Остальное приложится. Не мучьте никого длиннѣйшими и скучнѣйшими механическими вычисленіями и упражненіями.

Когда они понадобятся кому-либо въ жизни, онъ ихъ продѣлаетъ самъ, — да на это нынче есть всякія счетныя машины, таблицы и иныя приспособленія.

Задача 1-я.

Знатная дама и недобросовѣстный мастеръ.

Одна знатная дама имѣла крестъ, составленный изъ крупныхъ брильянтовъ. Сколько всего было этихъ брильянтовъ, она даже не знала, да и не интересовалась этимъ, потому что занимала ее другая особенность креста, а именно: съ какого бы изъ трехъ верхнихъ концовъ креста она ни считала брильянты, когда приходила къ основанію креста, всегда получала число девять (фиг. 1). Крестъ какъ-то понадобилось отдать въ починку.



Фиг. 1.

При этомъ дама сообщила мастеру о чудесной особенности своего креста.

— Видите ли!.. Съ какого бы конца я ни начинала счетъ, всегда получается девять!.. Такъ я всегда провѣряю, всѣ ли камни въ наличности!

— Только такъ?—спросилъ мастеръ.

— Ну да, только такъ: этого совершенно достаточно. Я и послѣ вашей починки провѣрю число камней такимъ же способомъ.

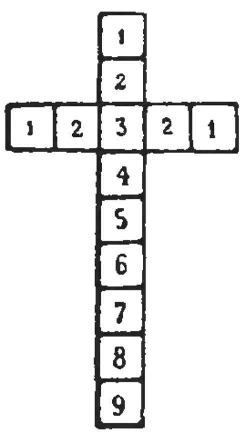
Мастеръ оказался недобросовѣстнымъ: онъ вынулъ и оставилъ у себя два брильянта, передѣлалъ затѣмъ крестъ, починилъ его и возратилъ дамѣ.

Та пересчитала камни по-своему и нашла, что всѣ камни налицо!

Спрашивается, что̀ сдѣлалъ мастеръ, возвратившій дамѣ крестъ послѣ починки?

Рѣшеніе.

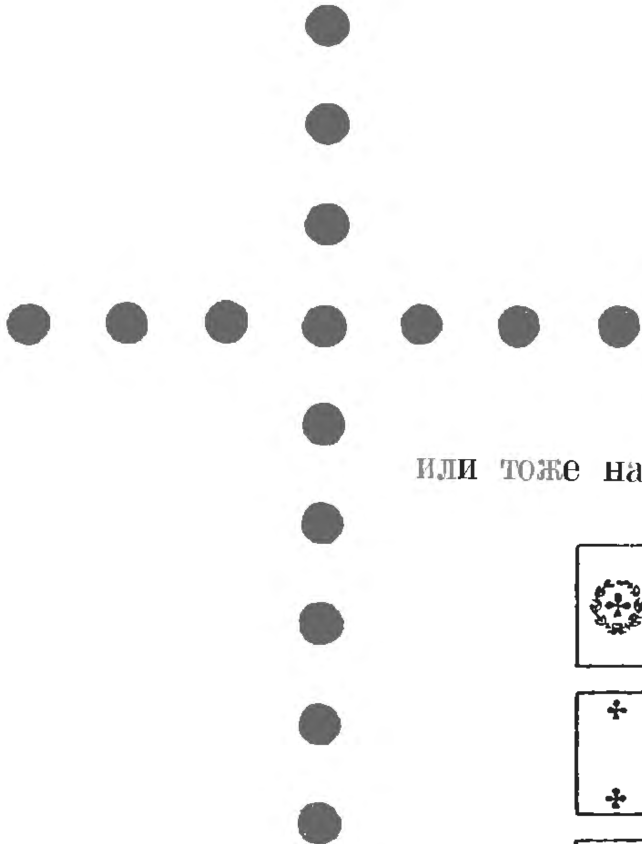
Не трудно видѣть, что мастеръ срѣзалъ концы поперечной перекладины вмѣстѣ съ брильянтами, по одному съ каждаго конца, и затѣмъ передвинулъ эту перекладину на одинъ рядъ выше. Такимъ образомъ изъ креста, изображеннаго на фиг. 1, получился крестъ, изображенный на фиг. 2.



Фиг. 2.

Дама, пересчитывая въ починенномъ крестѣ брильянты «посвоему», т. е. отъ каждой изъ трехъ верхнихъ оконечностей креста до основанія, опять насчитала по девяти камней и не замѣтила обмана.

Крестъ до починки.

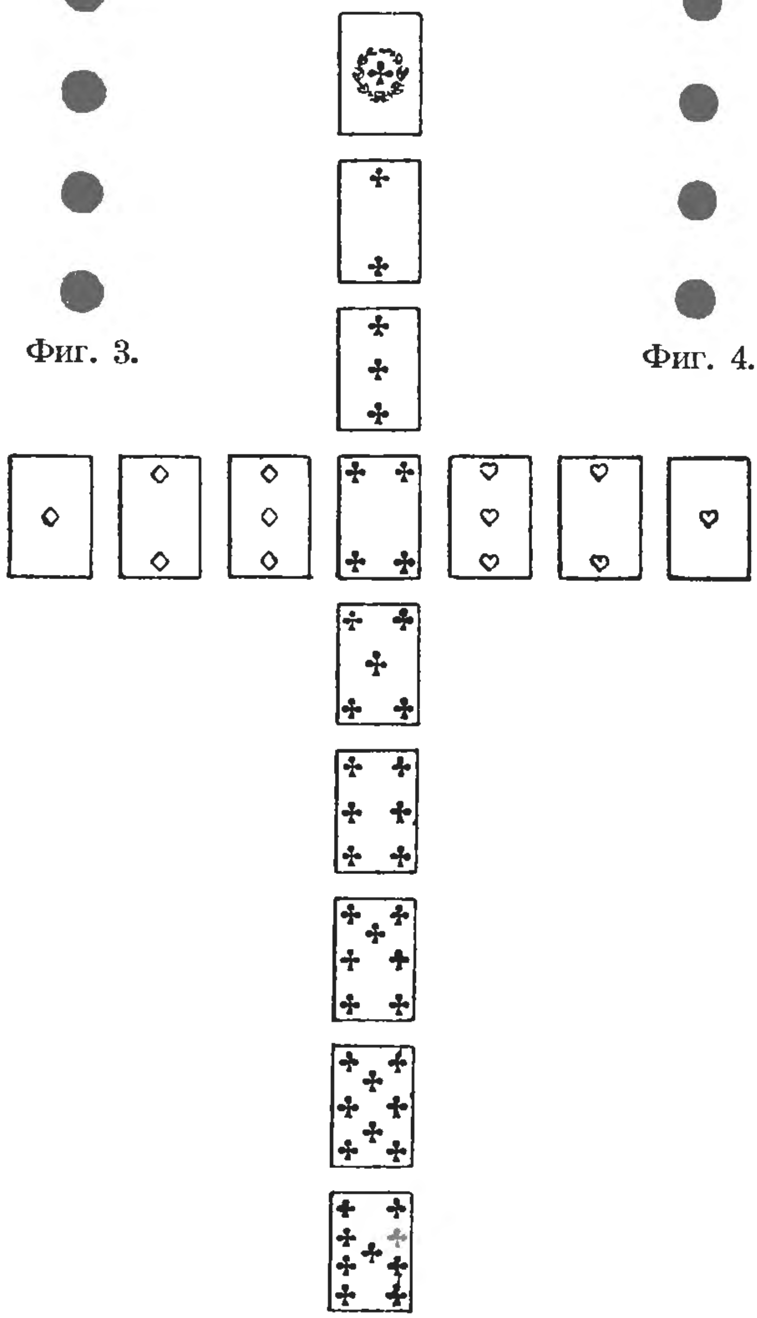


Фиг. 3.

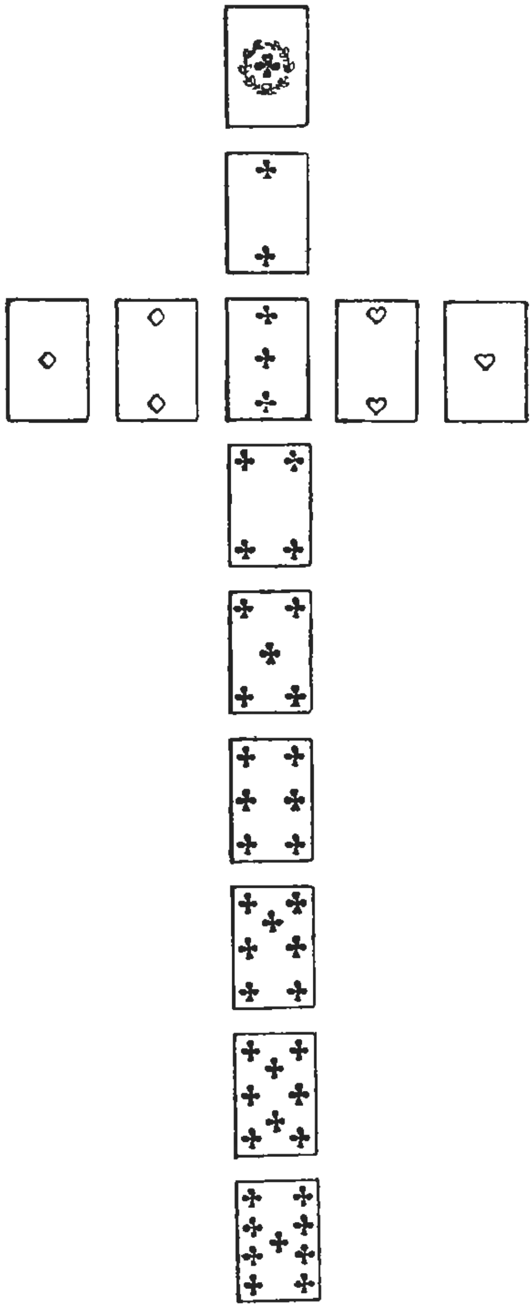
Крестъ послѣ починки.

Фиг. 4.

или тоже на картахъ:



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Совершенно ясно, что провѣрить ошибку наивной дамы и показать недобросовѣстность ювелира можно, и не имѣя драгоцѣнныхъ камней. Для этого можете взять или 15 камешковъ, или 15 кубиковъ, или 15 картъ, или нарѣзать просто 15 кусочковъ бумаги. Вы получите фигуры 3, 4, 5 и 6.

Вмѣсто того, чтобы срѣзать и присвоить себѣ два камня, мастеръ могъ съ неменьшимъ успѣхомъ *прибавить* два камня отъ себя, и дама этого не замѣтила бы при своемъ способѣ провѣрки. Въ такомъ случаѣ ему пришлось бы поперечникъ креста, увеличенный двумя камнями, опустить на одинъ рядъ внизъ.

Мастеръ-ювелиръ поступилъ нехорошо, но слишкомъ наивной оказалась и дама, не сумѣвшая сдѣлать такой простой провѣрки. Ясно, что одного умѣнья считать до девяти еще слишкомъ недостаточно для того, чтобы не попасться впросакъ на самомъ простомъ подсчетѣ.

Задача 2-я.

Удивительный отгадчикъ.

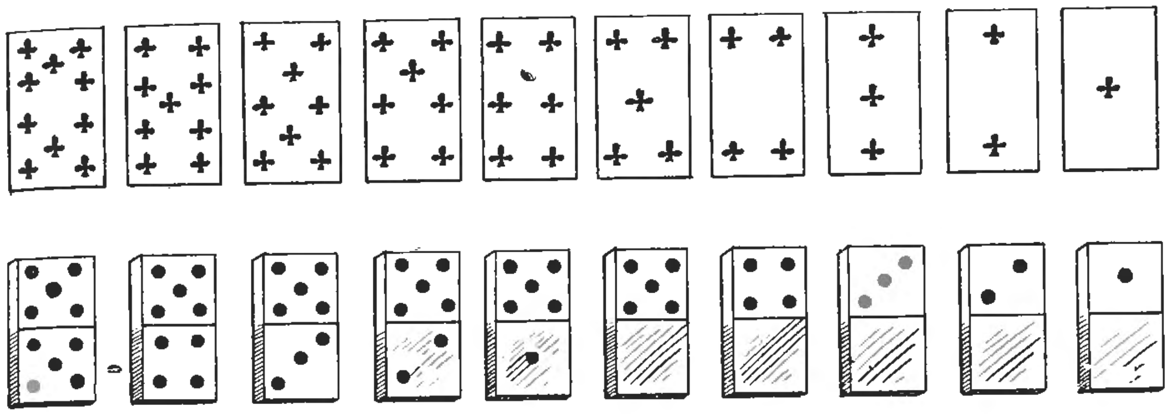
Десять картъ (или домино) отъ туза до десятки положены въ рядъ, начиная справа налѣво крапомъ вверхъ (т. е. внизъ «лицомъ») и положены въ послѣдовательномъ возрастающемъ порядкѣ, т. е. тузъ, двойка, тройка и т. д. до десятки. «Отгадчикъ» объявляетъ остальнымъ, что онъ уйдетъ въ другую комнату или отвернется, а они безъ него могутъ перемѣстить справа налѣво сколько угодно картъ, при чемъ единственнымъ условіемъ ставится то, чтобы не измѣнялось относительное расположеніе какъ перемѣщенныхъ, такъ и остальныхъ картъ. По возвращеніи отгадчикъ берется узнать не только число перемѣщенныхъ картъ, но и открыть ту карту, которая укажетъ (числомъ очковъ), сколько перемѣщено картъ.

Рѣшеніе.

И дѣйствительно, оказывается, что требуемую карту всегда можно открыть. Но для этого не нужно даже «догадки», а достаточно самаго простого, не выходящаго изъ предѣла перваго десятка, ариѳметическаго расчета.

Разъяснимъ подробно задачу. Для этого перевернемъ всѣ карты или домино лицомъ вверхъ. Справа налѣво они первоначально лежатъ въ такомъ порядкѣ, какъ указано на фиг. 7-ой.

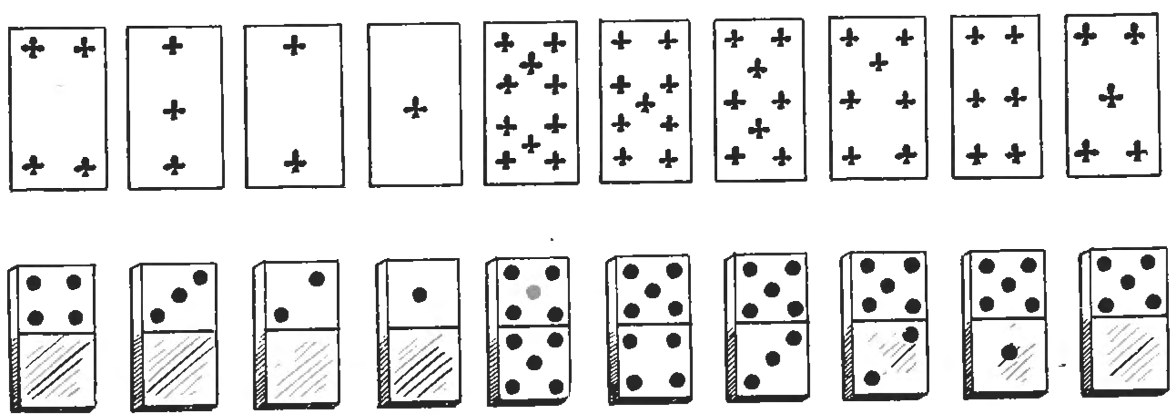
Воображаемый «магъ и чародѣй» оставляетъ комнату, а кто желаетъ убѣдиться «въ чудесныхъ» его способностяхъ,—перемѣщаетъ нѣсколько картъ справа налѣво, не измѣняя ихъ относительнаго расположенія, а затѣмъ двигаетъ всѣ карты въ этомъ новомъ порядкѣ такъ, чтобы весь рядъ картъ занималъ



Фиг. 7.

прежнее мѣсто. Пусть, напр., перемѣщено вначалѣ 4 карты. Тогда новый порядокъ ихъ будетъ представленъ фиг. 8.

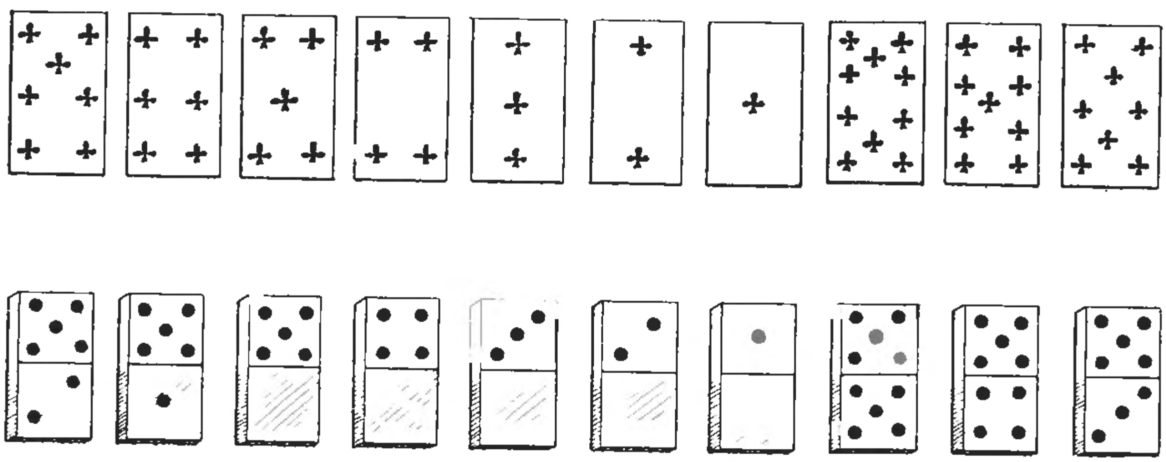
Очевидно, что первая карта (или домино) слѣва, четверка,— и показываетъ число перемѣщенныхъ картъ. Поэтому явившійся въ комнату «угадчикъ» открываетъ первую карту **слѣва**, кладетъ ее на столъ и говоритъ: «Перемѣщено четыре карты» (или «домино»). Здѣсь могутъ быть для большаго интереса пущены въ ходъ маленькія невинныя хитрости. Хотя дѣло въ томъ, чтобы посмотрѣть эту первую карту или (домино) слѣва, но «угадчикъ» можетъ сдѣлать видъ и внушить собесѣдникамъ,



Фиг. 8.

что онъ знаетъ число перемѣщенныхъ картъ раньше, чѣмъ открываетъ карту, и что открываніе четверки есть только добавочное доказательство его всезнанія.

Дальше дѣло пойдетъ еще удивительнѣе и занимательнѣе. Карты остаются въ томъ же порядкѣ, и угадывающій уходитъ зная, что послѣдняя карта слѣва есть четверка. Сколько бы картъ въ его отсутствіе ни перемѣстили (опять справа налѣво и не измѣняя порядка), если онъ придетъ и откроетъ 5-ю карту ($4+1=5$), считая слѣво направо, то число очковъ этой карты покажетъ ему всегда число перемѣщенныхъ картъ. Такъ, пусть перемѣщено во второй его выходъ справа налѣво три карты. Тогда получится такой порядокъ картъ (фиг. 9):



Фиг. 9.

и пятая карта, считая слѣва, дѣйствительно показываетъ три очка. Открывъ эту тройку и положивъ ее опять на мѣсто, не трудно уже, не глядя, сообразить, что послѣдняя карта слѣва теперь будетъ семерка. Запомнивъ это, угадывающій опять уходитъ въ другую комнату, предлагая перемѣстить сколько угодно картъ справа налѣво, напередъ зная, что по приходѣ онъ откроетъ 8 карту ($7+1$), и число очковъ этой карты ему покажетъ, сколько картъ было перемѣщено въ его отсутствіе.

Вообще, если вы знаете число очковъ послѣдней слѣва карты (или домино), а это, какъ видимъ, нетрудно, то къ этому числу надо придать единицу, и вы получите то мѣсто, считая по порядку слѣва, на которомъ лежитъ карта, указывающая, сколько картъ перемѣщено. Задача эта, какъ видимъ, весьма проста, но и весьма эффектна. Разобраться въ рѣшеніи ея не составляетъ особаго труда, и каждый желающій можетъ это сдѣлать съ большой пользой для себя.

Задача 3-я.

Движеніемъ пальца.

Одинъ малышъ жаловался, что ему очень трудно запомнить таблицу умноженія первыхъ десяти чиселъ на *девять*. Отецъ его нашелъ очень легкій способъ помочь памяти съ помощью пальцевъ рукъ. Вотъ этотъ способъ въ пользу и помощь другимъ:

Положите обѣ руки рядомъ на столъ и протяните пальцы. Пусть каждый палецъ по порядку означаетъ соотвѣтствующее число: первый слѣва 1, второй за нимъ 2, третій 3, четвертый 4 и т. д. до десятаго, который означаетъ 10. Требуется теперь умножить любое изъ первыхъ 10-ти чиселъ на девять. Для этого вамъ стоитъ только, не сдвигая рукъ со стола, приподнять вверхъ тотъ палецъ, который обозначаетъ множимое. Тогда остальные пальцы, лежащіе налѣво отъ поднятаго пальца, дадутъ въ суммѣ число десятковъ, а пальцы направо — число единицъ.

Умножить 7 на 9. Кладете обѣ руки на столъ и подымаете седьмой палецъ, налѣво отъ поднятаго пальца лежатъ 6 пальцевъ, а направо 3. Значитъ, результатъ умноженія 7 на 9 равенъ 63.

Рѣшеніе.

Это удивительное на первый взглядъ механическое умноженіе тотчасъ же станетъ понятнымъ, если разсмотрѣть слолбецъ таблицы умноженія на 9 первыхъ десяти послѣдовательныхъ чиселъ:

$$
\begin{aligned}
1 \times 9 &= 09\\
2 \times 9 &= 18\\
3 \times 9 &= 27\\
4 \times 9 &= 36\\
5 \times 9 &= 45\\
6 \times 9 &= 54\\
7 \times 9 &= 63\\
8 \times 9 &= 72\\
9 \times 9 &= 81\\
10 \times 9 &= 90
\end{aligned}
$$

Здѣсь цифры десятковъ въ произведеніяхъ идутъ, послѣдовательно увеличиваясь на единипу: 0, 1, 2, 3, 4,...., 8, 9, а цифры единицъ идутъ, наоборотъ, уменьшаясь на единицу: 9, 8, 7,.. .. 1, 0. Сумма же цифръ единицъ и десятковъ всюду равна 9. Простымъ поднятіемъ соотвѣтствующаго пальца мы отмѣчаемъ это и... умножаемъ. Человѣческая рука есть одна изъ первыхъ счетныхъ машипъ!

Задачи-шутки и задачи-загадки.

Задача 4-я.

Звѣриное число.

Число 666 (звѣриное) увеличить въ полтора раза, не производя надъ нимъ никакихъ ариѳметическихъ дѣйствій.

Рѣшеніе.

Написать это число, а затѣмъ повернуть бумажку «вверхъ ногами» (на 180°). Получится 999. (Очевидно, вмѣсто взятаго большого числа можно начать съ 6).

Замѣчаніе. Подробности о «звѣриномъ числѣ» читатель найдетъ въ 3-ей (послѣдней) книгѣ «Въ царствѣ смекалки».

Задача 5-я.

Дѣлежъ.

Раздѣлимъ 5 яблокъ между 5-ю лицами такъ, чтобы каждый получилъ по яблоку, и одно яблоко осталось въ корзинѣ.

Рѣшеніе.

Одно лицо беретъ яблоко вмѣстѣ съ корзиной. (Въ данномъ случаѣ мы имѣемъ, очевидно, дѣло съ родомъ задачи-загадки).

Задача 6-я.

Сколько кошекъ?

Въ комнатѣ четыре угла. Въ каждомъ углу сидитъ кошка. Насупротивъ каждой кошки по 3 кошки. На хвостѣ каждой кошки по одной кошкѣ. Сколько же всего кошекъ въ комнатѣ?

Рѣшеніе.

Иной, пожалуй, начнетъ вычислять такъ: 4 кошки въ углахъ, по три кошки противъ каждой, еще 12 кошекъ, да на хвостѣ каждой кошки по кошкѣ, значитъ, еще 16 кошекъ. Всего, значитъ, 32 кошки. Пожалуй, по-своему онъ будетъ и правъ... Но еще болѣе правъ будетъ тотъ, кто сразу сообразитъ, что въ комнатѣ находятся всего-на-всего четыре кошки. Ни болѣе ни менѣе.

Задача 7-я.

Задача цифръ.

Написано:

1	1	1
3	3	3
5	5	5
7	7	7
9	9	9

Изъ этихъ 15-ти цифръ зачеркните 12 цифръ такъ, чтобы при сложеніи остальныхъ 3-хъ незачеркнутыхъ получилось 20?

Рѣшеніе.

Разсматривая написанныя числа, какъ 5 трехзначныхъ слагаемыхъ, для полученія требуемаго вычеркиваемъ цифры, какъ указано ниже. Сложеніе остальныхъ и даетъ 20.

$$
\begin{array}{rccc}
 & \cancel{1} & 1 & 1 \\
 & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} \\
+ & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} \\
 & \cancel{7} & \cancel{7} & \cancel{7} \\
 & \cancel{9} & \cancel{9} & 9 \\
\hline
 & & 2 & 0
\end{array}
\qquad \text{или} \qquad
\begin{array}{rccc}
 & \cancel{1} & 1 & \cancel{1} \\
 & \cancel{3} & \cancel{3} & 3 \\
+ & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} \\
 & \cancel{7} & \cancel{7} & 7 \\
 & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} \\
\hline
 & & 2 & 0
\end{array}
$$

Задачу можно видоизмѣнять всячески.

Задача 8-я.

Къ числу 851 припишите одну, двѣ, три или болѣе цифръ, въ средину или по краямъ его—все равно, но такъ, чтобы получившееся число было меньше 851.

Рѣшеніе.

Это опять-таки родъ шутливой загадки, разгадка которой очень проста. Цифры, какія вамъ угодно, приписывайте такъ, чтобы получить *дробь*, или простую или десятичную,—все равно. Видоизмѣнять и рѣшать эту задачу можно всячески.

Задача 9-я.

Уродъ.

Одинъ господинъ написалъ о себѣ слѣдующее: «Всѣхъ пальцевъ у меня двадцать пять на одной рукѣ, столько же на другой рукѣ, да на обѣихъ ногахъ десять». Отчего онъ оказался такимъ уродомъ?

Рѣшеніе.

Господинъ просто былъ или малограмотный, или очень ужъ разсѣянный человѣкъ: *въ одномъ мѣстѣ онъ не поставилъ знака препинанія* (двухъ точекъ). Ему нужно было бы написать такъ: «Всѣхъ пальцевъ у меня двадцать: пять на одной рукѣ, столько же на другой рукѣ, да на обѣихъ ногахъ десять». И не было бы никакого недоразумѣнія и вопроса объ уродствѣ.

Задача 10-я.

Что сказалъ старикъ?

Два молодыхъ казака, оба лихіе наѣздники, часто бились между собою объ закладъ, кто кого перегонитъ. Не разъ то тотъ, то другой былъ побѣдителемъ,—наконецъ, это имъ надоѣло.

— Вотъ что,—сказалъ Грицко,—давай спорить наоборотъ. Пусть закладъ достанется тому, чей конь придетъ въ назначенное мѣсто вторымъ, а не первымъ.

— Ладно!—отвѣтилъ Опанасъ.

Казаки выѣхали на своихъ коняхъ въ степь. Зрителей собралось множество: всѣмъ хотѣлось посмотрѣть на такую диковинку. Одинъ старый казакъ началъ считать, хлопая въ ладоши:

— Разъ!.. Два!.. Три!..

Спорщики, конечно, ни съ мѣста. Зрители стали смѣяться, судить да рядить и порѣшили, что такой споръ невозможенъ, и что спорщики простоятъ на мѣстѣ, какъ говорится, до скончанія вѣка. Тутъ къ толпѣ подошелъ сѣдой старикъ, видавшій на своемъ вѣку разные виды.

— Въ чемъ дѣло?—спрашиваетъ онъ.

Ему сказали.

— Эге-жъ!—говоритъ старикъ,—вотъ я имъ сейчасъ шепну такое слово, что поскачутъ, какъ ошпаренные...

И дѣйствительно... Подошелъ старикъ къ казакамъ, сказалъ имъ что-то; и черезъ полминуты казаки уже неслисъ по степи во всю прыть, стараясь непремѣнно обогнать другъ друга, но закладъ все же выигрывалъ тотъ, чья лошадь приходила второй.

Что сказалъ старикъ?

Рѣшеніе.

Старикъ шепнулъ казакамъ: «Пересядьте». Тѣ поняли, мигомъ пересѣли каждый на лошадь своего противника, и каждый погналъ теперь во всю прыть чужую лошадь, на которой онъ сидѣлъ, чтобы собственная его лошадь пришла 2-й.

Спички и палочки.

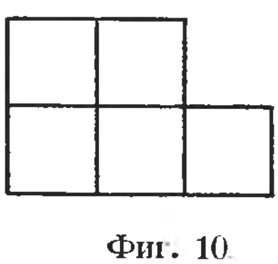
Запаситесь коробкой спичекъ, или пучкомъ палочекъ одинаковой длины. Съ помощью ихъ вы всегда можете придумать рядъ забавныхъ и остроумныхъ задачъ, развивающихъ сообразительность и смышленность. Вотъ для примѣра нѣкоторыя простѣйшія изъ нихъ (Во 2-й книгѣ «Въ царствѣ смекалки» этому предмету посвящена болѣе обширная глава).

Задача 11-я.

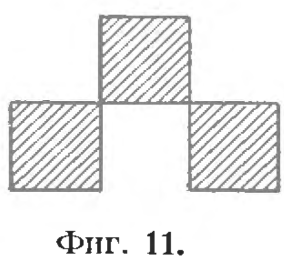
Изъ 15-ти палочекъ одинаковой длины (или спичекъ): 1) Построить пять равныхъ прилегающихъ другъ къ другу квадратиковъ; 2) снять три палочки такъ, чтобы осталось всего три равныхъ квадрата.

Рѣшеніе.

Нижеслѣдующія фигуры вполнѣ выясняютъ, какъ рѣшаются заданные вопросы:



Фиг. 10



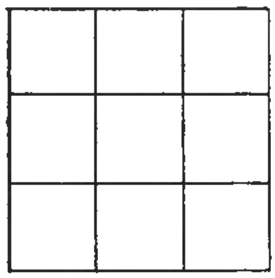
Фиг. 11.

Задача 12-я.

Изъ 24-хъ равныхъ палочекъ (или спичекъ): 1) составить фигуру изъ 9-ти *соприкасающихся* квадратовъ; 2) снять затѣмъ восемь спичекъ такъ, чтобы осталось только два квадрата.

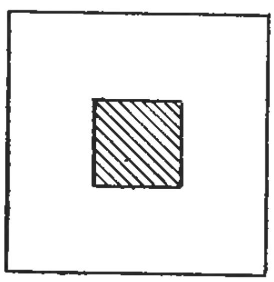
Рѣшеніе.

Какъ рѣшается первая часть вопроса, ясно изъ приложеннаго чертежа:

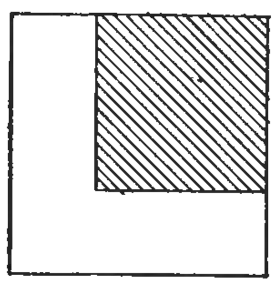


Фиг. 12.

Какъ, отнявъ восемь спичекъ, получить 2 квадрата, видно изъ фиг. 13 и 14:



Фиг. 13.



Фиг. 14.

Очень хорошая задача со спичками или палочками равной длины, дополняющая предыдущія, слѣдующая—

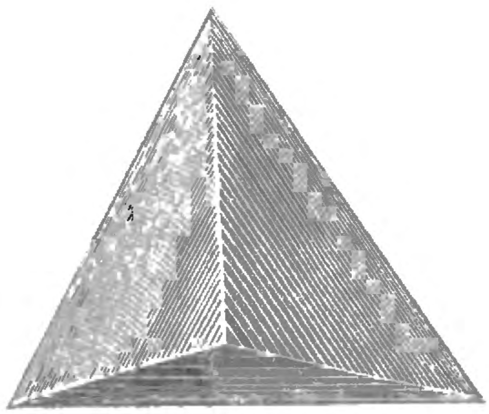
Задача 13-я.

Изъ шести спичекъ или равныхъ палочекъ составить четыре равныхъ равностороннихъ треугольника.

Можно смѣло поручиться, что мало кому сразу придетъ въ голову рѣшеніе этой простой съ виду задачи. Дѣло въ томъ, что въ данномъ случаѣ приходится строить изъ спичекъ не плоскую фигуру, а фигуру *въ пространствѣ.*

Рѣшеніе.

Задачу рѣшите, вглядѣвшись въ фиг. 15. На ней изображено геометрическое тѣло—правильная трехгранная *пирамида*, иначе — «тетраэдръ», ограниченный четырьмя равными между собою равносторонними треугольниками. Положите на столъ



Фиг. 15.

3 спички такъ, чтобы онѣ составили треугольникъ, затѣмъ поставьте остальныя три спички такъ, чтобы онѣ нижними своими концами упирались въ углы лежащаго на столѣ треугольника, а верхними концами соединялись вмѣстѣ надъ срединою его,— и вы выполните то, что требуется задачей.

Ниже предлагается еще нѣсколько особаго рода развлеченій съ палочками или спичками, принадлежащихъ уже скорѣе къ области задачъ-загадокъ или просто шутокъ.

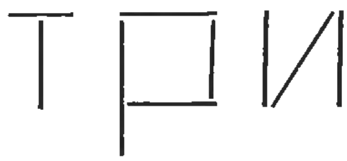
Задача 14-я.

Положено пять спичекъ:

Прибавить къ нимъ еще пять спичекъ такъ, чтобы получилось три!

Рѣшеніе.

Спички прикладываются слѣдующимъ образомъ:



Образуется слово: *три*.

Приложить къ 4 спичкамъ 5 спичекъ такъ, чтобы получилось сто:

Четыре спички положены такъ:

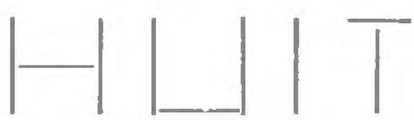
Прибавляя къ нимъ еще пять, положенныхъ поперечно, образуемъ слово:

Знающимъ французскій языкъ, или обучающимся ему, можно предложить такую задачу:

Приложить **къ шести** спичкамъ **три** такъ, чтобы получилось **восемь**.

Шесть спичекъ положено такъ:

Какъ приложены три спички, ясно изъ нижеслѣдующей фигуры:



То есть получается французское слово HUIT (восемь).

Не хотите ли еще поупражняться въ нѣмецкомъ языкѣ? Тогда къ шести палочкамъ

прибавьте еще семь палочекъ такъ, чтобы получить десять.

Приложите эти семь палочекъ такъ:

Вы получили нѣмецкое слово ZEHN (десять).

Подбныхъ задачъ можно придумать сколько угодно. Полезны онѣ не въ математическомъ, а въ общеобразовательномъ отношенiи.

Разныя задачи.

Задача 15-я.

Вмѣсто мелкихъ долей крупныя.

Раздѣлить поровну 5 пряниковъ между 6-ю мальчиками, не разрѣзая ни одного пряника на 6 равныхъ частей.

Рѣшеніе.

Если мы изъ 5 данныхъ пряниковъ 3 разрѣжемъ пополамъ, то получимъ 6 равныхъ кусковъ, каждый изъ которыхъ и отдадимъ мальчикамъ. Затѣмъ 2 остальныхъ пряника разрѣжемъ каждый на 3 равныхъ части и получимъ опять шесть равныхъ кусковъ, которые и отдадимъ мальчикамъ. Такимъ образомъ задача рѣшена, при чемъ ни одного пряника не пришлось разрѣзать на 6 частей.

Подобныхъ задачъ можно, конечно, придумать, сколько угодно. Такъ, напримѣръ, въ данной задачѣ вмѣсто чиселъ 5 и 6 могутъ быть поставлены слѣдующія числа: 7 на 12, 7 на 6, 7 на 10, 9 на 10, 11 на 10, 13 на 10, 5 на 12, 11 на 12, 13 на 12, 9 на 14, 11 на 14, 13 на 14, 15 на 14, 17 на 14 и т. д.

Во всѣхъ задачахъ подобнаго рода требуется мелкія доли привести въ болѣе крупныя. Разнообразить ихъ можно всячески, предлагая, напримѣръ, такіе вопросы:

Можно ли 5 листовъ бумаги раздѣлить между восемью учениками, не дѣля ни одного листа на восьмыя доли?

Подобныя задачи очень полезны для отчетливаго и быстраго пониманія дробей.

Задача 16-я.

Сумма послѣдовательныхъ чиселъ.

Понятіе объ ариѳметической прогрессіи.

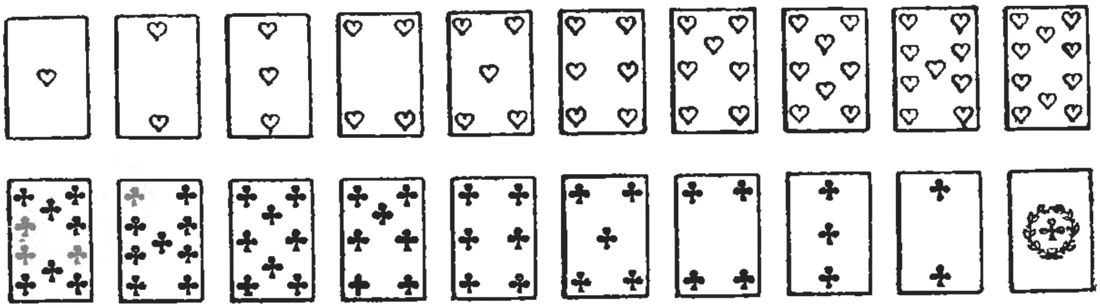
Для нижеслѣдующей задачи можно пользоваться обыкновенными игральными или игрушечными картами. Если бы ихъ не нашлось, то не трудно изъ бумаги нарѣзать карточки и нарисовать на нихъ карандашомъ или чернилами черные кружочки. На первой — одинъ кружочекъ, на второй — 2, на третьей — 3 и т. д. до десяти.

Теперь мы вполнѣ подготовлены для практическаго рѣшенія такой задачи:

Взято десять картъ (или сдѣланныхъ нами карточекъ) одной масти, отъ туза до десятки. Вычислить, сколько всего очковъ будетъ въ этихъ десяти картахъ, не прикладывая послѣдовательно очковъ первой карты ко второй, этихъ двухъ къ третьей, этихъ трехъ къ четвертой и т. д., т. е. не дѣлая длиннаго ряда послѣдовательныхъ сложеній.

Рѣшеніе.

Дѣло сводится, значитъ, къ тому, чтобы быстро, безъ послѣдовательнаго сложенія узнать сумму первыхъ десяти чиселъ (отъ 1 до 10). Беремъ десять картъ (напр. червей) отъ туза до десятки и кладемъ ихъ въ рядъ (фиг. 16): тузъ, двойка, тройка и т. д. до десятки. Беремъ затѣмъ десять другихъ картъ (напр. трефъ) и подкладываемъ ихъ подъ первымъ рядомъ, но только въ обратномъ порядкѣ: десятка, девятка и т. д.



Фиг. 16.

У насъ получается два *ряда* по десяти картъ или десять *столбцовъ* по двѣ карты. Если сосчитать, сколько очковъ въ каждомъ столбцѣ, окажется, что *въ каждомъ* столбцѣ по *одиннадцати* очковъ. А всего въ десяти столбцахъ или въ двухъ рядахъ картъ — десять разъ по одиннадцати очковъ, или 110 очковъ. Но въ обоихъ длинныхъ рядахъ, очевидно, по одинаковому числу очковъ. Значитъ, сумма всѣхъ очковъ одного ряда равна половинѣ 110, т. е. равна 55. Итакъ, въ десяти картахъ отъ туза до 10-ти 55 очковъ.

Не трудно видѣть, что подобнымъ же образомъ, не прибѣгая къ послѣдовательному сложенію, мы можемъ вычислить сумму любого ряда цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ до любого даннаго числа. Напримѣръ, сумма всѣхъ чиселъ отъ 1 до 100 будетъ равна половинѣ сто разъ взятаго 101, т. е. 5 050.

Задача 17-я.

Сборъ яблокъ.

На разстояніи аршина одно отъ другого лежатъ въ рядъ сто яблокъ, и на аршинъ же отъ перваго яблока садовникъ принесъ и поставилъ корзину. Спрашивается, какой длины путь совершитъ онъ, если возьмется собрать эти яблоки такъ, чтобы брать ихъ послѣдовательно одно за другимъ и каждое отдѣльно относить въ корзину, которая все время стоитъ на одномъ и томъ же мѣстѣ?

Рѣшеніе.

Нужно подойти къ каждому яблоку и возвратиться обратно къ корзинѣ. Значитъ, число пройденныхъ аршинъ будетъ равно удвоенной суммѣ первыхъ ста чиселъ, или сто разъ взятому 101, т. е. 10 100 аршинъ. Это составитъ почти ровно *семь верстъ!* Какъ видимъ, способъ собиранія довольно утомительный!

Задача 18-я.

Бой часовъ.

Сколько ударовъ въ сутки дѣлаютъ часы съ боемъ?

Рѣшеніе.

Наибольшее количество ударовъ, отбиваемыхъ обыкновенными часами, есть 12. Задача сводится, значитъ, къ тому, чтобы узнать сумму всѣхъ чиселъ отъ 1 до 12. А это, мы уже знаемъ, будетъ половина двѣнадцать разъ взятыхъ тринадцати. Но въ суткахъ два раза 12 часовъ, или 24 часа. Значитъ часы сдѣлаютъ ровно 12 разъ по 13 ударовъ, т. е. 156 ударовъ ($12 \times 13 = 156$).

Если же часы отбиваютъ также и получасы, то сколько всего ударовъ они дѣлаютъ въ сутки? Полагаю, что вы безъ труда отвѣтите на этотъ вопросъ.

Задача 19-я.

Продажа яблокъ.

Крестьянка принесла на базаръ для продажи корзину яблокъ. Первому покупателю она продала половину всѣхъ своихъ яблокъ и еще полъ-яблока; второму — половину остатка и еще полъ-яблока, третьему—половину остатка да еще полъ-яблока и т. д. Когда же пришелъ шестой покупатель и купилъ у нея половину оставшихся яблокъ и полъ-яблока, то оказалось, что у него, какъ и у остальныхъ покупателей, всѣ яблоки цѣлыя, и что крестьянка продала всѣ свои яблоки. Сколько яблокъ она принесла на базаръ?

Рѣшеніе.

Задача рѣшается тотчасъ, если сообразить, что послѣднему (шестому) покупателю досталось одно цѣлое яблоко. Значитъ: пятому досталось 2 яблока, четвертому 4, третьему 8 и т. д. Всего же яблокъ было

$$1+2+4+8+16+32=63.$$

Крестьянка принесла на базаръ 63 яблока.

Задача 20-я.

Воришка съ яблоками.

Предыдущую задачу предлагаютъ иногда въ такомъ болѣе простомъ, но забавномъ варіантѣ:

Воришка залѣзъ въ чужой садъ и набралъ яблокъ. Подкрался сторожъ, поймалъ его, сосчиталъ наворованныя яблоки, но, въ виду слезъ и раскаянія воришки, говоритъ:

— Ладно, я отпущу тебя, только съ уговоромъ: отдай мнѣ половину всѣхъ яблокъ да еще полъ-яблока.

Ни у сторожа, ни у воришки ножа не было, да онъ и не понадобился. Воришка отдалъ сторожу столько яблокъ, сколько тотъ потребовалъ, и пустился бѣжать безъ оглядки: да на-бѣду наткнулся на другого сторожа. Этотъ тоже сосчиталъ яблоки у воришки и говоритъ:

— Отдай половину да еще полъ-яблока.

Пришлось подѣлиться и съ этимъ сторожемъ, и опять безъ ножа.

У самаго забора воришку остановилъ третій сторожъ. И этотъ отобралъ у него половину яблокъ да еще полъ-яблока. Наконецъ воришка уже перелѣзъ черезъ заборъ и вздохнулъ было свободно, какъ его схватилъ четвертый сторожъ.

— Отдавай половину яблокъ да еще полъ-яблока!

Воришка обшарилъ карманы и нашелъ только одно яблоко. Нечего дѣлать, пришлось отдать сторожу послѣднее яблоко, а самому уйти, не солоно хлебавши.

Не сумѣете ли узнать, сколько яблокъ набралъ воришка въ саду?

Рѣшеніе.

После предыдущей задачи отвѣтить, что воришка набралъ было 15 яблокъ, не трудно.

Задача 21-я.

Каждому свое.

Шли два крестьянина, и было у нихъ три одинаковаго вѣса и стоимости хлѣба: у одного два хлѣба, а у другого одинъ. Пришло время обѣдать. Они сѣли и достали свои хлѣбы. Тогда къ нимъ подошелъ третій крестьянинъ и попросилъ подѣлиться съ нимъ хлѣбомъ, обѣщая заплатить за свою долю. Ему дали одинъ хлѣбъ, а онъ уплатилъ 15 коп. Какъ должны подѣлить два первыхъ крестьянина эти деньги?

Рѣшеніе.

Тотъ, кто отдалъ свой второй хлѣбъ, очевидно, и возьметъ себѣ всѣ деньги.

Задача 22-я.

Какъ подѣлить?

Два путника сѣли обѣдать. У одного было 5 лепешекъ, а у другого 3. Всѣ лепешки были одинаковой стоимости. Подошелъ къ нимъ третій путникъ, не имѣвшій чего ѣсть, и предложилъ пообѣдать этими лепешками сообща, обѣщая уплатить имъ деньги за ту часть лепешекъ, которая придется на его долю. Пообѣдавъ, онъ заплатилъ за съѣденныя имъ лепешки 8 копѣекъ. Спрашивается, какъ первые два путника должны раздѣлить эти деньги?

Рѣшеніе.

По условію задачи выходитъ, что всѣ лепешки стоили 24 коп., такъ какъ расходъ каждаго путника равенъ 8 коп. Отсюда слѣдуетъ, что каждая лепешка стоитъ 3 коп. Итакъ, тотъ путникъ, который далъ 5 лепешекъ, издержалъ 15 коп., и если вычесть отсюда 8 коп. за лепешки, съѣденныя имъ самимъ, то выходитъ, что ему нужно изъ денегъ третьяго путника получить 7 коп. Разсуждая точно такъ же, находимъ, что второй путникъ имѣлъ лепешекъ на 9 коп., и что ему приходится изъ денегъ третьяго получить 1 коп.

Задача 23-я.

За кашу.

Два человѣка варили кашу. Одинъ далъ для этого 2 фунта крупъ, а другой 3 фунта. Когда каша была готова, подошелъ третій человѣкъ и попросилъ позволенія съѣсть съ ними кашу за плату. Послѣ ѣды онъ уплатилъ 5 коп. Какъ раздѣлили эти деньги варившіе кашу?

Рѣшеніе.

Рѣшается задача совершенно подобно предыдущей. И деньги подѣлены такъ: одинъ получилъ 4 коп., а другой 1 коп. (Какъ и въ предыдущей задачѣ, секретъ заключается въ томъ, что сразу чаще всего говорятъ: «Одинъ получилъ 2 коп., а другой 3 коп.).

Задача 24-я.

Кто правъ?

Два крестьянина, Никита и Павелъ, работали вмѣстѣ въ лѣсу и сѣли завтракать. У Никиты было 4 лепешки, у Павла 7. Тутъ къ крестьянамъ подошелъ охотникъ.

Вотъ, братцы, заблудился въ лѣсу, до деревни далеко, а ѣсть смерть хочется: подѣлитесь со мною хлѣбомъ-солью!

— Ну, что-жъ, садись; чѣмъ богаты, тѣмъ и рады, — сказали Никита и Павелъ.

11 лепешекъ были раздѣлены поровну на троихъ. Послѣ завтрака охотникъ пошарилъ въ карманахъ, нашелъ серебряный гривенникъ и мѣдную копѣйку и отдаетъ крестьянамъ:

— Не обезсудьте, братцы, больше при себѣ ничего нѣтъ! Подѣлитесь, какъ знаете!

Охотникъ ушелъ, а крестьяне заспорили. Никита говорилъ:

— По-моему, деньги надо раздѣлить поровну!..

А Павелъ ему возражалъ:

— За 11 лепешекъ 11 копѣекъ. На лепешку приходится по копѣйкѣ. У тебя было 4 лепешки, тебѣ 4 копѣйки, у меня 7 лепешекъ, мнѣ 7 копѣекъ!..

Кто изъ нихъ сдѣлалъ правильный расчетъ?

Рѣшеніе.

И Никита и Павелъ дѣлаютъ неправильный расчетъ. 11 лепешекъ раздѣлены на троихъ поровну: значитъ, каждый съѣлъ $^{11}/_{3}$ (11 третей), т. е. $3^{2}/_{3}$ лепешки.

У Павла было 7 лепешекъ, онъ съѣлъ $3^{2}/_{3}$; слѣдовательно, охотнику отдалъ $3^{1}/_{3}$ лепешки, или $^{10}/_{3}$ (10 третей) лепешки.

Никита изъ 4-хъ своихъ лепешекъ съѣлъ тоже $3^{2}/_{3}$; слѣдовательно, охотнику отдалъ $^{1}/_{3}$ (одну треть) лепешки.

Охотникъ съѣлъ 11 третей лепешки и заплатилъ за нихъ 11 копѣекъ; значитъ за каждую треть лепешки онъ далъ по копѣйкѣ. У Павла онъ взялъ 10 третей, у Никиты—одну треть: слѣдовательно, Павелъ долженъ взять себѣ серебряный гривенникъ, а Никита—мѣдную копѣйку.

Задача 25-я.

Фальшивая бумажка.

Одинъ господинъ зашелъ въ магазинъ, чтобы купить себѣ шляпу. Выбранная имъ шляпа стоила 10 рублей. Онъ далъ хозяину 25-ти-рублевый кредитный билетъ и попросилъ сдачу. У хозяина не было мелкихъ денегъ. Поэтому онъ послалъ данный ему билетъ для размѣна въ сосѣдній магазинъ. Тамъ его размѣняли. Хозяинъ, получивъ мелкія деньги, далъ покупателю сдачу, и тотъ ушелъ. Спустя нѣкоторое время прибѣжали изъ магазина, гдѣ производился размѣнъ, и заявили, что данный имъ кредитный билетъ—фальшивый. Хозяинъ шляпнаго магазина взялъ 25-ти-рублевый фальшивый кредитный билетъ обратно, уничтожилъ его и отдалъ размѣнявшему магазину 25 рублей настоящими деньгами. Спрашивается, кто и сколько потерялъ при этомъ денегъ?

Рѣшеніе.

Очень часто путаются при рѣшеніи этой задачи и даютъ различные отвѣты. Рѣшеніе, однако, одно, и притомъ оно очень просто: потерялъ только хозяинъ шляпнаго магазина и потерялъ ровно 25 рублей.

Задача 26-я.

Велосипедисты и мухи.

Два города А и В находятся на разстояніи 300 верстъ другъ отъ друга. Точно въ одинъ день, часъ, минуту и секунду изъ этихъ городовъ выѣзжаютъ другъ другу навстрѣчу два велосипедиста и мчатся, не останавливаясь, со скоростью 50 верстъ въ часъ. Но вмѣстѣ съ первымъ велосипедистомъ изъ города А вылетаетъ муха, пролетающая въ часъ 100 верстъ. Муха опережаетъ перваго велосипедиста, летитъ навстрѣчу другому, выѣхавшему изъ В. Встрѣтивъ этого, она тотчасъ поворачиваетъ назадъ къ велосипедисту А. Повстрѣчавъ его, опять летитъ обратно навстрѣчу къ велосипедисту В и такъ повторяетъ свое летаніе взадъ и впередъ до той поры, пока велосипедисты не съѣхались. Тогда она успокоилась и сѣла одному изъ велосипедистовъ на шапку. Сколько верстъ пролетѣла муха?

Рѣшеніе.

Очень часто при рѣшеніи этой задачи пускаются въ разныя «тонкія» и сложныя выкладки и соображенія, не давъ себѣ труда уяснить, что муха, не останавливаясь, летала ровно 3 часа, а слѣдовательно пролетѣла 300 верстъ.

Задача 27-я.

Портной.

Портной имѣетъ кусокъ сукна въ 16 аршинъ, отъ котораго онъ отрѣзаетъ ежедневно по 2 аршина. По истеченіи сколькихъ дней онъ отрѣжетъ послѣдній кусокъ?

Рѣшеніе.

Отвѣтъ таковъ: «По истеченіи 7 дней», а не восьми, какъ, можетъ быть, скажетъ иной.

Задача 28-я.

Гусеница.

Въ шесть часовъ утра въ воскресенье гусеница начала всползать на дерево. Въ теченіе дня, т. е. до 6 часовъ вечера, она всползала на высоту 5 аршинъ, а въ теченіе ночи спускалась на 2 аршина. Въ какой день и часъ она всползетъ на высоту 9 аршинъ?

Рѣшеніе.

Часто при рѣшеніи подобныхъ задачъ разсуждаютъ такъ: гусеница въ сутки, т. е. въ 24 часа, всползетъ на 5 аршинъ безъ 2. Значитъ, всего въ сутки она всползаетъ на 3 аршина. Слѣдовательно, высоты 9 аршинъ она достигнетъ по истеченіи трехъ сутокъ, т. е. она будетъ на этой высотѣ въ среду въ 6 часовъ утра.

Но такой отвѣтъ, очевидно, невѣренъ: въ концѣ вторыхъ сутокъ, т. е. во вторникъ въ 6 часовъ утра, гусеница будетъ на высотѣ 6 аршинъ; но въ этотъ же день, начиная съ шести часовъ утра, она до шести часовъ вечера можетъ всползти еще на 5 аршинъ. Слѣдовательно, на высотѣ 9-ти аршинъ, какъ легко разсчитать, она окажется во вторникъ въ 1 часъ 12 минутъ пополудни.

Задача 29-я.

Размѣнъ.

Какъ размѣнять одинъ 25-ти-рублевый кредитный билетъ на 10 кредитныхъ билетовъ?

Рѣшеніе.

Одинъ 10-ти-рублевый, одинъ 5-ти-рублевый, одинъ 3-хъ-рублевый и 7 рублевыхъ:

$$(10+5+3+1+1+1+1+1+1+1=25).$$

Читателю не трудно будетъ составить не одну задачу, подобную этой. Извѣстная (и не одна только практическая) польза ихъ неоспорима.

Задача 30-я.

Тоже иными знаками.

Написать 100 шестью одинаковыми цифрами.

Рѣшеніе.

$$99\frac{99}{99}.$$

Замѣчаніе.

Задача, очевидно, можетъ видоизмѣняться всячески, и желающій можетъ придумать не одну задачу, подобную этой.

Нижеслѣдующее даетъ еще образцы подобныхъ же задачъ.

Задача 31-я.

Написать число 9 посредствомъ десяти различныхъ цифръ (девяти значащихъ и одной незначащей).

Рѣшеніе.

Число девять можетъ быть представлено въ видѣ частнаго отъ дѣленія одного пятизначнаго числа на другое, при чемъ цифры обоихъ чиселъ будутъ различны. Дадимъ 6 такихъ рѣшеній:

$$\frac{97524}{10836},\ \frac{95823}{10647},\ \frac{95742}{10638},\ \frac{75249}{08361},\ \frac{58239}{06471},\ \frac{57429}{06381}.$$

Задача 32-я.

Изобразить число 100 посредствомъ девяти различныхъ значащихъ цифръ.

Рѣшеніе.

Задача имѣетъ много разныхъ рѣшеній. Дадимъ изъ нихъ такія:

$$91\frac{5742}{638},\ 91\frac{7524}{836},\ 91\frac{5823}{647},\ 94\frac{1578}{263},\ 96\frac{2148}{537},$$

$$96\frac{1428}{357},\ 96\frac{1752}{438}.$$

Вотъ еще рѣшенія, содержащія знакъ $+$:

$$100 = 97 + \frac{5+3}{8} + \frac{6}{4} + \frac{1}{2}$$

$$100 = 75 + 24 + \frac{9}{18} + \frac{3}{6}$$

$$\begin{array}{r} 95\frac{1}{2} \\ + \\ 4\frac{38}{76} \\ \hline 100 \end{array}$$

И т. д. Сюда же можно отнести и такое рѣшеніе данной задачи въ *цѣлыхъ числахъ*:

$$\begin{array}{r} 46 \\ +\ 37 \\ 15 \\ \hline 98 \\ +\ \ 2 \\ \hline 100 \end{array} \quad \text{или:} \quad \begin{array}{r} 56 \\ 8 \\ +\ \ 4 \\ 3 \\ \hline 71 \\ +\ 29 \\ \hline 100 \end{array}$$

Какъ видимъ, въ предпослѣднемъ рѣшеніи допущенъ нѣкорый «фокусъ». Сначала изъ 6-ти разныхъ цифръ составлено три числа, дающихъ въ суммѣ 98 — число, опять-таки составленное изъ двухъ новыхъ цифръ, и къ нему прибавляется число, изображенное недостающей цифрой 2. Въ суммѣ получается требуемое число 100. Подобно же составлено и послѣднее рѣшеніе.

Задача 33-я.

Замѣчетельное число.

Нѣкоторое число оканчивается на 2. Если же эту его послѣднюю цифру переставить на первое мѣсто, то число это удвоится. Найти это число.

Рѣшеніе.

Такъ какъ при перенесеніи цифры 2 на первое мѣсто число удваивается, то предпослѣдняя цифра его должна быть 4, предшествующая этой должна быть 8, предъ этой 6, предъ этой 3, затѣмъ 7, затѣмъ 4, затѣмъ 9 и т. д. Разсуждая подобнымъ образомъ, находимъ, что искомое число есть

105 263 157 894 736 842.

Замѣчаніе. Правильнѣе будетъ сказать, что искомое число состоитъ изъ ряда *«періодовъ»*, составленныхъ найденнымъ числомъ.

Дѣлежи при затруднительныхъ обстоятельствахъ.

Задача 34-я.

Дѣлежъ между тремя.

Три лица должны подѣлить между собой двадцать одинъ боченокъ, изъ которыхъ 7 боченковъ полныхъ вина, 7 полныхъ наполовину и 7 пустыхъ. Спрашивается, какъ они могутъ подѣлиться такъ, чтобы каждый имѣлъ одинаковое количество вина и одинаковое количество боченковъ, при чемъ переливать вино изъ боченка въ боченокъ нельзя.

Рѣшеніе.

Предполагается, конечно, что всѣ боченки—полные, полные наполовину и пустые—равны между собою. Ясно, что каждый долженъ получить по семи боченковъ. Подсчитаемъ теперь, сколько же вина должно прійтись на долю каждаго. Есть семь боченковъ полныхъ и семь пустыхъ. Если бы можно было отъ каждаго полнаго боченка отлить половину въ пустой, то получилось бы 14 наполовину полныхъ боченковъ; прибавляя къ нимъ еще 7 имѣющихся наполовину полныхъ, мы получили бы всѣхъ 21 полныхъ наполовину боченковъ. Значитъ, на долю каждаго должны прійтись по *семи* наполовину полныхъ боченковъ вина. Сообразивъ это, получаемъ, что, не переливая вина, можно подѣлить все поровну такъ:

	Полные боченки.	Полные наполовину боченки.	Пустые боченки.
Первое лицо	2	3	2
Второе »	2	3	2
Третье »	3	1	3

А вотъ и другое рѣшеніе:

Полные боченки.	Полные наполовину боченки.	Пустые боченки.
3	1	3
3	1	3
1	5	1

Задача 35-я.

Дѣлежъ между двумя.

Двое должны раздѣлить поровну восемь ведеръ вина, находящагося въ восьмиведерномъ же боченкѣ. Но у нихъ есть еще только два пустыхъ боченка, въ одинъ изъ которыхъ входитъ 5 ведеръ, а въ другой—3 ведра. Спрашивается, какъ они могутъ раздѣлить это вино, пользуясь только этими тремя боченками.

Рѣшеніе.

Задача эта, какъ и всѣ ей подобныя, имѣетъ 2 рѣшенія, и рѣшенія эти состоятъ, очевидно, въ томъ, что изъ полнаго восьмиведернаго боченка нужно отливать вино въ пустые боченки, изъ этихъ переливать опять и т. д.

Дадимъ эти рѣшенія въ видѣ 2-хъ таблицъ, которыя показываютъ, сколько въ каждомъ боченкѣ остается вина послѣ каждаго переливанія.

Рѣшеніе 1-е.

	Боченки		
	8-ведерн.	5-ведерн.	3-ведерн.
До переливанія —	8	0	0
Послѣ 1-го пер. —	3	5	0
» 2-го » —	3	2	3
» 3-го » —	6	2	0
» 4-го » —	6	0	2
» 5-го » —	1	5	2
» 6-го » —	1	4	3
» 7-го » —	4	4	0

Рѣшеніе 2-е.

	Боченки		
	8-ведерн.	5-ведерн.	3-ведерн.
До переливанія —	8	0	0
Послѣ 1-го пер. —	5	0	3
» 2-го » —	5	3	0
» 3-го » —	2	3	3
» 4-го » —	2	5	1
» 5-го » —	7	0	1
» 6-го » —	7	1	0
» 7-го » —	4	1	3
» 8-го » —	4	4	0

Вотъ еще подобныя же задачи:

Задача 36-я.

Полный боченокъ содержитъ 16 вед., а пустые — 11 и 6 вед.

1-е рѣшеніе.			2-е рѣшеніе.		
16-вед.	11-вед.	6-вед.	16-вед.	11-вед.	6-вед.
16	0	0	16	0	0
5	11	0	10	0	6
5	5	6	10	6	0
11	5	0	4	6	6
11	0	5	4	11	1
0	11	5	15	0	1

1-е рѣшеніе.

16-вед.	11-вед.	6 вед.
0	10	6
6	10	0
6	4	6
12	4	0
12	0	4
1	11	4
1	9	6
7	9	0
7	3	6
13	3	0
13	0	3
2	11	3
2	8	6
8	8	0

2-е рѣшеніе.

16-вед.	11-вед.	6-вед.
15	1	0
9	1	6
9	7	0
3	7	6
3	11	2
14	0	2
14	2	0
8	2	6
8	8	0

Задача 37-я.

Полный боченокъ заключаетъ 42 ведра, а пустые— по 27 и 12 вед.

1-е рѣшеніе.

42-вед.	27-вед.	12-вед.
42	0	0
15	27	0
15	15	12
27	15	0
27	3	12
39	3	0
39	0	3
12	27	3
12	18	12
24	18	0
24	6	12
36	6	0
36	0	6
9	27	6
9	21	12
21	21	0

2-е рѣшеніе.

42-вед.	27-вед.	12-вед.
42	0	0
30	0	12
30	12	0
18	12	12
18	24	0
6	24	12
6	27	9
33	0	9
33	9	0
21	9	12
21	21	0

Задача 38-я.

Мужикъ и чортъ.

Шелъ мужикъ и думалъ: «Эхъ-ма! жизнь моя горькая! Заѣла нужда совсѣмъ! Вотъ въ карманѣ только нѣсколько грошей мѣдныхъ болтается, да и тѣ сейчасъ нужно отдать. И какъ это у другихъ бываетъ, что на всякія свои деньги они еще деньги получаютъ? Глядишь: на рубль зашибаетъ онъ два, на два—четыре, на четыре—восемь, и все богатѣетъ да богатѣетъ... Вотъ ежели бы, къ примѣру, и мнѣ такъ! Изъ денегъ, что у меня въ карманѣ, сдѣлалось бы сейчасъ вдвое, а черезъ пять минутъ изъ этихъ еще вдвое, да еще черезъ пять минутъ опять вдвое, и такъ пошло бы и пошло... Скоро бы богатымъ сдѣлался... Такъ нѣтъ! Не видать мнѣ такого счастья! Никто не поможетъ. Эхъ! Право, хоть бы чортъ какой помочь захотѣлъ, такъ и то бы я не отказался»...

Только успѣлъ это подумать, какъ, глядь, а чортъ передъ нимъ и стоитъ.

— Что-жъ,—говоритъ,—если хочешь, я тебѣ помогу. И это совсѣмъ нетрудно. Вотъ видишь этотъ мостъ черезъ рѣчку?

— Вижу!—говоритъ мужикъ, а самъ заробѣлъ.

— Ну такъ стоитъ тебѣ перейти только черезъ мостъ,—и у тебя будетъ вдвое больше денегъ, чѣмъ есть. Перейдешь назадъ, опять станетъ вдвое больше, чѣмъ было. И каждый разъ, какъ ты будешь переходить мостъ, у тебя будетъ ровно вдвое больше денегъ, чѣмъ было до этого перехода.

— Ой-ли?—говоритъ мужикъ.

— Вѣрно слово!—увѣряетъ чортъ.—Только, чуръ, уговоръ! За то, что я тебѣ устраиваю такое счастье, ты каждый разъ, перейдя черезъ мостъ, отдавай мнѣ по 24 копѣйки за добрый совѣтъ. Иначе ничего не будетъ.

— Ну, что же, это не бѣда! говоритъ мужикъ.— Разъ деньги все будутъ удваиваться, такъ отчего же 24 копѣекъ тебѣ каждый разъ не дать? Ну-ка попробуемъ!

Перешелъ онъ черезъ мостъ одинъ разъ, сосчиталъ деньги... Что за диво? Дѣйствительно, стало вдвое больше. Бросилъ онъ 24 копѣйки чорту и перешелъ черезъ мостъ второй разъ. Опять денегъ стало вдвое больше, чѣмъ передъ этимъ. Отсчиталъ онъ 24 копѣйки, отдалъ чорту и перешелъ черезъ мостъ третій разъ. Денегъ стало снова вдвое больше. Но только и оказалось ихъ ровнехонько 24 коп., которыя по уговору... онъ долженъ былъ отдать чорту. Отдалъ онъ ихъ, и остался безъ копѣйки.

Ударилъ мужикъ о полы и началъ судьбу свою клясть. А чортъ захохоталъ и съ глазъ сгинулъ.

Сколько же, значитъ, у мужика сначала денегъ въ карманѣ было?

Рѣшеніе.

Задача разрѣшается очень легко, если только рѣшеніе ея начать съ конца, принявъ во вниманіе, что послѣ третьяго перехода у крестьянина оказалось ровно 24 копѣйки, которыя онъ долженъ былъ отдать.

Въ самомъ дѣлѣ, если послѣ послѣдняго перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., то, значитъ, передъ этимъ переходомъ у него было 12 коп. Но эти 12 коп. получились послѣ того, какъ онъ отдалъ 24 коп.; значитъ, всего денегъ у него было 36 коп. Слѣдовательно, второй переходъ онъ началъ съ 18-ю коп., а эти 18 коп. получились у него послѣ того, какъ онъ въ первый разъ перешелъ мостъ и отдалъ 24 коп. Значитъ, всего послѣ перваго перехода у него было денегъ 18 да 24 коп., т. е. 42 копѣйки. Отсюда ясно, что передъ тѣмъ, какъ первый разъ вступить на мостъ, крестьянинъ имѣлъ въ карманѣ 21 копѣйку собственныхъ денегъ.

Прогадалъ крестьянинъ! Видно, что на чужой совѣтъ всегда надо еще свой умъ имѣть.

Задача 39-я.

Крестьяне и картофель.

Шли три крестьянина и зашли на постоялый дворъ отдохнуть да пообѣдать. Заказали хозяйкѣ сварить картофель, а сами заснули. Хозяйка сварила картофель, но не стала будить постояльцевъ, а поставила миску съ ѣдою на столъ и ушла. Проснулся одинъ крестьянинъ, увидѣлъ картофель и, чтобы не будить товарищей, сосчиталъ картофель, съѣлъ свою долю и снова заснулъ. Вскорѣ проснулся другой; ему невдомекъ было, что одинъ изъ товарищей уже съѣлъ свою долю; поэтому онъ сосчиталъ весь оставшійся картофель, съѣлъ третью часть и опять заснулъ. Послѣ него проснулся третій; полагая, что онъ проснулся первый, онъ сосчиталъ оставшійся въ чашкѣ картофель и съѣлъ третью часть. Тутъ проснулись его товарищи и увидѣли, что въ чашкѣ осталось 8 картофелинъ. Тогда только объяснилось дѣло. Разочтите: сколько картофелинъ подала на столъ хозяйка, сколько съѣлъ уже и сколько имѣетъ право еще съѣсть каждый, чтобы всѣмъ досталось поровну?

Рѣшеніе.

Третій крестьянинъ оставилъ для товарищей 8 картофелинъ, т. е. каждому по 4 штуки. Значитъ, и самъ онъ съѣлъ 4 картофелины. Послѣ этого легко сообразить, что 2-й крестьянинъ оставилъ своимъ товарищамъ 12 картофелинъ,—по 6-ти на брата,—значитъ и самъ съѣлъ 6 штукъ. Отсюда слѣдуетъ, что первый крестьянинъ оставилъ товарищамъ 18 картофелинъ,— по 9 штукъ на каждаго, значитъ и самъ съѣлъ 9 штукъ.

Итакъ, хозяйка подала на столъ 27 картофелинъ, и на долю каждаго, поэтому, приходилось по 9 картофелинъ. Но 1-й крестьянинъ всю свою долю съѣлъ. Слѣдовательно, изъ 8-ми оставшихся картофелинъ приходится на долю второго 3, а на долю третьяго 5 штукъ.

Задача 40-я.

Три игрока.

Три игрока условились сыграть три партіи такъ, чтобы проигравшій партію давалъ каждому изъ остальныхъ двухъ игроковъ по столько денегъ, сколько у каждаго изъ выигравшихъ имѣется. Сыграли три партіи, при чемъ оказалось, что проигрывали всѣ поочередно, и послѣ этого у каждаго стало по 24 рубля. По скольку рублей было у каждаго передъ началомъ игры?

Рѣшеніе.

Третій игрокъ проигралъ третью партію и удвоилъ количество денегъ каждаго изъ остальныхъ двухъ, послѣ чего у всѣхъ стало по 24 рубля. Слѣдовательно, послѣ второй игры, проигранной вторымъ игрокомъ, они имѣли: первый 12 руб., второй 12 руб., третій 48 рублей. Но передъ этимъ первый игрокъ и третій удвоили свои деньги, такъ какъ проигралъ второй. Значитъ, раньше первый имѣлъ 6 р., а третій 24 р.; второй же игрокъ имъ отдалъ изъ своихъ денегъ 30 руб. Итакъ, послѣ первой игры они имѣли: первый 6 руб., второй 42 руб., третій 24 руб. Но передъ этимъ проигралъ первый, а второй и третій игроки, значитъ, имѣли только по половинѣ вышеуказанныхъ суммъ. Слѣдовательно, первый, проигравъ, отдалъ имъ изъ бывшихъ у него денегъ 33 р. Итакъ, предъ началомъ игры игроки имѣли: первый 39 рублей, второй 21 рубль, третій 12 рублей.

Задача 41-я.

Два пастуха.

Сошлись два пастуха, Иванъ и Петръ. Иванъ и говоритъ Петру: «Отдай-ка ты мнѣ одну овцу, тогда у меня будетъ овецъ ровно вдвое больше, чѣмъ у тебя!» А Петръ ему отвѣчаетъ: «Нѣтъ! лучше ты мнѣ отдай одну овцу,—тогда у насъ будетъ овецъ поровну!»

Сколько же было у каждаго овецъ?

Задача старинная и многимъ извѣстная. Многіе знаютъ даже и отвѣтъ на эту задачу. Но какъ добраться до этого отвѣта, какъ понятно для всякаго рѣшить ее, знаютъ, надо полагать, немногіе. Попробуемъ добраться до этого рѣшенія

Рѣшеніе.

Ясно, что овецъ больше у перваго пастуха, у Ивана. Но на сколько у него больше, чѣмъ у Петра? Уяснимъ это.

Если Иванъ отдастъ одну овцу не Петру, а кому-либо другому, то станетъ ли у обоихъ пастуховъ овецъ поровну? Нѣтъ, потому что поровну у нихъ было бы только въ томъ случаѣ, если бы эту овцу получилъ Петръ. Значитъ, если Иванъ отдастъ одну овцу не Петру, а третьему лицу, то у него все-таки будетъ больше овецъ, чѣмъ у Петра, но на сколько больше? Ясно, что на одну овцу, потому что, если прибавить теперь къ стаду Петра одну овцу, то у обоихъ станетъ поровну. Отсюда слѣдуетъ, что пока Иванъ не отдастъ никому ни одной своей овцы, то у него въ стадѣ на **двѣ** овцы больше, чѣмъ у Петра.

Теперь примемся за второго пастуха, за Петра. У него, какъ мы нашли, на двѣ овцы меньше, чѣмъ у Ивана. Значитъ, если Петръ отдастъ, скажемъ, одну свою овцу не Ивану, а кому-либо иному, то тогда у Ивана будетъ на три овцы больше. чѣмъ у Петра. Но пусть эту овцу получитъ именно Иванъ, а не третье лицо. Ясно, что тогда у него будетъ на четыре овцы больше, чѣмъ осталось у Петра.

Но задача говоритъ, что у Ивана въ этомъ случаѣ будетъ ровно *вдвое* больше овецъ, чѣмъ у Петра. Стало быть, *четыре* и есть именно то число овецъ, которое останется у Петра, если онъ отдастъ одну овцу Ивану, у котораго получится *восемь* овецъ: А до предполагаемой отдачи, значитъ, у Ивана было 7, а у Петра 5 овецъ.

Длинный рядъ разсужденій нужно употребить иногда для рѣшенія съ виду простой задачи.

Задача 42-я.

Недоумѣнія торговокъ.

Двѣ торговки сидѣли на базарѣ и продавали яблоки. Одна продавала за одну копѣйку два яблока, а другая за 2 копѣйки 3 яблока.

У каждой въ корзинѣ было по 30 яблокъ, такъ что первая разсчитывала выручить за свои яблоки 15 копѣекъ, а вторая 20 коп. Обѣ вмѣстѣ, значитъ, онѣ должны были выручить 35 копѣекъ. Смекнувъ это, торговки, чтобы не ссориться да не перебивать другъ у друга покупателей, рѣшили сложить свои яблоки вмѣстѣ и продавать ихъ сообща, при чемъ онѣ разсуждали такъ: «Если я продаю пару яблокъ за копѣйку, а ты—три яблока за двѣ копѣйки, то, чтобы выручить свои деньги, надо намъ, значитъ, продавать *пять* яблокъ за *три* копѣйки!»

Сказано, сдѣлано. Сложили торговки свои яблоки вмѣстѣ (получилось всего 60 яблокъ) и начали продавать по 3 копѣйки 5 яблокъ.

Распродали и удивились: оказалось, что за свои яблоки онѣ выручили 36 копѣекъ, т. е. на копѣйку больше, чѣмъ думали выручить! Торговки задумались: откуда взялась «*лишняя*» копѣйка, и кому изъ нихъ слѣдуетъ ее получить? Да и какъ, вообще, имъ подѣлить теперь всѣ вырученныя деньги?

И въ самомъ дѣлѣ, какъ это вышло?

Пока эти двѣ торговки разбирались въ своей неожиданной прибыли, двѣ другія, прослышавъ объ этомъ, тоже рѣшили заработать лишнюю копѣйку.

У каждой изъ нихъ было тоже по 30 яблокъ, но продавали онѣ такъ: первая давала за одну копѣйку пару яблокъ, а вторая за копѣйку же давала 3 яблока. Первая послѣ продажи должна была, значитъ, выручить 15 копѣекъ, а вторая — 10 копѣекъ; обѣ же вмѣстѣ выручали, слѣдовательно, 25 копѣекъ. Онѣ и порѣшили продать свои яблоки сообща, разсуждая совсѣмъ такъ, какъ и тѣ двѣ первыя торговки: если, молъ, я продаю за одну копѣйку пару яблокъ, а ты за копѣйку продаешь три яблока, то, значитъ, чтобы выручить свои деньги, намъ нужно каждыя пять яблокъ продавать за 2 копѣйки.

Сложили онѣ яблоки вмѣстѣ, распродали ихъ по 2 копѣйки за каждыя пять штукъ, и вдругъ... оказалось, что онѣ выручили всего 24 копѣйки, значитъ, недовыручили цѣлую копѣйку.

Задумались и эти торговки: какъ же это могло случиться? и кому изъ нихъ придется этой копѣйкой поплатиться?

Рѣшеніе.

Недоумѣнія торговокъ разрѣшаются очень быстро, если сообразимъ, что, сложивъ свои яблоки вмѣстѣ и начавъ ихъ продавать сообща, онѣ, сами того не замѣчая, продавали ихъ уже по другой цѣнѣ, чѣмъ раньше.

Возьмемъ, для примѣра, двухъ послѣднихъ торговокъ и разсмотримъ, что онѣ, въ сущности, сдѣлали.

Пока первая и вторая думали продавать свои яблоки отдѣльно, то цѣна одного яблока у первой была полкопѣйки, а у второй треть копѣйки. Когда же онѣ сложились и начали продавать каждыя пять яблокъ по 2 копѣйки, то цѣна каждаго яблока стала уже $\frac{2}{5}$ копѣйки.

Значитъ, первая торговка всѣ свои яблоки продала не по полкопѣйкѣ штуку, а по $^2/_5$ копѣйкѣ и на каждомъ яблокѣ теряла, значитъ, по $\frac{1}{10}$ копѣйки $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{5-5}{10}=\frac{1}{10}\right)$, а на всѣхъ тридцати яблокахъ она потеряла 3 коп.

Вторая же торговка, наоборотъ, вошедши въ компанію, выигрывала на каждомъ яблокѣ по $\frac{1}{16}$ копѣйки $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}\right)$, а на всѣхъ 30 яблокахъ выиграла, значитъ, 2 коп.

Первая потеряла 3 коп., а вторая выиграла только 2 коп. Въ общемъ, все-таки, копѣйка потеряна.

Путемъ подобныхъ же разсужденій легко узнать, почему у первыхъ двухъ торговокъ оказалась «лишняя копѣйка».

А какъ теперь онѣ должны подѣлить вырученныя деньги, разсудите-ка сами на основаніи предыдущихъ задачъ, гдѣ говорилось о правильныхъ дѣлежахъ денегъ.

Задача 43-я.

Какъ гусь съ аистомъ задачу рѣшали.

Летѣла стая гусей, а навстрѣчу имъ летитъ одинъ гусь и говоритъ: «Здравствуйте, сто гусей!» А передній старый гусь ему и отвѣчаетъ: «Нѣтъ, насъ не сто гусей! Вотъ еслибъ насъ было еще столько, да еще полстолько, да еще четверть столько, да ты, гусь,— то было бы сто гусей, а теперь... Вотъ и разсчитай-ка, сколько насъ?

Рѣшеніе.

Полетѣлъ одинокій гусь дальше и задумался. Въ самомъ дѣлѣ, сколько же товарищей-гусей онъ встрѣтилъ? Думалъ онъ, думалъ и съ какой стороны ни принимался,— никакъ не могъ этой задачи рѣшить. Вотъ увидѣлъ гусь на берегу пруда аиста,— ходитъ длинноногій и лягушекъ ищетъ. Аистъ птица важная и пользуется среди другихъ птицъ славой математика: по цѣлымъ часамъ иногда неподвижно на одной ногѣ стоитъ и все думаетъ, видно,— задачи рѣшаетъ. Обрадовался гусь, слетѣлъ въ прудъ, подплылъ къ аисту и разсказалъ ему, какъ онъ стадо товарищей встрѣтилъ и какую ему гусь-поводырь загадку задалъ, а онъ никакъ этой загадки рѣшить не можетъ.

— Гм!.. откашлялся аистъ.—Попробуемъ рѣшить. Только будь внимателенъ и старайся понять! Слышишь?

— Слушаю и постараюсь!—отвѣтилъ гусь.

— Ну вотъ. Какъ тебѣ сказали? Если бы къ встрѣчнымъ гусямъ прибавить еще столько, да еще полстолько, да четверть столько, да тебя, гуся, то было бы сто? Такъ?

— Такъ!—отвѣтилъ гусь.

— Теперь смотри,—сказалъ аистъ.—Вотъ что я тебѣ начерчу здѣсь на прибрежномъ пескѣ.

Аистъ согнулъ шею и клювомъ провелъ черту, рядомъ такую же черту, потомъ половину такой же черты, затѣмъ четверть черты да еще маленькую черточку, почти точку.

Получилось слѣдующее:

Гусь подплылъ къ самому берегу, вышелъ, переваливаясь, на песокъ, смотрѣлъ, но ничего не понималъ.

— Понимаешь?—спросилъ аистъ.

— Нѣтъ еще!—отвѣтилъ уныло гусь.

— Эхъ, ты! Ну, вотъ смотри: какъ тебѣ сказали,—стадо да еще стадо, да половина стада, да четверть стада, да ты, гусь,—такъ я и нарисовалъ: черту да еще черту, да полъ-черты, да четверть этой черты, да еще маленькую черточку, т. е. тебя. Понялъ?

— Понялъ!—весело проговорилъ гусь.

— Если къ встрѣченному тобой стаду прибавить еще стадо, да полстада, да четверть стада, да тебя, гуся, то сколько получалось?

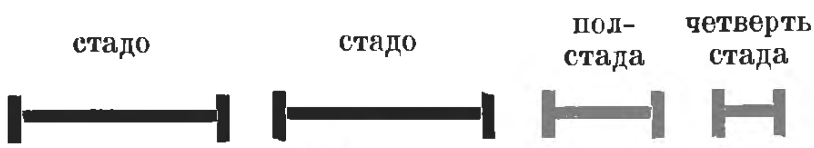
— Сто гусей!

— А безъ тебя сколько, значитъ, будетъ.

— Девяносто девять.

— Хорошо! Откинемъ на нашемъ чертежѣ черточку, изображающую тебя, гуся, и обозначимъ, что остается 99 гусей.

Аистъ заклевалъ носомъ и изобразилъ на пескѣ:



99 гусей.

— Теперь смекни-ка,—продолжалъ аистъ,—четверть стада, да полъ-стада, сколько это будетъ четвертей?

Гусь задумался, посмотрѣлъ на линіи на пескѣ и сказалъ:

— Линія, изображающая полъ-стада, вдвое больше, чѣмъ линія четверти стада, т. е. въ половинѣ заключается двѣ четверти. Значитъ, половина да четверть стада это все равно, что три четверти стада.

— Молодецъ!—похвалилъ гуся аистъ.—Ну, а въ *цѣломъ* стадѣ сколько четвертей?

— Конечно, четыре!—отвѣтилъ гусь.

— Такъ! Но мы имѣемъ здѣсь стадо да еще стадо, да полъ-стада да четверть стада, и это составитъ 99 гусей. Значитъ, если перевести все на четверти, то сколько всего четвертей будетъ?

Гусь подумалъ и отвѣтилъ.

— Стадо — это все равно, что 4 четверти стада, да еще стадо:—еще 4 четверти стада, всего 8 четвертей; да въ половинѣ стада 2 четверти: всего 10 четвертей; да еще четверть стада: всего 11 четвертей стада, и это составитъ 99 гусей.

— Такъ! сказалъ аистъ. — Теперь скажи, что же ты, въ концѣ концовъ, получилъ?

— Я получилъ,—отвѣтилъ гусь, что въ одиннадцати четвертяхъ встрѣченнаго мной стада заключается 99 гусей.

— А, значитъ, въ одной четверти стада сколько гусей?

Гусь подѣлилъ 99 на 11 и отвѣтилъ:

— Въ четверти стада—9 гусей.

— Ну, а въ цѣломъ стадѣ сколько?

— Въ цѣломъ заключается четыре четверти... Я встрѣтилъ **36 гусей!**—радостно воскликнулъ гусь.

— Вотъ то-то и оно! — важно промолвилъ аистъ. — Самъ, небось, не могъ дойти!.. Эхъ, ты... гусь!..

Задача 44-я.

Сколько было?

Бѣдная женщина несла для продажи корзину яицъ. Встрѣтившійся прохожій по неосторожности такъ толкнулъ ее, что корзина упала на землю, и всѣ яйца разбились. Прохожій захотѣлъ уплатить женщинѣ стоимость разбитыхъ яицъ и спросилъ, сколько ихъ всего было. «Я не помню этого,—сказала женщина,—знаю только хорошо, что когда я перекладывала яйца по 2, то оставалось одно яйцо. Точно также всегда оставалось по одному яйцу, когда я перекладывала ихъ по 3, по 4, по 5 и по 6. Когда же я перекладывала ихъ по 7, то не оставалось ни одного яйца». Спрашивается, сколько было яицъ?

Рѣшеніе.

Задача, очевидно, сводится къ нахожденію такого числа, которое дѣлится нацѣло (т. е. **безъ остатка**) на 7, а при дѣленіи на 2, 3, 4, 5 и 6 даетъ въ остаткѣ 1.

Наименьшее число, которое дѣлится безъ остатка на числа 2, 3, 4, 5 и 6 (**наименьшее кратное** этихъ чиселъ) есть 60, Нужно, значитъ, найти такое число, которое дѣлилось бы на 7 нацѣло и было бы вмѣстѣ съ тѣмъ на одну единицу больше числа, дѣлящагося на 60. Такое число тотчасъ можно найти путемъ послѣдовательныхъ попытокъ: 60, дѣленное на 7, даетъ въ остаткѣ 4, слѣдовательно 2×60 даетъ въ остаткѣ единицу ($2 \times 4 = 8$; $8 - 7 = 1$). Значитъ

$$2 \times 60 = \text{числу кратному } 7 + 1;$$

откуда слѣдуетъ, что

$$(7 \times 60 - 2 \times 60) + 1 = \text{числу кратному } 7;$$

$$\text{т. е. } 5 \times 60 + 1 = \text{числу кратному } 7.$$

$$5 \times 60 + 1 = 301.$$

Итакъ, наименьшее число, рѣшающее задачу, есть 301.

Т. е. наименьшее число **яицъ**, которое могло быть въ **корзинѣ у женщины,** есть 301.

Задача 45-я.

Найти число, которое, будучи раздѣлено на 2, даетъ въ остаткѣ 1, при дѣленіи на 3 даетъ въ остаткѣ 2, при дѣленіи на 4 даетъ въ остаткѣ 3, при дѣленій на 5 даетъ въ остаткѣ 4, при дѣленіи на 7 даетъ въ остаткѣ 5, но на 7 это число дѣлится нацѣло.

Рѣшеніе.

Рѣшеніе тотчасъ сводится къ прудыдущему, если сообразить, что число кратное 6 да еще 5 есть въ то же время число кратное 6 безъ единицы, число кратное 5 да еще 4 есть въ то же время число кратное 5 безъ единицы и т. д. Итакъ, нужно для даннаго случая, чтобы удовлетворялось равенство:

Число кратное 7 = числу кратному 60 безъ 1;

или: число кратное 60 = числу кратному 7 + 1.

Число 120 есть наименьшее, рѣшающее задачу.

Задача рѣшается подобнымъ же путемъ и въ томъ случаѣ, когда разница между каждымъ дѣлителемъ и соотвѣтствующимъ остаткомъ есть число отличное отъ единицы.

Задача 46-я.

Часы заведены вѣрно!

У меня нѣтъ карманныхъ часовъ, а только стѣнные, которые остановились. Я отправляюсь къ своему знакомому, у котораго часы идутъ вѣрно, просиживаю у него нѣкоторое время и, возвратившись домой, ставлю свои часы вѣрно. Какимъ образомъ я могъ это сдѣлать, если предварительно мнѣ не было извѣстно, сколько времени занимаетъ дорога отъ меня до моего знакомаго?

Рѣшеніе.

Вопросъ, очевидно, сводится къ тому, чтобы знать точное время по возвращеніи домой. Для этой цѣли я завожу свои часы и передъ уходомъ замѣчаю ихъ показаніе, которое, положимъ, равно a. Приходя къ знакомому, немедленно справляюсь у него о времени, и пусть его часы показываютъ b. Передъ уходомъ отъ знакомаго опять замѣчаю время по его часамъ, которые на этотъ разъ показываютъ c. Придя домой, я немедленно замѣчаю, что мои часы показываютъ d. По этимъ даннымъ легко опредѣлить искомое показаніе часовъ. Разность $d-a$ покажетъ время моего отсутствія изъ дому. Разность $c-b$ есть время, проведенное мною у знакомаго. Разность $(d-a)-(c-b)$, полученная отъ вычитанія второго времени изъ перваго, дастъ время, проведенное мною въ дорогѣ. Половина этого времени $\frac{b+d-a-c}{2}$ употреблено мною на обратную дорогу. Прибавивъ эту половину къ c, получимъ $\frac{b+c+d-a}{2}$; это и будетъ точное показаніе часовъ при моемъ возвращеніи домой.

Задача 47-я.

Возстановленіе записи.

При провѣркѣ памятной книжки умершаго фабриканта найдена была слѣдующая запись: «За продажу... кусковъ сукна, по 49 руб. 36 коп. каждый кусокъ, получено ...7 р. 28 коп.». Эта запись оказалась залитою въ нѣкоторыхъ мѣстахъ чернилами такъ, что нельзя было разобрать ни числа проданныхъ кусковъ, ни первыхъ трехъ цифръ полученной суммы. Спрашивается, можно ли по сохранившимся даннымъ узнать число проданныхъ кусковъ и всю вырученную сумму?

Рѣшеніе.

Задачу можно рѣшить двумя пріемами.

1) По условію, вся вырученная сумма, очевидно, не превышаетъ 10 000 руб. Значитъ, число проданныхъ кусковъ не болѣе 203.

Послѣдняя цифра неизвѣстнаго числа кусковъ должна быть такова, чтобы она, будучи умножена на 6, давала произведеніе, оканчивающееся на 3; такая цифра можетъ быть 3 или 8.

Положимъ, что послѣдняя цифра неизвѣстнаго числа кусковъ равна 3. Стоимость трехъ кусковъ равна 14 808 коп. Вычитая это число изъ вырученной суммы, мы должны получить число, оканчивающееся на 920.

Предполагая, что послѣдняя цифра равна 3, вторая отъ конца цифра можетъ быть или 2 или 7, такъ какъ только эти цифры, будучи умножены на 6, даютъ произведенія, оканчивающіяся на 2.

Положимъ, что неизвѣстное число оканчивается на 23. Вычитая стоимость 23 кусковъ изъ всей вырученной суммы, получимъ число, оканчивающееся на 200. Третья цифра можетъ быть или 2 или 7; но такъ какъ неизвѣстное число не превосходитъ 203, то наше предположеніе невозможно.

Если бы мы предположили, что неизвѣстное число оканчивается на 73, то третья цифра была бы равна 4 или 9; такое предположеніе опять невозможно.

Итакъ, посѣдняя цифра не можетъ быть 3; остается предположить, что она равна 8. Разсужденія, подобныя предыдущимъ, покажутъ намъ, что вторая цифра можетъ быть или 4, или 9; изъ этихъ двухъ предположеній возможно только второе.

Задача имѣетъ одно рѣшеніе: число проданныхъ кусковъ равно 98, вся вырученная сумма равна **4 837 р. 28 коп.**

2) Задачу можно также рѣшить *алгебраически*, что и предоставляемъ сдѣлать болѣе подготовленному читателю.

Задача 48-я.

За грибами.

Дѣдушка пошелъ съ 4-мя своими внучатами въ лѣсъ за грибами. Въ лѣсу разошлись въ разныя стороны и стали искать грибы. Черезъ полчаса дѣдушка сѣлъ подъ дерево отдохнуть и пересчиталъ свои грибы: ихъ оказалось 45 штукъ. Тутъ прибѣжали къ нему внучата, — всѣ съ пустыми руками: ни одинъ ничего не нашелъ.

— Дѣдушка!—проситъ одинъ внукъ:—дай мнѣ своихъ грибовъ, чтобы кузовокъ не былъ пустой. Авось съ твоей легкой руки много грибовъ наберу.

— И мнѣ, дѣдушка!

— И мнѣ дай!

Дѣдъ далъ каждому и роздалъ такимъ образомъ дѣтямъ всѣ свои грибы. Всѣ снова разбрелись въ разныя стороны, и случилось слѣдующее. Одинъ мальчикъ нашелъ еще 2 гриба, другой 2 потерялъ, третій нашелъ еще столько, сколько получилъ отъ дѣда, а четвертый потерялъ половину полученныхъ отъ дѣда. Когда дѣти пришли домой и подсчитали свои грибы, то оказалось у всѣхъ поровну.

Сколько каждый получилъ отъ дѣдушки грибовъ и сколько было у каждаго, когда они пришли домой?

Рѣшеніе.

Не трудно видѣть, что третьему внуку дѣдъ далъ грибовъ меньше всего, потому что третій внукъ долженъ былъ набрать еще столько же грибовъ, чтобы сравняться съ братьями. Для простоты скажемъ, что третьему внуку дѣдъ далъ грибовъ одну горсть.

Сколько же онъ далъ такихъ же горстей четвертому?

Третій внукъ принесъ домой 2 горсти, потому что самъ еще нашелъ столько же грибовъ, сколько далъ ему дѣдъ. Четвертый внукъ принесъ домой ровно столько же грибовъ, сколько и третій: значитъ, тоже 2 горсти; но онъ половину своихъ грибовъ растерялъ по дорогѣ: стало быть, дѣдъ далъ ему 4 горсти.

Первый внукъ принесъ домой 2 горсти; но изъ нихъ 2 гриба онъ самъ нашелъ; значитъ, ему дѣдъ далъ 2 горсти безъ 2-хъ грибовъ. Второй внукъ принесъ домой 2 горсти, да по дорогѣ онъ потерялъ 2 гриба; стало быть дѣдъ, далъ ему 2 горсти, да еще два гриба.

Итакъ, дѣдъ роздалъ внукамъ 1 горсть, да 4 горсти, да 2 горсти безъ 2-хъ грибовъ, да 2 горсти съ 2-мя грибами, и того 9 полныхъ горстей (въ 2-хъ горстяхъ не хватало 2-хъ грибовъ, зато въ 2-хъ другихъ горстяхъ были лишніе 2 гриба). Въ 9 равныхъ горстяхъ было 45 грибовъ; значитъ въ каждой горсти $45 : 9 = 5$ грибовъ.

Третьему внуку дѣдъ далъ 1 горсть, т.-е. 5 грибовъ; четвертому 4 горсти, т.-е. $5 \times 4 = 20$ грибовъ; первому 2 горсти безъ 2-хъ грибовъ, т.-е. $(5 \times 2) - 2 = 8$ грибовъ; второму 2 горсти съ 2-мя грибами, т.-е. $(5 \times 2) + 2 = 12$ грибовъ.

Задача 49-я.

Находка.

Четверо крестьянъ: Сидоръ, Карпъ, Пахомъ и Фока, возвращались изъ города и говорили, что ничего не заработали.

— Эхъ! — сказалъ Сидоръ, — если бы мнѣ найти кошель съ деньгами, я бы взялъ себѣ только третью часть, а остальныя съ кошелемъ даже отдалъ бы вамъ.

— А я, — молвилъ Карпъ, — подѣлилъ бы между всѣми нами поровну.

— Я доволенъ былъ бы пятой всего частью, — отозвался Пахомъ.

— Съ меня же довольно бы и шестой части, — сказалъ Фока. — Да что толковать... Статочное ли дѣло,—деньги на дорогѣ найти! Кто это ихъ для насъ броситъ?...

Вдругъ и на самомъ дѣлѣ видятъ на дорогѣ кошелекъ. Подняли его и порѣшили подѣлить деньги такъ, какъ каждый только что говорилъ: т. е. Сидоръ получитъ треть, Карпъ — четверть, Пахомъ — пятую, а Фока — шестую часть найденныхъ денегъ.

Открыли кошелекъ и нашли въ немъ 8 кредитныхъ билетовъ: одинъ въ 3 руб., а остальные рублевые, пятирублевые и десятирублевые. Но ни одинъ крестьянинъ не могъ взять своей части безъ размѣна. Поэтому рѣшили ждать, не размѣняетъ ли кто изъ проѣзжихъ. Скачетъ верховой; крестьяне останавливаютъ его:

— Такъ и такъ,—разсказываютъ они:—нашли кошелекъ съ деньгами; деньги хотимъ раздѣлить такъ-то. Будь такой добрый, размѣняй намъ рубль!

— Рубля я вамъ не размѣняю, а давайте мнѣ кошелекъ съ деньгами: я положу туда свою рублевку и изъ всѣхъ денегъ выдамъ каждому его долю, а кошелекъ мнѣ.

Крестьяне съ радостью согласились. Верховой сложилъ всѣ деньги вмѣстѣ, выдалъ первому $^1/_3$, второму $^1/_4$, третьему $^1/_5$, четвертому $^1/_6$ всѣхъ денегъ, а кошелекъ спряталъ къ себѣ за пазуху.

— Ну, спасибо вамъ, братцы, большое: и вамъ хорошо и мнѣ хорошо!—и ускакалъ.

Задумались мужики:

— За что же онъ насъ поблагодарилъ?

— Ребята, сколько у насъ всего бумажекъ?- спросилъ Карпъ.

Сосчитали,—оказалось 8.

— А гдѣ же трехрублевка? У кого она?

— Ни у кого нѣтъ!

— Какъ же такъ, ребята? верховой-то, значитъ, надулъ насъ? Давай считать, на сколько онъ обидѣлъ каждаго...

Прикинули въ умѣ.

— Нѣтъ, братцы, я получилъ больше, чѣмъ мнѣ слѣдовало!—сказалъ Сидоръ.

— И я получилъ на четвертакъ больше,—сказалъ Карпъ.

— Какъ же такъ? всѣмъ далъ больше, чѣмъ нужно, а трехрублевку увезъ! Должно быть, это лѣшій! ишь ты, какъ ловко насъ обошелъ!—рѣшили крестьяне.

Сколько денегъ нашли крестьяне? Обманулъ ли ихъ верховой? Какія бумажки далъ онъ каждому?

Рѣшеніе.

Крестьяне не умѣли правильно сложить дробей. Въ самомъ дѣлѣ, сложите всѣ части, на которыя крестьяне хотѣли подѣлить находку: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}$. Значитъ, они всѣ вмѣстѣ хотѣли получить меньше, чѣмъ нашли (нашли они $\frac{60}{60}$). Найденныя деньги вмѣстѣ съ деньгами верхового были раздѣлены на 60 частей; изъ нихъ $\frac{57}{60}$ отданы крестьянамъ, а $\frac{3}{60}$ или $\frac{1}{20}$, остались у верхового. Но мы знаемъ, что у верхового осталось 3 рубля. Значитъ $\frac{1}{20}$ всѣхъ денегъ составляетъ 3 рубля; слѣдовательно, всѣхъ денегъ было $3 \times 20 = 60$ руб. Карпъ получилъ изъ этихъ денегъ $^1/_4$ часть, т.-е. 15 руб.; но, если бы верховой не приложилъ своихъ денегъ, Карпъ долженъ былъ бы получить на четвертакъ меньше, т.-е. 15 р. — 25 к. = 14 р. 75 к.: такова $^1/_4$ часть найденныхъ денегъ. Отсюда заключаемъ, что найдено было 14 р. 75 к. $\times$ 4 = 59 р. Съ деньгами верхового стало 60 р.: значитъ верховой приложилъ 1 рубль. Приложилъ онъ рубль, а увезъ 3 рубля: 2 рубля выгадалъ себѣ за умный дѣлежъ.

Какія же кредитки были найдены въ кошелькѣ?

Пять бумажекъ по 10 р., одна въ 5, одна въ 3 и одна въ 1 рубль. Сидору верховой далъ 20 рублей: 2 десятирублевки; Карпу—15 р., десятирублевку и пятирублевку; Пахому—12 руб. десятирублевку и двѣ рублевки (одну — найденную, другую — свою); Фокѣ—послѣднюю десятирублевку, а трехрублевку взялъ себѣ.

Переправы.

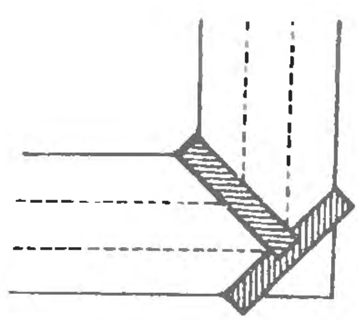
Задача 50-я.

Черезъ ровъ.

Четыреугольное поле окружено рвомъ, ширина котораго всюду одинакова. Даны двѣ доски, длина которыхъ равна точно ширинѣ рва, и требуется съ помощью этихъ досокъ устроить переходъ черезъ ровъ.

Рѣшеніе.

Стоитъ взглянуть на прилагаемый здѣсь рисунокъ (фиг. 17), чтобы понять, какъ рѣшается задача.



Фиг. 17.

Что касается математическаго доказательства возможности подобной переправы, то оно слѣдуетъ изъ неравенства

$$2\sqrt{2} < 3,$$

и дѣлается очевиднымъ, если принять ширину рва равной *тремъ* какимъ-либо единицамъ.

Задача 51-я.

Отрядъ солдатъ.

Отрядъ солдатъ подходитъ къ рѣкѣ, черезъ которую необходимо переправиться. Но мостъ сломанъ, а рѣка глубока. Какъ быть? Вдругъ капитанъ замѣчаетъ у берега двухъ мальчиковъ, которые забавляются въ лодкѣ. Но эта послѣдняя такъ мала, что на ней можетъ переправиться только одинъ солдатъ, или только двое мальчиковъ,—не больше! Однако всѣ солдаты переправились черезъ рѣку именно на этой лодкѣ. Какъ это было сдѣлано?

Рѣшеніе.

Дѣти переѣхали рѣку. Одинъ изъ мальчиковъ остался на берегу, а другой пригналъ лодку къ солдатамъ и вылѣзъ. Тогда сѣлъ солдатъ и переправился на другой берегъ. Мальчикъ, оставшійся тамъ, пригналъ обратно лодку къ солдатамъ, взялъ своего товарища мальчика, отвезъ на другой берегъ и снова доставилъ лодку обратно, послѣ чего вылѣзъ, а въ нее сѣлъ другой солдатъ и переправился...

Такимъ образомъ—послѣ каждыхъ двухъ перегоновъ лодки черезъ рѣку и обратно — переправлялся одинъ солдатъ. Такъ повторялось столько разъ, сколько было солдатъ и офицеровъ.

Задача 52-я.

Волкъ, коза и капуста.

Крестьянину нужно перевезти черезъ рѣку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что въ ней можетъ помѣститься только крестьянинъ, а съ нимъ или одинъ волкъ, или одна коза, или одна капуста. Но если оставить волка съ козой, то волкъ съѣстъ козу, а если оставить козу съ капустой, то коза съѣстъ капусту. Какъ перевезъ свой грузъ крестьянинъ?

Рѣшеніе.

Ясно, что приходится начать съ козы. Крестьянинъ, перевезши козу, возвращается и беретъ волка, котораго перевозитъ на другой берегъ, гдѣ его и оставляетъ, но зато беретъ и везетъ обратно на первый берегъ козу. Здѣсь онъ оставляетъ ее и перевозитъ къ волку капусту. Вслѣдъ затѣмъ, возвратившись, онъ перевозитъ козу; и переправа оканчивается благополучно.

Задача 53-я.

Мужья и жены.

Три мужа со своими женами желаютъ переправиться съ одного берега рѣки на другой, но въ ихъ распоряженіи есть лодка безъ гребца, поднимающая только двухъ человѣкъ. Дѣло осложняется еще тѣмъ, что ни одинъ мужъ не желаетъ, чтобы его жена находилась безъ него въ обществѣ одного или двухъ другихъ мужей. Какъ переправились при соблюденіи этихъ условій, всѣ шесть человѣкъ?

Рѣшеніе.

Задача эта имѣетъ за собой уже почтенную историческую давность, и рѣшеніе ея для классиковъ можетъ быть выражено слѣдующими латинскими стихами:

It duplex mulier, redit una vehitque manentem;
Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit, redeunt bini; mulierque sororem
Advehit; ad propriam sive maritus vadit.

Обозначимъ большими буквами **А, Б** и **В** мужей, а ихъ женъ соотвѣтственно малыми буквами **а, б** и **в.** Имѣемъ въ началѣ:

Первый берегъ.			**Второй берегъ.**		
В	**Б**	**А**	.	.	.
в	**б**	**а**	.	.	.

I.—Сначала отправляются двѣ женщины.

В	Б	А	|	.	.	.
в	.	.	|	.	б	а

II.—Возвращается одна изъ женщинъ и перевозитъ третью.

В	Б	А	|	.	.	.
.	.	.	|	в	б	а

III.—Возвращается одна изъ женщинъ и остается со своимъ мужемъ. Два другихъ мужа отправляются къ своимъ женамъ.

В	.	.	|	.	Б	А
в	.	.	|	.	б	а

IV.—Одинъ изъ мужей возвращается со своей женой, оставляетъ ее и забираетъ съ собой мужа.

.	.	.	|	В	Б	А
в	б	.	|	.	.	а

V.—Женщина переѣзжаетъ и забираетъ одну изъ женъ.

.	.	.	|	В	Б	А
в	.	.	|	.	б	а

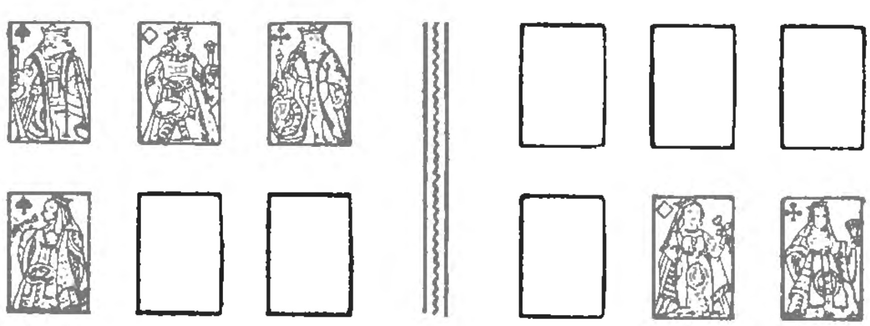
VI.—Мужъ (или одна изъ женъ) ѣдетъ обратно и перевозитъ оставшуюся.

.	.	.	|	В	Б	А
.	.	.	|	в	б	а

Очень наглядно и весело рѣшается эта же задача при помощи картъ.

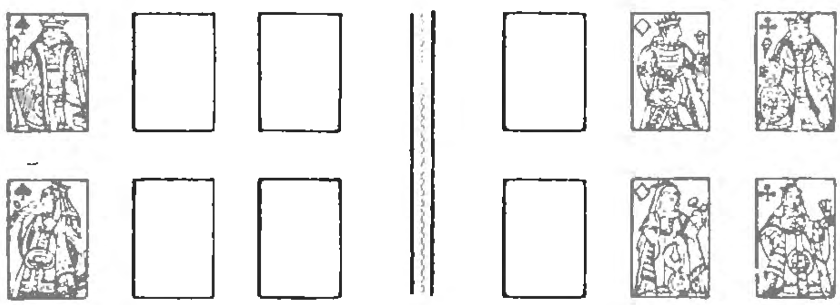
Пусть три мужа будутъ короли пикъ, бубенъ и трефъ, а дамы соотвѣтствующихъ мастей будутъ ихъ жены. Сначала всѣ находятся на одномъ берегу рѣки. Но вотъ начинается переправа.

I.—Сначала отправляются двѣ дамы.

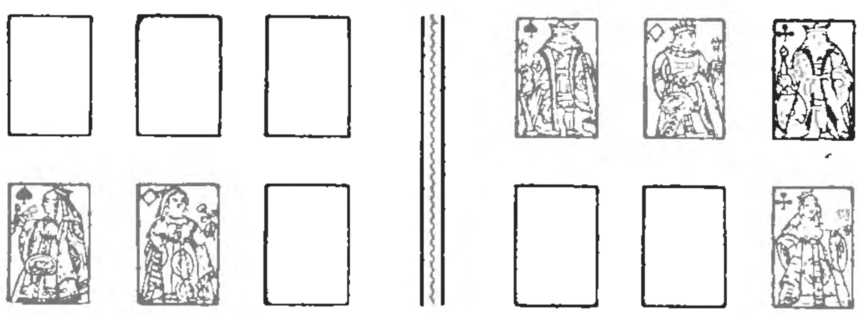


II.—Возвращается дама и перевозитъ третью.

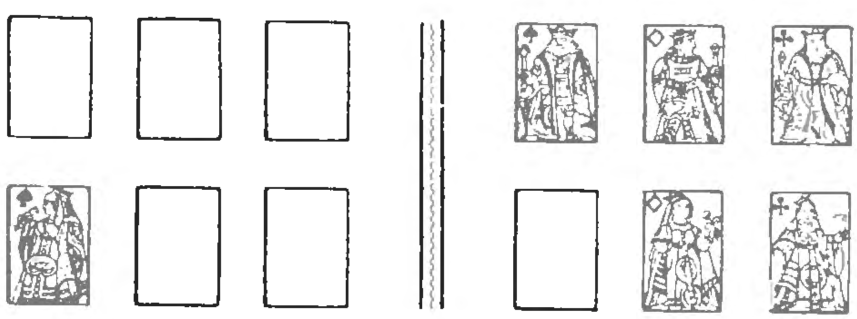
III.—Возвращается одна изъ дамъ, остается съ мужемъ, а два другихъ мужа переправляются къ своимъ женамъ.



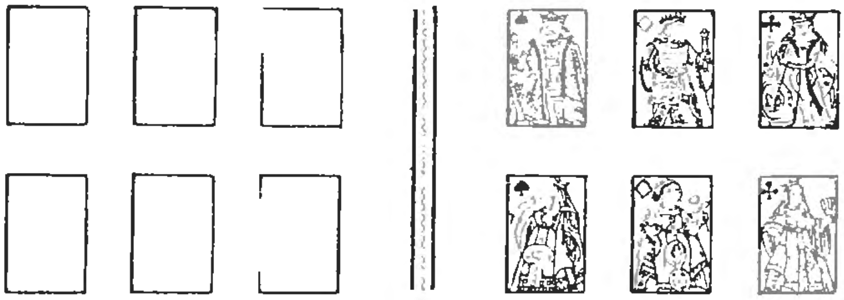
IV.—Мужъ съ женой возвращается на первый берегъ. Оставляетъ тамъ жену и забираетъ съ собой мужчину.



V.—Со второго берега ѣдетъ на первый дама и перевозитъ оттуда одну изъ подругъ.



VI.—Опять ѣдетъ на первый берегъ дама и перевозитъ оставшуюся тамъ подругу (или можетъ и самъ мужъ съѣздить за своей женой). И переправа окончена къ общему удовольствію.



Замѣчаніе.

Попробуйте ту же задачу рѣшить для случая четырехъ королей и дамъ. Вы увидите, что если лодка не вмѣщаетъ болѣе двухъ лицъ, то переправа при соблюденіи всѣхъ указанныхъ условій невозмжна. Но если взять лодку, въ которой могутъ помѣститься *три* человѣка, то переправа можетъ быть совершена при соблюденіи указанныхъ условій,—т. е. ни одна дама не будетъ оставаться безъ своего мужа въ присутствіи другихъ мужчинъ.

Подобная переправа совершается *въ пять пріемовъ.*

Взявъ четыре короля и четыре дамы, попробуйте для даннаго случая рѣшить вопросъ. Это не трудно.

Но и на лодкѣ, поднимающей только двухъ человѣкъ, можно совершить переправу четырехъ мужей съ ихъ женами, если посреди рѣки есть островъ, на которомъ можно останавливаться. Рѣшимъ съ помощью картъ эту любопытную задачу.

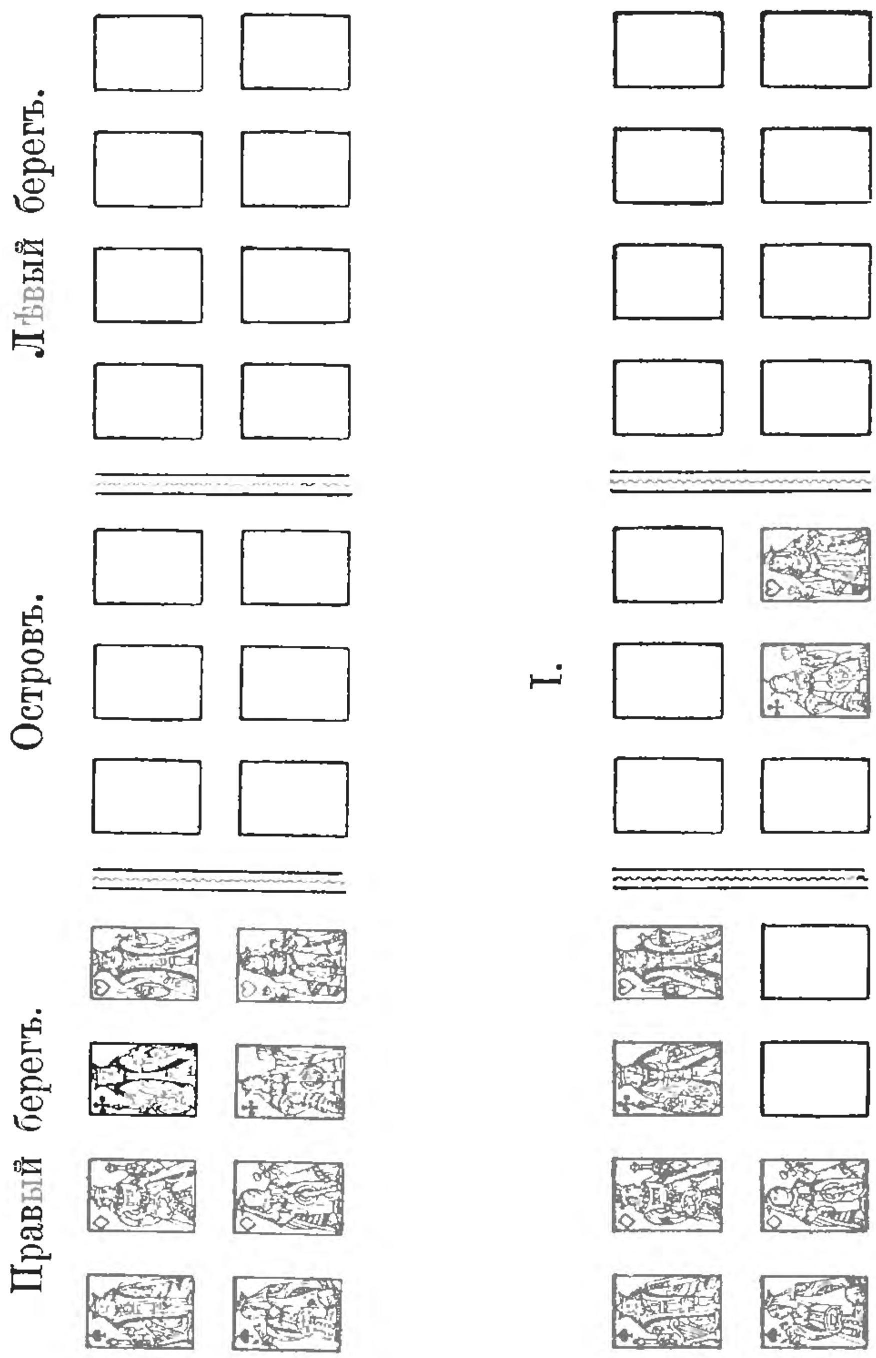
Задача 54-я.

Четыре мужа съ ихъ женами должны переправиться черезъ рѣку на лодкѣ безъ гребца, которая не вмѣщаетъ болѣе двухъ человѣкъ. Посреди рѣки есть островъ, на которомъ можно высаживаться. Спрашивается, какъ совершить эту переправу такъ, чтобы ни одна жена не была въ обществѣ другихъ мужчинъ ни на берегахъ, ни на островѣ, ни въ лодкѣ, если нѣтъ налицо мужа.

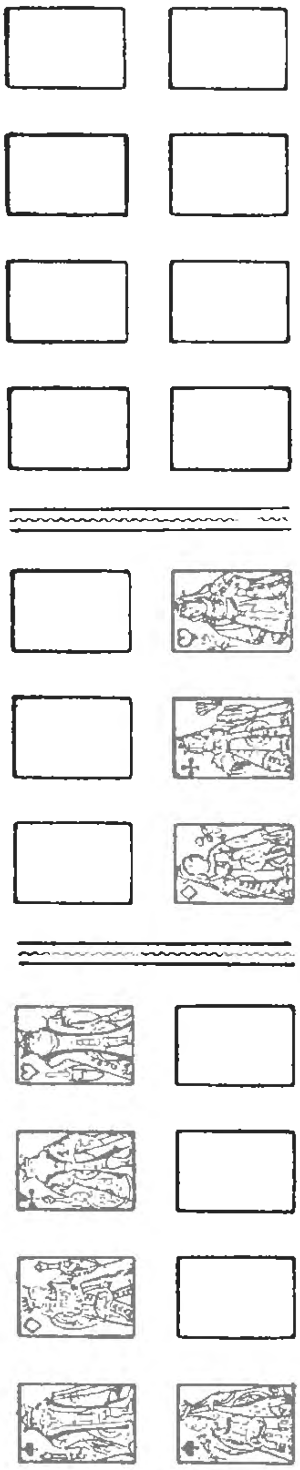
Рѣшеніе.

Переправа совершается въ 12 переѣздовъ, какъ видимъ изъ нижеслѣдующаго:

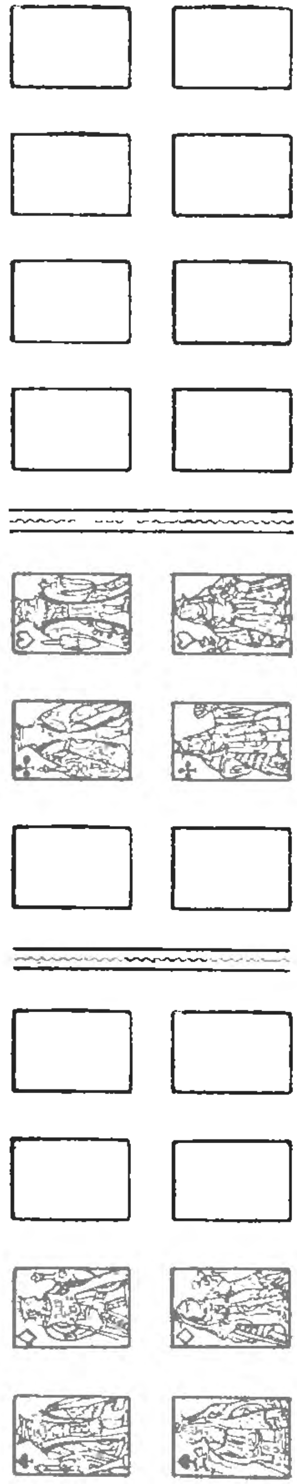
Беремъ четыре короля и четыре дамы. Условимся, гдѣ правый берегъ рѣки, гдѣ лѣвый, а между ними островъ:



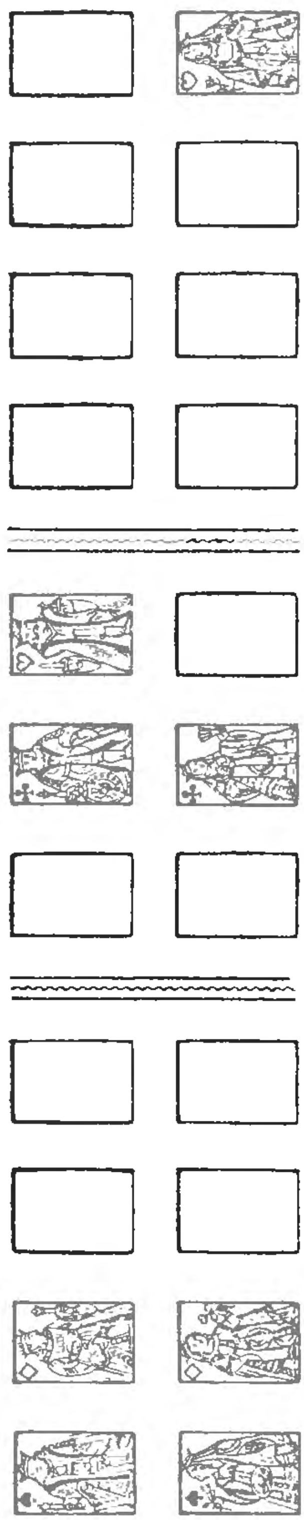
II.



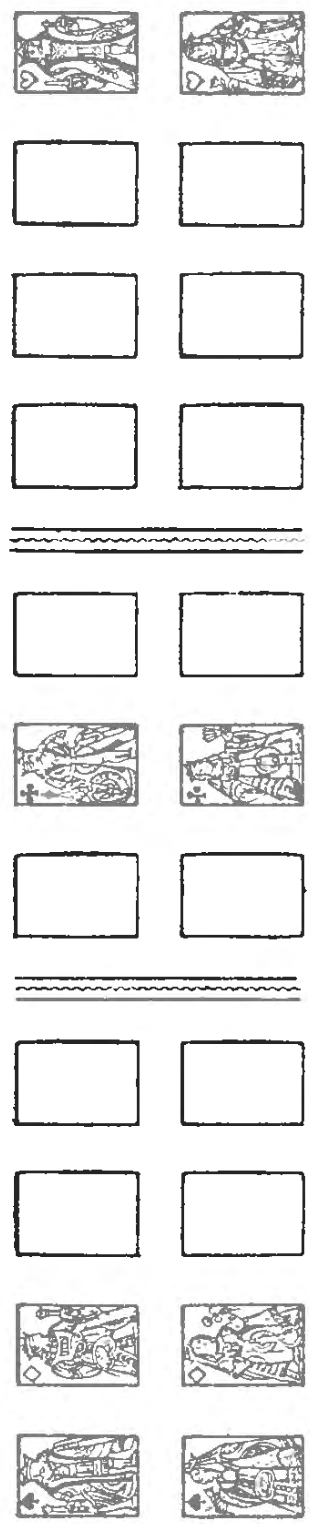
III.



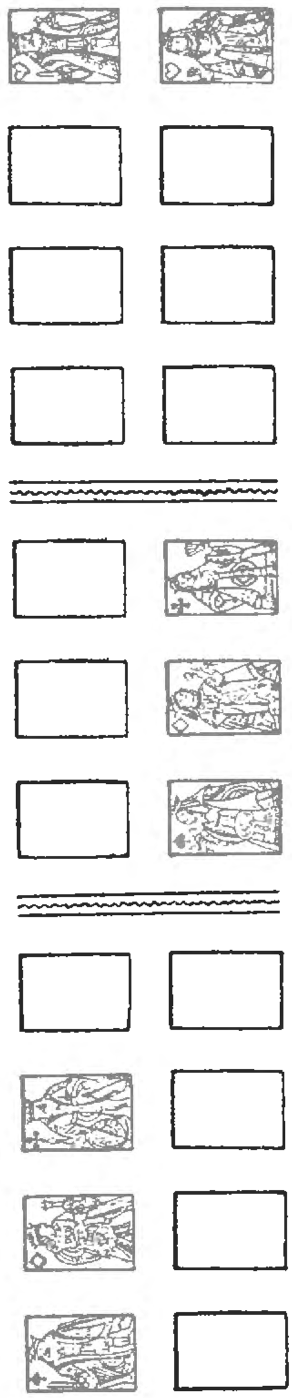
IV.



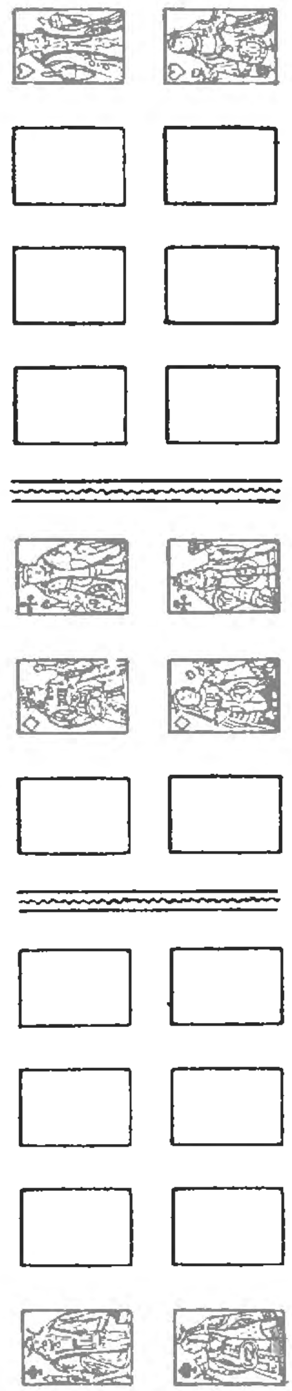
V.



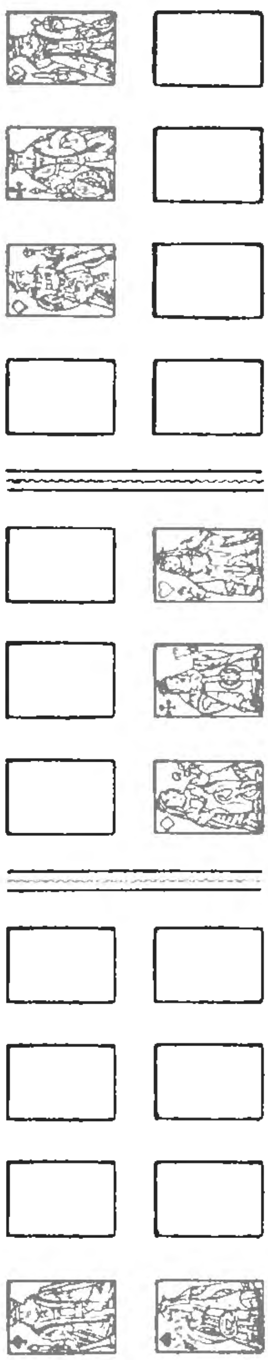
VI.



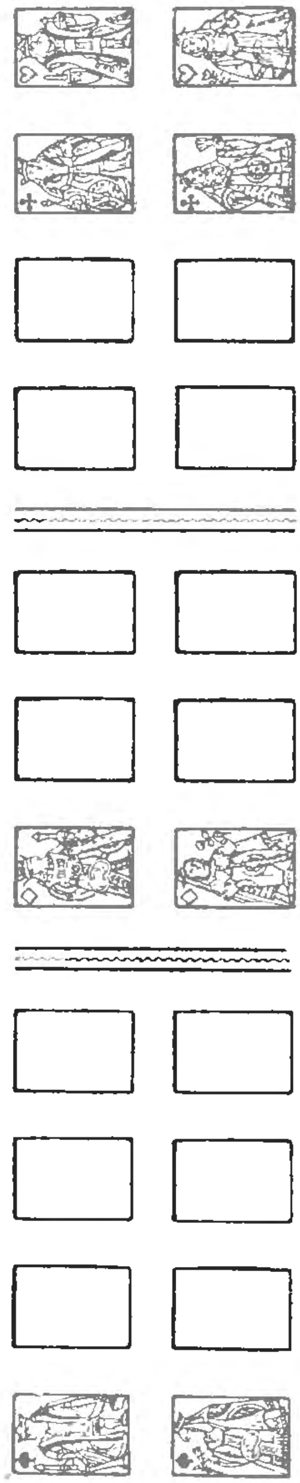
VII.



VIII.

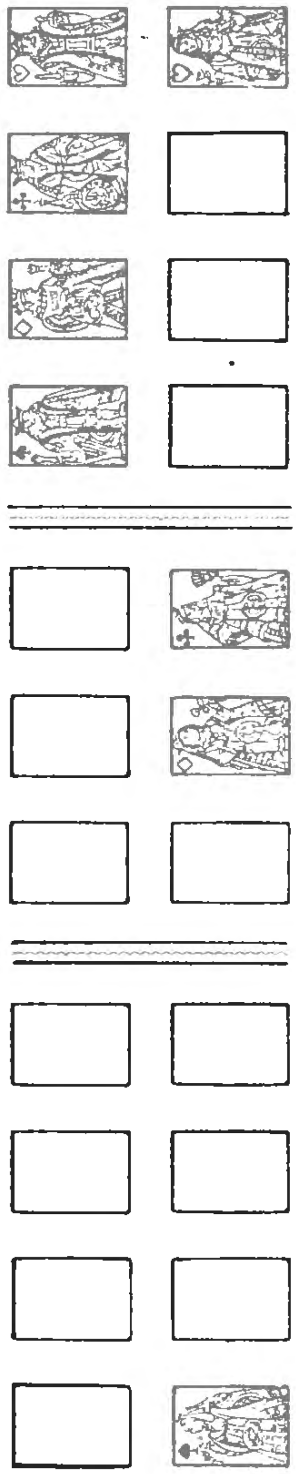


IX.

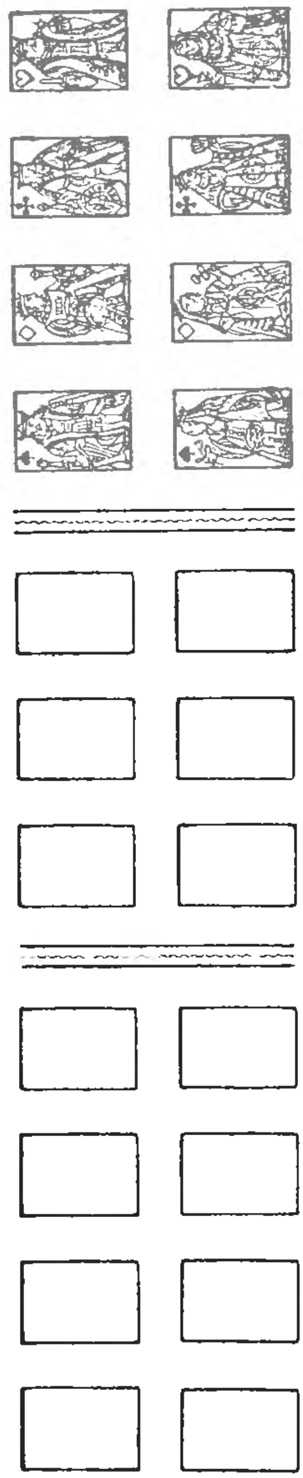


X.

XI.



XII.



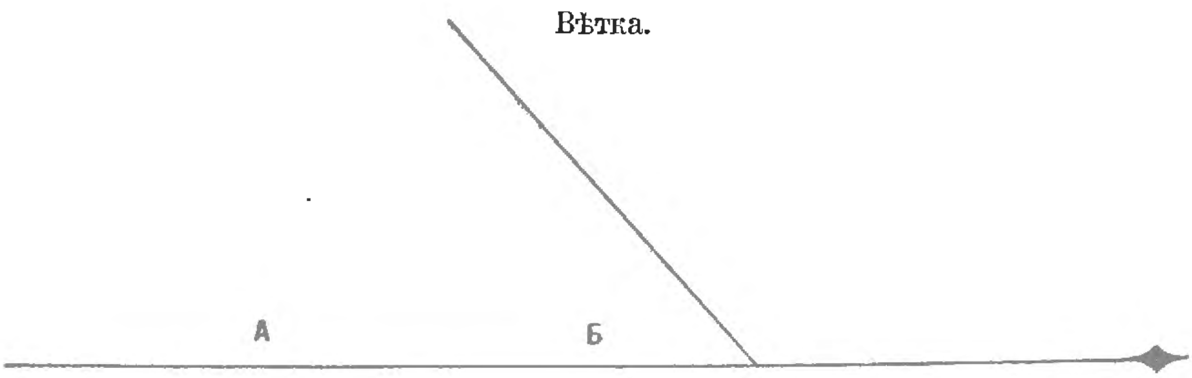
Задача 55-я.

На станціи желѣзной дороги.

Поѣздъ Б приближается къ станціи желѣзной дороги, но его нагоняетъ быстрѣе идущій поѣздъ А, который необходимо пропустить впередъ. У станціи отъ главнаго пути отходитъ боковая вѣточка, куда можно отвести на время вагоны съ главнаго пути, но вѣточка эта настолько короткая, что на ней не вмѣщается весь поѣздъ Б. Спрашивается, какъ все-таки пропустить поѣздъ А впередъ?

Рѣшеніе.

Желѣзнодорожный путь у станціи представляетъ такой видъ:



Фиг. 18.

По главному пути, въ направленіи, означенномъ стрѣлкой, идутъ впередъ поѣздъ Б, а за нимъ поѣздъ А, который надо пропустить впередъ, пользуясь боковою вѣточкой, на которой можетъ помѣститься лишь часть вагоновъ (фиг. 18).

Поѣздъ А нагналъ поѣздъ Б и долженъ пройти дальше. Какъ же быть? А вотъ какъ:

Поѣздъ Б идетъ по главному пути и переходитъ весь за начало боковой вѣтки. Затѣмъ поѣздъ Б идетъ заднимъ ходомъ на это отвѣтвленіе и оставляетъ тамъ столько вагоновъ, сколько умѣщается, а остальная часть поѣзда Б вмѣстѣ съ паровозомъ уходитъ опять впередъ, за начало вѣточки. Затѣмъ пропускаютъ поѣздъ А и, какъ только онъ весь пройдетъ за начало вѣтки, къ послѣднему его вагону прицѣпляютъ оставшіеся на вѣточкѣ вагоны поѣзда Б, и поѣздъ А сводитъ эту часть поѣзда Б съ вѣточки впередъ. Затѣмъ поѣздъ А пускаютъ назадъ,—влѣво отъ начала вѣточки,—и оставляютъ тамъ вагоны отъ поѣзда Б. Тою порою другая часть поѣзда Б (съ паровозомъ) идетъ заднимъ ходомъ и становится на вѣточку, открывая свободный путь для поѣзда А. Онъ мчится дальше, а паровозъ поѣзда Б съ нѣсколькими передними вагонами опять выходитъ на главный путь, прицѣпляетъ стоящую влѣво отъ начала вѣточки часть своего поѣзда и слѣдуетъ за поѣздомъ А.

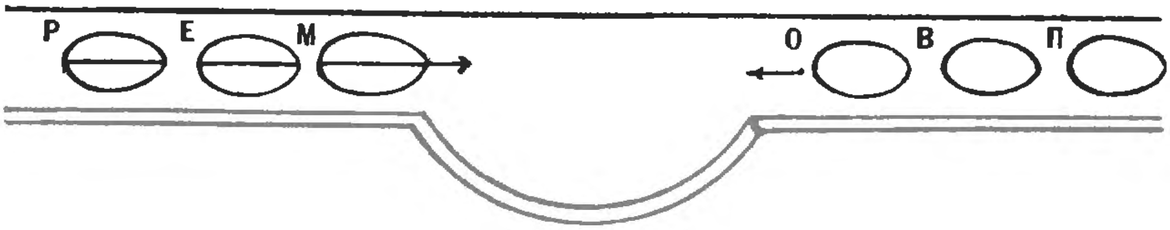
Задача 56-я.

Разъѣздъ 6-ти пароходовъ.

По каналу, одинъ за другимъ, идутъ 3 парохода: «Олегъ», «Владиміръ» и «Петръ». Навстрѣчу имъ показались еще 3 парохода, которые тоже идутъ одинъ за другимъ: «Марія», «Екатерина» и «Россія». Каналъ такой ширины, что два парохода въ немъ разъѣхаться не могутъ; но въ каналѣ съ одной его стороны есть заливъ, въ которомъ можетъ помѣститься только одинъ пароходъ. Могутъ ли пароходы разъѣхаться такъ, чтобы продолжать свой путь попрежнему?

Рѣшеніе.

Положеніе судовъ и каналъ съ заливомъ изображены на фиг. 19-ой.



Фиг. 19.

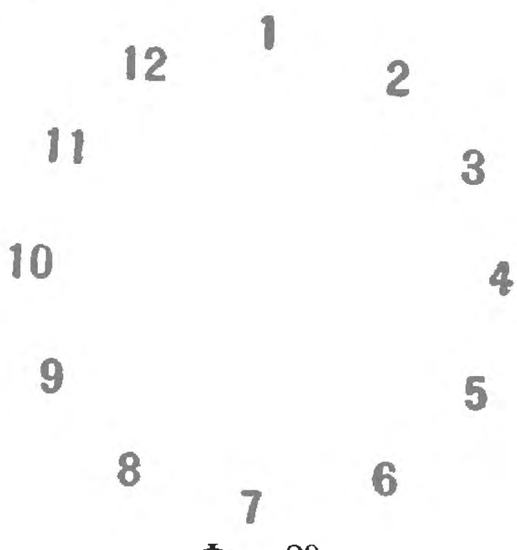
Пароходы «В.» и «П.» отходятъ назадъ (направо), а «Олегъ» входитъ въ заливъ; «М.», «Е.» и «Р.» проходятъ по каналу мимо «Олега»; тогда «Олегъ» выходитъ изъ залива и идетъ своей дорогой (влѣво); «Р.», «Е.» и «М.» отступаютъ на прежнее мѣсто (налѣво); тогда съ «Владиміромъ» повторяется все, что дѣлалось съ «Олегомъ». Такимъ же образомъ проходитъ и «Петръ», и пароходы плывутъ своей дорогой.

Задача 57-я.

Угадать число.

Числа, начиная отъ 1 и до любого предѣла, написаны и расположены въ послѣдовательномъ порядкѣ по кругу. Угадать любое изъ этихъ чиселъ, задуманное кѣмъ-либо.

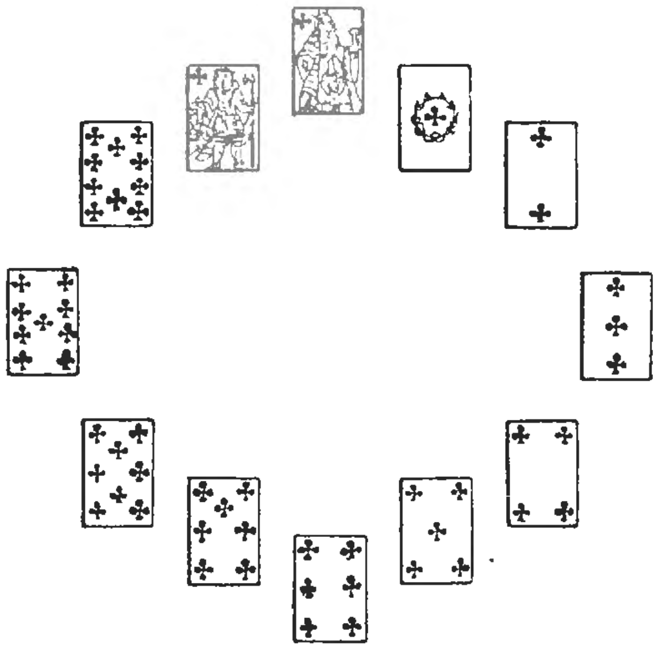
Возьмемъ, напр., числа отъ 1 до 12 и расположимъ ихъ по кругу (фиг. 20). Можно смѣло взяться угадать задуманное кѣмъ-либо въ этомъ кругѣ число.



Фиг. 20.

Можно, очевидно, для той же цѣли взять часы и предложить угадать задуманный кѣмъ-либо часъ.

Можно также взять двѣнадцать картъ какой-либо масти (отъ туза до дамы) и, считая валета за 11, а даму за 12, разложить ихъ, какъ указано на фиг. 21, и взяться угадать задуманную кѣмъ-либо карту.



Фиг. 21.

Можно также пользоваться домино, очками лото и т. д. Какъ же угадать задуманное число?

Рѣшеніе.

Пусть кто-либо задумаетъ про себя любое изъ чиселъ на кругѣ. Затѣмъ укажите ему сами любое число на этомъ кругѣ и прибавьте про себя къ этому числу 12 (т. е. наивысшее число круга). Вы получите нѣкоторое число, и это число вы скажете громко. Пусть потомъ задумавшій считаетъ про себя отъ задуманнаго имъ числа, притрогиваясь сначала къ указанному вами числу, а потомъ къ каждому слѣдующему числу по кругу, идя въ **обратномъ порядкѣ,** и пусть считаетъ до сказаннаго вами громко числа. Когда онъ досчитаетъ до него, послѣдовательно притрогиваясь къ числамъ, то остановится какъ разъ на задуманномъ имъ числѣ или часѣ, или картѣ.

Пусть, напримѣръ, кто либо задумалъ на кругѣ 5, а вы указываете, напримѣръ, 9, прибавляете къ нему про себя 12 и получаете 21. Затѣмъ говорите громко задумавшему:

— Считайте про себя начиная отъ задуманнаго вами числа до 21, но, начиная счетъ, притроньтесь сначала къ 9, потомъ къ 8, потомъ къ 7 и т. д., идя по кругу въ обратномъ порядкѣ; когда же досчитаете до 21, то скажите это число громко и остановитесь.

Задумавшій исполнитъ сказанное ему, и когда досчитаетъ до 21, то какъ разъ самъ **укажетъ** задуманное имъ число **5.**

Можно обставить эту задачу еще таинственнѣе; напр. такъ:

Кто-нибудь задумываетъ какое-нибудь число (напр. 5). Вы берете, напр., число 9, прибавляете къ нему мысленно 12, получаете 21 и говорите задумавшему:

— Теперь я буду стучать карандашомъ (или пальцемъ) и при каждомъ стукѣ вы прибавляйте про себя къ задуманному вами числу по единицѣ. Но когда досчитаете до 21, скажите громко: «21».

Затѣмъ стучите по 9, по 8, по 7 и т. д. по 12, по 11 и т. д. Задумавшій число въ это время про себя будетъ считать 5, 6, 7 и т. д., но когда скажетъ громко «двадцать одинъ», то окажется, что вы стучите какъ разъ по задуманному имъ числу 5.

— Вы задумали число «пять!»—говорите вы ему.

— Совершенно вѣрно!—отвѣтитъ вамъ задумавшій, дивясь, какъ вы могли узнать это, если онъ самъ не знаетъ, въ чемъ разгадка этого будто бы фокуса.

«Фокуса» здѣсь, конечно, нѣтъ, а есть только самый правильный математическій расчетъ, состоящій въ слѣдующемъ:

Чтобы отъ 5 прійти къ 9, нужно считать такъ: 5, 6, 7, 8, 9. Значитъ, отъ 9 до 5 нужно пройти черезъ тѣ же числа 9, 8, 7, 6, 5, только считая ихъ въ обратномъ порядкѣ. Если, указывая на 9, мы скажемъ «пять», затѣмъ, указывая на 8, скажемъ «шесть», и т. д. то, придя къ задуманному числу 5, скажемъ «девять». Если затѣмъ идти по кругу въ томъ же направленіи и присчитать къ «девяти» еще 12 послѣдовательныхъ чиселъ круга, то опять приходимъ къ тому же числу 5. Дѣло сводится, слѣдовательно, къ счету по кругу въ обратномъ направленіи отъ указаннаго числа 9 до $9+12$, т. е. до 21.

Если, наоборотъ, задумано 9, а указано 5, то отъ 9 до 5, считая въ прямомъ направленіи по кругу (по порядку возрастанія чиселъ), получаемъ: 9, 10, 11, 12. $12+1$, $12+2$, $12+3$, $12+4$, $12+5$, т. е. 17. Слѣдовательно, начиная съ 5, можно прійти къ задуманному числу 9, идя въ обратномъ направленіи и отсчитывая тѣ же $5+12=17$ чиселъ.

Дѣло простое, а развлеченіе получается интересное.

Задача 58-я.

„Кто первый скажетъ сто".

Двое поочередно говорятъ произвольныя числа, но не превышающія десяти. Эти числа складываются одно за другимъ, и выигрываетъ тотъ, кто первый достигнетъ ста. Сдѣлать такъ, чтобы всегда первымъ сказать **«сто»**.

Напередъ заданное число есть сто, а числа, которыя говорятъ играющіе, не превышаютъ десяти, т. е. можно называть 10 и всякое меньшее число. Итакъ, если первый скажетъ, напр., «7», а второй «10», получится «17»; затѣмъ первый говоритъ, напр., «5», получится «22»; второй говоритъ «8», получится «30» и т. д. Побѣдителемъ будетъ тотъ, кто первый получитъ «100».

Рѣшеніе.

Чтобы быть побѣдителемъ, старайтесь только о томъ, чтобы вамъ пришлось сказать число 89. Ясно, что, если вы скажете это число, то какое бы число (десять или меньше) ни прибавилъ вашъ противникъ, вы тотчасъ найдете соотвѣтственное число, добавивъ которое къ полученному противникомъ, вы получаете сто и выигрываете.

Но чтобы сумѣть всегда сказать «89», а потомъ, значитъ, и «100», постарайтесь разобраться въ слѣдующихъ очень нетрудныхъ разсужденіяхъ.

Начнемъ отнимать, сколько возможно, отъ ста по одиннадцати. Получимъ рядъ такихъ чиселъ:

89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1.

Или же, если напишемъ ихъ въ порядкѣ возростанія, то получимъ:

1, 12, 23. 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Запомнить эти числа очень легко: стоитъ только взять предѣльное число, т. е. 10, и прибавить къ нему единицу—получится 11. Затѣмъ беремъ, это число и всѣ числа, составленныя умноженіемъ 11-ти на 2, на 3, на 4... на 8,—получимъ 11, 22, 32, 44, 55, 66, 77, 88. Увеличимъ каждое изъ этихъ чиселъ единицей и начнемъ единицей же рядъ. Получимъ опять-таки предыдущій написанный нами рядъ чиселъ:

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Ясно теперь, если вы скажете 1, то какое бы число (по условію не больше 10) ни сказалъ другой играющій, онъ не помѣшаетъ вамъ сказать 12; точно такъ же далѣе вы всегда можете сказать 23, а затѣмъ 34, 45, 56, 67, 78 и 89.

Когда вы скажете 89, то какое бы число (не больше 10) ни сказалъ вашъ соперникъ, вы говорите «сто» и выигрываете.

Отсюда видно также, что если оба играющіе знаютъ, въ чемъ дѣло, то выигрываетъ всегда тотъ, кто первый скажетъ «одинъ», т. е. кто начинаетъ игру.

Обобщеніе.

Предыдущую задачу можно предложить и въ такомъ общемъ видѣ:

Двое говорятъ поочередно произвольныя числа, не превышающія, однако, какого-либо напередъ условленнаго предѣла. Эти числа складываются одно за другимъ, и выигрываетъ тотъ, кто первый достигнетъ какого-либо **напередъ назначеннаго числа.** Сдѣлать такъ, чтобы всегда первымъ прійти къ этому впередъ назначенному числу.

Если вы хорошо усвоили себѣ рѣшеніе предыдущей задачи, то нетрудно видѣть, какъ надо поступать въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ.

Пусть, напр., назначенное число будетъ 120; предѣльное, какъ и выше. равно 10. Тогда, очевидно, нужно имѣть въ виду числа:

109, 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 10.

т. е. начиная съ 10, всѣ кратныя 11, увеличенныя на 10. Отсюда также видно, что знающій рѣшеніе этой задачи выигрываетъ всегда. если онъ начинаетъ.

Пусть еще, напр., напередъ заданное число будетъ 100, но предѣльное число есть не 10, а 8. Въ такомъ случаѣ нужно имѣть въ виду числа:

91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19, 10, 1.

т. е., начиная отъ единицы, всѣ числа кратныя 9 и увеличенныя единицей. И въ данномъ случаѣ знающій задачу всегда выигрываетъ, если онъ начинаетъ.

Но если принять за предѣльное число, напр., 9, то числа, которыя нужно имѣть въ виду, будутъ:

90, 80, 70. 60, 50, 40, 30, 20, 10.

И ясно, что начинающій здѣсь можетъ проиграть, если другому извѣстенъ секретъ, ибо какое бы число начинающій ни сказалъ, онъ не можетъ помѣшать другому назвать десять, 20 и т. д.—всѣ числа до 100.

Любопытная исторія.

Существуетъ разсказъ объ одномъ приключеніи довольно извѣстнаго историка древности Іосифа Флавія, жившаго въ I-мъ вѣкѣ по Рождествѣ Христовѣ и оставившаго описаніе Іудейской войны. Онъ былъ правителемъ одного города во время осады и взятія его римлянами. Преслѣдуемый разъяренными римскими солдатами, Флавій укрылся со своимъ отрядомъ въ одной пещерѣ. Но съ этой минуты ему начала угрожать чуть ли не худшая опасность отъ собственныхъ подчиненныхъ: іудеи, когда онъ предложилъ имъ сдаться римлянамъ, пришли въ страшную ярость и рѣшили лучше перебить другъ друга, чѣмъ подвергнуться позору плѣна.

Іосифъ пробовалъ отговаривать ихъ отъ этого ужаснаго рѣшенія, но напрасно. На всѣ его доводы они отвѣчали угрозами и хотѣли выполненіе своего намѣренія начать съ него. Тогда онъ прибѣгнулъ къ хитрости, чтобы спасти свою жизнь. Дѣлая видъ, что онъ подчиняется ихъ рѣшенію, Іосифъ воспользовался послѣдній разъ своей властью надъ ними и предложилъ слѣдующій планъ:

Во избѣжаніе безпорядка и свалки при убійствѣ другъ друга, слѣдуетъ-де стать имъ всѣмъ въ извѣстномъ порядкѣ и, начавъ счетъ съ одного конца, убивать такого-то по порядку (повѣствователь не указываетъ, какого именно) до тѣхъ поръ, пока останется только одинъ, который и убьетъ самъ себя. Всѣ согласились. Іосифъ разставилъ ихъ, и самъ сталъ такимъ образомъ, что остался послѣднимъ, и, конечно, себя не убилъ, а пожалуй—спасъ еще нѣсколько человѣкъ, болѣе хладнокровныхъ и обѣщавшихъ ему полное повиновеніе.

«Вотъ замѣчательная исторія (говоритъ по этому поводу Баше де Мезирьякъ въ своей книгѣ, вышедшей въ 17-мъ столѣтіи и посвященной математическимъ развлеченіямъ), изъ которой мы видимъ, что не слѣдуетъ пренебрегать даже маленькими тонкостями, изощряющими умъ. Онѣ могутъ подготовить человѣка къ болѣе важнымъ дѣламъ и принести иногда неожиданную пользу»...

Очень можетъ быть, что приведенный выше разсказъ и послужилъ матеріаломъ, на которомъ создалась одна любопытная задача, гдѣ дѣло идетъ уже о христіанахъ и туркахъ. Видно, что сложилась она еще въ ту пору, когда Европа вела съ турками упорную войну.

Приводимъ эту задачу:

Задача 59.

По жребію.

15 турокъ и 15 христіанъ плыли по морю на небольшомъ суднѣ. Вдругъ поднялась страшная буря, и кормчій сказалъ, что для спасенія хотя половины людей остальныхъ 15 необходимо сбросить въ воду. Находящіеся на суднѣ предоставили дѣло жребію;

они стали всѣ въ рядъ и рѣшили, считая по порядку отъ 1 до 9, бросать въ воду каждаго девятаго до тѣхъ поръ, пока останется на кораблѣ только 15 человѣкъ. Нашелся христіанинъ, который разставилъ всѣхъ такъ, что въ воду попали всѣ 15 турокъ, а христіане остались на суднѣ. Какъ онъ это сдѣлалъ?

Рѣшеніе.

Для рѣшенія задачи нужно пассажировъ поставить такъ: **4** христіанина, **5** турокъ, **2** христіанина, **1** турокъ, **3** христіанина, **1** турокъ, **1** христіанинъ, **2** турка, **2** христіанина, **3** турка, **1** христіанинъ, **2** турка, **2** христіанина, **1** турокъ.

Чтобы запомнить эти числа и быстро рѣшить задачу, рекомендуемъ запомнить такое выраженіе:

„Отъ бурь есть защита,
Спасенье, избавленье намъ!“

И запомнить также порядокъ (что не трудно) гласныхъ въ азбукѣ: **а, е, и, о, у,** изъ нихъ первая **а** пусть означаетъ **1,** вторая **е—2,** третья **и—3,** четвертая **о—4** и пятая **у—5.**

Рядъ начинается **христіанами.** Вы говорите про себя **«отъ»**—и ставите 4-хъ христіанъ, **«бурь»** и ставите 5 турокъ, **«есть»**—и ставите 2-хъ христіанъ, **«за»**—и ставите 1-го турка, **«щи»**—и ставите 3-хъ христіанъ, **«та»**—и ставите одного турка, **«спа»**—и ставите 1-го христіанина, **«се»**—и ставите 2-хъ турокъ, **«нье»**—и ставите 2-хъ христіанъ, **«из»**—и ставите 3-хъ турокъ, **«ба»**—и ставите 1-го христіанина, **«вле»**—и ставите 2-хъ турокъ, **«нье»**—и ставите 2-хъ христіанъ, **«намъ»**—и ставите 1-го турка.

Запомнить рѣшеніе, какъ видно, не трудно. А какъ найти его? Сейчасъ увидимъ, что и это не представляетъ особой трудности.

Поставимъ въ рядъ тридцать предметовъ, напр., спичекъ, или палочекъ, или камешковъ, или кубиковъ и т. д.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Считая отъ 1 до 9, находимъ, что въ первый разъ придется выбросить 9-ю, 18-ю и 27-ю палочки. Отбрасываемъ ихъ и опять начинаемъ считать далѣе отъ 1 до 9; сначала сосчитываемъ три палочки за 27-й, а затѣмъ возвращаемся къ началу ряда, который содержитъ теперь только 27 палочекъ. Изъ него придется, значитъ, на этотъ разъ выбросить 6-ю, 15-ю и 24-ю палочки. Отбросимъ эти палочки и, поступая по предыдущему, въ полученномъ новомъ ряду изъ 24-хъ палочекъ опять отбрасываемъ 6-ю, 15-ю и 24-ю палочки. Послѣ этого получаемъ рядъ изъ 21 палочки. Считая отъ 1 до 9-ти, здѣсь мы должны отбросить 9-ю и 18-ю. Останется 19 палочекъ. Считая далѣе три палочки за 18-й и возвращаясь къ началу, отбрасываемъ отсюда 6-ю и 15-ю. Останется рядъ изъ 17 палочекъ, изъ котораго, считая по предыдущему отъ 1 до 9, надо выбросить 5-ю и 14-ю палочки, и останется 15 палочекъ. Если разсмотрѣть затѣмъ, на какихъ мѣстахъ въ первоначальномъ ряду палочки остались (христіане) и на какихъ выброшены (турки), то, замѣняя выброшенныя палочки нулями, получимъ:

| | | | 0 0 0 0 0 | | 0 | | | 0 | 0 0 | | 0 0 0 | 0 0 | | 0.

Т. е. получается данное уже нами рѣшеніе задачи.

Вмѣсто палочекъ или спичекъ можно для данной задачи пользоваться картами, условившись, наприм., что красныя масти обозначаютъ христіанъ, а черныя—турокъ и т. д.

Задачу, конечно, можно видоизмѣнять всячески. Въ общемъ видѣ ее можно выразить такъ:

Дано нѣкоторое число различныхъ предметовъ. Расположить ихъ въ такомъ порядкѣ, чтобы послѣ отбрасыванія послѣдовательно пятаго, девятаго, десятаго иди какого угодно по порядку предмета (до извѣстнаго предѣла, конечно), оставались напередъ заданные предметы.

Какъ можно рѣшить подобную задачу, ясно изъ разобранной выше задачи «по жребію».

Игра въ красное и черное или игра въ жетоны.

Разсказываютъ, что знаменитый англійскій ученый Тэтъ, путешествуя по желѣзной дорогѣ, развлекался, между прочимъ, слѣдующей интересной игрой. Онъ вынималъ изъ кармана 4 золотыхъ монеты и 4 серебряныхъ; затѣмъ клалъ ихъ въ рядъ въ перемѣнномъ порядкѣ, т. е. золотую монету и серебряную, золотую и серебряную и т. д., пока не раскладывалъ всѣ восемь монетъ, оставя слѣва такое свободное мѣсто, на которомъ могли бы умѣститься еще двѣ монеты—не болѣе. Вслѣдъ затѣмъ онъ задавалъ себѣ такую задачу:

Перемѣщать только двѣ рядомъ лежащія монеты, не измѣняя ихъ взаимнаго расположенія и пользуясь для этого свободнымъ мѣстомъ для двухъ монетъ, такъ, чтобы послѣ четырехъ всего такихъ перемѣщеній оказались рядомъ четыре золотыхъ монеты, а за ними слѣдовали четыре серебряныхъ.

Попробуйте сдѣлать это! Если у васъ нѣтъ, что очень можетъ быть, золотыхъ и серебряныхъ монетъ, то, быть можетъ, найдутся серебряныя и мѣдныя... Сущность задачи вѣдь отъ этого не мѣняется! Или, быть можетъ, у васъ совсѣмъ нѣтъ монетъ, —да еще цѣлыхъ восьми? Тогда ничто не мѣшаетъ вамъ воспользоваться черными и бѣлыми шашками, взявъ ихъ по четыре. А если нѣтъ и шашекъ, то ничто не помѣшаетъ вамъ сдѣлать 4 кружочка (жетона) черныхъ и 4 красныхъ или бѣлыхъ изъ бумаги, картона или дерева и попытаться рѣшить предложенную задачу. Возьмите, наконецъ, 4 красныхъ и 4 черныхъ карты.

При всей своей видимой простотѣ, задача эта не такъ-то легка, особенно если увеличивать число паръ монетъ, жетоновъ, кружочковъ или картъ, т. е. если вмѣсто 8-ми взять ихъ 10, 12, 14 и т. д.

Карты,—настоящія или игрушечныя, все равно,—весьма пригодны для даннаго развлеченія. Назовемъ это развлеченіе **игрой въ красное и черное** и начнемъ съ такой задачи:

Задача 60-я.

Четыре пары.

Взяты 4 красныхъ и 4 черныхъ карты (или 4 красныхъ и 4 черныхъ кружка) и положены въ рядъ въ перемѣнномъ порядкѣ: красная, черная, красная, черная и т. д. Можно пользоваться свободнымъ мѣстомъ только для двухъ картъ и можно на это свободное мѣсто перемѣщать только двѣ рядомъ лежащія карты, не мѣняя порядка, въ которомъ онѣ лежатъ. Требуется въ **четыре** перемѣщенія картъ попарно перемѣстить ихъ такъ, чтобы оказались подрядъ четыре черныхъ и затѣмъ четыре красныхъ карты (Помните, что всюду вмѣсто картъ можно брать разнаго цвѣта кружки или жетоны, или монеты и т. д.).

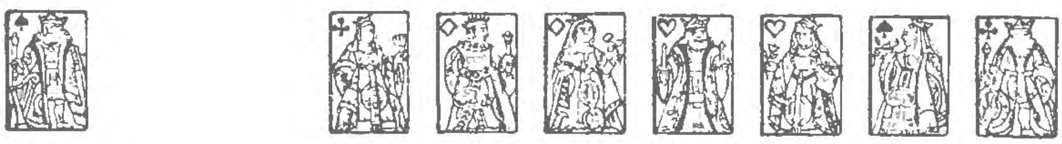
Рѣшеніе.

Возьмемъ изъ колоды четыре короля и четыре дамы и расположимъ ихъ, какъ требуется, т. е. такъ:

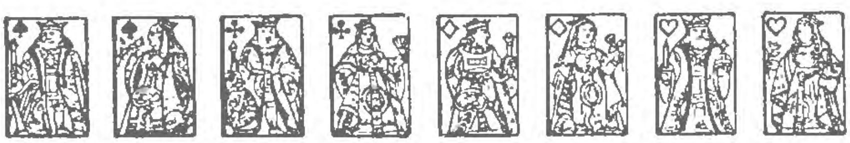
Первое перемѣщеніе.—Слѣва имѣемъ два свободныхъ мѣста; перекладываемъ туда короля пикъ и бубенъ. Получается такое расположеніе:

Второе перемѣщеніе.—Даму червей и даму пикъ перекладываемъ на освободившіяся мѣста и получаемъ:

Третье перемѣщеніе.—Короля и даму бубенъ перекладываемъ на свободныя мѣста, получаемъ расположеніе:



Четвертое перемѣщеніе.—Наконецъ, перекладываемъ на свободныя мѣста даму пикъ съ королемъ трефъ и получаемъ требуемое расположеніе: идутъ подрядъ четыре черныхъ и четыре красныхъ карты.



Изъ этого послѣдняго расположенія картъ, наоборотъ, можно перейти къ первому также четырьмя перемѣщеніями.

Рѣшите эту обратную задачу. Теперь это не трудно!

Задача 61-я.

Пять паръ.

Кладутъ въ рядъ пять красныхъ и пять черныхъ картъ въ перемѣнномъ порядкѣ: красная, черная, красная, черная и т. д.

Требуется, пользуясь двумя свободными мѣстами и перемѣщая на нихъ по двѣ карты безъ измѣненія ихъ взаимнаго положенія, въ **пять** перемѣщеній расположить ихъ такъ, чтобы красныя карты были съ красными, а черныя съ черными.

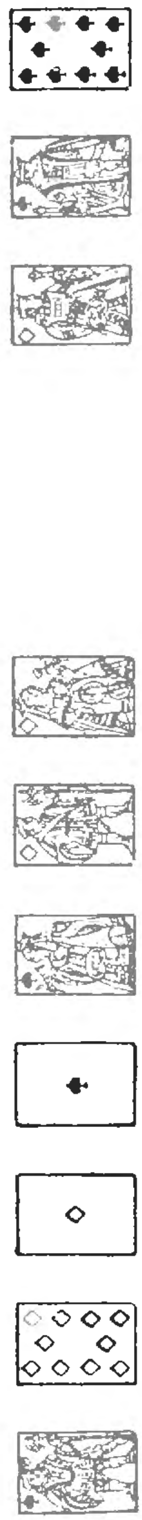
Рѣшеніе.

Первоначальное расположеніе картъ.

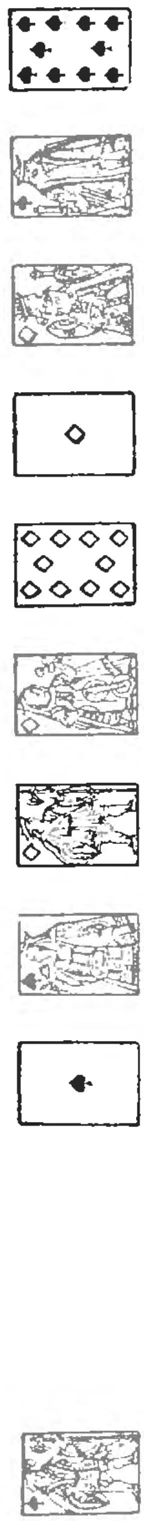
I. Перемѣщаются на свободныя мѣста валетъ пикъ и десятка бубенъ. Имѣемъ:

II. Перемѣщаются на свободныя мѣста короли бубенъ и пикъ. Имѣемъ:

III. Перемѣщаются дама пикъ и валетъ бубенъ. Имѣемъ:



IV. Перемѣщаются десятка и тузъ бубенъ. Имѣемъ:



V. Перемѣщаются король и десятка пикъ, и получается требуемое.

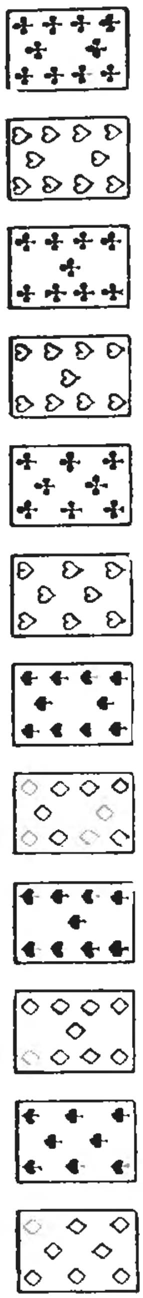
Задача 62-я.

Шесть паръ.

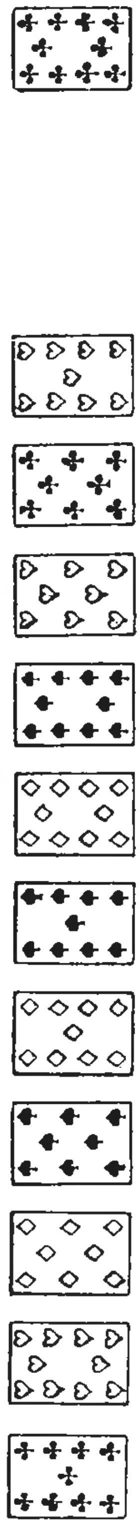
Положены въ рядъ въ перемѣнномъ порядкѣ шесть красныхъ и шесть черныхъ картъ: красная, черная, красная, черная и т. д. Пользуясь двумя свободными мѣстами, требуется, передвигая каждый разъ только по 2 карты безъ измѣненія ихъ взаимнаго положенія, въ **шесть** перемѣщеній расположить черныя карты съ черными, а красныя съ красными.

Рѣшеніе.

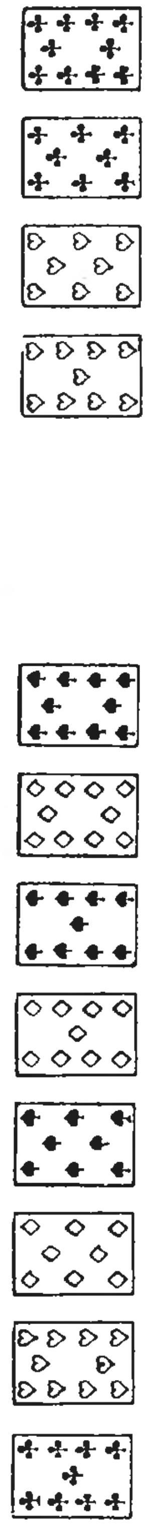
Первоначальное расположеніе картъ:

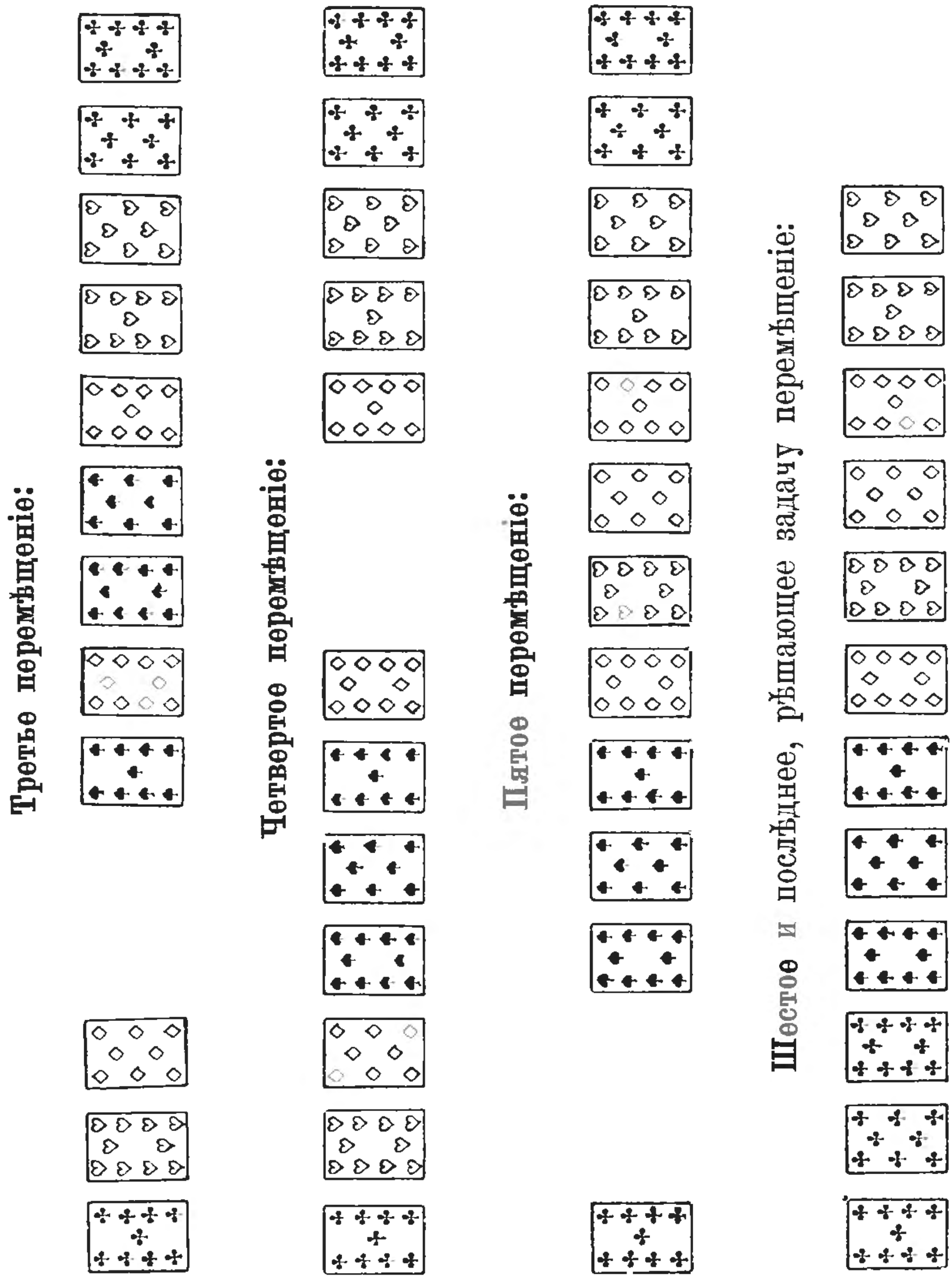


Первое перемѣщеніе:



торое перемѣщеніе:





Задача 63-я.

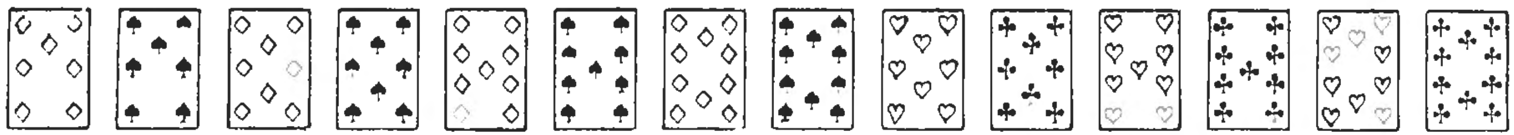
Семь паръ.

Кладутъ въ рядъ 7 красныхъ и 7 черныхъ картъ въ перемѣнномъ порядкѣ: красная, черная, красная, черная и т. д. Пользуясь свободнымъ мѣстомъ для двухъ картъ, требуется, передвигая каждый разъ только по 2 карты безъ измѣненія ихъ взаимнаго положенія, въ семь перемѣщеній расположить черныя карты съ черными, а красныя съ красными.

Рѣшеніе.

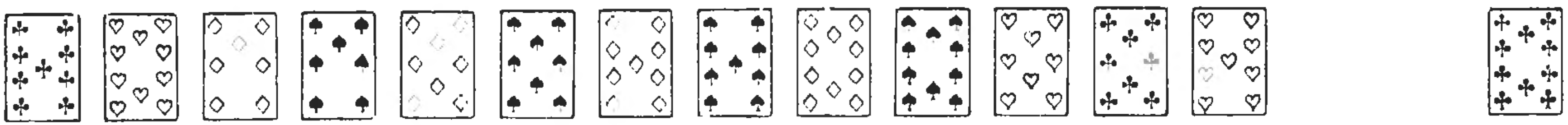
Какъ это сдѣлать, вполнѣ объясняется прилагаемыми рисунками.

Первоначальное расположеніе картъ:

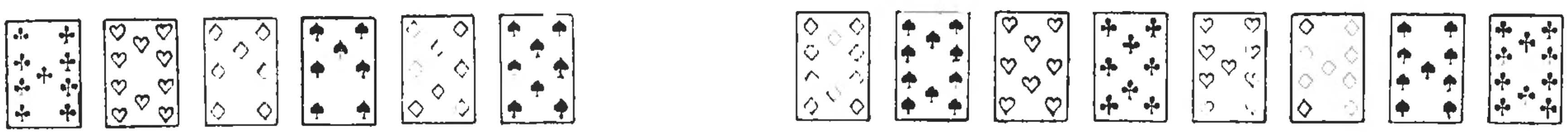


Перемѣщенія:

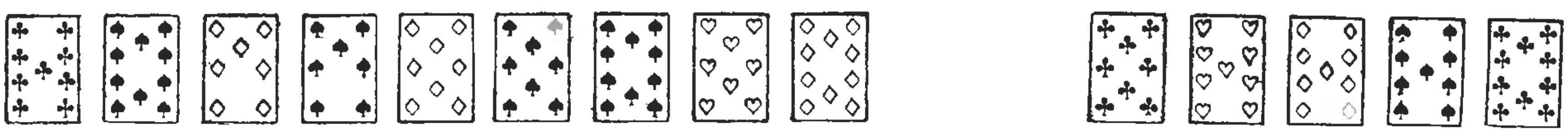
I.

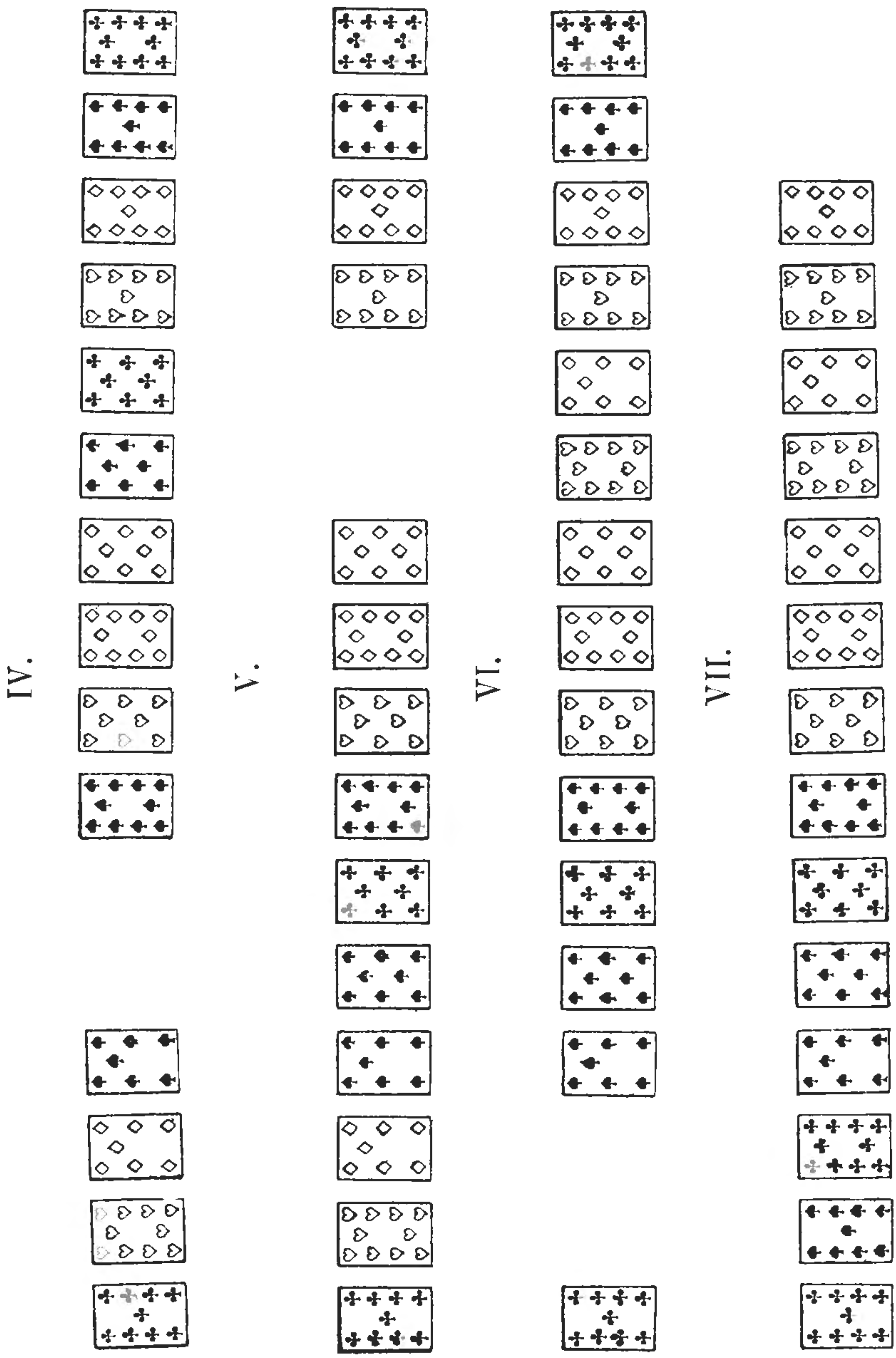


II.



III.




IV.
V.
VI.
VII.

Задача 64-я.

Обманутый хозяинъ.

Слѣдующая задача объ обманутомъ хозяинѣ и воришкѣ-слугѣ сопровождается математическимъ доказательствомъ. Кому не охота разбираться въ этомъ доказальствѣ, или кто не можетъ этого сдѣлать,—пусть пока смѣло опускаетъ его. Но въ самой задачѣ, какъ и въ слѣдующей, совѣтуемъ разобраться и придумать еще подобныя же задачи.

Хозяинъ устроилъ въ своемъ погребѣ шкафъ въ формѣ квадрата съ 9-ю отдѣленіями. Среднее (внутри) отдѣленіе онъ оставилъ свободнымъ для пустыхъ бутылокъ, а въ остальныхъ расположилъ 60 бутылокъ вина такъ, что въ каждомъ угловомъ отдѣленіи ихъ было по 6, а въ каждомъ изъ среднихъ по 9. Такимъ образомъ, на каждой сторонѣ квадрата было по 21 бутылкѣ. Слуга подмѣтилъ, что хозяинъ провѣряетъ число бутылокъ только такъ, что считаетъ бутылки по сторонамъ квадрата и наблюдаетъ только за тѣмъ, чтобы на каждой сторонѣ квадрата было по 21 бутылкѣ. Тогда слуга унесъ сначала четыре бутылки, а остальныя разставилъ такъ, что вновь получилось по 21 на каждой сторонѣ. Хозяинъ пересчиталъ бутылки своимъ обычнымъ способомъ и подумалъ, что бутылокъ остается то же число, и что слуга только переставилъ ихъ. Слуга воспользовался оплошностью хозяина и снова унесъ 4 бутылки, разставивъ остальныя такъ, что на каждой сторонѣ квадрата выходило опять по 21 бутылкѣ. Такъ онъ повторялъ, пока было возможно. Спрашивается, сколько разъ онъ бралъ бутылки, и сколько всего бутылокъ онъ унесъ?

Рѣшеніе.

Слуга бралъ себѣ по бутылкѣ изъ каждаго средняго отдѣленія и изъ тѣхъ же отдѣленій, чтобы обмануть хозяина, послѣ каждаго воровства прибавлялъ по бутылкѣ въ угловыя отдѣленія. Такъ онъ воровалъ 4 раза по 4 бутылки, а всего, значитъ, унесъ 16 бутылокъ. Все это очевидно изъ нижеслѣдующаго (фиг. 22):

Первопачальное расположеніе бутылокъ.

6	9	6
9		9
6	9	6

1-я кража.

7	7	7
7		7
7	7	7

2-я кража.

8	5	8
5		5
8	5	8

3-я кража.

9	3	9
3		3
9	3	9

4-я кража.

10	1	10
1		1
10	1	10

Фиг. 22.

Замѣчаніе. Математически вопросъ рязъясняется такъ:

Обозначаемъ черезъ a число бутылокъ въ каждой угловой клѣткѣ (въ нашемъ случаѣ $a = 6$) и черезъ b число бутылокъ въ каждой изъ среднихъ клѣтокъ (въ нашемъ случаѣ $b = 9$). Тогда, очевидно, число всѣхъ бутылокъ есть $4(a + b)$, или это же число можно написать такъ:

$$2(a + b + a) + 2b.$$

Итакъ, если сдѣлать такъ, чтобы сумма $a + b + a$ оставалась постоянной, то число бутылокъ будетъ уменьшаться съ уменьшеніемъ b; и если b уменьшится на два, то общее число бутылокъ уменьшится на 4. Слѣдовательно, всякій разъ, какъ слуга бралъ по 2 бутылки изъ каждой средней клѣтки, что составляло 8 бутылокъ,—онъ ставилъ по одной бутылкѣ въ каждую изъ угловыхъ клѣтокъ, а 4 остальныхъ бутылки уносилъ. Въ каждой изъ среднихъ клѣтокъ было первоначально 9 бутылокъ. Слѣдовательно, подобныя операціи слуга могъ произвести 4 раза и унести всего 16 бутылокъ.

Мы предположили, что, таская бутылки, недобросовѣстный слуга сохранялъ, все же, симметрію первоначальнаго распредѣленія бутылокъ. Но можно предположить и какое угодно несимметричное распредѣленіе бутылокъ, лишь бы число ихъ S, считая по каждой сторонѣ квадрата, оставалось безъ измѣненія. Пусть, въ самомъ дѣлѣ, числа бутылокъ въ угловыхъ клѣткахъ будутъ m, n, p, q (фиг. 19). Тогда число всѣхъ бутылокъ есть

$$4S - (m + n + p + q).$$

Эта сумма уменьшится, если увеличится $m + n + p + q$, но S остается постояннымъ. Напр. отнимемъ отъ f и k по x бу-

m	f	n
k		g
p	h	q

Фиг. 23.

тылокъ, т. е. всего $2x$ бутылокъ. Если теперь x прибавить къ m, то S не измѣнится, и въ то же время число всѣхъ бутылокъ будетъ уменьшено на x. То же самое получится, если взять по x бутылокъ отъ f и g и прибавить x бутылокъ къ n и т. д.

Точно также, если отнять по x отъ каждаго изъ чиселъ f, g, h, k и прибавить по x къ m и q, или къ n и p, или по $\frac{x}{2}$ къ каждому изъ чиселъ m, n, p и q, то S не измѣнится, и въ то же время число всѣхъ бутылокъ уменьшится на $2x$. Итакъ, можно по желанію уменьшать число бутылокъ на 1, 2, 3, 4 и т. д.

Задача 65-я.

Слѣпая хозяйка.

Служанки находятся въ восьми комнаткахъ, которыя расположены такъ: 4 комнатки по угламъ квадратнаго дортуара, а 4 остальныхъ въ серединѣ каждой стороны. Слѣпая хозяйка провѣряетъ число служанокъ, находящихся въ трехъ комнатахъ каждой стороны дортуара, и находитъ всюду 9 служанокъ. Черезъ нѣсколько времени она провѣряетъ, всѣ ли въ комнаткахъ. Считаетъ опять и находитъ въ каждомъ ряду комнатъ опять то же число служанокъ, несмотря на то, что къ нимъ пришли въ гости 4 подруги. Черезъ нѣсколько времени, опять тѣмъ же порядкомъ, что и раньше, хозяйка провѣрятъ число служанокъ и находитъ опять по 9 въ каждомъ ряду, хотя 4 служанки вышли вмѣстѣ съ 4-мя подругами. Какимъ образомъ служанки обманывали хозяйку?

Рѣшеніе.

Отвѣтъ легко видѣть изъ разсмотрѣнія слѣдующихъ фигуръ

1-е посѣщеніе хозяйки.

3	3	3
3		3
3	3	3

2-е посѣщеніе хозяйки.

2	5	2
5		5
2	5	2

3-е посѣщеніе хозяйки.

4	1	4
1		1
4	1	4

Можно допустить еще, что 4 служанки, возвратившись, каждая привела съ собой еще двухъ подругъ, а хозяйка, считая по своему, все же не замѣтила бы обмана, если бы всѣ расположились такъ (фиг. 24):

1	7	1
7		7
1	7	1

Фиг. 24.

Задача 66-я.

Разстановка буквъ.

Въ квадратѣ, состоящемъ изъ 16 клѣтокъ, разставить четыре буквы такъ, чтобы въ каждомъ горизонтальномъ ряду, въ каждомъ вертикальномъ ряду и въ каждой діагонали встрѣчалась только одна буква. Какъ велико число рѣшеній этой задачи при одинаковыхъ и разныхъ буквахъ?

Рѣшеніе.

Прежде всего положимъ, что буквы одинаковы. Поставимъ одну букву въ какой-нибудь клѣткѣ первой діагонали. Съ этой

a			
		a	
			a
	a		

Фиг. 25.

клѣткою во второй діагонали есть одна клѣтка, стоящая съ ней въ томъ же горизонтальномъ ряду, и одна въ томъ же вертикальномъ ряду; въ одной изъ остальныхъ двухъ клѣтокъ второй діагонали можно поставить вторую букву. Далѣе, легко замѣтить, что двухъ буквъ, поставленныхъ на діагоналяхъ, вполнѣ достаточно, чтобы, сообразно условіямъ задачи, разставить двѣ остальныя буквы. Итакъ, если дано двѣ буквы въ одной діагонали, то задача имѣетъ два рѣшенія; но такъ какъ первую букву можно поставить въ какой угодно клѣткѣ первой діагонали, то задача имѣетъ $2 \times 4 = 8$ рѣшеній. Всѣ восемь рѣшеній получаются изъ одного поворачиваніемъ и переворачиваніемъ квадрата. Такъ какъ четыре различныхъ буквы можно перемѣщать 24-мя способами, то при четырехъ разныхъ буквахъ задача имѣетъ $8 \times 24 = 192$ рѣшенія.

Задача 67-я.

Данъ квадратъ, состоящій изъ 16 клѣтокъ. Требуется разставить въ клѣткахъ этого квадрата по четыре раза каждую изъ четырехъ буквъ a, b, c, d такимъ образомъ, чтобы въ каждомъ горизонтальномъ и вертикальномъ ряду и въ каждой діагонали не было одинаковыхъ буквъ. Какъ велико число рѣшеній этой задачи?

Рѣшеніе.

Прежде всего ясно, что буквы, стоящія въ угловыхъ клѣткахъ, должны быть различны. Поэтому поставимъ въ произвольномъ порядкѣ четыре буквы по угламъ.

a			b
c			d

Фиг. 26.

Въ среднихъ клѣткахъ діагонали, содержащей *a* и *d* должны стоять буквы *b* и *c*, но онѣ могутъ быть поставлены въ одномъ или въ другомъ порядкѣ:

a			b
	b		
		c	
c			d

Фиг. 27.

a			b
	c		
		b	
c			d

Легко видѣть теперь, что разставленныхъ буквъ вполнѣ достаточно, чтобы сообразно даннымъ условіямъ разставить буквы въ остальныхъ клѣткахъ. Прежде всего разставимъ буквы въ крайнихъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ рядахъ, а потомъ во второй діагонали. Такимъ образомъ получимъ:

a	c	d	b
d	b	a	c
b	d	c	a
c	a	b	d

Фиг. 28.

a	d	c	b
b	c	d	a
d	a	b	c
c	b	a	d

Итакъ, если разставлены буквы въ угловыхъ клѣткахъ, то задача имѣетъ два рѣшенія. Но такъ какъ четыре буквы можно перемѣщать 24-мя способами, то задача имѣетъ $24 \times 2 = 48$ рѣшеній.

Замѣтимъ здѣсь, что изъ одного найденнаго квадрата поворачиваніемъ и переворачиваніемъ его можно получить еще семь подобныхъ квадратовъ.

Если мы условимся считать всѣ квадраты, полученные поворачиваніемъ одного квадрата, за одно рѣшеніе, то при этомъ условіи задача имѣетъ $48 : 8 = 6$ рѣшеній.

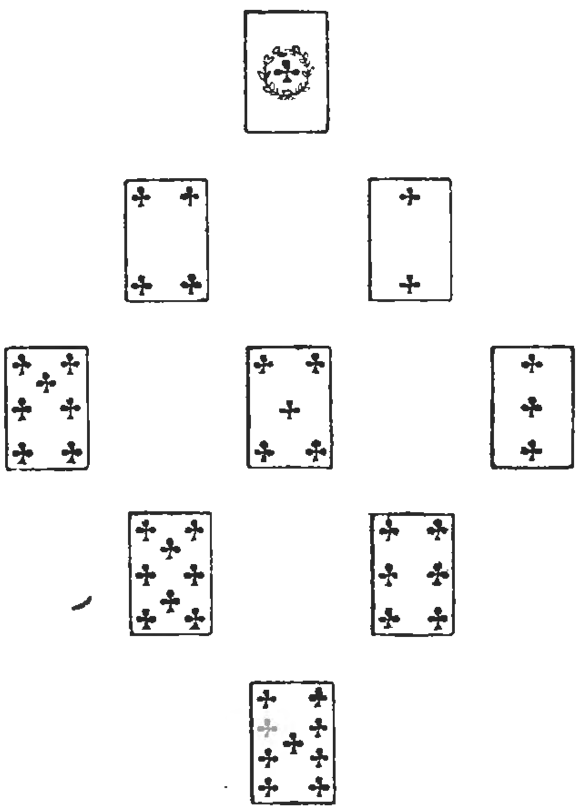
Задача 68-я.

Волшебный квадратъ изъ 9 клѣтокъ.

Расположить въ три ряда девять картъ, отъ туза (принимаемаго за 1) до девятки такъ, чтобы число очковъ каждаго ряда, считая справа налѣво (горизонтально), сверху внизъ (вертикально) и съ угла на уголъ (по діагоналямъ), было одинаково.

Рѣшеніе.

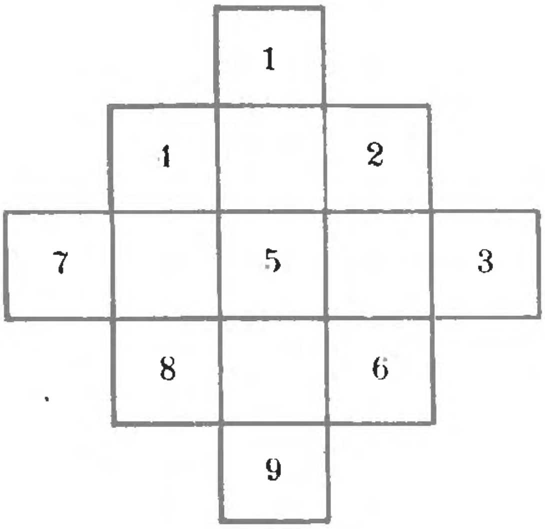
Расположимъ сначала карты такъ (фиг. 29):



Фиг. 29.

Вслѣдъ затѣмъ кладемъ на незанятыя мѣста: туза подъ пятеркой, девятку—надъ пятеркой, тройку—слѣва, а семерку—справа отъ той же пятерки и получимъ требуемое распредѣленіе картъ.

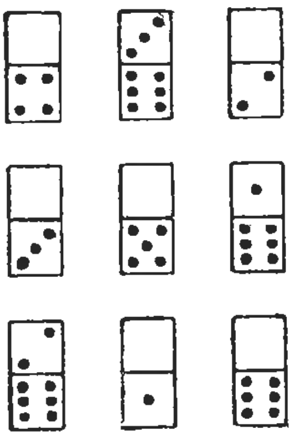
Если означимъ карты соотвѣтственными цифрами отъ 1 до 9, то это рѣшеніе изобразится такъ:



Фиг. 30.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Фиг. 31.

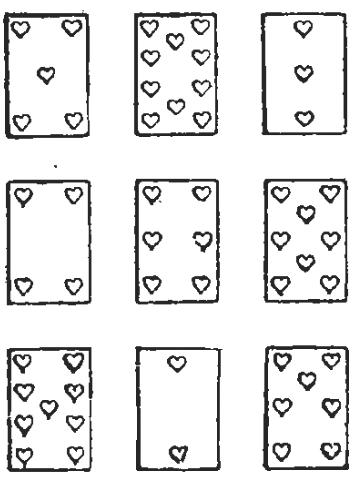


Фиг. 32.

Квадратъ, полученный на фиг. 31-ой, и есть то, что называется *волшебнымъ квадратомъ* изъ 9-ти клѣтокъ. Въ немъ сумма чиселъ каждаго ряда, столбца и діагонали = 15.

Можно также для этой задачи, вмѣсто картъ, взять соотвѣтствующія домино. Получимъ фиг. 32.

Если въ данномъ примѣрѣ съ картами замѣнить тузъ двойкой, двойку—тройкой, тройку — четверкой и т. д., наконецъ девятку—десяткой, то получимъ тоже волшебный квадратъ:



Фиг. 33.

или тоже числами:

5	10	3
4	6	8
9	2	7

Фиг. 33а.

Въ каждомъ ряду, столбцѣ и діагонали этого послѣдняго квадрата заключается 18 очковъ, или единицъ.

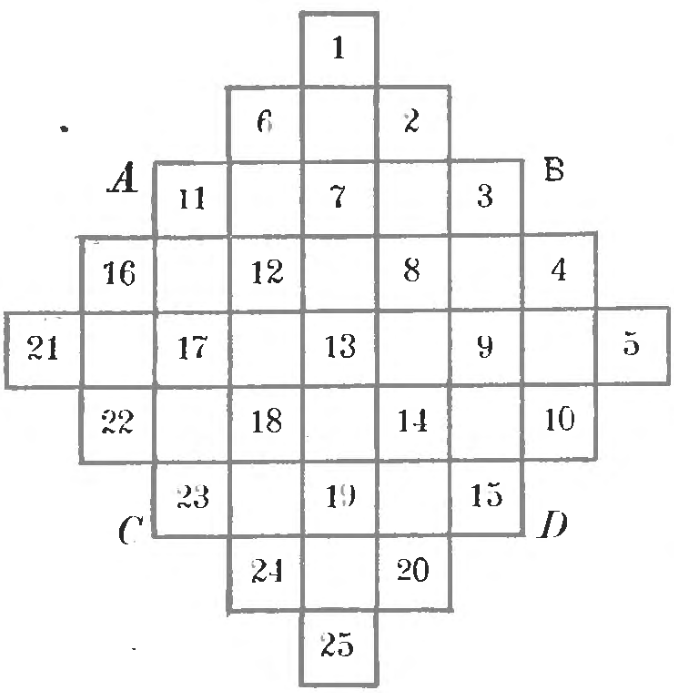
Задача 69-я.

Въ 25 клѣтокъ.

Расположить 25 чиселъ, начиная отъ 1 до 25, въ видѣ квадрата съ 25 клѣтками такъ, чтобы въ каждомъ вертикальномъ, въ каждомъ горизонтальномъ ряду и съ угла на уголъ (по обѣимъ діагоналямъ) получались одинаковыя суммы.

Рѣшеніе.

Строимъ квадратъ съ 25 клѣтками *ABCD* (фиг. 35), затѣмъ на всѣхъ его сторонахъ строимъ еще по 4 клѣтки, чтобы получилась фиг. 34-я. Вслѣдъ затѣмъ въ полученной фигурѣ располагаемъ косыми рядами числа въ послѣдовательномъ порядкѣ, какъ указано на фиг. 34-й. Перенеся, затѣмъ, числа, стоящія въ клѣткахъ внѣ квадрата *ABCD*, соотвѣтственно на расположенныя дальше отъ нихъ свободныя клѣтки въ тѣхъ же столбцахъ или рядахъ, получимъ требуемое (фиг. 35).



Фиг. 34.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Фиг. 35.

Задача 70-я.

Раскладка картъ.

Взято по четыре «старшихъ» карты каждой масти (тузъ, король, дама и валетъ каждой масти). Требуется эти шестнадцать картъ расположить въ видѣ четыреугольника такъ, чтобы въ каждомъ горизонтальномъ ряду, въ каждомъ вертикальномъ ряду и въ каждой діагонали находились въ какомъ-либо порядкѣ тузъ, король, дама, валетъ и притомъ разныхъ мастей.

Рѣшеніе.

Рѣшеніе изобразится такой таблицей:

Тузъ червей.	Король трефъ.	Дама бубенъ.	Валетъ пикъ.
Валетъ бубенъ.	Дама пикъ.	Король червей.	Тузъ трефъ.
Король пикъ.	Тузъ бубенъ.	Валетъ трефъ.	Дама червей.
Дама трефъ.	Валетъ червей.	Тузъ пикъ.	Король бубенъ.

Фиг. 36.

Придти къ этому рѣшенію можно путемъ слѣдующихъ разсужденій:

Обозначимъ черезъ A, B, C и D названія картъ независимо отъ ихъ мастей, а черезъ a, b, c, d ихъ масти. Задача сводится къ тому, чтобы въ 16 клѣткахъ квадрата разсмѣстить четыре большихъ буквы A, B, C, D такъ, чтобы всѣ четыре находились въ каждомъ горизонтальномъ и вертикальномъ ряду и въ каждой діагонали, и то же самое сдѣлать съ малыми буквами a, b, c, d такъ, чтобы онѣ комбинировались съ большими всѣми возможными способами.

Расположимъ сначала большія буквы, что̀ не представляетъ затрудненій. Расположимъ ихъ по алфавитному порядку въ первой горизонтали и заполнимъ діагональ, идущую слѣва направо,—это можетъ быть сдѣлано только двумя способами: или *A*, *C*, *D*, *B*, или *A*, *D*, *B*, *C*. Примемъ первое расположеніе и заполнимъ затѣмъ остальныя клѣтки квадрата, что можетъ быть сдѣлано уже только единственнымъ путемъ. Получимъ квадратъ фиг. 37.

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Фиг. 37.

Aa	Bd	Cb	Dc
Db	Cc	Ba	Ad
Bc	Ab	Dd	Ca
Cd	Da	Ac	Bb

Фиг. 38.

Чтобы размѣстить малыя буквы, мы сначала приставимъ къ каждой діагональной буквѣ *A*, *C*, *D*, *B* по малой буквѣ того же наименованія, а затѣмъ будемъ брать по двѣ клѣтки, равноотстоящихъ по обѣ стороны отъ этой діагонали, и около каждой большой буквы поставимъ малую одноименную съ большой буквой другой соотвѣтствующей клѣтки. Получимъ квадратъ, изображенный фиг. 38-й.

Если замѣнимъ теперь *A*, *B*, *C*, *D* соотвѣтственно черезъ **туза, короля, даму, валета,** а буквамъ *a*, *b*, *c*, *d* придадимъ значеніе мастей: **черви, бубны, пики, трефы,**- получимъ вышеприведенное рѣшеніе задачи (фиг. 36).

Большія буквы можно замѣнить **тузомъ, королемъ, дамой и валетомъ** 24-мя различными способами, точно также 4 маленькія буквы можно замѣнить 4-мя мастями 24-мя способами. Такъ что можно получить $24 \times 24 = 576$ **буквенныхъ** рѣшеній этой задачи.

Замѣчаніе. Нѣкоторыя изъ вышеприведенныхъ задачъ представляютъ примѣры вопросовъ, относящихся къ общей теоріи такъ называемыхъ **волшебныхъ квадратовъ**. Задачей о составленіи волшебныхъ квадратовъ математики занимались еще въ глубокой древности, и происхожденіе этой задачи приписывается индусамъ. Несмотря, однако, на свою древность, нельзя сказать, чтобы и по настоящее время вопросъ о волшебныхъ квадратахъ былъ разрѣшенъ и исчерпанъ вполнѣ. Зависитъ это болѣе всего отъ того, что теорія волшебныхъ квадратовъ стоитъ особнякомъ и мало пока имѣетъ связи съ остальной математикой. Для желающихъ болѣе основательно познакомиться съ этой интересной областью математики ниже мы даемъ нѣкоторыя общія положенія теоріи волшебныхъ квадратовъ въ превосходномъ и краткомъ изложеніи проф. В. П. Ермакова («Журналъ Элем. Математики». Т. I. 1885 г.), позволивъ себѣ сдѣлать въ этихъ статьяхъ кое-какія сокращенія.

Свѣдѣнія по исторіи и литературѣ вопроса читатель можетъ найти также у Gunther'a: «Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der matematischen Wissenschaften», кар. IV и др., G. Arnoux: «Arithmétique graphique; les espaces arithmétiques hypermagiques».

Домино.

Историческія справки.

Предполагаютъ, что игра домино перешла къ намъ отъ индусовъ или грековъ. Дѣйствительно, простота этой игры наводитъ на мысль, что она придумана еще въ очень отдаленныя времена, на первыхъ ступеняхъ цивилизаціи. Что касается названія самой игры, то филологи находятся относительно этого въ разногласіи. Иные ищутъ его корня въ древнехананейскихъ нарѣчіяхъ, но вѣротнѣе всего такое предположеніе. Игра въ домино въ прежнія времена была дозволена въ монастыряхъ и религіозныхъ общинахъ. Но всякое дѣло начиналось тамъ, какъ извѣстно, съ восхваленія имени Божія. И когда игрокъ выставлялъ первую кость, онъ произносилъ: «*benedicamus Domino*» (бенедикамусъ Домино), т. е. «восхвалимъ Господа». Или произносилось «*Domino gratias*» (Домино гратіасъ), т. е. «благодареніе Господу». Отсюда и получилось въ сокращеніи просто слово *Домино*.

Опредѣленія.

Домино суть прямоугольныя продолговатыя плитки, ширина которыхъ обыкновенно вдвое больше толщины, а длина вдвое больше ширины. Дѣлаются онѣ чаще всего изъ кости, или дерева, а также и изъ металла; нижняя часть ихъ обыкновенно черная, а верхняя бѣлая и раздѣлена на два квадратика, на которыхъ обозначены точки или очки домино. Чаще всего игра состоитъ изъ двадцати восьми домино, образующихъ всѣ комбинаціи по два изъ семи чиселъ:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Каждое домино опредѣляется числомъ очковъ, заключающихся на двухъ его квадратахъ, и въ зависимости отъ этого называется двумя числами, наприм., *нуль и нуль* обозначаетъ пустое, бѣлое домино, на квадратахъ котораго нѣтъ очковъ; *нуль и одинъ*—домино, на одномъ изъ квадратовъ котораго есть одно очко, а другой пустъ; *четыре и пять* домино, на одномъ квадратѣ котораго стоитъ 4 очка, а на другомъ пять, и т. д. Сообразно съ этимъ мы будемъ обозначать домино **двумя цифрами,** показывающими число очковъ на каждомъ квадратикѣ и поставленными рядомъ. Такъ, домино *нуль и нуль* будемъ обозначать **00,** домино *четыре и шесть* обозначимъ черезъ 46 и т. д. Расположимъ всю игру изъ 28 домино въ такомъ порядкѣ (фиг. 39):

06	16	26	36	46	56	66
05	15	25	35	45	55	
04	14	24	34	44		
03	13	23	33			
02	12	22				
01	11					
00						

Фиг. 39.

Если взять сумму всѣхъ очковъ, содержащихся во всей игрѣ домино, то окажется 168 очковъ.

Среднее.

Всѣхъ очковъ на всѣхъ 28 плиткахъ, какъ сказано выше, 168. Если это послѣднее число подѣлить на число домино (плитокъ), то получимъ *среднее* каждой «кости», или плитки. Это среднее, какъ видимъ, равно *шести*, и оно останется такимъ же, если мы отбросимъ всѣ *двойняшки*, т. е. двойныя домино, какъ **66, 55, 44**, и т. д. Это можно провѣрить непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, всѣхъ двойняшекъ въ игрѣ семь (**66, 55, 44, 33, 22, 11, 00**), а число заключающихся въ нихъ очковъ оказывается равнымъ 42, ($6+6+5+5+4+4+3+3+2+2+1+1=42$). Вычитая число 42 изъ общаго числа очковъ всей игры 168, получаемъ 126, дѣля же это послѣднее число на число оставшихся домино, т. е. на 21 ($28-7=21$), получаемъ опять *среднее* 6.

Есть игры домино съ большимъ количествомъ костей. Такъ можно составить игру, гдѣ наибольшая кость будетъ **77**, и тогда всѣхъ костей будетъ 36. Въ игрѣ, гдѣ наибольшее должно будетъ **88**, всѣхъ домино будетъ 45 и т. д. И во всѣхъ такихъ играхъ относительно ихъ *средняго* будетъ наблюдаться одна и та же послѣдовательность. Среднее для игры, въ которой наибольшее домино есть **77**, будетъ *семь*, среднее для игры домино съ наибольшей костью **88**, будетъ *восемь* и т. д.

Дополнительныя домино.

Если возьмемъ 2 домино (обыкновенной игры, гдѣ наивысшая кость 6) такихъ, что числа очковъ квадратиковъ въ одномъ дополняютъ числа очковъ квадратиковъ въ другомъ до шести, то такія домино называются *дополнительными* другъ друга. Такъ, наприм., домино **23** и **43** будутъ дополнительными другъ другу, какъ и домино: **12** и **54**, **14** и **52** и т. д.

Въ разсматриваемой нами обыкновенной игрѣ изъ 28 костей есть четыре кости: **06**, **15**, **24** и **33**, которыя *дополняютъ сами себя*, т. е. не имѣютъ другихъ дополнительныхъ.

Если взять для всей игры всѣ ея дополнительныя домино, то получимъ ту же игру только въ другомъ порядкѣ.

Въ чемъ состоитъ игра.

Игра проста и состоитъ, въ общихъ чертахъ, въ слѣдующемъ. Два, или болѣе, игрока дѣлятъ между собой кости игры. Чаще всего играютъ *съ прикупомъ*, т. е. берутъ по извѣстному равному числу костей, а остальныя кости лицевой частью внизъ лежатъ въ сторонѣ. 1-й игрокъ выкладываетъ на столъ какое-либо свое домино, 2-й по порядку долженъ приставить къ любому изъ квадратиковъ этого домино такую свою кость, квадратикъ которой имѣлъ бы столько же очковъ, сколько находится на квадратикѣ выставленной кости. Получается фигура изъ двухъ костей, оканчивающаяся двумя квадратиками. Къ любому изъ этихъ квадратиковъ слѣдующій игрокъ долженъ приложить свою соотвѣтствующую кость и т. д. по порядку. Если у кого не находится соотвѣтствующаго домино, онъ беретъ кости изъ *прикупа* до тѣхъ поръ, пока не найдетъ тамъ нужнаго домино, которое и приставляетъ къ образованной на столѣ фигурѣ. Выигравшимъ считается тотъ, кто первый успѣетъ положить всѣ имѣющіяся у него домино. Основы игры, какъ видимъ, весьма просты и несложны, а между тѣмъ съ помощью домино можно получить весьма поучительныя и полезныя развлеченія.

Забава-задача.

Переверните лицомъ внизъ всѣ кости игры домино. Одну же изъ костей тихонько спрячьте, наблюдая только, чтобы эта кость не была двойная. Затѣмъ предложите кому-либо взять любую изъ лежащихъ на столѣ костей, посмотрѣть ее и положить на столъ вверхъ лицевой стороной, а вслѣдъ затѣмъ пусть онъ же раскроетъ и всѣ остальныя домино и расположитъ ихъ вмѣстѣ съ первой открытой костью по правиламъ игры, но такъ, чтобы не замкнуть игры и не брать въ расчетъ двойняшекъ, или же ввести ихъ въ игру внѣ очереди. Получится нѣкоторое расположеніе костей всей игры домино: *и вы сможете заранѣе предсказать числа очковъ*, которыя получатся на концахъ этого расположенія. Эти числа будутъ какъ разъ тѣ, которыя находятся на квадратикахъ раньше спрятаннаго вами домино.

Въ самомъ дѣлѣ, если расположить всѣ домино одно за другимъ въ порядкѣ, требуемомъ привилами игры, т.-е. чтобы послѣдовательныя кости соприкасались квадратиками съ одинаковымъ числомъ очковъ, то игра всегда окончится такимъ же числомъ очковъ, какимъ она началась. Если, скажемъ, расположеніе костей начинается квадратикомъ съ 5-ю очками, то оно и окончится 5-ю, при условіи, конечно, не закрывать игру, пока не будутъ положены всѣ кости. Итакъ, всѣ 28 костей игры можно расположить, соблюдая правила игры, по кругу, и если изъ этого круга отнять, напримѣръ, кость *три и пять*, то ясно, что расположеніе остальныхъ 27 костей начнется съ одной стороны *пятью*, а окончится *тремя*.

Этой небольшой забавой вы можете очень заинтересовать тѣхъ, кто не знаетъ, въ чемъ дѣло,—особенно, если показать видъ, что вы будто бы производите въ умѣ самыя сложныя вычисленія. Слѣдуетъ также при повтореніи забавы по возможности ее разнообразить и видоизмѣнять.

Задача 71-я.

Наибольшій ударъ.

Допустимъ, что играютъ въ домино четверо и что между ними подѣлены всѣ кости поровну, т.-е. при началѣ игры у каждаго игрока есть по *семи* костей. При этомъ могутъ получаться такія интересныя расположенія костей, при которыхъ первый игрокъ *обязательно выигрываетъ* въ то время, какъ второй и третій игроки не смогутъ положить ни одной кости. Пусть, напр., у перваго игрока будутъ четыре первыхъ нуля и три послѣднихъ туза, т.-е. такія кости:

00, 01, 02, 03, 14, 15, 16,

а у четвертаго игрока пусть будутъ остальные тузы и нули, т. е. кости:

11, 12, 12, 13, 04, 05, 06

и еще какая-либо кость. Остальныя домино подѣлены между 2-мъ и 3-мъ игроками. Въ такомъ случаѣ первый игрокъ необходимо выигрываетъ послѣ того, какъ будутъ положены всѣ 13 указанныхъ выше домино, а 2-й и 3-й игроки не смогутъ поставить ни одного изъ своихъ домино.

Въ самомъ дѣлѣ, первый игрокъ начинаетъ игру и ставитъ **60**. Второй и третій досадуютъ, ибо у нихъ нѣтъ подходящей кости. Тогда четвертый игрокъ можетъ положить любую изъ трехъ костей **04**, **05** или **06**. Но первый приложитъ въ отвѣтъ **41**, **51** или **61**. Второй и третій опять не смогутъ ничего положить, а четвертый поставитъ **11**, или **12**, или **13**, на что первый можетъ отвѣтить костями **10**, **20**, **30** и т. д. Такимъ образомъ онъ положитъ всѣ свои кости въ то время, какъ у второго и третьяго игрока останутся всѣ ихъ домино, а у четвертаго одно. Сколько же выигрываетъ первый? Сумма очковъ въ положенныхъ 13-ти домино равна, какъ легко видѣть, 48, а число очковъ всей игры есть 168. Значитъ первый игрокъ выигрываетъ $168 - 48 = 120$ очковъ въ одну игру. Это *наибольшій ударъ!*

Можно составить и другія партіи, подобныя предыдущей. Для этого стоитъ только нули и единицы замѣнить соотвѣтственно домино съ иными количествами очковъ 2, 3, 4, 5 или 6. Число подобныхъ партій, слѣдовательно, равно числу всѣхъ простыхъ сочетаній изъ семи элементовъ по 2, т.-е. равно 21. Ясно, что вѣроятность получить такую партію *случайно*—весьма мала. Кромѣ того всѣ остальныя партіи, за исключеніемъ приведенной выше, дадутъ меньшее, чѣмъ 120, число выигранныхъ очковъ.

Задача 71-я.

Расположить семь единицъ и еще двѣ кости домино въ квадратѣ съ девятью клѣтками такъ, чтобы сумма очковъ домино, считая ихъ по столбцамъ (вертикально), по строкамъ (горизонтально) и по діагоналямъ была постоянно одна и та же.

Рѣшеніе.

Къ семи костямъ съ единицами прибавляютъ еще **26** и **36**, и тогда не трудно составить слѣдующій волшебный квадратъ (фиг. 40). Сумма очковъ въ его столбцахъ, строкахъ и діагоналяхъ равна 15.

26	**01**	**15**
12	**14**	**16**
13	**36**	**11**

Фиг. 40.

16	**00**	**05**
02	**04**	**06**
03	**26**	**01**

Фиг. 41.

Если здѣсь единицу замѣнить соотвѣтственно бѣлыми, а **26** и **36** костями **16** и **26**, то получимъ квадратъ (фиг. **41**) съ постоянной суммой, равной 12.

Точно также, если въ квадратѣ (фиг. 36) замѣнимъ домино съ единицами костями съ двойками, а **26** и **36** черезъ **36** и **46**, то получимъ новый волшебный квадратъ, содержащій семь костей съ двойками, въ которомъ постоянная сумма равна 18. Можно также построить съ помощью домино волшебные квадраты, содержащіе всѣ тройки или четверки съ двумя другими соотвѣтственно подобранными костями. Постоянныя суммы этихъ квадратовъ будутъ 20 и 24. Вообще при упражненіяхъ съ волшебными квадратами домино даютъ обильный матеріалъ.

Задача 73-я.

Взяты всѣ нули и единицы домино, и къ нимъ прибавлены еще три подходящія кости. Расположить шестнадцать костей на 16 клѣткахъ квадрата такъ, чтобы сумма очковъ, считаемыхъ вертикально, горизонтально и по обѣимъ діагоналямъ, была одинакова.

Рѣшеніе.

Къ нулямъ и единицамъ надо прибавить еще **25, 26** и **36**, получимъ квадратъ (фиг. 42):

26	12	13	03
14	02	36	11
05	15	01	06
00	25	04	16

Фиг. 42.

Сумма очковъ каждаго столбца, каждой строки и каждой діагонали этого квадрата равна 18. Полученный квадратъ отличается тѣмъ интереснымъ свойствомъ, что въ немъ можно первый столбецъ передвинуть на 4-е мѣсто, или верхнюю строку перенести внизъ, и опять-таки получится волшебный квадратъ, отличающійся свойствомъ постоянства суммы.

Если въ квадратѣ фиг. 42-й вмѣсто нулей и единицъ взять всѣ кости, содержащія больше на очко или два, или 3, то опять получимъ волшебные квадраты съ постоянными суммами 22, 26 и 30. Если въ полученныхъ квадратахъ замѣнить каждую кость ея *дополнительной*, то опять получимъ волшебные квадраты.

Изъ 25 домино можно составить такой волшебный квадратъ (фиг. 43):

35	03	06	22	51
11	32	61	45	40
62	46	00	21	24
01	31	52	63	33
44	41	34	02	05

Фиг. 43.

Сумма очковъ, считая по столбцамъ, строкамъ и діагоналямъ этого квадрата, равна 27.

Перенося въ этомъ квадратѣ столбцы или строки, мы опять будемъ получать волшебные квадраты, подобно тому, какъ получали ихъ изъ квадрата съ 16-ю клѣтками (фиг. 42).

Задача 74-я.

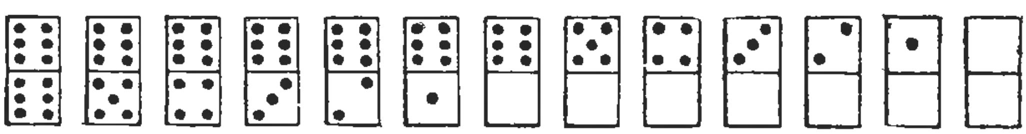
Вѣрная отгадка.

Возьмите двадцать пять костей домино, переверните ихъ лицомъ внизъ и положите рядомъ одна за другой такъ, чтобы они соприкасались болѣе длинными сторонами. Вслѣдъ затѣмъ объявите, что вы отвернетесь, или даже уйдете въ другую комнату, а кто-либо пусть съ праваго конца перемѣститъ на лѣвый какое-либо число домино (не болѣе, однако, двѣнадцати). Возвратившись въ комнату, вы тотчасъ открываете кость, число очковъ которой непремѣнно укажетъ число перемѣщенныхъ въ ваше отсутствіе домино.

Рѣшеніе.

Эта задача, очевидно, есть видоизмѣненіе задачи 2-й (стр. 22).

Все дѣло въ томъ, чтобы, приготовляясь къ «угадыванію» и переворачивая домино лицомъ внизъ, тринадцать изъ нихъ расположить въ такомъ послѣдовательномъ порядкѣ (фиг. 44):



Фиг. 44.

Рядъ этихъ домино, какъ видимъ, представляетъ рядъ первыхъ двѣнадцати чиселъ да еще нуль:

12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0;

и числа эти идутъ въ убывающемъ порядкѣ. Справа за этимъ рядомъ домино вы помѣщаете (тоже лицомъ внизъ) еще 12 домино въ какомъ угодно порядкѣ. Если теперь вы уйдете въ другую комнату, а кто-либо перемѣститъ справа налѣво нѣсколько (менѣе 12-ти) домино и приставитъ ихъ такъ, чтобы они шли за 66 влѣво, то, воротясь, вы откроете **среднюю** (т. е. 13-ю по счету, считая слѣва) кость въ ряду и на открытомъ домино будетъ какъ разъ столько очковъ, сколько было перемѣщено въ ваше отсутствіе костей.

Почему такъ, нетрудно разобраться. Когда вы уходите въ другую комнату, то вы знаете, что въ серединѣ ряда перевернутыхъ изнанкой вверхъ домино лежитъ бѣлое домино, т. е. 00. Представимъ теперь, что перемѣщено въ ваше отсутствіе съ праваго конца на лѣвый одно домино. Какое тогда домино придется въ серединѣ? Очевидно, **01**, т. е. единица. А если перемѣстить 2 кости, то въ серединѣ придется домино съ 2-мя очками; если перемѣстить три кости, то въ серединѣ будетъ кость съ тремя очками и т. д. Словомъ, среднее домино обязательно и вѣрно покажетъ вамъ число перемѣщенныхъ справа на лѣвый конецъ домино (Перемѣщаются, какъ надо всегда помнить, не болѣе 12-ти костей).

Игру можно продолжать. Опять уйти въ другую комнату и попросить кого-либо перемѣстить съ лѣваго конца на правый еще нѣсколько домино. Возвратясь въ комнату, вы тоже откроете домино, указывающее число перемѣщенныхъ костей. Оно будетъ теперь вправо отъ средняго, и, чтобы найти его, надо за этимъ среднимъ домино отсчитать по порядку ровнехонько столько, сколько костей было перемѣщено въ предыдущій разъ.

Упражненія съ кускомъ бумаги.

Врядъ ли кто изъ нашихъ читателей не умѣетъ самъ изъ квадратнаго куска бумаги получить «пѣтушка», лодочку, кораблик̆ъ, коробочку и т. д. Достигается это путемъ разнообразнаго перегибанія и складыванія бумажнаго квадрата. Полученные при этомъ сгибы (складки) позволяютъ придавать взятому куску бумаги ту или иную желаемую форму. Сейчасъ мы убѣдимся, что съ помощью перегибанія бумаги можно устраивать не однѣ только забавныя или интересныя игрушки, но и получить наглядное представленіе о многихъ фигурахъ на плоскости, а также объ ихъ свойствахъ. Кусокъ обыкновенной бѣлой (а еще лучше—цвѣтной) бумаги да перочинный ножикъ для разглаживанія или удаленія ненужныхъ частей могутъ оказаться прекраснымъ пособіемъ для усвоенія началъ геометріи. Считаемъ долгомъ обратить вниманіе читателя на книгу Сундара Рау (Sundara Row): «Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги» [1]), гдѣ этотъ вопросъ разработанъ съ достаточной полнотой и занимательностью. Здѣсь мы приводимъ изъ указанной книги только нѣсколько начальныхъ упражненій, которыя будутъ полезнымъ введеніемъ и дополненіемъ къ предлагаемымъ дальше задачамъ на разрѣзываніе и переложеніе фигуръ.

[1]) Есть въ переводѣ на русскій языкъ. Книгоиздательство «Mathesis».

Плоскость.—Прямоугольникъ.—Квадратъ.

На ровномъ столѣ лежитъ кусокъ неизмятой гладкой бумаги. Верхняя сторона этой бумаги есть плоская поверхность, или просто—плоскость. Нижняя сторона бумаги, касающаяся стола, есть тоже плоскость. Эти плоскости, или плоскія поверхности, раздѣлены веществомъ бумаги. Но вещество это очень тонко, поэтому другія стороны бумаги не представляютъ замѣтной поверхности, а на практикѣ мы считаемъ ихъ просто линіями. Такимъ образомъ, обѣ плоскія поверхности бумаги, хотя и различны, но неотдѣлимы другъ отъ друга.

Допустимъ, что у насъ есть кусокъ бумаги неправильной формы (см. фиг. 45). Страница лежащей передъ нами книги имѣетъ форму такъ называемаго *прямоугольника*. Зададимся задачей:

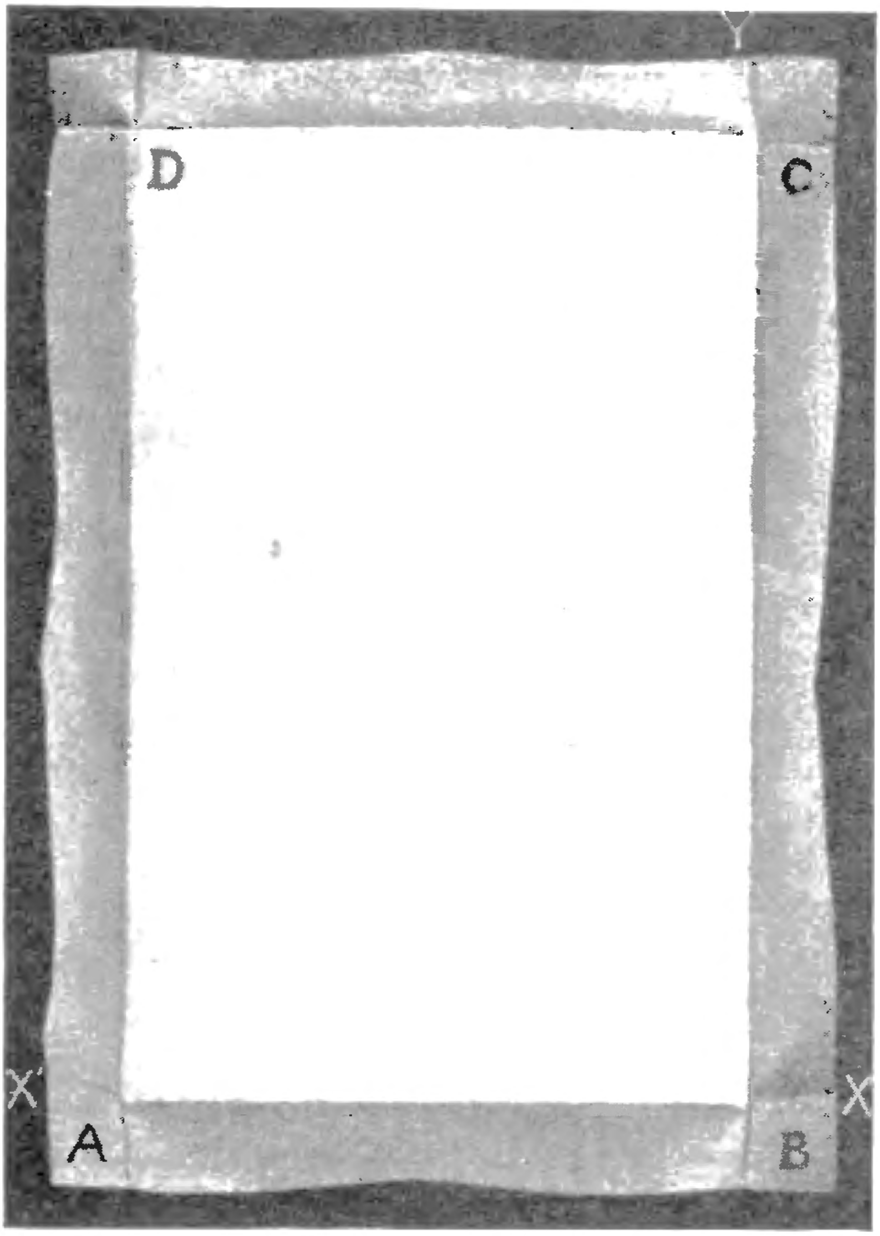
Задача 75-я.

Куску бумаги неправильной формы дать форму прямоугольника.

Рѣшеніе.

Положите кусокъ бумаги неправильной формы на столъ и сдѣлайте сгибъ близъ края. Пусть полученный при этомъ сгибъ будетъ XX'. Это прямая линія. Проведите ножомъ по сгибу и отдѣлите меньшую часть куска. Такимъ образомъ вы получили прямолинейный край. Подобно предыдущему, согните бумагу по линіи BY такъ, чтобы прямолинейный край XX' накладывался аккуратно самъ на себя. Развернувъ затѣмъ бумагу, мы убѣдимся, что сгибъ BY идетъ подъ *прямымъ угломъ* къ краю XX'; и наложеніе показываетъ, что уголъ YBX' равенъ углу YBX, и что каждый изъ этихъ угловъ равенъ угламъ страницы. Какъ раньше, проведите ножомъ по второй складкѣ и удалите ненужную часть.

Повторяя указанный пріемъ, вы получите края CD и DA. Наложеніе докажетъ, что углы при A, B, C и D прямые и равны другъ другу, и что стороны BC и CD соотвѣтственно равны DA и AB. Итакъ, полученный кусокъ бумаги $ABCD$ (фиг. 45) имѣетъ форму, подобную страницѣ этой книги. Его можно даже сдѣлать равнымъ этой страницѣ, если взять достаточно большой кусокъ бумаги и отмѣрить AB и BC такъ, чтобы онѣ были равны сторонамъ страницы.



Фиг. 45.

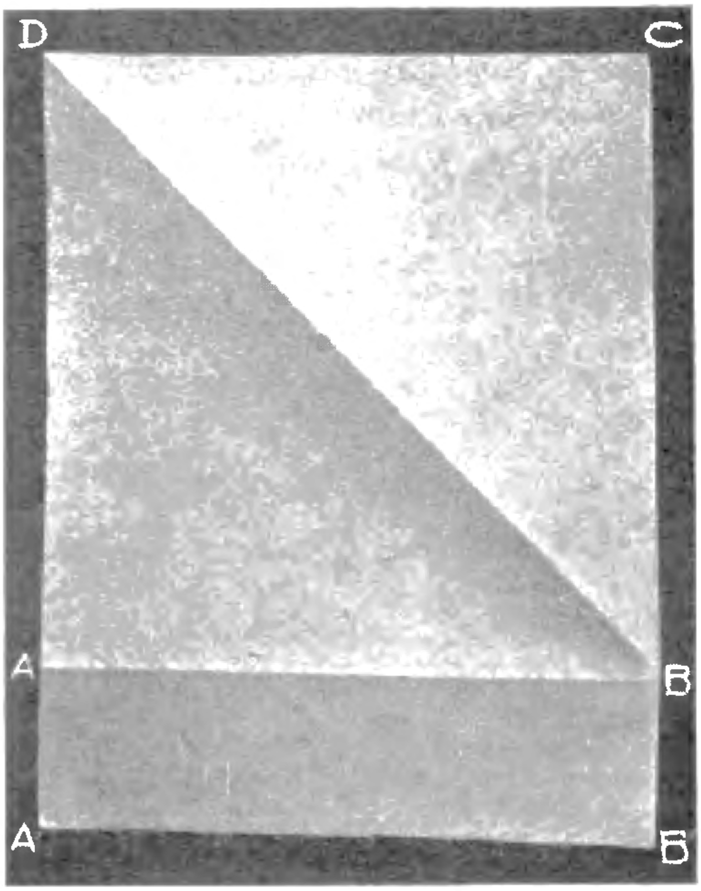
Полученная фигура, какъ мы уже говорили, называется *прямоугольникомъ*, и наложеніе доказываетъ слѣдующія его свойства: 1) четыре его угла всѣ прямые и равны между собой, 2) четыре же стороны не всѣ равны, но 3) двѣ болѣе длинныя стороны равны между собой, а двѣ болѣе короткія—между собой.

Задача 76-я.

Изъ прямоугольника сгибаніемъ получить квадратъ.

Рѣшеніе.

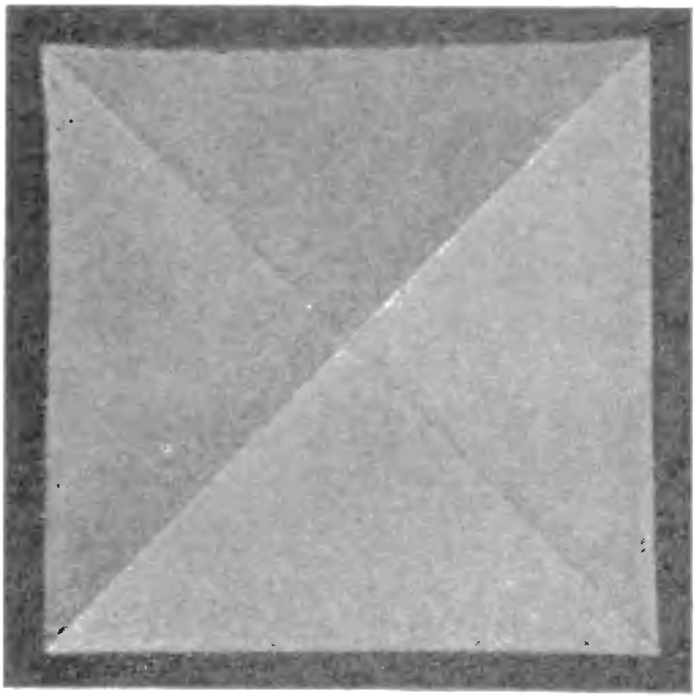
Взявъ прямоугольный кусокъ бумаги, $A'B'CD$, складываемъ его наискось такъ, чтобы одна изъ короткихъ сторонъ, напр. CD, легла на длинную DA', какъ это показано на фиг. 46-ой: Уголъ D помѣстится на краю DA' въ точкѣ A, конецъ перегиба по краю CB' получится въ точкѣ B. Сдѣлаемъ пере-



Фиг. 46.

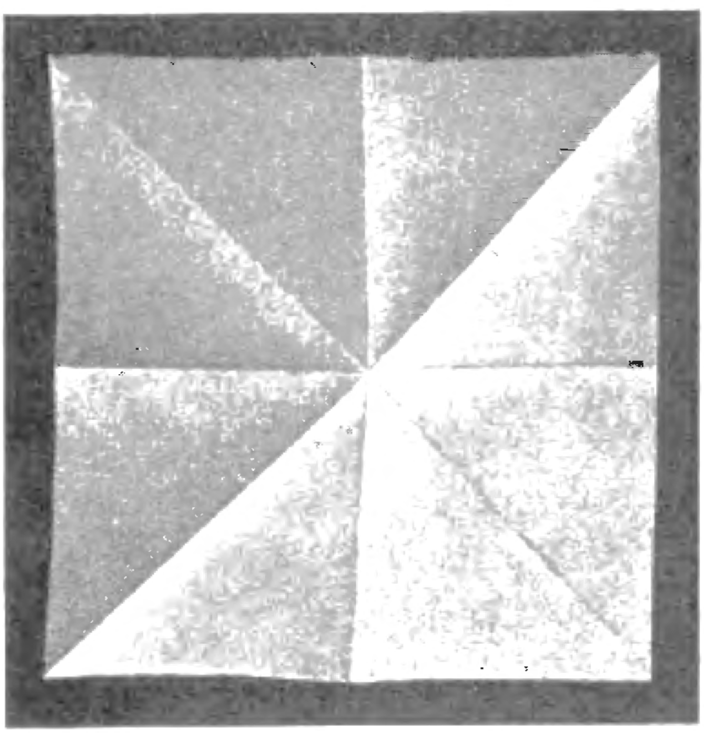
гибъ черезъ точки A и B, затѣмъ, отогнувъ, удалимъ по линіи AB часть $A'B'BA$, которая выдается. Развернувъ послѣ этого листъ, найдемъ фигуру $ABCD$, которая и есть квадратъ. Въ немъ всѣ четыре угла прямые и всѣ стороны равны.

Линія сгиба, проходящая черезъ два противоположные угла B и D, есть *діагональ* этого квадрата. Другая діагональ получается перегибомъ квадрата черезъ другую пару противоположныхъ угловъ, какъ это видно на фиг. 47. Непосредственнымъ наложеніемъ убѣждаемся, что діагонали квадрата пересѣкаются другъ съ другомъ подъ прямыми углами, и что въ



Фиг. 47.

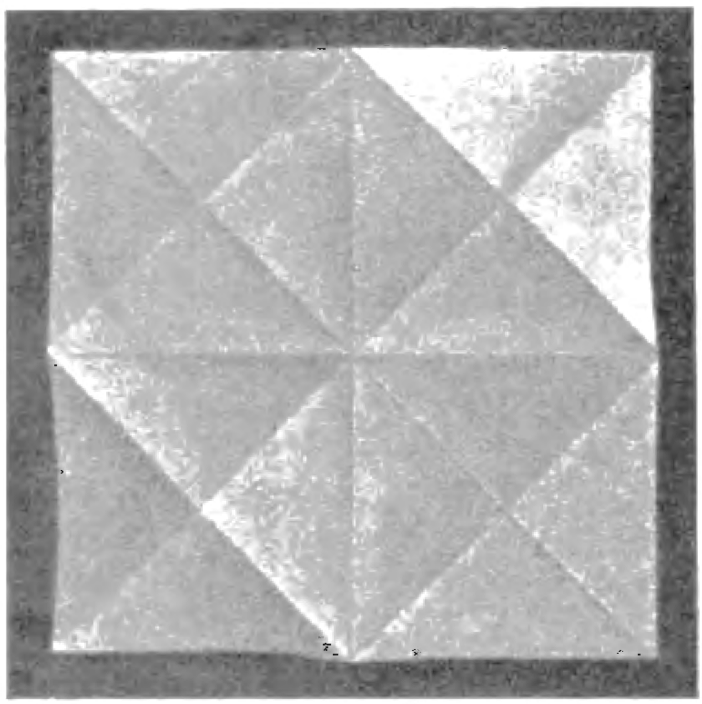
точкѣ пересѣченія онѣ взаимно дѣлятся пополамъ. Эта точка пересѣченія діагоналей квадрата называется *центромъ* квадрата.



Фиг. 48.

Каждая діагональ дѣлитъ квадратъ на два совпадающихъ при наложеніи *треугольника*, вершины которыхъ находятся въ противоположныхъ углахъ квадрата. Каждый изъ этихъ треугольниковъ имѣетъ, очевидно, по двѣ равныя стороны, т. е. эти треугольники *равнобедренные*. Кромѣ того, эти треугольники и *прямоугольные*, такъ какъ каждый изъ нихъ имѣетъ по прямому углу.

Двѣ діагонали, какъ легко видѣть, раздѣляютъ квадратъ на 4 совпадающихъ при наложеніи (т. е. равныхъ) прямоугольныхъ и равнобедренныхъ треугольника, общая вершина которыхъ находится въ центрѣ квадрата.

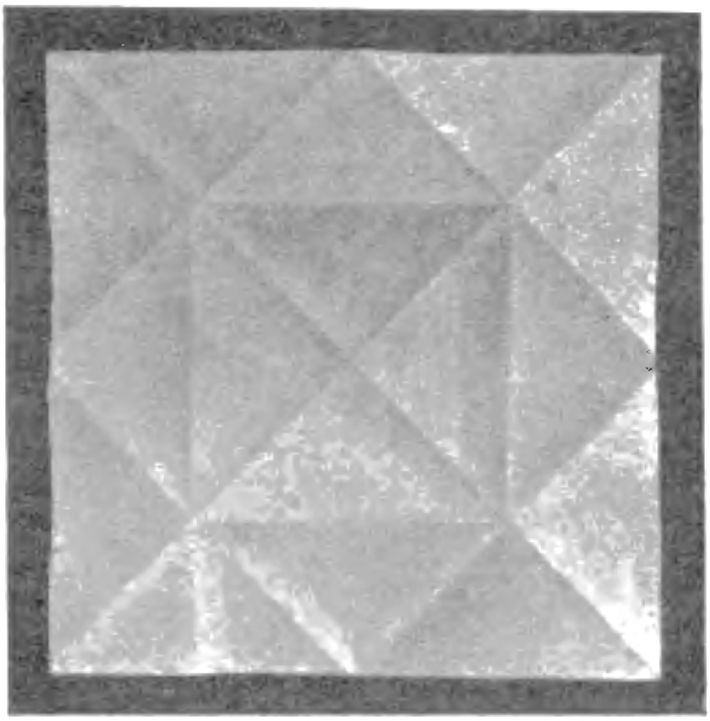


Фиг. 49.

Перегнемъ теперь нашъ бумажный квадратъ пополамъ такъ, чтобы одна сторона совпадала съ противоположною ей. Получаемъ сгибъ, проходящій черезъ центръ квадрата (фиг. 48). Линія этого сгиба обладаетъ, какъ легко убѣдиться, слѣдующими свойствами: 1) она *перпендикулярна* двумъ другимъ сторонамъ квадрата, 2) дѣлитъ эти стороны пополамъ, 3) *параллельна* двумъ первымъ сторонамъ квадрата, 4) сама дѣлится въ центрѣ квадрата пополамъ, 5) дѣлитъ квадратъ на два совпадающихъ при наложеніи прямоугольника, изъ которыхъ каждый равенъ, значитъ, половинѣ квадрата. 6) Каждый изъ этихъ прямоугольниковъ *равновеликъ* (т. е. равенъ по площади) одному изъ треугольниковъ, на которые квадратъ дѣлится діагональю.

Перегнемъ квадратъ еще разъ такъ, чтобы совпадали двѣ другія стороны. Полученный сгибъ и сдѣланный раньше дѣлятъ квадратъ на 4 совпадающихъ при наложеніи квадрата (фиг. 48).

Перегнемъ эти 4 меньшихъ квадрата черезъ углы ихъ, лежащіе посерединѣ сторонъ большого квадрата (по діагоналямъ) и получимъ квадратъ (фиг. 49), вписанный въ нашъ начальный квадратъ. Этотъ вписанный квадратъ, какъ легко убѣдиться, равенъ по площади половинѣ большого и имѣетъ тотъ же центръ.



Фиг. 50.

Соединяя середины сторонъ этого внутренняго, вписаннаго, квадрата, получимъ квадратъ, равный четверти первоначальнаго (фиг. 50). Если въ этотъ послѣдній квадратъ по предыдущему опять впишемъ квадратъ, то онъ будетъ равенъ восьмой долѣ первоначальнаго. Въ этотъ въ свою очередь можемъ вписать квадратъ, равный шестнадцатой долѣ первоначальнаго, и т. д.

Если перегнуть нашъ квадратъ какъ угодно, но такъ, чтобы сгибъ проходилъ черезъ центръ, то квадратъ раздѣлится на двѣ совпадающія при наложеніи *трапеціи*.

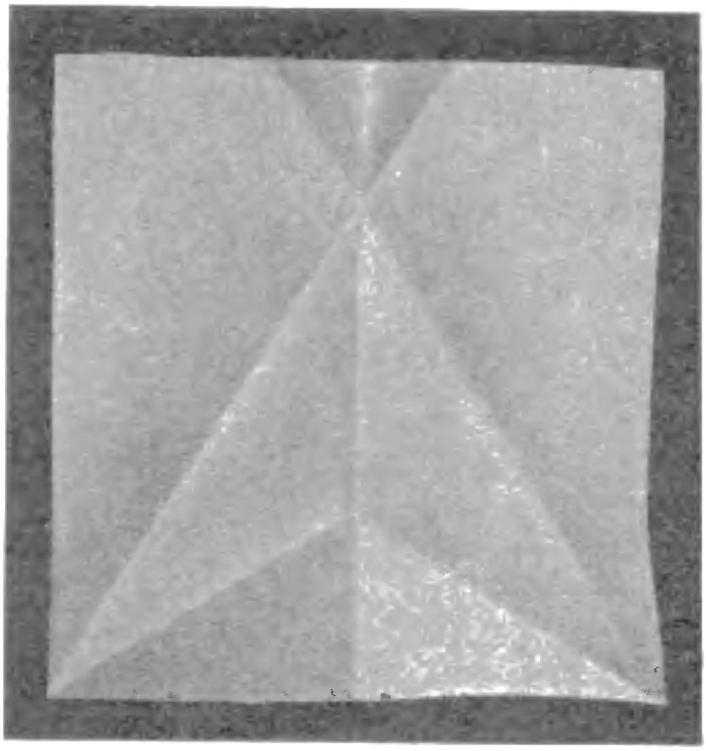
Задача 77-я.

Равнобедренный и равносторонній треугольники.

Изъ бумажнаго квадрата сгибаніемъ получить равнобедренный треугольникъ.

Рѣшеніе.

Возьмемъ квадратный кусокъ бумаги и сложимъ его вдвое такъ, чтобы противоположные края его совпадали (фиг. 51).



Фиг. 51.

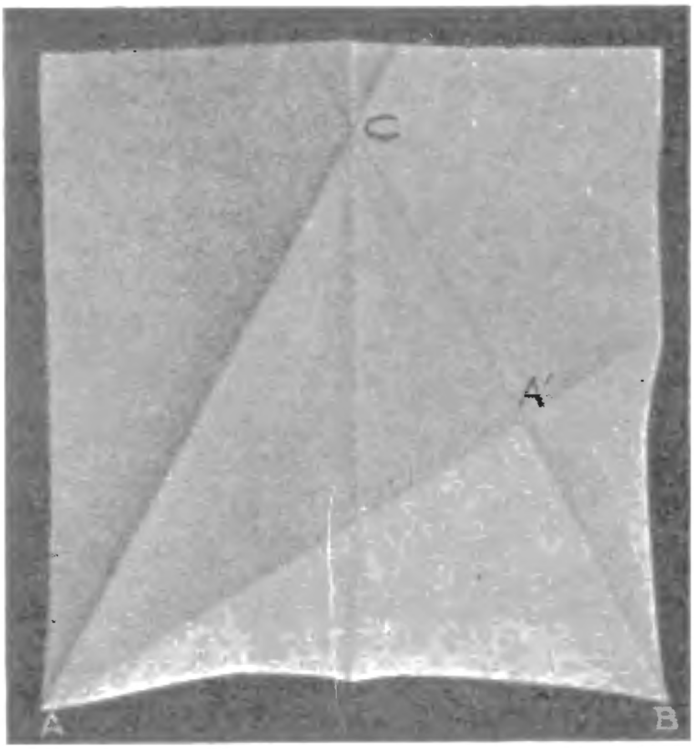
Получается сгибъ, проходящій черезъ середины двухъ другихъ сторонъ и перпендикулярный къ нимъ. На этой *средней линіи квадрата* беремъ какую-либо точку и дѣлаемъ такіе сгибы, которые проходятъ черезъ эту точку и черезъ углы квадрата, лежащіе по обѣ стороны средней линіи. Такимъ образомъ получаемъ *равнобедренный треугольникъ*, въ *основаніи* котораго лежитъ сторона квадрата. Средняя линія дѣлитъ, очевидно, равнобедренный треугольникъ на два совпадающихъ при наложеніи и прямоугольныхъ треугольника. Она же дѣлитъ уголъ при *вершинѣ* равнобедреннаго треугольника пополамъ.

Задача 78-я.

Изъ бумажнаго квадрата сбиганіемъ получить равносторонній треугольникъ.

Рѣшеніе.

Возьмемъ на средней линіи квадрата такую точку, чтобы разстоянія ея отъ двухъ угловъ квадрата были равны его сторонѣ, и сдѣлаемъ сгибы, какъ выше. Въ такомъ случаѣ получимъ равносторонній треугольникъ (фиг. 52).



Фиг. 52.

Примѣчаніе. Требуемую точку на средней линіи квадрата найти легко. Для этого надо надъ AA' (фиг. 52) повертывать основаніе AB около одного изъ его концовъ, A, пока другой его конецъ, B, не упадетъ на среднюю линію въ C.

Сложимъ равносторонній треугольникъ, накладывая каждую изъ сторонъ на основаніе. Мы получимъ такимъ образомъ три высоты этого треугольника: AA', BB', CC' (фиг. 53).

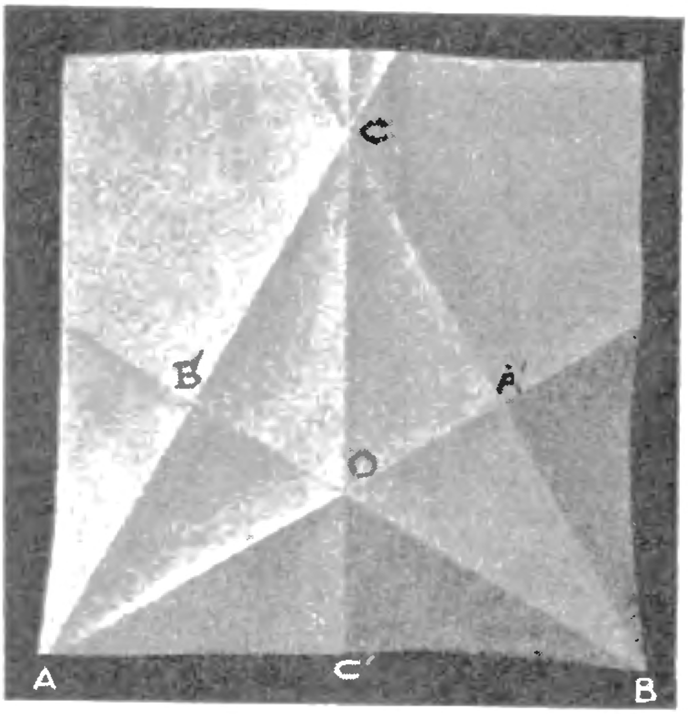
Вотъ нѣкоторыя свойства равносторонняго $\triangle$-ка, которыя можно вывести изъ разсмотрѣнія полученной нами фиг. 53:

Каждая изъ высотъ раздѣляетъ треугольникъ на два совпадающихъ при наложеніи прямоугольныхъ треугольника.

Онѣ дѣлятъ стороны пополамъ и перпендикулярны къ нимъ.

Онѣ проходятъ черезъ одну общую точку.

Пусть высоты AA' и CC' встрѣчаются въ O. Проведемъ BO и продолжимъ ее до встрѣчи съ AC въ B'. Теперь докажемъ, что BB' есть третья высота. Изъ треугольниковъ $C'OB$ и BOA' находимъ, что $OC' = OA'$ и убѣждаемся, что $OBC' = \angle A'BO$. Затѣмъ, изъ треугольниковъ ABB' и $CB'B$ слѣдуетъ,



Фиг. 53.

что $\llcorner AB'C = \llcorner BB'C$, т. е. каждый изъ нихъ есть прямой уголъ. Значитъ, BOB' есть высота равносторонняго треугольника ABC. Она также дѣлитъ AC пополамъ въ B'.

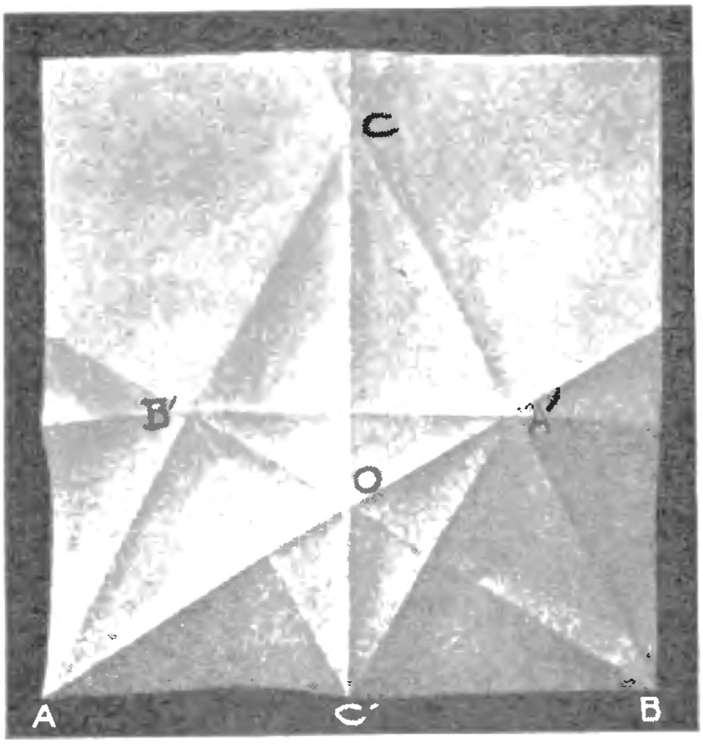
Можно, сходно съ предыдущимъ, показать, что OA, OB и OC равны и что также равны OA', OB' и OC'.

Поэтому изъ O, какъ центра, можно описать окружности, которыя пройдутъ соотвѣтственно черезъ A, B и C и черезъ A', B' и C'. Послѣдній кругъ касается сторонъ треугольника.

Равносторонній треугольникъ ABC дѣлится на шесть совпадающихъ при наложеніи прямоугольныхъ треугольниковъ, углы которыхъ при точкѣ O всѣ равны, и на три такихъ совпадающихъ при наложенiи симметричныхъ четыреугольника, что около нихъ можно описать окружности.

Треугольникъ AOC равенъ удвоенному треугольнику $A'OC$; отсюда $AO=2\,OA'$. Аналогично, $BO=2\,OB'$ и $CO=2\,OC'$. Значитъ, радiусъ круга, описаннаго около треугольника ABC, вдвое больше радiуса вписаннаго круга.

Прямой уголъ A квадрата дѣлится линiями AO и AC на три равныя части. Уголъ $BAC=\frac{2}{3}$ прямого угла. Углы $C'AO$



Фиг. 54.

и OAB' равны $\frac{1}{3}$ прямого угла каждый. То же относится къ угламъ при B и C.

Шесть угловъ при O равны $\frac{2}{3}$ прямого каждый.

Перегните бумагу по линiямъ $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ (фиг. 54). Въ такомъ случаѣ $A'B'C'$ есть равностороннiй треугольникъ. Онъ равенъ по площади четверти треугольника ABC.

$A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ параллельны соотвѣтственно AB, BC, CA и равны половинамъ ихъ.

$AC'A'B'$ есть *ромбъ*; $C'BA'B'$ и $CB'C'A'$ также.

$A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ дѣлятъ соотвѣтственныя высоты пополамъ.

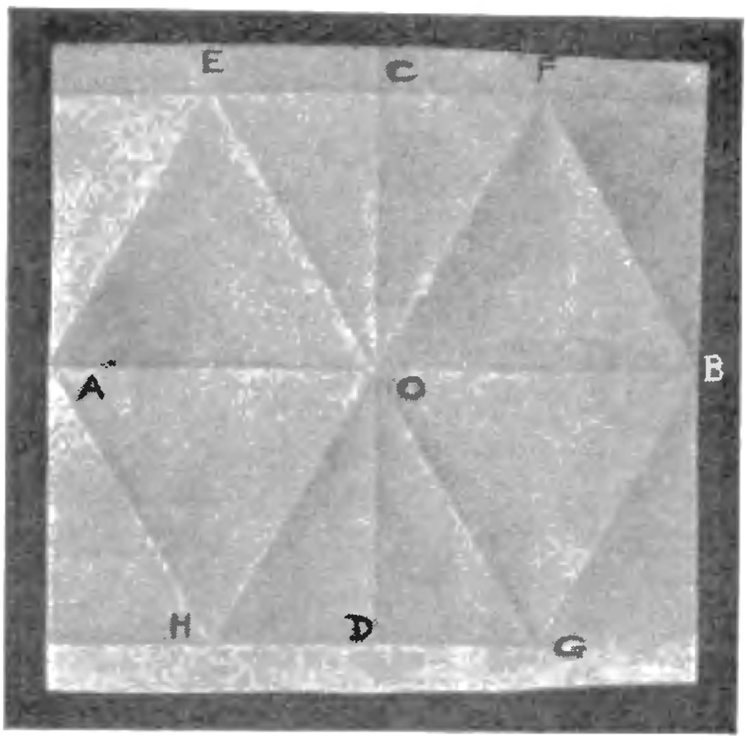
Задача 79-я.

Шестиугольникъ.

Изъ квадрата получить правильный шестиугольникъ.

Рѣшеніе.

Перегибаемъ квадратъ черезъ середины противоположныхъ сторонъ (фиг. 55). Получаемъ линіи AOB и COD. На сгибахъ



Фиг. 55.

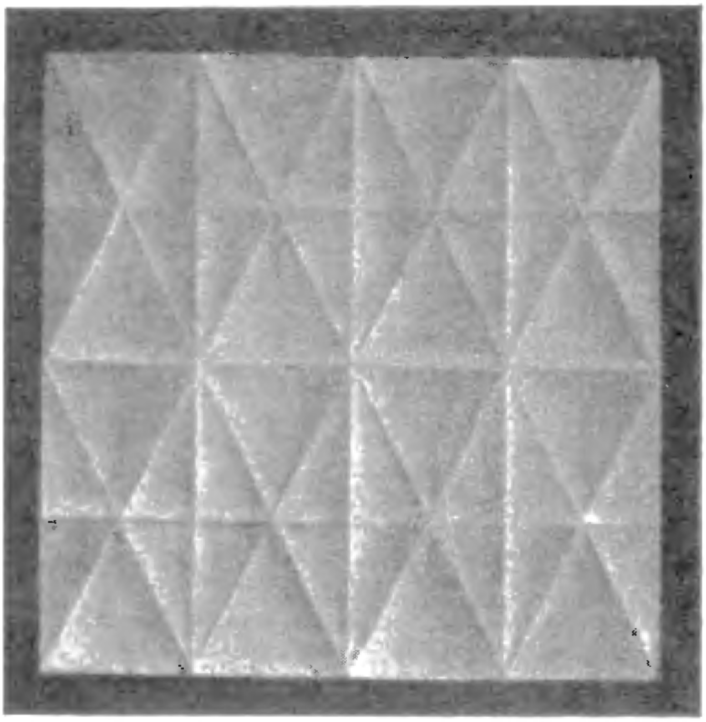
AO и OB строимъ извѣстнымъ намъ уже способомъ равносторонніе треугольники AOE, AOH, BOF, BOG.

Дѣлаемъ сгибы EF и HG.

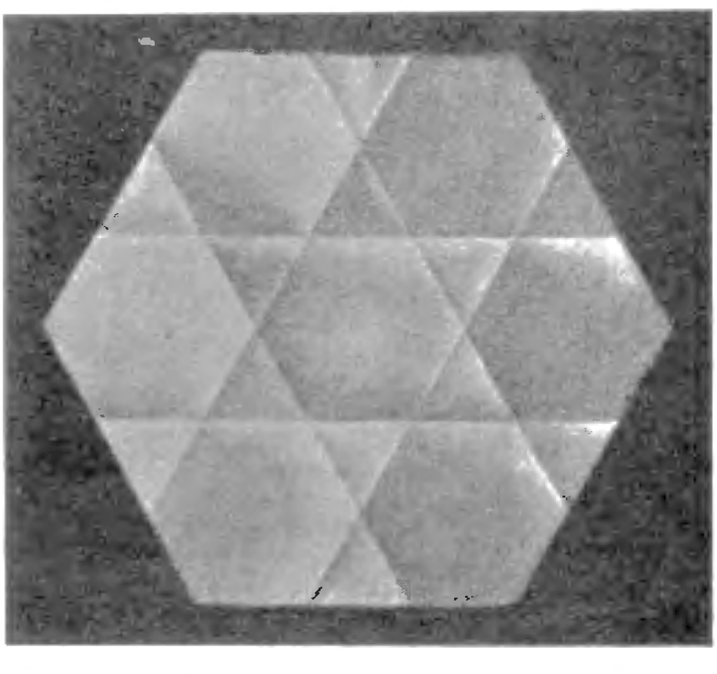
Многоугольникъ $AHGBEF$ и будетъ правильный шестиугольникъ, въ чемъ каждый безъ труда убѣдится самъ. Наибольшая ширина многоульника есть, очевидно, AB.

Фигура 56-я представляетъ образецъ орнамента изъ равностороннихъ треугольниковъ и правильныхъ шестиугольниковъ, который вы теперь легко можете построить сами.

Можно въ свою очередь раздѣлить шестиугольникъ на равные правильные шестиугольники и равносторонніе треугольники (фиг. 57), дѣлая перегебы черезъ точки, дѣлящія его стороны на три равныя части. Получается красивый симметричный орнаментъ.



Фиг. 56.



Фиг. 57.

Можно получить шестиугольникъ еще и слѣдующимъ путемъ: Возьмемъ равносторонній треугольникъ и перегнемъ его такъ, чтобы всѣ его вершины сошлись въ центрѣ.

Изъ того, что мы уже узнаемъ о равностороннемъ треугольникѣ, не трудно вывести, что сторона полученнаго шестиугольника равна $\frac{1}{3}$ стороны взятаго равносторонняго треугольника. Площадь же этого шестиугольника равна $\frac{2}{3}$ площади взятаго треугольника.

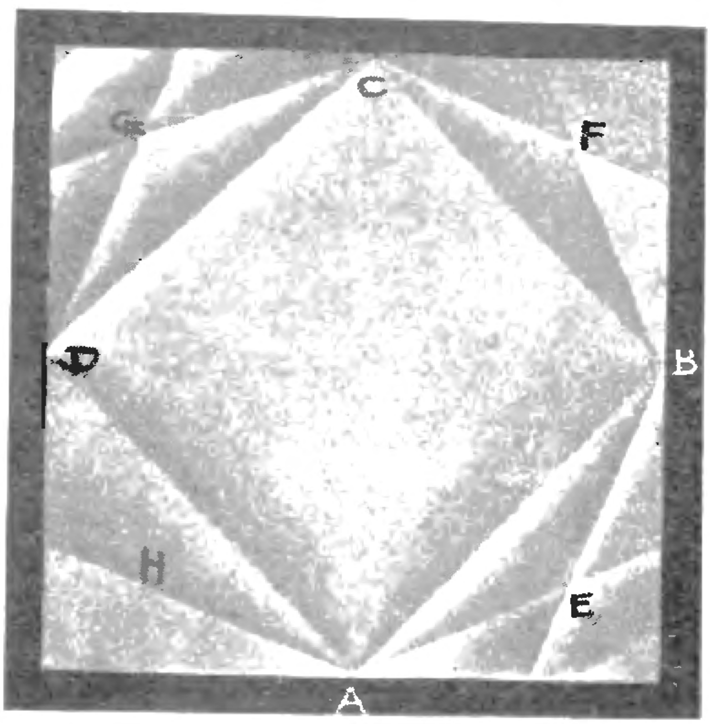
Задача 80-я.

Восьмиугольникъ.

Въ данномъ квадратѣ построить правильный восьмиугольникъ.

Рѣшеніе.

Возьмемъ квадратъ и извѣстнымъ уже намъ способомъ посредствомъ сгибовъ впишемъ въ него другой квадратъ (фиг. 58).



Фиг. 58.

Раздѣлимъ пополамъ углы между сторонами даннаго и вписаннаго квадратовъ. Пусть сгибы, равнодѣлящіе эти углы, пересѣкаются въ точкахъ E, F, G и H.

Многоугольникъ $AEBFCGDH$ и есть искомый правильный восьмиугольникъ. Дѣйствительно, треугольники ABE, BFC,

CGD и DHA въ немъ равнобедренные и при наложенiи совпадаютъ. Значитъ, стороны полученнаго восьмиугольника равны. (Сгибъ DH на фиг. 58 не сдѣланъ, но читатель легко восполнитъ его самъ).

Углы его тоже равны. Въ самомъ дѣлѣ, каждый изъ угловъ при вершинахъ E, F, G, H тѣхъ же треугольниковъ равенъ полтора раза взятому прямому углу, такъ какъ углы при основанiи этихъ треугольниковъ равны четверти прямого угла. Отсюда ясно, что и углы восьмиугольника при точкахъ A, B, C и D также равны полтора раза взятому прямому углу каждый, т. е. всѣ углы восьмиугольника равны между собой.

Сторона взятаго квадрата, a, представляетъ наибольшую ширину восьмиугольника.

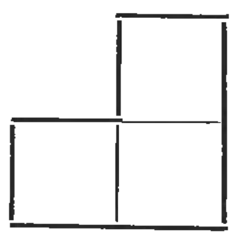
Разрѣзываніе и переложеніе фигуръ.

Призовемъ на помощь ножницы и будемъ не только перегибать, но и разрѣзывать бумагу. Такимъ путемъ придемъ ко многимъ интереснымъ и поучительнымъ задачамъ.

Задача 81-я.

Какъ вырѣзать?

Фигура состоитъ изъ трехъ равныхъ квадратовъ, расположенныхъ слѣдующимъ образомъ:

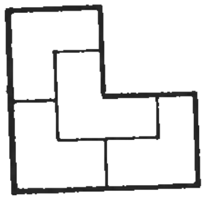


Фиг. 59.

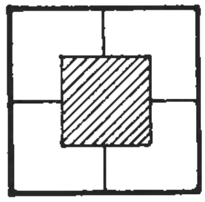
Вырѣзать изъ этой фигуры такую часть, чтобы, приложивъ ее къ оставшейся части, получить внутри полный квадратъ.

Рѣшеніе.

При рѣшеніи этой задачи можно пользоваться листомъ картона или бумаги (лучше всего графленой на квадратныя клѣтки. Какъ сдѣлать требуемую вырѣзку, видно изъ нижеслѣдующихъ фигуръ (60 и 61):



Фиг. 60.



Фиг. 61.

Не трудно видѣть также, что всѣ четыре полученныя изъ трехъ квадратовъ фигуры при наложенiи одна на другую совпадаютъ.

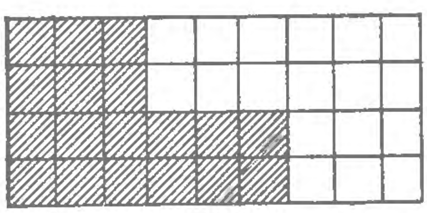
Задача 82-я.

Изъ прямоугольника квадратъ.

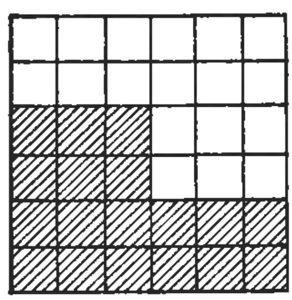
Кусокъ бумаги или картона имѣетъ форму прямоугольника, одна сторона котораго равна 4-мъ, а другая 9-ти единицамъ длины. Требуется разрѣзать этотъ прямоугольникъ на двѣ равныя части такъ, чтобы, сложивъ ихъ извѣстнымъ образомъ, получить квадратъ.

Рѣшенiе.

Рѣшенiе вопроса видно изъ слѣдующихъ фигуръ (62 и 63):



Фиг. 62.



Фиг. 63.

Какъ ни проста и ни легка эта задача, но она представляетъ геометрическое толкованiе того, что $4 \times 9 = 6 \times 6$. Кромѣ того, подобнаго рода задачи прекрасно подготовляютъ къ болѣе сложнымъ задачамъ о превращенiи однѣхъ фигуръ въ другiя посредствомъ разрѣзыванiя ихъ на части и переложенiя этихъ частей. Желающiй можетъ самъ придумать еще много подобныхъ задачъ.

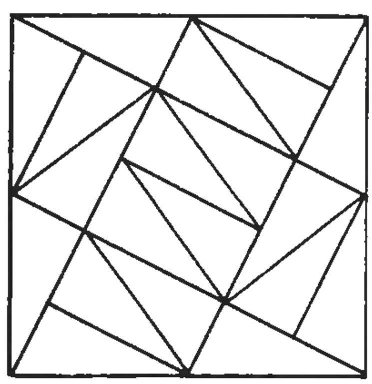
Задача 83-я.

Квадратъ на 20 равныхъ треугольниковъ.

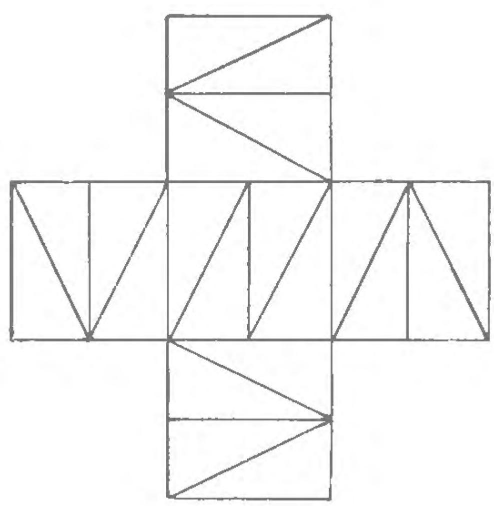
Разрѣзать квадратный кусокъ бумаги на 20 равныхъ треугольниковъ.

Рѣшеніе.

1) Середины сторонъ квадрата соединимъ прямыми съ противоположными вершинами квадрата; 2) изъ серединъ сторонъ квадрата проведемъ линіи, параллельныя проведеннымъ линіямъ соединенія до встрѣчъ съ другими линіями соединенія, 3) въ полученныхъ прямоугольникахъ проведемъ діагонали, и тогда данный квадратъ будетъ разбитъ на 20 **прямоугольныхъ** треугольниковъ, какъ можно видѣть изъ приложеннаго рисунка (фиг. 64).



Фиг. 64.



Фиг. 65.

Не трудно показать также въ полученныхъ треугольникахъ, что стороны, обнимающія прямой уголъ, таковы, что одна вдвое больше другой (катетъ равенъ половинѣ другого катета).

Полученные 20 треугольниковъ можно расположить въ пять равныхъ квадратовъ, и эти квадраты расположить въ видѣ креста (фиг. 65).

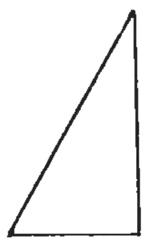
Огромное значеніе въ математикѣ имѣетъ слѣдующая задача, на которую совѣтуемъ обратить особое вниманіе:

Задача 84-я.

Теорема Пиѳагора.

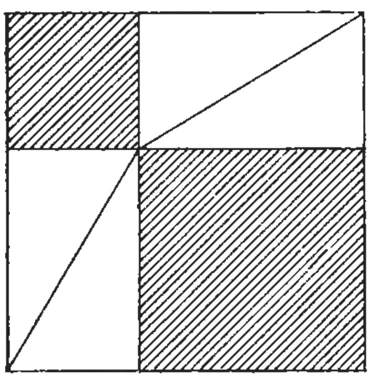
Показать, что квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на его катетахъ.

Нарисуемъ 2 равныхъ квадрата (фиг. 67 и 68), стороны которыхъ равны суммѣ обоихъ катетовъ даннаго треугольника (фиг. 66).

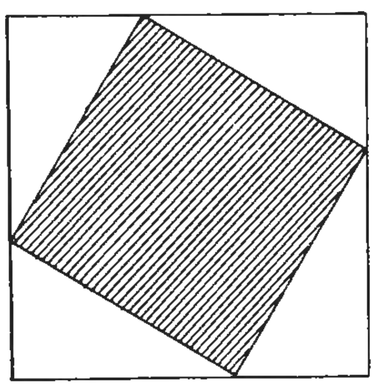


Фиг. 66.

Вслѣдъ затѣмъ въ полученныхъ нами квадратахъ произведемъ построенія, указанныя на фиг. 67 и 68.



Фиг. 67.

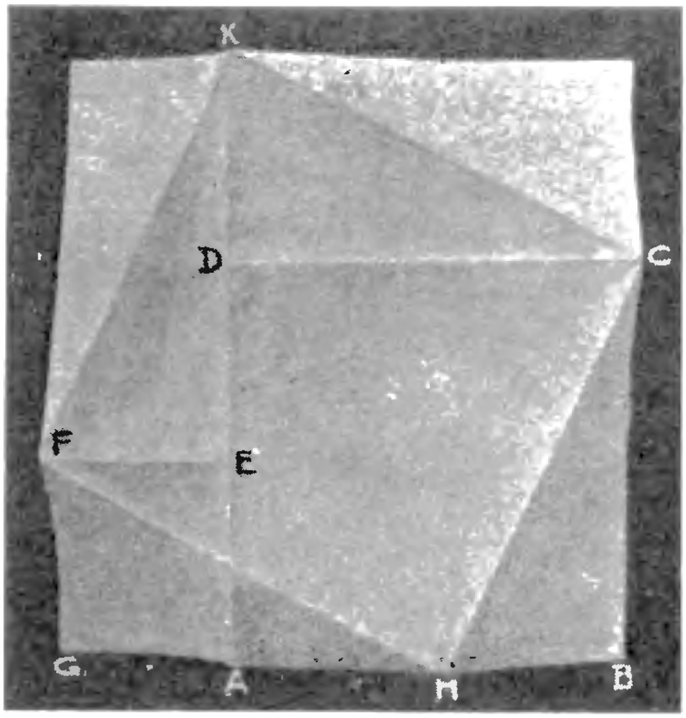


Фиг. 68.

Здѣсь отъ каждаго изъ равныхъ квадратовъ мы отнимаемъ по 4 равныхъ треугольника. Если отнимать отъ равныхъ величинъ поровну, то и остатки получаются равные. Эти остатки на фиг. 67 и 68 заштрихованы; но на фиг. 67-й получаются два квадрата, построенныхъ на катетахъ даннаго треугольника, а на фиг. 68-ой—квадратъ, построенный на гипотенузѣ; и сумма первыхъ двухъ квадратовъ равна, слѣдовательно, второму.

Мы доказали, такимъ образомъ, знаменитую теорему Пиѳагора.

Другое доказательство той же знаменитой теоремы найдемъ, если на взятомъ бумажномъ квадратѣ сдѣлаемъ сгибы, какъ указано на фиг. 69-ой.



Фиг. 69.

Здѣсь *FGH* есть прямоугольный треугольникъ, и квадратъ, построенный на *FH*, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на *FG* и *GH*.

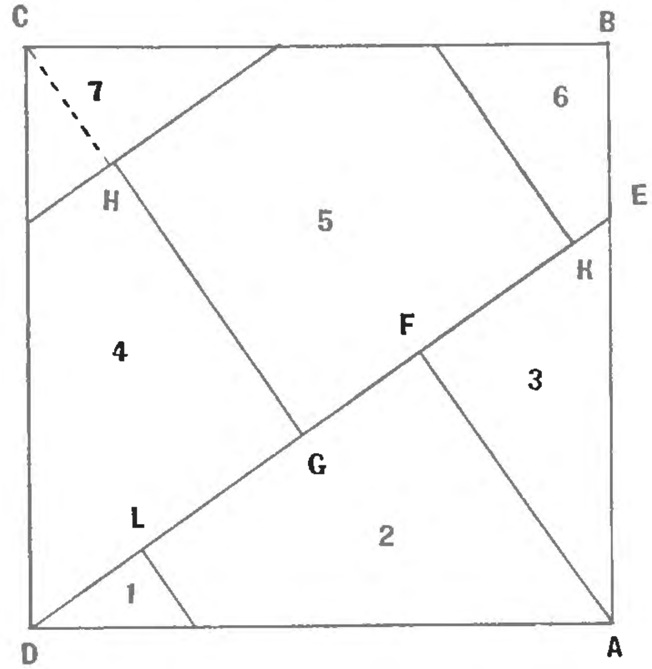
Задача 85-я.

Изъ квадрата 3 квадрата.

Разрѣзать квадратъ на семь такихъ частей, чтобы, сложивъ ихъ надлежащимъ образомъ, получить три равныхъ квадрата.

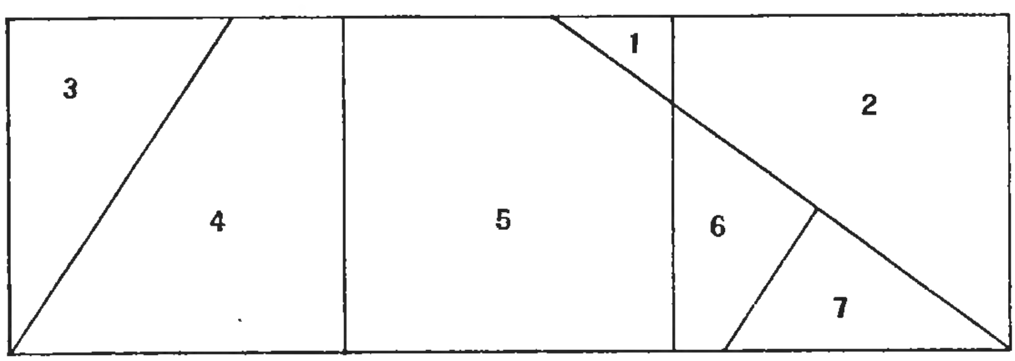
Рѣшеніе.

Пусть будетъ *ABCD* (фиг. 70) данный квадратъ. Отложимъ на его сторонѣ линію *AE*, равную половинѣ діагонали этого квадрата. Соединимъ *D* съ *E* и на полученную линію *DE* опустимъ перпендикуляры *AF* и *CG*. Затѣмъ откладываемъ прямыя *GH*, *GK*, *FL*, всѣ равные *AF*, и заканчиваемъ построеніе линіями, параллельными или перпендикулярными *AF*, какъ указано на фигурѣ 70-ой. Если разрѣзать теперь квадратъ по проведеннымъ линіямъ и сложить затѣмъ всѣ полученныя



Фиг. 70.

части такъ, какъ указано на слѣдующей фигурѣ 71-й, то и получимъ 3 искомыхъ квадрата:



Фиг. 71.

Замѣчаніе. Математическое доказательство этого предоставляемъ читателю, замѣтивъ только, что, пользуясь подобіемъ треугольниковъ и теоремой Пиѳагора, доказанной въ предыдущей задачѣ (квадратъ гипотенузы = суммѣ квадратовъ катетовъ), нетрудно вывести, что

$$3\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2.$$

Необходимо также еще замѣтить, что разсматриваемая задача можетъ быть сведена къ такимъ:

1. Разрѣзать квадратъ на наименьшее число частей, которыя, соотвѣтственно сложенныя, давали бы нѣкоторое число равныхъ между собою квадратовъ.

2. Разрѣзать квадратъ на такія части, изъ которыхъ можно было бы составить данное число равныхъ квадратовъ.

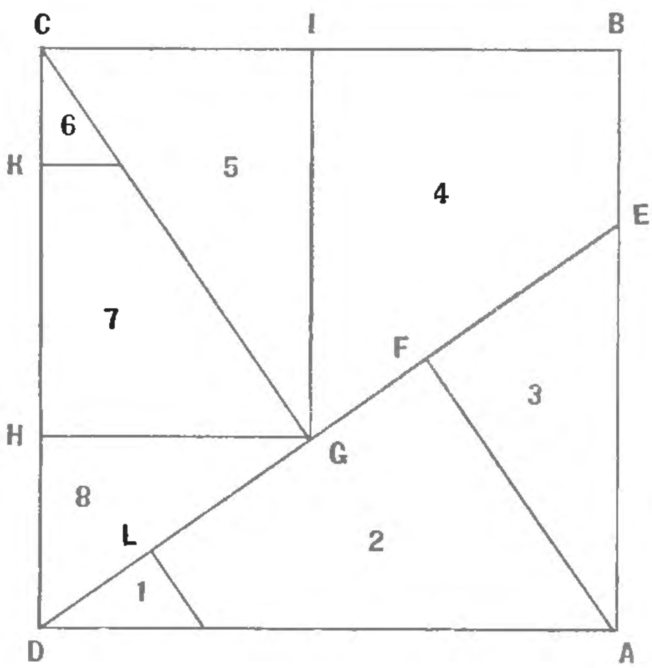
Задача 86-я.

Разрѣзать квадратъ на 8 такихъ частей, чтобы, сложивъ ихъ соотвѣтственнымъ образомъ, получить два квадрата, изъ которыхъ одинъ былъ бы вдвое болѣе другого.

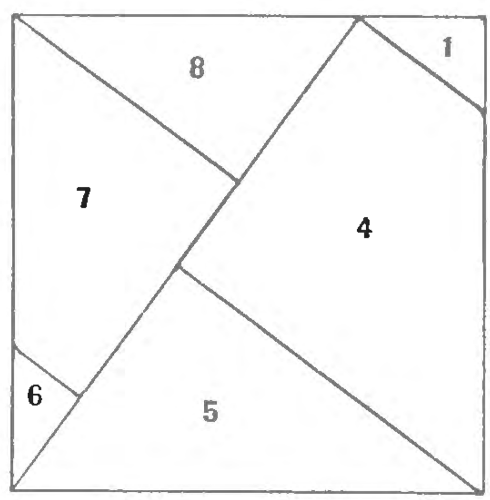
Рѣшеніе.

Изъ прилагаемаго чертежа (фиг. 72) видно, какъ нужно разрѣзать квадратъ. Линіи AF, CG и точка L опредѣляются такъ же, какъ и въ предыдущей задачѣ.

Затѣмъ параллельно сторонамъ квадрата проводятся GH и GI (фиг. 72) и берется $HK = GH$. Такимъ образомъ получается восемь частей, изъ которыхъ и составляются требуемые квадраты.



Фиг. 72.



Фиг. 73.

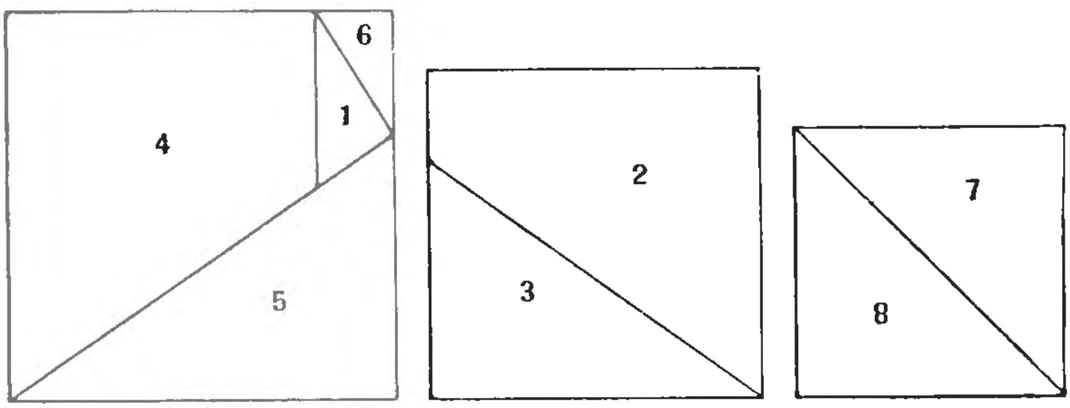
Одинъ изъ нихъ представленъ фиг. 73-ей, а другой есть средній въ фиг. 74-ой.

Задача 87-я.

Разрѣзать квадратъ на такія 8 частей, чтобы, соотвѣтственно сложенныя, онѣ составили 3 квадрата, площади которыхъ были бы пропорціональны числамъ 2, 3 и 4.

Рѣшеніе.

Квадратъ разрѣзывается точно такъ же, какъ и въ предыдущей задачѣ (фиг. 72). Изъ полученныхъ 8 частей составляются 3 требуемыхъ квадрата такъ, какъ на фиг. 74-ой:



Фиг. 74.

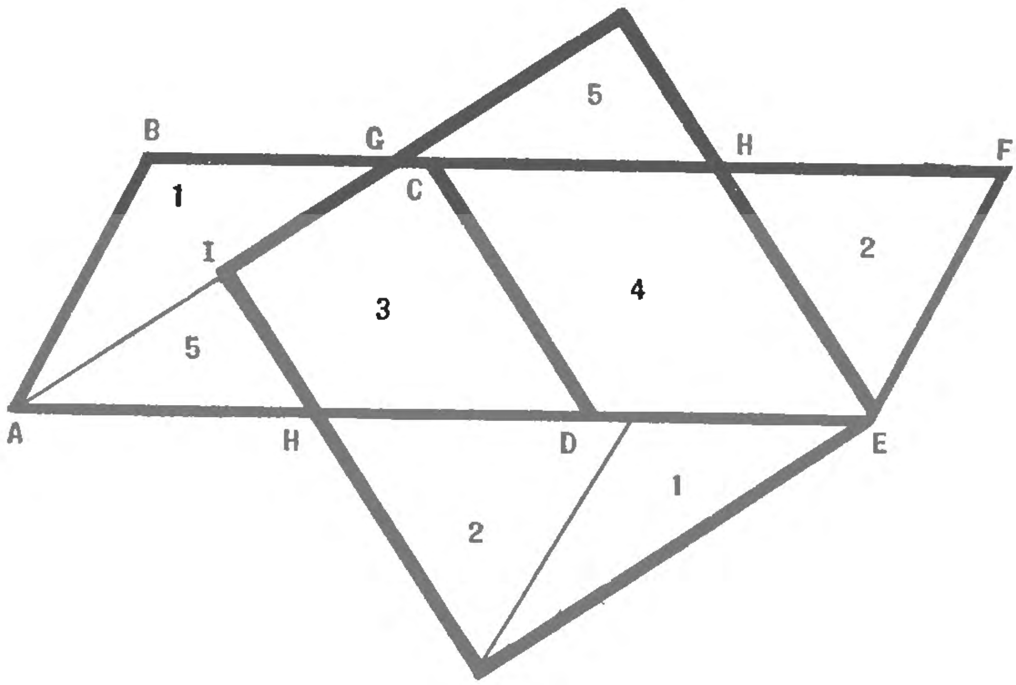
По даннымъ рѣшеніямъ-рисункамъ не трудно доказать математически правильность этихъ построеній, что желающій вникнуть въ сущность данной задачи пусть и сдѣлаетъ.

Задача 88-я.

Разрѣзать правильный шестиугольникъ на 5 такихъ частей, чтобы, соотвѣтственно сложенныя, онѣ образовали квадратъ.

Рѣшеніе.

Разрѣзываемъ шестиугольникъ сначала по діагонали и складываемъ полученныя 2 половины такъ, чтобы онѣ образовали параллелограммъ $ABFE$ (см. фиг. 75). Изъ точки A, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ средней пропорціональной между длиной AE и высотой параллелограмма, проводимъ окружность, которая пересѣчетъ BF въ точкѣ G. Затѣмъ изъ точки E опускаемъ перпендикуляръ EH на продолженіе AG и проводимъ прямую IK параллельно EH и на разстояніи отъ нея, равномъ AG. Такимъ путемъ шестиугольникъ оказывается раз-



Фиг. 75.

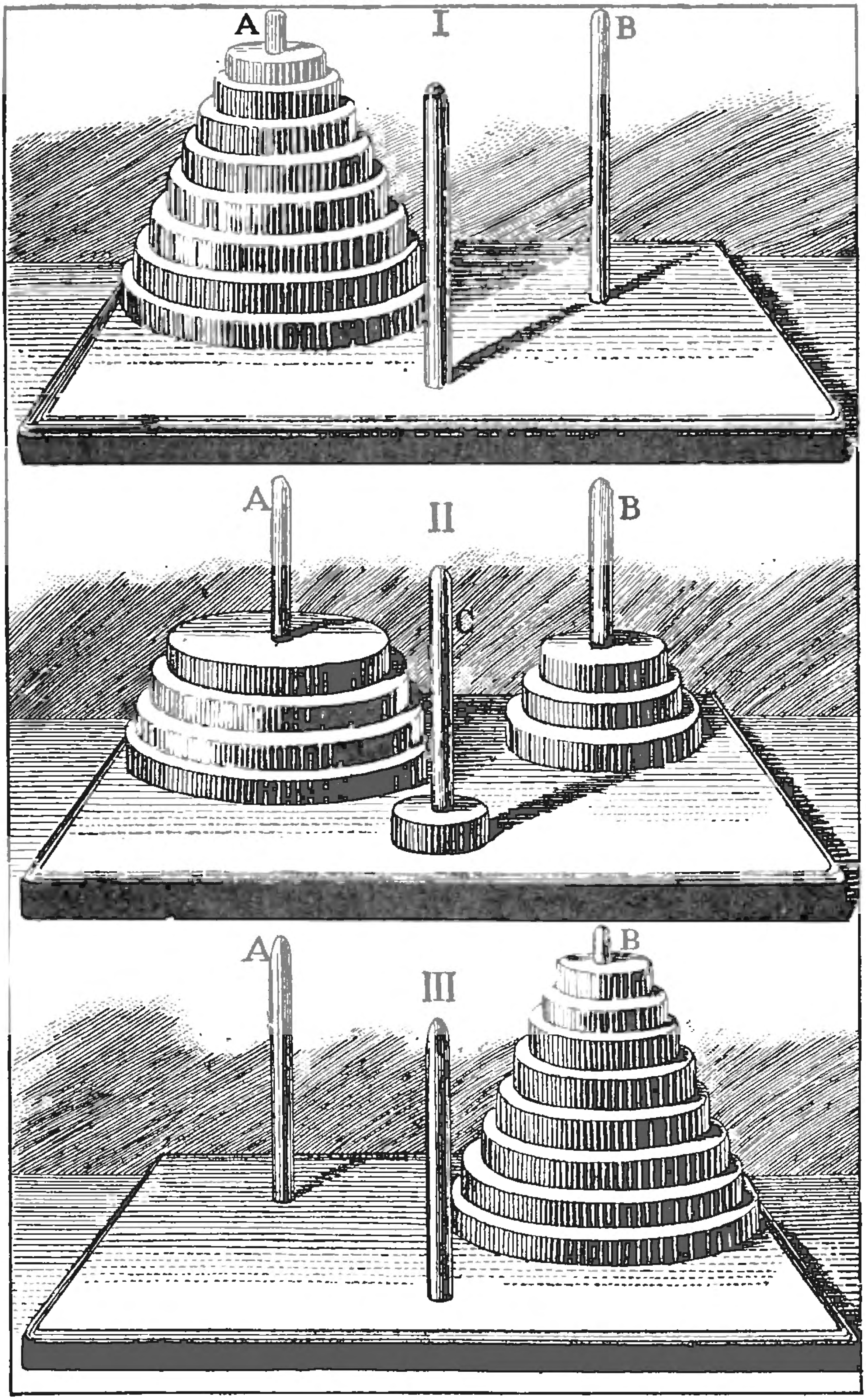
рѣзаннымъ на 5 такихъ частей, изъ которыхъ можно образовать квадратъ. Не разъясняемъ болѣе этой задачи, такъ какъ предназначаемъ ее для знающихъ курсъ элементарной геометріи на плоскости.

Задача 89-я.

Ханойская башня.—Тонкинскій вопросъ.

Возьмемъ 8 деревянныхъ, или изъ толстаго картона, кружковъ уменьшающагося діаметра и три вертикально укрѣпленныя на пластинкѣ палочки (стержня). Кружки снабжены въ центрѣ отверстіями, и ихъ накладываютъ, начиная съ наибольшаго, на одну изъ палочекъ А такъ, что получается родъ усѣченнаго конуса. Это и есть Ханойская башня въ 8 этажей. (См. фиг. 76, А, вверху).

Требуется всю эту башню съ палочки А перенести на палочку В, пользуясь третьей палочкой (I, II, и III на



Фиг. 76.

нашемъ рисункѣ), какъ вспомогательной, и соблюдая слѣдующія условія: 1) не переносить за одинъ разъ болѣе одного кружка и 2) класть снятый кружокъ или на ту палочку, которая свободна, или накладывать его на кружокъ большаго діаметра. Надѣвать на какую-либо изъ палочекъ большій кружокъ поверхъ меньшаго—нельзя.

Рѣшеніе.

Чтобы показать процессъ правильнаго перенесенія кружковъ, обозначимъ кружки цифрами 1, 2, 3, . . ., 7, 8, начиная съ наименьшаго; затѣмъ изобразимъ процессъ перенесенія нижеслѣдующей табличкой:

	Палочка А.	*Вспомогательная палочка.*	*Палочка В.*
до начала	1,2,3,4,5,6,7,8	—	—
послѣ 1-го перенесенія:	2,3,. . . . 8	1	—
» 2-го »	3,4 . . . 8	1	2
» 3-го »	3.4 . . . 8	—	1,2
» 4-го »	4,5 . . 8	3	1,2
» 5-го »	1,4,5,. . 8	3	2
» 6-го »	1,4,5,. . 8	2,3	—
» 7-го »	4,5,. . 8	1,2,3	—
» 8-го »	5,6,7,8	1,2,3	4
» 9-го	5,6,7,8	2,3	1,4
» 10-го „	2,5,6,7,8	3	1,4
» 11-го »	1,2,5,6,7,8	3	4
» 12-го »	1,2,5,6,7,8	—	3,4
» 13-го »	2,5,6,7,8	1	3,4
» 14-го »	5,6,7,8	1	2,3,4
» 15-го »	5,6,7,8	—	1,2,3,4

и т д.

Отсюда мы видимъ, что на палочку III, когда она свободна, надѣваются только нечетные кружки (1-ый. 3-ій, 5-ый и пр.), а на *В*—только четные. Такъ что, напр., для перенесенія четырехъ верхнихъ кружковъ, нужно было сперва перенести три верхніе на вспомогательную палочку — что, какъ видно изъ таблицы, потребовало 7 отдѣльныхъ переложеній, — затѣмъ мы перенесли 4-ый кружокъ на третью палочку — еще одно переложеніе — и, наконецъ, три верхніе кружка со второй палочки перенесли на ту же третью поверхъ 4-го кружка (при чемъ 1-ая палочка играла у насъ роль вспомогательной), что опять потребовало 7-ми отдѣльныхъ переложеній.

Итакъ, вообще: чтобы при такихъ условіяхъ перенести колонну изъ n какихъ нибудь элементовъ, расположенныхъ вертикально въ убывающемъ порядкѣ, нужно сначала перенесть колонну изъ $(n-1)$ верхнихъ элементовъ на одно изъ свободныхъ мѣстъ, потомъ основаніе, т. е. n-ный элементъ—на другое свободное мѣсто и, наконецъ, — на то же же мѣсто опять всю колонну изъ $(n-1)$ верхнихъ элементовъ.

Обозначая число необходимыхъ отдѣльныхъ перенесеній буквою Π со значкомъ, соотвѣтствующимъ числу элементовъ, имѣемъ, слѣдовательно:

$$\Pi_n = 2 \cdot \Pi_{n-1} + 1.$$

Понижая значеніе n до единицы и дѣлая подстановку, легко находимъ:

$$\Pi_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdot \cdot \cdot + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Получаемъ, слѣдовательно, сумму геометрической прогрессіи, которая даетъ

$$\Pi_n = 2^n - 1.$$

Такимъ образомъ, въ случаѣ Ханойской башни, т. е. при 8 кружкахъ, нужно сдѣлать $2^8 - 1$ или 255 отдѣльныхъ переложеній кружковъ.

Легенда.

Если выше вмѣсто 8 кружковъ возьмемъ 64 кружка, то получимъ задачу, связанную съ древне-индійскій легендой. Легенда эта гласитъ, будто въ городѣ Бенаресѣ, подъ куполомъ главнаго храма, въ томъ мѣстѣ, гдѣ находится середина Земли, богъ Брама поставилъ вертикально на бронзовой площадкѣ три алмазныя палочки, каждая длиною въ локоть и толщиною въ корпусъ пчелы. При сотвореніи міра на одну изъ этихъ палочекъ были одѣты 64 кружка изъ чистаго золота съ отверстіями посрединѣ,— такъ, что они образовали родъ усѣченнаго конуса, такъ какъ діаметры ихъ шли въ возрастающемъ порядкѣ, начиная сверху. Жрецы, смѣняемые одинъ другимъ, днемъ и ночью безъ устали трудятся надъ перенесеніемъ этой колонны кружковъ съ первой палочки на третью, пользуясь второй какъ вспомогательной, при чемъ они обязаны соблюдать уже указанныя условія, т. е. 1) не переносить за одинъ разъ болѣе одного кружка, и 2) класть снятый кружокъ или на свободную въ этотъ моментъ палочку, или накладывать его на кружокъ только большаго діаметра. Когда, соблюдая всѣ эти условія, жрецы перенесутъ всѣ 64 кружка съ первой палочки на 3-ю,—наступитъ конецъ міра...

Допустимъ, что переносъ одного кружка продолжается всего одну секунду, тогда на перемѣщеніе ханойской башни изъ восьми кружковъ потребуется 4 минуты слишкомъ. Что же касается переноса башни въ 64 кружка, то на это понадобится.

18 446 744 073 709 551 615 сек.

А это значитъ, не болѣе и не менѣе, какъ **пять слишкомъ милліардовъ вѣковъ (столѣтій).**

Міръ Брамы, очевидно, продержится еще очень и очень много лѣтъ.

Если кружки и палочки въ данной игрѣ замѣнить входящими другъ въ друга колпачками, то получаемъ игру, называемую **Тонкинскимъ вопросомъ** или **Китайскими шляпами.**

Вмѣсто кружковъ или колпачковъ, желающіе могутъ употреблять обыкновенныя игральныя карты.

Шахматы.

По поводу приведеннаго выше (задача 89-я) 20-ти-значнаго числа существуетъ другая легенда, тоже индусскаго происхожденія, которую разсказываетъ арабскій писатель Асафадъ.

Браминъ Сесса, сынъ Дагера, придумалъ игру въ шахматы, гдѣ король, хотя и самая важная фигура, не можетъ ступить шагу безъ помощи и защиты своихъ подданныхъ пѣшекъ и другихъ фигуръ. Изобрѣлъ онъ эту игру въ забаву своему монарху и повелителю Индія, Шерану. Царь Шеранъ, восхищенный выдумкой брамина, сказалъ, что дастъ ему **все, что только браминъ** захочетъ.

— Въ такомъ случаѣ, ваше величество,—сказалъ Сесса,—прикажите дать мнѣ столько пшеничныхъ зеренъ, сколько ихъ получится, если на первую клѣтку шахматной доски положить зерно, на вторую 2, на третью 4, на четвертую 8 и т. д., все удваивая, пока не дойдутъ до 64-й клѣтки.

Повелитель Индіи не смогъ этого сдѣлать! Число требуемыхъ зеренъ выражалось вышеприведеннымъ двадцатизначнымъ числомъ. Чтобы удовлетворить «скромное» желаніе брамина, нужно было бы восемь разъ засѣять всю поверхность земного шара и восемь разъ собрать жатву. Тогда бы только получилось нужное для Сессы количество зеренъ.

Обѣщать «все, что хочешь», легко, но трудно исполнить!

Задача 90-я.

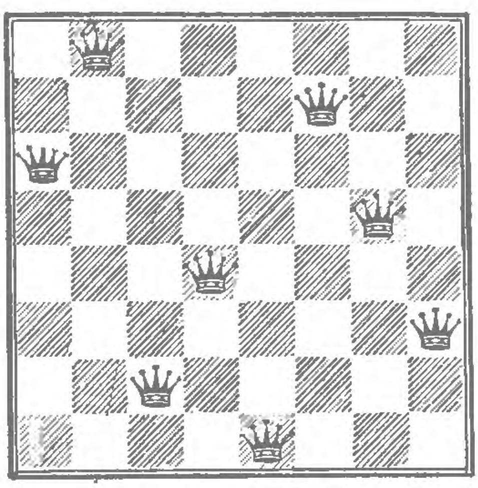
О восьми королевахъ.

На шахматной доскѣ, состоящей изъ 64 клѣтокъ, разставить 8 королевъ такъ, чтобы ни одна изъ нихъ не могла брать другую. Другими словами: на восьми клѣткахъ шахматной доски поставить восемь королевъ такъ, чтобы каждыя двѣ изъ нихъ не были расположены ни на одной линіи, параллельной какому-либо краю, и ни на одной изъ діагоналей доски.

Задача эта нѣкіимъ Наукомъ предложена была для рѣшенія знаменитому нѣмецкому математику Гауссу. Гауссъ послѣ нѣсколькихъ попытокъ нашелъ всѣ ея рѣшенія.

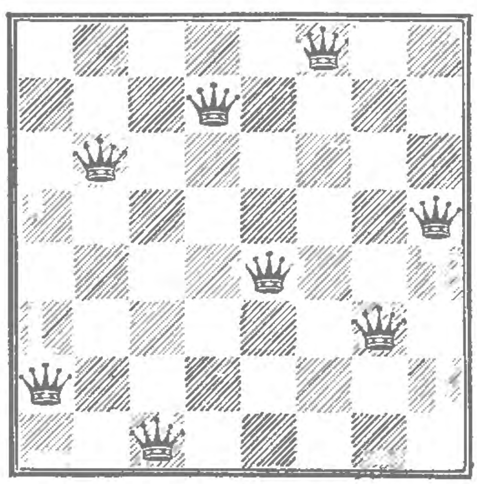
Покажемъ нѣкоторыя рѣшенія (не Гаусса) этой задачи и приведемъ затѣмъ таблицу всѣхъ 92-хъ ея рѣшеній.

Положеніе I.



Фиг. 77.

Положеніе II.



Фиг. 78.

На прилагаемой фигурѣ 77-й содержится одно изъ рѣшеній. Обозначимъ это рѣшеніе восемью цифрами 6 8 2 4 1 7 5 3, гдѣ каждая цифра означаетъ высоту королевы въ каждой колоннѣ доски, т. е. 6 показываетъ, что королева находится въ первой колоннѣ на шестой клѣткѣ, считая снизу, 8, что королева находится во второй колоннѣ на восьмой клѣткѣ, считая снизу, и т. д. Мы и впредь вертикальные ряды клѣтокъ будемъ называть **колоннами,** а горизонтальные **линіями**. Линіи мы тоже будемъ обозначать числами отъ 1 до 8 и считать ихъ отъ низа къ верху. Такимъ образомъ, записанное нами выше первое рѣшеніе съ помощью одного ряда чиселъ было бы правильнѣе записать такъ:

(A)									
	Линіи . .	6	8	2	4	1	7	5	3
	Колонны .	1	2	3	4	5	6	7	8

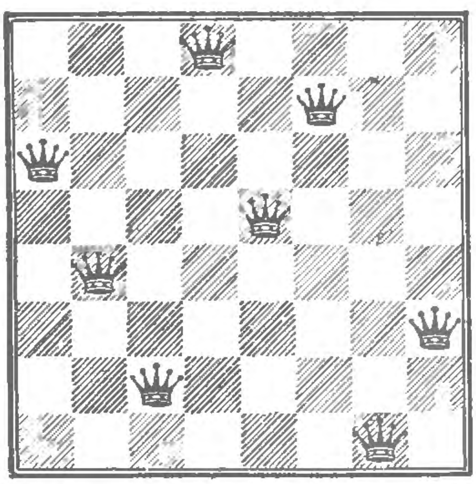
Если мы повернемъ доску на четверть окружности въ направленіи, обратномъ движенію часовой стрѣлки, то изъ перваго рѣшенія получимъ ему **соотвѣтственное,** которое представлено у насъ на фиг. 78-ой.

Чтобы получить это соотвѣтственное рѣшеніе численно изъ перваго, достаточно расположить колонки таблички (A) такъ, чтобы цифры первой строки шли въ убывающемъ порядкѣ. Получимъ

(B)									
	Линіи . .	8	7	6	5	4	3	2	1
	Колонны .	2	6	1	7	4	8	3	5

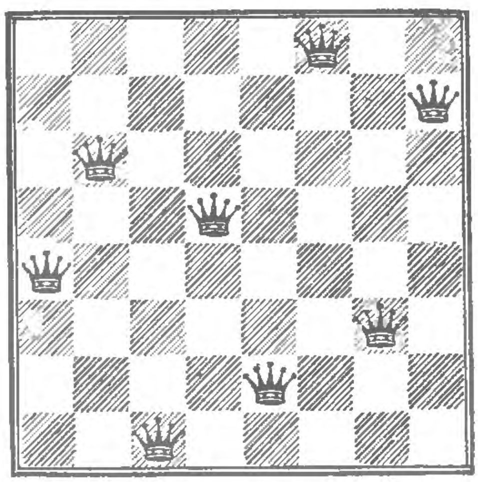
Сохраняя только цифры второй линіи таблички (B), можемъ сокращенно обозначить это рѣшеніе числомъ **2 6 1 7 4 8 3 5.**

Положеніе III.



Фиг. 79.

Положеніе IV.



Фиг. 80.

Слѣдующія 2 фигуры, 79 и 80, представляютъ второе и третье рѣшенія, соотвѣтственныя фигурѣ 77-ой. Ихъ можно получить, заставляя шахматную доску вращаться еще на четверть и еще на четверть окружности, въ направленіи обратномъ движенію часовой стрѣлки. Можно вывести также, подобно предыдущему (и обозначить численно), положеніе III (фиг. 79) изъ положенія II (фиг. 78), а положеніе IV изъ положенія III. Но можно и прямо положеніе III получить изъ I, а положеніе IV—изъ II-го.

Для этого поступаемъ такъ. Рѣшенія фиг. 77 и 78 обозначены у насъ числами

6 8 2 4 1 7 5 3 и 2 6 1 7 4 8 3 5.

Напишемъ эти числа въ обратномъ порядкѣ:

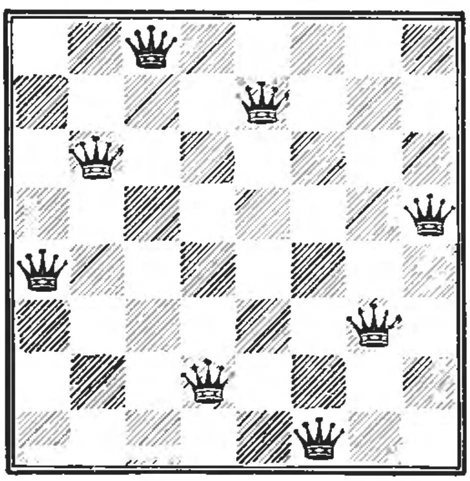
3 5 7 1 4 2 8 6 и 5 3 8 4 7 1 6 2

и вычтемъ каждую цифру этихъ чиселъ изъ 9, получимъ

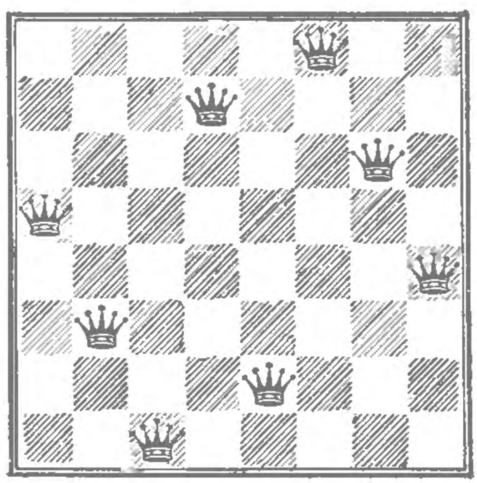
6 4 2 8 5 7 1 3 и 4 6 1 5 2 8 3 7.

Это и будутъ численныя обозначенія рѣшеній на фигурахъ 79-ой и 80-ой.

Такимъ образомъ въ общемъ случаѣ иныя рѣшенія задачи о королевахъ на нѣкоторой доскѣ даютъ мѣсто четыремъ **соотвѣтственнымъ** рѣшеніямъ. Рѣшенія эти носятъ названіе **непрямыхъ**.



Фиг. 81.



Фиг. 82.

На фигурѣ 81-ой дано **полупрямое** рѣшеніе задачи. Особенность его заключается въ томъ, что изъ него получается только одно соотвѣтственное рѣшеніе (фиг. 82). Въ самомъ дѣлѣ, если повернуть шахматную доску на полуокружность, то получаемъ опять то же расположеніе. Число **4 6 8 2 7 1 3 5**, изображающее это рѣшеніе, отличается тѣмъ, что, сложенное съ числомъ, состоящимъ изъ тѣхъ же цифръ, но написаннымъ въ обратномъ порядкѣ, даетъ **9 9 9 9 9 9 9 9**.

Наконецъ, прямымъ рѣшеніемъ мы назовемъ такое рѣшеніе, изъ котораго нельзя получить новыхъ рѣшеній, поворачивая доску на четверть или на бо̀льшее число четвертей окружности. Такихъ рѣшеній не существуетъ для обыкновенной шахматной доски, съ 64-мя клѣтками, хотя для другихъ досокъ они имѣются.

Возьмемъ какое-либо рѣшеніе задачи восьми королевъ и перевернемъ на фигурѣ порядокъ линій, или колоннъ. Или, что̀ сводится къ тому же, напишемъ числовое обозначеніе рѣшенія въ обратномъ порядкѣ,—мы получимъ **рѣшеніе, обратное** данному. Легко убѣдиться, что это рѣшеніе отличается отъ всякаго изъ соотвѣтственныхъ рѣшеній. То же рѣшеніе получается еще и геометрически, если поставить шахматную доску съ 8-ю королевами противъ зеркала и смотрѣть въ это послѣднее, или же вообразить себѣ доску перевернутой. Изъ разсмотрѣнія соотвѣтственныхъ и обратныхъ рѣшеній совмѣстно съ простыми слѣдуетъ:

1. Всякое простое непрямое рѣшеніе даетъ 4 соотвѣтственныхъ рѣшенія и 4 обратныхъ,—всего **восемь** рѣшеній.

2. Всякое простое полупрямое рѣшеніе даетъ два соотвѣтственныхъ и два обратныхъ рѣшенія,—всего **четыре**.

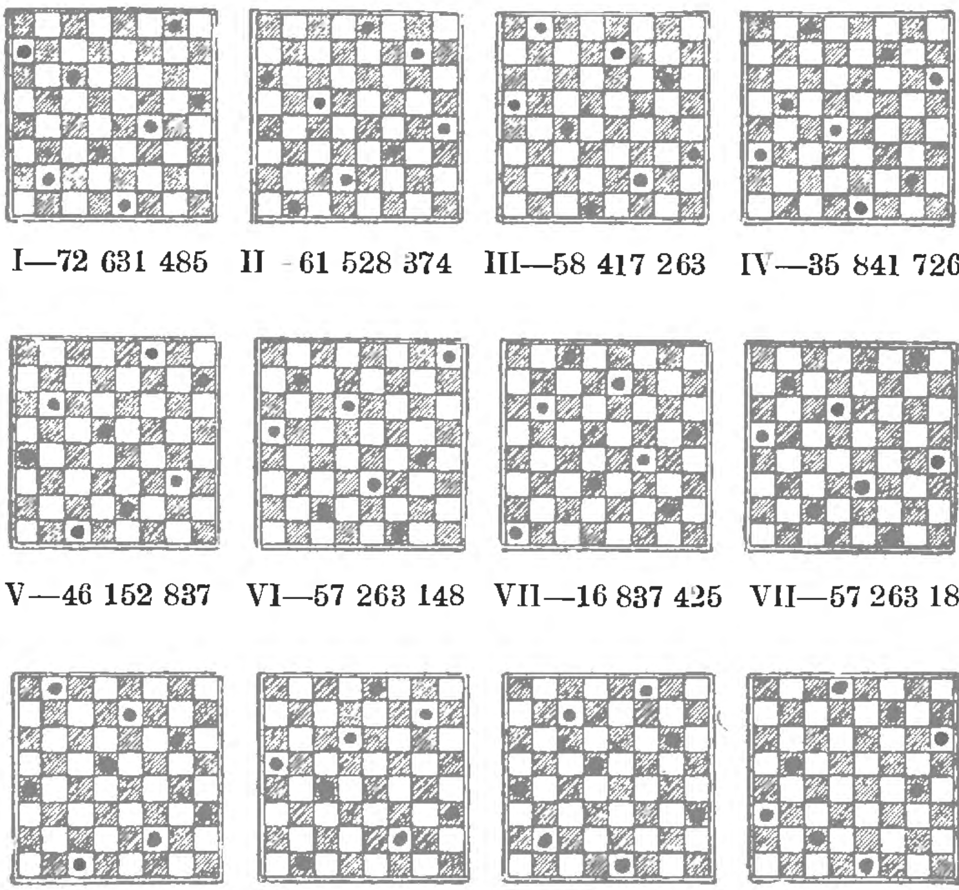
3. Всякое простое прямое рѣшеніе даетъ еще только одно обратное,—всего **два**.

Выведенныя правила относятся ко всякой доскѣ, кромѣ состоящей изъ одной клѣтки.

Опуская способы отысканія самыхъ простѣйшихъ рѣшеній задачи, дадимъ эти рѣшенія прямо. При этомъ замѣтимъ, что существуетъ 12 **простыхъ, первоначальныхъ рѣшеній,** которыя расположены въ слѣдующей табличкѣ.

№ по порядку.	Обозначенія.	№ по порядку.	Обозначенія.
1	72 631 485	7	16 837 425
2	61 528 374	8	57 263 184
3	58 417 263	9	48 157 263
4	35 841 726	10	51 468 273
5	46 152 837	11	42 751 863
6	57 263 148	12	35 281 746

Или тѣ же 12 рѣшеній на фиг. 83-й.



I—72 631 485 II—61 528 374 III—58 417 263 IV—35 841 726

V—46 152 837 VI—57 263 148 VII—16 837 425 VII—57 263 184

IV—48 157 263 X—51 468 273 XI—42 751 863 XII—35 281 746

Фиг. 83.

Всѣ эти простыя рѣшенія непрямыя, и каждое изъ нихъ даетъ, какъ выше объяснено, 8 рѣшеній, послѣднее же, XII-е,—полупрямое и даетъ только четыре рѣшенія. Всего, слѣдовательно, получается 92 рѣшенія. Вотъ таблица всѣхъ этихъ рѣшеній:

Таблица всѣхъ 92-хъ рѣшеній задачи о восьми королевахъ.

1	1586 3724	24	3681 5724	47	5146 8273	70	6318 5247
2	1683 7425	25	3682 4175	48	5184 2736	71	6357 1428
3	1746 8253	26	3728 5146	49	5186 3724	72	6358 1427
4	1758 2463	27	3728 6415	50	5246 8317	73	6372 4815
5	2468 3175	28	3847 1625	51	5247 3861	74	6372 8514
6	2571 3864	29	4158 2736	52	5261 7483	75	6374 1825
7	2574 1863	30	4158 6372	53	5281 4736	76	6415 8273
8	2617 4835	31	4258 6137	54	5316 8247	77	6428 5713
9	2683 1475	32	4273 6815	55	5317 2864	78	6471 3528
10	2736 8514	33	4273 6851	56	5384 7162	79	6471 8253
11	2758 1463	34	4275 1836	57	5713 8642	80	6824 1753
12	2861 3574	35	4285 7163	58	5714 2863	81	7138 6425
13	3175 8246	36	4286 1357	59	5724 8136	82	7241 8536
14	3528 1746	37	4615 2837	60	5726 3148	83	7263 1485
15	3528 6471	38	4682 7135	61	5726 3184	84	7316 8524
16	3571 4286	39	4683 1752	62	5741 3862	85	7382 5164
17	3584 1726	40	4718 5263	63	5841 3627	86	7425 8136
18	3625 8174	41	4738 2516	64	5841 7263	87	7428 6135
19	3627 1485	42	4752 6138	65	6152 8374	88	7531 6824
20	3627 5184	43	4753 1682	66	6271 3584	89	8241 7536
21	3641 8572	44	4813 6276	67	6275 4853	90	8253 1746
22	3642 8571	45	4815 7263	68	6317 5824	91	8316 2574
23	3681 4752	46	4853 1726	69	6318 4275	92	8418 6275

Замѣтимъ, что таблица эта содержитъ:

4	рѣшенія, начинающіяся	или	оканчивающіяся	цифрами	1	или	8
8	рѣшеній,	»	»	»	»	2	»	7
16	»	»	»	»	»	3	»	6
18	»	»	»	»	»	4	»	5

Въ приведенной таблицѣ всѣ рѣшенія расположены въ числовомъ порядкѣ. Таблицу эту можно построить самому, пользуясь при этомъ слѣдующимъ весьма простымъ систематическимъ пріемомъ: Помѣщаютъ сначала одну королеву на самую низкую клѣтку первой колонны слѣва, затѣмъ ставятъ другую королеву во второй колоннѣ опять на самую низкую по возможности клѣтку и т. д., всегда стремясь помѣстить въ слѣдующей колоннѣ королеву настолько низко, насколько это позволяютъ королевы, стоящія слѣва. Когда наступитъ такой моментъ, что въ колоннѣ нельзя помѣстить королеву,—подымаютъ королеву въ предыдущей колоннѣ на одну, двѣ, три... клѣтки и продолжаютъ размѣщать остальныхъ королевъ, руководствуясь всегда разъ принятымъ правиломъ: не поднимать поставленныхъ королевъ выше, какъ только въ томъ случаѣ, если справа нѣтъ совсѣмъ мѣста для слѣдующей королевы.

Всякій разъ, когда рѣшеніе найдено, его записываютъ, и, такимъ образомъ, рѣшенія будутъ слѣдовать одно за другимъ тоже въ постепенномъ числовомъ порядкѣ. Таблицу, полученную такимъ путемъ, можно провѣрять, группируя соотвѣтственныя и обратныя рѣшенія, которыя можно вывести изъ перваго, и т. д.

Задача 91-я.

О ходѣ шахматнаго коня.

Задача о ходѣ шахматнаго коня, или задача Эйлера, состоитъ въ слѣдующемъ:

Требуется обойти конемъ всѣ 64 клѣтки шахматной доски такъ, чтобы на каждой клѣткѣ конь былъ только одинъ разъ и затѣмъ возвратился бы въ клѣтку, изъ которой вышелъ.

Задачей этой занимался Эйлеръ и въ письмѣ къ Гольдбаху (26 апрѣля 1757 года) далъ одно изъ рѣшеній ея. Вотъ что, между прочимъ, пишетъ онъ въ этомъ интересномъ письмѣ:

«...Воспоминаніе о предложенной когда-то мнѣ задачѣ послужило для меня недавно поводомъ къ нѣкоторымъ тонкимъ изысканіямъ, въ которыхъ обыкновенный анализъ, какъ кажется, не имѣетъ никакого примѣненія. Вопросъ состоитъ въ слѣдующемъ. Требуется обойти шахматнымъ конемъ всѣ 64 клѣтки шахматной доски такъ, чтобы на каждой клѣткѣ онъ побывалъ только одинъ разъ. Съ этой цѣлью всѣ мѣста, которыя занималъ конь, при своихъ (послѣдовательныхъ) ходахъ, закрывались марками. Но къ этому присоединилось еще требованіе, чтобы начало хода дѣлалось съ даннаго мѣста. Это послѣднее условіе казалось мнѣ очень затрудняющимъ вопросъ, такъ какъ я скоро нашелъ нѣкоторые пути, при которыхъ, однако, выборъ начала былъ для меня свободенъ. Я утверждаю, однако, что если полный обходъ коня будетъ возвратный (in se rediens), т. е. если конь изъ послѣдняго мѣста опять можетъ перейти на первое, то устраняется и это затрудненіе. Послѣ нѣкоторыхъ изысканій по этому поводу я нашелъ, наконецъ, ясный способъ находить сколько угодно подобныхъ рѣшеній (число ихъ, однако, не безконечно), не дѣлая пробъ. Подобное рѣшеніе представлено въ нижеслѣдующей фигурѣ (84-ой).

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Фиг. 84.

«Конь ходитъ въ порядкѣ, указанномъ числами. Такъ какъ изъ послѣдняго мѣста 64 онъ можетъ перейти на № 1, то этотъ полный ходъ есть возвратный (in se rediens).

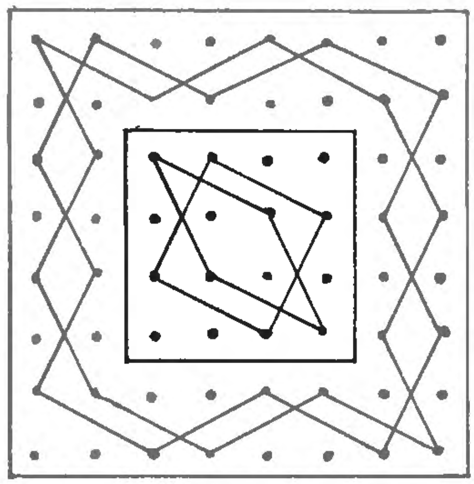
Таково рѣшеніе задачи о ходѣ шахматнаго коня, данное Эйлеромъ. Въ письмѣ не указаны ни пріемы, ни путь, которыми знаменитый ученый пришелъ къ своему открытію. Сейчасъ мы укажемъ на пріемы иныхъ, болѣе симметричныхъ и методичныхъ рѣшеній.

I.

Раздѣлимъ шахматную доску на двѣ части: **внутреннюю**, состоящую изъ 16-ти клѣтокъ, и **краевую**, представляющую собою родъ бордюра, шириною въ двѣ клѣтки (фиг. 85). Каждыя 12 клѣтокъ краевой доски, обозначенныя у насъ одинаковыми буквами, даютъ одинъ изъ частныхъ зигзагообразныхъ ходовъ шахматнаго коня вокругъ доски; точно такъ же четыре одноименныхъ клѣтки внутренней части доски даютъ частный замкнутый ходъ шахматнаго коня въ видѣ квадрата или въ видѣ ромба. Фиг. 86-я представляетъ 2 зигзагообразныхъ частныхъ

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	a′	b′	c′	d′	d	c
d	c	c′	d′	a′	b′	b	a
a	b	b′	a′	d′	c′	c	d
c	d	d′	c′	b′	a′	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

Фиг. 85.



Фиг. 86.

хода коня на **краевой** части доски. Эти ходы обозначимъ буквами a и b. Тамъ же начерчены и два хода на **внутренней** части доски. Эти ходы назовемъ a' и b' соотвѣтственно обозначеніямъ на фиг. 85-й.

Закончивъ какой-либо частный круговой ходъ по **краевой** части доски, конь можетъ перескочить на любой изъ трехъ ходовъ **другого** наименованія на **внутренней** части доски. Нетрудно (стоитъ лишь взять въ руки шахматную доску и коня) найти, и притомъ различными способами, четыре пути изъ 16 клѣтокъ—такихъ, напр., какъ

$$ab', \; bc', \; cd', \; da'.$$

Въ самомъ дѣлѣ, всмотритесь въ данныя выше фигуры 85 и 86, или поставьте предъ собой шахматную доску, и вы увидите, что для полученія частнаго хода коня въ 16 клѣтокъ, надо только **краевой** частный круговой ходъ изъ 12-ти клѣтокъ соединить съ внутреннимъ ходомъ, но **другого** наименованія прямой чертой, уничтожая при этомъ въ каждомъ изъ частныхъ круговыхъ (возвратныхъ) ходовъ замыкающую линію. Такъ получимъ 4 частныхъ круговыхъ хода по 16-ти клѣтокъ. Эти четыре частныхъ хода по 16-ти клѣтокъ опять можно соединить различнымъ образомъ и получить полный ходъ шахматнаго коня въ 64 клѣтки.

Итакъ, ставятъ коня на какую-либо клѣтку, напр., **краевой** части доски и описываютъ по ней путь изъ 12 клѣтокъ; вслѣдъ затѣмъ конь перепрыгиваетъ на клѣтку одного изъ трехъ **(не одноименныхъ)** внутреннихъ путей, проходитъ этотъ путь въ любомъ направленіи и перескакиваетъ опять на краевую часть, гдѣ снова дѣлаетъ слѣдующій частный зигзагообразный ходъ изъ 12 клѣтокъ, вновь перескакиваетъ на одинъ изъ внутреннихъ, не одноименныхъ съ предыдущимъ путей, описываетъ его, переходитъ опять на новый краевой путь и т. д., пока не обойдетъ всѣхъ 64 клѣтокъ.

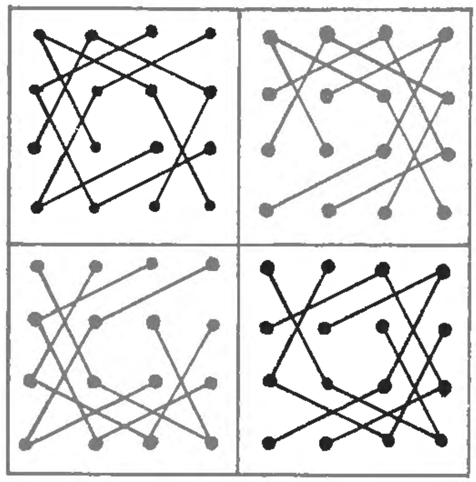
Способъ рѣшенія задачи настолько простъ и легокъ, что не нуждается въ болѣе подробныхъ разъясненіяхъ и указаніяхъ.

II.

Можно эту же задачу рѣшить и другимъ, не менѣе легкимъ, пріемомъ. Здѣсь, для удобства, доска дѣлится на 4 части по 16 клѣтокъ въ каждой, двумя медіанами (серединными линіями). (См. фиг. 87). 16 клѣтокъ каждой четверти, обозначенныхъ одинаковыми буквами, можно соединить посредствомъ сторонъ двухъ квадратовъ и двухъ ромбовъ, не имѣющихъ ни одной общей вершины (см. фиг. 88). Соединяя, въ свою очередь, одноименные квадраты и ромбы всѣхъ четвертей доски, можно получить четыре частныхъ круговыхъ возвратныхъ хода, по 16 клѣтокъ. Соединяя, затѣмъ, эти послѣдніе ходы, получимъ полный ходъ коня въ 64 клѣтки.

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a
a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

Фиг. 87.



Фиг. 88.

Полезно сдѣлать еще слѣдующія замѣчанія: На каждой четверти доски ромбами и квадратами обозначены по четыре хода коня. Если соединимъ ромбы и квадраты, обозначенные одинаковыми буквами во всѣхъ 4-хъ четвертяхъ доски, получимъ по 4 частныхъ возвратныхъ хода по 16 клѣтокъ.

Нѣкоторыя трудности иному могутъ представиться, когда для полученія полнаго хода въ 64 клѣтки онъ начинаетъ соединять между собой эти четыре частныхъ хода по 16 клѣтокъ. Здѣсь полезно имѣть въ виду, что *цѣпь, или рядъ ходовъ, можно видоизмѣнять, не разрывая его.* Основано это на такъ называемомъ правилѣ Бертрана (изъ Женевы), которое состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть имѣемъ незамкнутую цѣпь ходовъ, проходящихъ черезъ клѣтки A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, и пусть оконечности этой цѣпи будутъ A и L. Если клѣтка, напр., D, отличная отъ предпослѣдней K, находится отъ послѣдней L на разстояніи хода коня, то DE можно замѣнить черезъ DL и цѣпь ходовъ обратится въ

$$ABCDLKJIHGFE,$$

т. е. вторая половина цѣпи будетъ пройдена въ обратномъ порядкѣ.

То же самое относится и къ тому случаю, когда какая-либо клѣтка, кромѣ второй, сообщается ходомъ коня съ первой.

Итакъ, цѣпь, или рядъ, ходовъ можно видоизмѣнять, не разрывая ее.

Число путей, которыми конь можетъ обойти доску и которые можно найти указанными выше пріемами, не безконечно. Но оно настолько огромно, что трудно его представить. Вотъ что на этотъ счетъ говоритъ одинъ изъ математиковъ, Лавернедъ: «Я занимался числомъ рѣшеній, которое можетъ дать эта задача,—писалъ онъ, –и хотя мой трудъ не конченъ, тѣмъ не менѣе я могу утверждать, что, помѣщая 50 путей на страницѣ, понадобилось бы *не менѣе десяти тысячъ стопъ бумаги*, чтобы написать ихъ всѣ»!..

Этими бѣглыми указаніями рѣшеній задачи о ходѣ шахматнаго коня мы и ограничимся, предоставляя желающимъ заняться этой задачей подробнѣй обратиться къ спеціальнымъ сочиненіямъ.

Карты.

Кажется, ни одна игра не пользуется бо́льшимъ распространеніемъ среди современнаго человѣчества, какъ игра въ карты. Эти послѣднія вы можете встрѣтить чуть не въ каждомъ домѣ, особенно въ Россіи. Очень жаль только, что во многихъ случаяхъ, вмѣсто пріятныхъ и развивающихъ сообразительность игръ, картами пользуются для игры на деньги, «играютъ» также въ глупыя азартныя игры, убывающія время, деньги и разстраивающія нервы.

Мы, впрочемъ, воспользуемся здѣсь колодой картъ, какъ пользуемся ими и всюду, для другой цѣли для интересныхъ задачъ и математическихъ развлеченій. Съ *колодой* игральныхъ или игрушечныхъ картъ въ рукахъ можно провести время нескучно и съ пользой какъ для себя, такъ и для другихъ. Вообще, во многихъ случаяхъ карты могутъ быть незамѣнимымъ и дешевымъ пособіемъ для объясненія многихъ математическихъ вопросовъ и комбинацій.

Описывать, что такое карты, какъ полная колода картъ (52 карты) дѣлится на *масти*, какъ называются эти масти и какъ называется каждая карта въ отдѣльности,—кажется, излишне. Ужъ навѣрное читатель этой книжки, кто бы и какого бы возраста онъ ни былъ, знаетъ это и играетъ, ну хоть въ «дурачки» или «мельника»...

Кѣмъ, какъ, гдѣ и когда изобрѣтены карты? Объ этомъ ничего достовѣрно мы не знаемъ. Во всякомъ случаѣ невѣрно то, что карты изобрѣтены, будто бы, во Франціи въ средніе вѣка для развлеченія какого-то скучающаго короля. Скорѣе всего карты — изобрѣтеніе китайцевъ, въ книгахъ которыхъ есть упоминаніе о картахъ въ 1120 году. Въ Европѣ карты стали извѣстны со времени Крестовыхъ походовъ. Какъ бы то ни было, въ Италіи игра въ карты уже существовала въ 1379 году, о чемъ есть упоминаніе въ книгѣ одного тогдашняго художника. Въ Россіи карты появились въ XVII столѣтіи и скорѣе всего пришли къ намъ черезъ Малороссію. И нужно сказать, что несмотря на жестокія преслѣдованія и гоненія вначалѣ (а скорѣе,— благодаря этимъ гоненіямъ) разнаго сорта глупыя и азартныя «игры» привились у насъ очень быстро.

Мы, повторяемъ, постараемся здѣсь дать картамъ болѣе благородное и полезное назначеніе — пособія для развитія сообразительности и счета, такъ называемой «смекалки»... Не продѣлывалъ ли въ вашемъ присутствіи кто-либо съ помощью картъ различнѣйшіе, иногда прямо изумительные, фокусы? Быть можетъ, вы сами знаете какіе-либо изъ этихъ фокусовъ и развлекаете ими иногда вашихъ знакомыхъ? Но «фокусы» въ большинствѣ случаевъ основаны на ловкости, или просто-таки на «отводѣ глазъ» и обманѣ присутствующихъ.

Мы же займемся здѣсь нѣсколько иными «фокусами», сводящимися къ самымъ настоящимъ математическимъ задачамъ, развивающимъ сообразительность и счетъ. Не пожалѣйте свободнаго времени на то, чтобы съ колодой картъ въ рукахъ усвоить себѣ хорошенько предлагаемыя ниже задачи, а главное разобраться въ нихъ. У васъ въ распоряженіи отличное средство для развитія присущаго всякому человѣку правильнаго математическаго или, что то же,—логическаго мышленія.

Разобравшись и овладѣвши сущностью каждой предлагаемой задачи, вы будете въ состояніи всячески разнообразить ихъ, увеличивать ихъ интересъ и, наконецъ, придумывать новыя подобныя же задачи и развлеченія. Математика — неисчерпаема.

Задача 92-я.

Угадать, сколько очковъ заключается въ трехъ взятыхъ кѣмъ-либо картахъ?

Рѣшеніе.

Изъ полной колоды въ 52 карты пусть кто-либо возьметь три карты и оставитъ у себя. Чтобы узнать, не глядя, сколько очковъ заключается въ этихъ трехъ картахъ, поступаютъ такъ.

Просятъ взявшаго три карты прибавить къ каждой взятой имъ картѣ по столько *картъ*, чтобы *вмѣстѣ съ очками каждой взятой карты получалось 15* (Всѣ фигуры вообще считаются за 10). Послѣ этого угадывающему остается только взять остальныя карты, сосчитать ихъ число (лучше всего сдѣлать этотъ счетъ незамѣтно, заложивъ, напримѣръ, руки съ картами за спину), отнять отъ полученнаго числа 4, и получится точная сумма очковъ взятыхъ 3-хъ картъ.

Пусть, *напримѣръ*, кто-либо взялъ четверку, семерку и девятку. Тогда къ четверкѣ онъ долженъ онъ приложить 11 картъ, къ семеркѣ 8 картъ и къ девяткѣ 6 картъ. Отъ колоды останется 24 карты. Отнимая отъ 24-хъ четыре, находимъ, что сумма очковъ взятыхъ 3-хъ картъ должна быть равна 20, что и согласуется съ дѣйствительностью.

Доказательство.

Докажемъ правильность нашего рѣшенія задачи.

Положимъ, что выбранныя кѣмъ-либо карты суть три наименьшія, т. е. три туза, считаемые по 1. Тогда очевидно, что для полученія числа 15 нужно къ каждой взятой картѣ прибавить еще по 14 картъ. Всего, значитъ, съ тремя тузами составится 45 картъ, и отъ колоды въ 52 карты останется только 7 картъ. Если, теперь, отъ 7 отнять 4, то и получится 3, т. е. число очковъ взятыхъ трехъ тузовъ. Но не трудно показать, что всегда достаточно отнять 4 отъ числа остающихся картъ, чтобы узнать число всѣхъ очковъ любыхъ 3-хъ взятыхъ картъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если взять 3 другія высшія карты, то на сколько увеличится число ихъ очковъ, на столько именно уменьшится число тѣхъ картъ, которыя нужно добавлять къ каждой взятой, чтобы получить число 15, и на столько же именно увеличится число остающихся картъ. Такъ что, отнимая отъ числа остающихся картъ 4, получимъ остатокъ, который всегда равенъ числу очковъ трехъ выбранныхъ картъ. Напримѣръ, если вмѣсто туза возьмемъ шестерку, то сумма трехъ взятыхъ картъ (полагая, что двѣ остальныя—тузы) будетъ 8, т. е. увеличится на 5. Но зато къ шестеркѣ для полученія числа 15 нужно прибавлять не 14, а только 9 картъ, т. е. на 5 картъ меньше. Значитъ остатокъ картъ увеличится на 5 картъ, и, отнимая отъ этого остатка 4, получимъ опять точную сумму очковъ всѣхъ взятыхъ картъ и т. д.; такимъ образомъ доказывается правильность рѣшенія данной задачи для всякаго случая.

Если кто заинтересуется настоящей задачей и захочетъ болѣе серьезно обслѣдовать ее, то пусть онъ разберется въ предлагаемомъ сейчасъ ниже другомъ, болѣе общемъ, поясненіи задачи.

Пусть обозначаетъ число всѣхъ картъ, **a**, **b**, **c** числа очковъ въ трехъ выбранныхъ картахъ и **p** число, которое получается, если къ каждому изъ количествъ **a**, **b** и **c** прибавить нѣкоторое число картъ, каждая изъ которыхъ считается за **1**. Число картъ, которыя прибавляются къ **a**, **b** и **c**, суть **p—a**, **p—b**, **p—c**. Если къ этимъ числамъ прибавить три первоначально взятыя карты, да число оставшихся картъ, которое обозначимъ черезъ **r**, то и получимъ всѣ карты, числомъ **n**, т. е.

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)+3+r=n.$$

Откуда, раскрывая скобки и перенося члены, получаемъ:

$$a+b+c=r+(3p+3)-n.$$

Для $n=52$ и $p=15$ имѣемъ $a+b+c=r-4$.

Для $n=32$ и $p=15$ имѣемъ $a+b+c=r+16$.

Изъ этого общаго рѣшенія можно вывести слѣдующее правило:

Утройте число, которое получается отъ прибавленія ко взятымъ тремъ картамъ еще картъ, и прибавьте къ этому числу 3. Затѣмъ возьмите разницу между этой суммой и числомъ всѣхъ картъ и прибавьте ее къ числу оставшихся картъ, или вычтите ее изъ этого числа, смотря по тому, будетъ ли полученная сумма больше или меньше всего числа картъ. Такимъ образомъ всегда получите число всѣхъ очковъ взятыхъ кѣмъ-либо трехъ картъ.

Замѣтимъ, между прочимъ, что для $n = 36$ и $p = 11$ получается $3p + 3 - n = 0$, а значитъ

$$a + b + c = r.$$

Замѣчаніе I. Изъ предыдущаго можно заключить, что нѣтъ необходимости добавлять къ каждой изъ 3-хъ выбранныхъ картъ столько именно картъ, чтобы получить одно и то же число p. Можно вмѣсто этого предлагать добирать къ каждой изъ взятыхъ трехъ картъ еще по столько картъ такъ, чтобы получилось 3 какихъ-либо числа q, s, t, и тогда въ выведенную раньше формулу вмѣстѣ $3p$ нужно поставить сумму $q + s + t$.

Замѣчаніе II. Если вмѣсто трехъ картъ предлагать взять 4, то формула приметъ видъ:

$$a + b + c + d = r + (4p + 4) - n.$$

Если предлагать взять пять картъ, получится

$$a + b + c + d + e = r + (5p + 5) - n$$

и т. д.

Замѣчаніе III. Можетъ случиться, что не хватитъ картъ для того, чтобы составить число p съ каждой изъ взятыхъ картъ. Тогда спрашиваютъ число q, котораго недостаетъ, и поступаютъ далѣе такъ, какъ если бы всѣхъ картъ было $n + q$ при остаткѣ r, равномъ нулю.

Задача 93-я.

Нѣкоторое число картъ разложено въ ряды. Угадать задуманную кѣмъ-либо карту.

Рѣшеніе.

Возьмите 15 картъ и разложите ихъ въ три ряда по 5 картъ въ каждомъ. Пусть кто-либо задумаетъ одну какую-нибудь изъ этихъ картъ и укажетъ только **рядъ**, въ которомъ находится эта карта. Послѣ этого соберите карты каждаго ряда и затѣмъ сложите всѣ карты вмѣстѣ такъ, однако, чтобы **указанный рядъ непремѣнно попалъ въ середину**—между картами двухъ остальныхъ рядовъ. Потомъ снова разложите карты въ три ряда въ такомъ порядкѣ: одну карту положите въ первый рядъ, вторую—во второй, третью—въ третій, четвертую—въ первый, пятую—во второй, 6-ю—въ третій, 7-ю—въ первый и т. д. до тѣхъ поръ, пока не разложите всѣхъ картъ.

Разложивъ карты, спросите опять, въ какомъ ряду находится задуманная карта; опять соберите карты всѣхъ трехъ рядовъ и сложите ихъ вмѣстѣ, наблюдая снова, чтобы тотъ рядъ, гдѣ находится задуманная карта, **непремѣнно** былъ посреди между двухъ рядовъ, и снова разложите въ 3 ряда карты такъ, какъ уже указано выше (при второй раскладкѣ).

Спросивъ теперь, въ какомъ ряду находится задуманная карта, можно тотчасъ указать ее: **она будетъ третьей по порядку въ этомъ ряду**.

Чтобы лучше замаскировать задачу, можно совершенно такъ же, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, еще разъ разложить карты, и тогда задуманная кѣмъ-либо карта непремѣнно будетъ въ среднемъ ряду третьей, т. е. въ серединѣ всѣхъ 15 картъ. Такъ что, съ какого бы угла ни начать считать,—она всегда окажется на восьмомъ мѣстѣ.

Доказательство.

Чтобы убѣдиться въ вѣрности нашего рѣшенія, достаточно показать, что, если раскладывать 3 раза карты, какъ указано, то послѣ третьей раскладки задуманная карта будетъ непремѣнно третьей въ томъ ряду, гдѣ она находится. Въ самомъ дѣлѣ, когда мы раскладываемъ карты въ первый разъ и намъ укажутъ рядъ, въ которомъ находится задуманная карта, то уже извѣстно, что она есть одна изъ 5 картъ этого указаннаго ряда. Помѣщая тотъ рядъ, гдѣ находится задуманная карта, между 2-мя остальными рядами и раскладывая карты, какъ указано, во второй разъ, не трудно опредѣлить, гдѣ будутъ находиться тѣ пять картъ, между которыми находится задуманная карта:

1. Одна	упадетъ	на	2-е	мѣсто	третьяго	ряда
2. Другая	»	»	3-е	»	перваго	»
3. Третья	»	»	3-е	»	второго	»
4. Четвертая	»	»	3-е	»	третьяго	»
5. Пятая	»	»	4-е	»	перваго	»

Обозначая черезъ 0 карты тѣхъ рядовъ, гдѣ нѣтъ задуманной карты, а черезъ 1 карты того ряда, гдѣ находится задуманная карта, находимъ, что послѣ второй раскладки карты расположатся такъ:

1-й рядъ.	2-й рядъ.	3-й рядъ.
0	0	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0
0	0	0

Слѣдовательно, если задуманная карта находится въ первомъ ряду, то ясно, что это или 3-я или 4-я карта этого ряда. Поэтому, при перекладыванiи картъ еще разъ такъ, какъ указано, задуманная карта упадетъ на третье мѣсто второго или третьяго ряда. Если послѣ второй раскладки окажется, что задуманная карта находится во второмъ ряду, то ясно, это есть третья карта этого ряда, и что послѣ слѣдующей раскладки она опять упадетъ на то же мѣсто. Наконецъ, если задуманная карта будетъ въ третьемъ ряду, то ясно, что это одна изъ двухъ этого ряда, 2-я или 3-я, и послѣ третьей раскладки она будетъ третьей въ первомъ или во второмъ ряду.

Напоминаю еще разъ, что всѣ эти доказательства надо усвоивать съ картами въ рукахъ, хотя они и очень не трудны. Кромѣ того, всегда необходимо разбираться въ томъ, что общее и что частное. Только что приведенное доказательство, напримѣръ, относится, очевидно, только къ данному случаю и къ данному числу картъ (15). Оно не показываетъ, можно ли, вообще, при нечетномъ числѣ картъ, расположенныхъ въ нечетное число равныхъ рядовъ, прійти къ тому, чтобы задуманная карта находилась въ серединѣ игры.

Поэтому, если захотите, попытайтесь разобраться въ слѣдующемъ болѣе общемъ доказательствѣ. Оно тоже не трудно.

Другое доказательство.

Пусть будетъ n число картъ каждаго ряда и t число рядовъ. Задуманная карта пусть находится сначала въ числѣ n картъ средняго ряда. При слѣдующей раскладкѣ эти n картъ распредѣлятся въ t рядахъ; и если n, дѣленное на t, даетъ цѣлое частное e, то карты, въ числѣ которыхъ находится задуманная, распредѣлятся въ t рядахъ поровну, образуя группу въ e картъ въ серединѣ каждаго ряда. Напр., при 27-ми картахъ:

1-я раскладка картъ.			2-я раскладка картъ.		
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0

То же самое получится, если частное e дѣлится также на t, а также если полученное новое частное f тоже дѣлится на t и т. д. Такимъ образомъ задуманная карта всегда находится въ группѣ, занимающей середину взятой раскладки картъ, если только она задумана изъ того ряда, который былъ среднимъ при первой раскладкѣ.

Итакъ, если дѣленія на t совершаются безъ остатка до тѣхъ поръ, пока не получится частное 1, то какая-либо карта задуманная изъ средняго ряда, въ концѣ концовъ попадетъ въ *середину* этого средняго ряда. И когда угадывающій послѣ нѣсколькихъ раскладокъ скажетъ, что задуманная имъ карта находится опять въ среднемъ ряду, то вы тотчасъ же можете ее указать.

То же самое, впрочемъ, относится и къ случаю, когда указанныя выше дѣленія не совершаются нацѣло (безъ остатка). Тогда получаются такіе поперечные ряды, въ которыхъ встрѣчаются карты двухъ рядовъ (т. е. изъ того ряда, въ которомъ задумана карта, и изъ другого). Такъ, напр., для $t=5$ и $n=9$ можемъ имѣть:

1-я раскладка картъ.					2-я раскладка картъ.				
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Но очевидно, что и здѣсь послѣ ряда соотвѣтствующихъ раскладокъ мы придемъ къ тому, что задуманная карта, въ концѣ концовъ, будетъ въ самой серединѣ взятыхъ картъ.

Общее замѣчаніе.

Усвоивъ хорошо общія основанія предыдущей карточной задачи, не трудно всячески разнообразить ее со всякимъ числомъ картъ. Все дѣло заключается только въ томъ, чтобы карты одного какого-либо ряда посредствомъ другого расположенія ихъ отдѣлились и размѣстились въ разные ряды. Легко показать и объяснить это на самомъ простомъ примѣрѣ. Взявъ, наприм., 16 картъ и расположивъ ихъ въ два ряда по 8-ми картъ, спросите кого-либо, въ какомъ ряду находится задуманная имъ карта. Тогда вы уже знаете, что задуманная карта есть одна изъ восьми.

Взявъ, затѣмъ каждый рядъ отдѣльно и располагая опять карты въ такомъ порядкѣ: одна въ первомъ ряду, другая во второмъ, третья въ первомъ, четвертая во второмъ и т. д., не трудно видѣть, что изъ этихъ 8 картъ, гдѣ находилась задуманная карта, 4 упадутъ въ одинъ рядъ и 4 въ другой.

Итакъ, если намъ укажутъ, въ какомъ ряду находится задуманная карта, то вы знаете, что она есть одна изъ **4-хъ** извѣстныхъ картъ. Перекладывая соотвѣтственно карты, опять найдете, что задуманная карта будетъ одной изъ 2-хъ извѣстныхъ картъ, и т. д., пока, наконецъ, не укажете задуманной карты.

Задача 94-я.

Угадать задуманную пару картъ.

Поясненіе.

Предыдущую карточную задачу можно видоизмѣнить слѣдующимъ интереснымъ образомъ. Возьмемъ такое число картъ, которое было бы равно произведенію множителей, представляющихъ два послѣдовательныхъ (отличающихся другъ отъ друга на одну единицу) числа.

То есть надо брать или $3 \times 4 = 12$, или $4 \times 5 = 20$, или $5 \times 6 = 30$, или $6 \times 7 = 42$ карты. Разложимъ затѣмъ всѣ эти карты въ рядъ по двѣ и попросимъ кого-либо замѣтить любую *пару* рядомъ лежащихъ картъ. Складываемъ всѣ взятыя карты, наблюдая, чтобы всѣ парныя карты лежали другъ за другомъ; а затѣмъ раскладываемъ ихъ въ прямоугольникъ, наблюдая такой порядокъ: сначала кладемъ три карты по порядку одна возлѣ другой, четвертую подъ первой, пятую возлѣ третьей, 6-ю подъ 4-й, 7-ю возлѣ пятой, 8-ю подъ 6-й и т. д. до тѣхъ поръ, пока число картъ, которыя кладутъ рядомъ одна возлѣ другой, не будетъ равно большему множителю (или, иначе, числу, выражающему большую сторону прямоугольника), а число картъ, положенныхъ одна подъ другой, не будетъ равно меньшему множителю. Лучше всего въ данномъ случаѣ способъ раскладки картъ пояснить на примѣрѣ. Пусть взято 20 картъ (т. е. 4×5). Обозначимъ эти карты по порядку такъ: 1, 2, 3,..., 20.

Рѣшеніе.

Разложимъ карты по парамъ, дадимъ замѣтить кому-либо любую пару, затѣмъ сложимъ и будемъ раскладывать въ прямоугольникъ. Разложеніе, какъ объяснено выше, должно происходить въ слѣдующемъ порядкѣ (см. фиг. 89):

A	1	2	3	5	7	*B*
C	4	9	10	11	13	*D*
E	6	12	15	16	17	*F*
G	8	14	18	19	20	*H*

Фиг. 89.

Послѣ этого спросимъ, въ какомъ ряду, или въ какихъ рядахъ находится задуманная кѣмъ-либо пара картъ, или, по нашему обозначенію, пара чиселъ (при чемъ ряды считаются горизонтально, какъ указано буквами,—т. е. первый рядъ есть *AB*, второй *CD*, третій *EF*, четвертый *GH*). Положимъ, укажутъ, что оба числа находятся въ **одномъ ряду**, напр., третьемъ. Тогда можно быть увѣреннымъ, что оба эти числа (или карты) находятся **рядомъ**, и первое изъ нихъ занимаетъ третье же мѣсто въ этомъ ряду, т. е. въ данномъ случаѣ задуманныя числа (карты) будутъ 15 и 16.

Необходимо для вѣрнаго рѣшенія задачи замѣтить числа (карты) 1 и 2 перваго ряда, 9 и 10 второго, 15 и 16—третьяго, 19 и 20—четвертаго. Эти числа (или карты) можно назвать **ключомъ** задачи, и при помощи ихъ опредѣляются числа (карты) не только въ томъ случаѣ, когда они находятся въ одномъ ряду, но и въ томъ, когда они находятся въ двухъ различныхъ рядахъ. Въ этомъ случаѣ, когда указаны ряды, въ которыхъ находятся задуманныя числа (карты), нужно взять **ключъ** указаннаго высшаго ряда и подъ первымъ числомъ этого ключа въ указанномъ нижнемъ ряду найдемъ одно задуманное число (карту), а въ сторонѣ отъ второго числа (карты) ключа на такомъ же разстояніи найдемъ второе задуманное число (карту). Напр., пусть задуманныя карты будутъ 7 и 8. Тогда скажутъ, что одна находится въ 1-мъ ряду, а другая въ 4-мъ. Беремъ, значитъ, ключъ перваго ряда, 1 и 2. Подъ 1 въ нижнемъ ряду, т. е. на третьемъ мѣстѣ, находится 8, а за вторымъ числомъ ключа, 2, находится на третьемъ мѣстѣ 7. Слѣдовательно, получаются задуманныя числа (карты).

Пусть еще скажутъ, что задуманныя числа находятся во второмъ и четвертомъ ряду. Беремъ первое число ключа 2-го ряда (т. е. 9), подъ нимъ въ четвертомъ ряду число 14,— это и есть одно изъ задуманныхъ чиселъ, на такомъ же разстояніи вправо отъ второго числа ключа, 10, находится 13,— это и есть другое задуманное число (или карта).

Почему все это такъ, а не иначе, — ясно изъ принятаго способа раскладки картъ. Ясно также, что изъ чиселъ (картъ), взятыхъ по парамъ, въ каждомъ ряду можетъ находиться только по одной парѣ (именно пара, входящая въ ключъ раскладки). Изъ всѣхъ же остальныхъ паръ, если одно число (или карта) будетъ въ одномъ ряду, то другое будетъ въ другомъ, и чтобы угадать ихъ, необходимо только правильно разложить карты и поступать, какъ объяснено выше.

Для 30 картъ раскладка имѣетъ слѣдующій видъ (фиг. 90):

1	2	3	5	7	9
4	11	12	13	15	17
6	14	19	20	21	23
8	16	22	25	26	27
10	18	24	28	29	30

Фиг. 90.

Для 42 картъ имѣемъ (фиг. 91):

1	2	3	5	7	9	11
4	13	14	15	17	19	21
6	16	23	24	25	27	29
8	18	26	31	32	33	35
10	20	28	34	37	38	39
12	22	30	36	40	41	42

Фиг. 91.

Очевидно, что въ данной задачѣ можно предоставить угадывать пары картъ не только одному, но нѣсколькимъ лицамъ. Затѣмъ, разложивши указаннымъ способомъ карты въ прямоугольникъ, спрашивать каждаго, въ которомъ ряду находятся задуманныя имъ карты, и указывать ихъ по соотвѣтствующему ключу, который для каждой раскладки легко опредѣлить, руководясь изложенными выше правилами.

Задача 95-я.

Изъ нѣсколькихъ взятыхъ картъ, или изъ цѣлой колоды, угадать ту, которую кто-либо задумалъ.

Рѣшеніе.

Возьмите нѣсколько картъ, или всю колоду, если хотите, и показывайте ихъ по порядку задумывающему карту. Число картъ, которымъ вы пользуетесь при этой задачѣ, должно быть вамъ напередъ извѣстно. Показавъ, не глядя, всѣ карты и сложивъ ихъ въ томъ же порядкѣ, вы спрашиваете задумывающаго: **какую по порядку** изъ показанныхъ картъ онъ задумалъ (т. е. первую ли, вторую, третью, четвертую и т. д.)? Затѣмъ обьявите, что, считая карты извѣстнымъ образомъ, вы откроете карту на томъ числѣ, которое вамъ угодно (оно должно быть, однако, равно или числу картъ, взятыхъ вами, или бо̀льшему числу). Чтобы достигнуть этого, вы спрашиваете, какая карта по порядку задумана партнеромъ. Положимъ, что у васъ 20 картъ, онъ скажетъ, что задумана имъ 7-я карта, а вы объявите, что откроете задуманную карту на числѣ 20. Тогда вы начинаете открывать карты со стороны, противоположной той, съ которой показывали карты, и первую карту считаете за семь, вторую за восемь и т. д. Двадцатая карта и будетъ задуманная.

Если вы заявите, что откроете задуманную карту на числѣ бо̀льшемъ, чѣмъ число взятыхъ картъ, то должны соотвѣтственно увеличить число задуманной карты, а затѣмъ отсчитывать по предыдущему.

Доказательство.

Предположимъ, что задуманная карта есть 7-я, и что взято 20 картъ. Отъ задуманной карты приходимъ къ послѣдней, если будемъ считать по порядку:

7, 8, 9, 10....., 17, 18, 19, 20.

Или, если сюда прибавить еще какое-либо число, напр. 3, то получится:

10, 11, 12,...., 20, 21, 22, 23.

Слѣдовательно, отъ послѣдней карты придемъ къ задуманной, считая точно также, но начиная съ этой послѣдней карты, которую теперь называемъ числомъ «десять».

Задача 96-я.

Карта на мѣсто!

Взята игра въ 32 карты (до семерокъ включительно). Сдѣлать такъ, чтобы замѣченная кѣмъ-либо карта находилась на опредѣленномъ, сказанномъ впередъ, мѣстѣ.

Рѣшеніе.

Предложите кому-либо замѣтить въ колодѣ какую-либо карту, а также запомнить про себя, на какомъ мѣстѣ, считая отъ низа колоды, находится его карта, и объявите при этомъ, что потомъ, считая сверху, онъ найдетъ ее на такомъ-то, заданномъ напередъ, скажемъ,—двадцатомъ мѣстѣ.

Вслѣдъ затѣмъ возьмите карты и переложите съ низу на верхъ колоды 20 картъ (нужно сдѣлать это, держа руки за спиной, чтобы замѣтившій карту не зналъ числа переложенныхъ вами картъ). Отдайте карты обратно замѣтившему карту и спросите, на какомъ мѣстѣ замѣтилъ онъ раньше свою карту. Если онъ скажетъ число меньшее 20-ти, напр., 15, то значитъ, его карта перешла наверхъ и до нея, считая сверху, будетъ 20—15 картъ, а сама она будетъ на (20—15+1)-мъ мѣстѣ. Значитъ, вы скажите ему, чтобы онъ взялъ снизу колоды 15—1, т. е. 14 картъ, переложилъ ихъ наверхъ и считалъ затѣмъ по порядку до 20-ти. На этомъ числѣ онъ и найдетъ свою карту. Если, наоборотъ, замѣченное имъ раньше мѣсто картъ выражается числомъ, большимъ 20, напр., числомъ 25, то разсуждаете такъ. Сначала, считая сверху, замѣченная карта была на (32—25+1)-мъ мѣстѣ, а затѣмъ на мѣстѣ (20+33—25)-мъ, т. е. на 28-мъ. Поэтому скажите угадывающему, чтобы онъ съ верха положилъ на низъ колоды восемь (33—25=8) картъ и считалъ карты сверху. На 20-мъ мѣстѣ онъ и найдетъ свою карту.

Вообще пусть a есть число, показывающее порядокъ, считая съ низа, замѣченной карты, а b число, на которомъ вы желаете, чтобы выпала замѣченная кѣмъ-либо карта. Переложите съ низа на верхъ b картъ и спросите порядокъ замѣченной карты. Вамъ скажутъ a. Если a меньше b, то на верхъ нужно положить $a-1$ карту; если a больше b, то нужно положить съ верха подъ низъ $33-a$ картъ.

Считая затѣмъ карты сверху, найдемъ всегда замѣченную карту на мѣстѣ b.

Задача 97-я.

Кто что взялъ,—я узналъ!

Угадать, не глядя, кѣмъ изъ трехъ лицъ взята каждая изъ трехъ вещей.

Положите на столъ три различныхъ вещи, напр., ножикъ, карандашъ и перо. Положите на столъ также двадцать картъ, или другихъ какихъ-нибудь одинаковыхъ предметовъ (напр. спичекъ, палочекъ, кубиковъ, камешковъ и т. д.). Пригласите вашихъ трехъ товарищей, напр., Петра, Павла и Ивана, сѣсть за столъ, а сами оборотитесь къ нимъ спиною, или даже уйдите въ другую комнату. Предложите этимъ товарищамъ вашимъ разобрать три вещи по одной, какъ имъ угодно. Послѣ этого вы говорите: «Петръ, возьми одну карту (или спичку и т. д.), Павелъ двѣ, Иванъ четыре». Когда это ваше желанiе исполнено, говорите далѣе: «Пусть тотъ, у кого карандашъ, возьметъ себѣ еще столько картъ (или спичекъ и т. д.), сколько имѣетъ, тотъ же, у кого ножикъ, пусть положитъ себѣ еще два раза столько картъ (или спичекъ и т. д.) сколько имѣетъ». Когда и это второе ваше желанiе исполнено, вы попросите, чтобы вамъ дали оставшiяся карты. По этому остатку вы можете узнать, у кого какая вещь. Но какъ?

Рѣшенiе.

Здѣсь вы должны разобраться въ нѣкоторыхъ числахъ и заранѣе заготовить себѣ или умѣть составить въ любой данный моментъ табличку извѣстныхъ чиселъ, основываясь на такихъ соображенiяхъ:

Предложивши тремъ лицамъ сначала взять одну, двѣ и четыре карты (или спички и т. д.), вы, въ сущности, отмѣтили каждое лицо извѣстнымъ числомъ (Петръ - одинъ, Павелъ—два, Иванъ—четыре). Затѣмъ каждое изъ этихъ трехъ лицъ по вашему указанiю увеличиваетъ принадлежащее ему число. У кого карандашъ, беретъ еще столько картъ, сколько имѣетъ; у кого ножъ, еще два раза столько, сколько имѣетъ. У каждаго образуется свое число. Вся задача въ томъ, чтобы по остатку отъ двадцати картъ (или спичекъ и т. д.), которыя передаются въ ваши руки, узнать, какое у кого число. Другими словами, все основывается на томъ, что если мы числа 1, 2 и 4 будемъ всячески перемножать на числа 1, 2, 3 и затѣмъ брать всѣ полученныя суммы этихъ произведенiй, то будемъ всегда получать различныя числа.

Составляя суммы произведеній изъ 1, 2, 4 на 1, 2 и 3, получимъ таблицу:

1	2	4	
3	2	1	**11**
2	3	1	**12**
3	1	2	**13**
1	3	2	**15**
2	1	3	**16**
1	2	3	**17**

Если мы числа 1, 2, 4, стоящія наверху, перемножимъ соотвѣтственно на стоящія подъ ними числа и сложимъ полученныя произведенія, то получимъ суммы, написанныя въ нашей таблицѣ за чертою справа. *Эта-то таблица и даетъ средство угадать, къмъ изъ трехъ лицъ взята каждая изъ трехъ данныхъ вещей.*

Пусть, напримѣръ, изъ двадцати оставленныхъ на столѣ картъ (или спичекъ и т. д.) вамъ возвратили только 5. Слѣдовательно, всего разобрано 15. По приведенной выше табличкѣ мы замѣтимъ, что 15 получается, когда мы 1 умножимъ на 1, 2 на 3, 4 на 2 и полученныя произведенія сложимъ. Отсюда мы заключаемъ, что тотъ, кто имѣлъ 4 карты (Иванъ), взялъ еще столько же картъ, слѣдовательно, у Ивана карандашъ. Тотъ, кто имѣлъ 2 карты (Павелъ), взялъ еще два раза столько: слѣдовательно, у Павла ножикъ.

Замѣчаніе. Эту задачу можно распространить и на большее число лицъ, напр., на четырехъ лицъ. Но для этого новаго случая нужна и новая табличка, которую надо составить на основаніи такихъ соображеній: надо отыскать такія четыре числа (скажемъ: a, b, c, d), чтобы суммы произведеній изъ этихъ чиселъ на 1, 2, 3 и 4, составленныя всевозможными способами, были различны между собой. Такія наименьшія искомыя числа суть 1, 2, 5, 13.

Составьте изъ этихъ чиселъ (помноженіемъ на 1, 2, 3, 4 и сложеніемъ) табличку, подобную предыдущей, и вы можете «угадывать», кѣмъ изъ четырехъ лицъ взята каждая изъ данныхъ четырехъ вещей.

Задача 98-я.

Нѣкто беретъ 27 картъ и раскладываетъ ихъ, послѣдовательно одна за другою, на три кучки по 9 картъ въ каждой (Карты въ рукахъ раскладывающаго повернуты крапомъ вверхъ, и раскладывающій, при распредѣленіи на 3 кучки, поворачиваетъ ихъ лицомъ вверхъ). Просятъ кого-либо мысленно замѣтить во время этой раскладки любую карту и по окончаніи раскладки сказать, въ какой изъ кучекъ находится задуманная карта. Раскладывающій сладываетъ всѣ кучки вмѣстѣ такъ, чтобы порядокъ картъ въ каждой изъ кучекъ не былъ нарушенъ, и вновь раскладываетъ ихъ на три кучки, какъ указано выше, а вслѣдъ затѣмъ вновь узнается, въ какой кучкѣ карта теперь. Вслѣдъ затѣмъ карты складываются опять-таки такъ, чтобы порядокъ картъ въ каждой кучкѣ не былъ нарушенъ. Карты раскладываются и въ третій разъ точно также на три кучки; узнается, въ какой кучкѣ находится задуманная карта, и затѣмъ складываются вновь безъ нарушенія порядка картъ въ каждой кучкѣ. Спрашивается, какъ нужно всякій разъ помѣщать кучку, содержащую задуманную карту, чтобы въ концѣ означенныхъ раскладокъ карта занимала напередъ опредѣленное мѣсто?

Рѣшеніе.

Пусть **a**, **b**, **c** означаютъ порядокъ мѣста, на которое кладется та кучка, гдѣ находится задуманная карта. Передъ этой кучкой нужно, значитъ, предварительно распредѣлить $a - 1$ кучекъ изъ 9 картъ, что при нашемъ распредѣленіи дастъ по $3(a - 1)$ карты на каждую кучку. Затѣмъ та кучка, въ которой находится задуманная карта, добавляетъ еще 3 карты къ каждой кучкѣ, такъ что если указать кучку, въ которой находится задуманная карта, то она будетъ тамъ въ числѣ трехъ послѣднихъ изъ $3(a - 1) + 3$ картъ.

Вслѣдъ затѣмъ передъ кучкой, гдѣ находится задуманная карта, помѣщаемъ $b - 1$ остальныхъ кучекъ, такъ что придется передъ ней распредѣлять $9(b - 1) + 3(a - 1) + 3$ карты. Въ каждую кучку попадаетъ $3(b - 1) + (a - 1) + 1$ картъ, и послѣдняя изъ картъ и есть задуманная карта. Но, раскладывая карты еще разъ, мы передъ кучкой, гдѣ находится задуманная карта, помѣщаемъ $c - 1$ кучку, что для мѣста (назовемъ его R) задуманной карты даетъ:

$$9(c - 1) + 3(b - 1) + (a - 1) + 1.$$

Итакъ, для опредѣленія R имѣетъ формулу

$$R = 9(c - 1) + 3(b - 1) + a.$$

Отсюда, если извѣстно a, b и c, находимъ R. Если же R дано напередъ, то a, b и c можно опредѣлить по нижеслѣдующему правилу:

Взятое число R надо дѣлить на 3, полученное частное опять на три, но такъ, чтобы первый остатокъ не былъ нуль. Этотъ остатокъ будетъ a, и онъ указываетъ, на какомъ мѣстѣ нужно помѣстить ту кучку картъ, гдѣ находится задуманная карта. Второй остатокъ, увеличенный единицей, даетъ мѣсто, на которомъ должно указанную кучку помѣстить второй разъ, а второе частное, увеличенное единицей, дастъ мѣсто, гдѣ нужно помѣстить указанную кучку картъ въ третій разъ.

Напримѣръ: Требуется, чтобы задуманная карта была *одиннадцатой*.

$$\begin{array}{r|r|r}
11 & 3 & \\
\hline
2 & 3 & 3 \\
\cline{3-3}
 & 0 & 1
\end{array}$$

Отсюда видно, что кучку, содержащую задуманную карту, нужно въ первый разъ помѣстить на второмъ мѣстѣ, второй — на первомъ и третій на второмъ мѣстѣ.

Пусть еще требуется задуманную карту показать на *девятомъ* мѣстѣ.

$$\begin{array}{c|c|c} 9 & 3 & \\ \cline{2-2} 3 & 2 & 3 \\ \cline{2-3} & 2 & 0 \end{array}$$

Значитъ, кучку, гдѣ находится задуманная карта, въ первый разъ нужно помѣстить на третьемъ мѣстѣ, во второй разъ тоже на третьемъ и въ третій — на первомъ мѣстѣ.

Замѣчаніе.

Можно, конечно, разнообразить настоящую задачу, показывая ее кому-нибудь. Такъ, напр., въ первый разъ послѣ всѣхъ раскладокъ задуманную кѣмъ-либо карту можно изъять изъ колоды, держа ее за спиной, и положить ее затѣмъ на столъ. Въ другой разъ можно впередъ, до игры, объявить, на какомъ мѣстѣ будетъ задуманная карта, или же попросить любого изъ зрителей, чтобы онъ самъ назначилъ мѣсто, на которомъ желаетъ, чтобы очутилась задуманная карта. Наконецъ, можно отдать карты любому изъ присутствующихъ съ тѣмъ, чтобы онъ раскладывалъ ихъ самъ и складывалъ кучки, какъ угодно (не мѣняя только порядка картъ въ кучкахъ). Нужно при этомъ только замѣчать, на какомъ мѣстѣ кладется кучка, содержащая задуманную карту, и примѣнять указанную выше формулу. Подобные пріемы оживляютъ задачу.

Задача 99-я.

Сдѣлать то же, что и въ предыдущей задачѣ, но съ 48-ю картами, которыя раскладываются три раза на четыре кучки.

Рѣшеніе.

Пусть a будетъ порядокъ кучки съ задуманной картой послѣ первой раскладки, b порядокъ, въ которомъ она будетъ послѣ второй раскладки, и c порядокъ, въ которомъ она будетъ послѣ третьей раскладки.

Если кучку, содержащую задуманную карту, положить на мѣстѣ b, то до этой кучки, значитъ, находится $12(b-1)$ картъ, и, раскладывая ихъ опять на 4 кучки, мы найдемъ, что на каждую кучку изъ этихъ картъ придется по $3(b-1)$. Значитъ. задуманная карта находится въ своей кучкѣ послѣ этого количества $3(b-1)$ картъ; и если мы обозначимъ черезъ r мѣсто, которое она занимаетъ послѣ этихъ картъ, то ея мѣсто во всей кучкѣ опредѣлится числомъ $3(b-1)+r$. Складываемъ опять кучки и передъ кучкой, гдѣ помѣщается задуманная карта, кладемъ теперь $12(c-1)$ картъ. Означая, затѣмъ. черезъ R мѣсто, которое занимаетъ карта во всей взятой игрѣ. найдемъ, что

$$R=12(c-1)+3(b-1)+r.$$

Остается, теперь, опредѣлить количество r.

Когда складывали кучки въ первый разъ, то передъ кучкой, гдѣ находилась задуманная карта, было $12(a-1)$ картъ. Разложивъ затѣмъ карты, мы положили сначала въ каждую кучку по $3(a-1)$ карты и еще 3 карты изъ кучки, содержащей задуманную карту. При слѣдующей же раскладкѣ эти $6(a-1)+3$ карты распредѣлились въ четырехъ кучкахъ послѣ $3(b-1)$ картъ, какъ указано выше. Это и есть то распредѣленіе, которое даетъ мѣсто r. Но если $a=1$, то нужно распредѣлить только 3 карты, гдѣ находится задуманная карта. Она, слѣдовательно. будетъ на первомъ мѣстѣ послѣ $3(b-1)$ картъ и. значитъ,

$$R=12(c-1)+3(b-1)+1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Если $a=4$. то количество $3(a-1)+3$ равно 12. Эти двѣнадцать картъ, будучи распредѣлены, разложатся по 3 карты на каждую кучку, и такъ какъ задуманная карта находится между тремя послѣдними, то она будетъ третьей гдѣ-то послѣ $3(b-1)$ картъ, какъ это видно изъ слѣдующей разстановки, гдѣ x означаетъ въ кучкѣ задуманную карту:

1-я кучка.	2-я кучка.	3-я кучка.	4-я кучка.
c	c	c	c
c	c	c	c
c	x	x	x

Въ этомъ случаѣ:

$$R = 12(c-1) + 3(b-1) + 3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Если $a = 3$, количество $3(a-1)+3$ равно 9, и распредѣленіе этихъ 9 картъ послѣ $3(b-1)$ картъ, положенныхъ до нихъ, будетъ таково:

1-я кучка.	2-я кучка.	3-я кучка.	4-я кучка.
c	c	c	c
c	c	x	x
x			

Итакъ, если задуманная карта не въ первой кучкѣ, то она будетъ во второй кучкѣ послѣ $3(b-1)$ первыхъ картъ, и получается

$$R = 12(c-1) + 3(b-1) + 2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Но если задуманная карта находится въ первой кучкѣ, то

$$R = 12(c=1) + 3(b-1) + 3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Если случится это послѣднее, то достаточно, сложивъ кучки, взять одну карту съ верха игры и положить ее подъ низъ, чтобы равенство (4) замѣнилось равенствомъ (3).

Итакъ, задача рѣшается равенствами (1), (2) и (3). Отсюда вытекаетъ такое правило:

Число R, означающее мѣсто, на которомъ должна находиться задуманная карта, дѣлится на 3, а полученное частное на 4, и притомъ такъ, чтобы первое дѣленіе не давало въ остаткѣ нуля. Если первый остатокъ равенъ 1, то, складывая кучки въ первый разъ, нужно кучку, содержащую задуманную карту, положить наверхъ. Если остатокъ равенъ 3, то ее нужно положить снизу, а если остатокъ равенъ 2, то нужно указанную кучку положить на третьемъ мѣстѣ. Второй остатокъ, увеличенный единицей, покажетъ мѣсто, гдѣ нужно положить указанную кучку послѣ второй раскладки, а второе частное, увеличенное единицей, укажетъ, на какомъ мѣстѣ нужно положить кучку съ задуманной картой послѣ третьей раскладки. Но если послѣ первой раскладки приходилось кучку съ задуманной картой класть на третьемъ мѣстѣ и затѣмъ, если послѣ третьей раскладки задуманная карта окажется въ первой изъ четырехъ кучекъ, верхнюю карту надо переложить внизъ.

Примѣръ I. Требуется, чтобы задуманная карта была 37-ой.

$$\begin{array}{r|c|c} 37 & 3 & \\ \cline{1-2} 1 & 12 & 4 \\ \cline{3-3} & 0 & 3 \end{array}$$

Значитъ, въ первый разъ кучка съ задуманной картой кладется первой, во второй разъ—тоже первой, а въ третій разъ—четвертой.

Примѣръ II. Требуется, чтобы задуманная карта была 20-й.

$$\begin{array}{r|c|c} 20 & 3 & \\ \cline{1-2} 2 & 6 & 4 \\ \cline{2-3} & 2 & 1 \end{array}$$

Значитъ, кучку съ задуманной картой надо положить на третье мѣсто, во второй разъ тоже на третье и въ третій—на второе.

Примѣръ III. Требуется, чтобы задуманная карта была 24-ой.

$$\begin{array}{r|c|c} 24 & 3 & \\ \cline{2-2} 3 & 7 & 4 \\ \cline{2-2} & 3 & 1 \end{array}$$

Въ первый разъ кучка съ задуманной картой кладется на четвертомъ мѣстѣ, во второй разъ тоже на четвертомъ и въ третій—на второмъ.

Мосты и острова.

Не приходилось ли вамъ жить, а можетъ быть вы и сейчасъ живете въ городѣ, или мѣстности, гдѣ течетъ рѣка, которая дѣлится на протоки и рукава, образующіе острова. Черезъ рѣку и ея протоки переброшены, быть можетъ, мосты, соединяющіе различныя части города. Въ Петербургѣ, напримѣръ, очень много подобныхъ протоковъ, развѣтвленій Невы и разныхъ каналовъ, черезъ которые переброшено весьма большое количество мостовъ и переходовъ. Не приходила ли вамъ когда-либо въ голову мысль (если, конечно, вы живете въ мѣстности, гдѣ есть рѣка, острова и мосты) совершить такую прогулку, чтобы во время ея перейти *всѣ* эти мосты, но перейти ихъ такъ, чтобы на каждомъ побывать *только по одному разу*? Врядъ ли вы думали объ этомъ, а между тѣмъ мы стоимъ здѣсь передъ весьма интересной и важной задачей, поднятой впервые знаменитымъ математикомъ Эйлеромъ.

Совѣтуемъ въ свободное время заняться изученіемъ этой задачи въ особенности. Она служитъ отличнымъ введеніемъ въ совсѣмъ особую область геометріи, которую можно было бы назвать *геометріей расположеній* (Geometria situs, Géometrie de situations).

Геометрія расположеній занимается только вопросами *порядка* и *расположенія*, оставляя въ сторонѣ все относящееся къ измѣренію и отношенію величинъ геометрическихъ фигуръ и тѣлъ. Всѣ почти вопросы, связанные съ такими играми, какъ шахматы, шашки, домино, солитеръ, лото, многія карточныя задачи и т. д., наконецъ, такая практическая задача, какъ подборъ разноцвѣтныхъ нитей для составленія извѣстнаго узора ткани,—все это относится къ геометріи расположеній. Значитъ, практически геометрія эта извѣстна людямъ съ глубокой древности. А на желательность ея научнаго развитія указывалъ еще Лейбницъ въ 1710 году. Эйлеръ, какъ упомянуто, тоже занимался вопросами этого порядка и, между прочимъ, задачей о кенигсбергскихъ мостахъ, которую мы здѣсь и излагаемъ въ сколь возможно упрощенномъ видѣ.

Число научныхъ трудовъ и изслѣдованій въ области геометріи расположеній довольно значительно. Но, несмотря на блестящую разработку нѣкоторыхъ отдѣльныхъ вопросовъ, нужно сказать, что для общихъ основаній этой отрасли науки сдѣлано сравнительно мало. Для желающихъ посвятить себя этому предмету представляется обширное необработанное поле, на которомъ можно сдѣлать многое.

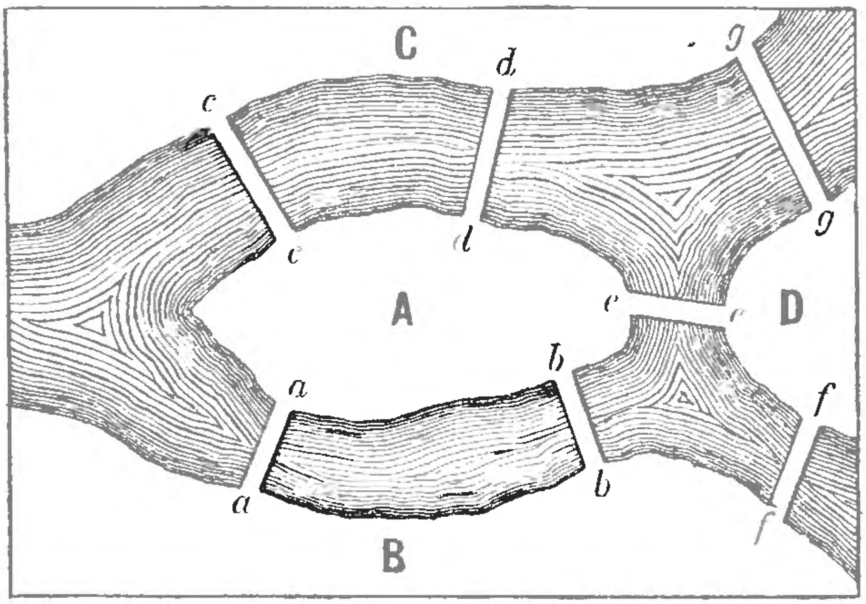
Вторая поучительная сторона предлагаемыхъ задачъ состоитъ въ изслѣдованіи, возможна или нѣтъ данная задача, прежде чѣмъ приниматься за рѣшеніе ея. Эйлеръ, въ частности, подробно изслѣдовалъ случай невозможности.

Задача 101-я.

Кенигсбергскіе мосты въ 1759 году.

Задача, предложенная Эйлеромъ въ 1759 году, заключается въ слѣдующемъ:

Въ городѣ Кенигсбергѣ, въ Помераніи, есть островъ по имени Кнейпгофъ. Рѣка, огибающая островъ, дѣлится на два рукава, черезъ которые переброшено семь мостовъ: a, b, c, d, e, f, g (см. фиг. 92). Спрашивается, можно ли сдѣлать такую прогулку, чтобы за одинъ разъ перейти черезъ всѣ эти мосты, не переходя ни черезъ одинъ мостъ два или болѣе разъ?



Фиг. 92.

«Это вполнѣ возможно!»—скажетъ кто-либо. «Нѣтъ, это невозможно!»—скажетъ иной. Но кто правъ и кто нѣтъ, и какъ это доказать?

Самый простой путь рѣшенія задачи, казалось бы, такой: сдѣлать *всѣ возможныя пробы* такихъ переходовъ, т. е. перечислить всѣ возможные пути, и затѣмъ разсмотрѣть, какой или какіе изъ нихъ удовлетворяютъ условіямъ вопроса. Но очевидно, что даже въ случаѣ только семи мостовъ приходится дѣлать слишкомъ много такихъ пробъ. А при увеличеніи числа мостовъ такой способъ рѣшенія практически совершенно немыслимъ. Да, кромѣ того, при одномъ и томъ же числѣ мостовъ задача измѣняется въ зависимости еще отъ *расположенія* этихъ мостовъ. Поэтому изберемъ иной, болѣе надежный путь рѣшенія задачи.

Рѣшеніе.

Прежде всего изслѣдуемъ, *возможенъ или нѣтъ* искомый нами путь для даннаго расположенія семи мостовъ. Для облегченія разсужденій введемъ такія условныя обозначенія:

Пусть A, B, C и D будутъ разныя части суши, раздѣленной рукавами рѣки (см. фиг. 92).

Затѣмъ: переходъ изъ мѣста A въ мѣсто B мы будемъ обозначать черезъ AB,—все равно, по какому бы мосту мы ни шли,—по *a* или по *b*. Если, затѣмъ, изъ B мы перейдемъ въ D, то этотъ путь обозначимъ черезъ BD, а весь переходъ или путь изъ A въ D обозначимъ черезъ ABD, такъ что здѣсь B одновременно обозначаетъ и мѣсто прибытія и мѣсто отправленія.

Если, теперь, изъ D перейдемъ въ C, то весь пройденный путь обозначимъ черезъ ABDC. Итакъ, это *обозначеніе* изъ *четырехъ* буквъ показываетъ, что изъ мѣста A мы, пройдя мѣста B и D, пришли въ C, при чемъ перешли *три* моста.

Если, значитъ, мы перейдемъ *четвертый* мостъ, то для обозначенія пути намъ понадобится *пять* буквъ. Послѣ перехода слѣдующаго *пятаго* моста понадобится обозначить пройденный путь *шестью* буквами и т. д.

Словомъ, — если бы мы обошли по *одному разу* всѣ семь данныхъ мостовъ, то нашъ *путь долженъ былъ бы обозначиться восемью буквами* (Вообще, если есть n мостовъ, то для обозначенія искомаго нами пути черезъ эти мосты понадобится $n+1$ буква).

Но какъ и въ какомъ порядкѣ должны итти буквы въ этомъ обозначеніи?

Между берегами A и B есть два моста. Значитъ, послѣдовательность буквъ AB или BA должна быть два раза. Точно также два раза должно повторяться сосѣдство буквъ A и C (Между этими мѣстами тоже два моста). Затѣмъ, по одному разу должно быть сосѣдство буквъ A и D, B и D, D и C.

Слѣдовательно, если предложенная задача возможна, т. е. возможно кенигсбергскіе мосты перейти такъ, какъ требуется задачей, то *необходимо*:

1) Чтобы весь путь обозначился только восемью буквами, — не болѣе; 2) чтобы въ расположеніи этихъ буквъ соблюдались указанныя условія относительно сосѣдства и повторяемости буквъ.

Разберемся, теперь, въ слѣдующемъ весьма важномъ обстоятельствѣ:

Возьмемъ, наприм., мѣстность A, соединенную съ другими мѣстностями нѣсколькими мостами: a, b, c,.... (въ данномъ случаѣ *пятью* мостами). Если мы перейдемъ мостъ a (все равно откуда, изъ A или другого мѣста), то въ обозначеніи пути буква А появится одинъ разъ. Пусть пѣшеходъ прошелъ 3 моста *a*, *b* и *c*, ведущіе въ А. Тогда въ обозначеніи пройденнаго пути буква А появится 2 раза, въ чемъ нетрудно убѣдиться. Если же на А ведутъ 5 мостовъ, то въ обозначеніи пути черезъ всѣ эти мосты буква А повторится 3 раза. Вообще легко вывести, что если число мостовъ, ведущихъ въ А, есть *нечетное*, то чтобы узнать, сколько разъ въ обозначеніи требуемаго пути повторится буква А, надо къ этому нечетному числу мостовъ прибавить единицу и полученное число раздѣлить пополамъ. То же, конечно, относится и ко всякой иной мѣстности съ нечетнымъ числомъ мостовъ, которую для краткости будемъ называть *нечетной мѣстностью*.

Усвоивъ все предыдущее, приступимъ къ окончательному изслѣдованію задачи о 7-ми кенигсбергскихъ мостахъ:

Въ мѣстность А ведетъ 5 мостовъ. Въ каждую изъ мѣстностей B, C и D ведетъ по три моста. Значитъ всѣ эти мѣстности *нечетныя*, и на основаніи только что сказаннаго—въ обозначеніе полнаго пути черезъ всѣ семь мостовъ необходимо чтобы

буква	А	вошла	$\frac{5+1}{2}$	, т. е.	3 раза
»	B	»	$\frac{3+1}{2}$	»	2 »
»	C	»	$\frac{3+1}{2}$	»	2 »
»	D	»	$\frac{3+1}{2}$	»	2 »
				Всего	9 буквъ.

Получается, такимъ образомъ, что въ обозначеніи искомаго пути необходимо должно войти 9 буквъ. Но мы уже доказали выше, что въ случаѣ возможности задачи весь путь долженъ необходимо обозначиться *только восемью* буквами. *Итакъ, задача для даннаго расположенія семи мостовъ невозможна.*

Значитъ ли это, что задача о переходѣ по одному разу черезъ мосты невозможна всегда, когда имѣется одинъ островъ, два рукава рѣки и семь мостовъ? Конечно, нѣтъ. Доказано только, что задача невозможна для *даннаго расположенія* мостовъ. При иномъ расположеніи этихъ мостовъ и рѣшеніе могло бы быть иное.

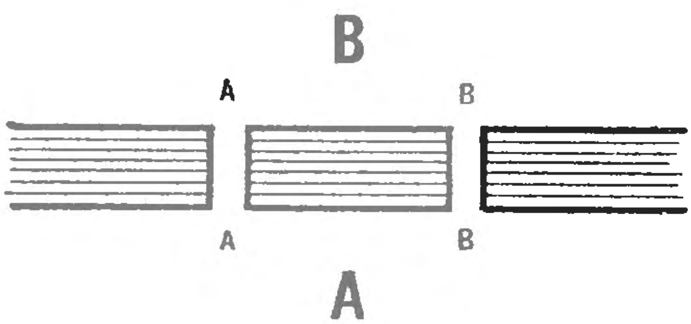
Теперь же замѣтимъ, что во всѣхъ тѣхъ случахъ, когда число мостовъ, ведущихъ въ различныя мѣста, есть нечетное, можно примѣнять разсужденія совершенно подобныя предыдущимъ и такимъ образомъ убѣдиться въ возможности или невозможности задачи. И не трудно вывести для даннаго случая такое общее правило:

Если число буквъ, которыя должны входить въ обозначеніе полнаго пути перехода черезъ всѣ мосты по одному разу, не равно числу мостовъ, увеличенному единицей, то задача невозможна.

Для этого же случая нечетныхъ мѣстностей замѣтимъ и то, что правила для нахожденія числа повтореній какой-либо буквы, наприм. A,—въ обозначеніи полнаго пути всегда одинаково приложимо, будутъ ли идущіе изъ A мосты вести въ одно какое-либо мѣсто B, или же въ различныя мѣста.

Чтобы перейти къ болѣе общему рѣшенію задачи, необходимо разсмотрѣть случаи, когда имѣемъ четное число мостовъ, ведущихъ откуда либо въ другія мѣста.

Пусть, напримѣръ, изъ мѣста A въ другія мѣста переброшено черезъ рѣку четное число мостовъ. Тогда при обозначе-



Фиг. 93.

ніи пути перехода черезъ всѣ мосты по одному разу надо различать два случая: 1) начинается ли путь изъ A, или 2) изъ другого мѣста.

Въ самомъ дѣлѣ, если изъ A въ B, напр., ведутъ два моста, то путникъ, отправившійся изъ A и прошедшій по одному разу оба моста, долженъ свой путь обозначать такъ: ABA, т. е. буква A повторяется два раза. Если же путникъ пройдетъ черезъ тѣ же два моста, но изъ мѣста B, то буква A появится всего одинъ разъ, ибо этотъ путь обозначится черезъ BAB.

Предположимъ теперь, что въ A ведутъ 4 моста,—изъ одной ли какой мѣстности или изъ разныхъ, это все равно. И пусть путникъ отправляется въ обходъ по одному разу всѣхъ мостовъ изъ мѣста A. Опять-таки легко видѣть, что въ такомъ случаѣ при обозначенiи пройденнаго пути буква A повторится 3 раза; но если начать обходъ изъ другой мѣстности, то буква A повторится только два раза. Точно также въ случаѣ шести мостовъ буква A въ обозначенiи всего пути повторится четыре раза, или три, смотря по тому, начался ли переходъ изъ A, или изъ другой мѣстности. Словомъ, можно вывести такое правило:

Если число мостовъ извѣстной мѣстности есть четное (четная мѣстность), то въ соотвѣтствующемъ обозначенiи пути буква, обозначающая мѣстность, появляется число разъ, равное половинѣ числа мостовъ, если переходъ начался изъ другой мѣстности. Если же переходъ начался изъ самой четной мѣстности, то число появленiй этой буквы равно половинѣ числа мостовъ да еще единица.

Очевидно, однако, что при полномъ пути переходъ начинается изъ одной только какой-либо опредѣленной мѣстности. Поэтому *условимся разъ навсегда* для *четной мѣстности* число повторенiй ея буквы въ обозначенiи пути считать равнымъ *половинѣ* числа мостовъ, ведущихъ въ эту мѣстность; а для *нечетной* мѣстности число повторенiй ея буквы получимъ, если къ числу мостовъ этой мѣстности придадимъ единицу и полученное число раздѣлимъ пополамъ.

Итакъ, при рѣшенiи задачи о мостахъ необходимо различать два случая:

1) *Идущiй отправляется изъ нечетной мѣстности*; 2) *онъ идетъ изъ четной мѣстности.*

Въ первомъ случаѣ число повторенiй буквъ, обозначающихъ полный путь, должно быть равнымъ числу мостовъ, увеличенному единицей. Въ противномъ случаѣ *задача невозможна.*

Во второмъ случаѣ полное число повтореній буквъ должно равняться числу мостовъ, такъ какъ, начиная путь съ четной мѣстности, нужно число повтореній соотвѣтствующей буквы увеличить единицей только для одной мѣстности.

Общее рѣшеніе.

Разсмотримъ теперь задачу о мостахъ съ болѣе общей точки зрѣнія. Изъ предыдущихъ разсужденій мы уже можемъ вывести общій пріемъ рѣшенія каждой подобной задачи о мостахъ. Во всякомъ случаѣ мы можетъ тотчасъ же убѣдиться въ невозможности подобнаго рѣшенія. Для этого расположимъ лишь рѣшеніе такъ:

1) Отмѣчаемъ общее количество мостовъ и ставимъ его въ заголовкѣ рѣшенія;

2) Обозначаемъ различныя мѣстности, раздѣленныя рѣкой, буквами A, B, C, D... и пишемъ ихъ въ столбецъ одна подъ другой;

3) Противъ каждой изъ мѣстностей пишемъ во второмъ столбцѣ число всѣхъ ведущихъ на нее мостовъ;

4) *Четныя мѣстности* отмѣчаемъ звѣздочкой при соотвѣтствующихъ буквахъ 1-го столбца;

5) Въ третьемъ столбцѣ соотвѣтственно пишемъ половины четныхъ чиселъ 2-го столбца; а если во второмъ столбцѣ есть числа нечетныя, то прибавляемъ къ нимъ единицу и пишемъ въ 3-мъ столбцѣ половину полученнаго числа (Каждое число 3-го столбца показываетъ число повтореній соотвѣтствующей буквы).

6) Находимъ сумму 3-го столбца.

Если эта послѣдняя сумма: 1) равна числу мостовъ, или 2) больше его всего на одну единицу, то вопросъ о полномъ обходѣ всѣхъ мостовъ по одному разу *можетъ* быть рѣшенъ, если только задача возможна вообще. Но при этомъ надо имѣть въ виду, что въ первомъ случаѣ обходъ надо начинать съ четной мѣстности, а во второмъ — съ нечетной. Для случая разсмотрѣнной нами задачи о 7-ми кенигсбергскихъ мостахъ будемъ имѣть, значитъ, такую схему рѣшенія:

Число мостовъ 7.

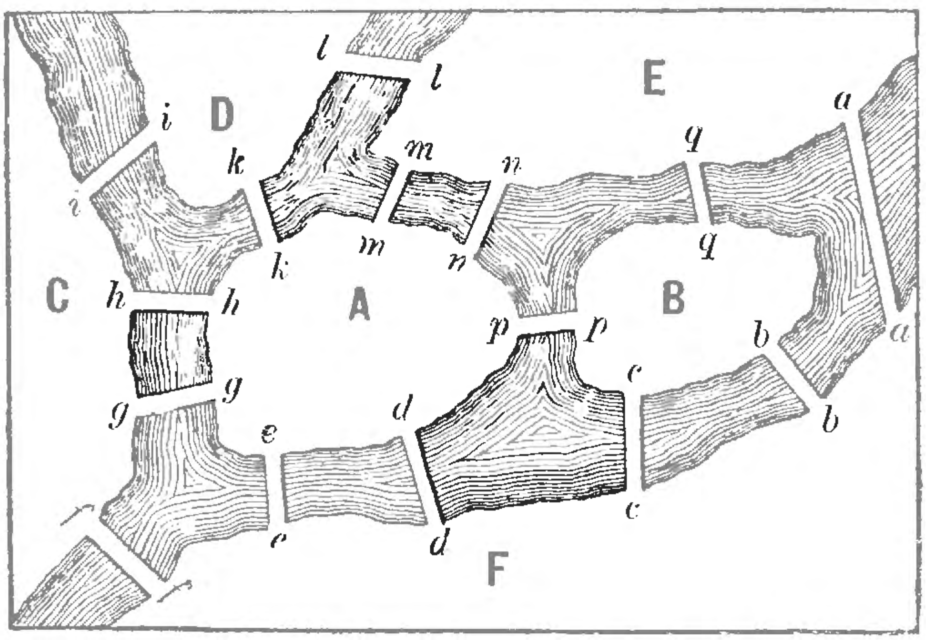
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
	Всего	9

Такъ какъ 9 больше, чѣмъ $7+1$, или 8, то, слѣдовательно, задача невозможна.

Задача 102-я.

Переходъ черезъ 15 мостовъ.

Попробуемъ теперь рѣшить другую задачу, въ которой имѣемъ два острова, соединенныхъ между собой и съ берегами рѣки 15-ю мостами, какъ это указано на прилагаемомъ рисункѣ (фиг. 94).



Фиг. 94.

Спрашивается: можно ли за одинъ разъ обойти всѣ эти мосты, не проходя ни черезъ одинъ болѣе одного раза?

Согласно выведеннымъ нами уже раньше пріемамъ рѣшенія, обозначаемъ разными буквами всѣ мѣстности, раздѣленныя различными рукавами рѣки и соединенныя мостами. Послѣ этого составляемъ слѣдующую таблицу:

Число мостовъ 15.

A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
Всего		16

Отсюда выводимъ, что задача возможна, ибо число повтореній буквъ на единицу больше числа мостовъ. Кромѣ того, по предыдущему знаемъ, что обходъ долженъ начаться изъ нечетной мѣстности D или E.

Искомый обходъ мостовъ можетъ быть сдѣланъ такъ:

EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBqFlD

или въ обратномъ порядкѣ. Маленькія буквы среди большихъ показываютъ, какіе именно переходятся мосты.

Изложенные выше пріемы рѣшенія задачи прежде всего позволяютъ судить объ ея возможности, или невозможности. Сдѣлаемъ теперь еще нѣсколько выводовъ, ведущихъ къ болѣе опредѣленному уясненію подобныхъ задачъ.

Замѣтимъ прежде всего, что сумма чиселъ второй колонны точно равна двойному количеству мостовъ. Это зависитъ отъ того, что въ каждомъ мосту мы считаемъ обѣ его оконечности, упирающіяся въ различные берега. Отсюда нетрудно вывести слѣдующее:

1) Сумма чиселъ второго столбца всегда должна быть четной, ибо половина ея должна дать число мостовъ.

2) Значитъ, если задача возможна, то въ ней или нѣтъ совсѣмъ *нечетныхъ мѣстностей,* или же они есть въ *четномъ* количествѣ (однако не болѣе двухъ, какъ увидимъ сейчасъ ниже). Иначе второй столбецъ при сложеніи не давалъ бы четнаго числа.

3) Если въ задачѣ всѣ мѣстности четныя, то задача всегда возможна, изъ какой бы мѣстности мы ни отправлялись.

Такъ, напримѣръ, въ случаѣ кенигсбергскихъ мостовъ задачу можно было бы рѣшить, если бы задано было обойти всѣ мосты по 2 раза каждый, что сводится, въ сущности, къ удвоенію числа мостовъ, т. е. къ обращенію всѣхъ данныхъ мѣстностей въ четныя.

4) Если въ задачѣ есть только двѣ нечетныя мѣстности, а остальныя всѣ четныя, то сумма цифръ третьяго столбца на единицу больше числа мостовъ, и задача возможна, если начать обходъ мостовъ съ одной изъ двухъ нечетныхъ мѣстностей. Но если число нечетныхъ мѣстностей будетъ болѣе 2-хъ, т. е. 4, 6, 8 и т. д., то задача оказывается невозможной, такъ какъ сумма чиселъ третьяго столбца будетъ болѣе числа мостовъ на 2, на 3, на 4 и т. д. единицы.

Вообще: При всякомъ данномъ расположеніи мостовъ тотчасъ же не трудно опредѣлить случай возможности или невозможности задачи. Задача невозможна, если число нечетныхъ мѣстностей болѣе двухъ. Задача возможна, если 1) всѣ мѣстности четныя и 2) если нечетныхъ мѣстностей только 2. Въ послѣднемъ случаѣ обходъ мостовъ надо начинать съ одной изъ этихъ нечетныхъ мѣстностей.

Изслѣдовавъ задачу и заключивъ о ея возможности, остается только совершить самый обходъ мостовъ. Но это уже сравнительно легкая часть задачи, при выполненіи которой лучше всего придерживаться такого правила:

Отбрасываемъ мысленно столько группъ мостовъ ведущихъ изъ одной мѣстности въ другую, сколько возможно. Уменьшивъ такимъ образомъ число мостовъ, опредѣляемъ чрезъ нихъ путь. Затѣмъ принимаемъ во вниманіе отброшенные раньше мосты и заканчиваемъ обходъ.

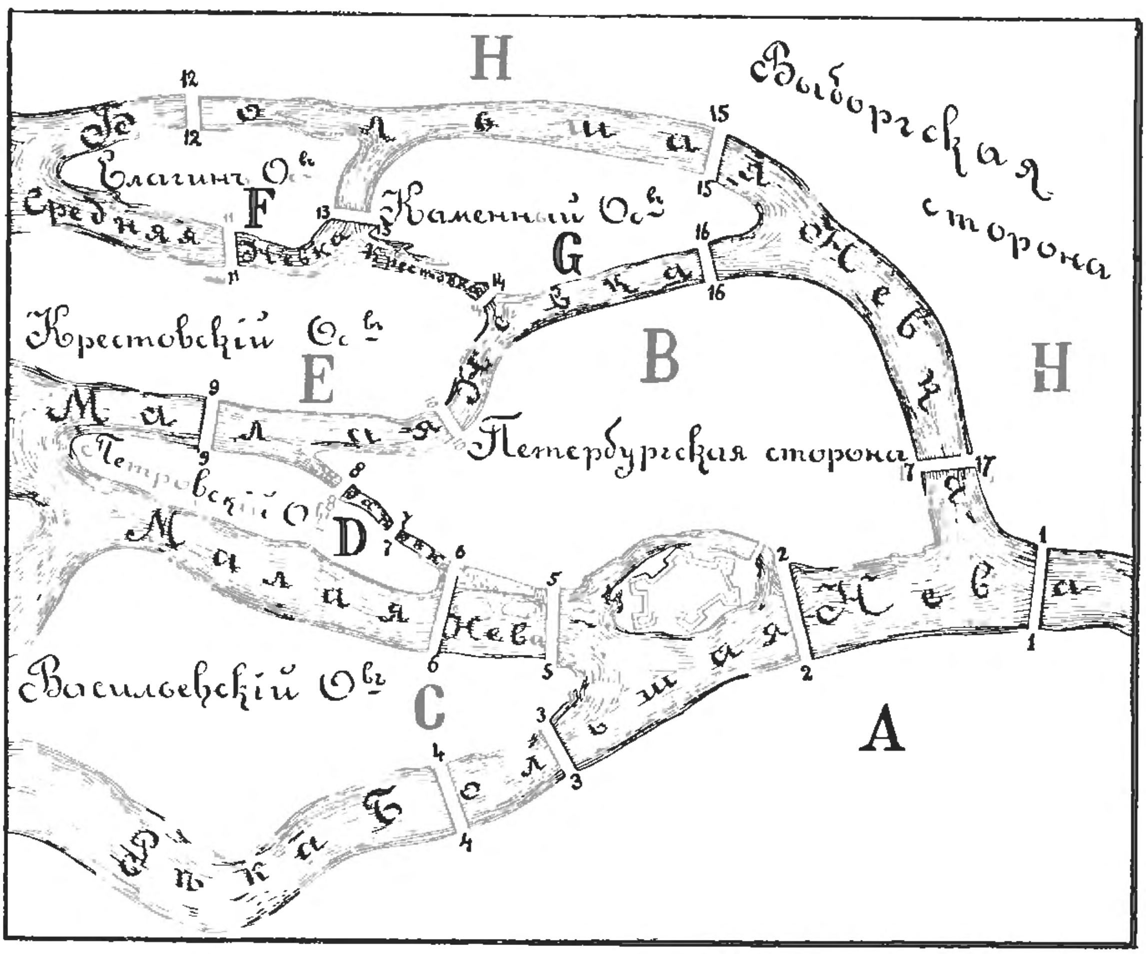
Задача 103-я.

Петербургскіе мосты.

Разсмотримъ теперь Петербургскіе мосты въ 1910 году, расположенные по Невѣ и ея рукавамъ.

Мы возьмемъ, впрочемъ, только всѣ мосты, ведущіе черезъ Большую Неву, и затѣмъ мосты, переброшенные на большіе острова черезъ Малую Неву, Большую, Малую и Среднюю Невки, черезъ р. Крестовку и Ждановку. Кронверкскій проливъ съ Петропавловской крѣпостью оставимъ въ сторонѣ. Точно также не беремъ Фонтанки, Мойки и многочисленныхъ каналовъ съ ихъ мостами, предоставляя читателю потомъ самому включить ихъ въ задачу и разобраться въ возможности ея рѣшенія, что очень легко.

Итакъ, мы имѣемъ (см. фиг. 95) 8 различныхъ мѣстностей,



Фиг. 95.

соединенныхъ 17-ю мостами. Приступимъ къ изслѣдованію задачи по выведенной уже выше схемѣ.

Всѣхъ мостовъ 17.

Городъ по лѣвую сторону Больш. Невы	A*	4	2
Петербургская сторона	B*	8	4
Васильевскій островъ	C*	4	2
Петровскій островъ	D	3	2
Крестовскій островъ	E*	4	2
Елагинъ островъ	F	3	2
Каменный островъ	G*	4	2
Выборгская сторона	H*	4	2
		Всего	18

Мы видимъ, что число нечетныхъ мѣстностей въ данномъ случаѣ равно двумъ, а сумма чиселъ третьяго столбца на единицу больше числа мостовъ.

Итакъ, задача возможна, при чемъ обходъ надо начинать изъ одной изъ нечетныхъ мѣстностей D или F, т. е. начать съ Елагина острова и придти на Петровскій, или наоборотъ. Если начать съ Елагина острова, то обойти всѣ мосты можно, напримѣръ, такъ:

$$F_{12}H_{15}G_{16}B_{17}H_{1}A_{2}B_{5}C_{3}A_{4}C_{6}B_{7}D_{8}B_{10}E_{14}G_{13}F_{11}E_{9}D.$$

Цифры, поставленныя между буквами, указываютъ, какіе переходятся мосты.

Задача 104-я.

Путешествіе контрабандиста.

Задачу о переходѣ черезъ мосты можно предлагать въ различныхъ видоизмѣненіяхъ. Можно свести ее, напримѣръ, на путешествіе контрабандиста, который рѣшилъ побывать во всѣхъ странахъ Европы, но такъ, чтобы черезъ границу каждаго государства ему пришлось переходить только одинъ разъ.

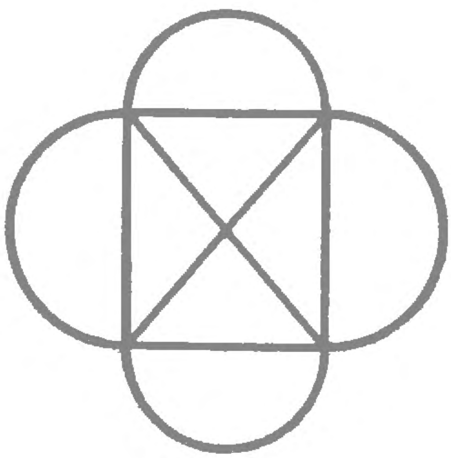
Въ данномъ случаѣ очевидно, что различныя страны и ихъ границы будутъ соотвѣтствовать разнымъ мѣстностямъ и рукавамъ рѣки, черезъ которыя переброшено по одному мосту (для каждой границы, общей двумъ странамъ).

Изслѣдуя возможность задачи, тотчасъ видимъ, что Швеція, Испанія и Данія имѣютъ нечетное число границъ съ сосѣдними государствами, т. е. число нечетныхъ мѣстностей болѣе двухъ. А слѣдовательно, путешествіе, которое предполагаетъ совершить контрабандистъ, невозможно.

О фигурахъ, вычерчиваемыхъ однимъ почеркомъ.

Задача 105-я.

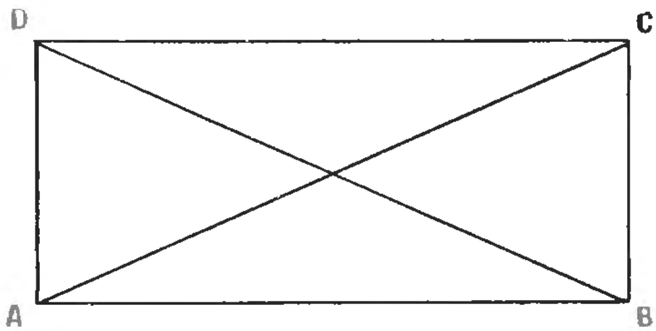
Помню, что въ дѣтствѣ меня соблазняла одно время надежда получить сразу цѣлый милліонъ рублей!... Милліонъ!... Подумаешь, чего только нельзя сдѣлать за эти деньги! И чтобы получить этотъ милліонъ, требовалось начертить только такую простую фигурку (фиг. 96):



Фиг. 96.

Шутники увѣряли меня, что англичане (почему именно они, а не кто иной,—не знаю) тотчасъ дадутъ милліонъ рублей каждому, кто придетъ къ нимъ и начертитъ эту фигуру. Но при вычерчиваніи ставилось одно условіе. Требовалось, чтобы фигура эта была вычерчена *однимъ непрерывнымъ почеркомъ*, т. е. не отнимая пера или карандаша отъ бумаги и *не удваивая* ни одной линіи, другими словами,—по разъ проведенной линіи нельзя уже было пройти второй разъ.

Надежда стать «милліонеромъ», рѣшивъ такую легкую задачу, заставила меня испортить много бумаги и потратить много времени на попытки вычертить эту фигуру, какъ требовалось, однимъ почеркомъ. Задача, однако, не рѣшалась, и это было тѣмъ досаднѣе, что она не рѣшалась только «чуть-чуть»... Никакъ не удавалось провести *только одной* «послѣдней» какой-либо линіи. Удалось даже открыть такой секретъ, что вся трудность въ томъ, чтобы вычертить сначала однимъ почеркомъ, не повторяя линіи, еще болѣе простую фигуру: четыреугольникъ съ двумя діагоналями (см. фиг. 97). Это, казалось бы, уже совсѣмъ просто, и все-таки... не удавалось!..



Фиг. 97.

— Этого нельзя сдѣлать!—восклицалъ я, наконецъ, съ неподдѣльнымъ отчаяніемъ.

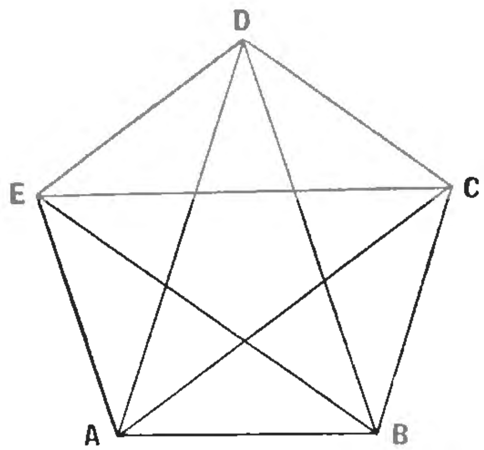
— Почему же нельзя?—отвѣчали мнѣ.—А вотъ найдется такой «умный» человѣкъ, что возьметъ да начертитъ и получитъ милліонъ.

Но позволить кому-либо выхватить, такъ сказать, у себя изъ-подъ носа милліонъ я никакъ не хотѣлъ и снова принимался за безконечныя попытки нарисовать эту фигурку однимъ почеркомъ.

— Этого нельзя сдѣлать!—сказали мнѣ, наконецъ, старшіе, знаніямъ и словамъ которыхъ я безусловно вѣрилъ. Но тогда и я, въ свою очередь, спросилъ:

— Почему?

И нужно сознаться, что *никто* изъ нихъ не могъ мнѣ этого объяснить, и сомнѣніе въ возможности этой задачи у меня такъ-таки и осталось, тѣмъ болѣе, что фигуры гораздо болѣе сложныя и трудныя съ виду легко вычерчивались однимъ почеркомъ. Такъ, напримѣръ, выпуклый пятиугольникъ со всѣми его діагоналями легко вычерчивался однимъ непрерывнымъ движеніемъ безъ повторенія линій, при чемъ получалась такая фигура (см. фиг. 98).



Фиг. 98.

То же самое легко удавалось со всякимъ многоугольникомъ съ нечетнымъ числомъ сторонъ и никакъ не удавалось съ квадратомъ, шестиугольникомъ и т. д., словомъ—съ многоугольникомъ съ четнымъ числомъ сторонъ.

Теперь намъ не трудно будетъ разобраться и доказать, какую изъ любыхъ данныхъ фигуръ можно вычертить однимъ почеркомъ, безъ повторенія линій, а какую нѣтъ. Каждую изъ задачъ подобнаго рода можно тотчасъ свести къ разобраной уже нами *Эйлеровой задачѣ о мостахъ*.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, наприм., четыреугольникъ ABCD съ двумя его діагоналями, пересѣкающимися въ E (фиг. 97). Можно ли его вычертить однимъ непрерывнымъ почеркомъ, безъ повторенія линій?

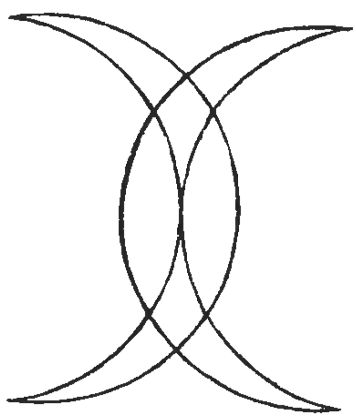
Точки A, B, C, D и E (эта послѣдняя буква обозначаетъ пересѣченіе діагоналей и на чертежѣ не показана) мы представимъ себѣ, какъ центры нѣкоторыхъ мѣстностей, раздѣленныхъ рѣкой, а линіи, соединяющія эти точки, какъ мосты, ведущіе въ эти мѣстности. Что же мы въ данномъ случаѣ получаемъ? Пять мѣстностей, изъ которыхъ 4 **нечетныхъ** и одна четная. Мы знаемъ уже, что въ такомъ случаѣ нельзя за одинъ разъ обойти всѣ мосты, не переходя ни черезъ одинъ два раза, или, другими словами,— нельзя обойти всѣ данныя точки одной непрерывной линіей безъ повторенія прежняго пути.

Случаи возможности и невозможности вычерчиванія однимъ почеркомъ фигуръ совершенно тѣ же, что и въ задачѣ о мостахъ. Одна задача, въ сущности, сводится на другую.

Всякій нечетный многоугольникъ со всѣми его діагоналями можно вычертить однимъ почеркомъ безъ повторенія линій потому, что этотъ случай соотвѣтствуетъ тому, когда данныя въ задачѣ о мостахъ мѣстности всѣ четныя.

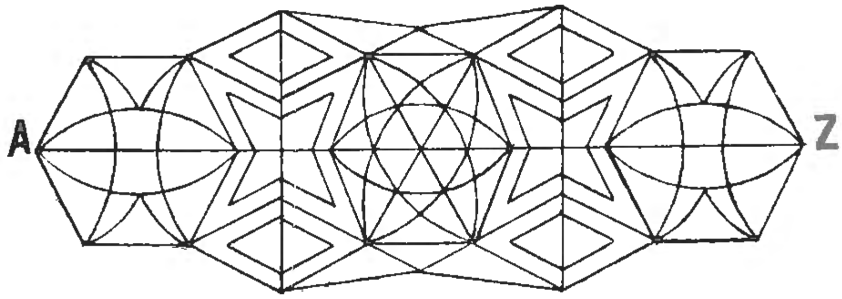
Соображенія, изложенныя здѣсь, одинаково прилагаются ко всякой фигурѣ, образована ли она прямыми или кривыми линіями, на плоскости ли или въ пространствѣ. Такъ, нетрудно видѣть, что возможно описать однимъ непрерывнымъ движеніемъ всѣ ребра правильнаго октаедра, и нельзя этого сдѣлать для четырехъ остальныхъ правильныхъ выпуклыхъ тѣлъ.

Говорятъ, что Магометъ концомъ своей палки вмѣсто подписи (онъ былъ неграмотенъ) описывалъ однимъ почеркомъ такой состоящій изъ двухъ роговъ луны знакъ (фиг. 99).



Фиг. 99.

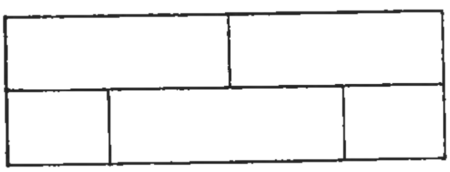
И это вполнѣ понятно, потому что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло только съ точками четнаго порядка, а слѣдовательно вычертить такую фигуру однимъ почеркомъ безъ повторенія тѣхъ же линій всегда возможно. Всегда возможно также вычертить однимъ почеркомъ и такую фигуру, гдѣ помимо точекъ четнаго порядка есть и двѣ точки (но не болѣе) нечетнаго порядка. Вотъ весьма красивый и замысловатый образчикъ такой фигуры, заключающей въ себѣ 2 нечетныя точки A и Z (Фиг. 100):



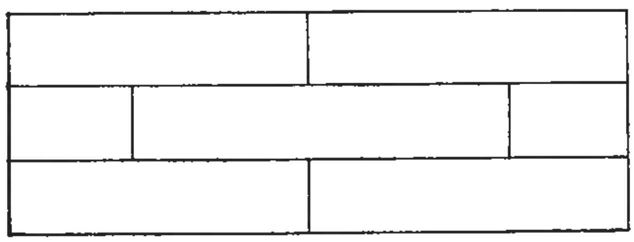
Фиг. 100.

Съ какой-либо изъ этихъ точекъ и надо начинать непрерывное вычерчиваніе фигуры, какъ мы уже знаемъ изъ задачи о мостахъ.

Также нельзя вычертить однимъ почеркомъ нижеслѣдующія фигуры (101 и 102).



Фиг. 101.



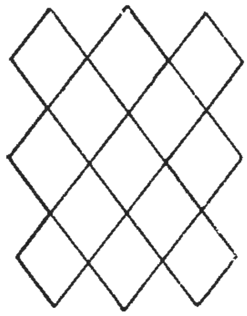
Фиг. 102.

при всей ихъ видимой простотѣ, такъ какъ въ первой 8, а во второй двѣнадцать точекъ нечетнаго порядка. Первая можетъ быть вычерчена не менѣе какъ **четырехкратной**, а вторая не менѣе, какъ **шестикратной** непрерывной линіей.

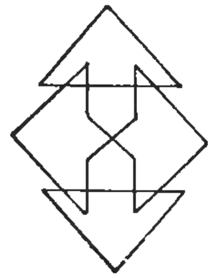
Если взять шахматную доску съ 64-мя клѣтками, то въ ней 28 точекъ нечетнаго порядка, и, чтобы вычертить ее, надо чертить 14-ти-кратную линію.

Съ другой стороны, если взять треугольникъ, подѣлить каждую изъ его сторонъ на 12 (или сколько угодно) равныхъ частей и провести изъ этихъ точекъ линіи, параллельныя другимъ сторонамъ, то полученная сѣтчатая фигура можетъ быть вычерчена однимъ непрерывнымъ движеніемъ безъ повтореній. Такихъ примѣровъ можно подобрать сколько угодно.

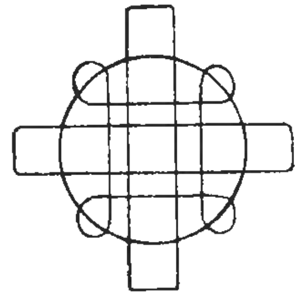
Для упражненія предлагаемъ читателю заняться во время досуга вычерчиваніемъ *съ одного почерка* нижеслѣдующихъ фигуръ:



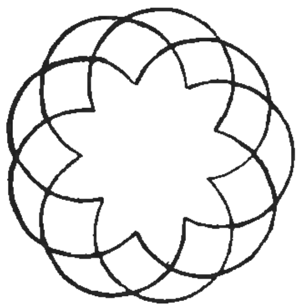
Фиг. 103.



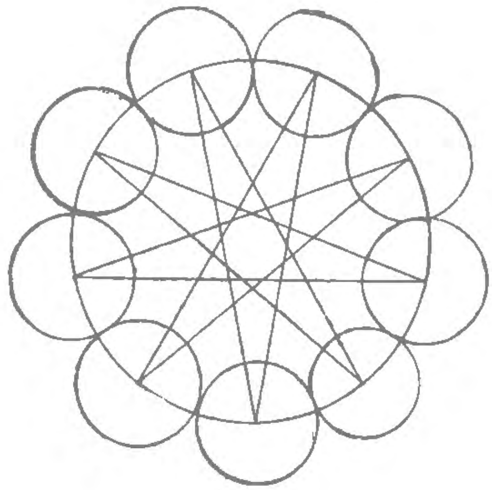
Фиг. 104.



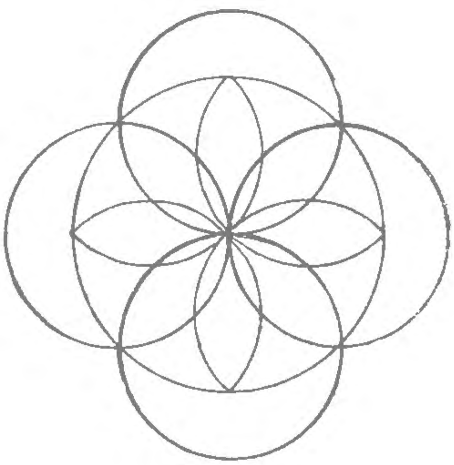
Фиг. 105.



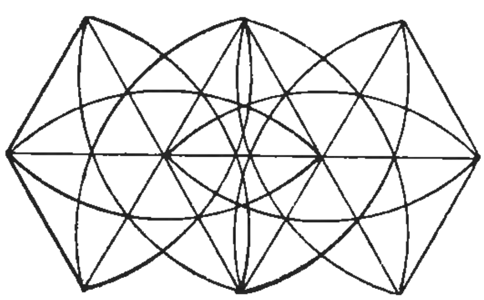
Фиг. 106.



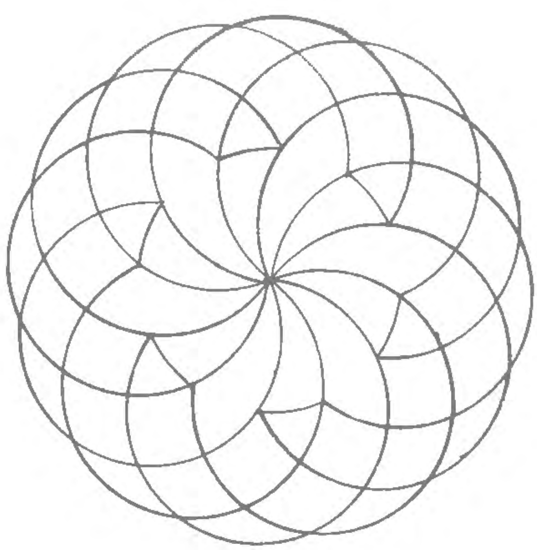
Фиг. 107.



Фиг. 108.

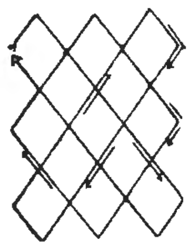


Фиг. 109.

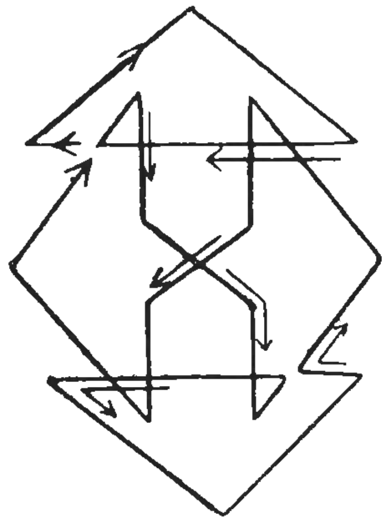


Фиг. 110.

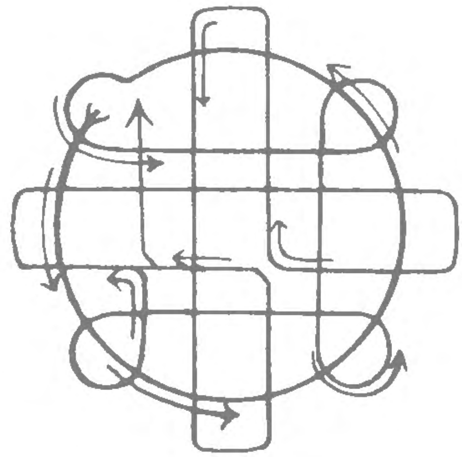
Нижеслѣдующія фигуры показываютъ, какъ наиболѣе просто дѣлается вычерчиваніе съ одного почерка предыдущихъ фигуръ.



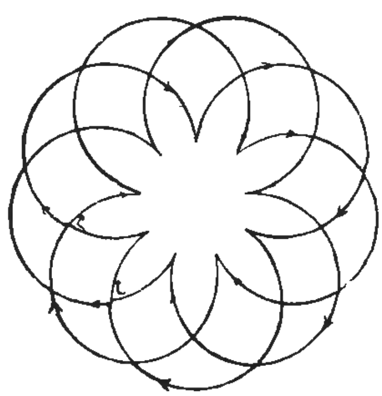
Фиг. 111.



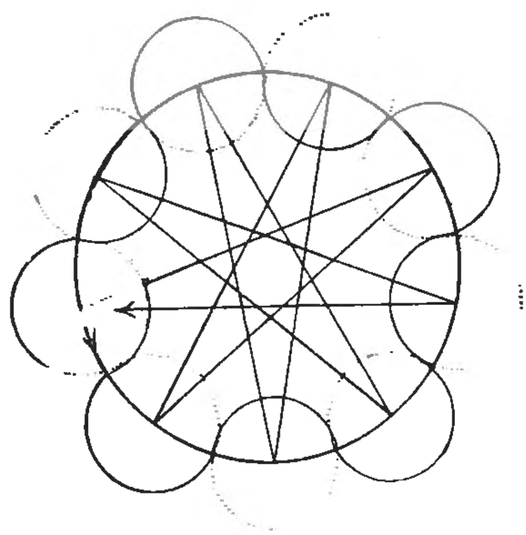
Фиг. 112.



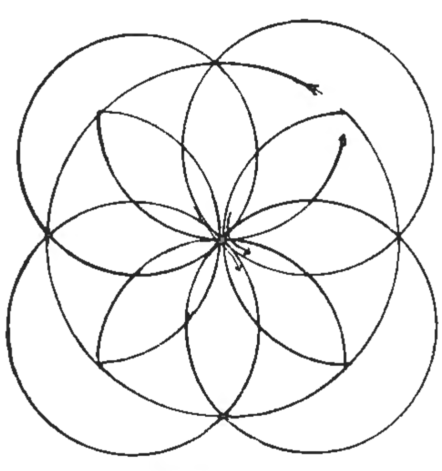
Фиг. 113.



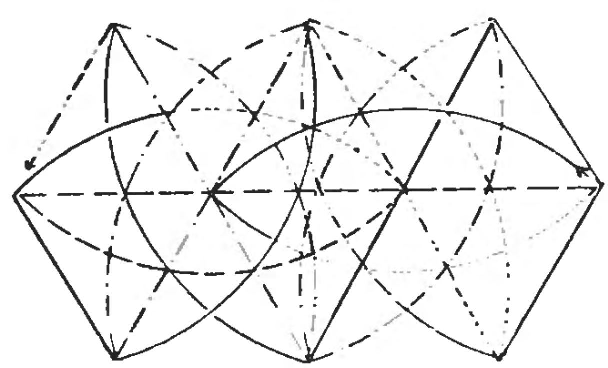
Фиг. 114.



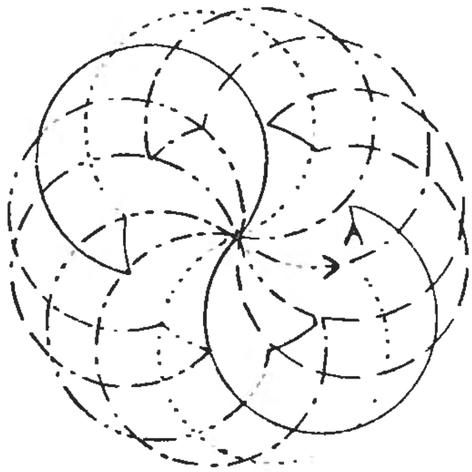
Фиг. 115.



Фиг. 116.



Фиг. 117.



Фиг. 118.

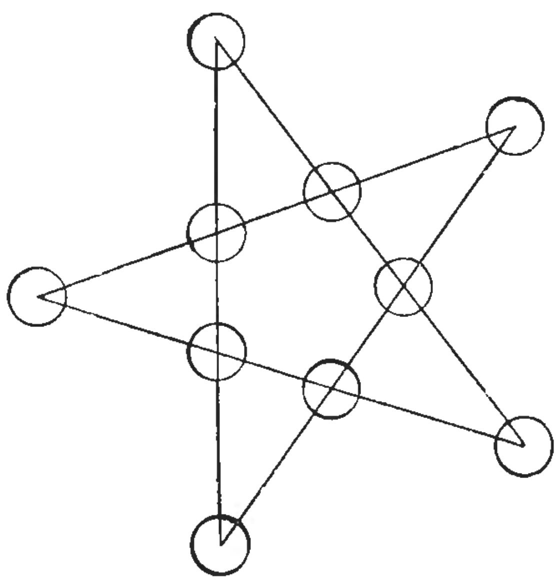
Задача 106-я.

Пять линiй, 10 монетъ.

Начертите на бумагѣ пять прямыхъ линiй и разложите на нихъ 10 монетъ такъ, чтобы на каждой линiи лежало по 4 монеты.

Рѣшенiе.

Фиг. 119 показываетъ, какъ рѣшается задача:



Фиг. 119.

Можно ли эту фигуру вычертить съ одного почерка?

Волшебная таблица.

5	4	3	2	1
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	8	4	2	1

Вотъ таблица, въ которой въ 5-ти столбцахъ выписаны извѣстнымъ образомъ всѣ числа отъ 1 до 31. Таблица эта отличается слѣдующимъ «волшебнымъ свойствомъ»:

Задумайте какое угодно число (но, конечно, не большее 31), и укажите только, въ какихъ столбцахъ этой таблицы находится задуманное вами число, и я тотчасъ же «угадаю» это число.

Если, напримѣръ, вы задумаете число 27, то, ничего не говоря иного, скажите только, что задуманное вами число находится въ 1-мъ, 2-мъ, 4-мъ и 5-мъ столбцахъ; а я уже самъ вамъ *навѣрное* скажу, что вы задумали именно число 27 (Можно это сказать, даже не смотря на таблицу).

Вмѣсто такой таблицы можно, если угодно, смастерить:

Волшебный вѣеръ.

Сдѣлайте сами, закажите или купите подходящій вѣеръ и на 5-ти пластинкахъ его выпишите изображенную выше таблицу. Можете, обвѣвая себя вѣеромъ, предлагать вашему собесѣднику задумать число и указать вамъ только пластинки, на которыхъ оно написано. Вы тотчасъ угадаете задуманное кѣмъ-либо число.

Но въ чемъ секретъ?

Разгадка.

Секретъ угадыванія съ виду простъ: обратите вниманіе на цифры, написанныя въ самой нижней графѣ. Если вамъ скажутъ, напримѣръ, что задуманное число находится во 2-мъ, 3-мъ и 5-мъ столбцѣ, считая слѣва, (или на 2-й, 3-й, 5-й пластинкѣ вѣера), то сложите числа, стоящія въ этихъ столбцахъ *внизу*, получите 22 ($2+4+16$), и будьте увѣрены, что задумано именно это, а не иное какое число.

Въ правильности таблицы можете убѣдиться и такъ: задумайте сами число (не больше 31), напримѣръ 18. Вы найдете это число во 2-мъ и 5-мъ столбцахъ. Внизу этихъ столбцовъ стоятъ числа 2 и 16; сложенныя вмѣстѣ, они даютъ, дѣйствительно, 18.

Но почему такъ? Какъ же составляется подобная таблица? Сколько можно составить такихъ таблицъ?

Полный и подробный отвѣтъ на это вы найдете дальше, въ главѣ о *двоичномъ счисленіи*, которую совѣтуемъ внимательно прочесть. Она даетъ много задачъ и объясняетъ сущность якобы волшебной таблицы. Здѣсь же пока замѣтимъ только слѣдующее:

Если написать рядъ чиселъ, начиная съ 1, такихъ, чтобы каждое было вдвое больше предыдущаго, т. е.:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 и т. д. (Иначе говоря: рядъ послѣдовательныхъ *степеней* 2-хъ), то числа эти отличаются тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ, что изъ нихъ можно получать сложеніемъ рѣшительно *всѣ цѣлыя числа*, даже не входящія въ этотъ рядъ, и притомъ полученныя послѣдовательныя числа ряда войдутъ *только по одному разу*.

Въ нашей таблицѣ (или вѣерѣ) мы взяли только рядъ чиселъ 1, 2, 4, 8, 16 (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4) и наглядно убѣждаемся, что съ помощью сложенія чиселъ этого ряда можно получить всѣ числа отъ 1 до 31, т. е. до 2^4—1. Впрочемъ, болѣе точное и строгое объясненіе всему этому вы найдете, какъ сказано, въ слѣдующей главѣ.

Тамъ же вы найдете рѣшеніе и объясненіе нижеслѣдующей интересной задачи.

Задача 107-я.

Въ лавкѣ бѣднаго торговца вмѣсто гирь было всего 4 камня. Однако, съ помощью этихъ камней онъ совершенно правильно взвѣшивалъ все въ цѣлыхъ фунтахъ, начиная съ одного фунта и до пуда, т. е. до 40 фунтовъ. Спрашивается: какого вѣса были эти камни.

Путемъ послѣдовательныхъ пробъ, пожалуй, нетрудно рѣшить эту задачу и найти, что камни должны быть вѣсомъ въ

1, 3, 9 и 27 фунтовъ. Но какъ найти *общее рѣшеніе* подобныхъ задачъ?

Все это разъяснится, если вы вникните въ слѣдующую главу. Но прежде чѣмъ взяться за ея чтеніе и изученіе, совѣтуемъ нашему читателю вновь продумать, что такое десятичная система счисленія, по которой считаетъ нынѣ все современное образованное человѣчество (См. также главу II-ю введенія: «Счетъ, мѣра и число»).

Двоичное счисленіе

О счисленіи вообще.

Умѣнье считать (счисленіе) очень часто разсматриваютъ, какъ основное ариѳметическое дѣйствіе, какъ начало всѣхъ дѣйствій, которыя можно производить надъ числами. *Это большое заблужденіе*, такъ какъ свойства чиселъ существуютъ независимо отъ всякой системы счисленія.

Счисленіе или счетъ есть чисто *условный языкъ*, позволяющій называть числа при помощи нѣсколькихъ немногихъ словъ въ разговорной рѣчи, или писать ихъ при помощи немногихъ знаковъ, *цифръ*, на письмѣ.

Основное дѣйствіе ариѳметики есть законъ образованія чиселъ, т. е. сложеніе. Наше десятичное счисленіе, наприм., есть уже дѣйствіе болѣе сложное. Оно заключаетъ въ себѣ одновременно сложеніе и умноженіе. Такъ, число 45 въ десятичной системѣ есть результатъ, полученный отъ умноженія 10 на 4 и затѣмъ прибавленія къ полученному пяти единицъ. Извѣстно, впрочемъ, что десятичная система счисленія есть сравнительно позднее созданіе человѣческой ариѳметики.

Само собой разумѣется, что вмѣсто того, чтобы считать числа десятками, сотнями (т. е. группами по десяти десятковъ), тысячами (т. е. группами по десяти сотенъ) и т. д., можно было бы число *десять* замѣнить всякимъ другимъ, — напримѣръ, числомъ *двѣнадцать* (дюжиной), и считать дюжинами. Уже Аристотель замѣтилъ, что число *четыре* могло бы вполнѣ замѣнить *десять*. По этому поводу Вейгель въ 1687 г. даже предложилъ планъ *четверичной ариѳметики*.

Почти всеобщій выборъ числа десять за основаніе счисленія зависитъ, по всей вѣроятности, отъ устройства нашихъ рукъ (десять пальцевъ), точно также, какъ большинство различныхъ единицъ у древнихъ получили свое названіе и происхожденіе отъ различныхъ членовъ человѣческаго тѣла, какъ локоть, пядь и т. д.

Въ XVII вѣкѣ Мельхиседекъ Ѳевено (Thévenot) пытался найти всеобщую мѣру, исходя изъ правильности и равенства граней пчелиныхъ восковыхъ ячеекъ. Новѣйшія мѣры построены на болѣе прочныхъ основаніяхъ и взяты изъ геодезическихъ, физическихъ и др. соотношеній, какъ, *метръ, граммъ* и др.

Двоичная система.

Двоичная система счисленія есть счетъ, гдѣ въ *основаніе* кладется число 2.

Всякая система счисленія основана на употребленіи единицъ разныхъ разрядовъ, каждая изъ которыхъ содержитъ единицу предыдущаго разряда одно и то же число разъ. Число единицъ низшаго разряда, нужное для того, чтобы составить единицу высшаго, называется *основаніемъ* системы счисленія.

Это основаніе должно быть равно по меньшей мѣрѣ *двумъ*.

Въ самомъ дѣлѣ, если взять за основаніе системы *одинъ*, то единицы различныхъ разрядовъ будутъ равны между собой, и системы счисленія въ сущности не будетъ.

Первымъ знакомствомъ съ *двоичной ариѳметикой* мы обязаны Лейбницу. Въ этой системѣ за основаніе принято число *два*, и всѣ числа можно писать только цифрами *0* и *1*. При этомъ принимается единственное условіе, сходное съ письменнымъ счисленіемъ въ десятичной системѣ именно, — что всякая цифра, помѣщенная сейчасъ влѣво, представляетъ единицы въ два раза большія, чѣмъ стоящія непосредственно вправо. Слѣдовательно, по этой системѣ числа два, четыре, восемь, шестнадцать... напишутся такъ:

10, 100, 1000, 10000,...

Числа три, пять, одиннадцать, девятнадцать напишутся такъ:

11, 101, 1011, 10011,...

Слѣдуетъ, вообще, освоиться съ писаніемъ чиселъ по двоичной системѣ. Это легко.

Замѣчанія о двѣнадцатичной системѣ.

Симонъ Стевинъ изъ Брюгге (умеръ въ 1633 г.) предложилъ когда-то ввести двѣнадцатичную систему, какъ болѣе подходящую къ нашему обыкновенію считать мѣсяцы, года, часы дня, градусы окружности и т. д. Но измѣненіе существующей системы произвело бы слишкомъ большія неудобства сравнительно съ тѣми преимуществами, которыя получились бы, если принять число *двѣнадцать* за основаніе системы.

Позднѣе знаменитый Огюстъ Контъ замѣтилъ, что строеніе руки, имѣющей 4 пальца съ тремя суставами, или всего двѣнадцать суставовъ противъ двухъ еще суставовъ пятаго, большого, пальца, позволяетъ считать по пальцамъ всѣ числа до 13 разъ 12, ($13 \times 12 = 156$). Такимъ образомъ по двѣнадцатичной системѣ можно было бы легко вести на пальцахъ гораздо болѣе обширный счетъ, чѣмъ десятичный. Но отъ этой остроумной выдумки въ настоящее время не сохранилось ничего, кромѣ сравненія, сдѣланнаго самимъ Контомъ, что четыре пальца съ большимъ пальцемъ во главѣ напоминаютъ четырехъ солдатъ подъ командой капрала.

Преимущества двоичной системы.

Въ двоичной системѣ обыкновенныя ариѳметическія дѣйствія сведены къ самымъ простѣйшимъ выраженіямъ. Сложеніе, напримѣръ, сводится къ слѣдующему: **1** да **1** даетъ *два*, ставлю **0** и замѣчаю **1**. Таблицы умноженія (Пиѳагоровой) нѣтъ вовсе, такъ какъ все умноженіе сводится къ слѣдующему: 1, умноженная на 1, даетъ единицу. Такъ что все умноженіе заключается въ соотвѣтствующемъ подписаніи частичныхъ произведеній. При дѣленіи не требуется никакихъ попытокъ. Кромѣ того, для этой системы удобнѣе, чѣмъ для всякой иной, изготовлять счетныя машины. Люка *), благодаря двоичному счисленію, нашелъ наибольшее изъ извѣстныхъ до сихъ поръ простыхъ чиселъ, а также изобрѣлъ машину, дающую весьма большія первоначальныя числа. Неудобство двоичной системы состоитъ въ большемъ количествѣ писанія, которое необходимо для изображенія небольшихъ сравнительно чиселъ.

Лежандръ въ своей *Теоріи чиселъ* даетъ способъ, довольно быстро ведущій къ цѣли, когда хотятъ изобразить большое число по двоичной системѣ. Пусть дано, напр., число 11 183 445. Дѣлимъ его на **64**. Получается остатокъ 21 и частное 174 741. Это послѣднее дѣлимъ опять на 64, получается въ остаткѣ 21 и частное 2 730. Наконецъ, 2 730, дѣленное на 64, даетъ въ остаткѣ 42 и частное 42. Но 64 въ двоичной системѣ есть 1 000 000; 21 въ двоичной системѣ есть **10 101**, а 42 есть 101 001. Итакъ предложенное число напишется по двоичной системѣ такъ:

101 010 101 010 010 101 010 101

Же-кимъ.

Двоичная система счисленія позволяетъ объяснить одинъ китайскій символъ, носящій имя *Жекимъ*, или *Жекингъ*. Приписывается онъ Фо-хи, древнѣйшему законодателю Китая (за 3000 лѣтъ до Рожд. Христова). Символъ состоитъ изъ 64 небольшихъ фигуръ, образованныхъ каждая изъ шести находящихся одна надъ другой горизонтальныхъ линій; однѣ изъ этихъ линій сплошныя, другія имѣютъ въ серединѣ перерывъ. Символъ этотъ приводилъ въ отчаяніе какъ китайскихъ, такъ и европейскихъ ученыхъ, не могшихъ его удовлетворительно объяснить. Знаменитый Лейбницъ, разсматривая различныя начертанія Же-

*) Recherches sur plusieurs ouvrages de Leonard de Pise, et sur diverses questions d'arithmétique. — Rome. 1877.

кима сравнительно съ рядомъ чиселъ, написанныхъ по двоичной системѣ, нашелъ, что двоичная ариѳметика разрѣшаетъ загадку, и что Же-кимъ есть ничто иное, какъ рядъ 64 послѣдовательныхъ первыхъ чиселъ, написанныхъ по двоичной системѣ, но въ обратномъ порядкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если обозначимъ единицу сплошной прямой ————, а нуль, прямой съ перерывомъ посреди —— ——, если кромѣ того условимся единицы слѣдующихъ высшихъ разрядовъ писать не справа

Видъ Китайскаго Же-кима	Переводъ на двоичную систему	По десятичной системѣ
	000000	0
	000001	1
	000010	2
	000011	3
	000100	4
	000101	5

налѣво, но снизу вверхъ, то нетрудно найти, что этотъ китайскій символъ, составленный изъ повтореній 6-ти горизонтальныхъ линій, можетъ быть истолкованъ такъ, какъ это указано на таблицѣ, помѣщенной на этой страницѣ.

Въ этой столь удачно имъ разгаданной загадкѣ Лейбницъ видѣлъ также символъ творенія изъ ничего по волѣ Бога, подобно тому, какъ, говорилъ онъ, всѣ числа въ двоичной системѣ составляются изъ нуля и единицы. Мысль эта такъ понравилась знаменитому философу, что онъ сообщилъ ее тогдашнему миссіонеру въ Китаѣ, П. Буве, убѣждая его развить ее передъ царствовавшимъ императоромъ и такимъ путемъ обратить его въ христіанство... Впрочемъ, можно быть увѣреннымъ, что геніальный ученый не придавалъ этой своей пиѳагорейской идеѣ бо̀льшаго значенія, чѣмъ она того стоитъ.

Для большей ясности представленія о Же-кимѣ приведемъ первыя 16 фигуръ его. Вотъ онѣ:

Ящикъ съ гирями.

Напишемъ по двоичной системѣ таблицу 32 чиселъ:

1	1	9	1001	17	10001	25	11001
2	10	10	1010	18	10010	26	11010
3	11	11	1011	19	10011	27	11011
4	100	12	1100	20	10100	28	11100
5	101	13	1101	21	10101	29	11101
6	110	14	1110	22	10110	30	11110
7	111	15	1111	23	10111	31	11111
8	1000	16	10000	24	11000	32	100000

Легко эту таблицу продолжить до какихъ угодно предѣловъ, и такимъ образомъ вывести то общее правило, *что любое число можно получить путемъ сложенія различныхъ степеней двухъ съ прибавкой единицы*, т. е. каждое число можно получить путемъ сложенія изъ ряда:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64, \ldots$$

при чемъ при такомъ сложеніи ни одно изъ чиселъ ряда не требуется брать дважды. Этимъ свойствомъ можно пользоваться въ торговлѣ и промышленности. Если намъ требуется взвѣсить цѣлое число, напр., граммовъ (или фунтовъ, лотовъ, пудовъ,— словомъ, какихъ угодно единицъ вѣса), то можно пользоваться ящикомъ, въ которомъ находятся разновѣски такихъ тяжестей:

1 gr, 2 gr, 4 gr, 8 gr, 16 gr, 32 gr...

Съ шестью такими гирями можно взвѣшивать до 63 gr. Съ числомъ n такихъ гирь можно взвѣшивать до тяжестей, получаемыхъ изъ формулы

$$2^n - 1.$$

На практикѣ, однако, ящики съ гирями устраиваются иначе. Во Франціи и другихъ образованныхъ странахъ (почти вездѣ кромѣ Россіи), гдѣ принята десятичная система мѣръ и вѣсовъ, эти ящики содержатъ граммы, декаграммы, гектограммы и килограммы*) въ такомъ порядкѣ:

1 gr 2 gr 2 gr 5 gr
1 dg 2 dg 2 dg 5 dg
1 hg 2 hg 2 hg 5 hg
1 kg 2 kg 2 kg 5 kg

и т. д. Ясно, что изъ чиселъ 1, 2, 2, 5 можно составить всѣ остальныя до 10. Кромѣ того подобное устройство ящика съ разновѣсками болѣе подходитъ къ десятичной системѣ счисленія, и подобной же системѣ мѣръ и вѣсовъ, — слѣдовательно, при навыкѣ не требуесъ почти никакого соображенія. Но если посмотрѣть на дѣло съ иной стороны, то при двоичной системѣ для взвѣшиванія до извѣстнаго предѣла требуется меньше гирь, чѣмъ при десятичной.

*) 10 gr = 1 dg; 10 dg = 1 hg; 10 hg = 1 kg.

Взвѣшиваніе.

Составимъ такой рядъ чиселъ, въ которомъ первый членъ будетъ единица, а затѣмъ идутъ степени 3-хъ, т. е.:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81, \ldots$$

Онъ обладаетъ свойствомъ, состоящимъ въ томъ, что, *складывая или вычитая извѣсенымъ образомъ его члены, мы также получимъ всевозможныя цѣлыя числа*. Доказать это не трудно, и мы останавливаться на этомъ не будемъ.

Свойствомъ этого ряда можно воспользоваться также для того, чтобы взвѣшивать съ наименьшимъ количествомъ различныхъ гирь предметы, вѣсъ которыхъ можно выразить въ цѣлыхъ числахъ. Такъ, напримѣръ, при помощи перекладыванія гирь на различныя чашки вѣсовъ можно взвѣсить въ цѣлыхъ фунтахъ всѣ тяжести отъ 1-го фунта до цѣлаго пуда при помощи всего четырехъ гирь въ

1 ф., 3 ф., 9 ф., 27 ф.

При помощи пяти гирь въ 1, 3, 9, 27 и 81 фунтъ можно взвѣшивать въ цѣлыхъ фунтахъ всѣ тяжести отъ 1-го до 121 фунта и т. д. Вообще съ помощью n гирь вѣсомъ въ

$$1,\ 3,\ 3^3,\ 3^4; \ldots\ 3^{n}-1 \text{ фунта}$$

можно взвѣшивать всѣ тяжести до вѣса въ

$$\frac{1}{2}(3^n - 1) \text{ фунтовъ.}$$

Слѣдовательно, геометрическая прогрессія со знаменателемъ отношенія 3 разрѣшаетъ такую общую задачу: *Найти наименьшее число гирь, съ помощью которыхъ можно произвести всѣ взвѣшиванія въ цѣлыхъ числахъ отъ 1 до суммы вѣса всѣхъ взятыхъ тяжестей; и эта сумма должна быть наибольшей относительно числа тяжестей.*

Еще о волшебной таблицѣ.

Воспользуемся таблицей, составленной нами ранѣе на страницѣ 224, для построенія новой, обладающей свойствомъ, заслуживающимъ вниманія. Эту новую таблицу составимъ такъ:

Въ первомъ столбцѣ, справа, выпишемъ одно подъ другимъ изъ таблицы на страницѣ 224 всѣ тѣ числа по десятичной системѣ, которымъ въ двоичной системѣ соотвѣтствуютъ числа, оканчивающіяся на 1. Затѣмъ во второмъ столбцѣ, считая справа налѣво, выпишемъ всѣ тѣ числа, у которыхъ по двоичной системѣ вторая цифра съ конца есть 1. Въ третьемъ столбцѣ выпишемъ всѣ тѣ числа, у которыхъ по двоичной системѣ третья цифра съ конца есть 1, и т. д. Въ нашемъ случаѣ, очевидно, придется остановиться на 5-мъ столбцѣ, и наибольшее число, входящее въ составляемую таблицу, есть 31. (Вообще же для n-аго столбца такое наибольшее число будетъ $2^n - 1$). Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующую таблицу:

5	4	3	2	1
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31

По этой таблицѣ можно угадать всякое задуманное кѣмъ либо число, если оно, конечно, не болѣе 31. Въ самомъ дѣлѣ, предложите кому либо задумать любое число, не большее 31, и указать, въ какихъ столбцахъ оно находится. Если, начиная отъ правой руки къ лѣвой, мы будемъ писать 1 для всякаго столбца, гдѣ задуманное число находится, и 0 для такого столбца, гдѣ этого числа нѣтъ, то получимъ задуманное число, написанное по двоичной системѣ. Задача облегчается если внизу столбцовъ написать соотвѣтствующія степени двухъ и затѣмъ, чтобы узнать задуманное число, остается только узнать, въ какихъ столбцахъ оно находится, и сложить соотвѣтственныя находящіяся внизу числа. Можно, впрочемъ, этихъ степеней двухъ и не подписывать внизу, такъ какъ они написаны нами уже въ первой строкѣ составленной нами таблицы (1, 2, 4, 8, 16).

Вмѣсто таблицы можно сдѣлать изъ картона *волшебный вѣеръ* и на пластинкахъ его написать соотвѣтствующія числа. Это разсмотрѣно уже нами на стр. 215—217. Здѣсь мы освѣщаемъ все это съ болѣе общей точки зрѣнія.

Двоичная прогрессія.

Возьмемъ число 2 и удвоимъ его, полученное число опять удвоимъ, полученное снова удвоимъ, полученное снова удвоимъ и т. д. То есть, другими словами, составимъ таблицу степеней числа двухъ, начиная съ первой и до 32 степени:

Степень n	2^n	Степень n	2^n
1	2	17	131 072
2	4	18	262 144
3	8	19	524 288
4	16	20	1 048 576
5	32	21	2 097 152
6	64	22	4 194 304
7	128	23	8 388 608
8	256	24	16 777 216
9	512	25	33 554 432
10	1 024	26	67 108 864
11	2 048	27	134 217 728
12	4 096	28	268 435 456
13	8 192	29	536 870 912
14	16 384	30	1 073 741 824
15	32 768	31	2 147 483 648
16	65 536	32	4 294 967 296

Эта таблица представляетъ тотъ рядъ чиселъ, который Ферма (Fermat) назвалъ *двоичной прогрессіей.* Нетрудно провѣрить съ помощью этой таблицы, что для перемноженія какихъ-либо степеней 2, — наприм., девятой и одиннадцатой, — достаточно показателей этихъ степеней сложить. Т. е. $2^9 \times 2^{11} = 2^{20}$; или $512 \times 2\,048 = 1\,048\,576$.

Вообще: показатель произведенія двухъ степеней одного и того же числа равенъ суммѣ обоихъ показателей, а показатель частнаго двухъ степеней одного и того же числа равенъ разности показателей дѣлимаго и дѣлителя.

На разсмотрѣніи и обобщеніи этихъ свойствъ показателей степеней основана *теорія логариѳмовъ.*

Замѣтимъ также, что, имѣя предыдущую таблицу, мы весьма быстро можемъ вычислить 64-ю степень 2-хъ, перемножая самое на себя 32-ю степень этого числа. т. е.

$$2^{64} = 2^{32} \times 2^{32} = 4\,294\,967\,296 \times 4\,294\,967\,296 = \\ = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

Съ этимъ послѣднимъ числомъ, уменьшеннымъ на 1, связано извѣстное математическое преданіе, указанное нами въ главѣ о шахматахъ объ изобрѣтателѣ шахматной игры.

Совершенныя числа.

Двоичная прогрессія приводитъ къ познанію такъ называемыхъ *совершенныхъ чиселъ.* Такъ называется всякое цѣлое число, сумма всѣхъ дѣлителей котораго равна самому числу, предполагая, конечно, что само число исключено изъ этихъ дѣлителей.

Теорія нечетныхъ совершенныхъ чиселъ не разработана вполнѣ еще до сихъ поръ. Что касается до четныхъ совершенныхъ чиселъ, то всѣ они безъ исключенія содержатся въ формулѣ.

$$\mathbf{N = 2^{a-1}(2^a - 1),}$$

гдѣ второй множитель, $2^a - 1$, долженъ быть первоначальнымъ числомъ. Слѣдовательно, въ этой формулѣ **a** нужно придавать только тѣ значенія, для которыхъ число $2^a - 1$ есть первоначальное число. Это было извѣстно еще Эвклиду, но этотъ геометръ не могъ доказать, что такимъ путемъ получаются *всѣ* четныя совершенныя числа.

Число $2^a - 1$ можетъ быть первоначальнымъ только въ томъ случаѣ, если показатель a есть число первоначальное. Это доказать не трудно, но этого недостаточно. Необходимо еще удостовѣриться, что число $2^a - 1$ есть дѣйствительно первоначальное число. При настоящемъ состояніи высшей ариѳметики эта задача въ общемъ случаѣ неразрѣшима, если только показатель a больше 100. Совершенныя числа, извѣстныя нынѣ, суть слѣдующія восемь чиселъ, заключающихся въ нижеслѣдующей таблицѣ:

a	2^{a-1}	$2^a - 1$	Совершенныя числа.
2	2	3	6
3	4	7	28
5	16	31	496
7	64	127	8 128
13	4 096	8 191	335 550 336
17	65 536	131 071	8 589 869 056
19	262 144	524 287	137 438 691 328
31	1 073 741 824	2 147 483 647	2 305 843 008 139 952 128

Въ первомъ столбцѣ мы не находимъ для a значеній 11, 23, 29. Это потому, что соотвѣтствующія числа $2^{11} - 1$, $2^{23} - 1$, $2^{29} - 1$ не суть первоначальныя, а дѣлятся соотвѣтственно на 23, 47 и 233.

Мы видимъ, что совершенныя четныя числа оканчиваются на 6 или 8. И можно доказать, что такъ будетъ постоянно для всякаго подобнаго совершеннаго числа.

Угадываніе чиселъ.

О какомъ *угадываніи* идетъ рѣчь?

Конечно, дѣло, въ сущности, сводится не къ отгадкѣ, а къ *рѣшенію* нѣкоторой задачи. Желающему предлагаютъ задумать нѣкоторое число и этого числа у него не спрашиваютъ. Взамѣнъ этого предлагаютъ задумавшему произвести надъ задуманнымъ имъ числомъ разныя съ виду совсѣмъ произвольныя дѣйствія и сказать «угадывающему», что въ результатѣ получилось. «Угадчикъ» получаетъ, такимъ образомъ, въ руки конецъ нити, по которой разматываетъ весь клубокъ и добирается до начала.

Задаваемыя въ остроумной и забавной формѣ, которую каждый играющій можетъ придумать по своему вкусу, задачи эти составляютъ очень хорошее и полезное развлеченіе для всѣхъ играющихъ. Онѣ развиваютъ навыки въ быстромъ умственномъ счетѣ и развиваютъ ихъ постепенно, такъ какъ можно задумывать малыя и большія числа, смотря по желанію и силамъ участвующихъ въ игрѣ лицъ. Теоретическія основанія подобныхъ задачъ настолько просты, что мы даемъ ихъ сжато и кратко. Впрочемъ, если «доказательства» въ нашемъ изложеніи кому-либо окажутся не по силамъ, то онъ можетъ ихъ смѣло опустить, а пусть разберется только въ самой задачѣ. Разобравшись, онъ, почти навѣрное, самъ дойдетъ до доказательства и объясненія каждой задачи.

Обращаемъ вниманіе на то, что здѣсь въ большинствѣ случаевъ даются только сравнительно сухіе остовы задачъ. Читателю предоставляется самая широкая возможность каждое условіе подобной задачи украсить плодами собственной выдумки и фантазіи или принаровить къ извѣстному случаю.

Развивайте въ себѣ самостоятельность мышленія и сметку!

Задача 108-я.

Угадать задуманное кѣмъ-либо число.

Задумайте число.

Утройте его.

Возьмите половину полученнаго числа, если оно дѣлится безъ остатка на 2; если же оно ровно пополамъ не дѣлится, то прибавьте сначала единицу, а потомъ возьмите половину числа.

Эту половину опять утройте.

Сколько разъ *содержится 9 въ полученномъ* теперь числѣ?

Если затѣмъ на каждую такую девятку взять по два, то и получится задуманное число.

Нужно имѣть только въ виду, что если приходится прибавлять единицу, чтобы раздѣлить число нацѣло пополамъ, то къ числу найденному, взявъ по 2 на каждую девятку, также нужно прибавить единицу.

Примѣры. Задумано 6. Послѣ утроенія получается 18. Половина этого числа равна 9. Утроивъ, получаемъ 27. Въ этомъ числѣ 9 заключается 3 раза. Беремъ 3 раза по 2, и получимъ задуманное число 6.

Пусть задумано 5. Утроивая, получимъ 15. Чтобы раздѣлить пополамъ нацѣло, нужно прибавить 1, получится 16. Половина отъ 16 равна 8; утроивая, получаемъ 24. Въ этомъ числѣ 9 содержится 2 раза. Беремъ 2 раза по 2, получаемъ 4, да еще нужно прибавить единицу, такъ какъ приходилось прибавлять единицу, чтобы раздѣлить пополамъ нацѣло. Итакъ, задуманное число равно 5.

Доказательство.

Если задумано четное число, т. е. вида **2n**, то надъ нимъ производятся слѣдующія дѣйствія.

$$2n \times 3 = 6n;\ 6n : 2 = 3n;\ 3n \times 3 = 9n;\ 9n : 9 = n;\ n \times 2 = 2n.$$

Если задумано число **нечетное**, т. е. вида $2n + 1$, то тѣ же дѣйствія принимаютъ такой видъ:

$$(2n + 1) \times 3 = 6n + 3;\ 6n + 3 + 1 = 6n + 4;$$
$$(6n + 4) : 2 = 3n + 2;\ (3n + 2) \times 3 = 9n + 6;$$
$$(9n + 6) : 9 = n;\ n \times 2 + 1 = 2n + 1.$$

Такимъ образомъ, поступая, какъ объяснено выше, мы всегда должны придти къ задуманному числу.

Задача 109-я.

Видоизмѣненіе той же задачи.

Утроить задуманное число, затѣмъ взять половину произведенія, если же произведеніе получится нечетное, то прибавить къ нему единицу и потомъ раздѣлить пополамъ. Утроить снова эту половину, затѣмъ взять половину полученнаго числа, прибавляя, какъ выше, единицу, если отъ умноженія на 3 получится нечетное число. Затѣмъ надо спросить, сколько разъ содержится 9 въ этой послѣдней половинѣ, и на каждую девятку взять по 4. При этомъ нужно имѣть въ виду, что если при дѣленіи на два въ первый разъ приходилось прибавлять единицу, то угадывающему нужно тоже держать въ умѣ единицу, а если при дѣленіи и во второй разъ приходилось прибавлять единицу, то нужно запомнить еще 2. Слѣдовательно, если оба раза дѣленіе на 2 не могло быть выполнено нацѣло безъ прибавленія 1, то, взявъ на каждую девятку по 4, нужно къ полученному числу прибавить еще 3; если же дѣленіе пополамъ нацѣло не выполняется только въ первый разъ, то прибавляется 1; а если только во второй, то прибавляется 2.

Напримѣръ: задумано 7; утроивая, получимъ 21; чтобы раздѣлить пополамъ нацѣло, надо прибавить 1; прибавляя ее и дѣля 22 пополамъ, получимъ 11; по утроеніи получимъ 33; чтобы взять половину, опять нужно прибавить единицу, послѣ чего получимъ 34, половина этого числа есть 17. Здѣсь 9 содержится только одинъ разъ. Слѣдовательно, нужно взять число 4 и къ нему прибавить еще 3, такъ какъ дѣленіе и въ первомъ, и во второмъ случаѣ совершалось лишь послѣ прибавленія единицы.

Получается: $4+3=7$, т. е. задуманное число.

Доказательство.

Всякое число можетъ быть представлено въ одной изъ слѣдующихъ формъ:

$$4n,\ 4n+1,\ 4n+2,\ 4n+3,$$

гдѣ буквѣ n нужно придавать значенія 0, 1, 2, 3, 4 и т. д.

1) Возьмемъ сначала число вида $4n$ и произведемъ надъ нимъ указанныя выше дѣйствія. Получается:

$$4n\times3=12n;\ 12n:2=6n;\ 6n\times3=18n;\ 18n:2=9n.$$
$$9n:9=n;\ 4\times n=4n.$$

2) Для числа вида $4n+1$ получимъ:

$$(4n+1)\times3=12n+3;\ 12n+3+1=12n+4;$$
$$(12n+4):2=6n+2;\ (6n+2)\times3=18n+6;$$
$$(18n+6):2=9n+3;\ (9n+3):9=n;\ 4\times n+1=4n+1.$$

3) Для числа вида $4n+2$ имѣемъ:

$$(4n+2)\times3=12n+6;\ (12n+6):2=6n+3;$$
$$(6n+3)\times3=18n+9;\ 18n+9+1=18n+10;$$
$$(18n+10):2=9n+5;\ (9n+5):9=n;$$
$$4\times n+2=4n+2.$$

4) Для числа вида $4n+3$ имѣемъ:

$$(4n+3)\times3=12n+9;\ 12n+9+1=12n+10;$$
$$(12n+10):2=6n+5;$$

$(6n+5)\times 3=18n+15$; $18n+15+1=18n+16$;
$(18n+16):2=9n+8$;
$(9n+8):9=n$; $4\times n+3=4n+3$.

Такимъ образомъ, поступая по правилу, мы всегда получимъ задуманное число.

Можно ту же задачу предложить и въ нѣсколько измѣненномъ видѣ,—а именно:

Задумайте число; прибавьте къ нему половину того же числа; къ полученной суммѣ прибавьте половину этой же суммы.

Затѣмъ надо спросить, сколько разъ содержится девять въ послѣднемъ полученномъ числѣ, и взять по 4 на каждую девятку, какъ выше. Но и здѣсь, какъ всегда, нужно помнить, что если въ первомъ случаѣ число не дѣлится нацѣло на два, то нужно прибавить къ нему единицу и затѣмъ подѣлить на двѣ равныя части; точно также нужно поступать и во второмъ случаѣ. А затѣмъ, если дѣленіе нацѣло не выполнялось только въ первомъ случаѣ, то угадывающій долженъ держать въ умѣ 1, если только во второмъ, то 2, а если и въ первомъ и во второмъ, то 3, и эти числа соотвѣтственно потомъ прибавлять для полученія правильнаго отвѣта.

Напримѣръ,—задумано 10; прибавляя къ нему его половину, получимъ 15,—число нечетное,—поэтому, прибавляя къ нему 1 и беря половину, получимъ 8; прибавляя 8 къ 15-ти, получимъ 23; въ этомъ числѣ 9 содержится 2 раза. Два раза по четыре равно 8, но къ 8 надо прибавить еще 2, потому что во второмъ случаѣ, чтобы раздѣлить на 2 нацѣло, приходилось прибавлять 1. Итакъ: $8+2=10$, т. е. получаемъ задуманное число.

Если число нечетное, то раздѣлимъ его на двѣ такія части, чтобы одна была на единицу больше другой, и условимся для краткости называть первое слагаемое *бо̀льшей половиной*, а второе — меньшей. Тогда разсматриваемую нами задачу можно продѣлать еще въ одной довольно интересной формѣ.

Задумайте число. Прибавьте къ нему его половину или, если оно нечетное, то его бо̀льшую половину. Къ этой суммѣ прибавьте ея половину или, если она нечетна, то ея большую половину. Сколько разъ въ полученномъ числѣ содержится 9?

Взявши затѣмъ по 4 на каждую девятку, задумавшему число надо предложить такіе вопросы: если отъ послѣдней суммы отнять всѣ девятки, то можно ли отъ остатка отнять еще 8? Если можно, то, значитъ, чтобы получить задуманное число, нужно къ числу, полученному отъ умноженія 4-хъ на число девятокъ, прибавить 3.

Если же нельзя отнять 8, то надо спросить, нельзя ли отнять 5. Если можно, то нужно прибавить 2. Если же 5-ти нельзя вычесть, то спросить, нельзя ли вычесть 3, и если можно, то прибавляется 1.

Легко убѣдиться, что задача, предложенная въ этой послѣдней формѣ, сводится, въ сущности, къ предыдущимъ, потому что утроить число и взять потомъ половину полученнаго произведенія, это все равно, что прибавить къ числу его половину и т. д.

Замѣчанія. Понявшій и всесторонне усвоившій доказательства двухъ приведенныхъ выше задачъ въ ихъ различныхъ видоизмѣненіяхъ можетъ самъ легко создать множество правилъ, подобныхъ предыдущимъ, для угадыванія задуманнаго числа.

Можно, наприм., заставить утроить задуманное число, затѣмъ взять половину полученнаго произведенія, эту половину предложить умножить уже на 5 и взять половину произведенія. Вслѣдъ затѣмъ спросить, сколько разъ въ этой последней половинѣ заключается число 15, и для каждыхъ 15 взять по 4. При этомъ, какъ и раньше, нужно къ произведенію четырехъ на число содержащихся въ послѣдней половинѣ 15 прибавлять 1, 2 или 3, смотря по тому, когда дѣленіе на 2 не совершается нацѣло: въ первомъ случаѣ, во второмъ, или въ обоихъ вмѣстѣ.

Внимательный читатель легко все это докажетъ самъ. Къ руководству его добавимъ только, что при доказательствѣ онъ убѣдится въ слѣдующемъ:

Если задуманное число превышаетъ какое-либо **двойно-четное** *) число на 1, то, отнявъ всѣ 15, которыя содержатся

---

*) Будемъ называть **двойно-четнымъ** или **четно-четнымъ** числомъ такое число, которое дѣлится на 4, и **просто-четнымъ**, которое дѣлится на 2 и не дѣлится на 4.

въ послѣдней половинѣ, найдемъ, что въ остаткѣ заключается еще 5. Если задуманное число превышаетъ какое-либо двойно-четное число на 2, то въ остаткѣ послѣ дѣленія послѣдней половины на 15 будетъ заключаться 8; и если, наконецъ, задуманное число превышаетъ двойно-четное на 3, то въ остаткѣ получится 13.

Замѣтивъ это, можно, угадывая число, разнообразить свои вопросы по тому или другому изъ вышеприведенныхъ образцовъ.

Можно также, напр., предложить умножить задуманное число на 5, взять половину полученнаго произведенія, эту половину опять умножить на пять и полученное снова раздѣлить на 2, а затѣмъ спросить, сколько разъ въ полученномъ числѣ заключается 25, и для каждыхъ 25 взять по 4. При этомъ нужно имѣть въ виду опять-таки случаи, когда дѣленіе на 2 совершается нацѣло, и когда нѣтъ, чтобы прибавить 1, 2 или 3, гдѣ слѣдуетъ, или же не прибавлять ничего, если дѣленіе на 2 въ обоихъ случаяхъ было нацѣло.

Словомъ, предложенныя задачи можно разнообразить всячески.

Задача 110-я.

Угадать задуманное число инымъ способомъ.

Сначала нужно поступать, какъ въ предыдущихъ задачахъ, т. е. предложить утроить задуманное число, взять половину (или **большую** половину) полученнаго произведенія, утроить эту половину и взять снова половину (или бо̀льшую половину) полученнаго числа. Но затѣмъ, вмѣсто вопроса, сколько разъ въ этой послѣдней половинѣ содержится 9, можно попросить назвать всѣ цифры, которыми пишется это послѣднее число, **кромѣ одной**, лишь бы эта неизвѣстная отгадывающему цифра **не была нуль.**

Точно также необходимо, чтобы загадывающій сказалъ и *порядокъ* цифръ—какъ тѣхъ, которыя уже имъ названы, такъ и той, которая угадывающему еще неизвѣстна.

Послѣ этого, чтобы узнать задуманное число, надо сложить всѣ цифры, которыя названы, и отбросить отъ этой суммы 9 столько разъ, сколько возможно. Остатокъ, который послѣ этого получится, надо вычесть изъ 9, и тогда получится неизвѣстная цифра; или же, если остатокъ будетъ нуль, то неизвѣстная цифра и есть 9. Поступаютъ именно такъ въ томъ случаѣ, если оба раза дѣленіе пополамъ совершалось нацѣло. Если же, чтобы раздѣлить число пополамъ, приходилось прибавлять 1 въ первый разъ, то нужно сначала къ суммѣ извѣстныхъ цифръ прибавить еще *6* и поступать затѣмъ, какъ указано.

Если же для дѣленія пополамъ приходилось прибавить 1 только второй разъ, то къ той же суммѣ нужно добавлять *4*.

Если же въ обоихъ случаяхъ дѣленіе не совершалось сразу нацѣло и приходилось прибавлять по 1, то къ сказанной суммѣ нужно прибавить *1*.

Нашедши, такимъ образомъ, неизвѣстную цифру послѣдней половины, мы узнаемъ и самую половину. Узнавъ же, сколько разъ въ ней заключается по 9, взявъ соотвѣтственное число разъ по 4 и прибавляя, когда нужно, 1, 2 или 3, получимъ искомое задуманное число.

Напр.: задумано 24. Утроивъ и раздѣливъ два раза, находимъ, что послѣдняя половина есть 54. Пусть задумавшій число назоветъ угадывающему первую цифру 5. Тогда вычитаніемъ 5 изъ 9 тотчасъ получается вторая цифра 4. Итакъ, послѣдняя половина есть 54. Въ ней 9 содержится 6 разъ.

Слѣдовательно, задуманное число есть $4 \times 6 = 24$.

Положимъ еще, что задумано 25. Утраивая и беря половину произведенія, утраивая эту половину и беря снова половину, находимъ 57. Но нужно помнить, что въ первомъ случаѣ, чтобы получить половину, приходилось прибавлять 1; поэтому, если задумавшій число объявитъ, напр., первую цифру 5, то надо къ пяти прибавить 6, получится 11, отбрасывая 9, получимъ 2, вычитая 2 изъ 9, получимъ вторую цифру 7. Итакъ, вторая половина 57; въ ней 9 содержится 6 разъ. Отсюда задуманное число равно $4 \times 6 + 1 = 25$.

Пусть еще задумавшій число скажетъ, что послѣдняя полученная имъ половина числа состоитъ изъ 3-хъ цифръ, что двѣ послѣднія цифры суть 13, и что для дѣленія пополамъ нацѣло приходилось во второй разъ прибавлять единицу. Въ такомъ случаѣ къ суммѣ $1+3=4$ нужно прибавить еще 4, получается 8. Вычитая 8 изъ 9, получимъ единицу. Слѣдовательно, послѣдняя половина есть 113; въ ней 9 содержится 12 разъ. Поэтому задуманное число есть $4\times 12+2=50$.

Точно также, если бы задумавшій число сказалъ, что послѣ утроеній и дѣленій на два онъ получилъ трехзначное число, въ которомъ первая цифра 1, а послѣдняя 7, и что въ обоихъ случаяхъ при дѣленіи на 2 приходилось прибавлять по 1, то на основаніи предыдущаго поступаемъ такъ: $1+7+1=9$. Отбрасывая 9, получимъ въ остаткѣ нуль, т. е. неизвѣстная цифра послѣдней половины есть 9, и сама эта половина есть 197, гдѣ 9 заключается 21 разъ. Отсюда по предыдущему заключаемъ, что задуманное число есть $4\times 21+3=87$.

Доказательство.

Обращаясь къ доказательству, данному для задачи 109-й, находимъ, что для числа вида $4n$ окончательный результатъ вычисленій даетъ $9n$, т. е. число кратное **9-ти.** Слѣдовательно, сумма цифръ этого числа должна дѣлиться на 9, а отсюда заключаемъ, что неизвѣстная намъ цифра такова, что, сложивъ ее съ остальными извѣстными цифрами, мы должны получить число, дѣлящееся на 9 (т. е. кратное девяти). Если же сумма извѣстныхъ намъ цифръ кратна 9, то, значитъ, неизвѣстная цифра сама есть 9, ибо намъ дано, что она не нуль.

Для числа вида $4n+1$ результатъ вычисленій есть $9n+3$, прибавляя сюда 6, получаемъ число кратное 9; т. е. кратна 9-ти и сумма его цифръ.

Для числа вида $4n+2$ результатъ вычисленій даетъ $9n+5$; прибавляя 4, получаемъ число кратное 9; слѣдовательно, и сумма его цифръ должна быть кратной 9.

Наконецъ, для числа вида $4n+3$ окончательный результатъ вычисленій даетъ $9n+8$; прибавляя 1, находимъ число кратное 9-ти.

Сумма его цифръ также должна быть кратной девяти.

Итакъ, указанныя нами выше правила вѣрны.

Задача 111-я.

Иное рѣшеніе задачи.

Можно предложить удвоить задуманное число и затѣмъ къ полученному произведенію прибавить 5. Затѣмъ полученное число взять пять разъ и прибавить къ полученному 10. Эту послѣднюю сумму умножить еще на 10. Если спросить затѣмъ, какое, въ концѣ концовъ, получилось число, и отнять отъ него 350, то число оставшихся сотенъ и будетъ задуманное число.

Напримѣръ: Пусть задумано 3. По удвоеніи его получается 6; прибавленіемъ 5 получается 11, взять пять разъ 11—получится 55; прибавить сюда 10,—получится 65; увеличить 10 разъ—получится 650. Если отнять отсюда 350, останется 300, т. е. три сотни. Итакъ, задуманное число есть 3.

Доказательство.

Надъ задуманнымъ числомъ n совершаются слѣдующія дѣйствія:

$$n\times 2+5=2n+5;\ (2n+5)\times 5=10n+25;\ 10n+25+10=$$
$$=10n+35; (10n+35)\times 10=100n+350; 100n+350-350=100n.$$
$$100n:100=n.$$

Т. е. всегда получится задуманное число.

Замѣчанія. Разсматривая предыдущее доказательство, не трудно понять, что послѣдней задачѣ можно придать любое число различныхъ видоизмѣненій. Такъ, напр., если пожелать, чтобы всегда въ результатѣ число сотенъ выражало задуманное число, и чтобы приходилось помножать всегда на 2, 6 и 10, но вычитать приходилось бы не 350, какъ въ приведенной задачѣ, а другое число,—то нужно принять во вниманіе, какъ получилось въ вышеприведенной задачѣ 350. Это число произошло такъ: прибавлено 5, да умножено на 5, итого 25; къ этому числу прибавлено 10, получилось 35; умноживъ же это число на 10, получаемъ 350. Слѣдовательно, если пожелать вмѣсто 350 вычитать изъ окончательнаго результата другое число, то и задавать нужно прибавлять не 5 и 10, а другія числа. Зададимъ, напримѣръ, вмѣсто 5 прибавить 4, а вмѣсто 10 прибавить 12. Ясно, что изъ послѣдняго полученнаго числа придется вычесть 320, ($4 \times 5 = 20$; $20 + 12 = 32$; $32 \times 10 = 320$); и тогда получимъ остатокъ, число сотенъ котораго и дастъ намъ задуманное число. Такимъ образомъ задачу можно видоизмѣнить до безконечности.

Точно также легко замѣтить, что, умножая задуманное число на 2, на 5 и на 10, мы умножаемъ его, въ сущности, на 100, ($2 \times 5 \times 10 = 100$).

Поэтому, желая опять-таки, чтобы число сотенъ окончательнаго результата показывало задуманное число,—все равно, какіе множители выбрать, лишь бы умноженіе на нихъ давало въ окончательномъ результатѣ умноженіе на 100. Отсюда слѣдуетъ, что, оставляя тѣ же множители 2, 5, 10, можно измѣнить ихъ порядокъ, т. е. сначала умножить, напр., на 5, потомъ на 10, а затѣмъ на 2 и т. д.

Точно также вмѣсто множителей 2, 5, 10 можно брать другіе, дающіе въ произведеніи 100, напр., 5, 4, 5 или 2, 2, 25 и т. д. Нужно помнить только при этомъ, конечно, что всѣмъ этимъ измѣненіямъ множителей и прибавляемыхъ чиселъ соотвѣтствуетъ измѣненіе числа, которое въ концѣ нужно вычесть. Такъ, напр., будемъ помножать на 5, 4, 5, а прибавлять числа 6 и 9, и пусть задуманное число будетъ 8.

Умноживъ на 5, получимъ 40; прибавивъ 6, получимъ $40 + 6 = 46$; умноживъ на 4, получимъ $160 + 24 = 184$; прибавивъ 9, получимъ $160 + 33 = 193$; умноживъ это число на 5, получимъ $800 + 165 = 965$. Т. е. для полученія числа сотенъ, показывающаго задуманное число, нужно отнять въ данномъ случаѣ 165; ($6 \times 4 = 24$; $24 + 9 = 33$; $33 \times 5 = 165$).

Можно также взять не 100, а всякое иное число и сдѣлать такъ, чтобы оно заключалось въ остаткѣ отъ послѣдняго вычитанія столько разъ, сколько единицъ заключается въ задуманномъ числѣ. Такъ, напр., возьмемъ число 24, которое можно представить состоящимъ изъ множителей 2, 3, 4, ($2 \times 3 \times 4 = 24$), а числа, которыя будемъ прибавлять, пусть будутъ 7 и 8.

Пусть задуманное число есть 5. Удваивая его, находимъ 10, прибавляя 7, находимъ $10+7=17$; утроивая, находимъ $(10+7)\times 3=30+21=51$; придавая 8, находимъ $30+29=59$; беря послѣднее число 4 раза, получимъ $120+116=236$. Отнимаемъ отсюда 116, остается 120, въ которомъ 24 содержится 5 разъ, т. е. получается задуманное число 5.

Можно также вмѣсто трехъ множителей брать только два, а вмѣсто двухъ чиселъ прибавлять только одно, и тогда число десятковъ числа, полученнаго послѣ вычисленія, подобнаго предыдущему, покажетъ задуманное число.

Можно также брать четыре, пять, шесть и т. д. множителей, прибавлять соотвѣтственное (три, четыре и т. д.) количество чиселъ, затѣмъ, поступая, какъ указано выше, угадывать задуманное кѣмъ-либо число.

Можно, наконецъ, вмѣсто того, чтобы прибавлять числа, вычитать ихъ, а въ концѣ вмѣсто вычитанія прибавлять извѣстное число. Такъ, напр., воспользуемся числами перваго примѣра настоящей задачи, и пусть задуманное число будетъ 12. Удвоивъ его, получимъ 24; вычитая отсюда 5, получимъ $24-5$; умножая на 5, получимъ $120-25$; вычитая 10, получаемъ $120-35$; умножая на 10, получимъ $1200-350$. Здѣсь вмѣсто того, чтобы вычесть, нужно прибавить 350: сумма получится 1200, и число сотенъ въ ней (12) даетъ задуманное число.

Словомъ, читатель можетъ видоизмѣнять и разнообразить эту задачу, какъ ему угодно.

Задача 112-я.

Угадать задуманное число инымъ путемъ.

Изложимъ теперь способъ, который съ виду кажется замысловатѣе другихъ, хотя доказывается очень легко.

Пусть кто-либо задумаетъ какое-нибудь число. Затѣмъ предложите ему умножить это число на какое угодно заданное вами другое число, полученное произведеніе раздѣлить на какое угодно заданное вами число, затѣмъ частное опять умножить на какое вамъ угодно число, это произведеніе опять раздѣлить на какое угодно заданное вами число и т. д. Если угодно, то можно предоставить тому, кто задумалъ число, самому умножать и дѣлить задуманное число на какія ему угодно числа, лишь бы онъ сообщалъ каждый разъ, на какое число онъ множитъ и на какое дѣлитъ. Но, чтобы угадать задуманное число, самъ угадывающій пусть въ то же время возьметъ какое-либо число и продѣлываетъ надъ нимъ всѣ тѣ же самыя умноженія и дѣленія, что и задумавшій число. Остановившись затѣмъ на какомъ-либо дѣленіи, попросите задумавшаго число, чтобы онъ раздѣлилъ на задуманное имъ число то послѣднее число, которое онъ получилъ. Точно также и вы (угадывающій) раздѣлите послѣднее вами полученное число на взятое вами первоначально. **Тогда у васъ получится тоже число, что и у задумавшаго число.** Послѣ этого пусть задумавшій число прибавитъ къ полученному имъ въ умѣ частному задуманное число и скажетъ вамъ результатъ. Вычитая изъ этого результата извѣстное уже вамъ частное, получаете задуманное число.

Напримѣръ: Пусть кто либо задумаетъ число 5. Предложите ему помножить его на 4; результатъ (20) раздѣлить на 2 (получится 10); полученное число умножить на 6 (получится 60); это послѣднее произведеніе раздѣлить на 4 (получится 15). Но въ то же время вы сами должны выбрать какое-либо число и дѣлать надъ нимъ всѣ тѣ же дѣйствія. Пусть, напр., вы возьмете 4 (лучше, вообще, брать для удобства 1). Умножая на 4, вы получаете 16; дѣля на 2, вы получаете 8; умножая на 6, вы получаете 48; дѣля это число на 4, вы получаете 12. Вслѣдъ затѣмъ вы говорите задумавшему число, чтобы онъ послѣднее полученное имъ число (т. е. 15) раздѣлилъ на задуманное (т. е. 5). У него получается 3.

Если вы въ то же время свое послѣднее полученное число 12 раздѣлите на взятое вами сначала, т. е. 4, то получите также 3. Сдѣлавъ видъ, что вамъ неизвѣстно полученное вашимъ партнеромъ частное, вы говорите ему, чтобы онъ прибавилъ къ полученному имъ числу задуманное число и сказалъ вамъ результатъ; онъ, конечно, скажетъ вамъ въ этомъ примѣрѣ 8. Отнимая отъ 8 полученное уже вами частное 3, найдете задуманное вашимъ партнеромъ число 5.

Доказательство.

Если надъ какимъ-либо числомъ n производится рядъ умноженій и дѣленій, то получается результатъ вида $n\cdot\frac{a\cdot b\cdot c\ldots.}{g\cdot h\ k\ldots.}$ Если произвести тѣ же дѣйствія надъ числомъ p, то получится результатъ вида $p\cdot\frac{a\cdot b\cdot c\ldots.}{g\cdot h\cdot k\ldots.}$ Оба эти результата, раздѣленные первый на n, а второй на p, дадутъ, очевидно, одно и то же число $\frac{a\cdot b\cdot c\ldots.}{g\cdot h\cdot k\ldots.}$ Итакъ, зная число $\frac{a\cdot b\cdot c\ldots.}{g\cdot h\cdot k\ldots.}$ и сумму $\frac{a\cdot b\cdot c\ldots.}{g\cdot h\cdot k\ldots.}+n$, достаточно изъ послѣдняго вычесть первое, чтобы получить число n.

Замѣчаніе. Можно, очевидно, всячески видоизмѣнять настоящую задачу, такъ какъ, во-первыхъ, можно дѣлить и умножать на какія угодно числа, а во-вторыхъ, вмѣсто того, чтобы умножать и дѣлить поочередно, можно сначала умножать два, три и т. д. раза сряду, а затѣмъ столько же разъ дѣлить, или наоборотъ. Можно также, зная послѣднее частное, замѣнять сложеніе вычитаніемъ, если задуманное число окажется меньше полученнаго послѣдняго частнаго, и т. д.

Задача 113-я.

Угадать нѣсколько задуманныхъ кѣмъ-либо чиселъ.

I. Пусть кто-либо задумаетъ **нечетное** число какихъ-либо чиселъ, т. е. 3, или 5, или 7, или 9 и т. д. чиселъ, и пусть онъ скажетъ вамъ сумму перваго и второго чиселъ, затѣмъ суммы второго и третьяго, третьяго и четвертаго и т. д., наконецъ, сумму послѣдняго изъ задуманныхъ имъ чиселъ и перваго.

Возьмите эти суммы въ **томъ же порядкѣ**, какъ онѣ сказаны вамъ, и сложите вмѣстѣ всѣ тѣ, которыя стоятъ на нечетныхъ мѣстахъ (т. е. 1-ю съ 3-ей, съ 5-й и т. д.), а затѣмъ сложите всѣ тѣ, которыя стоятъ на четныхъ мѣстахъ (т. е. 2-ю съ 4-ой, съ 6-й и т. д.), и вычтите изъ перваго результата второй. Остатокъ и дастъ **удвоенное первое задуманное число.** Беря половину этого остатка, получаемъ самое число. Зная его, не трудно найти остальныя числа, такъ какъ суммы перваго и второго, второго и третьяго и т. д. извѣстны.

Доказательство.

Пусть задуманныя числа будутъ a, b, c, d, e. Даны суммы:

$$a+b;\ b+c;\ c+d;\ d+e;\ e+a.$$

Складывая суммы, стоящія на нечетныхъ мѣстахъ, получимъ:

$$a+b+c+d+e+a,$$

и складывая суммы, стоящія на четныхъ мѣстахъ, получимъ:

$$b+c+d+e.$$

Вычитая изъ первой суммы вторую, получаемъ $2a$. Половина этого числа есть первое изъ задуманныхъ чиселъ a; вычитая a изъ $a+b$, получимъ b и т. д.

Другой случай.

II. Если же кто-либо задумаетъ **четное** число чиселъ, то, какъ и выше, пусть онъ скажетъ суммы задуманныхъ чиселъ по два (перваго со вторымъ, второго съ третьимъ и т. д.), но въ концѣ пусть объявитъ сумму не послѣдняго съ первымъ задуманнымъ числомъ, но **послѣдняго со вторымъ.** Послѣ этого опять нужно сложить всѣ суммы, стоящія на нечетныхъ мѣстахъ, **кромѣ первой**, затѣмъ всѣ суммы, стоящія на четныхъ мѣстахъ, и изъ второго результата вычесть первый. Остатокъ и дастъ **удвоенное второе задуманное число.**

Доказательство.

Пусть задуманы числа a, b, c, d, e, f.
Даны суммы:

$$a+b;\ b+c;\ c+d;\ d+e;\ e+f;\ f+b.$$

Суммы, стоящія на нечетныхъ мѣстахъ, за исключеніемъ первой, даютъ:

$$c+d+e+f.$$

Суммы, стоящія на четныхъ мѣстахъ, даютъ:

$$b+c+d+e+f+b.$$

Разность между этой суммой и предыдущей есть $2b$; половина этого числа и есть задуманное второе число b. Остальныя числа найти уже легко.

Замѣчанія. Можно эту же задачу рѣшать иными способами, изъ которыхъ укажемъ на слѣдующіе:

Пусть число задуманныхъ чиселъ будетъ **нечетное**.

Сложивъ всѣ данныя суммы и раздѣливъ полученное число пополамъ, найдемъ сумму всѣхъ задуманныхъ чиселъ. Если же задумано **четное** число чеселъ, то сложимъ всѣ данныя суммы, кромѣ первой, результатъ подѣлимъ пополамъ и получимъ сумму всѣхъ задуманныхъ чиселъ, кромѣ перваго. Но, зная сумму всѣхъ задуманныхъ чиселъ, легко найти въ данномъ случаѣ каждое число въ отдѣльности. Пусть, напримѣръ, задуманы числа 2, 3, 4, 5, 6. Суммы, которыя даются, будутъ: 5, 7, 9, 11, 8. Складывая эти числа, получимъ 40. Половина этого числа (20) и есть сумма всѣхъ задуманныхъ чиселъ.

Зная теперь, что сумма 2-го и 3-го задуманныхъ чиселъ есть 7, а сумма 4-го и 5-го чиселъ есть 11, вычитаемъ $7+11=18$ изъ 20 и получаемъ первое задуманное число 2 и т. д.

Подобнымъ же образомъ надо поступать и въ томъ случаѣ, когда задумано четное число чиселъ.

Можно узнавать числа и такъ. Если кто-либо задумаетъ 3 числа, предложите ему сказать ихъ суммы по 2, какъ объяснено выше; если онъ задумалъ 4 числа, предложите ему сложить ихъ по три и сказать вамъ суммы; если задумано 5 чиселъ, предложите сложить ихъ по четыре и сказать вамъ суммы и т. д. Затѣмъ, чтобы отгадать задуманныя числа, нужно руководствоваться слѣдующимъ общимъ правиломъ.

Всѣ извѣстныя суммы сложить и полученный результатъ раздѣлить на число, единицей меньшее числа задуманныхъ чиселъ. Полученное частное и есть сумма всѣхъ задуманныхъ чиселъ. Послѣ этого уже не трудно найти каждое число въ отдѣльности. Пусть, напримѣръ, задуманы 3, 5, 6, 8. Суммы ихъ по три будутъ $3+5+6=\mathit{14}$, $5+6+8=\mathit{19}$, $6+8+3=\mathit{17}$, $8+3+5=\mathit{16}$. Складывая эти суммы, получаемъ *66*. Эту сумму надо раздѣлить на 3 (т. е. на число, меньшее единицей числа задуманныхъ чиселъ). Получается 22, сумма всѣхъ задуманныхъ чиселъ. Если, теперь, изъ 22 вычесть 14, получимъ послѣднее изъ задуманныхъ чиселъ (8); вычитая 19, получаемъ первое (3) и т. д. Понять и доказать все это не трудно.

Желающимъ предоставляемъ доказать, почему въ случаѣ четнаго числа задуманныхъ чиселъ нельзя брать попарно суммъ такъ, чтобы послѣдняя состояла изъ послѣдняго задуманнаго числа плюсъ первое, а непремѣнно послѣднее и второе изъ задуманныхъ чиселъ.

Задача 114-я.

Угадать задуманное число, ничего не спрашивая у задумывающаго.

Предложите кому-либо задумать число, затѣмъ пусть онъ умножитъ задуманное число на произвольно выбранное вами число, къ этому числу пусть онъ прибавитъ любое данное вами число и полученную сумму раздѣлитъ на данное вами же произвольное число. Въ то же время данный вами множитель раздѣлите въ умѣ на данный дѣлитель, и сколько единицъ и частей единицы заключается въ полученномъ частномъ, столько разъ предложите задумавшему число отнять отъ полученнаго имъ частнаго задуманное число, и вы тотчасъ же скажете ему остатокъ, который онъ получилъ. Этотъ остатокъ всегда равенъ частному, полученному отъ дѣленія того числа, которое вы дали, чтобы приложить къ произведенію, на данный вами же дѣлитель.

Напримѣръ: Пусть кто-либо задумаетъ 6; предложите ему умножить его на 4. Получится 24; предложите прибавить 15; получится 39. Пусть раздѣлитъ на 3; получится 13. Дѣля въ умѣ въ то же время 4 на 3, вы получаете $^4/_3$ или $1^1/_3$. Поэтому предложите задумавшему число отнять отъ полученнаго имъ частнаго задуманное число да еще одну треть этого числа (т. е. шесть да еще два,—всего восемь): 13—8 = 5,—остается 5. Тотъ же результатъ получится, если вы данное вами число 15 раздѣлите на данный вами же дѣлитель 3.

Доказательство.

Дѣйствія, которыя производятся въ данномъ случаѣ надъ задуманнымъ числомъ n, можно выразить такъ:

$\frac{na+b}{c}$, а это выраженіе можно представить въ видѣ $\frac{na}{c}+\frac{b}{c}$.

Ясно, что вычитая $n.\frac{a}{c}$, получимъ остатокъ $\frac{b}{c}$.

Замѣчаніе. Настоящая задача рѣшена здѣсь въ довольно общемъ видѣ. Употребляется иными часто такой частный случай ея. Заставляютъ удваивать задуманное число, затѣмъ прибавлять къ результату произвольное, но четное число, затѣмъ заставляютъ полученную сумму дѣлить на 2 и изъ частнаго вычитать одинъ разъ задуманное число. Остатокъ, конечно, всегда получится равнымъ половинѣ прибавленнаго раньше четнаго числа. Очевидно, однако, что интереснѣе рѣшать задачу въ общемъ видѣ. Тѣмъ болѣе, что при этомъ можно практиковаться въ дробяхъ. Если же почему-либо нежелательно получать дроби, то всегда возможно подобрать такія числа, чтобы дробей не получалось.

Задача 115-я.

Дано 2 числа,—одно четное, другое нечетное,—и предложено 2 лицамъ взять одному четное число, а другому нечетное, какъ кто пожелаетъ. Угадать, кто выбралъ четное, а кто нечетное?

Вы предлагаете, напр., Петру и Ивану два числа (одно четное и другое нечетное), напр. 10 и 9. Изъ нихъ одинъ, уже безъ вашего вѣдома, беретъ четное, а другой нечетное число. Чтобы угадать, какое кто взялъ число, вы тоже возьмите два числа, четное и нечетное, напр. 2 и 3, и предложите, чтобы

Петръ взятое имъ число помножитъ про себя на 2, а Иванъ свое число на 3, послѣ чего пусть они сложатъ полученныя ими числа и скажутъ намъ полученную сумму. Или же пусть скажутъ только, **четное или нечетное** число они получили послѣ сложенія, такъ какъ вамъ нужно знать только это. Если же хотите задачу сдѣлать болѣе непонятной, то вывѣдайте это у нихъ другимъ путемъ (Предлагая, напр., раздѣлить полученную ими сумму на два и сказать, дѣлится или не дѣлится она нацѣло и т. д.). Положимъ, вы узнали, что получилась четная сумма; тогда ясно, что число, помноженное на 3, было четное, т. е. Иванъ взялъ четное число 10, а Петръ нечетное 9. Если же по сложеніи у нихъ получилась нечетная сумма, то ясно, что тотъ взялъ нечетное число, кому вы предложили умножить его число на 3.

Доказательство.

Число, которое умножается на 2, даетъ всегда произведеніе **четное.** Слѣдовательно, сумма, обоихъ произведеній четна или нечетна, смотря по тому, будетъ ли **четно или нечетно** другое произведеніе. Но если число множится на нечетный множитель, то произведеніе будетъ четнымъ, если множимое четно, и нечетнымъ, если нечетно множимое. Итакъ, по суммѣ обоихъ произведеній можно судить, четно или нечетно то число, которое множится на нечетный множитель.

Задача 116-я.

Та же задача съ двумя взаимно-простыми числами.

Предложите 2-мъ лицамъ замѣтить любое изъ данныхъ 2-хъ чиселъ, но такихъ, чтобы эти числа были между собой **взаимно-простыя**, какъ, напр., 9 и 7, и кромѣ того, чтобы одно изъ нихъ было составное (какъ въ данномъ примѣрѣ 9). Множителями, на которые вы хотите, чтобы помножили замѣченныя числа, возьмите также два взаимно-простыхъ числа, но такихъ, чтобы одно изъ нихъ содержалось цѣлое число разъ въ одномъ изъ чиселъ, данныхъ на выборъ двумъ лицамъ. Напр., если взять 3 и 2, то эти числа и взаимно-простыя, и 3 есть множитель 9.

Вслѣдъ затѣмъ предложите одному лицу умножить выбранное имъ число на 2, а другому на 3, сложить результаты и сказать вамъ или полученную сумму, или же, дѣлится ли эта сумма нацѣло на тотъ данный вами множитель, который въ свою очередь содержится въ одномъ изъ предложенныхъ вами на выборъ чиселъ (Напр. во взятомъ нами примѣрѣ узнать, дѣлится ли число на 3). Узнавъ это, тотчасъ же можно опредѣлить, кто какое число замѣтилъ. Въ самомъ дѣлѣ, если полученная сумма дѣлится на три, это значитъ, что на 3 умножено число, не дѣлящееся на 3, т. е. 7; наоборотъ, если полученная сумма не дѣлится на 3, то это значитъ, что на три было умножено число, дѣлящееся на 3, т. е. 9. Точно также поступаютъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда берутся и предлагаются иныя числа, лишь бы они удовлетворяли изложеннымъ выше условіямъ.

Доказательство.

Пусть A и B суть взаимно-простыя числа, и два другихъ a и c тоже взаимно-простыя числа, при чемъ A есть кратное числа a. Послѣ соотвѣтственныхъ умноженій можетъ получиться сумма

$$Ac + Ba \text{ или } Aa + Bc.$$

И ясно, что первая сумма дѣлима на a, вторая же—нѣтъ. Слѣдовательно, B умножится или не умножится на a, смотря по тому, дѣлима или недѣлима на a сумма, полученная задумавшими послѣ соотвѣтственныхъ умноженій и сложенія.

Задача 117-я.

Отгадать нѣсколько задуманныхъ чиселъ, если каждое изъ нихъ не превышаетъ десяти.

Попросите задумавшаго умножить первое изъ задуманныхъ чиселъ на 2 и къ произведенію прибавить 5, полученную сумму умножить на 5 и къ результату прибавить 10. Къ полученному числу прибавить второе задуманное число и все помножить на 10; къ полученному результату прибавить третье задуманное число и опять помножить на 10; потомъ прибавить четвертое изъ задуманныхъ чиселъ и опять помножить на 10 и т. д. Словомъ, пусть задумавшій нѣсколько чиселъ, каждое изъ которыхъ не превышаетъ десяти, постоянно умножаетъ на 10 и прибавляетъ одно изъ задуманныхъ чиселъ, пока не прибавитъ послѣдняго. Вслѣдъ затѣмъ пусть задумавшій числа объявитъ послѣднюю полученную имъ сумму; и если задумано только 2 числа, то, вычтя изъ этой суммы 35, найдемъ, что число десятковъ остатка даетъ первое задуманное число, а число простыхъ единицъ даетъ второе задуманное число. Если же задумано три числа, то изъ сказанной вамъ суммы вычтите 350, и тогда число сотенъ дастъ первое задуманное число, число десятковъ—второе, число простыхъ единицъ—третье. Если задумано четыре числа, то изъ сказанной вамъ суммы вычтите 3 500, и тогда число тысячъ остатка дастъ первое задуманное число, число сотенъ—второе, число десятковъ третье, число простыхъ единицъ четвертое. Ясно, что въ случаѣ 5 задуманныхъ чиселъ нужно изъ сказаннаго вамъ результата вычитать 35 000 и т. д.

Напр., пусть задуманы 3, 5, 8, 2. Удваивая первое изъ нихъ, получаемъ 6; придавая 5, находимъ 11; умножая это число на 5, имѣемъ 55; придавая 10, получаемъ 65; прибавляя сюда второе задуманное число, получаемъ 70; умноженное на 10, оно даетъ 700; придавая сюда третье задуманное число, получаемъ 708, умножая на 10, получаемъ 7 080; придавая сюда четвертое число, получаемъ 7 082. Если, теперь, изъ этого послѣдняго числа вычесть 3 500, то получится остатокъ 3 582, который и выражаетъ по порядку цифръ задуманныя числа: 3, 5, 8, 2.

Доказательство.

Пусть задуманныя числа будутъ a, b, c, d,... Надъ ними производятся слѣдующія дѣйствія:

Для первыхъ двухъ чиселъ:

$$(2a+5)\times 5=10a+25;\ 10a+25+10=10a+35;$$
$$10a+35+b=10a+b+35.$$

Для третьяго числа:

$$(10a+b+35)\times 10+c=100a+10b+c+350.$$

Для четвертаго:

$$(100a+10b+c+350)\times 10+d=1000a+100b+10c+d+3\,500.$$

И т. д. Откуда и ясно, что, вычитая изъ результата 35, 350, 3 500, смотря по количеству задуманныхъ чиселъ, мы получимъ всѣ задуманныя числа въ видѣ цифръ остатка, считая слѣва направо.

Замѣчанія. Данную задачу, изложенную въ довольно общемъ видѣ, можно, очевидно, видоизмѣнять и прилагать ко многимъ частнымъ случаямъ.

Такъ, напр., при игрѣ въ кости съ помощью этой задачи можно угадать, не смотря, число выброшенныхъ каждой костью очковъ. И это тѣмъ болѣе легко, что число очковъ каждой кости не превышаетъ 6-ти. Способъ угадыванія и правила остаются совершенно тѣ же.

Другіе пользуются этими же правилами для того, чтобы угадать, кто изъ нѣсколькихъ лицъ взялъ какую-либо вещь, въ какой рукѣ ее держитъ, на какомъ пальцѣ и даже на какомъ суставѣ.

Въ такомъ случаѣ необходимо расположить данныхъ лицъ въ извѣстномъ порядкѣ такъ, чтобы одинъ считался первымъ, другой—вторымъ, слѣдующій—третьимъ и т. д. Точно также нужно представить, что одна рука есть первая, а другая—вторая, и что на каждой рукѣ есть первый, второй, третій, четверый и пятый палецъ, и то же самое относительно суставовъ на каждомъ пальцѣ,—одинъ изъ нихъ пусть будетъ первымъ, другой вторымъ и т. д. Въ такомъ случаѣ задача сводится къ угадыванію четырехъ задуманныхъ чиселъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть изъ нѣсколькихъ лицъ тотъ, кого вы назвали **четвертымъ**, взялъ какую-либо вещь и держитъ ее въ **второй** рукѣ, на **пятомъ** пальцѣ, на **третьемъ** суставѣ. Въ такомъ случаѣ вы просите, чтобы взявшій вещь удвоилъ то число, которымъ онъ считается по порядку (У него получится 8). Прибавляя сюда 5, помножая результатъ на 5 и прибавляя 10, взявшій вещь получитъ нѣкоторое число (въ нашемъ примѣрѣ 75).

Къ этому числу предложите ему прибавить число руки и результатъ умножить на 10 (въ нашемъ примѣрѣ получится 770); къ этой суммѣ предложите прибавить число, выражающее палецъ руки, и опять умножить на 10 (Въ нашемъ примѣрѣ взявшій вещь получить 7 750). И, наконецъ, пусть прибавить къ этому послѣднему числу число, выражающее суставъ, и пусть кто-либо изъ играющихъ, не имѣющій вещи, скажетъ вамъ общую полученную сумму. Вамъ скажутъ въ данномъ примѣрѣ 7 753. Отнимая отсюда 3 500, вы получаете 4 253. Числа 4, 2, 5 и 3 показываютъ вамъ, что взятая вещь находится у **четвертаго** изъ играющихъ лицъ во **второй** рукѣ, на **пятомъ** пальцѣ и на **третьимъ** суставѣ.

Волшебные квадраты.

Основы теоріи.

Въ предыдущихъ главахъ мы уже не разъ встрѣчались съ волшебными квадратами и при помощи картъ, или домино, практически рѣшали задачи о составленіи ихъ. Войдемъ, въ заключеніе, въ область основныхъ теоретическихъ понятій о волшебныхъ квадратахъ, тѣмъ болѣе, что всякаго рода связанныя съ ними задачи и развлеченія весьма распространены.

Для знакомства съ теоретическими началами приводимъ здѣсь съ самыми небольшими сокращеніями нѣкоторыя статьи профессора В. П. Ермакова, а также статью г. Е. Орлова, которыя были напечатаны въ «Журналѣ Элементарной Математики» за 1884—5 годъ. Но, какъ уже упомянуто раньше, для болѣе полнаго и детальнаго изученія теоріи волшебныхъ квадратовъ необходимо обратиться къ спеціальнымъ сочиненіямъ, въ частности хотя бы къ указаннымъ на страницѣ 118-ой настоящей книги.

Теорія волшебныхъ квадратовъ, казалось бы, стоитъ особнякомъ въ ряду иныхъ отдѣловъ математики и имѣетъ мало «практическихъ» приложеній. Тѣмъ не менѣе пренебрегать ею не слѣдуетъ. Надъ ней работали такіе высочайшіе математическіе умы, какъ Ферма, и съ помощью ея не разъ приходили къ самымъ удивительнымъ и значительнымъ открытіямъ.

Полные волшебные квадраты.

Въ квадратѣ, состоящемъ изъ n^2 клѣтокъ, напишемъ всѣ числа отъ единицы до n^2. Если суммы чиселъ въ каждомъ горизонтальномъ ряду, въ каждомъ вертикальномъ ряду и въ каждой діагонали одинаковы, то такой квадратъ называется **волшебнымъ.**

Изъ каждаго волшебнаго квадрата поворачиваніемъ и переворачиваніемъ можно составить еще семь новыхъ волшебныхъ квадратовъ.

Если всѣ восемь **квадратовъ**, полученныхъ поворачиваніемъ и переворачиваніемъ одного **квадрата**, считать за одно **рѣшеніе**, то въ такомъ предположеніи **существуетъ** только одинъ **волшебный квадратъ, состоящій** изъ девяти **клѣтокъ**.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Для квадратовъ, состоящихъ изъ большаго числа клѣтокъ, мы введемъ еще новое условіе. Если волшебный квадратъ, послѣ перенесенія одного или нѣсколькихъ горизонтальныхъ или вертикальныхъ рядовъ съ одной стороны на другую, не теряетъ своихъ свойствъ, т. е. остается также волшебнымъ, то такой квадратъ мы будемъ называть **полнымъ волшебнымъ квадратомъ.** Если мы въ первомъ изъ написанныхъ ниже волшебныхъ квадратовъ перенесемъ первый вертикальный рядъ съ лѣвой стороны на правую, мы получимъ второй волшебный квадратъ.

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

8	13	12	1
11	2	7	14
5	16	9	4
10	3	6	15

13	12	1	8
2	7	14	11
16	9	4	5
3	6	15	10

12	1	8	13
7	14	11	2
9	4	5	16
6	15	10	3

Перенося во второмъ квадратѣ первый вертикальный рядъ съ лѣвой стороны на правую, мы получимъ третій волшебный квадратъ. Дѣлая подобную операцію съ третьимъ квадратомъ, мы получимъ четвертый волшебный квадратъ. Всѣ эти четыре квадрата суть полные волшебные квадраты. Перенося въ каждомъ изъ нихъ вертикальные ряды съ одной стороны на другую, мы получимъ изъ каждаго квадрата еще три новыхъ полныхъ волшебныхъ квадрата.

Дадимъ еще другое опредѣленіе полнаго волшебнаго квадрата. Двѣ параллельныя діагонали, находящіяся съ различныхъ сторонъ главной діагонали, мы будемъ называть **дополнительными,** если число клѣтокъ въ обѣихъ діагоналяхъ равно числу клѣтокъ въ главной діагонали. Двѣ дополнительныя діагонали надлежащимъ перенесеніемъ горизонтальныхъ или вертикальныхъ рядовъ всегда могутъ быть преобразованы въ одну главную діагональ. **Полнымъ волшебнымъ квадратомъ называется такой квадратъ, въ которомъ сумма чиселъ въ каждомъ горизонтальномъ ряду, въ каждомъ вертикальномъ ряду, въ каждой главной діагонали и въ каждыхъ двухъ дополнительныхъ діагоналяхъ одна и та же.**

Всякій полный волшебный квадратъ перенесеніемъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ рядовъ съ одной стороны на другую можетъ быть преобразованъ въ такой квадратъ, въ которомъ данное число находится въ данной клѣткѣ.

Волшебный квадратъ съ девятью клѣтками не можетъ быть полнымъ.

Покажемъ теперь, какимъ образомъ могутъ быть составлены всѣ полные волшебные квадраты съ 16 клѣтками. Возьмемъ четыре квадрата

		a	a
a	a		
		a	a
a	a		

	b	b	
b			b
	b	b	
b			b

	c		c
c		c	
c		c	
	c		c

	d		d
	d		d
d		d	
d		d	

Наложивъ ихъ одинъ на другой и сложивъ буквы въ каждой клѣткѣ, мы получимъ слѣдующій квадратъ:

	$b+c+d$	$a+b$	$a+c+d$
$a+b+c$	$a+d$	c	$b+d$
$c+d$	b	$a+b+c+d$	a
$a+b+d$	$a+c$	d	$b+c$

Если мы въ этомъ послѣднемъ квадратѣ вмѣсто a, b, c и d, поставимъ въ какомъ-нибудь порядкѣ 1, 2, 4 и 8, послѣ этого числа въ каждой клѣткѣ увеличимъ на единицу, то получимъ такой полный волшебный квадратъ, въ которомъ въ лѣвомъ верхнемъ углу стоитъ единица. Полагая, напр., $a=1$, $b=2$, $c=4$ и $d=8$, мы получимъ полный волшебный квадратъ, разсмотрѣнный нами раньше. Такъ какъ четыре буквы можно перемѣщать 24-мя различными способами, то нашимъ пріемомъ мы можемъ получить 24 такихъ полныхъ волшебныхъ квадрата, въ каждомъ изъ которыхъ въ лѣвомъ верхнемъ углу стоитъ единица. Изъ полученнаго такимъ образомъ каждаго квадрата перенесеніемъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ рядовъ съ одной стороны на другую мы можемъ образовать еще 15 новыхъ квадратовъ. Всего, слѣдовательно, мы можемъ найти $16 \times 24 = 384$ полныхъ волшебныхъ квадрата съ 16-ю клѣтками.

Указанный нами пріемъ даетъ всѣ возможные полные волшебные квадраты съ 16-ю клѣтками; больше 384 такихъ квадратовъ быть не можетъ.

Покажемъ теперь способъ составленія полныхъ волшебныхъ квадратовъ съ 25 клѣтками. Наложивъ два квадрата:

a	b	c	d	e
d	e	a	b	c
b	c	d	e	a
e	a	b	c	d
c	d	e	a	b

a	**b**	**g**	**d**	**e**
g	**d**	**e**	**a**	**b**
e	**a**	**b**	**g**	**d**
b	**g**	**d**	**e**	**a**
d	**e**	**a**	**b**	**g**

одинъ на другой и сложивъ буквы въ каждой клѣткѣ, мы получимъ слѣдующій квадратъ:

a + **a**	b + **b**	c + **g**	d + **d**	e + **e**
d + **g**	e + **d**	a + **e**	b + **a**	c + **b**
b + **e**	c + **a**	d + **b**	e + **g**	a + **d**
e + **b**	a + **g**	b + **d**	c + **e**	d + **a**
c + **d**	d + **e**	e + **a**	a + **b**	b + **g**

Если мы въ этомъ послѣднемъ квадратѣ вмѣсто *a*, *b*, *c*, *d*, *e* подставимъ въ какомъ-нибудь порядкѣ 1, 2, 3, 4, 5 и вмѣсто **a**, **b**, **g**, **d**, **e** подставимъ тоже въ произвольномъ порядкѣ 0, 5, 10, 15, 20, то получимъ полный волшебный квадратъ. Такъ какъ число перемѣщеній изъ пяти буквъ равно 120, то указаннымъ способомъ мы можемъ образовать $120 \times 120 = 14\,400$ полныхъ волшебныхъ квадратовъ. Столько же полныхъ волшебныхъ квадратовъ мы можемъ образовать, подставляя, наоборотъ, 0, 5, 10, 15, 20 вмѣсто *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и 1, 2, 3, 4, 5 вмѣсто **a**, **b**, **g**, **d**, **e**.

Полагая, напр., $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$, $\mathfrak{a}=0$, $\mathfrak{b}=5$, $\mathfrak{g}=10$, $\mathfrak{d}=15$, $\mathfrak{e}=20$, мы получимъ слѣдующій квадратъ:

1	7	13	19	25
14	20	21	2	8
22	3	9	15	16
10	11	17	23	4
18	24	5	6	12

Указанный нами пріемъ даетъ всѣ возможные полные волшебные квадраты съ 25-ю клѣтками; больше 28 880 такихъ квадратовъ не можетъ быть.

Способъ составленія полныхъ волшебныхъ квадратовъ съ 25 клѣтками можетъ быть распространенъ на квадраты съ бо̀льшимъ числомъ клѣтокъ, если только это число не дѣлится ни на два, ни на три; но доказать, что такимъ способомъ получаются всѣ возможеые полные волшебные квадраты, дѣло весьма трудное.

Желающіе доказать приведенныя выше теоремы могутъ найти ихъ въ спеціальныхъ сочиненіяхъ, или же пусть докажутъ ихъ сами. Предлагаемъ также заняться составленіемъ полныхъ волшебныхъ квадратовъ съ 36 клѣтками. Для руководства замѣтимъ, что методъ составленія полныхъ волшебныхъ квадратовъ состоитъ главнымъ образомъ въ разложеніи такихъ квадратовъ на простѣйшіе квадраты. Для рѣшенія задачи **необходимо знакомство съ свойствами корней двухчленнаго уравненія, такъ какъ составленіе волшебныхъ квадратовъ находится въ тѣсной связи съ разложеніемъ на множители двучлена:**

$$x^{n^2} - 1.$$

Такъ, теперь мы имѣемъ:

$$\frac{x^{16}-1}{x-1}=(x+1)\ (x^2+1)\ (x^4+1)\ (x^8+1).$$

Такъ какъ во второй части четыре множителя, то эта формула показываетъ, что каждый волшебный квадратъ съ 16 клѣтками можетъ быть разложенъ на четыре простѣйшихъ квадрата.

Средніе волшебные квадраты съ шестнадцатью клѣтками.

Возьмемъ волшебный квадратъ съ четнымъ числомъ клѣтокъ и раздѣлимъ его горизонтальной или вертикальной линіей пополамъ. Если послѣ перестановки одной половины на мѣсто другой квадратъ не измѣняетъ своихъ свойствъ, т. е. остается также волшебнымъ, то такой квадратъ мы будемъ называть *среднимъ волшебнымъ квадратомъ.*

Складывая два квадрата:

a	c	d	b
d	b	a	c
b	d	c	a
c	a	b	d

a	d	c	b
b	c	d	a
d	a	b	c
c	b	a	d

мы получимъ общее выраженіе для средняго волшебнаго квадрата съ шестнадцатью клѣтками:

a + a	c + d	d + c	b + b
d + b	b + c	a + d	c + a
b + d	d + a	c + b	a + c
c + c	a + b	b + a	d + d

Числа, стоящія въ клѣткахъ этого квадрата, суть не что иное, какъ показатели при различныхъ членахъ произведенія, полученнаго отъ умноженія двухъ четырехчленовъ:

$$P = x^{a} + x^{b} + x^{c} + x^{d},$$
$$Q = x^{\mathbf{a}} + x^{\mathbf{b}} + x^{\mathbf{c}} + x^{\mathbf{d}}.$$

Намъ извѣстно также, что въ клѣткахъ волшебнаго квадрата должны стоять всѣ числа отъ единицы до шестнадцати; поэтому

$$PQ = \frac{x^{17} - x}{x - 1}.$$

Остается подобрать восемь чиселъ a, b, c, d, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ такимъ образомъ, чтобы послѣднее уравненіе обратилось въ тождество. Вторая часть уравненія разбивается на произведеніе четырехъ двучленовъ, ибо

$$\frac{x^{16} - 1}{x - 1} = (1 + x)\ (1 + x^{2})\ (1 + x^{4})\ (1 + x^{8}).$$

Отсюда слѣдуетъ, что нашему уравненію можно удовлетворить шестью различными способами:

$$1)\ P + x\ (1 + x\ )\ (1 + x^{2}),\ Q + (1 + x^{4})\ (1 + x^{8})$$
$$2)\ P + x\ (1 + x\ )\ (1 + x^{4}),\ Q + (1 + x^{2})\ (1 + x^{8})$$
$$3)\ P + x\ (1 + x\ )\ (1 + x^{8}),\ Q + (1 + x^{2})\ (1 + x^{4})$$
$$4)\ P + x\ (1 + x^{2})\ (1 + x^{4}),\ Q + (1 + x\ )\ (1 + x^{8})$$
$$5)\ P + x\ (1 + x^{2})\ (1 + x^{8}),\ Q + (1 + x\ )\ (1 + x^{4})$$
$$6)\ P + x\ (1 + x^{4})\ (1 + x^{8}),\ Q + (1 + x\ )\ (1 + x^{2})$$

Сравнивъ показатели различныхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ, мы замѣтимъ, что вмѣсто a, b, c, d, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ могутъ быть подставлены числа, указанныя въ слѣдующей таблицѣ:

a,	b,	c,	d	a,	b,	c,	d
1.	2,	3,	4	0,	4,	8,	12
1,	2,	5,	6	0,	2,	8,	10
1,	2,	9,	10	0,	2,	4,	6
1,	3,	5,	7	0,	1,	8,	9
1,	3,	9,	11	0,	1,	4,	5
1,	5,	9,	13	0,	1.	2,	3

По этой таблицѣ вмѣсто буквъ могутъ быть поставлены числа, стоящія въ какомъ нибудь изъ шести рядовъ. Вмѣсто a, b, c, d могутъ быть поставлены въ произвольномъ порядкѣ числа, стоящія въ какомъ-нибудь ряду съ лѣвой стороны таблицы; вмѣсто **a**, **b**, **c**, **d** могутъ быть поставлены также въ произвольномъ порядкѣ числа, стоящія въ томъ же ряду съ правой стороны таблицы. Для примѣра, полагая

$$a=1,\ b=10,\ c=2,\ d=9,$$
$$\mathrm{a}=2,\ \mathrm{b}=4,\ \mathrm{c}=6,\ \mathrm{d}=0,$$

мы составимъ слѣдующій волшебный квадратъ:

3	2	15	14
13	16	1	4
10	11	6	7
8	5	12	9

Такъ какъ четыре цифры мы можемъ перемѣщать 24-мя способами, то число всѣхъ волшебныхъ среднихъ квадратовъ равно $6 \times 24 \times 24 = 3\,456$. Если же мы условимся считать за одно рѣшеніе всѣ восемь квадратовъ, полученныхъ поворачиваніемъ и переворачиваніемъ одного квадрата, то число различныхъ среднихъ волшебныхъ квадратовъ будетъ равно $3\,456 : 8 = 432$. Въ этомъ числѣ заключаются также и полные волшебные квадраты, такъ какъ послѣдніе представляютъ только частный случай среднихъ квадратовъ.

Указанный пріемъ даетъ всѣ возможные средніе волшебные квадраты съ шестнадцатью клѣтками; болѣе 3 456 такихъ квадратовъ не можетъ быть.

Правильные волшебные квадраты съ 16-ю клѣтками.

Каждый волшебный квадратъ можетъ быть разложенъ на сумму нѣсколькихъ квадратовъ. Возьмемъ волшебный квадратъ съ 16-ю клѣтками; въ немъ написаны всѣ числа отъ 1 до 16. Уменьшивъ каждое изъ чиселъ на 1, мы получимъ волшебный квадратъ, въ клѣткахъ котораго будутъ всѣ числа отъ 0 до 15. Каждое число отъ 1 до 15 можетъ быть составлено сложеніемъ четырехъ чиселъ: 1, 2, 4, 8 (См. выше, главу о двоичномъ исчисленіи).

$1 = 1$	$6 = 2 + 4$	$11 = 1 + 2 + 8$
$2 = 2$	$7 = 1 + 2 + 4$	$12 = 4 + 8$
$3 = 1 + 2$	$8 = 8$	$13 = 1 + 4 + 8$
$4 = 4$	$9 = 1 + 8$	$14 = 2 + 4 + 8$
$5 = 1 + 4$	$10 = 2 + 8$	$15 = 1 + 2 + 4 + 8.$

Разложивъ такимъ образомъ каждое число на составныя части и выдѣливъ въ одинъ квадратъ единицы, въ другой двойки, въ третій—четверки и въ четвертый—восьмерки, мы разложимъ каждый волшебный квадратъ съ 16-ю клѣтками на сумму четырехъ квадратовъ. Такъ, напр., квадратъ

9	14	2	5
15	4	8	3
0	11	7	12
6	1	13	10

разлагается на сумму четырехъ:

1			1
1			1
	1	1	
	1	1	

	2	2	
2			2
	2	2	
2			2

	4		4
4	4		
		4	4
4		4	

8	8		
8		8	
	8		8
		8	8

Волшебный квадратъ

0	4	15	11
9	13	2	6
14	10	5	1
7	3	8	12

разлагается на сумму четырехъ квадратовъ:

		1	1
1	1		
		1	1
1	1		

		2	2
		2	2
2	2		
2	2		

	4	4	
	4		4
4		4	
4			4

		8	8
8	8		
8	8		
		8	8

Волшебный квадратъ съ шестнадцатью клѣтками мы будемъ называть правильнымъ, если каждый изъ его четырехъ составныхъ квадратовъ есть также волшебный квадратъ.

Простѣйшихъ волшебныхъ квадратовъ, въ клѣткахъ которыхъ стоятъ только два различныхъ числа, можетъ быть восемь. Прежде всего, мы имѣемъ четыре полныхъ простѣйшихъ квадрата:

a	a	a'	a'
a'	a'	a	a
a	a	a'	a'
a'	a'	a	a

b	b'	b	b'
b	b'	b	b'
b'	b	b'	b
b'	b	b'	b

c	c'	c	c'
c'	c	c'	c
c'	c	c'	c
c	c'	c	c'

d	d'	d'	d
d'	d'	d	d'
d	d'	d'	d
d'	d	d	d'

Далѣе, имѣемъ два среднихъ квадрата:

e	e	e'	e'
e'	e'	e	e
e'	e'	e	e
e	e	e'	e'

f	f'	f'	f
f	f'	f'	f'
f'	f	f	f'
f'	f	f	f'

Кромѣ того, есть еще два простѣйшихъ волшебныхъ квадрата:

g	g	g'	g'
g	g'	g	g'
g'	g	g'	g
g'	g'	g	g

h	h'	h	h'
h'	h'	h	h
h	h	h'	h'
h'	h	h'	h

Складывая восемь простѣйшихъ квадратовъ по четыре, мы можемъ получить всѣ возможные правильные волшебные квадраты съ шестнадцатью клѣтками. Впрочемъ, мы должны выбирать только такія сочетанія по четыре, чтобы числа въ клѣткахъ полученнаго квадрата были различны между собою; этому условію удовлетворяютъ только одиннадцать сочетаній.

Условимся обозначать наши простѣйшіе квадраты соотвѣтственно буквами: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*. Прежде всего, мы получаемъ полный волшебный квадратъ сложеніемъ четырехъ простѣйшихъ полныхъ квадратовъ:

$$A+B+C+D.$$

Далѣе мы имѣемъ восемь слѣдующихъ среднихъ квадратовъ:

$$A+B+C+E,$$
$$A+B+D+F,$$
$$A+B+E+F,$$
$$A+C+D+E,$$
$$A+D+E+F,$$
$$B+C+D+F,$$
$$B+C+E+F,$$
$$C+D+E+F.$$

Кромѣ того, мы имѣемъ еще два правильныхъ волшебныхъ квадрата:

$$C+E+G+H,$$
$$D+F+G+H.$$

Въ каждомъ изъ найденныхъ одиннадцати квадратовъ, вмѣсто паръ буквъ a и a', b и b', c и c' и т. д., нужно подставить въ какомъ-нибудь порядкѣ четыре пары цифръ: 0 и 1, 0 и 2, 0 и 4, 0 и 8. Для примѣра возьмемъ квадратъ

$$C+E+G+H$$

и положимъ въ немъ

$$c=0,\ e=4,\ g=8,\ h=0.$$
$$c'=2,\ e'=0,\ g'=0,\ h'=1.$$

Такимъ образомъ, мы составимъ слѣдующій волшебный квадратъ:

12	15	0	3
11	1	14	4
2	8	7	13
5	6	9	10

Такъ какъ четыре пары цифръ можно перемѣщать 24-мя способами, а цифры каждой пары двумя способами, то число всѣхъ правильныхъ волшебныхъ квадратовъ равно $11\times16\times24=$ $=4\,224$. Если же мы условимся считать за одно рѣшеніе восемь квадратовъ, полученныхъ поворачиваніемъ и переворачиваніемъ одного квадрата, то число различныхъ правильныхъ волшебныхъ квадратовъ будетъ равно $4\,224:8=528$.

Изъ нашей теоріи слѣдуетъ, что къ числу правильныхъ квадратовъ принадлежатъ также разсмотрѣнные нами раньше полные и средніе квадраты.

Кромѣ правильныхъ квадратовъ есть еще много неправильныхъ волшебныхъ квадратовъ. Второй квадратъ, приведенный въ началѣ этой главы, представляетъ собою примѣръ неправильнаго волшебнаго квадрата.

Общее выраженіе всякаго неправильнаго квадрата получается сложеніемъ двухъ квадратовъ:

a	*c*	*d*	*b*
d	*b*	*a*	*c*
b	*d*	*c*	*a*
c	*a*	*b*	*d*

	a+b	**a—b**	
c—d	**—a—c**	**a—c**	**c+d**
—c+d	**—a+c**	**a+c**	**- c+d**
	a b	**a+b**	

Такимъ образомъ, вопросъ о составленіи неправильныхъ волшебныхъ квадратовъ приводится къ опредѣленію восьми чиселъ: *a*, *b*, *c*, *d*, **a**, **b**, **c** и **d** такимъ образомъ, чтобы въ клѣткахъ полученнаго квадрата стояли всѣ цѣлыя числа отъ единицы до шестнадцати. Мы не знаемъ простого рѣшенія этого вопроса и предоставляемъ читателямъ найти таковое.

Полные и средніе волшебные квадраты съ 64-мя клѣтками.

Въ настоящей главѣ предлагаемъ вниманію читателей изслѣдованіе г. Е. Орлова о полныхъ среднихъ квадратахъ съ 64-мя клѣтками.

Для квадрата въ 64 клѣтки имѣемъ:

$$\frac{x^{64}-1}{x-1}=(x^{32}+1)\ (x^{16}+1)\ (x^{8}+1)\ (x^{4}+1)\ (x^{2}+1)\ (x+1),$$

т. е. получаемъ 6 множителей, показывающихъ число элементарныхъ квадратовъ, составляющихъ общій квадратъ. И дѣйствительно, если мы возьмемъ 6 квадратовъ:

	a	a		a			a
a			a		a	a	
a			a		a	a	
	a	a		a			a
	a	a		a			a
a			a		a	a	
a			a		a	a	
	a	a		a			a

				b	b	b	b
b	b	b	b				
				b	b	b	b
b	b	b	b				
				b	b	b	b
b	b	b	b				
				b	b	b	b
b	b	b	b				

		c	c			c	c
		c	c			c	c
		c	c			c	c
		c	c			c	c
c	c			c	c		
c	c			c	c		
c	c			c	c		
c	c			c	c		

	d	d			d	d	
d			d	d			d
d			d	d			d
	d	d			d	d	
d			d	d			d
	d	d			d	d	
	d	d			d	d	
d			d	d			d

	e		e		e		e
	e		e		e		e
	e		e		e		e
	e		e		e		e
e		e		e		e	
e		e		e		e	
e		e		e		e	
e		e		e		e	

				f	f	f	f
				f	f	f	f
f	f	f	f				
f	f	f	f				
				f	f	f	f
				f	f	f	f
f	f	f	f				
f	f	f	f				

изъ которыхъ 3 послѣдніе, занятые буквами d, e и f, получаются переворачиваніемъ трехъ первыхъ около діагонали, соединяющей лѣвый верхній съ правымъ нижнимъ угломъ, и совмѣстимъ ихъ въ одинъ общій квадратъ, въ которомъ сложены элементы совпадающихъ клѣтокъ, то получимъ такой квадратъ:

A..

	a+d+e	a+c+d	c+e	a+b+f	b+d+c+f	b+c+d+f	a+b+c+e+f
a+b+d	b+e	b+c	a+b+c+d+e	d+f	a+e+f	a+c+f	c+d+e+f
a+d+f	e+f	c+f	a+c+d+e+f	b+d	a+b+e	a+b+c	b+c+d+e
b+f	a+b+d+e+f	a+b+c+d+f	b+c+e+f	a	d+e	c+d	a+c+e
c+d+e	a+c	a+e	d	a+b+c+d+e+f	b+c+f	b+e+f	a+b+d+f
a+b+c+e	b+c+d	b+d+e	a+b	c+e+f	a+c+d+f	a+d+e+f	f
a+c+e+f	c+d+f	d+e+f	a+f	b+c+e	a+b+c+d	a+b+d+e	b
b+c+d+e+f	a+b+c+f	a+b+e+f	b+d+f	a+c+d+e	c	e	a+d

Если мы замѣнимъ въ немъ буквы a, b, c, d, e и f числами 1, 2, 4, 8, 16 и 32 въ произвольномъ порядкѣ, и затѣмъ прибавимъ на каждую клѣтку по единицѣ, то получимъ полный волшебный квадратъ. Такъ какъ такихъ квадратовъ можетъ быть составлено столько, сколько можно сдѣлать перестановокъ изъ 6-ти чиселъ, именно $P_6 = 6! = 720$, и каждый квадратъ даетъ вмѣстѣ съ собою еще 64 квадрата, то наша схема даетъ $64 P_6 = 64 \times 720 = 46\,080$ квадратовъ. Нельзя, однако, сказать, чтобы она исчерпывала собою всевозможные полные квадраты о 64 клѣткахъ. И дѣйствительно, оставляя, напр., 3 первыхъ элементарныхъ квадрата прежними и замѣняя 3 послѣднихъ квадрата такими:

	d		d		d		d
d	d	d	d				
	d		d		d		d
				d	d	d	d
d		d		d		d	
d	d	d	d				
d		d		d		d	
				d	d	d	d

	e		e	e		e	
	e		e	e		e	
e		e			e		e
e		e			e		e
	e		e	e		e	
	e		e	e		e	
e		e			e		e
e		e			e		e

	f	f		f			f
	f	f		f			f
f			f		f	f	
f			f		f	f	
	f	f		f			f
	f	f		f			f
f			f		f	f	
f			f		f	f	

мы, по соединеніи этихъ 6-ти квадратовъ, получаемъ новую схему полныхъ квадратовъ такого рода:

B...

	a+d+e+f	a+c+f	c+d+e	a+b+e+f	b+d	b+c+e	a+b+c+d+f
a+b+d	b+d+c+f	b+c+d+f	a+b+c+d+e	e+f	a	a+c+e	c+f
a+e+f	d	c+e	a+c+d+f	b	a+b+d+e+f	a+b+c+f	b+c+d+e
b+e+f	a+b	a+b+c+e	b+c+f	a+d	d+e+f	c+d+f	a+c+d+e
c+d	a+c+e+f	a+d+f	e	a+b+c+d+e+f	b+c	b d+c	a+b+f
a+b+c+d	b+c+d+e+f	b+d+f	a+b+d+e	c+e+f	a+c	a+c	f
a+c+d+e+f	c	d+e	a+f	b+c+d	a+b+c+e+f	a+b+d+f	b+e
b+c+e+f	a+b+c	a+b+e	b+f	a+c+d	c+d+e+f	d+f	a+b+e

и эта схема удовлетворяетъ тѣмъ же условіямъ, что и (А).

2. Но схема (А) отличается, однако, отъ схемы (В) тѣмъ, что она можетъ быть обобщена въ новую схему, захватывающую собою не только всѣ полные квадраты схемы (А), но и массу неполныхъ квадратовъ, и это дѣлается такимъ образомъ. Разбивъ квадратъ (А) на 2 другіе квадрата, изъ которыхъ

въ первый выдѣлимъ всѣ сочетанія буквъ a, b и c, а во второй — всѣ комбинаціи остальныхъ буквъ d, e и f, мы получимъ 2 такіе квадрата:

	a	a+c	a+c	a+b	b	b+c	a+b+c
a+b	b	b+c	a+b+c		a	a+c	c
a		c	a+c	b	a+b	a+b+c	b+c
b	a+b	a+b+c	b+c	a		c	a+c
c	a+c	a		a+b+c	b+c	b	a+b
a+b+c	b+c	b	a+b	c	a+c	a	
a+c	c		a	b+c	a+b+c	a+b	b
b+c	a+b+c	a+b	b	a+c	c		a

	d+e	d	e	f	d+e+f	d+f	e+f
d	e		d+e	d+f	e+f	f	d+e+f
d+f	e+f	f	d+e+f	d	e		d+e
f	d+e+f	d+f	e+f		d+e	d	e
d+e		e	d	d+e+f	f	e+f	d+f
e	d	d+e		e+f	d+f	d+e+f	f
e+f	d+f	d+e+f	f	e	d	d+e	
d+e+f	f	e+f	d+f	d+e		e	d

Замѣнимъ въ первомъ квадратѣ величины 0 (т. е. пустую клѣтку), a, $a+c$, c, $a+b$, b, $b+c$ и $a+b+c$ соотвѣтственно черезъ a, b, c, d, e, f, h, а величины второго квадрата, именно: 0, $d+e$, d, e, f, $d+e+f$, $d+f$ и $e+f$, соотвѣтственно же, замѣнимъ черезъ **a**, **b**, **g**, **d**, **e**, **h**, **z** и **r**, тогда мы получимъ 2 квадрата, наложеніе другъ на друга которыхъ составитъ, наконецъ, схему (C).

a	b	c	d	e	f	g	h
e	f	g	h	a	b	c	d
b	a	d	c	f	e	h	g
f	e	h	g	b	a	d	c
d	·	b	a	h	g	f	e
h	g	f	e	d	c	b	a
c	d	a	b	g	h	e	f
g	h	e	f	c	d	a	b

a	b	g	d	e	h	z	r
g	d	a	b	z	r	e	h
z	r	e	h	g	d	a	b
e	h	z	r	a	b	g	d
b	a	d	g	h	e	r	z
d	g	b	a	r	z	h	e
r	z	h	e	d	g	b	a
h	e	r	z	b	a	d	a

C...

a+a	b+b	c+g	d+d	e+e	f+h	g+z	h+h
e+g	f+d	g+a	h+b	a+z	b+r	c+e	d+h
b+z	a+h	d+e	c+h	f+g	e+d	h+a	g+b
f+e	e+h	h+z	g+h	b+a	a+b	d+g	c+d
d+b	c+a	b+d	a+g	h+h	h+e	f+h	e+z
h+h	g+g	f+b	e+a	d+h	c+z	b+h	a+e
c+h	d+z	a+b	b+e	g+d	h+g	e+b	f+a
g+h	h+e	e+h	f+z	c+b	d+a	a+d	b+g

Эта схема даетъ, кромѣ полныхъ квадратовъ схемы (A), еще массу неполныхъ квадратовъ. Для нея мы имѣемъ 20 двойныхъ рядовъ чиселъ, которые можно получить по способу, указанному выше, въ статьѣ о среднихъ волшебныхъ квадратахъ съ 16-ю клѣтками, и которые приведены въ нижеслѣдующей таблицѣ.

№	Р я д ы.	
	Лѣвая половина.	Правая половина.
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56
2	1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
3	1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12	0, 4, 16, 20, 32, 36, 48, 52
4	1, 5, 17, 21, 33, 37, 49, 53	0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11
5	1, 2, 3, 4, 17, 18, 19, 20	0, 4, 8, 12, 32, 36, 40, 44
6	1, 5, 9, 13, 33, 37, 41, 45	0, 1, 2, 3, 16, 17, 18, 19
7	1, 2, 3, 4, 33, 34, 35, 36	0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28
8	1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29	0, 1, 2, 3, 32, 33, 34, 25
9	1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14	0, 2, 16, 18, 32, 34, 48, 50
10	1, 3, 17, 19, 33, 35, 49, 51	0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13
11	1, 2, 5, 6, 17, 18, 21, 22	0, 2, 8, 10, 32, 34, 40, 42
12	1, 3, 9, 11, 33, 35, 41, 43	0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21
13	1, 2, 5, 6, 33, 34, 37, 38	0, 2, 8, 10, 16, 18, 24, 26
14	1, 3, 9, 11, 17, 19, 25, 27	0, 1, 4, 5, 32, 33, 36, 37
15	1, 2, 9, 10, 17, 18, 25, 27	0, 2, 4, 6, 32, 34, 36, 38
16	1, 3, 5, 7, 33, 35, 36, 39	0, 1, 8, 9, 16, 17, 24, 25
17	1, 2, 9, 10, 32, 34, 41, 42	0, 2, 4, 6, 16, 18, 20, 22
18	1, 3, 5, 7, 17, 19, 21, 23	0, 1, 8, 9, 32, 33, 40, 41
19	1, 2, 17, 18, 33, 34, 49, 50	0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14
20	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15	0, 1, 16, 17, 32, 33, 48, 49

Ряды эти примѣняются для составленія квадратовъ такимъ образомъ: выбравши какой-либо рядъ, латинскія буквы схемы приравниваютъ числамъ лѣвой половины его, взятымъ тоже въ произвольномъ порядкѣ, а жирныя буквы схемы приравниваютъ числамъ правой половины его, взятымъ тоже въ произвольномъ порядкѣ, и тогда получается всегда неполный квадратъ, а въ частныхъ случаяхъ могутъ получаться и полные. Число всѣхъ квадратовъ, даваемыхъ послѣднею схемою, будетъ:

$$20 \cdot 8!8! = 20\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8)^2 = 20 \cdot 40\,320^2 =$$
$$= 20 \cdot 1\,625\,702\,400 = 32\,514\,048\,000,$$

такъ что даже $^1/_8$ этого числа (принимая во вниманіе квадраты, получаемые поворачиваніемъ и переворачиваніемъ), и та будетъ громадна, именно: 4 064 256 000, т. е. 4 слишкомъ милліарда!

КОНЕЦЪ.

Е. И. ИГНАТЬЕВЪ

ВЪ ЦАРСТВѢ СМЕКАЛКИ

КНИГА ВТОРАЯ

1909.

Е. И. Игнатьевъ.

ВЪ ЦАРСТВѢ СМЕКАЛКИ

или

АРИѲМЕТИКА ДЛЯ ВСѢХЪ.

КНИГА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ.

ОПЫТЪ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ХРЕСТОМАТІИ.

Книга 2-я.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
1909

Типографія А. С. Суворина. Эртелевъ, 13

Заставка изъ знаменитаго сочиненія Эйлера «Introductio in analysin infinitorum». Издано въ Лозаннѣ въ 1748 г.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

То несомнѣнное вниманіе, которымъ встрѣчена наша попытка составленія русской математической хрестоматіи, позволяетъ намъ, спустя всего годъ, предложить вниманію читателя эту вторую книгу. Цѣль ея, въ общемъ, та же, что и первой: въ доступной, легкой и по возможности занимательной формѣ вводить читателя въ область математическихъ знаній,—въ необъятное «царство смекалки». Какъ первая книга, такъ и эта, надѣемся, можетъ послужить недурнымъ пособіемъ для математическаго саморазвитія, самодѣятельности и уясненія весьма важныхъ дисциплинъ. Для чтенія и усвоенія содержанія всей почти этой книги не требуется никакой особой спеціальной математической подготовки. Это—*Ариѳметика для всѣхъ,* чувствующихъ желаніе и склонность къ работѣ ума. Здѣсь нѣтъ ничего или почти ничего, чего не осилилъ бы не только взрослый человѣкъ, но любой изъ юныхъ читателей, знакомый съ тѣми элементами математики, которые преподаются въ начальныхъ и среднихъ школахъ. Многое, если не все, можетъ здѣсь служить предметомъ бесѣдъ, развлеченій и занятій съ дѣтьми.

Но если по общимъ цѣлямъ эта книга есть продолженіе дѣла, начатаго въ первой, то она значительно разнится отъ предыдущей выполненіемъ. Такъ какъ предпринятый трудъ является у насъ чуть ли не единственнымъ, то въ первой части составитель не особенно заботился о «свѣжести», если можно такъ выразиться, и оригинальности, во что бы то ни стало, содержанія. Та книга имѣла прежде всего въ виду ознакомить русскую семью и школу съ тѣмъ только самымъ извѣстнымъ и распространеннымъ матеріаломъ, что имѣетъ уже давно въ своемъ распоряженіи западная школа и семья. Вотъ почему въ первую часть вошло довольно много такихъ задачъ и вопросовъ, которые иному знатоку могутъ показаться извѣстными и шаблонными. Впрочемъ, много ли у насъ такихъ знатоковъ?

Въ этой книгѣ, какъ читатель можетъ убѣдиться, мы поднимаемся на слѣдующую, высшую ступень. Съ одной стороны, значительно расширяется математическій кругозоръ, съ другой, болѣе тщательно и строго подбирается матерьялъ. На ряду съ легкостью, доступностью и возможной занимательностью изложенія составитель старается, гдѣ возможно, побудить читателя и къ научному, теоретическому взгляду на предметъ. Выясняются основы понятія о числѣ, о свойствахъ и характерѣ алгебраическихъ и геометрическихъ аксіомъ, объ Евклидовской и не-Евклидовской геометріи, о «четвертомъ измѣреніи», о нѣкоторыхъ главнѣйшихъ результатахъ, достигнутыхъ математикой вообще, дѣлаются всюду, гдѣ возможно, небольшія историческія справки... И читатель, конечно, не посѣтуетъ на насъ, если въ настоящей книгѣ мы, помимо общихъ

Introductio in analysin infinitorum. Лозанна. 1748.

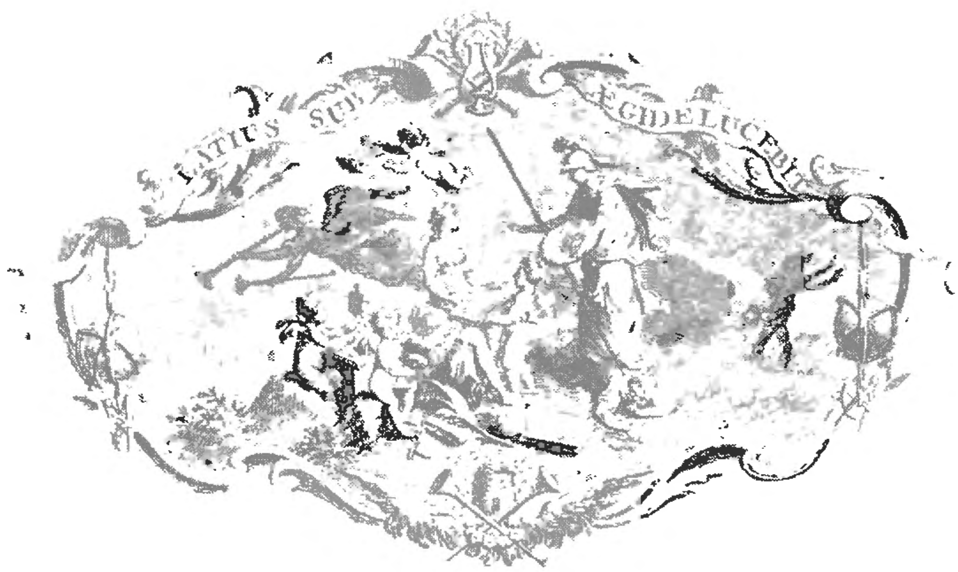
указаній на значеніе и сущность трудовъ Н. И. Лобачевскаго, приводимъ даже его небольшую біографію. Великій свѣточъ русской математической мысли умеръ, непонятый современниками, но имѣетъ всѣ права на то, чтобы въ попыткѣ первой русской математической хрестоматіи отнеслись къ нему съ должной данью уваженія.

Быть можетъ, ничто такъ не изощряетъ и не оттачиваетъ въ извѣстномъ отношеніи математической смекалки, какъ умѣнье разбираться въ такъ называемыхъ «математическихъ софизмахъ» и парадоксахъ. Жаль только, что въ имѣющихся у насъ книжкахъ съ попытками подобнаго сорта предлагаются просто самыя задачи безъ общаго, хотя бы, разъясненія сущности софизма. Вотъ почему этому предмету, помимо задачъ, посвящены и главы общаго содержанія. Думаемъ, что даже для знатоковъ софизмовъ онѣ не будутъ лишними. Не безъ интереса также, полагаемъ, отнесется читатель къ попыткамъ беллетристической обработки чисто математическихъ темъ. Помимо Э. По и Г. Уэльса, читатель найдетъ здѣсь главу «Въ странѣ чудесъ математики», составленную по мало извѣстной у насъ книгѣ Abbott, E. A.: «Flatland; a Romance of Many Dimensions by a Square».

Иному, пожалуй, покажется страннымъ найти въ концѣ книги нѣсколько страницъ, посвященныхъ извѣстнаго рода «математическимъ фокусамъ». На это замѣтимъ, что въ область смекалки входитъ также умѣнье разбираться, продѣлываютъ ли предъ вами просто фокусъ, или же дѣйствительную математическую комбинацію.

Въ заключеніе считаю долгомъ поблагодарить ученаго лѣсовода Я. И. Перельмана за ту готовность, съ которой онъ дѣлился со мной своими задачами, знаніями и опытомъ при составленіи этой книги. Ему же здѣсь принадлежитъ обработка главы «Математика въ природѣ» и «Новый родъ задачъ». Давнишнему своему пріятелю и товарищу по факультету, Н. П. Соколову, тоже приношу здѣсь свою благодарность за ту готовность, съ которой онъ сдѣлалъ пересмотръ и дополненія главы «Новыя начала Геометріи». Единственная попытка изложить кратко и популярно замѣчательный мемуаръ Н. И. Лобачевскаго принадлежитъ ему. Съ тѣмъ большимъ удовольствіемъ беремъ изъ его брошюры эту главу въ его собственной переработкѣ для настоящей книги.

Августъ. 1909 г.
С.-Петербургъ.



Introductio in analysin infinitorum. Lausannae. 1748.

Задача 1-я.

Гдѣ начинается новый годъ?

Обыкновенно спрашиваютъ, **когда** начинается новый годъ, и мало кто задается вопросомъ: **гдѣ** онъ начинается? Вопросъ этотъ, пожалуй, можетъ даже показаться нелѣпымъ, какой-то задачей-шуткой, въ родѣ вопросовъ: почему (по чему) птица летаетъ, или отчего (отъ чего) утка плаваетъ? Кажется яснымъ, что новый годъ начинается тамъ, гдѣ онъ начинается, и спрашивать тутъ собственно не о чемъ.

Однако, дѣло не такъ-то просто, какъ кажется, и вопросъ— гдѣ, въ какомъ пунктѣ земного шара впервые наступаетъ новый годъ, имѣетъ вполнѣ опредѣленный смыслъ.

Допустимъ, что вы встрѣчаете новый годъ въ Москвѣ. Вотъ бьетъ двѣнадцать часовъ: въ этотъ моментъ въ Москвѣ наступилъ новый годъ. Но мы знаемъ, что наши нижегородскіе знакомые уже полчаса какъ встрѣтили новый годъ, такъ какъ въ Нижнемъ часы показываютъ половину перваго, когда въ Москвѣ двѣнадцать. Въ Омскѣ новый годъ встрѣтили еще $2^1/_2$ ч. тому назадъ, въ Красноярскѣ—цѣлыхъ 4 часа тому назадъ, а въ Петропавловскѣ — даже на цѣлыхъ 8 часовъ ранѣе. Слѣдовательно, вы сейчасъ встрѣтили въ Москвѣ вовсе ужъ не новый годъ: вѣдь ему уже, по меньшей мѣрѣ, девять часовъ, этому новому году!

Итакъ, новый годъ начался гдѣ-то далеко на востокѣ и оттуда пришелъ къ намъ. Но гдѣ, въ какомъ мѣстѣ земного шара онъ впервые явился? Такой вопросъ, какъ видимъ, имѣетъ вполнѣ опредѣленный смыслъ. И на него надо умѣть отвѣтить.

Мы знаемъ уже, что въ Петропавловскѣ (на Камчаткѣ) новый годъ наступилъ на 8 часовъ раньше, чѣмъ въ Москвѣ. Попробуемъ подвигаться далѣе на востокъ и попытаемся отыскать, гдѣ онъ начался всего ранѣе. Въ Беринговомъ проливѣ онъ наступилъ на 11 час. раньше, чѣмъ въ Москвѣ. Въ Санъ-Франциско—на 14 часовъ раньше, въ Чикаго—на 16 час., въ Филадельфіи—на 17 час., въ Лондонѣ—на 20 час., въ Парижѣ—почти на 22 часа, въ Вѣнѣ—на 23 часа и, наконецъ, въ Москвѣ—на 24 часа!

Мы пришли къ абсурдному выводу, что въ Москвѣ новый годъ наступаетъ на 24 часа раньше, чѣмъ въ той же Москвѣ!

Недоумѣніе наше еще болѣе возрастаетъ, если мы будемъ двигаться отъ Москвы на западъ. Въ тотъ моментъ, когда въ Москвѣ только что наступилъ новый годъ, въ Петербургѣ всего половина двѣнадцатаго, т. е. тамъ еще старый годъ. Идя все далѣе и далѣе на западъ, мы, наконецъ, прибудемъ снова въ Москву,—и окажется, что тамъ одновременно долженъ быть и старый и новый годъ. Получается опять нелѣпость,—что въ Москвѣ новый годъ наступаетъ и въ данный моментъ, и на 24 часа ранѣе, и на 24 позднѣе.

Очевидно, все это происходитъ вслѣдствіе того, что земля—шаръ. Однако же мы знаемъ, что въ Москвѣ новый годъ наступаетъ въ вполнѣ опредѣленный моментъ, и слѣдовательно наше разсужденіе чѣмъ-нибудь да грѣшитъ, разъ мы пришли къ выводу, что на одномъ и томъ же пунктѣ новый годъ наступаетъ три дня кряду.

Не трудно догадаться, въ чемъ тутъ промахъ. Разъ въ данный моментъ къ востоку отъ Москвы новый годъ, а къ западу отъ нея пока еще старый годъ, то, вслѣдствіе шарообразности земли, должна существовать гдѣ-то пограничная линія, раздѣляющая область съ старымъ годомъ отъ области съ новымъ годомъ.

Такая пограничная линія на самомъ дѣлѣ и существуетъ; положеніе ея опредѣляется не какими-нибудь астрономическими условіями, а просто **практикой мореплаванія.**

Дѣло въ томъ, что затрудненія, съ которыми мы сейчасъ встрѣтились, возникаютъ не только въ этомъ случаѣ, но и тогда, когда ищутъ начала счета любого дня недѣли. Разсужденіями, вполнѣ сходными съ только что приведенными, легко убѣдиться, что гдѣ-то на земномъ шарѣ должна существовать линія, по одну сторону которой будетъ опредѣленный день недѣли,—напримѣръ среда, а по другую—слѣдующій, четвергъ.

Практическая же надобность въ установленіи подобной границы, или такъ называемой **демаркаціонной** линіи, возникла изъ необходимости регулировать веденіе календаря во время плаваній. Извѣстно, что при кругосвѣтныхъ путешествіяхъ съ запада на востокъ одинъ день какъ бы выигрывается, и путешественникъ, прибывъ въ исходный пунктъ, считаетъ на день болѣе, чѣмъ слѣдуетъ; при путешествіи же съ востока на западъ наблюдается обратное: путешественникъ въ счетѣ дней отстаетъ отъ истиннаго и какъ бы теряетъ однѣ сутки. Причину этого на первый взглядъ непонятнаго явленія легко раскрыть, если принять во вниманіе, что кругосвѣтный путешественникъ дѣлаетъ одинъ лишній оборотъ вокругъ земной оси—при движеніи на востокъ и, напротивъ, дѣлаетъ однимъ оборотомъ менѣе—при движеніи на западъ [1]). Другими словами, путешественникъ въ первомъ случаѣ увидитъ восходъ солнца однимъ разомъ болѣе, во второмъ—менѣе, нежели прочіе люди, остающіеся на мѣстѣ. А если онъ увидитъ однимъ восходомъ солнца болѣе или менѣе, то, слѣдовательно, будетъ насчитывать въ протекшемъ времени одними сутками болѣе или же менѣе. Мы знаемъ, что только благодаря этому Филеасъ Фоггъ, герой романа Жюля Верна «80 дней вокругъ свѣта», выигралъ свое оригинальное пари.

Впервые указанная особенность въ счетѣ дней при кругосвѣтныхъ путешествіяхъ стала извѣстна послѣ перваго кругосвѣтнаго плаванія Магеллана. Спутникъ погибшаго Магеллана, Себастіанъ-дель-Кано, при возвращеніи въ Европу «привезъ съ собой» четвергъ, въ то время какъ здѣсь была уже пятница (онъ ѣхалъ съ востока на западъ).

---

[1]) Напомнимъ, что такъ какъ **кажущееся** суточное движеніе солнца совершается съ востока на западъ, то истинное **вращеніе** земли вокругъ своей оси происходитъ въ обратномъ направленіи, то-есть съ запада на востокъ.

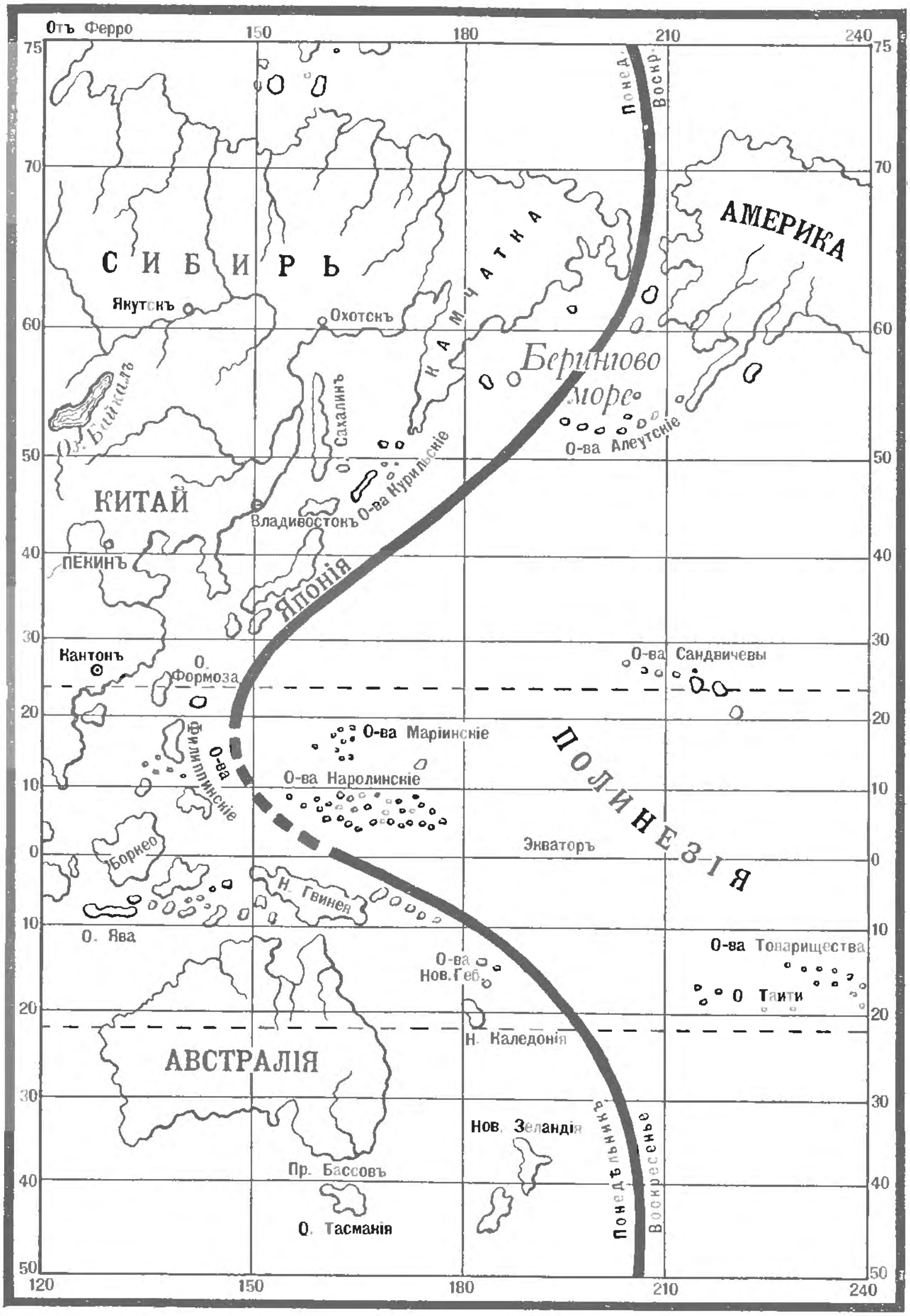
Съ этого времени мореплаватели начали постепенно устанавливать демаркаціонную линію, положеніе которой и теперь еще опредѣлено не во всѣхъ пунктахъ. Линія эта, ограничивающая области съ различными днями недѣли, слѣдуетъ по западной части Великаго океана. Она проходитъ черезъ Беринговъ проливъ, затѣмъ направляется къ берегамъ Японіи, огибаетъ съ запада острова Маріанскіе и Каролинскіе и идетъ далѣе къ югу, огибая съ востока Филиппины, Новую Гвинею, Австралійскій материкъ, Новую Каледонію и Новую Зеландію (см. карту фиг. 1).

Такимъ образомъ, когда на Филиппинскихъ островахъ, скажемъ, четвергъ, тогда на сосѣднихъ съ ними Каролинскихъ, всего въ полусотнѣ верстъ, тотъ же день называется средой. Произошло это просто потому, что Филиппины были открыты голландскими мореплавателями, прибывшими **съ востока**, а Каролинскіе о-ва открыты испанцами, отправлявшимися въ путь изъ Европы **на западъ**, черезъ Атлантическій океанъ, мимо Южной Америки и черезъ весь Великій океанъ.

Разсматривая карту, мы видимъ также, что подобная же разница въ счетѣ дней недѣли наблюдается и между Камчаткой и Аляской: когда на Камчаткѣ понедѣльникъ, на Аляскѣ воскресенье.

Понятно, что это вносило бы невѣроятную путаницу въ календарь и вызвало бы значительныя неудобства, если бы демаркаціонная линія проходила не черезъ водныя пустыни Тихаго океана, а черезъ материкъ Европы и Сѣверной Америки.

Но какимъ же образомъ эта демаркаціонная линія помогаетъ мореплавателямъ регулировать календарь? Вотъ какимъ. Когда судно пересѣкаетъ эту линію съ **запада на востокъ**, то слѣдующій день и число мѣсяца считаютъ за предыдущіе, т. е. **дважды считаютъ одинъ и тотъ же день** недѣли и число мѣсяца. Если, напримѣръ, демаркаціонная линія была пересѣчена въ среду 14 мая, то и слѣдующій день считаютъ за среду 14 мая. Въ судовой книгѣ, такимъ образомъ, на этой недѣлѣ будутъ двѣ среды и два раза подрядъ 14 мая. Благодаря этому уничтожается лишній день, который «выигрывается» при путешествіи съ запада на востокъ. Наоборотъ, когда судно пересѣкаетъ де-



Фиг. 1. Гдѣ начинается новый годъ?—Положеніе демаркаціонной линіи.

маркаціонную линію съ востока на **западъ,** то послѣ пересѣченія пропускаютъ цѣлыя сутки, другими словами, считаютъ уже слѣдующій день и число. Напримѣръ, если линія пересѣчена въ воскресенье 3 августа въ 7 часовъ вечера, то считаютъ 8-й часъ уже не воскресенья, а понедѣльника 4 августа. Такъ наверстывается день, который былъ бы «потерянъ» при кругосвѣтномъ плаваніи.

Само собою разумѣется, что все это было продѣлано капитаномъ и того судна, на которомъ плылъ герой романа Филеасъ Фоггъ. Если бы педантичный англичанинъ не былъ такъ поглощенъ своимъ пари и обращалъ вниманіе на окружающее, а наивный Паспарту не воображалъ, что часы его идутъ «вѣрнѣе солнца»,—то, конечно, они не могли бы проглядѣть того, что у нихъ пятница, когда кругомъ всего еще только четвергъ.

Теперь мы уже знаемъ, **гдѣ** начинается новый годъ, **гдѣ** зарождаются дни, недѣли, мѣсяцы. Тамъ, далеко, на островахъ Тихаго океана они впервые отдѣляются отъ вѣчности и беззвучно опускаются на нашъ земной шаръ. А оттуда быстро-быстро, со скоростью пятнадцати градусовъ въ часъ, они бѣгутъ легкою тѣнью по землѣ, одинъ за другимъ, посѣщая всѣ пункты нашей планеты. И обѣжавъ кругомъ земной шаръ, опять возвращаются къ этой границѣ, чтобы здѣсь покинуть землю и снова уйти въ вѣчность—увы!.. навсегда.

Если вы теперь въ состояніи правильно рѣшить задачу, гдѣ начинается новый годъ, то, вѣроятно, разберетесь и въ слѣдующемъ вопросѣ.

Задача 2.

Три воскресенья на одной недѣлѣ.

Можетъ ли на одной недѣлѣ быть три воскресенья? Мы знаемъ, что у нѣкоторыхъ людей бываетъ «семь пятницъ на одной недѣлѣ». Но бываетъ ли три воскресенья?

Вмѣсто отвѣта предлагаемъ читателю прочесть слѣдующій небольшой остроумный разсказъ знаменитаго американскаго писателя Эдгара По, — разсказъ, который мало кому извѣстенъ и который такъ и называется:

«*Три воскресенья на одной недѣлѣ*».

«Ахъ ты, упрямый старикашка!»—мысленно обратился я однажды къ дядѣ Ремгеджеру, гнѣвно сжавъ кулакъ (тоже, впрочемъ, лишь въ мысляхъ).

Да, только мысленно. На самомъ дѣлѣ то, что я думалъ, нѣсколько отличалось отъ того, что я дѣйствительно исполнилъ. Когда я открылъ дверь въ комнату дяди, старикъ сидѣлъ, вытянувъ ноги къ камину, держа кружку съ пивомъ въ рукахъ, и добросовѣстнѣйшимъ образомъ исполнялъ совѣтъ старой пѣсни:

Наполняй пустой бокалъ,
Полный—выпивай до дна!

— Дорогой дядя, — началъ я, тихо притворивъ дверь его комнаты и подходя къ нему съ сладкой миной, — вы всегда были ко мнѣ такъ расположены и столько разъ доказали свою доброту, что я не сомнѣваюсь въ вашей помощи и на этотъ разъ.

— Продолжай, мальчикъ, продолжай!—процѣдилъ дядя.

— Я убѣжденъ, дорогой дядя (чтобъ тебя, стараго скрягу!), что вы не станете серьезно противиться моей женитьбѣ на Кэтъ. Вы вѣдь только шутили, не правда ли? О, вы такой шутникъ, дядюшка, ха-ха-ха!

— Ха-ха-ха! — подхватилъ дядя.—Вотъ это правда, чортъ побери!

— Ну, вотъ, я такъ и зналъ! А теперь, дорогой дядя, я и Кэтъ ждемъ отъ васъ только указанія... относительно срока... Словомъ сказать, дорогой дядюшка, на когда, по вашему мнѣнію, всего удобнѣе будетъ назначить нашу свадьбу?

— Свадьбу? Какую? Вотъ еще новости! И думать не смѣй объ этомъ!

— Ха-ха-ха! Хо-хо-хо!.. Хи-хи-хи-хи... Это славно! Милый дядюшка, какой вы весельчакъ! Теперь остается только точно назначить день...

— А? Точно назначить?

— Да, дядюшка, если будете такъ добры...

— Ты хочешь точно знать срокъ? Хорошо, Боббп, такъ и быть, ублаготворю тебя.

— Ахъ, милый дядюшка!..

— Погоди. Итакъ, я изъявляю полное согласіе. Сегодня воскресенье, да? Хорошо-съ. Такъ слушай же: можешь вѣнчаться съ Кэтъ, ну, когда бы?.. Когда будетъ три воскресенья сряду на одной недѣлѣ! Чего ты глаза выпучилъ? Говорю же тебѣ: свадьба твоя будетъ, когда три воскресенья придутъ сряду на одной недѣлѣ. Ни однимъ днемъ раньше! Ты знаешь меня, слово мое неизмѣнно. А теперь проваливай!

И онъ снова принялся за свое пиво. Я же въ отчаяніи выбѣжалъ изъ комнаты.

Дядя мой, Ремгеджеръ, былъ, что называется, очень милый старичокъ, но имѣлъ свои странности. Будучи добродушенъ по натурѣ, онъ, благодаря страсти противорѣчить, пріобрѣлъ среди многихъ, не знавшихъ его близко, репутацію скряги. Въ него словно вселился бѣсъ отрицанія, и на каждый вопросъ онъ спѣшилъ отвѣтить «нѣтъ!» Но въ концѣ концовъ, послѣ долгихъ переговоровъ, никогда почти не случалось, чтобы просьба оставалась неисполненной. Мало кто дѣлалъ столько добра, сколько дѣлалъ онъ—и въ то же время такъ неохотно, какъ онъ.

Оставшись сиротой послѣ смерти моихъ родителей, я все время воспитывался и жилъ у старика дяди. Можетъ быть, по-своему чудакъ и любилъ меня, хотя не такъ, какъ свою внучку Кэтъ. Съ перваго же года онъ частенько дралъ меня, съ пяти лѣтъ до пятнадцати — стращалъ исправительнымъ домомъ, съ пятнадцати до двадцати—ежедневно грозилъ выгнать меня безъ копѣйки денегъ. Зато я имѣлъ вѣрнаго друга въ Кэтъ. Она была прелестная дѣвушка и премило заявила мнѣ, что станетъ моей, со всѣмъ своимъ приданымъ, какъ только я уговорю ея дѣдушку Ремгеджера. Бѣдняжкѣ было всего шестнадцать лѣтъ, и до совершеннолѣтія она не въ правѣ была распоряжаться своимъ капиталомъ безъ согласія дѣда. Но дѣдушка оставался непоколебимъ, несмотря на всѣ наши мольбы. Самъ библейскій Іовъ возропталъ бы при видѣ того, какъ онъ издѣвался надъ нами, словно котъ надъ мышами. Въ глубинѣ души дѣдушка былъ доволенъ нашимъ рѣшеніемъ и охотно выложилъ бы десять тысячъ фунтовъ изъ собственныхъ средствъ, если бы Кэтъ не имѣла приданаго. Но ему нуженъ былъ благовидный предлогъ, чтобы уступить нашимъ мольбамъ. Наша ошибка состояла въ томъ, что мы вздумали сами хлопотать о своей свадьбѣ, а при такихъ обстоятельствахъ дѣдушка положительно не въ силахъ былъ не оказать намъ противодѣйствія.

Дядя считалъ безчестіемъ отступать отъ разъ даннаго слова, но за то готовъ былъ толковать смыслъ вкривь и вкось, лишь бы остаться вѣрнымъ буквѣ. Вотъ этой чертой и воспользовалась лукавая Кэтъ вскорѣ послѣ моего знаменательнаго разговора съ дядей.

Разскажу вкратцѣ, какъ это произошло. Судьбѣ угодно было, чтобы среди знакомыхъ моей невѣсты были два моряка, недавно возвратившіеся въ Англію послѣ кругосвѣтнаго плаванія. Недѣли черезъ три послѣ памятнаго разговора, въ воскресенье послѣ обѣда я вмѣстѣ съ этими моряками зашелъ къ дядѣ въ гости. Около получаса мы говорили о разныхъ безразличныхъ вещахъ, пока разговоръ нашъ не принялъ такое направленіе:

капитанъ пратъ. Цѣлый годъ пробылъ я въ плаваніи. Ей-Богу, сегодня какъ разъ годовщина моего отъѣзда. Помните, м-ръ Ремгеджеръ, какъ я пришелъ къ вамъ прощаться ровнехонько годъ тому назадъ? И замѣчательно, что тутъ же сидитъ нашъ пріятель Смисертонъ, который тоже вѣдь проплавалъ цѣлый годъ.

капитанъ смисертонъ. Да, годъ безъ малаго. Помните, м-ръ Ремгеджеръ, какъ я зашелъ къ вамъ проститься?

дядя. Еще бы! Въ самомъ дѣлѣ поразительно — оба вы пропадали ровно годъ. Замѣчательное совпаденіе.

кэтъ. Тѣмъ болѣе, что капитанъ Пратъ и капитанъ Смисертонъ ѣхали совсѣмъ разными путями: первый обогнулъ мысъ Доброй Надежды, а второй — мысъ Горнъ.

дядя. Вотъ именно. Одинъ держалъ путь на востокъ, другой — на западъ, и оба ѣхали кругомъ земного шара.

я [быстро]. Не зайдете ли, господа, завтра посидѣть съ нами вечерокъ? Поговорили бы о вашихъ странствованіяхъ, сыграли бы въ вистъ и...

капитанъ пратъ. Въ вистъ? Вы вѣрно забыли, что завтра воскресенье. Въ другой день я готовъ...

кэтъ. Да что вы? Робертъ не такой ужъ грѣшникъ. Вѣдь, воскресенье-то **сегодня!**

дядя. Ну, конечно.

капитанъ смисертонъ. О чемъ тутъ спорить, господа. Да, вѣдь, **вчера** же было воскресенье!

дядя. Воскресенье сегодня. Не понимаю, какъ можно этого не знать!

капитанъ пратъ. Ничуть не бывало! Воскресенье завтра!

капитанъ смисертонъ. Да вы, господа, съ ума сошли, право! Воскресенье было вчера,—я такъ же увѣренъ въ этомъ, какъ и въ томъ, что сижу здѣсь передъ вами!

кэтъ [громко]. Ну, дѣдушка, теперь вы попались! Капитанъ Смисертонъ утверждаетъ, что воскресенье было вчера—и онъ правъ. Кузенъ Бобби, вы и я утверждаемъ, что воскресенье сегодня и мы правы. Капитанъ Пратъ заявляетъ, что воскресенье завтра—и онъ тоже правъ. Мы всѣ правы, и вотъ вамъ три воскресенья на одной недѣлѣ!

капитанъ смисертонъ [послѣ паузы]. Кэтъ разсудила правильно. Какіе мы съ тобою дураки, Пратъ! Дѣло, видите ли, вотъ въ чемъ, м-ръ Ремгеджеръ. Земля имѣетъ въ окружности, какъ вы знаете, 24 тыс. миль и обращается вокругъ оси, съ запада на востокъ, дѣлая полный оборотъ въ 24 часа. На одинъ часъ приходится, слѣдовательно, тысяча миль. Такъ вѣдь?

дядя. Разумѣется, такъ.

капитанъ смисертонъ. Теперь вообразите, что я отплываю на тысячу миль **къ востоку** отсюда. Легко понять, что я долженъ буду увидѣть восходъ солнца ровно на часъ раньше, нежели вы здѣсь, въ Лондонѣ. Если я въ томъ же направленіи проѣду еще тысячу миль, то увижу солнце на два часа раньше васъ; еще черезъ тысячу миль—на три часа и т. д., пока не объѣду кругомъ всего земного шара и снова не вернусь сюда. И здѣсь, проѣхавъ 24 тысячи миль, я увижу восходъ солнца на цѣлыя сутки раньше, нежели вы; другими словами—я буду считать на одни сутки меньше, нежели вы. Другое дѣло капитанъ Пратъ: проѣхавъ тысячу миль **къ западу,** онъ видѣлъ восходъ солнца часомъ позднѣе васъ; а проѣхавъ всѣ 24 тысячи миль, отсталъ отъ Лондона въ счетѣ времени на цѣлыя сутки. И вотъ почему для меня воскресенье было вчера, для васъ—сегодня, а для м-ра Прата—будетъ завтра. Очевидно, мы всѣ правы, и нѣтъ основаній считать, что кто нибудь изъ насъ болѣе правъ, нежели другіе.

дядя. И то правда! Ну, Кэтъ и Бобби, торжествуйте, я попался. Но я никогда не измѣняю своему слову. И если три воскресенья случились на одной недѣлѣ, то знай, мальчуганъ, что можешь получить приданое и все прочее, когда хочешь. Дѣло въ шляпѣ, чортъ побери!

На этомъ разсказъ По кончается. Выходитъ, стало быть, что на одной недѣлѣ возможны три воскресенья кряду. На самомъ же дѣлѣ моряки провели упрямаго дядю, который, вѣроятно, не слишкомъ силенъ былъ въ астрономіи. Объясненія капитана Смисертона совершенно правильны, но онъ умолчалъ объ одномъ важномъ обстоятельствѣ: о поправкѣ календаря при пересѣченіи демаркаціонной линіи. Пересѣкая ее на своихъ судахъ во время плаванія, капитанъ Пратъ долженъ былъ одинъ день считать дважды, а капитанъ Смисертонъ—одинъ день пропустить; вслѣдствіе этого возстановилось бы единство времяисчисленія, какъ мы это уже знаемъ изъ предшествующей главы.

Такъ что, въ концѣ концовъ, болѣе одного воскресенья на одной недѣлѣ быть не можетъ.

Задача 3-я.

Опредѣленіе направленія съ помощью карманныхъ часовъ.

Съ помощью карманныхъ часовъ въ солнечный день можно опредѣлить всегда съ достаточной для житейской практики точностью всѣ четыре «страны свѣта», т. е. точки сѣвера, юга, востока и запада горизонта. Способъ этотъ настолько простъ и легко объяснимъ, что остается только удивляться, какъ онъ не получилъ еще всеобщаго распространенія. Опредѣленіе направленія заключается въ слѣдующемъ.

Повернуть циферблатъ карманныхъ часовъ, держа ихъ горизонтально такъ, чтобы часовая стрѣлка была направлена въ сторону солнца. Тогда точка на окружности циферблата, лежащая посрединѣ между показаніемъ часовой стрѣлки въ этотъ моментъ и числомъ XII, покажетъ вамъ направленіе къ югу.

Такъ, напримѣръ, если часовая стрѣлка показываетъ 4 часа, то, направивъ ее къ солнцу, найдемъ, что средняя точка между показаніемъ часовъ (4) и XII-ю будетъ совпадать съ точкой циферблата, указывающей два часа. Эта точка и опредѣлитъ югъ горизонта, противоположная ей по направленію дастъ сѣверъ, налѣво, слѣдовательно, будетъ востокъ, а направо — западъ.

Предыдущее правило можно свести и на такое:

Найти на окружности циферблата среднюю точку между показаніемъ часовой стрѣлки и точкой XII-ти часовъ; направить эту среднюю точку къ солнцу,— тогда точка циферблата съ отмѣткой двѣнадцати часовъ и укажетъ южное направленіе.

Если часы, напр., указываютъ 4 часа, то направить точку циферблата съ показаніемъ II часа на солнце. Тогда линія, проведенная изъ центра часовъ къ XII-ти, и будетъ полуденной линіей, т. е. направленной къ югу.

Доказательство.

Для доказательства стоитъ только вспомнить, что въ 12 часовъ (полдень) солнце, часовая стрѣлка и точка на циферблатѣ, отмѣченная цифрой XII,—всѣ они лежатъ въ одной линіи, направленной къ югу («на полдень»). Вслѣдъ затѣмъ и солнце, и часовая стрѣлка двигаются въ одинаковомъ направленія. Но стрѣлка часовъ совершаетъ свой полный оборотъ въ 12 часовъ, а солнце въ 24 часа, т. е. въ вдвое большій промежутокъ времени. Отсюда и вытекаютъ данныя выше правила.

Замѣчаніе. Само собою разумѣется, что полученное указаннымъ путемъ опредѣленіе направленія не будетъ вполнѣ точно.

Ошибка получается потому, что мы помѣщаемъ часы въ плоскости горизонта, вмѣсто плоскости эклиптики, и кромѣ того не принимается во вниманіе разница между истиннымъ солнечнымъ временемъ и такъ называемымъ среднимъ временемъ. Но для тѣхъ чисто практическихъ цѣлей, которыя преслѣдуются при примѣненіи указаннаго выше правила, получаемые результаты совершенно достаточны.

Если бы вмѣсто сѣвернаго мы находились на южномъ полушаріи земли, то указанное выше правило соотвѣтственно видоизмѣнилось бы,—а именно въ этомъ случаѣ:

Если точку, обозначенную на циферблатѣ часовъ числомъ XII, повернуть къ солнцу, то равнодѣлящая угла между показаніемъ часовой стрѣлки и точкой съ числомъ 12 покажетъ направленіе къ сѣверу.

Задача 4-я.

Сколько воды въ бочкѣ?

Двое заспорили о содержимомъ бочки. Одинъ спорщикъ говорилъ, что воды въ бочкѣ болѣе, чѣмъ на половину, а другой утверждалъ, что меньше. Какъ убѣдиться, кто правъ, не употребляя ни палки, ни веревки, ни вообще какого-либо приспособленія для измѣренія?

Фиг. 2.

Рѣшеніе.

Это не задача-шутка, а настоящая геометрическая задача, хотя и рѣшается до смѣшного просто. Рѣшенія подобнаго рода задачъ заслуживаютъ всегда того, чтобы надъ ними подумать.

Вотъ рѣшеніе этой задачи. Если бы вода въ бочкѣ была налита ровно до половины, то, наклонивъ бочку такъ, чтобы уровень воды пришелся какъ разъ у края бочки, мы увидѣли бы, что высшая точка дна находится также на уровнѣ воды. Это ясно изъ того, что плоскость, проведенная черезъ діаметрально противоположныя точки верхней и нижней окружностей бочки, дѣлитъ ее на двѣ равныя части. Если вода налита менѣе чѣмъ до половины, то при такомъ же наклоненіи бочки долженъ выступить изъ воды большій или меньшій сегментъ дна. Наконецъ, если воды въ бочкѣ болѣе чѣмъ половина, то при наклоненіи верхняя часть дна окажется подъ водой.

Такимъ образомъ вопросъ рѣшается правильно безъ всякихъ измѣреній.

Задача 5-я.

Крестъ обратить въ квадратъ.

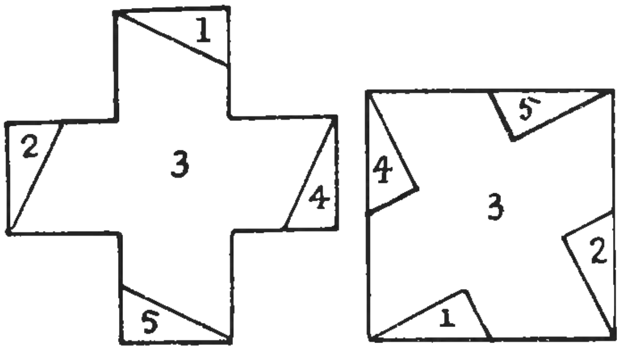
Крестъ, составленный изъ пяти квадратовъ, требуется разрѣзать на такія части, изъ которыхъ можно было бы составить одинъ равновеликій кресту по площади квадратъ?

Рѣшеніе.

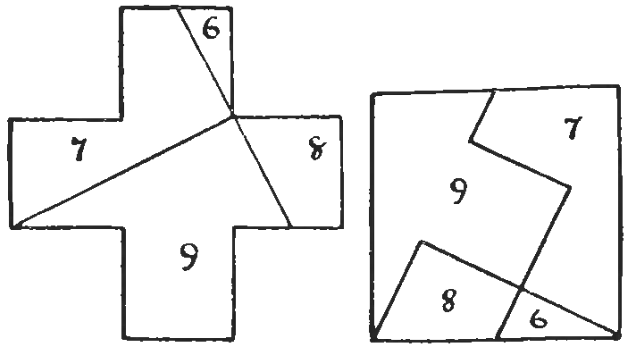
На прилагаемыхъ чертежахъ читатель найдетъ два рѣшенія этой задачи: одно старое [1]) (фиг. 3) и одно, предложенное въ новѣйшее время (фиг. 4). Второе рѣшеніе столь же просто, сколь и остроумно: задача рѣшается проведеніемъ всего двухъ прямыхъ линій.

---

[1]) Ср. задачу 64-ую 1-ой части этой книги.



Фиг. 3.

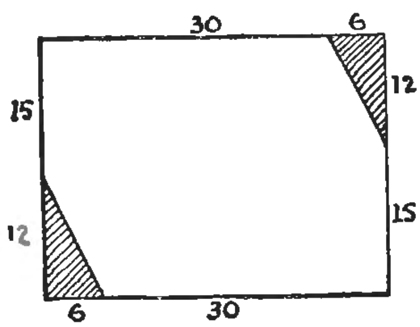


Фиг. 4.

Задача 6-я.

Коврикъ.

У одной дамы былъ прямоугольный коврикъ размѣрами 36×27 дюймовъ. Два противоположныхъ угла его истрепались,—пришлось ихъ отрѣзать въ видѣ треугольныхъ лоскутковъ, затушеванныхъ на нашемъ чертежѣ (фиг. 5). Но дамѣ, все же, хотѣлось имѣть коврикъ въ формѣ прямоугольника. Она поручила обойщику разрѣзать его на такія двѣ части, чтобы изъ нихъ можно было сшить прямоугольникъ, не теряя, конечно, ни кусочка матеріи. Обойщикъ исполнилъ желаніе дамы.

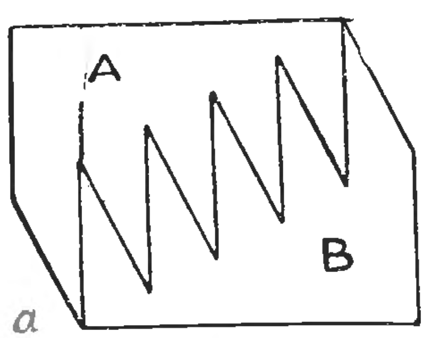


Фиг. 5.

Спрашивается, какъ ему удалось это сдѣлать?

Рѣшеніе.

Рѣшеніе задачи видно изъ прилагаемаго чертежа (фиг. 6). Если зубчатую часть *A* вынуть изъ части *B* и затѣмъ снова вдвинуть ее между зубьевъ части *B*, перемѣстивъ на одинъ зубъ вправо, то получится безукоризненный прямоугольникъ.



Фиг. 6.

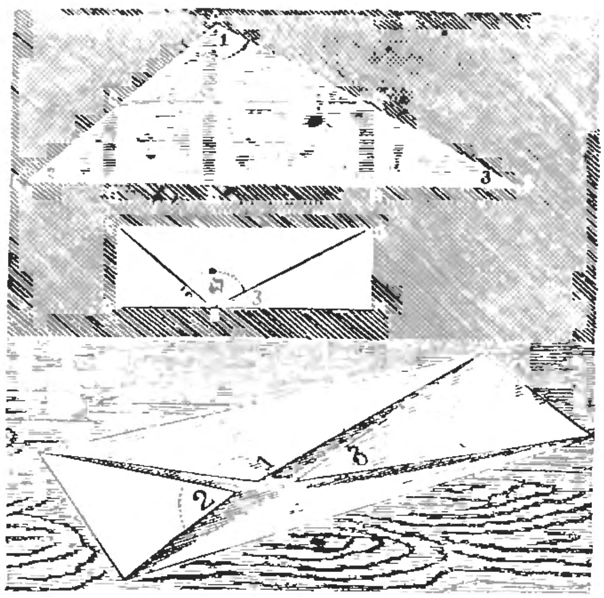
Задача 7-я.

Оригинальное доказательство.

Всякій, проходившій геометрію, знаетъ, что **сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ.**

Но мало кому извѣстно, что эта основная теорема, на которой зиждется все стройное Евклидово зданіе, можетъ быть «доказана» съ помощью простого лоскутка бумаги.

Мы ставимъ слово «доказана» въ кавычкахъ, потому что, собственно говоря, это не доказательство въ строгомъ смыслѣ слова, а скорѣе лишь наглядная демонстрація. Но, все же, этотъ остроумный пріемъ, придуманный Томомъ Титомъ, очень любопытенъ и поучителенъ.



Фиг. 7.

Вырѣзаютъ изъ бумаги любой формы треугольникъ и перегибаютъ его сначала по линіи AB (фиг. 7). Затѣмъ, снова разогнувъ бумагу, перегибаютъ треугольникъ по линіи CD такъ, чтобы вершина A попала въ точку B. Перегнувъ затѣмъ треугольникъ по линіямъ DH и CG и получивъ прямоугольникъ $CGHD$, мы наглядно убѣждаемся, что всѣ три угла треугольника (1, 2, 3) составляютъ въ суммѣ два прямыхъ.

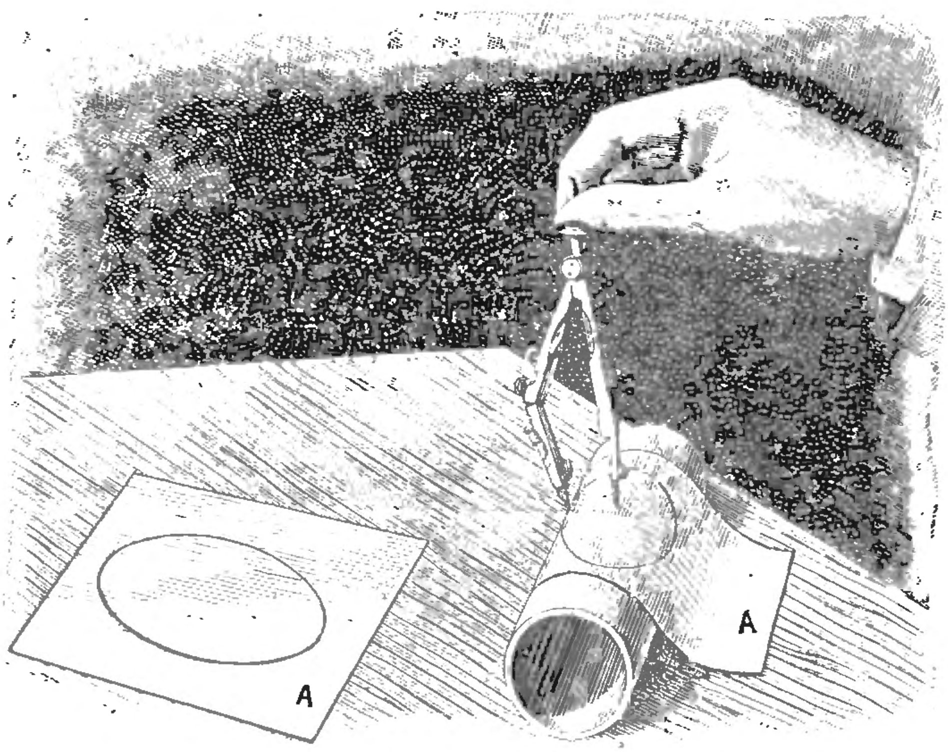
Необычайная наглядность и простота этого пріема позволяетъ познакомить даже дѣтей, не изучающихъ геометріи, съ одной изъ ея важнѣйшихъ теоремъ. Для знающихъ же геометрію онъ представляетъ интересную задачу—объяснить, почему такое сгибаніе бумажнаго треугольника всегда даетъ желаемый результатъ. Объяснить это не трудно, и мы не хотѣли бы лишить читателя удовольствія самому подыскать геометрическое основаніе этого своеобразнаго доказательства.

Задача 8-я.

Вычерчиваніе циркулемъ овальныхъ линій.

Рѣшеніе.

Для вычерчиванія по плоскости замкнутыхъ овальныхъ кривыхъ, извѣстныхъ подъ именемъ эллипсисовъ (или эллипсовъ) существуетъ спеціальный приборъ, такъ называемый **эллипсографъ.** Но можно получать овалы правильной формы и безъ этого сложнаго и дорогого прибора—просто съ помощью циркуля, если только прибѣгнуть къ небольшому ухищренію, о которомъ даетъ понятіе настоящій рисунокъ (фиг. 8).



Фиг. 8.

Оберните цилиндръ бумажкой и начертите циркулемъ замкнутую кривую на этой цилиндрической поверхности. Развернувъ затѣмъ бумажку, вы убѣдитесь, что начертили не кругъ, а овалъ, тѣмъ болѣе вытянутый, чѣмъ меньше радіусъ цилиндра по сравненію съ раствореніемъ циркуля.

Такимъ практическимъ способомъ вычерчиванья оваловъ часто пользуются въ различныхъ мастерскихъ, хотя среди чертежниковъ и рисовальщиковъ онъ сравнительно мало извѣстенъ.

Слѣдуетъ имѣть въ виду, однако, что получаемый такимъ пріемомъ овалъ не есть, вообще говоря, эллипсъ въ собственномъ смыслѣ этого слова, какъ бы велико ни казалось сходство. Получаемый овалъ есть кривая пересѣченія шара и цилиндра, т. е., говоря математически,—**кривая 4-го порядка.**

Не трудно убѣдиться также въ томъ, что вычертить сплошной овалъ указаннымъ нами путемъ возможно только въ томъ случаѣ, если радіусъ взятаго нами цилиндра больше половины раствopeнія циркуля.

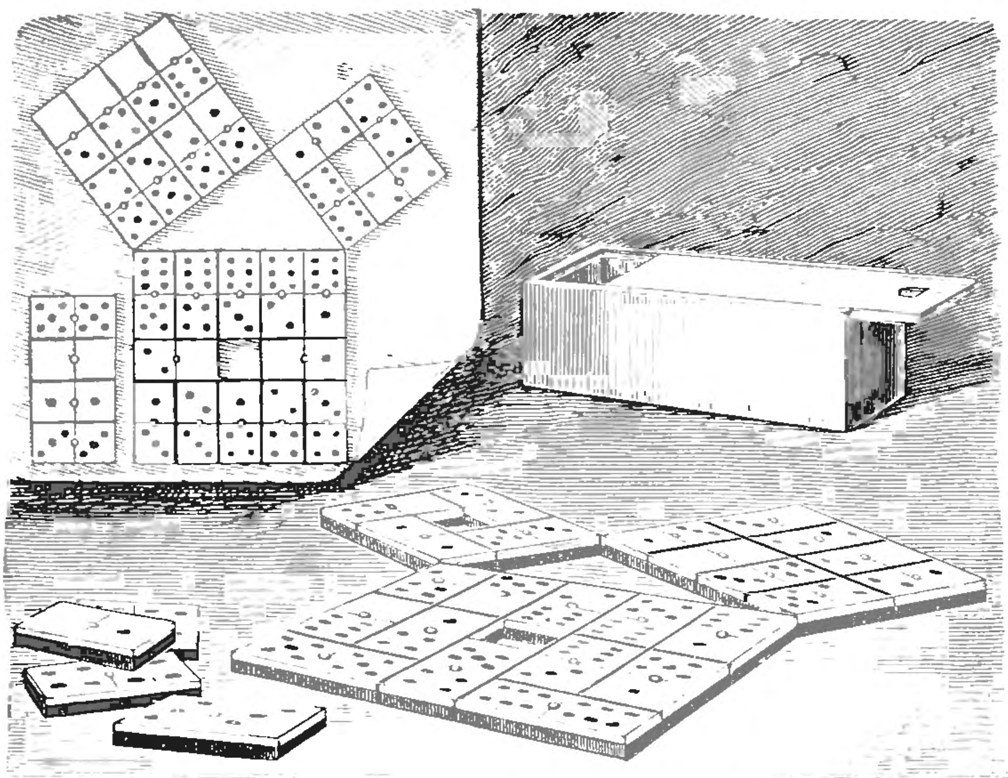
Задача 9-я.

Теорема Пиѳагора.

Посредствомъ плитокъ домино доказать Пиѳагорову теорему[1]).

Рѣшеніе.

Сложите плитки домино такъ, какъ показано на нашемъ рисункѣ (фиг. 9). Вы убѣдитесь, что квадратъ, построенный на гипотенузѣ, состоитъ изъ 25-ти мелкихъ квадратовъ, а ква-



Фиг. 9.

[1]) Т. е. что площадь квадрата, построеннаго на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равна суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на его катетахъ.

драты, построенные на катетахъ,—соотвѣтственно изъ 9 и 16-ти такихъ же мелкихъ квадратовъ. А такъ какъ $25 = 9 + 16$, то теорема «доказана» (прямоугольность треугольника повѣряется прямымъ угломъ какой-нибудь костяшки или группы ихъ).

Само собою разумѣется, что это не доказательство, а лишь наглядная иллюстрація, да и то пригодная лишь для тѣхъ случаевъ, когда всѣ три стороны прямоугольнаго треугольника выражаются цѣлыми числами. Въ данномъ случаѣ для сторонъ треугольника имѣемъ числа 3, 4 и 5. Такихъ чиселъ, впрочемъ, есть сколько угодно, какъ читатель можетъ убѣдиться изъ поясненій къ слѣдующей задачѣ.

Задача 10-я.

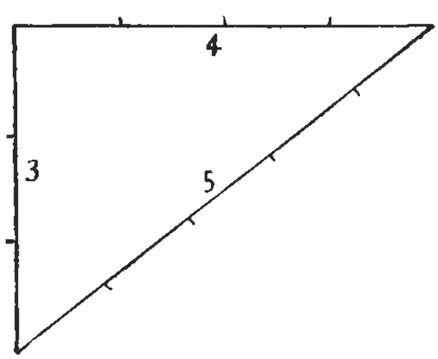
Египетская задача.

Съ помощью веревки въ 12 единицъ длины построить прямоугольный треугольникъ.

Рѣшеніе.

Задача эта извѣстна издревле также подъ названіемъ «правила веревки».

На веревкѣ отмѣривались три послѣдовательныхъ отрѣзка длиною въ 3, 4 и 5 единицъ длины. Если, теперь, соединить концы этой веревки и натянуть ее на третьемъ и седьмомъ дѣленіи, то получиться прямоугольный треугольникъ (фиг. 10).



Фиг. 10.

Пріемомъ этимъ пользовались еще древніе египтяне при постройкѣ пирамидъ. Быть можетъ, поэтому египетское слово для названія землемѣровъ въ дословномъ переводѣ значитъ «вытягиватель веревки». Нынѣшніе землемѣры для полученія прямого угла также прибѣгаютъ къ подобному пріему, отмѣчая на своихъ землемѣрныхъ цѣпяхъ такую комбинацію изъ трехъ цѣлыхъ чиселъ, которая выражала бы длины сторонъ прямоугольнаго треугольника съ соизмѣримыми сторонами.

Числа эти должны удовлетворять условію Пиѳагоровой теоремы, т. е. сумма квадратовъ двухъ изъ нихъ должна быть равна квадрату третьяго числа. Взятыя выше цѣлыя, числа 3, 4, 5 удовлетворяютъ этому условію: $3^2+4^2=5^2$. Но легко видѣть, что подобныхъ чиселъ можно найти, сколько угодно.

Всѣ эти такъ называемыя **Пиѳагоровы числа** заключаются въ тождественномъ равенствѣ, которое каждый легко можетъ провѣрить:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2=a^2b^2+\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2.$$

Здѣсь, значитъ, ab и $\frac{a^2-b^2}{2}$ даютъ катеты, а $\frac{a^2+b^2}{2}$ соотвѣтствующую имъ гипотенузу.

Если вмѣсто a и b подставлять два любыхъ нечетныхъ и первыхъ между собой числа, то и будемъ получать различные требуемые треугольники и при томъ такіе, что стороны одного не будутъ кратными сторонами другого какого-либо треугольника.

Такія же Пиѳагоровы числа можно получать и на основаніи тождества

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2,$$

подставляя сюда вмѣсто m и n какія угодно цѣлыя числа. Если же мы желаемъ избѣжать кратныхъ группъ или повторенія вида треугольниковъ, то числа надо брать первыя между собой и одно четное, а другое нечетное.

Вотъ небольшая табличка части Пиѳагоровыхъ чиселъ, рѣшающихъ египетскую задачу:

3,	4,	5
5,	12,	13
7,	24,	25
9,	40,	41

11,	60,	61
13,	84,	85
15,	8,	17
15,	112,	113
17,	144,	145
19,	180,	181
21,	20,	29
27,	36,	45
33,	56,	65
35,	12,	37
39,	80,	89
45,	28,	53
45,	108,	117
51,	140,	149
55,	48,	73
57,	176,	185
63,	16,	65
65,	72,	97
75,	100,	125
77,	36,	85
85,	132,	157
91,	60,	109
95,	168,	193
99,	20,	101

и т. д.

Начатки математики на Нилѣ.

Упоминаніе о египетскомъ треугольникѣ, сдѣланное въ предыдущей задачѣ, заставляетъ насъ сдѣлать маленькую экскурсію въ область исторіи. Можно считать несомнѣнно установленнымъ, что древніе египтяне обладали знаніемъ многихъ математическихъ фактовъ и умѣньемъ производить нѣкоторыя математическія дѣйствія настолько давно, насколько только мы можемъ проникнуть въ глубину вѣковъ этой древнѣйшей цивилизаціи на землѣ. Пиѳагорова теорема въ приложеніи къ равнобедреннымъ прямоугольнымъ треугольникамъ (оба катета равны) была извѣстна имъ съ незапамятныхъ временъ. Треугольникомъ со сторонами 3, 4 и 5 пользовались строители древнѣйшихъ пирамидъ и храмовъ для полученія прямого угла. Одинъ изъ дошедшихъ до насъ египетскихъ папирусовъ писанъ за 1700 лѣтъ до Р. Х. на основаніи египетскихъ же писаній за 3000 лѣтъ и болѣе до Р. Х. Въ немъ уже содержатся нѣкоторыя ариѳметическія задачи, таблица дробей и рѣшеніе простѣйшихъ уравненій, гдѣ неизвѣстное обозначается знакомъ **хау** (хипъ). Существуетъ мнѣніе, будто ариѳметика (особенно — начатки ея) есть самый старѣйшій изъ членовъ великой семьи математическихъ наукъ. Но трудно какъ-либо убѣдительно доказать эту мысль. Начало алгебры и геометріи также скрываются въ таинственномъ мракѣ доисторическихъ судебъ человѣчества.

Всюду, гдѣ только мы въ состояніи приподнять завѣсу надъ драмой человѣческой исторіи отдаленнѣйшихъ вѣковъ, мы видимъ, что люди уже считаютъ, рѣшаютъ уравненія 1-ой степени и прилагаютъ простѣйшіе случаи Пиѳагоровой теоремы.

Задача 11-я.

Численный кругъ пиѳагорейцевъ.

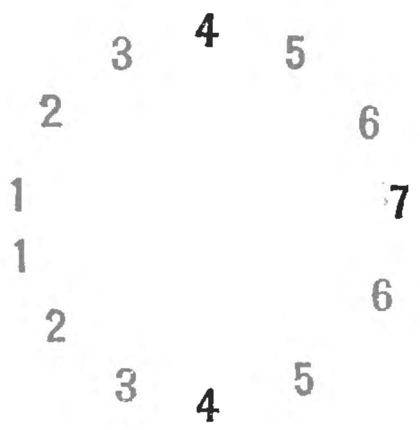
Этотъ «Circulus Pythagoricus» находится въ сочиненіи одного изъ учениковъ Пиѳагоровой школы Ямвлика, жившаго въ IV-мъ вѣкѣ послѣ Р. Х.[1]). Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ кругъ.

Будемъ писать по кругу рядъ послѣдовательныхъ чиселъ отъ 1 до какого-либо числа, т. е. рядъ чиселъ 1, 2, 3, 4,... n. Дойдя до этого напередъ заданнаго себѣ числа n, продолжаемъ писать по кругу тѣ же числа, но въ обратномъ уменьшающемся порядкѣ, пока не напишемъ опять единицу, — т. е. пишемъ: $n-1$,

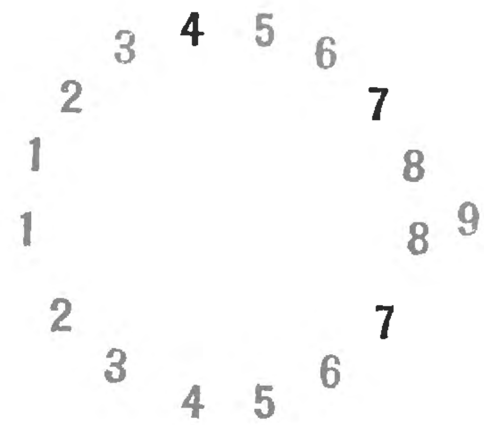
[1]) Jamblicus Chalcidensis ex Coele-Syria in Nicomachi Gerasini Arithmeticam introductionem et de Fato. Nunc primum editus, in latinum sermonem conversus, notis perpetuis illustratus a Samuele Tennulio. Accedit Joachimi Camerarii. Explicatio in duos libros Nicomachi, cum indice rerum et verborum locupletissimo, Arnhemiae. Postant apud Jah. Friderium Hagium. Daventrae typis discripsit Wilhelmus Wier CIƆIƆCLXVIII (1668).

$n-2, \ldots 2, 1$. Тогда сумма всѣхъ чиселъ, написанныхъ въ кругѣ, даетъ квадратъ числа n (т. е. число n умноженное само на себя).

Такъ, напр., если желаемъ найти квадратъ 7, пишемъ (фиг. 11):



Фиг. 11.



Фиг. 12.

Сложивъ всѣ числа этого круга, дѣйствительно, получимъ: $49 = 7^2$.

Для числа, напр., 9 будемъ имѣть кругъ (фиг. 12), сумма чиселъ котораго равна $9^2 = 81$ и т. д.

Доказательство.

Для какого бы то ни было числа n этотъ пиѳагорейскій кругъ можно представить такъ

$$\begin{array}{l} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \ldots\ldots n-1 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \ldots\ldots n-1 \ldots\ldots n. \end{array}$$

Т. е. получается два одинаковыхъ ряда послѣдовательныхъ чиселъ отъ 1 до $n-1$ и къ суммѣ обоихъ этихъ рядовъ надо прибавить еще число n.

Но сумма $n-1$ послѣдовательныхъ чиселъ, начиная съ единицы, какъ знаемъ, равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Слѣдовательно, для суммы двухъ такихъ рядовъ да еще числа n имѣемъ

$$n(n-1) + n = n^2,$$

что и доказываетъ задачу о пиѳагорейскомъ кругѣ.

Обобщеніе задачи.

Для желающихъ нѣсколько болѣе углубиться въ сущность пиѳагорейскаго круга сдѣлаемъ еще нѣсколько дополненій. Обозначимъ черезъ S_n сумму послѣдовательныхъ чиселъ отъ 1 до n. Тогда доказанное выше предложеніе Ямблика выразится формулой

$$2S_{n-1}+n=n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Разсматривая рядъ цѣлыхъ чиселъ, мы находимъ, что для числа 2, $S_{n-1}<n$, для числа 3, $S_{n-1}=n$, а для всѣхъ остальныхъ чиселъ $S_{n-1}>n$. Итакъ, можно высказать такое предложеніе:

Если квадратъ цѣлаго числа (кромѣ 2 и 3) раздѣлимъ на сумму всѣхъ послѣдовательныхъ чиселъ до этого числа, то въ частномъ будетъ 2, а въ остаткѣ само число.

Подобно формулѣ (1) можно написать еще рядъ равенствъ:

$$\begin{gathered}2S_{n-2}+n-1=(n-1)^2\\ 2S_{n-3}+n-2=(n-2)^2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2S_2+3=3^2\\ 2S_1+2=2^2\\ 1=1^2\end{gathered}$$

Складывая всѣ эти равенства съ (1) и означая для краткости

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=S_n^{(2)},$$

получаемъ:

$$2(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n-1})+S_n=S_n^{(2)}.$$

Что тоже можно написать въ видѣ пиѳагорейскаго круга:

$$\begin{matrix}S_1 & S_2 & S_3 & \ldots S_{n-1} & \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots S_{n-1} & \ldots S_n,\end{matrix}$$

гдѣ сумма всѣхъ членовъ даетъ $S_n^{(2)}$.

Задача 12-я.

Земля и апельсинъ.

Въ передлагаемой ниже интересной задачѣ мы впервые встрѣчаемся съ числомъ, выражающимъ отношеніе длины окружности къ діаметру. Это знаменитое, такъ называемое, «ирраціональное» число имѣетъ свой особый символъ. Оно изображается греческой буквой π (пи). Приблизительно

$$\pi = 3{,}141\,5926\ldots$$

Въ настоящей книгѣ намъ не разъ еще придется говорить объ этомъ числѣ.

Вообразимъ, что земной шаръ обтянутъ по экватору обручемъ и что подобнымъ же образомъ обтянутъ и апельсинъ по его большому кругу. Далѣе вообразимъ, что окружность каждаго обруча удлинилась на 1 сажень. Тогда, разумѣется обручи отстанутъ отъ поверхности тѣлъ, которыя они раньше стягивали, — останется нѣкоторый прозоръ (промежутокъ). Спрашивается, въ какомъ случаѣ этотъ прозоръ будетъ больше,—у земного шара или апельсина?

Рѣшеніе.

Обыкновенно на этотъ вопросъ отвѣчаютъ такъ: «Конечно, у апельсина останется большій прозоръ, нежели у земли! Вѣдь по сравненію съ окружностью земного шара—38.000 верстъ—какая-нибудь одна сажень есть столь ничтожная величина, что прибавка ея останется совершенно незамѣтной. Другое дѣло апельсинъ: по сравненію съ его окружностью сажень—огромная величина, и прибавка ея къ длинѣ окружности должна быть весьма ощутительна».

Такой отвѣтъ естественно навязывается уму всякаго—и математика и не-математика. Математикъ еще подкрѣпитъ его геометрическими соображеніями, въ родѣ слѣдующаго: «Такъ какъ отношеніе длины окружности къ діаметру есть величина постоянная, то приращеніе радіуса земли (т. е. прозоръ) долженъ быть во столько разъ меньше приращенія радіуса апельсина, во сколько разъ радіусъ земного шара больше радіуса апельсина» и т. д...

Но всѣ эти разсужденія—одно только лукавое мудрствованіе. Простымъ вычисленіемъ легко доказать, что—именно въ виду постоянства отношенія окружности къ діаметру—прозоръ совершенно не зависитъ отъ радіуса окружности и долженъ быть **одинаковъ у земли и апельсина.**

Въ самомъ дѣлѣ, пусть окружность экватора равна C саженямъ, а окружность апельсина c. Тогда радіусъ земли $R=\frac{C}{2\pi}$, а радіусъ апельсина $r=\frac{c}{2\pi}$. Послѣ прибавки къ обручамъ одной сажени, окружности ихъ будутъ равны земли $C+1$, апельсина $c+1$; радіусы же ихъ будутъ: земли $\frac{C+1}{2\pi}$, апельсина $\frac{c+1}{2\pi}$. Если изъ новыхъ радіусовъ вычтемъ прежніе, то получимъ въ обоихъ случаяхъ одно и то же приращеніе:

$$\frac{C+1}{2\pi}-\frac{C}{2\pi}=\frac{1}{2\pi} \text{ для земли,}$$

$$\frac{c+1}{2\pi}-\frac{c}{2\pi}=\frac{1}{2\pi} \text{ для апельсина.}$$

Итакъ, у земли и у апельсина получится одинъ и тотъ же прозоръ въ $\frac{1}{2\pi}$ саж., т. е. примѣрно въ полъ-аршина.

Этотъ результатъ кажется до такой степени неожиданнымъ и неправдоподобнымъ, что намъ случалось видѣть людей, которые, сами получивъ его, все же въ него не вѣрили: они продѣлывали съ помощью бечевки рядъ обмѣровъ и опытовъ съ монетами, тарелками и др. круглыми предметами,—и лишь тогда успокаивались, когда воочію убѣждались, что опытъ подтверждаетъ ихъ вычисленіе. А одинъ математикъ такъ даже формулировалъ намъ свой отвѣтъ на вопросъ буквально въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

«Прозоръ для земли долженъ, конечно, быть меньше, чѣмъ для апельсина, хотя геометрически, казалось бы (!), они должны быть одинаковы». Чудакъ больше вѣрилъ «здравому смыслу», чѣмъ математическимъ выкладкамъ, которыя, къ слову сказать, онъ продѣлалъ безукоризненно. Оно, пожалуй, и понятно: трудно найти болѣе разительный примѣръ геометрическаго парадокса (не софизма, а именно парадокса, т. е. неправдоподобной съ виду истины), чѣмъ эта задачка о землѣ и апельсинѣ.

Обманы зрѣнія.

Кажущееся вращеніе.

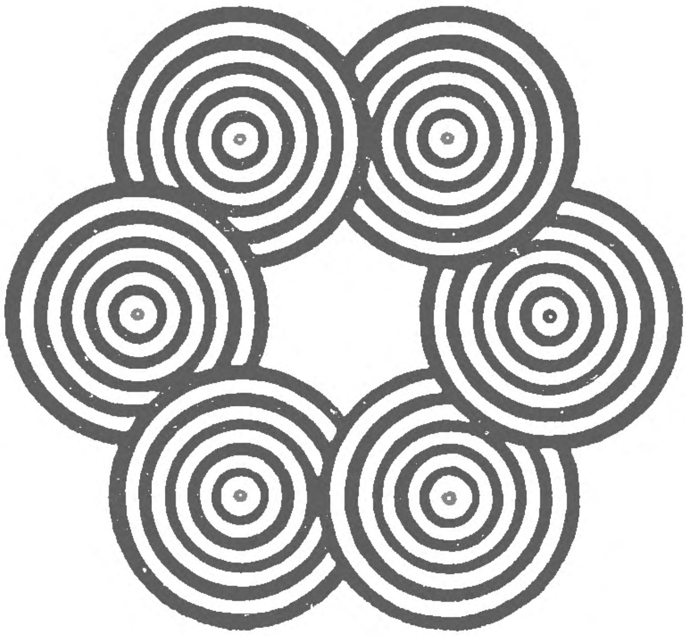
Явленіе, о которомъ мы сейчасъ будемъ говорить, было впервые подмѣчено Сильванусомъ Томпсономъ, профессоромъ университетской коллегіи въ Бристолѣ. Почтенный ученый полагалъ, что это именно явленіе не можетъ быть объяснено способностью человѣческаго глаза сохранять воспринятыя зрительныя впечатлѣнія. Онъ думалъ, что изученіе подобныхъ явленій можетъ повести къ открытію новыхъ свойствъ глаза. Между тѣмъ въ «Журналѣ Элементарной Математики» за 1885 г. есть весьма удачное объясненіе этого явленія С. Шостака, въ основѣ котораго лежитъ именно способность глаза сохранять зрительныя впечатлѣнія.

Приводимъ описаніе явленія и его объясненіе г. Шостакомъ для примѣра читателю, какъ можно (и даже по возможности всегда **нужно**) пользоваться математическимъ анализомъ при разсмотрѣніи различныхъ встрѣчающихся намъ явленій.

Возьмемъ прилагаемую здѣсь фигуру 13-ю, которую каждый желающій можетъ нарисовать и самъ, для удобства наблюденій, на отдѣльномъ листкѣ.

Если листку бумаги (или книгѣ) съ предложенной фигурой сообщить незначительное круговое движеніе въ плоскости фигуры, то каждый изъ шести кружковъ будетъ казаться вращающимся около своего центра въ сторону движенія фигуры и съ такою же скоростью, т. е. будетъ казаться, что каждый кругъ описываетъ полный оборотъ въ то же время и въ томъ же направленіи, какъ и бумага или книга, гдѣ онъ нарисованъ.

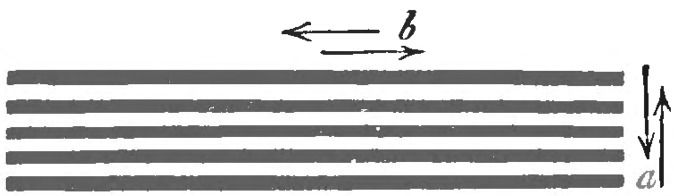
Замѣтимъ здѣсь же, что то же самое явленіе можно наблюдать и въ томъ случаѣ, если вмѣсто шести кружковъ, какъ на



Фиг. 13.

фиг. 13, возьмемъ только одинъ, составленный изъ концентрическихъ окружностей.

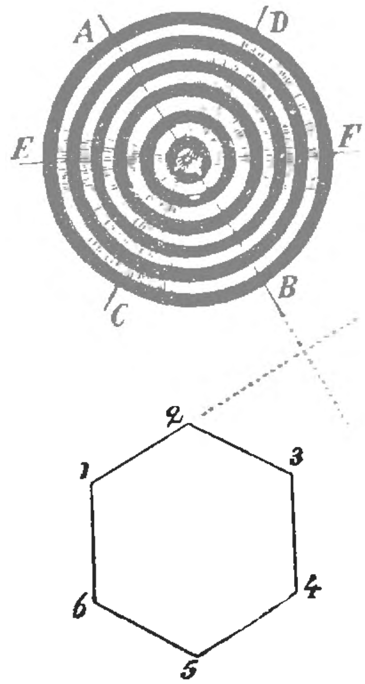
Объясненіе явленія. Если взять чертежъ, данный на слѣдующей фиг. 14-й, и сообщить ему быстрое движеніе взадъ и впередъ, какъ показываетъ стрѣлка a, читатель замѣтитъ, что



Фиг. 14.

рисунокъ потеряетъ свою отчетливость и сдѣлается какъ бы туманнымъ. Это зависитъ оттого, что черныя полосы занимаютъ мѣсто бѣлыхъ и бѣлыя—черныхъ, такъ что получается какъ бы смѣшеніе чернаго цвѣта съ бѣлымъ, вслѣдствіе чего является сѣрый тонъ. Если тому же рисунку сообщить движеніе взадъ и впередъ по направленію стрѣлокъ b, то черный цвѣтъ не будетъ занимать мѣста бѣлаго и бѣлый—чернаго, поэтому рисунокъ не долженъ будетъ потерять свою отчетливость, что и подтверждается опытомъ. Если мы дадимъ рисунку движеніе по направленію среднему между двумя названными, то фигура также потеряетъ свою отчетливость, и тѣмъ болѣе, чѣмъ направленіе движенія будетъ ближе подходить къ направленію, указанному стрѣлками a. Изъ этого заключаемъ, что **бѣлый цвѣтъ остается чисто бѣлымъ только въ томъ случаѣ, когда движеніе происходитъ параллельно направленію полосокъ.**

Вообразимъ теперь, что мы сообщаемъ фигурѣ не круговое движеніе, а по направленію сторонъ шестиугольника 123456 (фиг. 15), такъ что каждый кружокъ движется сначала по направленію отъ 1 къ 2, потомъ отъ 2 къ 3, отъ 3 къ 4 и т. д. Разсмотримъ тотъ періодъ, когда движеніе происходитъ параллельно линіи 1—2, и проведемъ діаметръ *AB*, перпендикулярный къ 1—2. Части концентрическихъ круговъ, заключающіяся въ узкой полоскѣ вдоль *AB*, можно считать перпендикулярными къ *AB* и, слѣдовательно, параллельными къ 1—2, т. е. **параллельными къ линіи движенія,** а вслѣдствіе этого, на основаніи сказаннаго выше, бѣлыя части этой полоски останутся бѣлыми, а на кружкѣ обозначится поэтому свѣтлый діаметръ по направленію *AB* (діаметръ будетъ казаться узкимъ по серединѣ и широкимъ по концамъ). Остальная часть кружка будетъ болѣе или менѣе туманною, такъ какъ другія части концентрическихъ круговъ будутъ двигаться по направленію непараллельному линіи движенія 1—2, а подъ угломъ къ ней. Обратимся теперь ко второму періоду, т. е. къ тому времени, когда движеніе происходитъ параллельно линіи 2—3. Проведемъ діаметръ *CD* перпендикулярно къ направленію линіи движенія, т. е. перпендикулярно къ линіи 2—3. Мы доказали, что въ первый періодъ движенія на кружкѣ долженъ обозначиться



Фиг. 15.

свѣтлый діаметръ по направленію *AB*. Подобно же можно доказать, что во второй періодъ движенія этимъ свѣтлымъ діаметромъ будетъ уже не *AB*, а *CD*. Въ третій періодъ свѣтлый діаметръ будетъ направленъ по *EF* (предполагая, что *EF* перпендикулярна къ линіи 3—4. Въ четвертый періодъ опять по *AB* (такъ какъ 4—5 параллельна 1—2) и т. д., т. е. свѣтлый діаметръ, по мѣрѣ измѣненія направленія движенія, будетъ, такъ сказать, перескакивать изъ *AB* въ *CD*, изъ *CD* въ *EF* и т. д. Если мы вмѣсто того, чтобы заставлять двигаться фигуру по направленіямъ сторонъ шестиугольника, заставимъ ее двигаться по сторонамъ двѣнадцатиугольника, то получимъ не три, а шесть свѣтлыхъ діаметровъ и т. д.; словомъ съ увеличеніемъ числа сторонъ и, слѣдовательно, съ приближеніемъ къ окружности, число свѣтлыхъ діаметровъ будетъ увеличиваться, скачки будутъ становиться все меньше и меньше, и когда центръ, вмѣсто многоугольника, станетъ описывать окружность, намъ будетъ казаться, что свѣтлый діаметръ плавно вращается вокругъ центра кружка. Слѣдовательно, при нашемъ опытѣ дѣйствительно существуетъ вращеніе, но не **кружка**, а свѣтлаго діаметра; и это вращеніе глазомъ приписывается кружку.

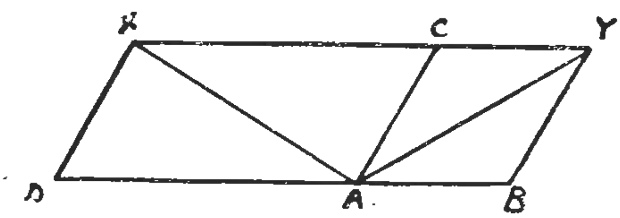
Все сказанное выше объ одномъ кружкѣ относится и къ остальнымъ. А потому намъ будетъ казаться, что каждый изъ нихъ самостоятельно вращается около своего центра.

Ниже слѣдуетъ еще нѣсколько интересныхъ примѣровъ иллюзій зрѣнія, толкованіе которыхъ мы предлагали бы дать читателю самому.

Задача 13-я.

Какая линія длиннѣе?

Взглянувъ на прилагаемый здѣсь чертежъ (фиг. 16), скажите, какая линія длиннѣе AX или AY?



Фиг. 16.

Разъясненіе.

Можно утверждать навѣрняка, что каждый, взглянувъ на чертежъ, скажетъ, что діагональ AX несомнѣнно, молъ, длиннѣе AY. Но стоитъ вамъ смѣрить ихъ хотя бумажкой,—и вы, къ изумленію, убѣдитесь, что онѣ равны! Сообразивъ, можно это сказать и безъ примѣрки: если изъ точки A провести перпендикулярную линію къ XY, то станетъ ясно, что перпендикуляръ раздѣлитъ ее пополамъ, а вслѣдствіе равенства проекцій, наклонныя AX и AY должны равняться.

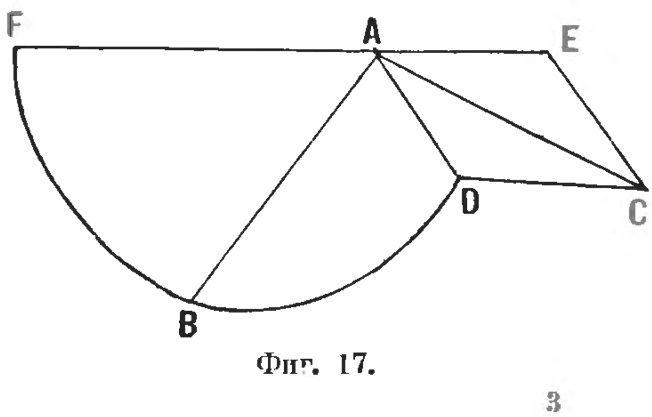
Чѣмъ же объяснить такой странный обманъ зрѣнія? Возможно разсуждать такъ: если бы наше сознаніе воспринимало вещи такими, каковы онѣ на самомъ дѣлѣ, ничего къ нимъ не присочиняя,—то подобныхъ иллюзій не могло бы быть. Но въ томъ-то и дѣло, что мы незамѣтно для самихъ себя разсуждаемъ, воспринимая впечатлѣнія внѣшняго міра. Эти-то «подсознательныя» разсужденія и являются причиной подобныхъ оптическихъ обмановъ.

Такъ какъ этотъ процессъ разсужденія совершается безсознательно для насъ, то довольно трудно бываетъ съ достовѣрностью его возстановить: приходится строить лишь болѣе или менѣе правдоподобныя догадки. Въ данномъ случаѣ, напримѣръ, мы безсознательно, или, лучше сказать, «подсознательно», разсуждаемъ, по всей вѣроятности, такъ: «Передъ нами два параллелограмма — длинный и короткій. Ясное дѣло, что у длиннаго параллелограмма діагонали должны быть длиннѣе, чѣмъ у короткаго».

Впрочемъ, предлагаемъ желающему дать болѣе удачное объясненіе.

Вотъ еще подобный же примѣръ.

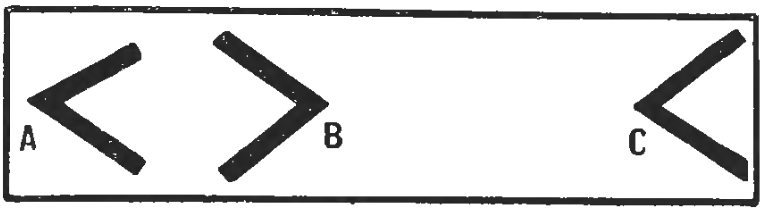
Не правда ли, что на фигурѣ 17-й линія AB кажется намъ длиннѣе линіи AC?



Фиг. 17.

Въ дѣйствительности же онѣ строго равны между собой. Точно такъ же:

Кажется совершенно невѣроятнымъ, чтобы точки A и C (фиг. 18-й) одинаково отстояли отъ точки B.

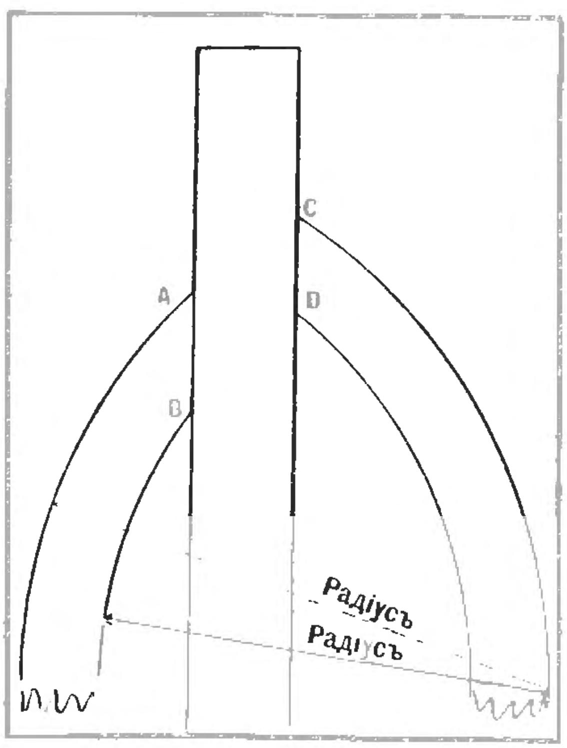


Фиг. 18.

А между тѣмъ это такъ! Разстояніе скрадывается здѣсь наклономъ линій и ихъ толщиной.

Задача 14-я.

Двѣ пары дугъ.



Фиг. 19.

На фиг. 19-й изображены двѣ пары круговыхъ дугъ. Если продолжить лѣвыя дуги, то встрѣтятъ ли онѣ оконечности правыхъ?

На взглядъ это кажется невозможнымъ; а между тѣмъ возьмите въ руки циркуль и радіусами окружностей, которые на фигурѣ указаны, продолжите эти дуги. Вы убѣдитесь, что продолженія лѣвыхъ дугъ точно встрѣтятъ концы правыхъ. Это тоже весьма интересный обманъ зрѣнія, отъ котораго мы никакъ не можемъ отдѣлаться, смотря на рисунокъ.

Задача 15-я.

Какъ написано слово?

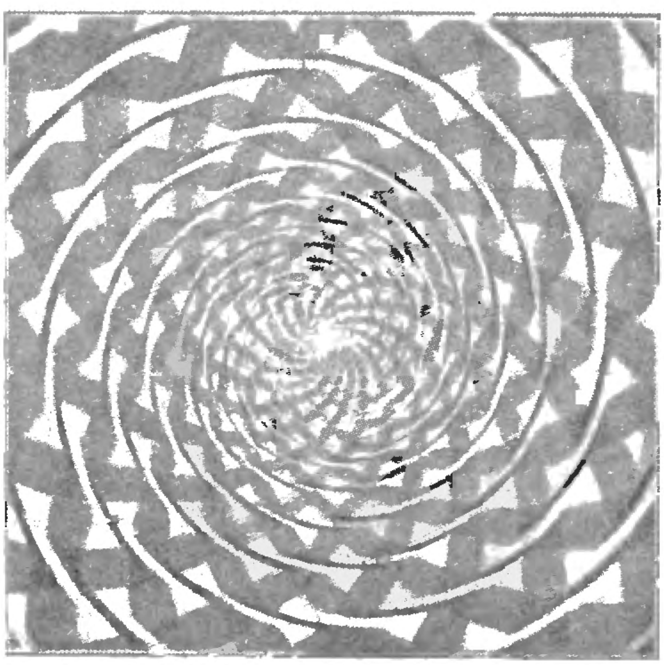
Прилагаемая и слѣдующая фигуры (фиг. 20 и 21) даютъ едва ли не самые интересные образчики зрительныхъ иллюзій. На фиг. 20-й вы видите написанное англійское слово LIFE (жизнь), при чемъ вамъ до очевидности ясно, что буквы рѣзко наклонены въ разныя стороны. Но приложивъ линейку, вы можете убѣдиться, что эти **буквы** поставлены **совершенно прямо** и только начерчены мелкими наклонными штрихами.

Фиг. 20.

Задача 16-я.

Какая кривая?

На фигурѣ 21-й изображены концентрическія окружности, а вовсе не спираль, или рядъ спиралей, какъ кажется на взглядъ.



Фиг. 21.

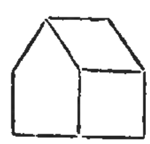
Въ этомъ легко убѣдиться. Поставьте карандашъ на одну изъ дугъ и ведите его по ней. Противъ ожиданія, вы будете кружиться въ замкнутомъ кругѣ, а вовсе не приближаться къ центру или удаляться по периферіи, какъ должно быть, если бы на чертежѣ была изображена спираль. Сѣтчатый фонъ, на которомъ начерчены обѣ послѣднія фигуры, много способствуетъ усиленію этихъ эффектныхъ иллюзій.

Задачи и развлеченія со спичками.

Въ первой части настоящаго опыта математической хрестоматіи мы уже указали на нѣкоторыя простѣйшія математическія задачи и игры со спичками. Приводимъ здѣсь еще нѣсколько простыхъ и интересныхъ задачъ и развлеченій этого рода, при чемъ считаемъ нужнымъ обратить вниманіе читателя на небольшую книжечку Софуса Тромгольда «Игры со спичками», довольно полно и всесторонне исчерпывающую предметъ. Книжечка эта есть въ русскомъ переводѣ, въ прекрасномъ изданіи одесскаго книгоиздательства «Mathesis», и стоитъ всего полтинникъ. Обыкновенная коробка шведскихъ спичекъ есть незамѣнимое по своей доступности и дешевизнѣ пособіе, которое дѣтямъ, учащимся и взрослымъ можетъ помочь провести досуги не только весело, но и съ пользой. Объ этомъ слѣдовало бы постоянно помнить. Начнемъ съ незамысловатыхъ задачъ на переложеніе спичекъ.

Задача 17-я.

Этотъ домъ составленъ изъ 10 спичекъ. Требуется повернуть его къ намъ другой стороной, передвинувъ только 2 спички.



Фиг. 22.

Рѣшеніе.

Фиг. 23.

Отвѣтъ ясенъ изъ фиг. 23-й, которая получается изъ предыдущей, если въ «крышѣ» дома (фиг. 22) піопустить одну спичку и приподнять другую.

Задача 18-я.

Вѣсы составлены изъ 9 спичекъ и не находятся въ состояніи равновѣсія (фиг. 24). Требуется переложить въ нихъ 5 спичекъ такъ, чтобы вѣсы были въ равновѣсіи.

Рѣшеніе.

Дается фиг. 25-ой.

Задача 19-я.

Этотъ греческій храмъ (фиг. 26) построенъ изъ 11 спичекъ. Требуется переложить 4 спички такъ, чтобы получилось 11 квадратовъ.

Рѣшеніе.

См. фиг. 27-ю.

Задача 20-я.

Въ памятникѣ, составленномъ изъ 12-ти спичекъ (фиг. 28) требуется переложить 5 спичекъ такъ, чтобы получилось 3 квадрата.

Рѣшеніе.

Ясно изъ фиг. 29.

Задача 21-я.

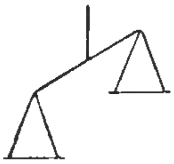
Двѣ рюмки (фиг. 30) составлены изъ десяти спичекъ. Переложить въ нихъ 6 спичекъ такъ, чтобы получился домъ.

Рѣшеніе.

См. фиг. 31.

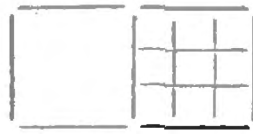
Задача 22-я.

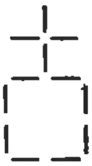
Флюгеръ (фиг. 32) составленъ изъ 10 спичекъ. Переложить 4 спички такъ, чтобы получился домъ.


Фиг. 24.

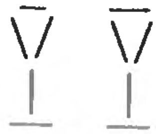

Фиг. 25.

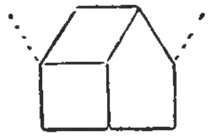

Фиг. 26.


Фиг. 27.


Фиг. 28.


Фиг. 29.


Фиг. 30.


Фиг. 31.

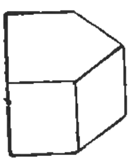

Фиг. 32.

Рѣшеніе.

См. фиг. 33.

Задача 23-я.

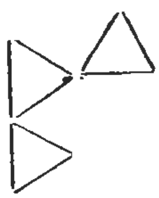
Вотъ фонарь (фиг. 34) и вотъ топоръ (фиг. 35). Каждый изъ нихъ составленъ изъ 9 спичекъ. Переложить въ фонарѣ 6 спичекъ и получить четыре равныхъ треугольника, составляющихъ въ свою очередь четыреугольникъ. Переложить въ топорѣ 4 спички такъ, чтобы получилось 3 равныхъ треугольника.

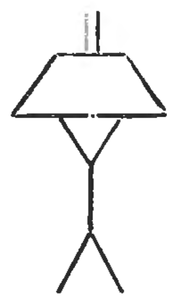

Фиг. 33.


Фиг. 34.


Фиг. 35.


Фиг. 36.


Фиг. 37.


Фиг. 38.

Рѣшеніе.

Изъ фонаря получается фиг. 36-я.
Изъ топора получается фиг. 37-я.

Задача 24-я.

Въ этой лампѣ, составленной изъ 12 спичекъ (фиг. 38), переложить 3 спички такъ, чтобы получить 5 равныхъ треугольниковъ.

Рѣшеніе.

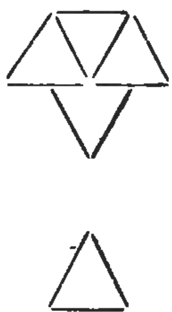
См. фиг. 39.

Задача 25-я.

Изъ 10 спичекъ сдѣланъ ключъ (фиг. 40). Переложить въ немъ 4 спички такъ, чтобы получилось 3 квадрата.

Рѣшеніе.

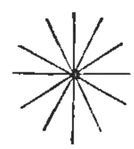
См. фиг. 41.



Фиг. 39.

Фиг. 40.

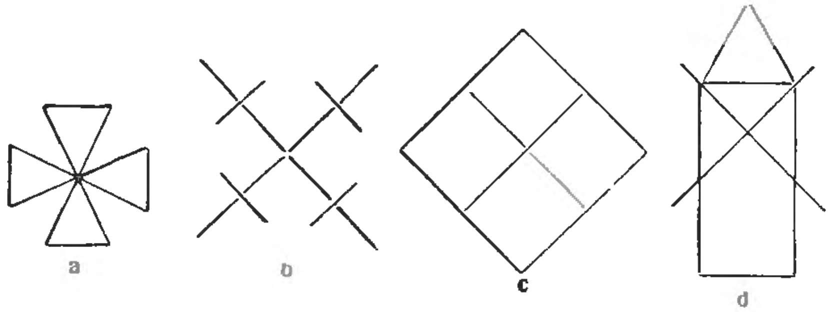
Фиг. 41.



Фиг. 42.

Задача 26-я.

У звѣзды, составленной изъ 12-ти спичекъ (фиг. 42): a) переложить 4 спички такъ, чтобы получился 4-конечный крестъ. b) Въ полученномъ крестѣ переложить 8 спичекъ такъ, чтобы получить крестъ, состоящій изъ 4 крестовъ. c) Въ этомъ послѣднемъ крестѣ переложить 8 спичекъ такъ, чтобы получилось 4 квадрата. d) Наконецъ, переложить 8 спичекъ такъ, чтобы получилась мельница.



Фиг. 43.

Рѣшеніе.

Всѣ требуемыя рѣшенія означены соотвѣтствующими буквами *a*, *b* *c*, и *d* на фиг. 43-ей.

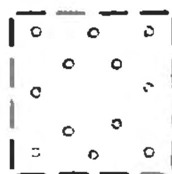
Задача 27-я.

Дѣлежъ сада.

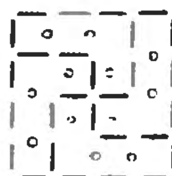
Изгородь квадратнаго сада составлена 16 спичками (фиг. 44). Въ ней находится домъ, представленный квадратомъ изъ 4-хъ спичекъ. Требуется раздѣлить садъ (безъ дома) между 5-ю наслѣдниками, при помощи 10-ти спичекъ, такъ, чтобы каждый получилъ части одинаковыя по величинѣ и по формѣ.

Фиг. 44.

Фиг. 45.



Фиг. 46.



Фиг. 47.

Рѣшеніе.

См. фиг. 45-ю.

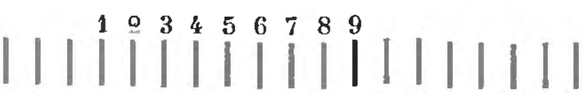
Предложенную задачу можно видоизмѣнить и такъ:

4 брата получили отъ дяди въ наслѣдство садъ (обнесенный 16 спичками), въ которомъ находится 12 плодовыхъ деревьевъ (монеты или пуговицы), расположенныхъ, какъ указано на рисункѣ. Требуется 12 спичками раздѣлить садъ на 4 равныя части одинаковой формы, содержащія по равному числу деревьевъ.

Рѣшеніе ея дается фиг. 47-ой.

Задача 28-я.

Сообразите-ка!



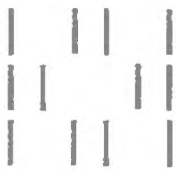
Кладутъ произвольное, не очень малое количество спичекъ въ рядъ, надписываютъ надъ 9 спичками, слѣдующими другъ за другомъ, числа отъ 1 до 9 и просятъ кого-нибудь изъ присутствующихъ замѣтить одно изъ этихъ 9 чиселъ. Въ умѣ выбираютъ какое нибудь, не особенно малое число (напримѣръ, 23) и считаютъ отъ 9 далѣе вправо 10, 11, 12 и т. д. до 23; если рядъ оканчивается, продолжаютъ счетъ, переходя къ началу ряда (у насъ придется считать до спички, помѣченной 4). Теперь просятъ считать подобнымъ образомъ другого отъ замѣченнаго имъ числа вправо до 23, въ то же время сообщите ему, что когда онъ назоветъ число 23, то укажетъ на спичку № 4.

Подумайте немного, и вы убѣдитесь, что такъ, оно и должно быть! Это очень легкая и простая задача. Но какъ она ни проста, а иныхъ она на первыхъ порахъ удивляетъ.

Задача 29-я.

Разстановка часовыхъ.

Вдоль стѣнъ квадратнаго бастіона требовалось поставить 12 часовыхъ. Полковникъ размѣстилъ ихъ, какъ указано на рисункѣ (фиг. 48) по 4 съ каждой стороны. Затѣмъ пришелъ комендантъ и, недовольный размѣщеніемъ часовыхъ, распорядился разставить солдатъ такъ, чтобы съ каждой стороны было по 5. Вслѣдъ за комендантомъ пришелъ генералъ, разсердился на коменданта за его распоряженіе и размѣстилъ солдатъ по 6 человѣкъ съ каждой стороны. Каково было размѣщеніе въ двухъ послѣднихъ случаяхъ?



Фиг. 48.

Рѣшеніе.

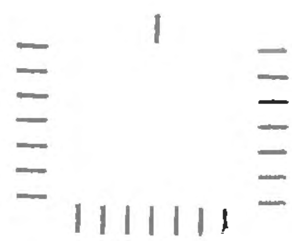
Рѣшенія даются размѣщеніями *a* и *b* на фиг. 49.

Фиг. 49.

Задача 30-я.

Хитрецы.

Въ корчмѣ стояло четыре стола, образуя четыреугольникъ. Проголодавшіеся, возвращавшіеся съ маневровъ солдаты остановились тамъ въ числѣ 21 человѣка пообѣдать и пригласили къ обѣду и хозяина. Разсѣлись всѣ такъ: за тремя изъ столовъ сѣли солдаты — по 7 за каждый столъ (фиг. 50), а за четвертымъ столомъ сѣлъ хозяинъ. Солдаты уговорились съ хозяиномъ, что платить по счету будетъ тотъ, кто останется послѣднимъ при слѣдующемъ условіи: считая въ круговую (по часовой стрѣлкѣ) всѣхъ, въ томъ числѣ и хозяина, освобождать каждаго седьмого. Каждый освобожденный уходилъ изъ корчмы и послѣднимъ остался самъ хозяинъ. Съ кого начали счетъ?



Фиг. 50.

Съ кого нужно было бы начать, если бы солдатъ было только по 4 за каждымъ изъ трехъ столовъ?

Рѣшеніе.

Надо начинать счетъ съ 6-го солдата, сидящаго по лѣвую руку отъ хозяина. Во второмъ же случаѣ съ 5-го изъ солдатъ направо отъ хозяина.

Задача 31-я.

Предложите кому-либо взять въ каждую руку по равному какому угодно числу спичекъ (или какихъ-либо иныхъ предметовъ). Это число вамъ неизвѣстно. Предложите партнеру переложить изъ правой руки въ лѣвую то число предметовъ, которое вы ему скажете, (напр. число a). Затѣмъ, ничего не показывая и не говоря вамъ, пусть онъ отложитъ изъ лѣвой руки столько спичекъ, с лько у него осталось въ правой; и наконецъ, опять-таки ничего вамъ не показывая, пусть отложитъ въ сторону всѣ спички изъ правой руки. Теперь вы можете смѣло утверждать, что у вашего партнера осталось въ лѣвой рукѣ всего $2a$ спичекъ.

Напримѣръ: Пусть партнеръ возьметъ по 15 спичекъ въ каждую руку. Вы требуете, чтобы въ лѣвую руку изъ правой онъ переложилъ, напр., 10 спичекъ (значитъ, у него въ правой осталось 5 сп., а въ лѣвой 25). Затѣмъ по вашему требованію онъ изъ лѣвой перекладываетъ въ правую столько спичекъ, сколько тамъ есть (т. е. въ правой у него станетъ $5+5=10$ спич.), и всѣ эти спички откладываетъ. Вы и «угадываете», что въ лѣвой рукѣ у него должно остаться $2 \times 10 = 20$ спичекъ.

Рѣшеніе.

Общее рѣшеніе и доказательство этой задачи можетъ найти каждый. Пусть только онъ прослѣдитъ, что въ сущности дѣлается при послѣдовательномъ переложеніи и откладываніи спичекъ. Пусть у партнера въ рукахъ по n спичекъ, и вы говорите ему переложить изъ правой руки въ лѣвую a спичекъ.

Получается:

I. Въ обѣихъ рукахъ по n спичекъ.

II. въ лѣвой $n+a$, въ правой $n-a$ спичекъ.

III. Въ лѣвой $(n+a)-(n-a)=2a$ спич., изъ правой всѣ спички откладываются. Итакъ, всегда въ лѣвой рукѣ получится въ концѣ концовъ удвоенное число тѣхъ спичекъ, которыя вы сказали переложить въ первый разъ.

Задача 32-я.

Вѣрная отгадка.

Иванъ беретъ въ одну руку четное, а въ другую нечетное число спичекъ. Петръ предлагаетъ ему помножить число спичекъ въ правой рукѣ на нечетное число, а число спичекъ въ лѣвой рукѣ на четное и сказать ему сумму полученныхъ произведенiй. Вслѣдъ затѣмъ онъ угадываетъ, въ какой рукѣ у Ивана четное и въ какой нечетное число спичекъ. Какъ это онъ дѣлаетъ?

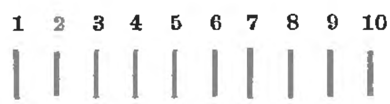
Рѣшенiе.

Если названная сумма—число четное, то у Ивана въ правой рукѣ четное число спичекъ и въ лѣвой — нечетное. Если же эта сумма — нечетная, то въ правой рукѣ нечетное число спичекъ.

Доказательство относительно подобнаго рода задачъ см. въ первой части этой книги—задача 94-я.

Задача 33-я.

Собрать въ группы по 2.



10 спичекъ положены въ одинъ рядъ. Требуется распредѣлить ихъ попарно, всего въ 5 паръ, перекладывая по одной спичкѣ черезъ двѣ (напримѣръ, № 1 переложить къ № 4 и т. д.).

Рѣшенiе.

Можно перекладывать такъ:	или:
4 къ 1	7 къ 10
7 » 3	4 » 8
5 » 9	6 » 2
6 » 2	1 » 3
8 » 10	5 » 9

Задача 34-я.

Собрать въ группы по 3.

15 спичекъ лежатъ въ рядъ:

Требуется собрать ихъ въ 5 группъ (или кучекъ) по 3 спички въ каждой, при чемъ перекладывать спички по одной и каждый разъ перескакивать черезъ 3 спички.

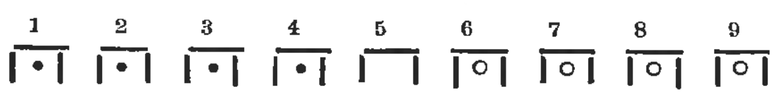
Рѣшеніе.

Обозначимъ положенныя въ рядъ спички соотвѣтственно числами 1, 2, 3....., 15. Тогда задача рѣшается путемъ слѣдующихъ 12-ти переложеній:

2	на	6	4	между	5	и	6
1	»	6	3	»	5	»	6
8	»	12	11	»	5	»	6
7	»	12	13	на	11		
9	»	5	14	»	11		
10	»	5	15	»	11		

Задача 35-я.

Перемѣщеніе лошадей.



Въ конюшнѣ устроено 9 стойлъ въ рядъ. 5-ый номеръ не занятъ: въ номерахъ 1, 2, 3 и 4 находятся черныя лошади (копейки), а въ 6, 7, 8 и 9 бѣлыя лошади (гривенники или иные предметы). Требуется перевести бѣлыхъ лошадей въ 1, 2, 3 и 4 номера, а черныхъ въ 6, 7, 8 и 9 на слѣдующихъ условіяхъ: каждая лошадь можетъ перескакивать въ ближайшее стойло или сосѣднее съ нимъ, но не дальше; никакая лошадь не должна возвращаться на прежнее мѣсто, и въ каждомъ стойлѣ не можетъ быть больше одной лошади. Начинать съ бѣлой лошади.

Рѣшеніе.

Задача рѣшается въ 24 хода слѣдующими перемѣщеніями:

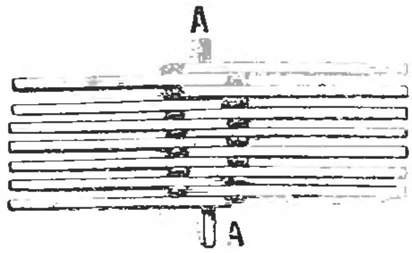
6 въ 5	2 въ 4	4 въ 6
4 » 6	1 » 2	2 » 4
3 » 4	3 » 1	3 » 2
5 » 3	5 » 3	5 » 3
7 » 5	7 » 5	7 » 5
8 » 7	9 » 7	6 » 7
6 » 8	8 » 9	4 » 6
4 » 6	6 » 8	5 » 4

Задача 36-я.

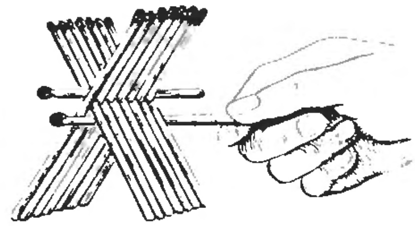
Поднять одной спичкой 15 спичекъ.

Рѣшеніе.

Эта на первый взглядъ трудная задача рѣшается, однако, легко. Положимъ на столъ спичку A (фиг. 51), а поперекъ этой спички положимъ затѣмъ вплотную одну около другой, попеременно вправо и влѣво, 14 спичекъ, и именно такъ, чтобы ихъ головки выдавались на $1-1^1/_2$ сантиметра надъ A, въ то время какъ концы безъ головокъ опирались бы на столъ. Сверху, въ углубленіе, образуемое верхними частями спичекъ, кладутъ затѣмъ 16-ю спичку параллельно A. Если поднять теперь послѣднюю за конецъ, то къ нашему удивленію вмѣстѣ съ нею поднимутся и остальныя 15 спичекъ (фиг. 52). Для этого опыта удобнѣе брать большія, толстыя четыреугольныя спички.



Фиг. 51.

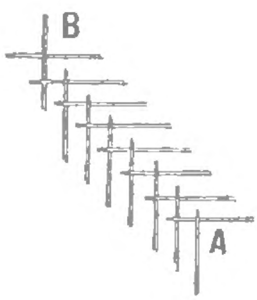


Фиг. 52.

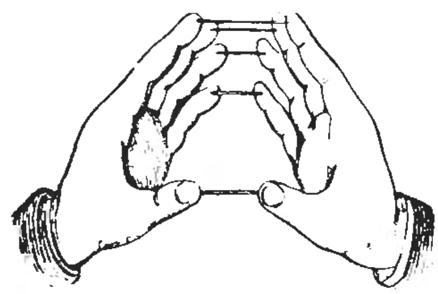
Задача 37-я.

Спичечный телеграфъ.

Спичечный телеграфъ строится, какъ указано на рисункѣ (фиг. 53). Можно, конечно, удлинить или укоротить его по желанію. Если нажать въ *B*, то *A* подпрыгнетъ.



Фиг. 53.



Фиг. 54.

Задача 38-я.

Легко или нѣтъ?

Въ заключеніе этого небольшого отдѣла задачъ со спичками предлагаемъ вамъ продѣлать уже не задачу, а маленькое физическое, что ли, упражненіе.

Вотъ положено на столѣ 5 спичекъ, которыя предлагаемъ вамъ поднять двумя руками такъ: сперва спичку № 1 двумя большими пальцами; оставивъ ее между этими пальцами, поднять затѣмъ двумя указательными пьльцами спичку № 2; оставляя эти двѣ спички между пальцами, поднимите затѣмъ спички № 3 средними пальцами, спичку 4 — безымянными и спичку 5 — мизинцами. У васъ должна получиться фиг. 54.

Интересно знать, удастся ли это вамъ? Скоро ли и легко ли? А если не легко, то почему? Но если, въ концѣ концовъ, это вамъ удалось бы сдѣлать, то попробуйте точно такъ же соотвѣтствующими пальцами обѣихъ рукъ поднять по 2, по 3 спички.

Лабиринты.

Вотъ задача, происхожденіе которой относится къ глубокой древности и теряется во мракѣ легендарныхъ сказаній. Древніе,—да, пожалуй, многіе и теперь,—задачу о лабиринтахъ считали вообще неразрѣшимой. Человѣкъ, попавшій въ лабиринтъ, не могъ уже изъ него выйти, если только какое-либо чудо или случай не приходили ему на помощь.

Изъ настоящей главы мы, наоборотъ, увидимъ, что безвыходныхъ лабиринтовъ нѣтъ, что разобраться и найти выходъ изъ самаго запутаннаго лабиринта не составляетъ особаго труда. Рѣшенію задачи мы предпосылаемъ нѣкоторыя историческія справки о лабиринтахъ. Эти справки, помимо общаго ихъ интереса, докажутъ намъ, съ одной стороны, насколько интересовались этой задачей, а съ другой,—дадутъ намъ наглядное представленіе посредствомъ рисунковъ о существовавшихъ и существующихъ лабиринтахъ.

Слово **«лабиринтъ»**—греческое и въ переводѣ означаетъ ходы въ подземельяхъ. Существуетъ, дѣйствительно, очень большое количество природныхъ подземныхъ пещеръ съ такимъ огромнымъ количествомъ по всѣмъ направленіямъ перекрещивающихся коридоровъ, закоулковъ и тупиковъ, что нетрудно въ нихъ заблудиться, потеряться и, не найдя выхода, умереть отъ голода и жажды.

Примѣры такого же рода, но уже искусственныхъ лабиринтовъ могутъ представить шахты иныхъ рудниковъ или такъ называемые катакомбы.

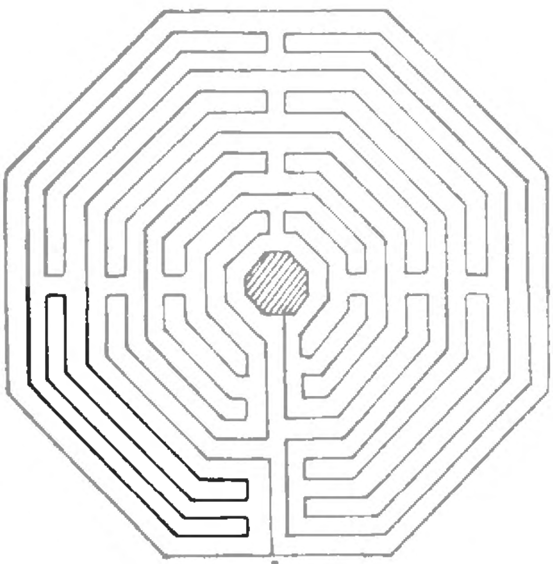
Вѣроятнѣе всего, что подобныя подземелья возбудили у строителей еще древнѣйшихъ временъ охоту подражать имъ искусственными сооруженіями. И у древнихъ писателей мы встрѣчаемъ указаніе на существованіе искусственныхъ лабиринтовъ, напр., у египтянъ. Въ концѣ концовъ, словомъ **лабиринтъ** чаще всего обозначали именно искусственное чрезвычайно сложное сооруженіе, составленное изъ очень большого числа аллей или галлерей, безчисленныя развѣтвленія, перекрестки и тупики которыхъ заставляли попавшаго туда безконечно блуждать въ лабиринтѣ въ тщетныхъ поискахъ выхода. Объ устройствѣ такихъ лабиринтовъ слагались цѣлыя легенды.

Извѣстнѣе всего разсказъ о лабиринтѣ, построенномъ миѳическимъ Дедаломъ на островѣ Критѣ для миѳическаго же царя Миноса. Въ центрѣ лабиринта жило чудовище Минотавръ, и никто изъ попавшихъ туда не могъ выйти обратно, дѣлаясь, въ концѣ концовъ, жертвой чудовища. Семь юношей и семь дѣвушекъ приносили аѳиняне въ дань ежегодно чудовищу, которое преисправно ихъ пожирало. Наконецъ, Тезей не только убилъ Минотарва, но и вышелъ изъ лабиринта, не заблудившись въ немъ, при помощи, впрочемъ, нити клубка царевны Аріадны. Съ той поры слова «нить Аріадны» имѣютъ символическое значеніе, какъ способъ, дающій выходъ изъ самаго затруднительнаго положенія.

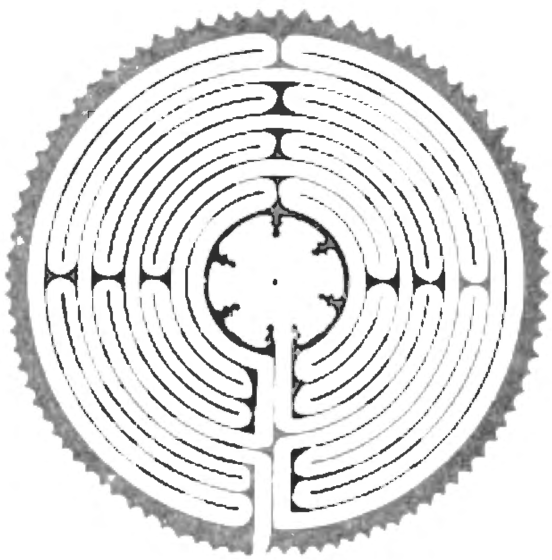
Лабиринты бываютъ самой разнообразной формы и устройства. До нашихъ дней сохранились еще и запутанно-сложные галлереи, и ходы пещеръ, и архитектурные лабиринты надъ могилами, и извилистые планы на стѣнахъ или полахъ, обозначенные цвѣтнымъ мраморомъ или черепицей, и извивающіяся тропинки на почвѣ, и рельефныя извилины въ скалахъ.

Рисунками лабиринтовъ украшались одѣянія христіанскихъ императоровъ до девятаго столѣтія, и остатки такихъ же украшеній сохранились до сихъ поръ на стѣнахъ церквей и соборовъ того времени. Вѣроятно, эти украшенія служили символомъ сложности жизненнаго пути и человѣческихъ заблужденій. Особенно употребительны были лабиринты въ первой половинѣ двѣнадцаго столѣтія.

На фиг. 55-й здѣсь приведено изображеніе одного изъ лабиринтовъ того времени во Франціи, въ церкви святого Квентина. Лабиринтъ этотъ выложенъ изъ камня на полу посреди церкви, и діаметръ его равняется тридцати четыремъ съ половиной футамъ. Путь къ центру здѣсь есть сама линія. Если вести карандашемъ по линіи отъ точки A (не обращая вниманія на внѣшнюю окружающую лабиринтъ линію), то вы придете къ центру по длинной извилистой дорогѣ черезъ всю внутреннюю площадь, но сомнѣнія относительно выбора пути у васъ быть не можетъ. Въ подобныхъ случахъ эти древніе духовные лабиринты отличаются вообще не головоломнымъ, а просто продолжительнымъ извилистымъ путемъ, который держитъ васъ все время внутри лабиринта.



Фиг. 55.

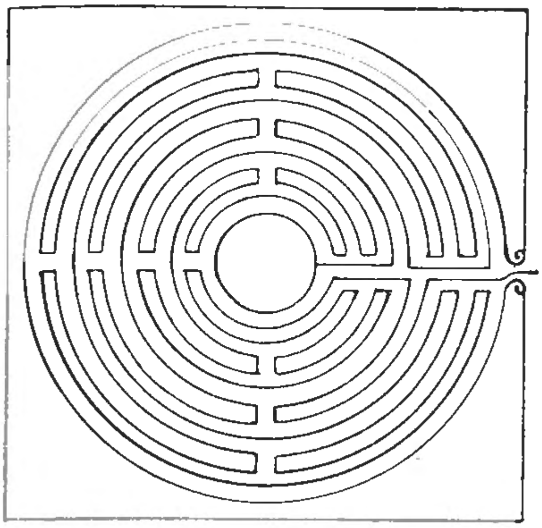


Фиг. 56.

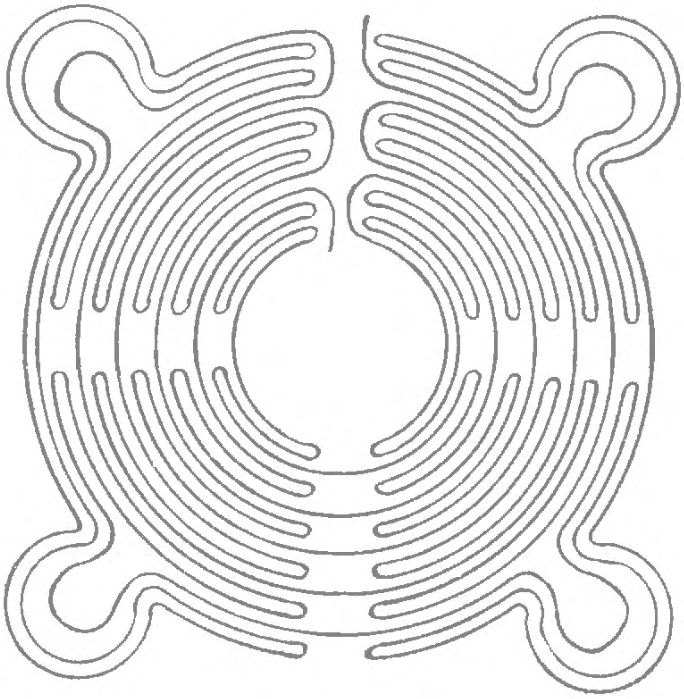
Въ церкви аббатства св. Бертина во Франціи есть еще болѣе любопытное изображеніе подобнаго рода на полу, представляющее въ центрѣ Іерусалимскій храмъ, съ остановками для пилигримовъ. Этотъ лабиринтъ дѣйствительно посѣщался пилигримами взамѣнъ путешествія по обѣту въ Святыя Мѣста. Пройти ползкомъ весь путь лабиринта назначалось также вмѣсто эпитиміи.

Лабиринтъ въ Шартрскомъ соборѣ, изображеніе котораго здѣсь дано (фиг. 56), сорока футовъ въ поперечникѣ, также посѣщался кающимися, и они совершали весь его сложный и длинный путь, выполняя наложенную на нихъ эпитимію или обѣтъ.

Подобнаго же рода лабиринтъ, но гораздо меньшихъ размѣровъ, помѣщающійся



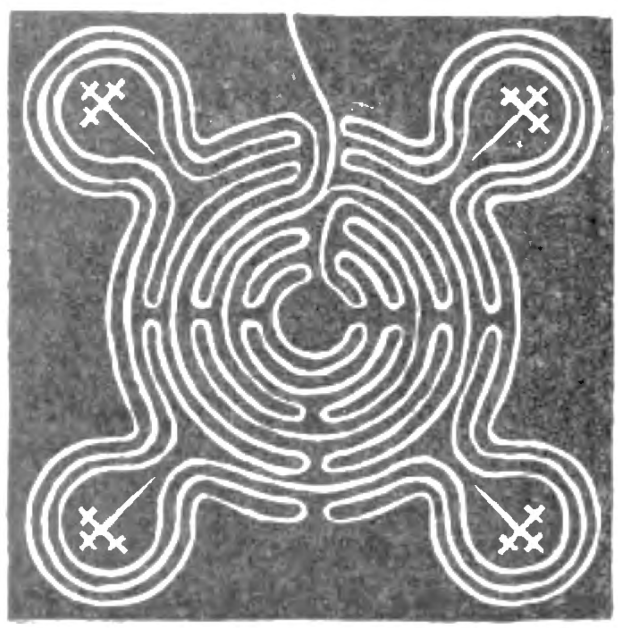
Фиг. 57.



Фиг. 58.

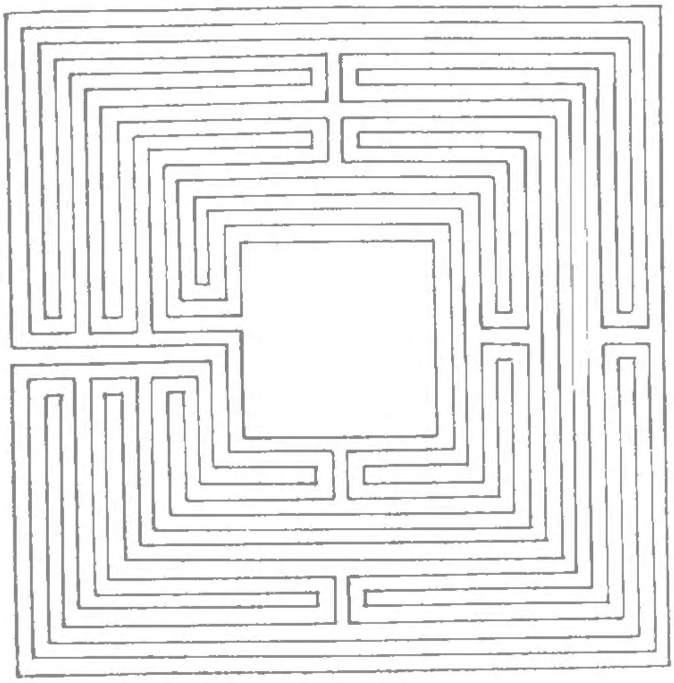
всего на одной плитѣ пола, есть въ каѳедральномъ соборѣ въ Луккѣ (фиг. 57). Въ натуральную величину онъ имѣетъ $19^1/_2$ дюймовъ въ поперечникѣ.

Другіе подобные лабиринты были и, можетъ быть, существуютъ до сихъ поръ въ аббатствѣ Туссарта въ Шалонѣ на Марнѣ, во многихъ древнихъ соборахъ и церквахъ въ Ахенѣ, въ Римѣ, въ Равеннѣ и во многихъ другихъ мѣстахъ. Лабиринты въ церквахъ большею частію назывались «пути въ Іерусалимъ» и служили символомъ труднаго земного путешествія въ Святыя Мѣста, наградой за которое является небесная благодать, поэтому центръ лабиринта часто называли «Небомъ».



Фиг. 59.

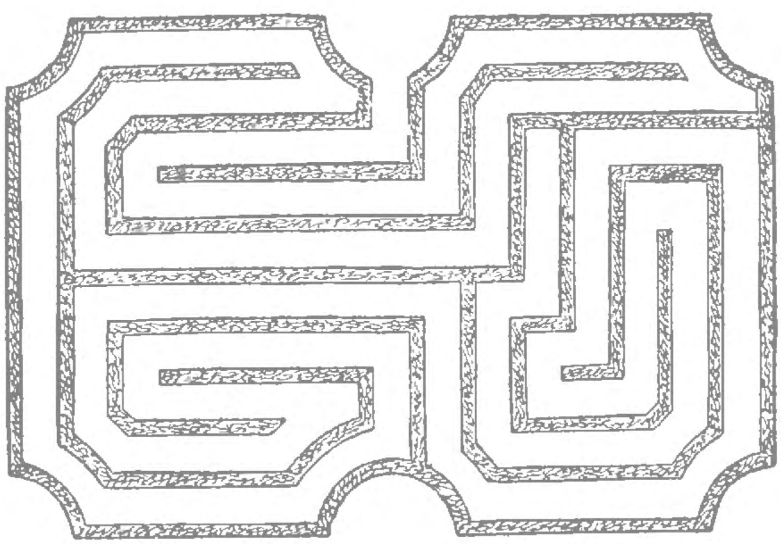
Въ Англіи не встрѣчаются лабиранты на церковномъ полу, но за то было очень много лабиринтовъ, сдѣланныхъ изъ дерна ан



Фиг. 60.

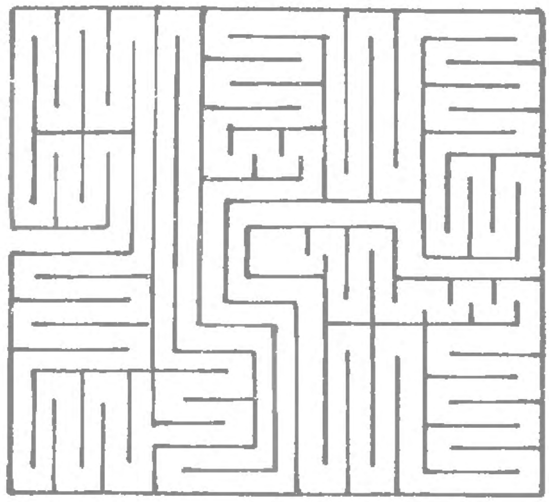
лужайкахъ. Они носили различныя названія: «Городъ Троя», «Слѣды пастуха» и т. п. Большинство изъ нихъ находится вблизи церквей или на кладбищахъ, что указываетъ тоже на ихъ духовное происхожденіе. О такихъ лабиринтахъ упоминаетъ Шекспиръ въ своихъ пьесахъ «Сонъ въ лѣтнюю ночь» и «Буря».

Образцы подобныхъ «дерновыхъ» лабиринтовъ приведены здѣсь на фиг. 58 и фиг. 59. Изъ нихъ первый (фиг. 58) въ графствѣ Эссексъ имѣлъ 110 футовъ въ діаметрѣ, а второй (фиг. 59) въ Ноттингеймширѣ 51 футъ въ діаметрѣ съ линіей пути въ 535 ярдовъ длины (Линіи извилистыхъ путей обоихъ этихъ



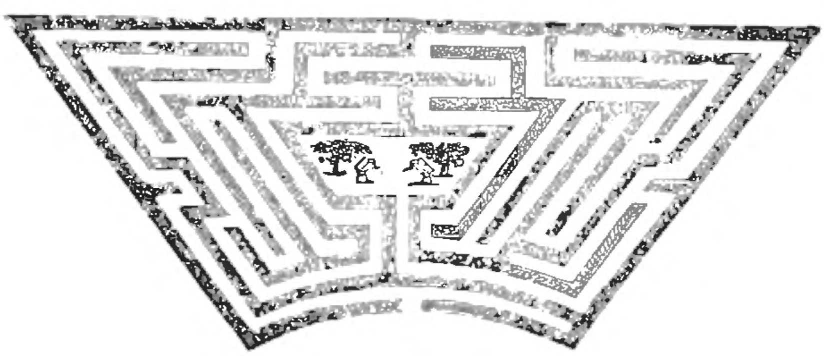
Фиг. 61.

лабиринтовъ ясно видны на чертежѣ). Оба эти лабиринта были взрыты плугомъ и уничтожены въ 1797 году. Для полноты и разнообразія возьмемъ еще образецъ итальянскаго лабиринта 16 столѣтія (фиг. 60), лабиринтъ взятый изъ книги англійскаго писателя 1706 года (фиг. 61), и, наконецъ, датскій лабиринтъ тѣхъ же временъ (фиг. 62).



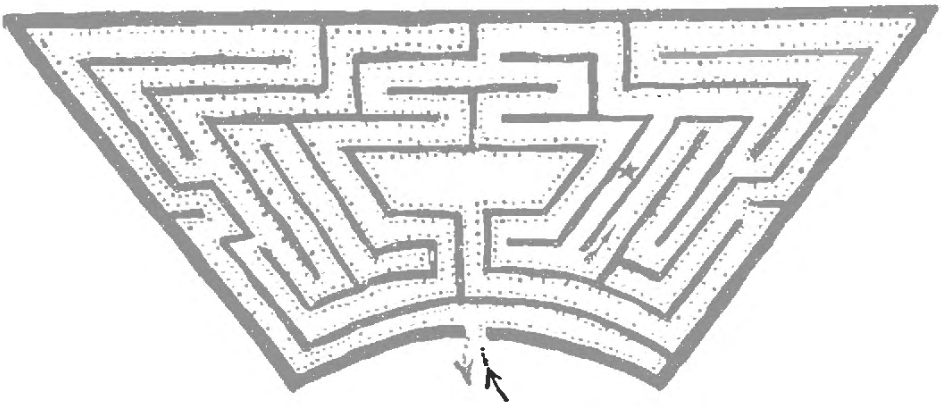
Фиг. 62.

Всѣ вышеприведенные лабиринты имѣютъ болѣе историческій, чѣмъ математическій интересъ. Распутать ихъ не трудно. Но послѣ Реформаціи фигуры эти потеряли свое символическое значеніе и сдѣлались мало-помалу предметомъ развлеченія. Лабиринты переходятъ въ сады, цвѣтники и парки, гдѣ путемъ проведенія прихотливо извивающихся, то пересѣкающихся, то внезапно прегражденныхъ, или заканчивающихся тупикомъ, дорожекъ получались самыя запутанныя и головоломныя фигуры, въ которыхъ, дѣйствительно, нелегко было найти дорогу отъ края къ центру, и гдѣ трудно было не заблудиться. Изъ такихъ затѣйливыхъ садовъ если не самый головоломный для рѣшенія, то наиболѣе извѣстный былъ лабиринтъ одного изъ дворцовыхъ садовъ англійскаго короля Вильгельма III. Вотъ что можно прочесть о немъ въ **Encyclopaedia Britannica** подъ словомъ «Labyrinth» съ соотвѣтствующимъ рисункомъ (фиг. 63):



Фиг. 63.

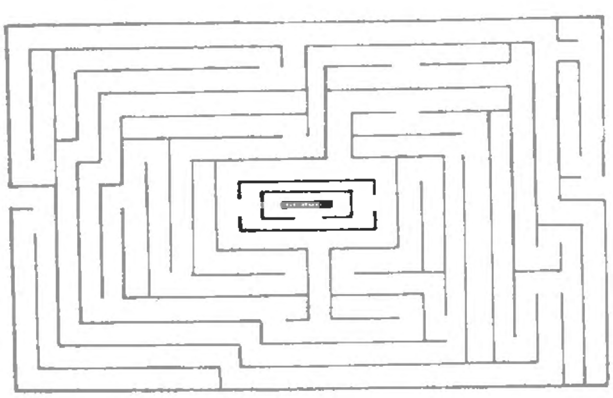
«Лабиринтъ въ садахъ дворца Хэмптонъ-коуртъ считается однимъ изъ самыхъ красивыхъ въ Англіи. Онъ былъ устроенъ въ первую половину царствованія Вильгельма III, хотя существуетъ предположеніе, что онъ существовалъ тамъ со времени Генриха VIII. Въ саду переплетается цѣлая система аллей и изгородей, и онъ былъ, какъ говорятъ, обсаженъ грабами, которые потомъ были уничтожены и замѣнены остролистами, тисами и др. растеніями. Аллеи были около полмили длиной, а весь онъ занималъ пространство около четверти акра. Въ центрѣ находились два большихъ дерева со скамейками около нихъ».



Фиг. 64.

Способъ пройти къ этому центру и выйти изъ сада состоялъ въ томъ, чтобы, вступивъ въ лабиринтъ, съ перваго же шага и до конца касаться изгороди правой рукой. Пройденный такимъ образомъ путь обозначенъ у насъ линіей, состоящей изъ точекъ, на фиг. 64.

Слѣдующій лабиринтъ (фиг. 65) во владѣніяхъ маркиза Солсбери (Hatzfield

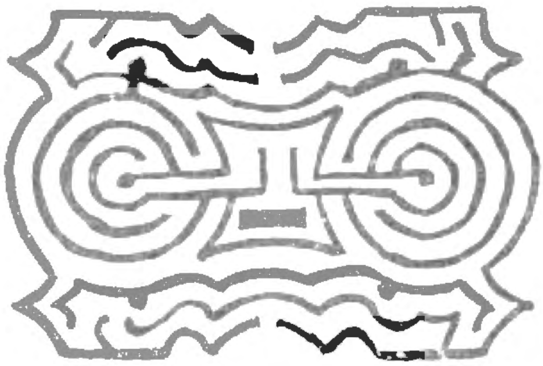


Фиг. 65.

Фиг. 66.

House) хоть и сложнѣе предыдущаго, но довольно легко рѣшается на бумагѣ. Другое дѣло получится, если мы вздумали бы обойти его въ дѣйствительности, не имѣя плана, или не руководствуясь извѣстной системой. Лабиринтъ, представленный здѣсь на фиг. 66, былъ устроенъ королевскимъ обществомъ садоводства въ южномъ Кессингтонѣ и нынѣ не существуетъ. Онъ очень простъ, хотя и имѣетъ три входа, изъ которыхъ обозначенный буквой *A* ведетъ почти прямо къ центру.

Вотъ еще образецъ (фиг. 67) нѣмецкаго лабиринта—изящнаго, но, въ сущности, незамысловатаго, и, наконецъ, на фиг. 68 представленъ интересный образчикъ лабиринта въ графствѣ Дорсетъ. Онъ состоялъ изъ грядъ холмиковъ (около фута высоты) и занималъ около акра площади земли. Въ 1730 году лабиринтъ этотъ былъ запаханъ, и земля, очевидно, была обращена на болѣе производительный предметъ.



Фиг. 67.

Приведенныхъ образцовъ лабиринтовъ и историческихъ справокъ, полагаемъ, достататочно, чтобы доказать, насколько старъ вопросъ о лабиринтахъ и вмѣстѣ съ тѣмъ насколько многихъ онъ интересовалъ въ свое время. Люди изощрялись въ изобрѣтеніи самыхъ [замысловатыхъ и «безвыходныхъ» лабиринтовъ. Но, въ самомъ дѣлѣ, возможно ли построить или даже начертить **безвыходный** лабиринтъ?—т. е. такой, въ которомъ найти путь къ его «центру» и найти отсюда обратный выходъ было бы только дѣломъ удачи, случая, счастья, а не совершенно опредѣленнаго и правильнаго математическаго расчета? Съ этой послѣдней точки зрѣнія вопросъ пріобрѣтаетъ не только теоретическій, но и большой практическій интересъ. Въ сущности, устройство нашихъ городовъ, сѣтей желѣзныхъ

Фиг. 68.

дорогъ, каналовъ рѣкъ, телеграфовъ и т. д.—все это болѣе или менѣе сложные лабиринты. И если взглянуть на дѣло съ этой стороны, то задача о распутываніи любого лабиринта можетъ считаться не однимъ только «развлеченіемъ»...

Итакъ, представляется вопросъ: есть ли безвыходные лабиринты, или въ каждомъ лабиринтѣ, руководясь общими извѣстными правилами, можно разобраться, свободно войти въ него, посѣтить любую данную въ немъ точку (если она, конечно, не вполнѣ изолирована отъ всей системы непроходимой стѣной) и затѣмъ выйти обратно?

Разрѣшеніе этого вопроса принадлежитъ сравнительно позднѣйшему времени, и начало ему положено знаменитымъ Эйлеромъ. Результаты произведенныхъ въ этомъ отношеніи изысканій привели къ заключенію, что

Нѣтъ безвыходныхъ лабиринтовъ.

Разрѣшеніе каждаго лабиринта можетъ быть найдено и притомъ сравнительно простымъ путемъ. Внимательный читатель, преодолѣвшій нижеслѣдующія главы, самъ сейчасъ убѣдится въ этомъ.

Геометрическая постановка задачи о лабиринтахъ.

Аллеи, дорожки, коридоры, галлереи, шахты и т. п. лабиринта, какъ знаемъ, тянутся, изгибаясь во всѣ стороны, перекрещиваются, расходятся по всевозможнымъ направленіямъ, отвѣтвляются, образуютъ тупики и т. д. Но мы, для большей ясности разсмотрѣнія вопроса, всѣ **перекрестки** обозначимъ просто **точками**, а всѣ эти аллеи, дорожки, коридоры и т. д. будемъ принимать просто за линіи, прямыя, или кривыя, плоскія или нѣтъ—все равно, но эти линіи соединяютъ наши точки (перекрестки) двѣ по двѣ.

Вслѣдъ затѣмъ мы говоримъ, что эти точки и эти линіи вмѣстѣ составляютъ **геометрическую сѣть**, или **лабиринтъ**, если какая либо точка, движущаяся по линіямъ этой сѣти, можетъ придти къ любой другой точкѣ, не покидая линій нашей системы (или сѣти).

Принявъ это, мы докажемъ, что
подобная движущаяся точка (представляющая, напр., человѣка) можетъ послѣдовательно описать всѣ линіи сѣти безъ всякихъ скачковъ и перерывовъ, и при этомъ по каждой линіи сѣти она пройдетъ не болѣе двухъ разъ.

Другими словами,—лабиринтъ всегда можетъ быть разрѣшенъ.

Но еще раньше, чѣмъ приступить къ этому доказательству, можно доставить себѣ довольно интересное математическое развлеченіе, которое поможетъ уяснить все предыдущее и весьма полезно будетъ для усвоенія самаго доказательства. На листѣ бѣлой бумаги возьмите произвольно нѣсколько точекъ и соедините ихъ двѣ по двѣ столько разъ, сколько хотите произвольнымъ числомъ прямыхъ или кривыхъ линій, но такъ, чтобы ни одна точка системы не осталась совершенно изолированной. Итакъ, вы получите то, что мы назвали геометрической сѣтью. Или нарисуйте, напримѣръ, сѣть трамваевъ или конокъ города, сѣть желѣзныхъ дорогъ страны, сѣть рѣкъ и каналовъ и т. д., прибавьте къ нимъ, если хотите, границы страны,— вы опять получите геометрическую сѣть, или лабиринтъ (Для начала, конечно, лучше брать не особенно сложную сѣть).

Теперь на кускѣ непросвѣчивающей бумаги, или картона, вырѣжьте небольшое отверстіе, черезъ которое была бы видна только небольшая часть составленной вами рѣшетки, или лабиринта. Безъ такого приспособленія въ глазахъ рябитъ, и легко запутаться въ сѣти. Затѣмъ направьте окуляръ (отверстіе для глаза) вашего «экрана» на какой либо перекрестокъ (точку) вашей сѣти,—наприм., точку, которую назовемъ A,—и сдѣлайте себѣ такое заданіе: обѣжать этимъ окуляромъ непрерывно **всѣ** линіи сѣти два раза (пройти каждый путь впередъ и назадъ) и возвратиться въ точку A. Чтобы помнить уже пройденныя окуляромъ линіи, примите за правило на каждой проходимой линіи ставить поперечную черточку при входѣ въ перекрестокъ и при выходѣ изъ него. Отсюда слѣдуетъ, что двѣ оконечности каждаго пути отъ перекрестка до перекрестка (отъ точки до точки) послѣ выполненія заданія (пройти каждую сѣть линіи 2 раза) должны быть обозначены 2-мя поперечными черточками, но не болѣе.

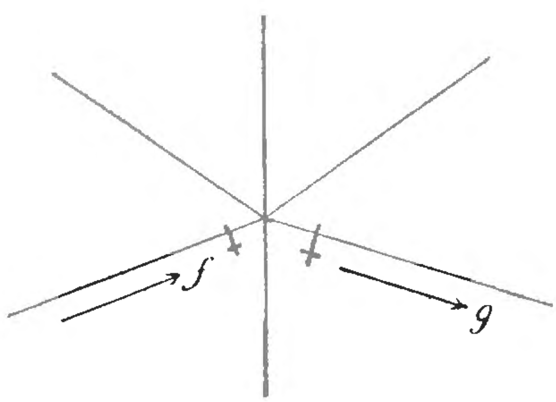
Если мы имѣемъ дѣло съ дѣйствительнымъ лабиринтомъ, или галлереями подземныхъ шахтъ, съ развѣтвленіями пещеръ и т. д., то блуждающему въ этихъ шахтахъ вмѣсто черточекъ на бумагѣ придется дѣлать уже иной знакъ, чтобы оріентироваться, и класть, напримѣръ, камень при входѣ и выходѣ изъ каждаго перекрестка,—въ галлереѣ, которую онъ покидаетъ, и въ той, въ которую онъ входитъ.

Но обратимся къ намѣченному раньше доказательству, что всякій лабиринтъ разрѣшимъ, что нѣтъ «безвыходнаго» лабиринта. Другими словами: рѣшимъ общую задачу о лабиринтахъ.

Рѣшеніе задачи.

Правило I.—Отправляемся отъ начальнаго пункта (перваго перекрестка) и идемъ по какой угодно дорогѣ, пока не приходимъ или въ тупикъ, или къ новому перекрестку. Тогда:

1°. Если окажется, что мы попали въ тупикъ, то возвращаемая назадъ и пройденный путь долженъ быть уже отброшенъ, такъ какъ мы его прошли два раза (впередъ и обратно).



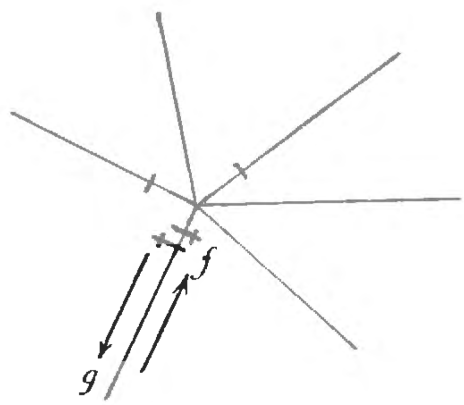
Фиг. 69.

2°. Если же мы приходимъ къ новому перекрестку, то направляемся по новому произвольному пути, не забывая только всякій разъ отмѣтить поперечной черточкой путь, по которому мы прибыли, и путь, по которому отправились дальше.

Какъ это показано на фиг. 69-ой, гдѣ мы движемся въ направленіи, показанномъ стрѣлкой f, приходимъ къ пересѣченію путей и беремъ направленіе, обозначенное стрѣлкой g, но тотъ и другой путь мы обозначаемъ черточкой, или крестикомъ (При чемъ крестикъ обыкновенно ставится, чтобы обозначить второй, позднѣйшій, путь).

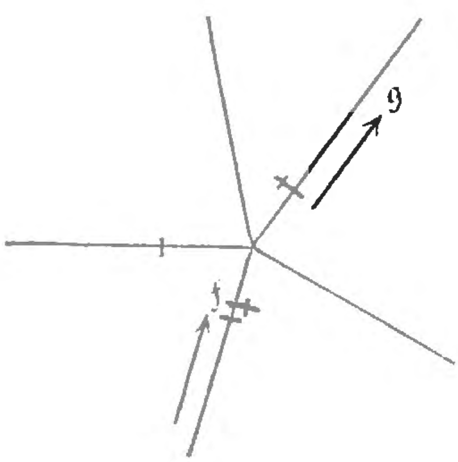
Мы слѣдуемъ указанному выше первому правилу всякій разъ, когда приходимъ на такой перекрестокъ, на которомъ мы еще не были. Но, въ концѣ концовъ, мы необходимо должны придти къ перекрестку, на которомъ мы уже были, и здѣсь можетъ представиться два случая. На извѣстный уже намъ пунктъ мы проходимъ по дорогѣ, уже разъ пройденной нами, или же по пути новому, не отмѣченному еще черточкой. Въ такомъ случаѣ слѣдуетъ придерживаться такихъ правилъ:

Правило II. — Прибывъ на извѣстный уже намъ перекрестокъ по новой дорогѣ мы должны сейчасъ же повернуть обратно, предварительно отмѣтивъ этотъ путь двумя черточками (прибытіе и обратное отправленіе), как это указано на фиг. 70-ой.



Фиг. 70.

Правило III. — Если мы приходимъ на извѣстный намъ перекрестокъ такимъ путемъ, которымъ мы уже разъ прошли раньше, то отмѣтивъ этотъ путь второй черточкой (или крестикомъ), отправляемся дальше путемъ, которымъ мы еще не шли, если только такой путь существуетъ.



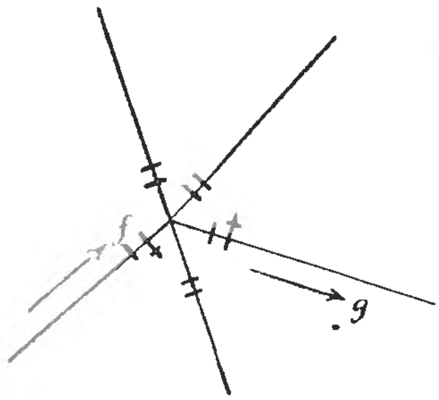
Фиг. 71.

Этотъ случай изображенъ на фиг. 71-ой.

Но если такого пути нѣтъ, то выбираемъ дорогу, по которой прошли только одинъ разъ.

Случай этотъ изображенъ на фиг. 72-ой.

Придерживаясь точно указанныхъ правилъ, мы необходимо обойдемъ 2 раза всѣ линіи сѣти и придемъ въ точку отпра-



Фиг. 72.

вленія. Это можно доказать, сдѣлавъ и уяснивъ себѣ предварительно такія замѣчанія:

1°. Выходя изъ точки отправленія, скажемъ A, мы ставимъ начальный знакъ (поперечную черточку или крестикъ).

2°. Прохожденіе черезъ перекрестокъ по одному изъ предыдущихъ 3-хъ правилъ каждый разъ добавляетъ два знака (двѣ поперечныя черточки) на линіяхъ, которыя сходятся въ этой точкѣ.

3°. Въ любой моментъ прохожденія лабиринта, передъ прибытіемъ на какой либо перекрестокъ, или послѣ отправленія изъ него, начальный перекрестокъ (пунктъ отправленія) имѣетъ **нечетное** число знаковъ (черточекъ и крестиковъ), а всякій другой перекрестокъ имѣетъ ихъ **четное** число.

4°. Въ любой моментъ, до или послѣ прохода черезъ перекрестокъ, начальный перекрестокъ имѣетъ **только одинъ** путь, обозначенный только одной черточкой. Всякій же иной изъ посѣщенныхъ уже перекрестковъ можетъ имѣть только два пути, обозначенныхъ одной черточкой.

5°. Послѣ полнаго обхода лабиринта у всѣхъ перекрестковъ всѣ пути должны имѣть по двѣ черточки. Это, впрочемъ, входитъ прямо въ условіе заданія.

Принявъ во вниманіе все вышеизложенное, мы легко убѣдимся, что если кто-либо отправляется изъ начальнаго перекрестка, скажемъ A, и прибываетъ въ какой-либо иной перекрестокъ M, то онъ не можетъ встрѣтить такихъ трудностей задачи, которыя могли бы остановить его дальнѣйшее путешествіе. Въ самомъ дѣлѣ, въ это мѣсто M онъ приходитъ или новымъ путемъ, или путемъ, который уже одинъ разъ пройденъ. Въ первомъ случаѣ прилагается I-е или II-е изъ данныхъ выше правилъ. Во второмъ вступленіе на перекрестокъ M и остановка здѣсь дала бы **нечетное** число знаковъ около него, слѣдовательно, за неимѣніемъ новаго пути надо пойти по уже пройденному одинъ разъ пути, и около перекрестка будетъ четное число знаковъ (если онъ не начальный), по замѣчанію 3°.

Пусть, наконецъ, мы будемъ вынуждены закончить нашъ путь и возвратиться въ начальный перекрестокъ A. Назовемъ эту послѣднюю линію ZA, т. е. она ведетъ изъ перекрестка Z въ начальный A. Этотъ путь долженъ быть необходимо тѣмъ самымъ, которымъ мы отправились первый разъ изъ A, иначе путь можно было бы продолжать. И если теперь мы принуждены имъ же возвратиться въ точку исхода, то это значитъ, что въ перекресткѣ Z нѣтъ уже никакого другого пути, который бы не былъ уже 2 раза пройденъ. Иначе это значило бы, что забыли приложить первую часть правила III-го,—болѣе того, это значило бы, что въ Z есть какой-то путь YZ, пройденный только одинъ разъ по замѣчанію 4'. Итакъ, при послѣднемъ возвращеніи въ A всѣ пути въ Z должны быть отмѣчены 2-мя черточками. Точно также это можно доказать для предшествующаго перекрестка Y, и для всѣхъ остальныхъ. Другими словами,—наше предложеніе доказано, и задача рѣшена.

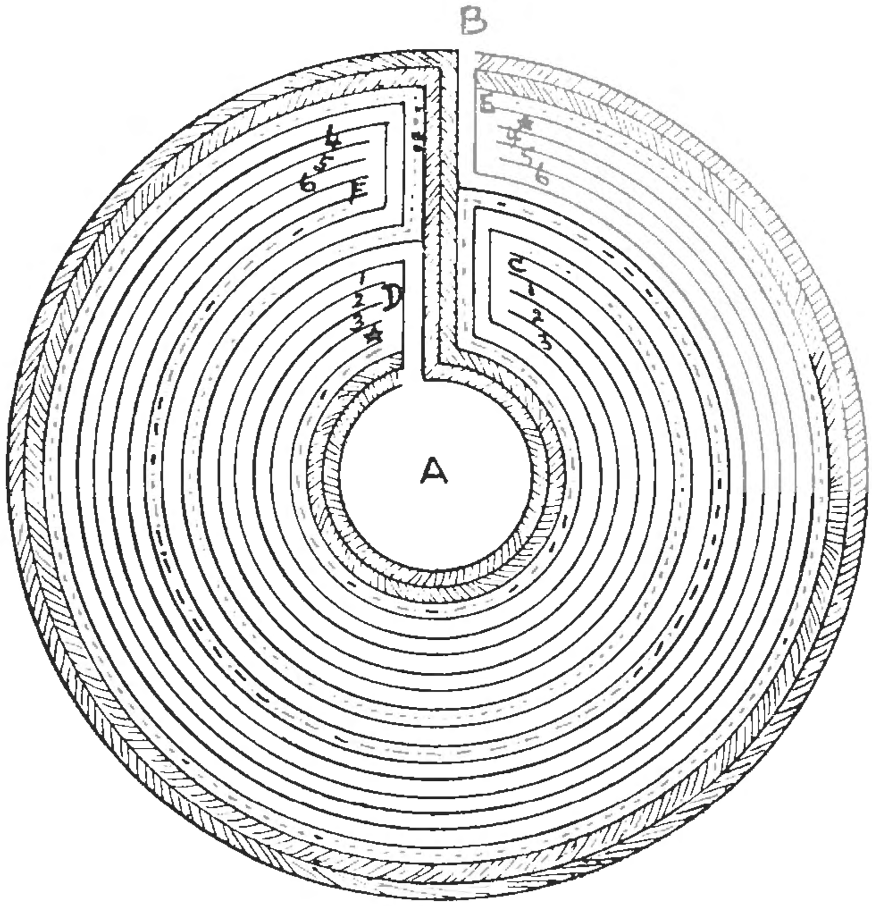
Этотъ изящный способъ рѣшенія задачи данъ французскимъ инженеромъ М. Тремо. Какъ видимъ, онъ вполнѣ доказываетъ, что нѣтъ безвыходныхъ лабиринтовъ.

Филадельфійскій лабиринтъ.

Объ одномъ изъ новѣйшихъ, не построенныхъ, впрочемъ, а только начерченныхъ лабиринтовъ поучительную исторію разсказываетъ H. E. Dudeney въ журналѣ «The Strand Magazine» за 1908 г.

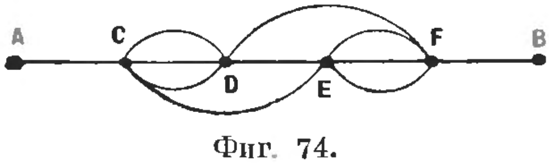
«Нѣсколько лѣтъ тому назадъ,—сообщаетъ упомянутый авторъ,—одинъ странствующій торговецъ, живя въ Филадельфіи, въ Соединенныхъ Штатахъ Америки, увлекся головоломными лабиринтами такъ, что забросилъ всѣ свои дѣла. Дни и ночи проводилъ онъ за разрѣшеніемъ и составленіемъ головоломныхъ лабиринтовъ. Приводимый здѣсь лабиринтъ (фиг. 73) довелъ его до пьянства. Въ концѣ концовъ онъ помѣшался. Разумѣется, мозги его и раньше были не въ порядкѣ, если такой незначительной причины было достаточно, чтобы окончательно разстроить ихъ».

Во всякомъ случаѣ, отсюда слѣдуетъ вывести такую мораль, что лабиринты совсѣмъ ужъ не такая важная вещь, чтобы изъ за нихъ стоило голову терять. Приводимъ этотъ (фиг. 73), въ буквальномъ смыслѣ слова, «головоломный» лабиринтъ уже съ



Фиг. 73.

готовымъ и упрощеннымъ рѣшеніемъ его: всѣ тупики (слѣпые проходы) въ немъ уже заштрихованы и главнѣйшіе пути указаны точечными или штриховыми линіями. И по рѣшенію, данному на этой фигурѣ, видно, что отъ A надо сначала идти къ C, и потомъ отъ F къ B.

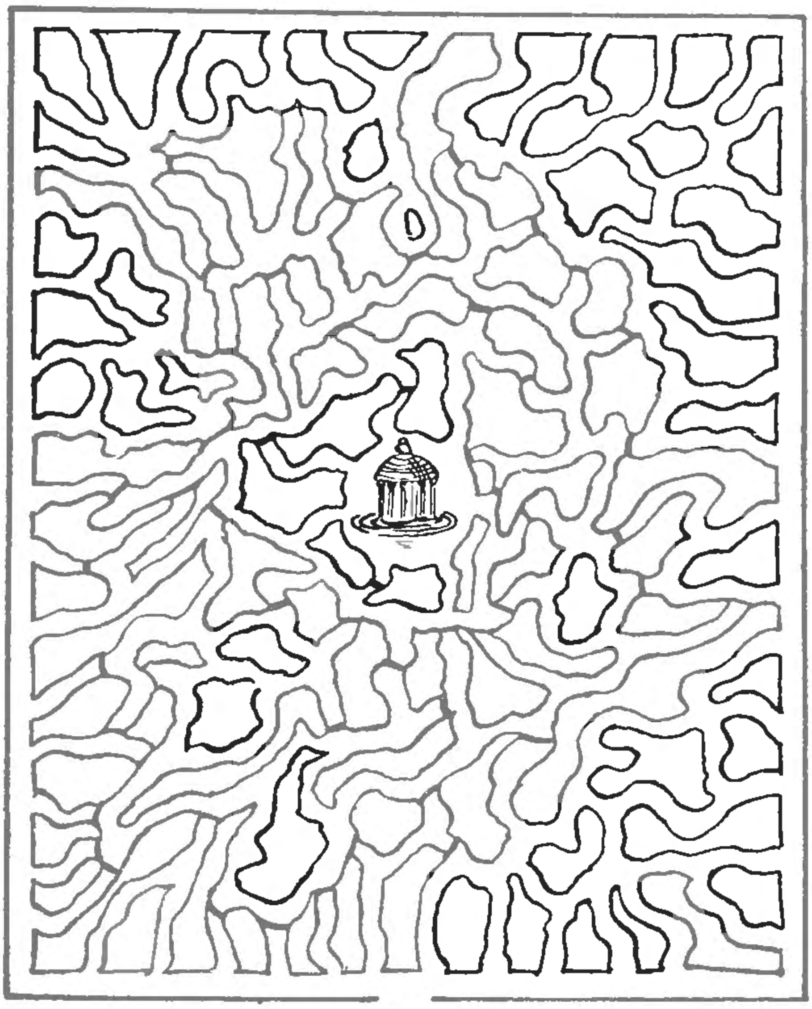


Фиг. 74.

Но, когда мы придемъ къ C, у насъ являются три дороги, обозначенныя 1, 2, 3, чтобы дойти до D. Точно также, когда мы дойдемъ до E, тоже видны три дороги, обозначенныя 4, 5, 6, чтобы дойти до F. У насъ есть такимъ образомъ обозначенная точками дорога отъ C до E, другая—обозначенная точками дорога отъ D до F и проходъ отъ D до E, указанный звѣздами. Мы можемъ, слѣдовательно, выразить положеніе дѣла маленькой упрощенной діаграммой на фиг. 74-ой. Здѣсь всѣ условія пути соотвѣтствуютъ путямъ кругообразнаго лабиринта, но только болѣе доступны глазу. И вотъ при такихъ-то условіяхъ, при условіи также, которое здѣсь можно выполнить, не проходить дважды черезъ одинъ и тотъ же проходъ, окажется 640 путей отъ *A* до *B*. Для головоломнаго лабиринта,—это, не правда ли, довольно хорошо.

Задача 39-я.

Хижина Розамунды.

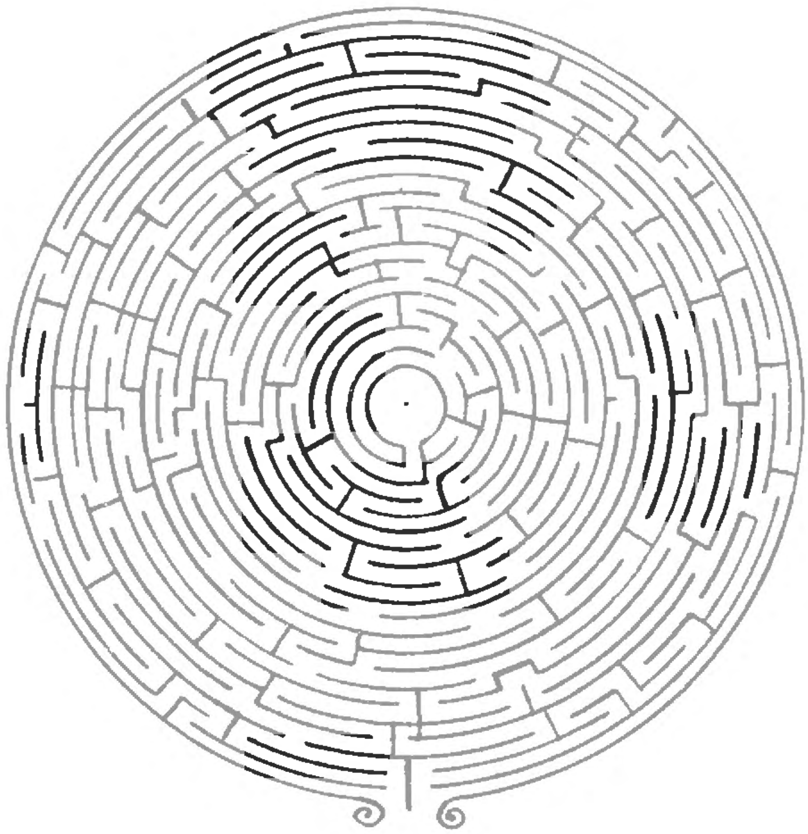


Фиг. 75.

А теперь, почтенный читатель, послѣ изложеннаго уже и, думаемъ, усвоеннаго вами рѣшенія задачи о лабиринтахъ для васъ будетъ не трудно найти путь къ хижинѣ прекрасной Розамунды, поселившейся въ паркѣ, изображенномъ на фиг. 75. Если до сихъ поръ вамъ не приходилось еще слышать о прекрасной Розамундѣ, то, кстати, достаньте книгу и прочтите эту исторію... Быть можетъ, для сокращенія времени вамъ не безполезенъ будетъ совѣтъ начать поиски отъ хижины и найти лучше выходъ изъ этого коварнаго парка, чѣмъ начинать со входа. Впрочемъ, при наличности свободнаго времени это безразлично.

Задача 40-я.

Еще лабиринтъ.



Фиг. 76.

Вотъ еще любопытный образчикъ лабиринта, въ которомъ надо пробраться по кратчайшей дорогѣ къ центру (фиг. 76).

Общія замѣчанія.

Задача о лабиринтахъ находится въ непосредственной связи съ задачей Эйлера о мостахъ и островахъ, а также съ вопросомъ о вычерчиваніи однимъ почеркомъ различныхъ фигуръ (уникурсальныя фигуры). На стран. 152—168 первой части нашей книги эти задачи разобраны довольно подробно. Здѣсь не лишнимъ будетъ привести тѣ общія теоремы, которыя лежатъ въ основѣ подобныхъ задачъ. Условимся прежде всего называть **точкой** четнаго порядка такую точку, изъ которой выходитъ четное число линій, и точкой нечетнаго порядка такую, въ которой встрѣчается нечетное число линій. Тогда:

1°. Въ **замкнутой фигурѣ** можетъ **быть** только четное число нечетныхъ **точекъ, все равно, уникурсальная** эта **фигура,** или **нѣтъ.**

2°. **Замкнутая фигура, всѣ** точки **которой суть** четнаго порядка, всегда можетъ **быть вычерчена** однимъ **почеркомъ,** начиная съ **любой** изъ ея **точекъ;** т. **е.** такая **фигура** всегда **уникурсальна.**

3°. Если въ **замкнутой фигурѣ** не **болѣе** 2-**хъ** нечетныхъ **точекъ,** то она можетъ **быть вычерчена** однимъ **почеркомъ,** начиная только съ **одной** изъ этихъ точекъ.

4°. **Замкнутая фигура** съ числомъ нечетныхъ точекъ **болѣе двухъ** не **вычерчиваетя однимъ почеркомъ.**

5°. **Пусть** въ **замкнутой фигурѣ** есть $2n$ нечетныхъ **точекъ, тогда необходимо** и достаточно n **пріемовъ, чтобы вычертить фигуру.**

Доказательство этихъ теоремъ можно найти частью въ 1-й части нашей книги, частью у Lucas, «Théorie des Nombres», глава VII.

Изъ этихъ теоремъ вытекаетъ и рѣшеніе задачи о лабиринтахъ Тремо,—рѣшеніе, сводящее лабиринтъ къ такой замкнутой кривой, которая вычерчивается двойнымъ непрерывнымъ движеніемъ, если каждую линію пройти дважды: впередъ и назадъ.

Такимъ общимъ путемъ, какъ мы уже указали, можетъ быть рѣшенъ всякій лабиринтъ. Если же на практикѣ рѣшеніе можно упростить, то, конечно, слѣдуетъ это дѣлать.

Задача 41-я.

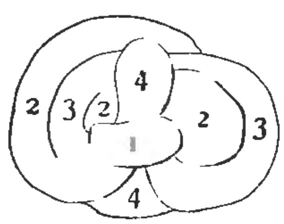
Картографическій вопросъ
или
теорема о четырехъ краскахъ.

Вопросъ, на который мы сейчасъ желаемъ обратить вниманіе читателя, извѣстенъ уже давно всѣмъ, спеціально занимающимся черченіемъ и раскрашиваніемъ географическихъ картъ и плановъ. Состоитъ онъ въ слѣдующемъ:

Для всякой карты достаточно четырехъ различныхъ красокъ, чтобы любыя двѣ области, имѣющія общую пограничную линію, не были окрашены въ одинъ и тотъ же цвѣтъ; при чемъ все равно, сколько бы ни было областей, какъ бы прихотливы ни были ихъ пограничныя очертанія и какъ бы сложно ни было ихъ расположеніе.

Выясненіе задачи.

Изъ прилагаемой фиг. 77 можно убѣдиться, что четыре различныхъ краски дѣйствительно необходимы. Нѣсколькихъ попытокъ, предпринятыхъ въ этомъ направленіи, достаточно для большинства, чтобы убѣдиться въ невозможности составить карту съ такимъ расположеніемъ областей, или участковъ, гдѣ потребовалось бы для выполненія условій задачи болѣе четырехъ различныхъ красокъ. Но дать этому послѣднему положенію математическое доказательство — составляетъ уже совершенно иное дѣло.



Фиг. 77.

Спеціалистамъ картографическаго дѣла этотъ вопросъ, какъ упомянуто выше, извѣстенъ уже давно. Но какъ математическую теорему, или задачу для рѣшенія, впервые выдвинули его Мёбіусъ въ 1840 году и Гютри, а затѣмъ еще болѣе популяризовалъ его Морганъ. Вопросъ получилъ извѣстность и былъ объявленъ, какъ одинъ изъ нерѣшенныхъ, или даже, быть можетъ, неразрѣшимыхъ съ помощью математики. Начиная съ

1878 года, талантливый математикъ Кэли (Kayley) обнародовалъ нѣсколько доказательствъ этой теоремы, но всѣ они оказались несостоятельными. Профес. Кемпе и проф. Тэть также тщетно пытались рѣшить вопросъ. Итакъ, задача остается до сихъ поръ открытой и ждетъ еще своихъ побѣдителей.

Если бы разсматриваемое нами предположеніе было невѣрно, то это можно было бы обнаружить хотя однимъ какимъ-либо примѣромъ,—наприм., составленіемъ такой «карты» съ пятью или болѣе, областями, гдѣ четырехъ различныхъ красокъ для выполненія заданнаго условія недостаточно. Многіе и попытались это сдѣлать, но... вопросъ такъ и остается открытымъ.

Пока что, доказано только, что существуютъ поверхности, для которыхъ данная теорема не имѣетъ мѣста. Теорема можетъ имѣть мѣсто на плоскости, или на поверхности шара.

Быть можетъ, кто либо изъ нашихъ читателей займется этимъ вопросомъ и будетъ настолько настойчивъ и счастливъ, что разрѣшитъ его! Аналогія этой задачи съ Эйлеровой задачей о мостахъ, съ задачей объ уникурсальныхъ кривыхъ и съ предыдущей задачей о лабиринтахъ напрашивается какъ-то сама собой. Но аналогія въ математикѣ, увы. ничего не доказываетъ.

О весьма большихъ и весьма малыхъ числахъ.

Что такое билліонъ?

Въ Англіи, Германіи и въ нѣкоторыхъ иныхъ странахъ сѣверной Европы часто въ основу счета кладутъ группы изъ шести знаковъ:

$10^6 = 1\,000\,000 =$ милліонъ; $10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$ билліонъ, $10^{18} =$ трилліонъ и т. д.

Въ Америкѣ и въ южно-европейскихъ странахъ въ основу счета кладется группа изъ **трехъ** цифръ:

$10^6 =$ милліонъ; $10^9 =$ билліонъ; $10^{12} =$ трилліонъ и т. д.

Вопроса о томъ, какая изъ этихъ системъ **правильнѣе**, быть, конечно, не можетъ. Вѣрно и то, и другое. Все дѣло въ разъ навсегда принятомъ условіи о значеніи того или или иного слова. Англичане, впрочемъ, указываютъ на филологическія, такъ сказать, преимущества ихъ счисленія: **билліонъ**, т. е. вторая степень милліона; **трилліонъ**, т. е. **третья** степень милліона, и т. д...

Впрочемъ, разница въ наименованіи касается, какъ видимъ, такихъ большихъ чиселъ, которыя лучше всего опредѣлять просто количествомъ входящихъ въ нихъ знаковъ (цифръ), а потому на практикѣ изъ такого различнаго употребленія въ разныхъ странахъ одного и того же слова не создается затрудненій; и это обыкновенно не отмѣчается даже въ учебникахъ ариѳметики. Но о словѣ **билліонъ** слѣдовало бы упоминать. Слово это приходится слышать часто, а потому надо имѣть въ виду, что оно означаетъ тысячу милліоновъ въ устахъ обитателей однихъ странъ и милліонъ милліоновъ въ устахъ обитателей другихъ. Разсказываютъ по этому поводу о безпокойствѣ, а затѣмъ о «радости» французовъ, когда они заключали тяжелый миръ съ побѣдителями, нѣмцами. Рѣчь шла объ огромной контрибуціи въ пять «билліоновъ» франковъ, которую затребовали нѣмцы. Такъ какъ «билліонъ» у нѣмцевъ есть милліонъ милліоновъ (т. е. 10^{12}), а у французовъ онъ равенъ тысячѣ милліоновъ (10^9), то французы, говорятъ, переживали дни тяжелыхъ недоумѣній, пока отъ нѣмцевъ не была получена бумага, гдѣ **цифрами** (5 000 000 000), а не словами, была указана требуемая сумма. И оказалось, что побѣдители на этотъ разъ слово «билліонъ» приняли такъ, какъ понимается оно побѣжденными ими французами. Вотъ почему, пожалуй, было бы полезно разъ навсегда условиться принять вмѣсто слова «билліонъ» французское слово **милліардъ,** какъ названіе тысячи милліоновъ.

Въ наше время различнаго рода «милліардёровъ» слово «милліардъ» или «билліонъ» сдѣлалось привычнымъ и нисколько, вообще говоря, не поражаетъ обывательскаго ума. Нѣсколько иначе къ этому слову отнесется болѣе развитой математически умъ. Онъ скажетъ вамъ, напримѣръ, что отъ начала нашей эры, т. е. отъ Рождества Христова и до 10 час. 40 м. 29 апрѣля 1902 г. протекъ только билліонъ (милліардъ) минутъ.

Пытаясь сосчитать билліонъ (милліардъ $= 10^9$) спичекъ, считая по одной и предполагая, что надо употребить по секундѣ на спичку, занимаясь такимъ счетомъ по десяти часовъ въ сутки, окажется, что на этотъ процессъ счета придется употребить 76 лѣтъ!

Если взять билліонъ въ англійскомъ значеніи этого слова, т. е. милліонъ милліоновъ $= 10^{12}$, то можно привести еще болѣе разительный примѣръ, который данъ однимъ англійскимъ профессоромъ:

Если, говорить этотъ профессоръ,—Адамъ былъ сотворенъ за 4004 года до Р. Х. (библейская хронологія) и если бы онъ могъ считать непрерывно всѣ 24 часа въ сутки, и въ каждую секунду называть три послѣдовательныхъ числа, то, доживя до нашихъ дней, онъ сосчиталъ бы только немногимъ болѣе половины билліона въ англійскомъ смыслѣ этого слова...

Въ повседневномъ обиходѣ намъ приходится обыкновенно встрѣчаться со сравнительно небольшимъ числомъ какихъ-либо предметовъ или съ небольшимъ числомъ ихъ частей. Но въ наукѣ, вообще говоря, мы можемъ встрѣтиться съ числомъ какой угодно величины, чрезвычайно большой и чрезвычайно малой. Разстоянія неподвижныхъ звѣздъ, скорость свѣта, возрастъ вселенной и т. п. представляютъ примѣры весьма большихъ чиселъ, а размѣры атомовъ, продолжительность ихъ удара одного о другой суть примѣры величинъ другого, чрезвычайно малаго порядка. Но если написано число, съ большимъ количествомъ знаковъ, — скажемъ 15-ти-значное, 20-ти-значное и т. д. число, то нашъ умъ отказывается соединять съ такимъ числомъ какое-либо представленіе; и чтобы «объяснить», такъ сказать, это число, мы должны прибѣгать или къ какимъ либо такимъ новымъ единицамъ сравненія, какъ свѣтовой годъ, или къ инымъ какимъ либо пріемамъ иллюстраціи. Такъ, напр., если мы скажемъ, что въ каплѣ жидкости, висящей на концѣ острія булавки, заключается нѣсколько милліардовъ атомовъ, то это, конечно, дастъ намъ болѣе ясное представленіе о величинѣ атома, чѣмъ если бы мы написали дробь съ единицей въ числителѣ, а въ знаменателѣ ея огромное многозначное число.

Для поясненія величины нѣкоторыхъ чиселъ существуютъ цѣлые разсказы и даже легенды. Двадцатизначному числу, представляющему 64-ю степень 2 безъ единицы, особенно повезло въ этомъ отношеніи. Помимо легенды о браминѣ Сессѣ и повелителѣ Индіи Шеранѣ, разсказанной нами въ 1-й части этой книги, есть и такая иллюстрація этого числа, предлагаемая Оливеромъ Лоджемъ въ его «Легкой математикѣ».

«Страна, величиной съ Англію, была осаждена непріятельскимъ флотомъ, и ея обитателямъ грозила опасность умереть съ голоду, такъ какъ они не выращивали собственнаго зерна. При этихъ обстоятельствахъ капитанъ одного коммерческаго судна настойчивыми просьбами добился отъ непріятеля пропуска чрезъ блокаду, причемъ ему разрѣшено было провести шахматную доску, покрытую пшеницей, для его умирающей съ голоду жены и семьи: на первомъ квадратѣ должно было находиться одно зерно, на второмъ — два, на слѣдующемъ — четыре и т. д.

«Но когда непріятельскій адмиралъ сдѣлалъ необходимыя вычисленія при помощи одного японскаго моряка, случайно находившагося на борту, то оказалось, что зерна, которое онъ долженъ былъ пропустить, хватитъ не только, чтобы накормить, но чтобы задушить всѣхъ обитателей страны (Оказалось, что число зеренъ равно 18 446 744 073 709 551 615). Такимъ количествомъ зерна можно было бы покрыть всю землю слоемъ толщиной въ 4 метра.

«Тогда адмиралъ разрѣшилъ пропускъ лишь при томъ условіи, чтобы весь запасъ былъ провезенъ съ одного раза».

Слѣдуетъ замѣтить, впрочемъ, что въ очень многихъ случаяхъ при весьма большихъ числахъ не такъ важно точное численное опредѣленіе величины, какъ порядокъ этой величины. «Порядокъ же величины» опредѣляется просто числомъ цифръ, потребныхъ для ея обозначенія.

Задача 42-я.

Довольно большое число!

Съ помощью трехъ девятокъ написать возможно большое число?

Рѣшеніе.

Очень часто въ отвѣтъ на предложенный выше вопросъ пишутъ число 999, но это невѣрно. Точное рѣшеніе вопроса представитъ число:

$$9^{9^9}$$

Другими словами, 9 нужно помножить само на себя столько разъ сколько единицъ заключается въ числѣ 9^9. Но

$$9^9 = 387\ 420\ 489.$$

Итакъ, нужно произвести 387 420 489 умноженій девятки самой на себя, чтобы получить искомое число! Получится «довольно большое число». Но въ остроумной и талантливой книжечкѣ «Initiation mathématique» г. Лэзанъ (Laisant) рѣшительно не совѣтуетъ тратить время на отысканіе этого числа.

«Нѣтъ, рѣшительно не совѣтую вамъ,— говоритъ г. Лэзанъ, приниматься за эту задачу. Позвольте мнѣ вамъ сказать и повторите своимъ ученикамъ, которые позже фактически убѣдятся въ этомъ, что число 9^{9^9}, если бы его написать по десятичной системѣ, имѣло бы

369 692 128 цифръ.

«Чтобы написать его на бумажной лентѣ, предполагая, что каждая цифра займетъ 4 миллиметра въ длину, нужно было бы, чтобы эта лента имѣла

1478 километровъ, 772 метровъ, 40 сантиметровъ.

«Это немножко больше удвоеннаго разстоянія отъ Парижа въ Авиньонъ и обратно по желѣзной дорогѣ.

«Необходимое время, чтобы написать это число, полагая по секундѣ на цифру и работая по 10 часовъ въ день, не превысило бы 28 лѣтъ и 48 дней, съ условіемъ включить сюда всѣ воскресенья и всѣ праздники, т. е. не имѣть ни дня отдыха.

«Для большаго освѣдомленія могу вамъ сообщить, что первая цифра искомаго числа 2, а послѣдняя 9. Намъ остается, значитъ, найти не болѣе 369 692 126 цифръ. Вы подумаете, можетъ быть, что облегченіе довольно слабое, я то же думаю. Зато, надѣюсь, согласитесь, что заглавіе «Довольно большое число» поистинѣ оправдало себя...».

Задача 43-я.

Лавины.

Не такъ давно часто бывало (да и теперь это бываетъ), что русскій обыватель неожиданно получалъ письмо отъ неизвѣстнаго даже ему лица съ просьбой переписать присланное письмо въ 5, наприм., копіяхъ и разослать эти пять копій пяти различнымъ лицамъ съ такой же просьбой, т. е. чтобы получившіе въ свою очередь сдѣлали съ письма по 5 копій, разослали ихъ и т. д... Чаще всего подобнымъ образомъ распространяли разнаго сорта «молитвы», особенно приписываемыя покойному популярному протоіерею Іоанну Сергіеву (Кронштадтскому). Въ провинціи обыватели на письма такого сорта откликались довольно охотно, пока не надоѣло.

Не особенно давно также, быть можетъ, читателю приходилось встрѣчаться или слышать о ловкой рекламѣ какого-то продавца часовъ. Этотъ господинъ предлагалъ каждому желающему имѣть «даромъ» часы на слѣдующихъ условіяхъ: Продавецъ высылаетъ желающему талонъ съ 6-го отрѣзными купонами. Пусть получатель убѣдитъ шестерыхъ своихъ знакомыхъ взять по одному купону въ рубль. Деньги эти пересылаются продавцу, а тотъ немедленно за это получателю высылаетъ «даромъ» часы. Но въ свою очередь каждый купившій за 1 рубль купонъ получаетъ отъ продавца талонъ съ шестью купонами: пусть онъ убѣдитъ 6 своихъ знакомыхъ взять 6 купоновъ по 1 рублю, и тогда онъ получитъ тоже часы «даромъ». Въ свою очередь каждый изъ купившихъ купонъ получаетъ книжку съ 6-ю купонами, «убѣждаетъ» шесть своихъ знакомыхъ купить по купону въ 1 рубль, получаетъ часы и т. д...

Своеобразная реклама эта даетъ поводъ къ постановкѣ и рѣшенію слѣдующей интересной задачи, въ которой для большей разительности возьмемъ даже небольшія числа.

Пусть кто-либо пошлетъ три письма, обозначивъ каждое номеромъ 1; каждый получившій такое письмо въ свою очередь пусть пошлетъ по 3 копіи съ него, обозначая эти копіи номеромъ 2; каждый получившій эти копіи № 2-й въ свою очередь тоже пошлетъ по 3 копіи съ письма, обозначивъ ихъ номеромъ 3 и т. д... до тѣхъ поръ, пока номеръ разсылаемой копіи не достигнетъ какого либо опредѣленнаго числа, напр., 50. Предположимъ теперь, что каждый, кого просятъ, сдѣлаетъ это и пошлетъ по 3 копіи, предположимъ также, что письма всегда будутъ получать разныя лица, такъ что никто не получитъ письма дважды. Спрашивается, при какомъ номерѣ копіи каждый мужчина, женщина и ребенокъ на всей землѣ получитъ подобное письмо?

Рѣшеніе.

Пусть искомый номеръ копій будетъ x. Примемъ населеніе земного шара круглымъ счетомъ въ полтора милліарда, т. е. въ 1 500 000 000 человѣкъ. По условію задачи, это число должно получиться, какъ сумма членовъ ряда чиселъ

$$3,\ 3^2,\ 3^3, \ldots\ldots 3^x.$$

Рядъ этотъ есть геометрическая прогрессія изъ x членовъ съ знаменателемъ прогрессіи 3. Какъ извѣстно, сумма членовъ такой прогрессіи, S, выражается формулой

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}.$$

Значитъ, для нашей задачи имѣемъ:

$$\frac{3(3^x - 1)}{2} = 1\ 500\ 000\ 000.$$

Или

$$3^x - 1 = 1\ 000\ 000\ 000 = 10^9.$$

Полученное ур-іе $3^x - 1 = 10^9$ принадлежитъ къ виду такъ называемыхъ показательныхъ уравненій и рѣшается съ помощью логариѳмированія обѣихъ его частей. Для нашей цѣли, очевидно, будетъ совершенно безразлично, если мы пренебрежемъ входящей сюда единицей. Тогда логариѳмированіе даетъ:

$$x \lg 3 = \lg(10^9)$$

и

$$x = \frac{9}{\lg 3} = 18{,}86.$$

Полученное рѣшеніе доказываетъ, что если лавину писемъ указаннымъ въ задачѣ способомъ довести только до копій за № 19, то число писемъ уже превыситъ весь живущій на земномъ шарѣ человѣческій родъ!

Часовщикъ, о которомъ мы говорили выше, очевидно, имѣлъ понятіе о геометрическихъ прогрессіяхъ. Другой вопросъ, однако, насколько осуществимъ подобный способъ распространенія своихъ товаровъ и даже, насколько онъ добросовѣстенъ!

Насколько быстро увеличиваются числа въ геометрическихъ прогрессіяхъ, вы поймете также изъ слѣдующей главы.

Прогрессія размноженія.

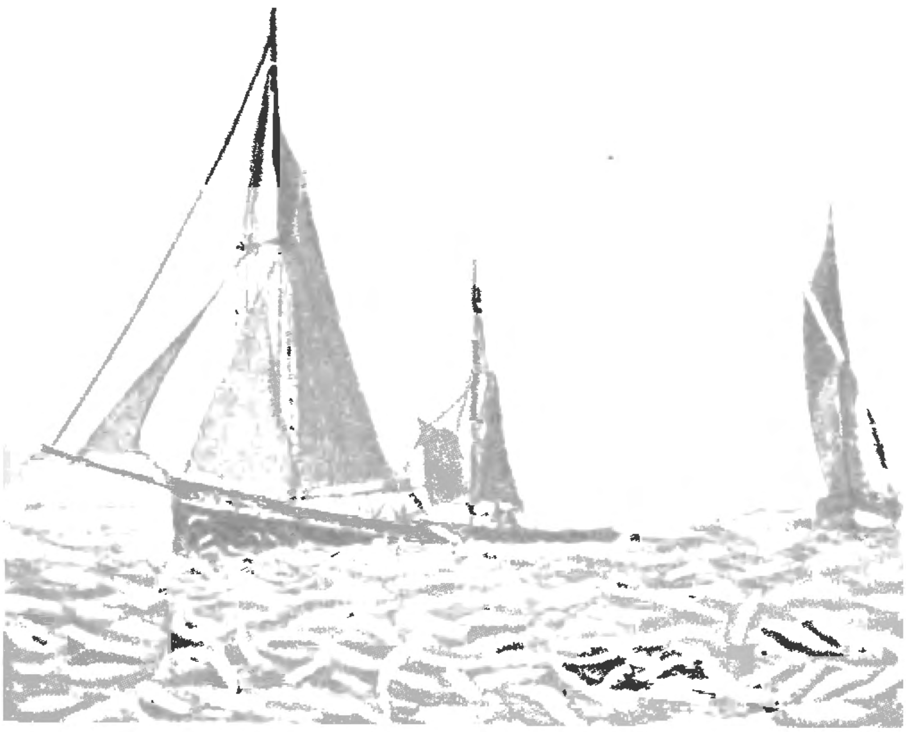
Думали ли вы когда нибудь, что представлялъ бы собой нашъ міръ, если бы въ немъ не было смерти, и всѣ живыя существа размножались бы безпрепятственно? Легко показать, что законъ геометрической прогрессіи размноженія привелъ бы такой міръ къ самому прискорбному состоянію, какое только можно себѣ вообразить. Въ какихъ-нибудь два-три десятилѣтія вся поверхность суши сплошь заростетъ непроходимыми дебрями растеній, въ которыхъ будутъ буквально кишѣть милліарды всевозможныхъ животныхъ, яростно пожирая другъ друга въ борьбѣ за мѣсто. Океанъ, вмѣсто воды, наполнится рыбой до того, что никакое судоходство не будетъ возможно, а воздухъ сдѣлается непрозраченъ отъ птицъ и насѣкомыхъ. Все это будетъ тѣснить другъ друга, безжалостно пожирая и уничтожая, такъ какъ для новыхъ пришельцевъ буквально не будетъ мѣста. Здѣсь будетъ непрерывный вопль и зубовный скрежетъ, и всѣ ужасы Дантова ада поблѣднѣютъ предъ такой картиной.

Цифры и вычисленія показываютъ, что въ такихъ мрачныхъ пророчествахъ нѣтъ ни тѣни преувеличенія. Если бы даже на земномъ шарѣ было первоначально одно растеніе, занимающее не болѣе квадратнаго фута почвы, то и для него вскорѣ не хватило бы мѣста, если бы смерть не уничтожала его потомства. Вообразимъ, что оно даетъ ежегодно всего 50 сѣмянъ — цифра небольшая, такъ какъ многія растенія (макъ, белена и друг.) даютъ ихъ тысячи и десятки тысячъ. Нѣтъ ничего легче, какъ разсчитать, что уже черезъ 9 лѣтъ такое растеніе сплошь покроетъ всѣ 50 милліоновъ квадратныхъ миль поверхности суши. Вотъ ходъ вычисленій, который каждый можетъ провѣрить:

			Число растеній.
Черезъ	1	годъ	$1 \times 50 =$ 50
»	2	года	$50 \times 50 =$ 2,500
»	3	»	$2{,}500 \times 50 =$ 125 000
»	4	»	6 250 000
»	5	»	312 500 000
»	6	»	15 625 000 000
»	7	»	781 250 000 000
»	8	»	39 062 500 000 000
»	9	»	1 953 125 000 000 000

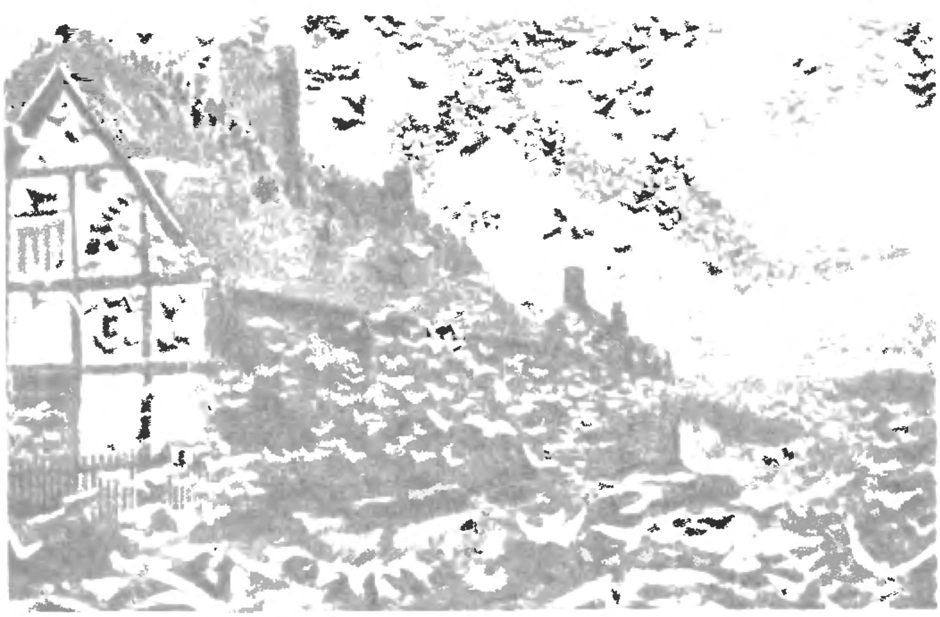
Число квадратныхъ футовъ поверхности твердой земли меньше и равно всего 1 421 798 400 000 000. Другими словами, менѣе чѣмъ въ девять лѣтъ растеніе сплошь покроетъ всю землю, и для дальнѣйшаго размноженія физически не будетъ мѣста. Но многія живыя существа размножаются гораздо быстрѣе, нежели взятое выше для примѣра растеніе. Обыкновенная муха въ теченіе одного лѣта дала бы — не будь въ мірѣ смерти — потомство ни мало ни много, какъ въ двадцать милліоновъ! А въ пять лѣтъ потомство ея выразилось бы умопомрачительнымъ числомъ, состоящимъ изъ 37 цифръ (32×10^{35}). Пауки не уступаютъ мухамъ въ этомъ отношеніи: каждый кладетъ сотни яицъ, и въ нѣсколько лѣтъ пара пауковъ населила бы землю не меньшимъ числомъ потомковъ, нежели муха,—если бы смерть не уничтожала 99% всѣхъ яичекъ. Еще быстрѣе размножаются тли (Aphis), которыя даютъ около 25 особей въ сутки. Въ какихъ-нибудь 10 дней эти легчайшія, эѳирныя созданія составили бы колоссальную гору тѣлъ, равную по вѣсу билліону людей!

Смерть уничтожаетъ ежегодно не менѣе трехъ четвертей всѣхъ рождающихся птицъ. Не будь этого, каждая пара птицъ въ 15—20 лѣтъ превратилась бы въ тысячи милліоновъ экземпляровъ; пара голубей уже въ 7 лѣтъ дала бы почти 10 милліоновъ птицъ. Рыбы размножаются не менѣе быстро, нежели обитатели воздушной стихіи. Треска на третьемъ году жизни мечетъ 9 000 000 икринокъ; легко разсчитать, что если бы всѣ икринки развивались безпрепятственно, то въ нѣсколько лѣтъ треска наполнила бы сплошь моря и сдѣлала бы невозможнымъ мореплаваніе.



Фиг. 78. *Прогрессія размноженія.* Потомство одной трески послѣ трехъ лѣтъ безпрепятственнаго размноженія: 40 милліоновъ особей.

Изъ наземныхъ существъ всего медленнѣе размножается слонъ, но и онъ въ 500 лѣтъ принесъ бы потомство въ 15 000 000 слоновъ. Но если бы всѣ звѣри безпрепятственно размножались, то ужасныя послѣдствія такого положенія вещей сказались бы, конечно, гораздо ранѣе, нежели черезъ столѣтіе:



Фиг. 79. *Прогрессія размноженія.* Потомство пары голубей послѣ семи лѣтъ безпрепятственнаго размноженія: 10 милліоновъ особей.

въ какихъ-нибудь два-три десятилѣтія крокодилы заполнили бы всѣ рѣки, медвѣди, тигры, волки стаями ходили бы по нашимъ городамъ и деревнямъ, и никакая культура не была бы возможна.

На прилагаемыхъ рисункахъ читатели найдутъ наглядное изображеніе тѣхъ фантастическихъ ландшафтовъ, которые появились бы на нашемъ земномъ шарѣ, если бы смерть хотя бы на время остановила регулирующую работу своей страшной косы. При всей фантастичности, рисунки эти имѣютъ, какъ мы видѣли, нѣкоторое реальное основаніе въ геометрической прогрессіи размноженія.

А человѣкъ? Въ настоящее время на всемъ земномъ шарѣ круглымъ счетомъ $1^1/_2$ милліарда людей; число же квадратныхъ футовъ твердой земли — въ милліонъ разъ болѣе. Полагая по футу на человѣка, мы имѣемъ, что если населеніе земного шара увеличится въ милліонъ разъ, то оно сплошь покроетъ всю сушу, какъ колосья въ полѣ. Какъ скоро наступило бы это, если бы не было естественной смерти? Статистика показываетъ, что средній процентъ рождаемости населенія равенъ $3^1/_2$. Капиталъ, положенный въ банкъ по $3^1/_2\%$ (сложныхъ), удваивается, какъ извѣстно, каждые 20 лѣтъ; тоже будетъ и съ населеніемъ. Сколько же такихъ удвоеній нужно, чтобы населеніе увеличилось въ милліонъ разъ? Рѣшивъ уравненіе

$$2^x = 1\,000\,000,$$

найдемъ, что x равно

$$\frac{\lg 1\,000\,000}{\lg 2} = \frac{6}{0{,}30103} = 19.$$

Другими словами, черезъ $20 \times 19 = 380$ лѣтъ люди сплошь покрыли бы всѣ материки и острова земного шара, не будь естественной смерти. А въ 2400-мъ году по Р. Х. вновь рождающіеся должны были бы уже помѣщаться на головахъ старшаго поколѣнія.

Такъ было бы, если бы люди были безсмертны. Но даже и при настоящихъ условіяхъ возростаніе населенія внушаетъ серьезныя опасенія за будущее. Естественный приростъ насе-

Фиг. 80. *Прогрессія размноженія.* Черезъ 50 лѣтъ безпрепятственнаго размноженія крокодилы заполнили бы всѣ рѣки земного шара. Даже въ Лондонѣ, у набережной Темзы, толпились бы тысячи крокодиловъ.

ленія въ европейскихъ странахъ колеблется отъ 1,8% (въ Россіи) до 0,36% (во Франціи). Принявъ за среднее 1%, легко вычислить, что населеніе будетъ удваиваться каждые 70 лѣтъ ($\log 2 : \log 1{,}01$). Если норма прироста останется неизмѣнной, то послѣ 19 удвоеній, т. е. менѣе, чѣмъ черезъ 1400 лѣтъ, населеніе увеличится въ 1 000 000 разъ, — и на нашей планетѣ не будетъ буквально ни одной пяди свободной земли.

Такова безпощадная прогрессія размноженія!

Задача 44-я.

Загадочная автобіографія.

Въ бумагахъ одного чудака-математика найдена была его автобіографія. Вотъ ея начало:

«Я окончилъ курсъ университета 44-хъ лѣтъ отъ роду. Спустя годъ, 100-лѣтнимъ молодымъ человѣкомъ, я женился на 34-лѣтней дѣвушкѣ. Незначительная разница въ нашихъ лѣтахъ,—всего 11 лѣтъ,—способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Черезъ небольшое число лѣтъ у меня была уже и маленькая семья въ 10 человѣкъ дѣтей. Жалованье я получалъ, положимъ, слишкомъ скромное,— всего 200 рублей въ мѣсяцъ. Изъ этого жалованья $^1/_{10}$ приходилось отдавать сестрѣ, такъ что мы со своей семьей жили на 130 р.» и т. д.

Предлагается объяснить: что за странныя и явныя противорѣчія получаются въ числахъ?

Рѣшеніе.

Разгадка заключается въ томъ, что математику пришла фантазія написать всѣ числа не по привычной и обычной для насъ системѣ счисленія, а по системѣ **пятеричной**, т. е. по такой системѣ, гдѣ въ основаніе положено число **пять**. Другими словами, — въ такой системѣ есть только цифры: 0, 1, 2, 3, 4, а число **5** изобразится уже цифрами **10**. Вступая «въ царство смекалки», слѣдуетъ разъ навсегда усвоить себѣ умѣнье писать числа не только по нашей десятичной системѣ съ десятью цифрами, но и по любой другой. Въ первой части этой книги, въ главѣ о *двоичной* системѣ, объ этомъ сказано вполнѣ достаточно, чтобы не повторяться. Впрочемъ, сейчасъ ниже мы даемъ указанія, какъ отъ десятичной системы счисленія переходить къ другой. Теперь же переведемъ языкъ загадочной автобіографіи на нашъ обыкновенный «десятичный» языкъ и тогда увидимъ, что дѣло объясняется просто:

Число, обозначенное въ автобіографіи черезъ 44, равно по десятичной системѣ: $4 \cdot 5 + 4 = 24$; другими словами, математикъ окончилъ курсъ университета по нашему счету въ 24 года. Точно такъ же:

100	соотвѣтствуетъ десятичному числу		25
35	»	$3 \cdot 5 + 4$	19
11	»	$1 \cdot 5 + 1 =$	6
200	»	$2 \cdot 5^2$	$= 50$
$\frac{1}{10}$	»	——	$\frac{1}{5}$
130	»	$5^2 + 3 \cdot 5 =$	40

Послѣ этого перевода на нашу десятичную систему всѣ видимыя противорѣчія загадочной автобіографіи исчезаютъ. Теперь ясно, что автобіографію чудака слѣдуетъ «по нашему» читать такъ: «я окончилъ курсъ университета *24 лѣтъ* отъ роду. Спустя годъ, *25-лѣтнимъ* молодымъ человѣкомъ, я женился на *19-лѣтней* дѣвушкѣ. Незначительная разница въ *6 лѣтъ* и т. д.

Для облегченія чтенія слѣдующей главы сдѣлаемъ здѣсь кстати указанія, какъ числа, написанныя по десятичной системѣ счисленія, писать въ иной системѣ.

Предположимъ, вы желаете число 25 написать по восьмиричной системѣ. Дѣлите 25 на 8 — получаете въ частномъ 3, въ остаткѣ 1. Это значитъ, что число ваше состоитъ изъ трехъ восьмерокъ и одной единицы; слѣдовательно начертаніе его по восьмеречной системѣ будетъ *31*.

Еще примѣръ: написать 267 по четверичной системѣ. Дѣлите 267 на 4, частное снова на 4 и т. д., запоминая каждый разъ остатки.

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
267 & 4 & & & \\
\mathbf{3} & 66 & 4 & & \\
 & \mathbf{2} & 16 & 4 & \\
 & & \mathbf{0} & 4 & 4 \\
 & & & 0 & \mathbf{1}
\end{array}$$

Итакъ:

$$267 = 4^4 + 2 \cdot 4 + 3.$$

Мы узнали, что наше число содержитъ три единицы, двѣ четверки (т. е. двѣ единицы второго разряда) и одну единицу пятаго разряда. Слѣдовательно, начертаніе его будетъ *10023*.

Новый родъ задачъ.

Задача 45-я.

Написать единицу тремя пятерками.

Рѣшеніе.

Задача состоитъ въ томъ, чтобы, пользуясь тремя 5-ками и какими угодно знаками математическихъ дѣйствій, написать выраженіе, равное единицѣ.

Если вы никогда не пробовали рѣшать подобныхъ задачъ, то вамъ не мало придется подумать, прежде чѣмъ вы нападете на одно изъ правильныхъ рѣшеній. Вотъ нѣкоторыя изъ рѣшеній предлагаемой задачи:

$$\left(\frac{5}{5}\right)^5 = 1, \text{ ибо } \frac{5}{5} = 1, \text{ а } 1^5 = 1.$$

$$\sqrt[5]{\frac{5}{5}} = 1, \text{ ибо } \frac{5}{5} = 1, \text{ а } \sqrt[5]{1} = 1.$$

$$5^{5-5} = 1, \text{ ибо } 5 - 5 = 0, \text{ а } 5^0 = 1.$$

$$(\lg_5 5)^5 = 1, \text{ ибо } \lg_5 5 = 1, \text{ а } 1^5 = 1.$$

$$\sqrt[5]{\lg_5 5} = 1, \text{ ибо } \lg_5 5 = 1, \text{ а } \sqrt[5]{1} = 1.$$

Можно пытаться найти и другія рѣшенія, кромѣ этихъ пяти. Ниже мы укажемъ систематическій пріемъ, пользуясь которымъ можно отыскивать **всѣ** рѣшенія этого типа.

Задача 46-я.

Написать нуль тремя пятерками.

Рѣшеніе.

Задача одного порядка съ предыдущей. Теперь уже читатель безъ труда сможетъ дать отвѣтъ

$$(5-5)^5 = 0, \text{ ибо } 5-5=0, \text{ а } 0^5=0.$$

Вотъ еще рѣшенія этой же задачи:

$$5\times(5-5);\quad \frac{5-5}{5};\quad \sqrt[5]{5-5};\quad \lg_5\frac{5}{5},\quad \lg_5\lg_5 5$$

Задача 47-я.

Написать 2 тремя пятерками.

Рѣшеніе.

$$\frac{5+5}{5}=2 \text{ и } \lg_5(5\times 5)=2.$$

Задача 48-я.

Написать 5 тремя пятерками.

Рѣшеніе.

Задача имѣетъ не менѣе десяти рѣшеній:

$$5+5-5;\quad 5\times\frac{5}{5};\quad 5^{\frac{5}{5}};\quad \frac{5}{5/5};\quad 5\lg_5 5;\quad 5^{\lg_5 5},\quad \sqrt[5]{5^5};\quad \lg_5 5^5;$$

$$\frac{5}{\lg_5 5};\quad \lg_{\sqrt[5]{5}} 5.$$

Задача 49-я.

Написать 31 пятью тройками.

Рѣшеніе.

Эта задача гораздо сложнѣе предыдущихъ. Она не нова, и обыкновенно считаютъ, что она имѣетъ всего три рѣшенія:

$$31 = 3^3 + 3 + \frac{3}{3}$$

$$31 = 33 \quad 3 + \frac{3}{3}$$

$$31 = 33 - \frac{3+3}{3}.$$

Однако, рѣшеній здѣсь гораздо больше. Мы остановимся подробнѣе на разсмотрѣніи этой задачи, попутно изложивъ методъ, съ которымъ слѣдуетъ приступать ко всѣмъ подобнымъ задачамъ.

Общее рѣшеніе.

Выразить какое-либо число посредствомъ пяти троекъ можно трояко. Во-первыхъ, соединяя тройки знаками математическихъ дѣйствій; во-вторыхъ, пользуясь, наряду съ знаками дѣйствій, еще приписываніемъ троекъ одна къ другой; либо же, наконецъ, пользуясь, наряду съ упомянутыми пріемами, различными математическими символами.

А. Разсмотримъ первый пріемъ. Прежде всего найдемъ всѣ числа, которыя могутъ получиться, какъ результатъ математическихъ дѣйствій надъ пятью тройками,—считая семь дѣйствій: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень, извлеченіе корня и логариѳмированіе.

Произведемъ сначала послѣдовательно семь дѣйствій надъ двумя тройками; получимъ рядъ изъ семи выраженій: $3+3$; $3-3$; 3×3; $\frac{3}{3}$; 3^3; $\sqrt[3]{3}$ и $\lg_3 3$. Для удобства обозначимъ этотъ рядъ римской цифрой I.

Сочетая по очереди каждое изъ выраженій этого ряда опять съ тройкой посредствомъ всѣхъ знаковъ дѣйствій, получимъ новый рядъ чиселъ. Этотъ II-ой рядъ будетъ заключать въ себѣ всѣ числа, которыя можно написать посредствомъ трехъ троекъ по разсматриваемому способу.

Наконецъ, сочетая такимъ же образомъ каждое изъ выраженій I ряда съ каждымъ изъ выраженій II ряда, получимъ всѣ числа, какія могутъ быть написаны пятью тройками съ помощью знаковъ дѣйствій.

Въ этой послѣдней таблицѣ мы ищемъ число 31, и находимъ его всего два раза:

$$31 = 3^3 + 3 + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3^3 + 3 + \lg_3 3.$$

Но такъ какъ число 31 можетъ быть написано и не по десятичной системѣ счисленія, то въ таблицѣ III мы ищемъ вообще число, равное $3a + 1$, гдѣ a — любое цѣлое число, могущее быть основаніемъ системы счисленія (но больше, чѣмъ 3, ибо въ троичной системѣ уже нѣтъ цифры 3). Другими словами, мы будемъ искать тѣ числа, которыя безъ единицы дѣлятся на три. Такимъ путемъ найдемъ, что число 31 посредствомъ пяти троекъ можетъ быть выражено слѣдующими способами.

По **четверичной** системѣ **счисленія** — два **рѣшенія:**

$$31 = 3 + (3 \times 3) + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3 + (3 \times 3) + \lg_3 3$$

По **6-еричной** системѣ — два **рѣшенія:**

$$31 = 3 \times (3 + 3) + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3 \times (3 + 3) + \lg_3 3.$$

По **8-ричной системѣ — два рѣшенія:**

$$31 = 3^3 - 3 + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3^3 - 3 + \lg_3 3.$$

По **9-ричной** системѣ:

$$31 = 3 \times 3 \times 3 + \frac{3}{3};\ 31 = 3 \times 3 \times 3 + \lg_3 3;$$

$$31 = 3^3 + 3^{3-3};\ 31 = 3^3 + (\lg_3 3)^3$$

$$31 = 3^3 + \sqrt[3]{\frac{3}{3}};\ 31 + 3^3 + \sqrt[3]{\lg_3 3}$$

$$31 = 3^3 + \left(\frac{3}{3}\right)^3 \text{ и друг.}$$

По **27-ричной системѣ — два рѣшенія:**

$$31 = 3 \times 3^3 + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3 \times 3^3 + \lg_3 3.$$

По 72-ричной системѣ — два рѣшенія:

$$31 = (3+3)^3 + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = (3+3)^3 + \lg_3 3.$$

По 243-ричной системѣ — четыре рѣшенія:

$$31 = (3 \times 3)^3 + \frac{3}{3};\ 31 = (3 \times 3)^3 + \lg_3 3;$$

$$31 = 3^{3+3} + \frac{3}{3};\ 31 = 3^{3+3} + \lg_3 3, \text{ и т. д.}$$

Словомъ, пользуясь объясненнымъ выше методомъ, можно получить всѣ рѣшенія этого типа. Между прочимъ, весьма интересно рѣшеніе такого вида:

$$31 = 3^{3^3} + \frac{3}{3} \text{ (т. е. } 3 \times 3^{26} + 1),$$

гдѣ число 31 написано по системѣ счисленія съ основаніемъ 3^{26}. На этомъ примѣрѣ отчетливо выступаетъ преимущество изложеннаго метода: едва ли кому-нибудь пришло бы въ голову это рѣшеніе, если бы онъ не улавливалъ его сѣтями систематическаго метода.

Намъ остается разсмотрѣть остальные два пріема.

B. Приписываніе троекъ одна къ другой даетъ слѣдующія рѣшенія:

$$31 = 33 - 3 + \frac{3}{3};\ 31 = 33 - 3 + \lg_3 3$$

$$31 = 33 - \frac{3+3}{3} \text{ и } 31 = 33 - \lg_3 (3 \times 3).$$

Эти рѣшенія вѣрны при *всякой* системѣ счисленія.

Изъ другихъ рѣшеній этого типа весьма интересны слѣдующія—по 4-ричной системѣ:

$$31 = 3 \times 3,(3) + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3 \times 3,(3) + \lg_3 3.$$

Здѣсь выраженіе 3,(3) означаетъ «три цѣлыхъ и три въ періодѣ» и равно, по 4-ричной системѣ, $3\frac{3}{3}$, т. е. 4.

C. Этотъ способъ, т. е. пользованіе всевозможными математическими символами знаками факультета (!), знаками тригонометрическихъ функцій и круговыхъ (sin., arcsec. и т. д.), знакомъ π, производной ($'$), дифференціала (d), интеграла ($\int$), символами теоріи соединеній (A — число размѣщеній, P — перестановокъ, C — сочетаній) и т. п. — открываетъ безпредѣльное поле изобрѣтательности рѣшающаго. Приводить эти рѣшенія мы не станемъ, такъ какъ въ сочетаніи съ предыдущими двумя этотъ пріемъ даетъ задачѣ неопредѣленное множество рѣшеній. Отдѣльные же примѣры подыскать очень легко, и мы на нихъ останавливаться не удемъ.

Сто тысячъ за доказательство теоремы.

Осенью 1907 года въ Дармштадтѣ скончался математикъ Пауль Вольфскель (Wolfskehl), оставившій не совсѣмъ обычное завѣщаніе: капиталъ въ 100,000 марокъ онъ завѣщалъ тому, кто докажетъ одну теорему изъ теоріи чиселъ, теорему, извѣстную подъ названіемъ «великой теоремы (или великаго предложенія) Ферма».

Теорема, за доказательство которой предлагается такой огромный гонораръ, очень проста и можетъ быть изложена въ немногихъ словахъ: сумма одинаковыхъ степеней двухъ цѣлыхъ чиселъ не можетъ быть тою же степенью третьяго цѣлаго числа, если степень больше двухъ. Другими словами, уравненіе:

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрѣшимо въ цѣлыхъ числахъ, если $n > 2$.

Для случая, когда $n = 2$, такое уравненіе разрѣшимо (это такъ называемая задача о Пиѳагоровыхъ треугольникахъ, разсмотрѣнныхъ нами при рѣшеніи задачи 10-ой).

Но вамъ никогда не удастся подобрать такія два числа, чтобы сумма ихъ кубовъ была бы тоже кубомъ, или сумма 4-тыхъ степеней была бы сама 4-ой степенью, и т. д.

Въ этомъ и состоитъ теорема, именуемая «великимъ предложеніемъ Ферма». Какъ ни проста она съ виду, но строгаго доказательства ея въ математикѣ еще не существуетъ.

Не мало великихъ математиковъ въ свое время трудилось надъ доказательствомъ этой неподатливой теоремы, высказанной Ферма болѣе двухъ съ половиной вѣковъ тому назадъ, и никому еще не удалось найти общее, строгое ея доказательство для всѣхъ степеней выше второй. И если теперь искомое доказательство оцѣнено такой огромной суммой, то оно вполнѣ заслужило это за свою упорную неуловимость для самыхъ сильныхъ математическихъ умовъ.

Нельзя сказать, чтобы это доказательство было очень ужъ важно для науки. Гауссъ, одинъ изъ величайшихъ математиковъ всѣхъ временъ, относился къ теоремѣ Ферма довольно пренебрежительно. «Признаюсь—писалъ онъ своему пріятелю—что Ферматова теорема, какъ изолированное предложеніе, для меня большого интереса не представляетъ, ибо легко можно придумать множество подобныхъ предложеній, которыхъ нельзя ни доказать, ни опровергнуть».

И, тѣмъ не менѣе, лучшіе математики (да и самъ Гауссъ) бились надъ ея доказательствомъ. Конечно, дѣлалось это неспроста: Ферматова теорема имѣетъ свою крайне любопытную исторію. Она, можно сказать, прямо заинтриговала математиковъ.

Ея авторъ, Пьеръ Ферма (Fermat, 1601—1665), юристъ по по профессіи, совѣтникъ Тулузскаго парламента по положенію, поэтъ и ученый въ душѣ—занимался математикой лишь между прочимъ, для развлеченія. Это не мѣшало, однако, ему сдѣлать цѣлый рядъ огромной важности открытій, справедливо окруживших его славой геніальнаго математика. Онъ почти не печаталъ своихъ трудовъ, а сообщалъ ихъ въ письмахъ къ своимъ друзьямъ, среди которыхъ были такіе ученые, какъ оба Паскаля, Роберваль, Декартъ, Гюйгенсъ и др. Цѣлый рядъ теоремъ изъ области теоріи чиселъ разбросанъ этимъ геніальнымъ диллетантомъ... на поляхъ одной греческой книги! Впрочемъ, авторомъ сочиненія, которому посчастливилось служить записной книжкой для Ферма, былъ никто иной, какъ не менѣе знаменитый александрійскій математикъ Діофантъ, также занимавшійся теоріей чиселъ [1]). Многія изъ теоремъ, найденныхъ

---

[1]) О жизни этой загадочной личности намъ извѣстно очень мало. Невозможно даже съ точностью установить вѣкъ, когда онъ жилъ; съ увѣренностью можно указать лишь на промежутокъ времени отъ 180 г. до Р. Х. до 370 г. послѣ Р. Хр.

Ферма, записывались имъ безъ доказательствъ. Эти доказательства такъ до насъ и не дошли. Но впослѣдствіи всѣ его теоремы были строго доказаны позднѣйшими математиками, всѣ, кромѣ одной,—той самой, о которой у насъ сейчасъ идетъ рѣчь.

Упомянутая замѣтка на поляхъ книги Діофанта написана противъ того мѣста текста, гдѣ александрійскій математикъ трактуетъ о разложеніи полнаго квадрата на сумму двухъ квадратовъ. Вотъ буквальный переводъ того, что Ферма записалъ сбоку, на поляхъ:

«Между тѣмъ, совершенно невозможно разложить полный кубъ на сумму двухъ кубовъ, четвертую степень на сумму двухъ четвертыхъ степеней, вообще какую либо степень на сумму двухъ степеней съ тѣмъ же показателемъ. Я нашелъ поистинѣ удивительное доказательство этого предложенія, но здѣсь слишкомъ мало мѣста, чтобы его помѣстить».

Въ чемъ состояло это «поистинѣ удивительное» доказательство,—никто теперь не знаетъ. Но въ то же время ни одинъ математикъ не сомнѣвается, что такое доказательство дѣйствительно было найдено Ферма, и что оно было вѣрно. Не таковъ былъ человѣкъ Пьеръ Ферма, чтобы покривить душой, и не таковъ онъ былъ математикъ, чтобы ошибаться. Вѣдь всѣ другія теоремы, высказанныя имъ безъ доказательства, были доказаны позднѣйшими математиками. Такова, напримѣръ, теорема: «каждое простое число вида $4n+1$ есть сумма двухъ квадратовъ». Она дана была Ферма безъ доказательства, но сто лѣтъ спустя Эйлеръ нашелъ—довольно сложное и трудное—доказательство ея.

Кажущееся исключеніе, бросающее, повидимому, тѣнь на репутацію Ферма, какъ непогрѣшимаго теоретика чиселъ, составляетъ слѣдующій случай. Ферма высказалъ теорему, что всякое число вида:

$$2^{2^n}+1$$

есть простое число. Въ теченіе цѣлаго столѣтія не возникало сомнѣній въ ея правильности. Но вотъ другой геній теоріи чиселъ, Эйлеръ, доказалъ, что теорема вѣрна лишь для $n < 32$, и что уже при $n = 32$ получается число:

$$4\ 294\ 967\ 297,$$

которое не простое, а составное, ибо дѣлится безъ остатка на 641.

Однако это не только не подрываетъ вѣры въ добросовѣстность Ферма, но, напротивъ, скорѣе даже утверждаетъ ее. Дѣло въ томъ, что и самъ Ферма сомнѣвался въ абсолютной вѣрности этой теоремы и откровенно заявлялъ, что ему еще не удалось дать исчерпывающее доказательство ея. «Доказательство очень кропотливо—говоритъ онъ—и долженъ признаться, что я еще не довелъ его до удовлетворительнаго завершенія».

Послѣ этого едва ли можно еще сомнѣваться въ томъ, что Ферма дѣйствительно доказалъ свое «великое предложеніе». А если такъ, то вполнѣ возможно, что кому-нибудь посчастливится подыскать доказательство этой теоремы и сдѣлаться обладателемъ кругленькой суммы въ 100,000 марокъ.

Маленькая историческая справка покажетъ, впрочемъ, что эти 100,000 едва ли попадутъ въ руки зауряднаго математика. Вотъ краткій перечень того, что̀ уже сдѣлано въ этомъ направленіи.

Прежде всего легко доказать, что если теорема справедлива для показателя n, то она справедлива также и для всякаго другого показателя, кратнаго n. Значитъ, все дѣло въ томъ, чтобы доказать справедливость теоремы для всякого **простого** показателя. Для суммы кубовъ теорема доказана была еще древними арабами. Для $n = 4$ ее доказалъ Эйлеръ. Для $n = 5$—доказали Гауссъ и Дирихле. Для $n = 7$—доказалъ Ламе. Наконецъ Куммеръ доказалъ ее для всякаго показателя, меньшаго 100.

Такимъ образомъ, для многихъ **частныхъ случаевъ** теорема Ферма доказана. Но у Ферма было **общее** доказательство ея, для всякаго n, и это-то общее доказательство требуется найти. При этомъ достойно быть отмѣчено, что многіе позднѣйшіе математики (Эйлеръ, Куммеръ), доказывая частныя случаи Ферматовой теоремы, пользуются такими пріемами, которые далеко выходятъ за предѣлы элементарной математики и **которые самому Ферма не могли быть извѣстны**. Очевидно, геніальный французскій математикъ шелъ какимъ-то совершенно особымъ путемъ, ускользнувшимъ изъ поля зрѣнія позднѣйшихъ математиковъ.

Прежде чѣмъ кончить эту главу, считаемъ не лишнимъ сказать нѣсколько словъ по поводу слуховъ о томъ, будто «великое предложеніе Ферма» доказано недавно русскимъ реалистомъ. Въ ноябрѣ 1908-го года всѣ русскія газеты облетѣло телеграфное извѣстіе, что «юному бѣлостокскому реалисту Ч. посчастливилось доказать такъ наз. великое предложеніе Ферма» [1]). Газеты прибавляли даже, что доказательство это одобрено спеціальной конференціей Петербургской Академіи Наукъ. Опроверженій со стороны Академіи Наукъ не послѣдовало, и такъ какъ слухъ затѣмъ заглохъ, то у широкихъ круговъ общества такъ и осталось убѣжденіе, что наслѣдство Вольфскеля перешло къ бѣлостокскому реалисту.

Ученый лѣсоводъ Я. И. Перельманъ любезно сообщилъ намъ по этому поводу свѣдѣнія изъ первыхъ рукъ. Вскорѣ послѣ опубликованія въ иностранной печати завѣщанія Вольфскеля—осенью 1907 года—г. Перельманъ помѣстилъ небольшую статью о Ферматовой теоремѣ и стотысячной преміи въ журналѣ «Природа и Люди». Наружная простота самой теоремы и перспектива полученія цѣлаго капитала сдѣлали то, что теорема сразу же стала извѣстна въ большой публикѣ, и многіе тысячи любителей засѣли за отысканіе неуловимаго доказательства. Въ редакцію журнала полетѣли запросы объ адресѣ того нѣмецкаго научнаго общества, которое присуждаетъ преміи (**Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften**). Сотни людей утверждали, что они уже нашли требуемое доказательство и боятся лишь, какъ бы другіе ихъ не упредили и не перехватили причитающіяся имъ сто тысячъ марокъ.

И вотъ, въ разгарѣ всей этой «математической лихорадки» появляется въ газетахъ слухъ объ упомянутомъ выше бѣлостокскомъ реалистѣ Ч. и объ одобреніи его доказательства Академіей Наукъ. Редакція названнаго журнала наводитъ справку въ Академіи Наукъ и получаетъ отвѣтъ, что «сообщеніе о г. Ч. предста-

[1]) «Русское Слово» 25. XI. 1908.

вляется явнымъ недоразумѣніемъ». Дѣло обстояло такъ. Г. Ч. изъ Бѣлостока, дѣйствительно, послалъ въ Академію Наукъ свое «доказательство» Ферматовой теоремы и, дѣйствительно, получилъ отъ непремѣннаго секретаря Академіи отвѣтъ, который юный математикъ принялъ, по наивности, за одобреніе его доказательства. Вотъ текстъ этого отвѣта:

«Имѣю честь, по порученію Конференціи Императорской Академіи Наукъ, сообщить Вамъ, что присланное Вами рукописное доказательство теоремы Фермата передано въ I Отдѣленіе Библіотеки Академіи.

«Пересылка сего доказательства въ Геттингенъ не представляется возможною, ибо на премію, о которой Вы упоминаете, работы не могутъ быть представляемы авторами, а отмѣчаются самою Комиссіею, присуждающею премію. Примите и проч.».

Не зная, что Академія по уставу обязана хранить въ своей библіотекѣ всякую поступившую въ нее книгу или рукопись, молодой математикъ и окружающіе его поняли бумагу, вѣроятно, въ томъ смыслѣ, что Академія, очевидно, одобрила доказательство, разъ она постановила хранить его въ библіотекѣ (Между тѣмъ, Академія даже не разсматривала его по существу). Отсюда и пошелъ упомянутый сенсаціонный слухъ.

Думаемъ, что еще не мало лѣтъ пройдетъ, прежде чѣмъ придется тронуть капиталъ, завѣщанный нѣмецкимъ математикомъ, а впрочемъ,—кто знаетъ!.. Во всякомъ случаѣ читатель не потеряетъ времени даромъ, въ смыслѣ расширенія своихъ математическихъ познаній и навыковъ, если внимательно займется знаменитой задачей Ферма.

Изъ области изученія чиселъ.

Задача 50-я.

Быстрое возвышеніе въ квадратъ.

Существуетъ очень простой пріемъ для устнаго быстраго возвышенія въ квадратъ двузначныхъ чиселъ, оканчивающихся на 5:

Нужно цифры десятковъ умножить на ближайшее высшее число и къ произведенію приписать 25.

Такъ, напр., $35^2 = 1225$, т. е. 25 приписано къ произведенію 3×4; $85^2 = 7225$, т. е. 25 приписано къ произведенію 8×9, и т. п.

Доказательство.

Нетрудно объяснить, на чемъ основанъ этотъ пріемъ. Всякое число, оканчивающееся на 5, можно выразить черезъ $10a + 5$, гдѣ a — число десятковъ. Квадратъ этого числа выразится черезъ

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10a + 25 = 100a^2 + 100a + 25.$$

Вынеся $100a$ за скобки, имѣемъ

$$100a\ (a + 1) + 25,$$

или

$$a(a + 1) \cdot 100 + 25.$$

Отсюда ясно, что нужно число десятковъ a умножить на ближайшее высшее число $(a + 1)$, и къ результату *приписать* 25.

Тѣмъ же пріемомъ можно пользоваться и не для однихъ двузначныхъ чиселъ, — но, конечно, въ этомъ случаѣ не всегда легко производить нужное перемноженіе въ умѣ. Но и при умноженіи на бумагѣ пользованіе этимъ пріемомъ создаетъ экопомію во времени. Такъ $105^2 = 11025$ (т. е. 25 приписано къ произведенію 10×11).

$$125^2 = 15625;$$
$$335 = 112225 \text{ и т. п.}$$

Особенные случаи умноженія.

Нѣкоторыя особенности чиселъ находятся въ прямой зависимости отъ принятой нами десятичной системы ихъ обозначенія. Онѣ легко запоминаются, интересны и могутъ пригодиться для практическихъ и теоретическихъ приложеній. Къ числу важнѣйшихъ изъ нихъ относится сумма цифръ всѣхъ чиселъ, получаемыхъ въ таблицѣ умноженія на 9.

$$9 \times 1 = 9$$
$$9 \times 2 = 18;\ 1 + 8 = 9$$
$$9 \times 3 = 27;\ 2 + 7 = 9$$
$$9 \times 4 = 36;\ 3 + 6 = 9$$
$$9 \times 5 = 45;\ 4 + 5 = 9$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$9 \times 9 = 81;\ 8 + 1 = 9$$
$$9 \times 10 = 90;\ 9 + 0 = 9$$
$$9 \times 11 = 99;\ 9 + 9 = 18;\ 1 + 8 = 9$$
$$9 \times 12 = 108;\ 1 + 0 + 8 = 9$$
$$9 \times 13 = 117;\ 1 + 1 + 7 = 9$$

и т. д.

Вотъ нѣсколько интересныхъ образчиковъ умноженій, которые легко удерживаются въ памяти, благодаря своему внѣшнему виду.

$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1\,111$$
$$1\,234 \times 9 + 5 = 11\,111$$
$$12\,345 \times 9 + 6 = 111\,111$$
$$123\,456 \times 9 + 7 = 1\,111\,111$$
$$1\,234\,567 \times 9 + 8 = 11\,111\,111$$
$$12\,345\,678 \times 9 + 9 = 111\,111\,111$$

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8\,888$$
$$9\,876 \times 9 + 4 = 88\,888$$
$$98\,765 \times 9 + 3 = 888\,888$$
$$987\,654 \times 9 + 2 = 8\,888\,888$$
$$9\,876\,543 \times 9 + 1 = 88\,888\,888$$
$$98\,765\,432 \times 9 + 0 + 888\,888\,888$$

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1\,234 \times 8 + 4 = 9\,876$$
$$12\,345 \times 8 + 5 = 98\,765$$
$$123\,456 \times 8 + 6 = 987\,654$$
$$1\,234\,567 \times 8 + 7 = 9\,876\,543$$
$$12\,345\,678 \times 8 + 8 = 98\,765\,432$$
$$123\,456\,789 \times 8 + 9 = 987\,654\,321$$

Число, состоящее изъ всѣхъ значащихъ цифръ кромѣ 8, написанныхъ въ послѣдовательномъ порядкѣ при умноженіи на 8, а также на 9 и числа кратныя 9 (18, 27, 36 и т.) даетъ нижеслѣдующіе интересные и легко запоминаемые результаты:

$$12\,345\,679 \times 8 = 98\,765\,432$$
$$12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111$$
$$12\,345\,679 \times 18 = 222\,222\,222$$
$$12\,345\,679 \times 27 = 333\,333\,333$$
$$12\,345\,679 \times 36 = 444\,444\,444$$
$$12\,345\,679 \times 45 = 555\,555\,555$$
$$12\,345\,679 \times 54 = 666\,666\,666$$
$$12\,345\,679 \times 63 = 777\,777\,777$$
$$12\,345\,679 \times 72 = 888\,888\,888$$
$$12\,345\,679 \times 81 = 999\,999\,999$$

Девять.

Интересныя свойства числа 9 часто примѣняюся въ ариѳметикѣ какъ для теоретическихъ изысканій и практическихъ дѣйствій, такъ и для составленія различныхъ занимательныхъ задачъ, или такъ называемыхъ «головоломокъ». Въ отдѣлѣ «Угадыванье чисель» въ первой части настоящей книги мы уже широко пользовались девяткой. Распространено также практическое примѣненіе девятки для повѣрки умноженія и дѣленія. Основано оно на томъ свойствѣ всякаго числа, что остатокъ, получаемый отъ дѣленія числа на девять, всегда равенъ остатку отъ дѣленія на 9 суммы цифръ этого числа. Укажемъ здѣсь еще нѣсколько интересныхъ примѣненій этого числа.

Прежде всего нетрудно убѣдиться, что если мы напишемъ произвольное двузначное число, а затѣмъ напишемъ цифры этого же числа въ обратномъ порядкѣ и возьмемъ разность полученныхъ чиселъ, то эта разность всегда раздѣлится на 9.

Наприм. $72-27=45$; $92-29=63$, $63-36=27$ и т. д. Вообще ясно, что $(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)$, т. е. получается число, дѣлящееся на 9 (Кромѣ того разность эта равна произведенію 9 на разность цифръ даннаго двузначнаго числа).

Знаніе этой особенности можетъ принести практическую пользу, напр., многимъ бухгалтерамъ. Въ двойной бухгалтеріи случаются иногда ошибки, происходящія отъ перестановки цифръ въ числахъ. Такъ, напр., бухгалтеръ можетъ вписать въ сторону, скажемъ, «дебета»: 4 р. 38 к., а въ «кредитѣ» по ошибкѣ поставить 4 р. 83 к., т. е. число, состоящее изъ тѣхъ же цифръ, но двѣ изъ нихъ переставлены. Если другихъ ошибокъ нѣтъ, то при подведеніи баланса между дебетомъ и кредитомъ всегда будетъ выходить такая разница, которая дѣлится на 9. Обративъ на это вниманіе, бухгалтеръ тотчасъ долженъ справиться, не перепутаны ли гдѣ цифры.

Задача 51-я.

Попросите кого-либо написать какое угодно число изъ трехъ цифръ, но только такое, чтобы крайнія цифры были различны. Пусть потомъ онъ возьметъ это число наоборотъ, т. е. переставитъ въ немъ крайнія цифры, и вычтетъ одно число изъ другого. Полученная разность всегда дѣлится на 9, и вы можете всегда сказать впередъ, каково будетъ частное.

Рѣшеніе.

Напримѣръ, если взято сначала число 845, то $845-548=$ $=297$; $297:9=33$, т. е. *разницѣ между первой и послѣдней цифрой взятаго числа, умноженной на 11.*

Чтобы доказать это правило для всякого трехзначнаго числа, въ которомъ первая и послѣдняя цифра различны, обозначимъ черезъ a, b и c соотвѣтственно цифры сотенъ, десятковъ и единицъ числа. Тогда взятое число есть

$$100a+10b+c$$

а написанное наоборотъ:

$$100c+10b+a$$

Вычитая одно изъ другого и дѣля на 9, имѣемъ:

$$\frac{100a+10b+c-(100c+10b+a)}{9}=\frac{99\,(a-c)}{9}=11\,(a-c).$$

Итакъ, какое бы трехзначное число ни написалъ кто-либо, вы, взявъ разность между крайними цифрами и помноживъ ее на 11, тотчасъ говорите частное, которое получится отъ дѣленія на 9 разности между взятымъ числомъ и тѣмъ же числомъ, написаннымъ наоборотъ.

Предыдущую задачу можно предложить въ еще болѣе занимательномъ, въ особенности для дѣтей, варіантѣ.

Напишите на бумажкѣ число 1089, вложите бумажку въ конвертъ и запечатайте его. Затѣмъ скажите кому-либо, давъ ему этотъ конвертъ, написать на немъ въ рядъ три любыя цифры, но такія, чтобы крайнія изъ нихъ были различны и разнились бы между собой болѣе, чѣмъ на единицу. Пусть затѣмъ это число онъ напишетъ наоборотъ и вычтетъ изъ большаго меньшее. Получится нѣкоторое число. Пусть подъ этимъ числомъ онъ подпишетъ его же, но наоборотъ, т. е. переставивъ крайнія цифры, и сложитъ оба числа. Когда онъ получитъ сумму, предложите ему вскрыть конвертъ. Тамъ онъ найдетъ бумажку съ числомъ 1089, которое, къ его удивленію, и есть точь-въ-точь полученное имъ число.

Напримѣръ: Пусть онъ напишетъ 713; взявъ наоборотъ, получаемъ 317; $713-317=396$; $396+693=1089$. Тотъ же результатъ получится, какъ легко видѣть, и для всякаго такого 3-значнаго числа, въ которомъ первая и послѣдняя цифры различны, и разность этихъ цифръ больше единицы.

Болѣе распространены слѣдующія три «головоломки» съ числомъ 9. Всѣ онѣ основаны на томъ, что остатокъ, получаемый при дѣленіи числа на 9, всегда равенъ остатку, получаемому отъ дѣленія на 9 суммы цифръ этого числа.

Задача 52-я.

Возьмите, не говоря мнѣ ничего, любое двузначное число, переставьте въ немъ цифры и вычтите большее число изъ меньшаго. Скажите теперь мнѣ только одну цифру полученной разности, и я скажу вамъ тотчасъ другую.

Рѣшеніе.

Если кто скажетъ вамъ любую одну цифру, то другая будетъ дополнительная сказанной до 9-ти. Такъ что, если кто-либо скажетъ вамъ послѣ того, какъ вычтетъ одно число изъ другого, что одна цифра разности 6, то вы тотчасъ ему говорите, что другая есть 3 и т. д... Доказательство этого настолько легко, что читатель справится съ нимъ самъ безъ затрудненій.

Задача 53-я.

Возьмите, не говоря ничего мнѣ, число изъ трехъ или болѣе цифръ, раздѣлите его на 9 и скажите мнѣ только остатокъ, который получится отъ такого дѣленія. Зачеркните теперь во взятомъ вами числѣ какую-либо цифру (но не нуль) и опять скажите мнѣ остатокъ отъ дѣленія на 9 числа, полученнаго послѣ зачеркиванья цифры, и я тотчасъ назову зачеркнутую вами цифру.

Рѣшеніе.

Изъ перваго остатка надо вычесть второй остатокъ, если же онъ больше, то къ первому остатку надо прибавить девять и изъ полученной суммы вычесть 2-й остатокъ, тогда всегда и получится зачеркнутая цифра. Читатель легко можетъ доказать это самъ.

Задача 54-я.

Напишите число съ пропущенной цифрой, и я тотчасъ вставлю туда такую цифру что число точно раздѣлится на 9.

Рѣшеніе.

Пусть, напримѣръ, кто либо напишетъ съ пропускомъ рядъ цифръ 728 57. Тогда, отбрасывая отъ суммы цифръ всѣ девятки, какія возможно, получаемъ въ остаткѣ 2, но $9-2=7$. Значитъ на пустое мѣсто надо поставить цифру 7. Доказательство очевидно.

Задачу эту, какъ и предыдущія, можно всячески разнообразить.

Нѣкоторые числовые курьезы.

Въ главѣ о нѣкоторыхъ особенныхъ случаяхъ умноженія мы уже показали, что легко получить и запомнить результаты нѣкоторыхъ перемноженій. Очень легко также запомнить квадраты такихъ чиселъ, какъ 11, 111, 1 111 и т. д. А именно:

$$11^2=121;\ 111^2=12\,321;\ 1\,111^2=1\,234\,321;\ \text{и т. д.}$$

Нетрудно убѣдиться, что эти полученныя отъ возвышенія въ квадратъ числа: 121, 12 321, 1 234 321, 123 454 321 и т. д. въ въ свою очередь отличаются любопытными свойствами. Такъ, разсматривая сумму ихъ цифръ, замѣчаемъ прежде всего, что

$$1+2+1=4=2^2$$
$$1+2+3+2+1=9=3^2$$
$$1+2+3+4+3+2+1=16=4^2$$
$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=25=5^2$$

и т. д. (Ср. задачу о пиѳагорейскомъ кругѣ, стр. 23).

Кромѣ того каждое изъ этихъ чиселъ можно представить въ видѣ нижеслѣдующихъ интересныхъ по формѣ неправильныхъ дробей:

$$121=\frac{22\times22}{1+2+1};\quad 12\,321=\frac{333\times333}{1+2+3+2+1};$$

$$1\,234\,321=\frac{4\,444\times4\,444}{1+2+3+4+3+2+1};$$

$$123\,454\,421=\frac{55\,555\times55\,555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}$$

и т. д.

О числахъ 37 и 41.

Число 37 обладаетъ многими любопытными свойствами. Такъ, умноженное на 3 и на числа кратныя 3 (до 27 включительно), оно даетъ произведенія, изображаемыя одной какой-либо цифрой:

$37\times3=111$; $37\times6=222$; $37\times9=333$; $37\times12=444$; $37\times15=555$; $37\times18=666$; $37\times21=777$; $37\times24=888$; $37\times27=999$.

Произведеніе отъ умноженія 37 на сумму его цифръ равняется суммѣ кубовъ тѣхъ же цифръ, т. е.:

$$37\times(3+7)=3^3+7^3=370.$$

Если въ числѣ 37 взять сумму квадратовъ его цифръ и вычесть изъ этой суммы произведеніе тѣхъ же цифръ, то опять получимъ 37:

$$(3^2+7^2)-3\cdot 7=37.$$

Но едва ли не самымъ интереснымъ свойствомъ числа 37 является то, что нѣкоторыя кратныя ему числа при круговой перестановкѣ входящихъ въ нихъ цифръ даютъ опять-таки числа кратныя 37. Наприм.:

$$259=7\times 37$$
$$592=16\times 37$$
$$925=25\times 37.$$

То же самое вѣрно относительно чиселъ 185, 518, 851 и чиселъ 296, 629, 962. Всѣ эти числа состоятъ изъ тѣхъ же цифръ, только переставляемыхъ въ круговомъ порядкѣ, и всѣ они кратны 37.

Подобнымъ же свойствомъ отличаются и нѣкоторыя числа кратныя 41. Такъ, числа:

17 589; 75 891; 58 917; 89 175 и 91 758,

какъ легко провѣрить, всѣ кратны 41 и каждое получается изъ предыдущаго путемъ только одной круговой перестановки входящихъ въ число цифръ.

Числа 1375, 1376 и 1377.

Написанныя выше три *послѣдовательныхъ* числа, *кажется,* суть наименьшія изъ такихъ, что каждое дѣлится на кубъ нѣкотораго числа, отличнаго отъ единицы: 1 375 дѣлится на 5^3 1 376 на 2^3 и 1 377—на 3^3.

Степени чиселъ, состоящія изъ однѣхъ и тѣхъ же цифръ.

Вотъ нѣсколько послѣдовательныхъ чиселъ, *квадраты* которыхъ пишутся тѣми же цифрами, но только въ измѣненномъ порядкѣ:

$$13^2 = 169;\quad 157^2 = 24\,649;\quad 913^2 = 833\,569.$$
$$14^2 = 196;\quad 158^2 = 24\,964;\quad 914^2 = 835\,396.$$

Изъ однихъ и тѣхъ же цифръ, написанныхъ въ разномъ порядкѣ, состоятъ *кубы* слѣдующихъ чиселъ:

$$345^3 = 41\,063\,625;\quad 331^3 = 36\,264\,691;$$
$$384^3 = 56\,623\,104;\quad 406^3 = 66\,923\,416.$$
$$405^3 = 66\,430\,125;$$

Слѣдующая пара чиселъ представляетъ ту особенность, что и квадраты ихъ квадратовъ также состоятъ изъ однѣхъ и тѣхъ же цифръ, только написанныхъ въ иномъ порядкѣ:

$$32^2 = 1\,024 \qquad 32^4 = 1\,048\,576$$
$$49^2 = 2\,401 \qquad 49^4 = 5\,764\,801.$$

Квадраты чиселъ, не содержащіе однѣхъ и тѣхъ же цифръ.

1.—Квадраты чиселъ, состоящіе изъ девяти различныхъ цифръ:

$11\,826^2 = 139\,854\,276$	$23\,439^2 = 549\,386\,721$
$12\,363^2 = 152\,843\,769$	$24\,237^2 = 587\,432\,169$
$12\,543^2 = 157\,326\,849$	$24\,276^2 = 589\,324\,176$
$14\,676^2 = 215\,384\,976$	$24\,441^2 = 597\,362\,481$
$15\,681^2 = 245\,893\,761$	$24\,807^2 = 615\,387\,249$
$15\,963^2 = 254\,817\,369$	$25\,059^2 = 627\,953\,481$
$18\,072^2 = 326\,597\,184$	$25\,572^2 = 653\,927\,184$
$19\,023^2 = 361\,874\,529$	$25\,941^2 = 672\,935\,481$
$19\,377^2 = 375\,468\,129$	$26\,409^2 = 697\,435\,281$
$19\,569^2 = 382\,945\,761$	$26\,733^2 = 714\,653\,289$
$19\,629^2 = 385\,297\,641$	$27\,129^2 = 735\,982\,641$
$20\,316^2 = 412\,739\,856$	$27\,273^2 = 743\,816\,529$
$22\,887^2 = 523\,814\,769$	$29\,034^2 = 842\,973\,156$
$23\,019^2 = 529\,874\,361$	$29\,106^2 = 847\,159\,236$
$23\,178^2 = 537\,219\,684$	$30\,384^2 = 923\,187\,456$

2°.— Квадраты чиселъ, состоящіе изъ десяти разныхъ цифръ:

$32\,043^2 = 1\,026\,753\,849$	$45\,624^2 = 2\,081\,549\,376$
$32\,286^2 = 1\,042\,385\,796$	$55\,446^2 = 3\,074\,258\,916$
$33\,144^2 = 1\,098\,524\,736$	$68\,763^2 = 4\,728\,350\,169$
$35\,172^2 = 1\,237\,069\,584$	$83\,919^2 = 7\,042\,398\,561$
$39\,147^2 = 1\,532\,487\,609$	$99\,066^2 = 9\,814\,072\,356$.

Все разныя цифры.

Если число 123456789 умножить на всякое цѣлое число меньшее, чѣмъ 9, и первое съ нимъ, т. е. на числа 2, 4, 5, 7 8, то каждое полученное произведеніе будетъ состоять изъ 9-ти *различныхъ* цифръ.

Въ слѣдующемъ вычитаніи:

$$\begin{array}{r} 987\,654\,321 \\ -\;123\,456\,789 \\ \hline 864\,197\,532 \end{array}$$

Уменьшаемое, вычитаемое и разность каждое состоитъ изъ девяти различныхъ цифръ.

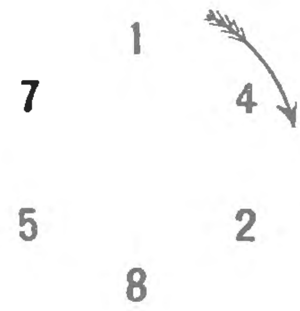
Числа, отличающіяся отъ своихъ логариѳмовъ только мѣстомъ запятой, отдѣляющей десятичные знаки.

Изслѣдованіями объ отысканіи подобнаго рода чиселъ занимались въ особенности знаменитый Эйлеръ и англійскій профессоръ Тэтъ. Ниже мы даемъ только три примѣра подобныхъ чиселъ, обращая вниманіе на то, что рядъ ихъ можетъ быть продолженъ неопредѣленно далеко.

$$\log\ 1{,}3\,712\,885\,742 = 0{,}\ \ 13\,712\,885\,742$$
$$\log\ 237{,}5\,812\,087\,593 = 2{,}\ \ 375\,812\,087\,593$$
$$\log\ 3550{,}2\,601\,815\,865 = 3{,}5\,502\,601\,815\,865$$

Круговыя числа.

Число 142 857 отличается многими замѣчательными свойствами. Если его умножать на послѣдовательныя числа 2, 3, 4, 5 и 6, то полученныя произведенія будутъ состоять изъ тѣхъ же цифръ, что и само число, только переставленныхъ въ круговомъ порядкѣ. Другими словами: всѣ эти произведенія можно получить изъ представленнаго здѣсь круга, читая всѣ числа подрядъ, въ направленіи движенія часовой стрѣлки, но каждый разъ начиная съ другой цифры:



Фиг. 81.

$$
\begin{aligned}
2 \times 142\,857 &= 285\,714 \\
3 \times \quad » \quad &= 428\,571 \\
4 \times \quad » \quad &= 571\,428 \\
5 \times \quad » \quad &= 714\,285 \\
6 \times \quad » \quad &= 857\,142 \\
7 \times \quad » \quad &= 999\,999 \\
8 \times \quad » \quad &= 1\,142\,856.
\end{aligned}
$$

При умноженіи числа на 7 получается, какъ видимъ, шесть девятокъ, при умноженіи же на 8 получается уже семизначное число 1 142 856. Это послѣднее замѣчательно тѣмъ, что, приложивъ его первую цифру (1) къ послѣдней (6), получимъ опять данное число 142 857. Вслѣдъ за этимъ умноженія на дальнѣйшія числа даютъ тотъ же результатъ, т. е. мы получаемъ опять числа, написанныя цифрами 1, 4, 2, 8, 5, 7 и въ указанномъ круговомъ порядкѣ, *если въ получаемыхъ семизначныхъ числахъ будемъ первую цифру переносить назадъ и прибавлять къ послѣдней.* Въ самомъ дѣлѣ:

$$
\begin{aligned}
9 \times 142\,857 &= 1\,285\,713 \quad (285\,714) \\
10 \times \quad » \quad &= 1\,428\,570 \quad (428\,571) \\
11 \times \quad » \quad &= 1\,571\,427 \quad (571\,428) \\
23 \times \quad » \quad &= 3\,285\,711 \quad (285\,714) \\
89 \times \quad » \quad &= 12\,714\,273.
\end{aligned}
$$

Здѣсь опять слѣдуетъ отмѣтить, что, умножая на 89, мы получаемъ уже 8-ми-значное число, но если въ немъ двѣ первыя цифры (12) придать къ двумъ послѣднимъ (73), то опять получимъ число, состоящее изъ тѣхъ же цифръ, что и взятое начальное, но написанное въ иномъ порядкѣ, а именно: 714 285. Точно также:

$356 \times 142\,857 = 50\,857\,092$ (получаемъ число 857 142, если приложимъ 50 къ 092).

Что же за *«особенное»* такое число 142 857, и въ чемъ секретъ его *особенности?*

Ключъ къ уразумѣнію всѣхъ особенностей этого числа даетъ то именно, якобы, «исключеніе», которое нарушаетъ приведенный выше круговой порядокъ, а именно, произведеніе $7 \times 142\,857 = 999\,999$.

Число 142 857 есть, какъ оказывается, *періодъ* дроби $\frac{1}{7}$, если ее представить въ видѣ десятичной дроби.

Совершено тѣми же свойствами будетъ отличаться всякій другой «полный» или «совершенный періодъ», т. е. періодъ, получаемый отъ обращенія въ десятичную простой дроби вида $\frac{1}{p}$ (гдѣ p есть первоначальное число), и при томъ такой періодъ, что число его цифръ ровно на единицу меньше, чѣмъ показываетъ число знаменателя данной простой дроби.

Такимъ образомъ свойствами числа 142 857 будетъ обладать $\frac{1}{17} = 0,$ (0 588 235 294 117 647). Въ самомъ дѣлѣ:

$$2 \times 0\,588\,235\ldots\ldots = 1\,176\,470\,588\,235\,294$$

т. е. получаемъ число, написанное тѣми же цифрами, но въ иномъ круговомъ порядкѣ. И точно также:

$$7 \times 0\,588\,235\ldots\ldots = 4\,117\,647\,058\,823\,529$$

Въ то время, какъ

$$17 \times 0\,588\,235\ldots\ldots = 9\,999\,999\,999\,999\,999.$$

Точно такими же свойствами будетъ отличаться періодъ дроби $\frac{1}{29} = 0,(0\ 344\ 827\ 586\ 206\ 896\ 551\ 724\ 137\ 931)$, въ которомъ 28 цифръ.

Нетрудно доказать, что каждая обыкновенная дробь вида $\frac{1}{p}$, гдѣ p есть первоначальное число, при обращеніи въ десятичную дастъ періодъ, въ которомъ должно быть меньше, чѣмъ p, десятичныхъ знаковъ.

Въ самомъ дѣлѣ, при дѣленіи остатокъ всегда долженъ быть меньше дѣлителя. Отсюда слѣдуетъ, что въ остаткахъ при дѣленіи 1 на p для обращенія въ десятичную дробь можетъ получиться только $p - 1$ различныхъ чиселъ, а затѣмъ процессъ начнетъ опять повторяться.

Такъ, напр,, для извѣстной уже намъ дроби $\frac{1}{7}$ имѣемъ:

$$\frac{1}{7} = 0,1\ \frac{3}{7} = 0,14\ \frac{2}{7} = 0,142\ \frac{6}{7} = 0,1428\ \frac{4}{7} = 0,14285\ \frac{5}{7} =$$

$= 0,142857\ \frac{1}{7} = \ldots$ (дальше, очевидно, начнется повтореніе тѣхъ же цифръ).

Отсюда ясно, что если мы будемъ помножать число 142 857 на 3, 2, 6, 4, 5, то мы будемъ получать періодъ, начинающійся соотвѣтствено *послѣ* 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й цифры.

Отмѣтимъ также еще и слѣдующія положенія:

Если періодъ, получающійся отъ обращенія дроби вида $\frac{1}{p}$ (гдѣ p есть простое число) въ десятичную, содержитъ $\frac{p-1}{2}$ цифръ, то при умноженіи этого періода на всѣ множители отъ 1 до $p - 1$ всегда будемъ получать числа изъ $\frac{p-1}{2}$ цифръ, при чемъ всѣ эти числа можно разбить на два ряда такихъ, что каждое число каждаго ряда можетъ получаться изъ предыдущаго путемъ только круговой перестановки цифръ.

Для примѣра будемъ обращать въ десятичную дробь $\frac{1}{13}$. Получается, $\frac{1}{13} = 0,(076923)$. Помножая число періода на множители 1, 2, 3, . . . 11, 12, находимъ:

$1 \times 076\,923$		$= 076\,923$	$2 \times 076\,923$		$= 153\,846$
$3 \times$	»	$= 230\,769$	$5 \times$		$= 384\,615$
$4 \times$	»	$= 307\,692$	$6 \times$	»	$= 461\,538$
$9 \times$	»	$= 692\,307$	$7 \times$	»	$= 538\,461$
$10 \times$	»	$= 769\,230$	$8 \times$	»	$= 615\,384$
$12 \times$	»	$= 923\,076$	$11 \times$	»	$= 846\,153$

Возьмемъ снова уже извѣстное намъ число, представляющее періодъ дроби $\frac{1}{7}$, т. е. число 142 857. Помимо извѣстныхъ уже намъ свойствъ оно обладаетъ и такимъ: разобьемъ его на двѣ половины по три цифры въ каждой и сложимъ эти части, найдемъ число, кратное 9-ти, т. е.

$$142 + 857 = 999.$$

Подобнымъ же свойствомъ отличается и число, представляющее періодъ $\frac{1}{17}$ (см. выше) и т. п... То же относится и къ числамъ, полученнымъ нами выше изъ періода $\frac{1}{13}$.

Тѣмъ не менѣе, если мы найдемъ такой періодъ дроби $\frac{1}{p}$, который содержитъ $\frac{p-1}{2}$ цифръ, и это послѣднее число $\frac{p-1}{2}$ будетъ само вида $4n+3$, то такой періодъ нельзя, слѣдовательно, раздѣлить на 2 равныя половины, гдѣ каждая цифра дополнила бы соотвѣтствующую до 9. Но въ такомъ случаѣ число $\frac{p-1}{p}$ (дополняющее $\frac{1}{p}$ до единицы) дастъ періодъ тоже изъ $\frac{p-1}{2}$ цифръ, дополнительный періоду $\frac{1}{p}$.

Напримѣръ:

$$\frac{1}{31} = 0,(032\,258\,064\,516\,129)$$

$$\frac{30}{31} = 0,(967\,741\,935\,483\,870)$$

$$\text{Сумма} = 0,(999999999999999)$$

Полезное примѣненіе.

Изъ указанныхъ выше особенностей извѣстнаго рода чиселъ можно извлечь нѣкоторыя полезныя практическія примѣненія. И прежде всего можно ввести значительныя упрощенія и сокращенія въ вычисленія, когда мы обращаемъ $\frac{1}{p}$ (p = первоначальному числу) въ десятичную дробь.

Въ такомъ случаѣ, нашедши нѣкоторое число десятичныхъ знаковъ, мы еще болѣе значительную часть ихъ можемъ найти, умножая полученную уже часть частнаго на остатокъ. Для удобства вычисленія процессъ дѣленія слѣдуетъ продолжать до тѣхъ поръ, пока остатокъ получится сравнительно небольшой.

Будемъ, наприм., обращать въ десятичную дробь $\frac{1}{97}$. Начавъ дѣленіе числителя на знаменатель, мы, положимъ, получимъ въ частномъ 0,01 030 927 835 и въ остаткѣ 5. Остатокъ невеликъ, поэтому разсуждаемъ такъ: начиная съ послѣдней полученной цифры частнаго, дальнѣйшія цифры должны быть такія, какія получатся отъ обращенія въ десятичную дроби $\frac{1}{97}$, умноженной на 5. Итакъ, умножая на 5 полученныя цифры частнаго (или прибавя нуль справа и дѣля на 2), мы сразу получаемъ еще 11 цифръ частнаго.

Задача 55-я.

Мгновенное умноженіе.

Если вы въ достаточной степени внимательно отнеслись къ предыдущей главѣ и усвоили свойства повторяемости однихъ и тѣхъ же цифръ, которыми обладаютъ нѣкоторыя числа, то это доставить вамъ возможность производить надъ числами извѣстныя дѣйствія, которыя для непосвященнаго покажутся прямо поразительными. Такъ, напр., вы можете кому-либо предложить слѣдующее:

Я пишу множимое, а вы подписываете подъ нимъ какой хотите множитель изъ двухъ или трехъ цифръ, и я тотчасъ же напишу вамъ произведеніе этихъ чиселъ, начиная отъ лѣвой руки къ правой.

Рѣшеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, вы напишете, какъ множимое, періодъ дроби $\frac{1}{7}$, т. е. число 142 857, о которомъ мы говорили въ предыдущей главѣ. Предположимъ, что другой потребуетъ, чтобы вы это число умножили, напр., на 493.

Дѣло, въ сущности, сводится къ тому, что вы это число 493 мысленно умножаете на $\frac{1}{7}$, а затѣмъ мысленно же обращаете въ періодическую дробь, что при свойствахъ извѣстнаго вамъ періода (142 857) совсѣмъ не трудно. Поэтому, глядя на число 493, вы мысленно дѣлите его на семь и получаете $\frac{493}{7} = 70\frac{3}{7}$. Слѣдовательно, *вы пишете* 70, какъ двѣ первыя цифры искомаго произведенія (пишете слѣва направо).

Теперь остается $\frac{3}{7}\left(\text{т. е. } 3 \times \frac{1}{7}\right)$, иначе говоря,—3, умноженное на періодъ 142 857, и вся задача заключается только въ томъ, чтобы опредѣлить первую цифру, съ которой надо начинать писать этотъ періодъ въ круговомъ порядкѣ. Разсуждаемъ такъ:

Единицы множимаго, 7, на множитель, 3, даютъ въ произведеніи 21. Значитъ послѣдняя цифра въ искомомъ произведеніи должна быть 1, а слѣдовательно, первой въ періодѣ придется ближайшая слѣдующая, т. е. 4 (или находимъ 4, дѣля 3 на 7). Итакъ, *пишемъ* (послѣ 70) еще цифры 4 285, а отъ 71, которыя должны бы стоять на концѣ, надо отнять тѣ 70, что написаны въ началѣ (сравните съ умноженіемъ $89 \times 142\,857$ въ предыдущей главѣ). Это дастъ двѣ послѣднія цифры искомаго произведенія: 01. Итакъ, искомое произведеніе есть **70 428 501.**

Все это можно (при усвоеніи сущности задачи) продѣлать весьма быстро. И когда вашъ собесѣдникъ, непосредственнымъ умноженіемъ провѣривъ вѣрность вашего отвѣта, предложитъ опять взятое вами число (142 857) умножить сразу, напримѣръ, на 825, вы опять разсуждаете точно также:

$$\frac{825}{7} = 117\frac{6}{7} \text{ и } \textit{пишете } \mathbf{117.}$$

Такъ какъ $6 \times 7 = 42$, то послѣдняя цифра искомаго произведенія будетъ 2; значитъ, круговую послѣдовательность чиселъ періода надо начинать съ непосредственно за 2 слѣдующей цифрой, т. е. съ 8, и вы *пишете* (за 117) **857;** дальше должны идти цифры періода 142, изъ нихъ надо отнять 117, и вы пишете еще три цифры **025**. Получаете:

$$142\,857 \times 825 = \mathbf{117\,857\,025.}$$

И слава ваша, какъ «необыкновеннаго счетчика», пожалуй, упрочится!

Вотъ еще примѣръ: 142 857 надо умножить на 378.

$$\frac{378}{7} = 54 = 53\frac{7}{7}, \textit{ пишемъ } \mathbf{53.}$$

$7 \times$ на періодъ даетъ 6 девятокъ. Вычитаемъ мысленно 53 изъ 999 999 и результатъ приписываемъ за 53; получаемъ

53 999 946.

Замѣчаніе. При нѣкоторой практикѣ это «умноженіе» дѣлается чрезвычайно быстро и дѣйствительно поражаетъ незнающаго, въ чемъ дѣло. Надо, однако, — если желать сохранить секретъ и занимательность,— всячески разнообразить это математическое развлеченіе. Можно, напримѣръ, партнеру сказать такъ:

Вотъ я пишу нѣкоторое число; подпишите подъ нимъ какого угодно множителя изъ 2-хъ, или 3-хъ цифръ, умножьте и полученное произведеніе раздѣлите на 13. То частное, которое вы послѣ этого получите, я вамъ напишу сейчасъ же, какъ только вы напишете множитель.

Въ этомъ случаѣ, конечно, вы пишете въ качествѣ множимаго не 142 857, а $13 \times 142\,857 = 1\,857\,141$. Такъ какъ 13 въ данномъ случаѣ, въ сущности, сокращается, то частное вы получите совершенно такъ же, какъ получали произведеніе въ предыдущихъ примѣрахъ. Вмѣсто числа 13 можно взять всякое иное число.

Нѣсколько замѣчаній о числахъ вообще.

Теорема Ферма, за доказательство которой, какъ мы уже говорили въ одной изъ предшествующихъ главъ, можно получить 100 000 марокъ, кромѣ титула «великой», носить еще названіе его *посмертной* теоремы. Вопросы подобнаго рода изучаются въ той части математики, которая носитъ общее названіе *теоріи чиселъ*. Въ этой области сравнительно мало кто работаетъ, хотя, по выраженію многихъ, она исполнена «волшебнаго очарованія». «Математика—царица наукъ, но ариѳметика, (т. е. теорія чиселъ) есть царица математики»,— говорилъ «первый изъ математиковъ (princeps mathematicorum)» Гауссъ, а ужъ онъ-то въ этомъ вопросѣ можетъ считаться вполнѣ компетентнымъ судьей. Но, быть можетъ, ни одна изъ областей математическихъ наукъ не требуетъ такой силы и строгости мышленія, остроумія пріемовъ и глубокаго проникновенія въ природу числа, какъ именно эта теорія чиселъ, или «высшая ариѳметика», какъ ее иногда называютъ. Читатель навѣрное не посѣтуетъ на насъ, если мы сдѣлаемъ небольшую историческую экскурсію въ эту область. Начнемъ опять съ упомянутой уже знаменитой *посмертной теоремы Ферма*. Теорема состоитъ въ томъ, что

Невозможно найти цѣлыя числа для x, y, z, которыя удовлетворяли бы уравненію

$$x^n + y^n = z^n,$$

если n есть цѣлое число большее, чѣмъ 2.

Теорема Вильсона состоитъ въ слѣдующемъ:

Если p есть первоначальное число, то число

$$1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots\ldots (p-1)$$

дѣлится безъ остатка на p.

Эта знаменитая теорема была высказана Джономъ Вильсономъ (1741—1793), воспитанникомъ Кэмбриджскаго университета. Какъ и Ферма, онъ не занимался спеціально математикой. Теорему свою онъ предложилъ ученымъ безъ доказательства. Впервые опубликовалъ ее Урингъ (Waring) въ своихъ «Meditationes Algebraicae», а общее доказательство ея далъ *Лагранжъ* въ 1771 году.

Формулы для нахожденія первоначальныхъ чиселъ. Общей формулы для полученія ряда послѣдовательныхъ первоначальныхъ чиселъ въ любыхъ предѣлахъ не найдено. Лежандръ предложилъ формулу $2x^2 + 29$, которая даетъ первоначальныя числа для всѣхъ послѣдовательныхъ значеній x отъ $x = 0$ до $x = 28$, т. е. для 29 значеній x. Эйлеръ далъ формулу: $x^2 + x + 41$, которая даетъ первоначальныя числа для значеній x отъ 0 до 39, т. е. для 40 значеній x. Американскій математикъ Эскоттъ (Escott) нашелъ, что если въ формулѣ Эйлера замѣнить x черезъ $x—40$, то найдемъ формулу $x^2 - 79x + 1601$, которая даетъ первоначальныя числа для 80 послѣдовательныхъ значеній x. Въ особенности замѣчательны въ этомъ отношеніи труды русскаго академика Чебышева.

Можетъ ли быть больше одной группы первоначальныхъ множителей числа? Всѣ почти наши учебники ариѳметики на этотъ вопросъ отвѣчаютъ: *нѣтъ*. Число, молъ, разлагается только на одну группу первоначальныхъ множителей. И этотъ отвѣтъ совершенно вѣренъ, пока мы держимся только тѣснаго чисто «ариѳметическаго», такъ сказать,— привычнаго понятія о единицѣ, о числѣ. Но если взглядъ на число мы расширимъ до понятія о *комплексномъ* числѣ (см. далѣе главу «Наглядное изображеніе комплексныхъ чиселъ»), то положеніе, что всякое число можетъ быть разложено на первоначальныхъ производителей только единственнымъ путемъ, лишается математической достовѣрности. Такъ, напримѣръ:

$$26 = 2 \times 13 = (5 + \sqrt{-1})\ (5 - \sqrt{-1}).$$

Развитіе понятія о числѣ. Начиная съ ученія о цѣлыхъ числахъ древнихъ грековъ, переходя черезъ раціональныя дроби Діофанта, такъ называемыя «раціональности» и «ирраціональности» разсматриваются, какъ числа, только въ шестнадцатомъ вѣкѣ. Отрицательныя числа, какъ *обратныя* положительнымъ, были выдвинуты Жираромъ и Декартомъ. «Мнимыя» и комплексныя числа ввели въ математическій обиходъ Арганъ, Вессель, Эйлеръ и Гауссъ.

Такимъ образомъ въ послѣднее время создалось новое, общее, понятіе о числѣ и, говоря кратко, математики приняли за правило, что *оправданіе для введенія въ ариѳметику числа основывается только на опредѣленіи этого числа.* Исходя изъ этой точки зрѣнія, и развивается вся современная теоретическая ариѳметика.

Графики.

Какъ-то проѣздомъ черезъ уѣздный городъ западнаго края пишущему эти строки случилось разговориться съ мѣстнымъ обывателемъ и узнать, что у нихъ въ городѣ есть своего рода чудо-математикъ. Этотъ математикъ мало того, что рѣшалъ «всякую» и «какую угодно» предложенную ему задачу, но рѣшалъ чрезвычайно быстро, почти не думая, при помощи всего-на-всего обыкновенной *шахматной доски*. Кусочкомъ мѣла онъ извѣстнымъ ему образомъ разставлялъ на клѣткахъ доски числа задачи и затѣмъ, не производя никакихъ письменныхъ вычисленій, говорилъ тотчасъ отвѣтъ.

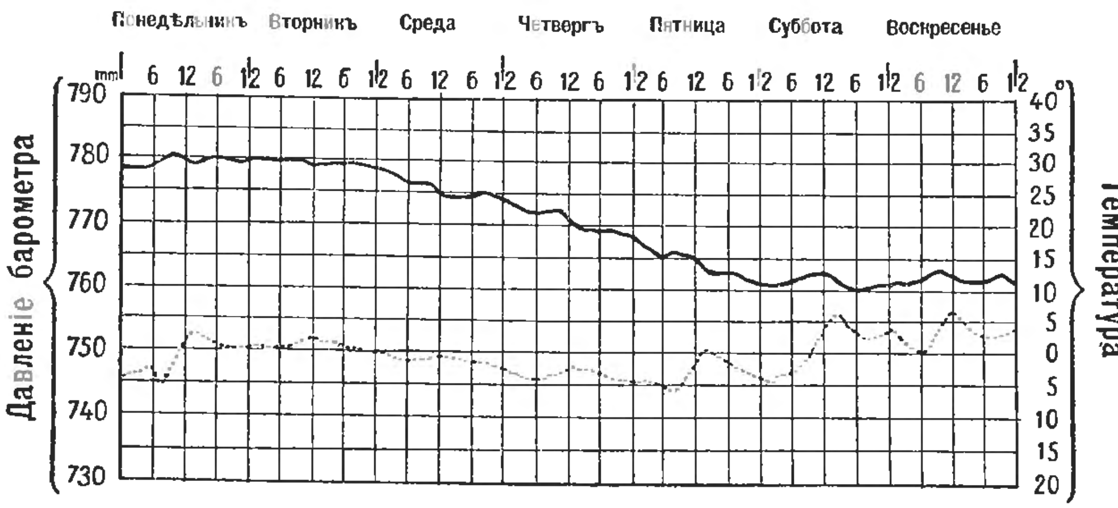
— И это каждую предложенную задачу онъ рѣшаетъ такимъ образомъ? — заинтересовался я.

— Какую угодно! Можете, если угодно, убѣдиться въ этомъ сами. И главное, необразованный... а самъ дошелъ...

Къ сожалѣнію, ни время, ни обстоятельства не позволили мнѣ познакомиться съ этимъ еще однимъ скрывающимся въ нашей глуши самородкомъ. Но не разъ, признаться, задумывался я надъ тѣмъ, какъ это «простой и необразованный» бѣлоруссъ рѣшаетъ *всѣ* задачи съ помощью шахматной доски, не прибѣгая къ выкладкамъ и вычисленіямъ. Ариѳметика или алгебра безъ вычисленій!.. На первый взглядъ это удивительно, но это только на первый взглядъ.

Быть можетъ, «секретъ» уроженца бѣлорусскаго городка окажется не столь ужъ загадочнымъ, если сообразить, что шахматная доска есть не что иное, какъ площадь, разграфленная вертикальными и горизонтальными линіями на квадратныя *клѣтки*. Листъ же бумаги, разграфленной на клѣточки, какъ сейчасъ увидимъ, можетъ оказаться незамѣнимымъ подспорьемъ для быстраго рѣшенія весьма многихъ и весьма сложныхъ задачъ. Такъ какъ клѣтчатую бумагу можно теперь встрѣтить въ продажѣ почти всюду, то и мы здѣсь со своей стороны повторяемъ совѣтъ почтеннаго профессора Джона Перри, который въ своей «Практической Математикѣ» говоритъ: «очень важно, чтобы ученикъ извелъ много листовъ бумаги *(клѣтчатой)* на свои упражненія, расточительно пользуясь этимъ матерьяломъ». Добавимъ къ этимъ словамъ почтеннаго ученаго, что «изводить» клѣтчатую бумагу слѣдуетъ и не «ученику» въ точномъ значеніи этого слова, а всякому любителю точныхъ знаній. При помощи такого рода бумаги весьма легко вычерчивать **графики** и примѣнять ихъ къ рѣшенію различныхъ задачъ.

Эти графики въ наше время вы можете найти во многихъ газетахъ и журналахъ. Чаще всего ими пользуются для нагляднаго представленія хода измѣненій температуры и давленія барометра за извѣстный періодъ времени. Примѣръ такого графика данъ на фиг. 81.



Фиг. 81.

На этой фигурѣ изображены даже не одинъ, а два графика: сплошная черная линія изображаетъ колебанія за недѣлю въ показаніяхъ барометра, а линія колебаній температуры обозначена пунктиромъ. Разобраться въ подобномъ графикѣ очень легко.

По горизонтальному направленію означено время: семь дней недѣли и для каждаго дня главнѣйшіе часы наблюденій — 12 часовъ ночи, 6 час. утра, 12 час. дня и 6 час. пополудни. Такъ что сторона каждаго квадратика въ горизонтальномъ направленіи соотвѣтствуетъ промежутку времени въ 6 часовъ, а $\frac{1}{6}$ стороны — 1 часу и т. д...

По вертикальному направленію слѣва помѣщены дѣленія въ миллиметрахъ шкалы барометра, а справа шкала термометра.

Пусть теперь, скажемъ, каждый часъ въ сутки или черезъ каждые 2, 4, 6 и т. д. часа опредѣляютъ высоту барометра и показаніе термометра. Каждое такое показаніе на клѣткахъ графика легко отмѣтить соотвѣтствующей точкой. Положимъ, напримѣръ, что во вторникъ въ шесть часовъ утра высота барометра была 780 миллиметровъ, а термометръ показывалъ 0°. Тогда на пересѣченіи вертикальной линіи, проходящей черезъ показаніе «Вторникъ 6 час. утра», съ горизонталью, проходящей черезъ дѣленіе барометра 780, мы ставимъ точку, обозначающую показаніе барометра. Точно также на той же вертикали, но въ пересѣченіи ея съ линіей, противъ которой поставлено нулевое показаніе термометра, мы ставимъ точку. Это будетъ показаніе термометра. Соединяя всѣ послѣдовательныя показанія барометра сплошной линіей, а показанія термометра пунктиромъ, получаемъ графики недѣльныхъ температуръ и барометрическаго давленія, дающіе полную картину измѣненія погоды за недѣлю. Никакой путаницы и неясности здѣсь быть не можетъ. Если вы хотите прослѣдить линію барометра, справляйтесь съ цифрами налѣво; желаете прослѣдить температуру, смотрите цифры направо. Точно также каждая точка горизонтали соотвѣтствуетъ извѣстному часу и дню недѣли.

Но графики находятъ себѣ примѣненіе не въ одномъ только ученіи о погодѣ (метеорологіи). Можно сказать, что чѣмъ дальше, тѣмъ область ихъ примѣненія становится шире. Въ высшей степени плодотворно пользованіе графиками, напримѣръ, въ статистикѣ. Въ желѣзнодорожномъ дѣлѣ они представляютъ чуть ли не единственное средство для обозначенія движенія поѣздовъ, и графики послѣдняго рода вы, вѣроятно, встрѣчали на стѣнахъ иныхъ станцій желѣзныхъ дорогъ. Графиками же часто пользуются на биржахъ для обозначенія колебаній курса. Графики — необходимое пособіе въ области практической механики, строительства и т. д., и т. д.

Вообще когда одна величина, Y, зависитъ отъ другой, X, такъ, что съ измѣненіемъ X измѣняется Y, и если эти величины и измѣненія ихъ конечны, то съ помощью графика можно представить какое угодно измѣненіе величины Y въ зависимости отъ измѣненія X.

Величина Y въ такомъ случаѣ называется *функціей* отъ величины X. Пояснимъ нѣсколько подробнѣе это весьма употребительное въ математикѣ слово.

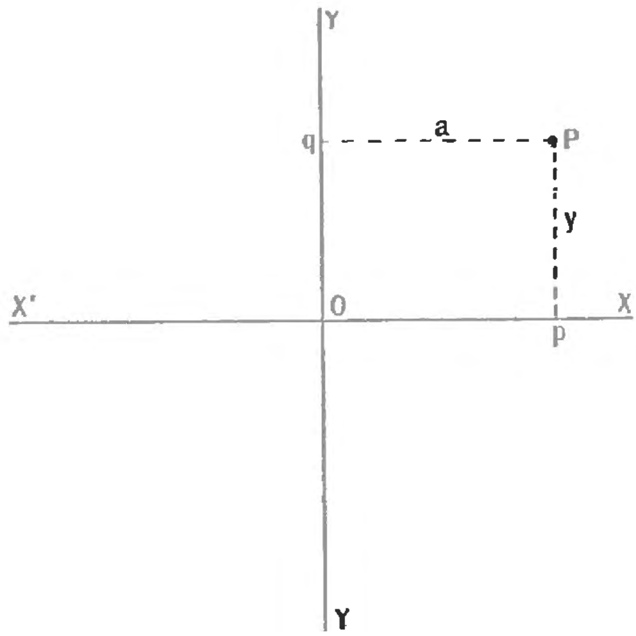
Если мы будемъ чертить рядъ окружностей, все болѣе и болѣе увеличивая радіусъ, то и самыя окружности будутъ все длиннѣе и длиннѣе. Слѣдовательно, длина окружности есть *функція* ея радіуса. Если къ резиновой нити подвѣсить тяжесть, то она вытянется, — и вытянется больше или меньше въ зависимости отъ того, большую или меньшую тяжесть мы подвѣсимъ. Длина резиновой нити есть, слѣдовательно, *функція* подвѣшенной къ ней тяжести. Если подогрѣвать въ котлѣ паръ, то давленіе его увеличится — и тѣмъ больше, чѣмъ выше будетъ температура. Давленіе пара есть, слѣдовательно, *функція* температуры и т. д. Читатель можетъ теперь самъ подобрать сколько угодно примѣровъ величинъ, находящихся между собой въ функціональной зависимости.

Посредствомъ графика можно всегда наглядно представить функцію съ помощью чертежа. И для этого прибѣгаютъ всегда къ одному и тому же нижеслѣдующему пріему.

На клѣтчатой бумагѣ берутъ двѣ взаимно-перпендикулярныя линіи OX и OY, называемыя *осями координатъ* и пересѣкающіяся въ точкѣ O (Фиг. 82). Условимся, теперь, направленія вправо и вверхъ по осямъ считать положительными (съ знакомъ $+$), а направленія влѣво и внизъ — отрицательными (съ знакомъ $-$).

Какъ же намъ теперь графически изобразить нѣкоторую функцію y, зависящую отъ x?

Условимся въ единицѣ мѣры, принявъ, скажемъ, каждую сторону клѣтки за 1. Затѣмъ беремъ извѣстное значеніе для x и откладываемъ его по оси Ox вправо, если x положительно, и влѣво, если x—отрицательно.



Фиг. 82.

Пусть, напр., въ данномъ случаѣ x изобразилось у насъ длиной Op. Для взятаго значенія x опредѣлимъ соотвѣтствующее значеніе y; пусть оно выразится числомъ, которое можно представить длиной Oq. Эту длину мы откладываемъ по оси OY вверхъ, если она со знакомъ $+$, и внизъ, если она со знакомъ.—Изъ точекъ p и q проведемъ теперь линіи, параллельныя осямъ OY и OX. Линіи эти пересѣкутся въ точкѣ P. Вотъ эта точка и представляетъ совокупность двухъ соотвѣтствующихъ значеній x и y. Построивъ рядъ такихъ точекъ и соединивъ ихъ непрерывной линіей, получаемъ графикъ, изображающій наглядно измѣненія функціи y въ зависимости отъ измѣненій x.

Способъ этотъ, какъ мы уже видѣли, былъ примѣненъ для полученія предыдущаго графика (Фиг. 81) температуръ и барометрическаго давленія. Онъ, — повторяемъ, — общій для построенія всѣхъ графиковъ вообще.

Рѣшеніе уравненій.

При пользованіи графиками нѣтъ, вообще говоря, неразрѣшимыхъ уравненій. Для образца, какъ для рѣшенія ур-ій можно пользоваться графиками, возьмемъ простой примѣръ изъ «Практической математики» проф. Джона Перри. Пусть требуется графическимъ путемъ рѣшить ур-іе:

$$x^2 - 5{,}11x + 5{,}709 = 0.$$

Положимъ

$$y = x^2 - 5{,}11x + 5.709$$

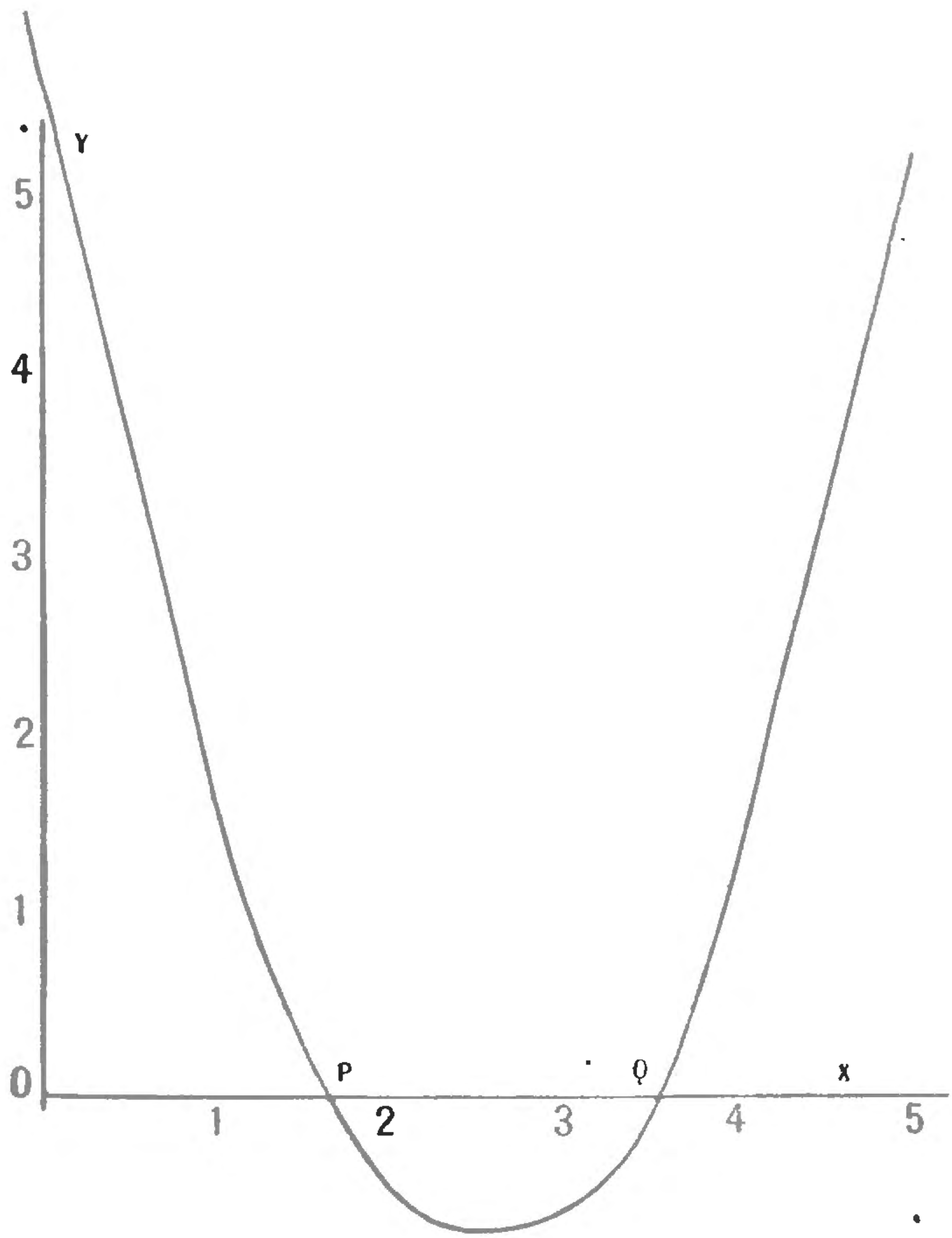
и сдѣлаемъ графикъ функціи y.

Возьмемъ нѣкоторыя значенія x отъ нуля до 5 и вычислимъ соотвѣтствующія значенія x. Получаемъ два ряда:

для x:	0	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0
для y:	5,709	1,599	0,294	−0,511	−0,816	−0,621	−0,074	1,269	5,159

Нанося эти значенія на клѣточную бумагу, получаемъ графикъ, изображенный на фиг. 83.

Кривая графика пересѣкаетъ ось OX въ двухъ точкахъ P и Q, слѣдовательно, существуетъ два корня уравненія x^2 —



Фиг. 83.

$-5{,}11x+5{,}709=0$. Вычисляя эти корни по графику, находимъ ихъ *приблизительную* величину: 1,65 и 3,46.

Вотъ здѣсь-то и слѣдуетъ отмѣтить, что всѣ почти результаты, получаемые помощью графиковъ, лишь *приблизительны*, а не вполнѣ точны. Это всегда слѣдуетъ имѣть въ виду, когда пользуемся графиками. Но слѣдуетъ также знать и то, что при тщательномъ составленіи графиковъ получаемые результаты вполнѣ удовлетворяютъ требованіямъ практики.

Итакъ, если мы не умѣемъ даже рѣшать алгебраически ур-ій 2-й, 3-й и 4-й степени, то намъ помогутъ графики. Они же могутъ помочь найти корень и всякаго иного уравненія, въ томъ числѣ даже неразрѣшимаго алгебраически ур-ія выше четвертой степени, и разрѣшать ихъ съ желательной степенью точности. Теперь вамъ, вѣроятно, понятно значеніе графиковъ, хотя врядъ ли можно согласиться съ уважаемымъ проф. Перри, который всякого защитника чисто алгебраическихъ «точныхъ» способовъ рѣшенія задачъ обзываетъ «самоувѣреннымъ, какъ пѣтухъ, академическимъ ученымъ съ деревянной головой».

Хорошо именно то, что для даннаго случая нужно!—можно на это сказать.

Къ числу преимуществъ графиковъ предъ иными способами рѣшенія задачъ принадлежитъ еще *наглядность*,—возможность дѣйствовать на умъ посредствомъ глаза. Это, въ частности, для педагога—великая вещь!

Но перейдемъ къ нѣкоторымъ другимъ задачамъ, рѣшаемымъ съ помощью графиковъ. Задачи эти, вѣроятно, болѣе всего объяснятъ намъ тотъ секретъ рѣшенія задачъ на шахматной доскѣ, о которомъ мы упоминали въ началѣ этой главы.

Задача 56-я.

Знаменитая задача Люка.

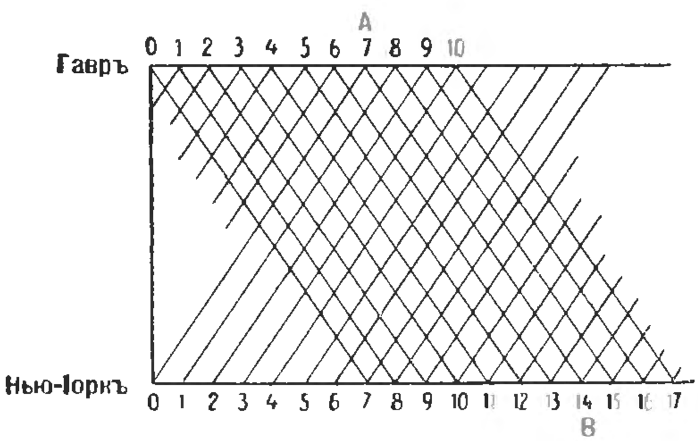
Вотъ задача, предложенная извѣстнымъ (нынѣ покойнымъ) математикомъ Эдуардомъ Люка, о возникновеніи которой талантливый математикъ г. Лэзанъ разсказываетъ слѣдующую исторію, ручаясь за ея полную достовѣрность:

На одномъ научномъ конгрессѣ, въ концѣ завтрака, на которомъ находилось много извѣстныхъ математиковъ, и между ними было нѣсколько знаменитостей разныхъ національностей, Эдуардъ Люка вдругъ объявилъ, что онъ хочетъ задать имъ одинъ изъ самыхъ трудныхъ вопросовъ:

«Я полагаю, что каждый день, въ полдень, отправляется пароходъ изъ Гавра въ Нью-Іоркъ и въ то же самое время пароходъ той же компаніи отправляется изъ Нью-Іорка въ Гавръ. Переѣздъ совершается ровно въ 7 дней въ томъ и другомъ направленіи. Сколько судовъ своей кампаніи, идущихъ въ противоположномъ направленіи, встрѣтитъ пароходъ, отправляющійся сегодня въ полдень изъ Гавра?»

Рѣшеніе.

Нѣкоторые изъ присутствовавшихъ знаменитостей, говоритъ по этому поводу Лэзанъ,—опрометчиво отвѣтили «семь!» Большинство же хранило молчаніе. Ни одинъ не далъ вѣрнаго отвѣта, но если бы для рѣшенія этой задачи призвать на помощь графикъ, представленный на фиг. 84, то рѣшеніе вырисовалось бы тотчасъ со всей ясностью. Слушавшіе Люка, очевидно, думали только о пароходахъ, которые должны еще отправиться въ путь, забывая о тѣхъ, которые уже въ дорогѣ.



Фиг. 84.

Вѣрно же то, что пароходъ, графикъ котораго на фиг. 84-й изображенъ линіей AB, встрѣтятъ на морѣ 13 судовъ, да еще тотъ, который входитъ въ Гавръ въ моментъ его отъѣзда, и еще тотъ который отправляется изъ Нью-Іорка въ моментъ его прибытія, или *всего 15 судовъ*. Графикъ доказываетъ, кромѣ того, что встрѣчи будутъ происходить ежедневно въ полдень и въ полночь.

Если бы кто сомнѣвался еще до сихъ поръ въ огромной пользѣ графиковъ, то настоящая задача, думаемъ, должна разсѣять подобныя сомнѣнія. Тонкій и сложный вопросъ получаетъ въ данномъ случаѣ быстрое, простое и наглядное рѣшеніе.

Задача 57-я.

Курьеры.

Въ общераспространенныхъ задачникахъ въ ряду иныхъ часто встрѣчаются «задачи о курьерахъ», или путникахъ, или поѣздахъ, идущихъ съ различной скоростью отъ извѣстнаго пункта, вдогонку другъ за другомъ или же навстрѣчу одинъ другому. При этомъ спрашивается обыкновенно *время* ихъ встрѣчи и разстояніе мѣста встрѣчи отъ точки отправленія.

Задачи эти слишкомъ общеизвѣстны, чтобы о нихъ стоило много здѣсь говорить. Въ школахъ оии относятся обыкновенно къ числу «трудныхъ». Укажемъ поэтому здѣсь, что задачи и этого рода могутъ рѣшаться съ помощью графиковъ. Для этого, взявъ разграфленную въ клѣтки бумагу и построивъ двѣ взаимно перпендикулярныя оси, мы на оси OX откладываемъ время, а на оси OY соотвѣтствующія разстоянія, и строимъ затѣмъ по прежнему графики для каждаго «курьера», «путника», «поѣзда» и т. д... Точка пересѣченія графиковъ съ совершенно достачной точностью опредѣлитъ время и мѣсто встрѣчи: для этого нужно только изъ этой точки опустить перпендикуляры на оси OX и OY. Пересѣченіе перпендикуляра съ первой осью дастъ точку, по которой опредѣляется *время* встрѣчи, а пересѣченіе другого перпендикуляра съ осью OY дастъ точку, которая позволитъ намъ опредѣлить *разстояніе* мѣста встрѣчи отъ точки отправленія.

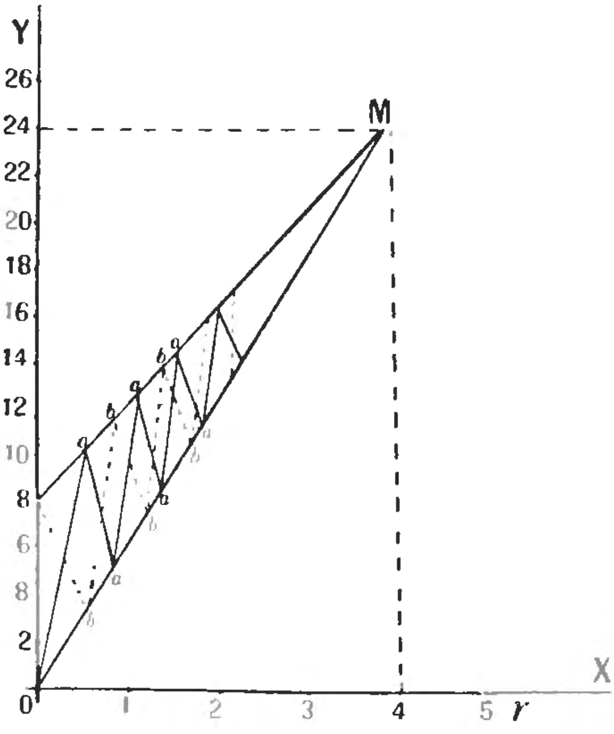
Взявъ изъ любого задачника подобную задачу и построивъ соотвѣтствующія графики, читатель легко убѣдится въ простотѣ и пригодности этого метода для приложенія къ подобнымъ задачамъ. Здѣсь же мы предложимъ вниманію читателя слѣдующую болѣе сложную задачу о собакѣ и двухъ путешественникахъ, рѣшить которую безъ помощи графиковъ не такъ-то легко.

Задача 58-я.

Собака и два путешественника.

Два пѣшехода идутъ по одной и той же дорогѣ, въ одномъ и томъ же направленіи. Первый, *A*, находится на 8 кил. впереди другого и дѣлаетъ 4 кил. въ часъ; второй, *B*, дѣлаетъ по 6 кил. въ часъ. У одного изъ путешественниковъ есть собака, которая, именно въ тотъ моментъ, когда мы говоримъ, бѣжитъ къ другому путешественнику, со скоростью 15 кил. въ часъ, потомъ сейчасъ же возвращается къ своему хозяину; прибѣжавъ къ нему, она снова бѣжитъ къ другому путешественнику, и такъ до тѣхъ поръ, перебѣгая отъ одного къ другому, пока оба путешественника встрѣтятся. Нужно узнать, какой путь пробѣжитъ собака.

Рѣшеніе.



Фиг. 85.

На оси OX откладываемъ время, а на оси OY разстоянія. Вопросъ можно разсматривать двояко, смотря по тому, кому изъ путешественниковъ принадлежитъ собака. На фиг. 85 считается время съ того момента, когда собака выпущена.

Графики двухъ путешественниковъ суть OM и $8M$, и точка M, т. е. встрѣчный пунктъ, какъ видно изъ фиг. 85-ой, соотвѣтствуетъ разстоянію въ 24 километра и 4 часамъ ходьбы. Если собака принадлежитъ путнику, который сзади, то графикъ ея пути есть $Oaa....$, ломанная линія между графиками хода двухъ пѣшеходовъ. Если она принадлежитъ путешественнику, идущему впереди, то графикъ ея пути есть $8bb....$, такая же по происхожденію ломанная линія, но отличная отъ первой. Въ обоихъ случаяхъ, тѣмъ не менѣе, животное не перестаетъ бѣжать въ продолженіе 4 часовъ и, дѣлая по 15 километровъ въ часъ, пробѣгаетъ 80 километровъ. Очевидно, въ томъ и въ другомъ случаѣ результатъ одинъ и тотъ же.

Можно предположить, что путешественники идутъ другъ другу навстрѣчу, и, вообще,—всячески видоизмѣнять условія задачи. Въ зависимости отъ этого измѣнятся нѣсколько и графики, но способъ рѣшенія остается тотъ же.

На этомъ мы и закончимъ главу о графикахъ, предлагая читателю разрабатывать дальше этотъ вопросъ самому. Въ вопросахъ изъ области физики и механики найдется въ особенности много задачъ, рѣшаемыхъ графически. Рекомендуемъ также вниманію читателя книгу Джона Перри: «Практическая математика» (есть въ русскомъ переводѣ). Въ этой книжкѣ вопросъ о графикахъ разобранъ съ надлежащей полнотой и ясностью. Не совѣтуемъ лишь увлекаться тѣми полемическими выпадами противъ «теоретиковъ», которыми почтенный авторъ безъ видимой нужды уснастилъ кое-гдѣ свою въ общемъ полезную книгу.

Возвращаясь къ тому, съ чего началась эта глава, т. е. къ оставшемуся въ неизвѣстности «чудо-математику», рѣшавшему задачи съ помощью шахматной доски, мы должны признать, что это возможно. Рѣчь идетъ, очевидно, о графикахъ. При навыкѣ, *нѣкоторыя* задачи съ помощью ихъ, какъ видимъ, можно рѣшать удивительно быстро. «Нѣкоторыя»,—говоримъ,—но не *всѣ!* Вотъ почему намъ кажется, вопреки увѣреніямъ почтеннаго захолустнаго обывателя, что не *всякую* задачу могъ «моментально» рѣшать бѣлорусскій «чудо-математикъ».

Объ аксіомахъ элементарной алгебры.

При изученіи элементарной алгебры къ рѣшенію уравненій приступаютъ обыкновенно съ такими аксіомами:

1.—Величины, равныя порознь одной и той же величинѣ или равнымъ величинамъ, равны между собой.

2.—Если къ равнымъ величинамъ прибавить равныя же, то и суммы получатся равныя.

3.—Если отъ равныхъ величинъ отнять поровну, то и остатки получатся равныя.

4.—Если равныя величины умножать на равныя, то и произведенія получатся равныя.

5.—Если равныя величины раздѣлить на равныя, то и частныя получатся равныя.

6.—Цѣлое больше, чѣмъ каждая изъ его частей.

7.—Одинаковыя степени или одинаковые корни отъ равныхъ величинъ равны.

Эти освященныя временемъ «общія понятія» составляютъ основу теоретической ариѳметики. На нихъ же обосновываютъ точно также и алгебраическія разсужденія.

Но въ высшей степени необходимо относительно этихъ аксіомъ сдѣлать соотвѣтствующія поясненія и оговорки, когда мы распространяемъ ихъ и на область алгебраическихъ количествъ. Обобщеніе свойственно математикѣ. Когда мы обобщаемъ, мы отбрасываемъ всѣ ограниченія, которыя были раньше установлены, или подразумѣвались. Предположеніе, вѣрное съ прежде бывшими ограниченіями, безъ нихъ можетъ быть вѣрно и невѣрно. Пояснимъ примѣромъ: при переходѣ отъ геометріи двухъ измѣреній (планиметрія) къ геометріи трехъ измѣреній (стереометрія) приходится отбросить то ограниченіе, которое необходимо подразумѣвалось въ геометріи на плоскости,— а именно, что всѣ разсматриваемыя фигуры лежатъ въ плоскости нашего чертежа, или доски, на которой фигуры изображены (за исключеніемъ, конечно, того случая, когда мы мысленно переворачиваемъ фигуры для наложенія ихъ одну на другую). Нѣкоторыя изъ теоремъ, вѣрныя для геометріи на плоскости, безъ всякихъ измѣненій переходятъ и въ стереометрію, а другія—нѣтъ. Сравните въ этомъ отношеніи, хотя бы, двѣ такихъ теоремы планиметріи: 1) черезъ точку, данную *внѣ* взятой прямой, можно на эту прямую опустить только *одинъ* перпендикуляръ и 2) изъ точки, взятой *на* данной прямой, можно къ этой прямой возставить только *одинъ* перпендикуляръ. Первая изъ этихъ теоремъ безо всякихъ оговорокъ приложима и къ геометріи въ пространствѣ, а вторая - нѣтъ.

Для второго, еще болѣе яркаго, примѣра обратимся къ вопросу (см. стр. 115): можетъ ли быть число разложено на болѣе чѣмъ одну группу первоначальныхъ множителей?

Нѣтъ!—отвѣтятъ вамъ,—если подъ множителями подразумѣвать обыкновенныя ариѳметическія числа.

Да!—съ неменьшимъ правомъ отвѣтитъ другой, если въ понятіе о числѣ включить и комплексныя (такъ называемыя «мнимыя») количества.

Въ первомъ случаѣ число 26, напримѣръ, разлагается на первоначальные множители только единственнымъ путемъ: $26 = 2 \times 13$; а во второмъ:

$$26 = 2 \times 13 = (5 + \sqrt{-1})\ (5 - \sqrt{-1}).$$

Такихъ примѣровъ, впрочемъ, можно привести очень много, и въ настоящей книгѣ намъ приходилось и придется съ ними встрѣчаться не разъ.

Такимъ образомъ, мы можемъ всегда ожидать, что аксіомы ариѳметики могутъ нуждаться въ нѣкоторыхъ видоизмѣненіяхъ или дополненіяхъ, если попробовать ихъ распространить на область алгебраическихъ количествъ. И это мы находимъ на самомъ дѣлѣ. Къ сожалѣнію, мы не всегда замѣчаемъ, что бы авторы учебниковъ обращали вниманіе своихъ читателей на подобныя видоизмѣненія иныхъ аксіомъ, или даже, чтобы они сами примѣняли эти аксіомы съ надлежащей осторожностью. Между тѣмъ мы прежде всего должны требовать отъ научной аксіомы, чтобы она была совершенно вѣрна и вполнѣ соотвѣтствовала *смыслу, въ которомъ извѣстныя выраженія употребляются въ этой наукѣ.*

Пятая, напримѣръ, изъ вышеприведенныхъ аксіомъ, или «аксіома дѣленія», должна быть сопровождаема необходимой, но тѣмъ не менѣе рѣдко встрѣчающейся оговоркой: ...«раздѣлить на равныя, *исключая нуль*».

Безъ такого ограниченія высказываемое положеніе далеко отъ аксіомы.

Въ иномъ учебникѣ, гдѣ приведена шестая изъ вышеуказанныхъ «аксіомъ», читатель на слѣдующей страницѣ можетъ найти такое, напримѣръ, выраженіе.

$$+2-5+7-1=+3,$$

гдѣ «+3 есть «цѣлое» или *сумма*». Видя, что одна изъ частей этого «цѣлаго» есть +7, иной читатель можетъ искренне подивиться, какъ же это совмѣщается съ «аксіомой», что «цѣлое больше каждой своей части».

Въ седьмой аксіомѣ одинаковыя степени и корни изъ равныхъ количествъ равны только *ариѳметически*. Иначе говоря,— одинаковые дѣйствительные корни изъ равныхъ количествъ равны при условіи одинаковыхъ знаковъ.

Употребляя въ аксіомѣ слово «равный», не принимаемъ ли мы его какъ бы въ смыслѣ «тотъ самый»? Напримѣръ, если два числа тѣ же самыя, что и третье число, то и первое есть то же число, что и второе, и т. д...

О приложеніи аксіомъ къ рѣшенію уравненій.

Иногда въ элементарныхъ руководствахъ, а тѣмъ болѣе въ объясненіяхъ иныхъ репетиторовъ и даже преподавателей, дѣло ставится такъ, что какъ будто при дѣйствіяхъ надъ уравненіями возможно прямое, непосредственное приложеніе аксіомъ. Возьмемъ для примѣра постоянно встрѣчающееся и въ учебникахъ и въ учебной практикѣ такое разсужденіе:

Дано уравненіе

$$3x + 4 = 19.$$

Вычитая изъ каждой части по 4, получимъ

$$3x = 15 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(аксіома 3)}.$$

Дѣля обѣ части на 3, получаемъ

$$x = 5 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(аксіома 5)}.$$

И уравненіе считается рѣшеннымъ безо всякихъ оговорокъ непосредственнымъ приложеніемъ аксіомъ. Но это доказываетъ только, насколько распространены на этотъ счетъ совершенно ошибочные или непродуманные взгляды.

Хотя въ выполненныхъ выше алгебраическихъ дѣйствіяхъ и нѣтъ ошибки, но ссылка для поясненія этихъ дѣйствій просто на аксіомы можетъ толкнуть ученика на ложный путь. «Со спокойнымъ сердцемъ», какъ говорится, при такомъ способѣ разсужденій онъ подѣлитъ обѣ части уравненія на неизвѣстное, если это возможно, и не замѣтитъ, что при этомъ уже теряется одно рѣшеніе (корень) уравненія. Точно также приложеніемъ той или иной «аксіомы» онъ можетъ ввести въ вопросъ совершенно постороннее рѣшеніе.

Слѣдуетъ разъ и навсегда освоиться съ мыслью, что прямое, непосредственное примѣненіе аксіомъ къ рѣшенію уравненій неприложимо,—и вотъ почему:

А. —Можно, слѣдуя аксіомамъ и не сдѣлавъ никакой ошибки въ дѣйствіяхъ, получить, все же, невѣрный результатъ.

В. — Можно нарушать аксіомы, т. е. поступать вопреки ихъ прямымъ указаніямъ, и, все же, получить вѣрный результатъ.

С. — Аксіомы по самой внутренней сущности не могутъ прямо и непосредственно примѣняться къ уравненіямъ.

Разсмотримъ теперь каждое изъ высказанныхъ выше положеній отдѣльно.

А.—*Примѣненіе аксіомъ и полученіе ошибки.*

Пусть дано

$$x-1=2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Умножаемъ обѣ части уравненія на $x-5$, получаемъ

$$x^2-6x+5=2x-10 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{акс. } 4.$$

Вычитаемъ изъ обѣихъ частей уравненія по $x-7$:

$$x^2-7x+12=x-3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{акс. } 3.$$

Дѣлимъ обѣ части ур-ія на $x-3$:

$$x-4=1. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{акс. } 5.$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ по 4, находимъ

$$x=5. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{акс. } 2.$$

Но найденное рѣшеніе не удовлетворяетъ данному уравненію (1). Единственный корень его, какъ легко убѣдиться, есть $x=3$. Итакъ, совершенно съ виду правильно разсуждая и не сдѣлавъ ни одной ошибки въ дѣйствіяхъ, мы пришли къ невѣрному рѣшенію. Въ чемъ же дѣло?

Недоразумѣнія на этотъ счетъ (особенно при выясненіи такъ называемыхъ «математическихъ софизмовъ») настолько обыкновенны, что остановимся на вопросѣ подробнѣе, рискуя даже нѣсколько наскучить читателю. Прослѣдимъ пройденный нами путь:

Умноженіе на $x-5$ ввело новое рѣшеніе: $x=5$, а дѣленіе на $x-3$ исключило корень $x=3$. Аксіомы, приведенныя въ предыдущей главѣ и надлежаще понятыя, исключаютъ дѣленіе на нуль. Въ этомъ мы убѣждаемся и на данномъ примѣрѣ, такъ какъ дѣленіе ур-ія на $x-3$ есть въ сущности дѣленіе на нуль, ибо число 3 удовлетворяетъ ур-ію (есть его корень). Говоря точнѣе, все это показываетъ, что при дѣйствіяхъ надъ уравненіемъ существо вопроса состоитъ въ томъ, чтобы значеніе входящаго въ него неизвѣстнаго оставалось вѣрнымъ и неизмѣннымъ. Необходимость квалифицировать аксіомы примѣнительно къ этому требованію выдвигаетъ важное начало *эквивалентности* уравненій, или *равнозначности* ихъ, говоря по-русски. Необходимо, чтобы послѣ всякихъ преобразованій уравненія всякое новое по виду получаемое уравненіе было эквивалентно (или равнозначно) данному; т. е., чтобы можно было съ увѣренностью сказать, что всѣ произведенныя надъ уравненіемъ дѣйствія не измѣнили значенія входящихъ въ него неизвѣстныхъ, не ввели новыхъ рѣшеній, или не лишили его прежнихъ.

Не входя въ излишнія здѣсь теоретическія подробности, приведемъ, для ясности, по этому поводу нѣсколько простѣйшихъ примѣровъ.

Если къ обѣимъ частямъ даннаго уравненіи прибавить или отъ обѣихъ частей вычесть одно и то же выраженіе (хотя бы даже содержащее неизвѣстное), то это не измѣнитъ значенія x въ уравненіи (вновь полученное ур-іе, значитъ, будетъ эквивалентно, или равнозначно, данному).

Точно также значеніе x не измѣнится, если данное ур-іе умножить или раздѣлить на какое либо извѣстное число, кромѣ нуля.

Но если обѣ части уравненія умножить или раздѣлить на количество, содержащее неизвѣстное, то вновь полученное ур-іе будетъ, вообще говоря, *не*-эквивалентно данному.

Если бы послѣ высказанныхъ здѣсь замѣчаній у читателя остались еще какія-либо сомнѣнія и возраженія, то мы просили бы его внимательно заняться началомъ эквивалентности по лучшимъ учебникамъ и руководствамъ, съ одной стороны, и дѣйствіями надъ уравненіями съ другой. Тогда онъ быстро убѣдится, что къ вопросу объ уравненіяхъ нельзя подходить *прямо* съ однѣми аксіомами.

Необходимо оговориться также, что все предыдущее нисколько не посягаетъ на правильность и незыблемость аксіомъ,— оно возражаетъ только противъ ихъ примѣненія тамъ, гдѣ онѣ прямо непримѣнимы.

Иной можетъ возразить, что мы искусственно нагромоздили прямое примѣненіе аксіомъ къ рѣшенію уравненія (1) въ случаѣ **A**, и что никто не сталъ бы рѣшать такъ это простое уравненіе. Въ *этомъ* ур-іи (1) рѣшеніе, дѣйствительно, само бросается въ глаза, и каждый, пожалуй, скажетъ его, просто взглянувъ на ур-іе. Но станетъ ли кто возражать, что въ громадномъ большинствѣ случаевъ сложныя ур-ія учениками рѣшаются именно *такъ*, какъ мы это привели выше съ ур-іемъ (1). Простой же и наглядный примѣръ выбранъ здѣсь для того, чтобы убѣдительнѣе привести къ нелѣпости (*reductio ad absurdum*) ложь основного положенія.

B. — *Нарушеніе аксіомъ и вѣрный результатъ.*

Чтобы избѣжать возраженія, что нарушеніемъ одновременно двухъ или болѣе аксіомъ мы какъ-либо уравниваемъ допущенную ошибку, возьмемъ примѣръ, гдѣ поступимъ вопреки прямымъ указаніямъ только *одной* аксіомы.

$$x - 1 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Прибавимъ 10 *только къ первой части* этого ур-ія. Такимъ образомъ, мы самымъ грубымъ образомъ нарушаемъ предписаніе «аксіомы сложенія» и получаемъ

$$x + 9 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Помножаемъ обѣ части ур-ія на $x - 3$:

$$x^2 + 6x - 27 = 2x - 6 \quad \ldots \quad (3) \text{ акс. } 4.$$

Вычитаемъ изъ обѣихъ частей ур-ія по $2x - 6$:

$$x^2 + 4x - 21 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4) \text{ акс. } 3.$$

Дѣлимъ обѣ части на $x + 7$:

$$x - 3 = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (5) \text{ акс. } 5.$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ по 3, имѣемъ

$$x = 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{акс. } 2.$$

Полученное рѣшеніе 3 есть *вѣрный корень* даннаго ур-ія (1), несмотря на то, что нами допущено единственное грубое противорѣчіе противъ аксіомы 2-й, которое не могло быть уравновѣшено неправильнымъ приложеніемъ какой-либо другой аксіомы, ибо въ остальномъ мы прямо и точно прилагали «аксіомы». Изъ предыдущаго (**A**) уже ясно, что невѣрнымъ пониманіемъ приложенія аксіомъ мы получили затѣмъ здѣсь ур-ія (3) и (5) неэквивалентныя данному, а потому и получили такой «неожиданный» результатъ.

C. — *Аксіомы по самой своей сущности не имѣютъ прямого отношенія къ уравненіямъ.*

Аксіома говоритъ: если къ равнымъ величинамъ прибавить равныя и т. д., то и результаты будутъ равны. Вопросъ же, преслѣдуемый разрѣшеніемъ уравненія, состоитъ въ томъ: *для какого значенія x обѣ части ур-ія будутъ равны*. Такимъ образомъ, если къ одной части уравненія придать нѣкоторую величину, не придавая ея къ другой; то, все же, *для нѣкотораго значенія x*, хотя бы и новаго, въ результатѣ получится равенство.

Ариѳметика, имѣя дѣло съ обыкновенными числами, стремится только узнать, что извѣстное получаемое въ результатѣ число равно извѣстному другому. Но алгебра, имѣя дѣло съ уравненіями (условными равенствами) желаетъ знать, *при какихъ условіяхъ* данныя выраженія представляютъ одни и тѣ же числа,—другими словами, для какихъ значеній неизвѣстнаго данное уравненіе вѣрно.

Въ отдѣлѣ **B** настоящей главы возраженіе противъ уравненія (2) состоитъ не въ томъ, что первая часть его не равна второй (онѣ «равны» настолько же, насколько и обѣ части перваго даннаго ур-ія), но въ томъ, что обѣ его части не равны *для того же значенія x*, какъ и въ ур-іи (1). Словомъ, ур-іе (1) *неэквивалентно* (2).

Вообще, изученіе и выводъ принципа эквивалентности можетъ многое дать въ смыслѣ математическаго развитія каждому желающему поработать въ области математики. Прежде всего какъ видимъ, это натолкнетъ его на надлежащее приложеніе аксіомъ. Въ примѣненіи къ уравненіямъ, напр., аксіомы играютъ роль только при выводахъ и доказательствахъ начала эквивалентности. Прямое же приложеніе ихъ къ рѣшенію уравненій есть заблужденіе, котораго слѣдуетъ всячески избѣгать.

Провѣрка рѣшенія уравненія.

Весьма часто учащіеся *«доказываютъ»* правильность рѣшенія какого-либо уравненія такимъ путемъ. Найденную величину для неизвѣстнаго подставляютъ въ обѣ части даннаго уравненія, затѣмъ надъ обѣими частями полученнаго выраженія продѣлываютъ указанныя знаками дѣйствія и, получивъ числовое тождество, смѣло говорятъ: «что и требовалось доказать», хотя... непригодность подобнаго «доказательства» можно въ свою очередь доказать на примѣрахъ, гдѣ получаемая нелѣпость прямо бьетъ въ глаза.

Возьмемъ такой примѣръ:

$$1+\sqrt{x+2}=1-\sqrt{12-x} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

И, рѣшая его такъ, какъ обыкновенно это дѣлается, получаемъ:

$$\sqrt{x+2}=-\sqrt{12-x}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$x+2=12-x; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$2x=10;$$

$$x=5.$$

Найденное значеніе для x подставимъ въ данное уравненіе (1) и «докажемъ» правильность рѣшенія:

$$1+\sqrt{5+2}=1-\sqrt{12-5};$$

$$\sqrt{5+2}=-\sqrt{12-5};$$

$$5+2=12-5;$$

$$7=7.$$

Казалось бы, все обстоитъ благополучно, хотя на самомъ дѣлѣ не трудно видѣть, что если мы въ уравненіе (1) подставимъ вмѣсто x число 5 и приведемъ обѣ части къ простѣйшему виду, то получается для первой части $1+\sqrt{7}$, а для второй: $1-\sqrt{7}$, — числа явно неравныя другъ другу, а потому, слѣдовательно, 5 *не есть корень* даннаго уравненія, чтобы ни утверждала приведенная нами выше «провѣрка».

Корень 5 былъ незамѣтно введенъ въ уравненіе, когда обѣ его части возвышались въ квадратъ. Другими словами, — корень 5 удовлетворяетъ уравненію (3), но никакъ не (1) и не (2). Но если бы въ какомъ либо изъ уравненій (1), или (2) измѣнить знакъ, то получилось бы уравненіе, удовлетворяющееся рѣшеніемъ $x=5$; а именно:

$$1+\sqrt{x+2}=1+\sqrt{12-x}.$$

Итакъ, необходимо всегда помнить, что если раціональное уравненіе получается изъ ирраціональнаго путемъ возвышенія въ степень, то существуетъ всегда другое ирраціональное уравненіе, отличающееся отъ даннаго только знакомъ какого-либо члена или членовъ, и изъ котораго также можно получить то же самое раціональное уравненіе.

Софистическая каррикатура.

Разобранный нами выше неправильный методъ «доказательства» вѣрности рѣшенія уравненія можно свести къ довольно извѣстному, хотя и грубому логическому софизму, стремящемуся «доказать», что всякое математическое дѣйствіе можно свести на что угодно.

Доказать, что $5=1$.

Вычитая изъ каждой части по 3, находимъ: $2=-2$.

Возвышая въ квадратъ обѣ части: $4=4$.

Итакъ $5=1!..$

Неправильные отвѣты.

Въ учебникахъ и задачникахъ по алгебрѣ нерѣдко можно встрѣтить уравненіе такого вида:

$$x+5-\sqrt{x+5}=6,$$

и въ «отвѣтахъ», гдѣ приведены рѣшенія задачъ, кратко сообщается, что корни этого уравненія суть «4, или —1». Это невѣрно. Рѣшеніе даннаго уравненія есть 4, а —1 не есть рѣшеніе. Къ несчастью, подобнаго рода задачи безъ надлежащихъ разъясненій встрѣчаются чаще, чѣмъ слѣдуетъ.

Алгебраическіе софизмы.

Какой-то острякъ увѣрялъ, что во всей литературѣ существуетъ на самомъ дѣлѣ только небольшое число основныхъ остротъ или анекдотовъ, но со многими видоизмѣненіями. Онъ пытался даже дать классификацію остроумныхъ изреченій, сводя ихъ къ небольшой таблицѣ типичныхъ примѣровъ. Другой остроумецъ уменьшалъ и это число типовъ, сведя ихъ, если не ошибаемся, всего къ тремъ. Въ свою очередь нашелся еще и третій, который сдѣлалъ послѣдній шагъ и заявилъ, что ничего подобнаго нѣтъ, что остротъ, или шутокъ, вообще говоря, не существуетъ. Успѣлъ ли этотъ послѣдній дѣйствительно исключить понятіе объ остроуміи, какъ таковомъ, или же къ огромному запасу старыхъ остротъ онъ прибавилъ еще одну,—это, конечно, зависитъ отъ взгляда на предметъ.

Въ настоящей главѣ мы, все же, сдѣлаемъ попытку если не классифицировать, то до нѣкоторой степени освѣтить хотя бы нѣкоторые изъ наиболѣе распространенныхъ алгебраическихъ, такъ называемыхъ, «софизмовъ» или парадоксовъ. При этомъ мы имѣемъ въ виду не хитроумное запутываніе вопросовъ, но скорѣе наоборотъ,—разборъ извѣстныхъ типовъ этого рода задачъ подъ рискомъ даже въ значительной степени лишить ихъ присущей имъ «таинственности»... Софизмы подобны привидѣніямъ,—они не выносятъ свѣта. Анализъ гибеленъ для извѣстнаго рода вопросовъ.

О тѣхъ классахъ, или подклассахъ, общихъ логическихъ ошибокъ, которые приводитъ въ своей «Логикѣ» Аристотель и которыя зависятъ отъ неправильныхъ построеній силлогизмовъ,— въ случаяхъ математическихъ софизмовъ приходится говорить мало. Наиболѣе часто въ софизмахъ, разсматриваемыхъ нами, изъ этихъ ошибокъ встрѣчается та, которая зависитъ отъ неправильнаго построенія или употребленія такъ называемой малой посылки. Въ математикѣ подобное логическое противорѣчіе прикрывается незамѣтнымъ для новичка допущеніемъ нѣкотораго обратнаго, съ виду очевиднаго, предложенія, или же примѣненіемъ процесса математическихъ дѣйствій, который кажется неоспоримымъ, каково бы ни было его приложеніе по существу. Возьмемъ хотя бы такой примѣръ:

Пусть c будетъ среднее ариѳметическое между двумя *неравными* числами a и b, т. е. $c=\frac{a+b}{2}$, и, слѣдовательно:

$$a+b=2c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Отсюда

$$(a+b)(a-b)=2c(a-b);$$

$$a^2-b^2=2ac-2bc;$$

Перенеся члены, имѣемъ:

$$a^2-2ac=b^2-2bc.$$

Придавая къ обѣимъ частямъ равенства по c^2;

$$a^2-2ac+c^2=b^2-2bc+c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Отсюда

$$(a-c)^2=(b-c)^2;$$

или

$$a-c=b-c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Слѣдовательно,

$$a=b.$$

А между тѣмъ было дано, что a и b неравны! Въ чемъ же дѣло?

Конечно, обѣ части равенства (3) ариѳметически равны, но *знаки*-то этихъ чиселъ противоположны; такъ что равны только ихъ квадраты (2). Допускаемая здѣсь ошибка настолько очевидна, что, казалось бы, не стоило объ ней и говорить, если бы въ томъ или иномъ видѣ на ней не строились весьма многіе такъ называемые математическіе «софизмы».

Указывая въ предыдущей главѣ на ошибочные пріемы провѣрки правильности рѣшенія уравненій, мы привели тамъ другой примѣръ получаемаго, якобы математически, абсурда. Поставимъ теперь вопросъ на обще-логическую почву, и мы тотчасъ найдемъ источникъ всѣхъ нашихъ ложныхъ выводовъ. Въ сущности, мы строимъ неправильные силлогизмы, подобные нижеслѣдующимъ, которые нарочно приводимъ параллельно въ рядомъ стоящихъ колоннахъ:

Птица — животное.

Лошадь — животное.

Слѣд.: Лошадь есть птица.

Два равныхъ числа имѣютъ равные квадраты.

Эти два числа имѣютъ равные квадраты.

Слѣд.: Эти два числа равны.

По поводу каждаго изъ этихъ неправильныхъ логическихъ построеній съ полнымъ правомъ можно привести и два такихъ параллельныхъ замѣчанія:

Даже малоразвитой человѣкъ будетъ издѣваться надъ такимъ заключеніемъ, ибо оно нелѣпо; но тотъ же человѣкъ не замѣтитъ иногда подобной же ошибки въ устахъ, напримѣръ, политическаго оратора, — особенно своей партіи.

Каждый «первокурсникъ» высшей школы посмѣется всякій разъ, какъ получается нелѣпое заключеніе, и онъ же съ легкимъ сердцемъ готовъ примириться съ ошибочными методами провѣрки рѣшеній, указанными въ предыдущей главѣ.

Въ случаяхъ, когда приходится имѣть дѣло съ квадратными корнями, подмѣтить ошибку иногда не такъ-то легко. По общему соглашенію о знакахъ, если нѣтъ особой оговорки, — передъ $\sqrt{}$ подразумѣвается знакъ $+$. Сообразно съ этимъ для положительныхъ четныхъ или дѣйствительныхъ нечетныхъ корней вѣрно, что «одинаковые корни изъ равныхъ количествъ равны»; и отсюда

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$$

Но если a и b отрицательны, а n—четно, то этого тождества уже не существуетъ, и, принимая его, мы приходимъ къ абсурду:

$$\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1};$$
$$\sqrt{1} = (\sqrt{-1})^2;$$
$$1 = -1.$$

Или же, принимая, что $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ для всякихъ значенiй буквъ, мы, казалось бы, можемъ написать слѣдующее тождество (ибо каждая часть его $= \sqrt{-1}$):

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}.$$

Отсюда

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

Освобождая отъ дробей:

$$(\sqrt{1})^2 = (\sqrt{-1})^2$$

или

$$1 = -1.$$

Эти «обманы по несчастью», гдѣ, отправляясь отъ общаго правила, приходятъ къ такому спецiальному случаю, когда нѣкоторыя особыя обстоятельства дѣлаютъ это правило неприложимымъ, а также софизмы, получаемые обратнымъ путемъ, извѣстный математикъ Морганъ предлагалъ раздѣлить на три разряда, относя ихъ всѣ въ область «псевдо-алгебры». По общему правилу, напримѣръ, равныя величины, раздѣленныя на равныя, даютъ и равныя частныя. Но это правило теряетъ свою силу, если равные дѣлители являются въ видѣ нуля. Приложенiе общаго правила къ этому специальному случаю даетъ весьма большое число весьма распространенныхъ математическихъ софизмовъ. Такъ, имѣемъ тождество:

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2.$$

Первую часть его представимъ какъ произведенiе суммы на разность, а во второй вынесемъ общаго множителя; получимъ

$$(x+x)(x-x) = x(x-x) \ldots\ldots\ldots (1)$$

Сокращая на $x-x$, получимъ:

$$x+x = x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

или

$$2x = x,$$

т. е.

$$2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Абсурдъ получился потому, что, дѣля на 0 тождество (1), мы обратили его въ ур-iе (2), которое удовлетворяется только корнемъ $x=0$. Дѣля же (2) на x, мы и получаемъ *нелѣпость* (3).

Вотъ еще примѣръ:

Пусть

$$x = 1.$$

Тогда

$$x^2 = x.$$

И

$$x^2 - 1 = x - 1.$$

Дѣля на $x-1$:

$$x + 1 = 1.$$

Но такъ какъ по положенiю $x=1$,

то, подставляя, получаемъ $2=1$.

Употребленiе расходящихся безконечныхъ рядовъ даетъ другiе многочисленные образцы математическихъ софизмовъ, секретъ которыхъ состоитъ въ томъ, что молчаливо принимается за вѣрное для всѣхъ рядовъ нѣчто такое, что̀ на самомъ дѣлѣ вѣрно только для сходящагося ряда. Такъ называемый «гармоническій рядъ» употребляется съ этой цѣлью особенно часто.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ \ldots$$

Разобьемъ этотъ рядъ на группы членовъ такъ:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{9}+\ \ldots \text{всего 8 член.}\right)+\left(\frac{1}{17}+\ \ldots\ \text{всего 16 член.}\right)+\ldots$$

Каждая заключенная въ скобки группа членовъ больше $\frac{1}{2}$.

Слѣдовательно, сумма n первыхъ членовъ ряда возрастаетъ безгранично при безграничномъ возрастаніи n. Итакъ, сумма членовъ ряда безконечна. Рядъ есть расходящійся. Но если въ этомъ ряду знаки $+$ и $-$ поперемѣнно чередуются, то, какъ извѣстно, рядъ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots.$$

есть сходящійся и сумма его равна $\log 2$. Запомнивъ это, не трудно будетъ разобраться въ такомъ «софизмѣ», гдѣ отправляются отъ этого ряда, выражающаго $\log 2$.

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ \ldots$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ \ldots.\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ \ldots\right)=$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\right)\right]-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}+\ldots\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\right)=0$$

Но $\log 1$ также $=0$, значитъ $\log 2=\log 1=0$.

Вмѣсто двухъ послѣднихъ скобокъ мы могли бы написать знаки безконечности ∞ и вычесть: $\infty - \infty = 0$.

Безконечность и 0 для творца математическихъ софизмовъ, вѣдь, тоже «количества»!..

Молчаливо допуская, что всякое дѣйствительное число имѣетъ логариѳмъ, и что онъ подчиняется тѣмъ же законамъ, что и логариѳмы ариѳметическихъ чиселъ, можно создать новый типъ софизмовъ:

$$(-1)^2 = 1.$$

Такъ какъ логариѳмы равныхъ величинъ равны, то:

$$2\log(-1) = \log 1 = 0.$$

$$\text{Итакъ } \log(-1) = 0.$$

$$\text{А также } \log(-1) = \log 1.$$

$$\text{Значитъ } -1 = 1!..$$

Идея о софизмахъ этого послѣдняго типа была посѣяна знаменитымъ Иваномъ Бернулли.

Дадимъ еще и такой образецъ софизма:

Если взять дробь $\frac{1}{x}$, то она, какъ извѣстно, возрастаетъ съ уменьшеніемъ знаменателя.

Поэтому, такъ какъ рядъ 5, 3, 1, -1, -3, -5 есть рядъ убывающій, то рядъ вида

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5} \text{ и т. д...}$$

есть возрастающій рядъ. Но въ возрастающемъ ряду каждый послѣдующій членъ больше предыдущаго, значитъ:

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{5}, 1 > \frac{1}{3}, -1 > 1, \text{ и т. д...}$$

Вотъ поистинѣ нежиданный результатъ! Выходитъ, что мы «доказали» будто

$$-1 > +1!$$

Закончимъ настоящую главу общимъ замѣчаніемъ, что здравое и правильное разсужденіе, все же, не въ силахъ совершенно убить ни чисто формальныхъ, логическихъ, ни математическихъ софизмовъ. Таково ужъ свойство человѣческаго ума. Но что же изъ этого? Если существуетъ, напримѣръ, поддѣльная монета, то это вѣдь не значитъ, что подлинная не имѣетъ никакой цѣнности. Изученіе поддѣлки, наоборотъ, можетъ научить насъ въ будущемъ различать всякую фальшь, какъ бы тонко и хитро намъ ее ни преподносили. Разборъ всякаго рода фальши и логическихъ подтасовокъ можетъ въ такомъ случаѣ быть предметомъ не только пріятныхъ, но и полезныхъ развлеченій.

Задача 59-я.

Опровергнуть софизмъ:

Возьмемъ тождество

$$4-10+\frac{25}{4}=9-15+\frac{25}{4},$$

которое можно представить въ видѣ

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей квадратный корень, имѣемъ

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ по $\frac{5}{2}$, имѣемъ:

$$2=3.$$

Задача 60-я.

Опровергнуть софизмъ:

Очевидно, что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Логариѳмируя обѣ части, получаемъ

$$2\lg\frac{1}{2}>3\lg\frac{1}{2}.$$

Дѣля обѣ части на одно и то же количество $\lg\frac{1}{2}$, получаемъ:

$$2 > 3.$$

Задача 61-я.

Дѣлежъ верблюдовъ.

Старикъ арабъ, имѣвшій трехъ сыновей, распорядился, чтобы они послѣ его смерти подѣлили принадлежащее ему стадо верблюдовъ такъ, чтобы старшій взялъ половину всѣхъ верблюдовъ, средній—треть и младшій—девятую часть всѣхъ верблюдовъ. Старикъ умеръ и оставилъ 17 верблюдовъ. Сыновья начали дѣлежъ, но оказалось, что число 17 не дѣлится ни на 2, ни на 3, ни на 9. Въ недоумѣніи, какъ быть, братья обратились къ шейху (старшина племени). Тотъ пріѣхалъ къ нимъ на собственномъ верблюдѣ и раздѣлилъ по завѣщанію. Какъ онъ это сдѣлалъ?

Рѣшеніе.

Шейхъ пустился на уловку. Онъ прибавилъ къ стаду на время своего верблюда, тогда стало 18 верблюдовъ. Раздѣливъ это число, какъ сказано въ завѣщаніи, шейхъ взялъ своего верблюда обратно; и получилось:

у старшаго брата $\frac{1}{2}$	9	верблюд.,
у средняго брата $\frac{1}{3}$	6	»
у младшаго брата $\frac{1}{9}$	2	»
Всего . . .	17	верблюд.

Замѣчаніе. Задача представляетъ родъ математическаго софизма. Слѣдуетъ замѣтить, что сумма $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$, т. е. не равна единицѣ. Но отношеніе цѣлыхъ чиселъ 9, 6 и 2 равно отношенію дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$.

Положительныя и отрицательныя числа.

Говорить объ ариѳметическомъ числѣ, какъ о положительномъ,—до сихъ поръ еще составляетъ такое распространенное и общее заблужденіе, что всегда полезно вносить на этотъ счетъ соотвѣтствующія поправки. Числа, съ которыми мы оперируемъ въ ариѳметикѣ, нельзя назвать ни положительными, ни отрицательными. Это числа, если можно такъ выразиться, *не имѣющія знака*. Отрицательныя числа появились не позднѣе положительныхъ, какъ иные ошибочно говорятъ, смѣшивая двѣ разныхъ вещи; и тѣ и другія числа въ одно и то же время одинаково лежатъ въ понятіи какъ отдѣльной личности, такъ и народа вообще. На какомъ основаніи мы можемъ утверждать, говоря о двухъ прямо *противоположныхъ* вещахъ, что идея объ одной сдѣлалась принадлежностью человѣческаго ума раньше, чѣмъ идея о другой; или же говорить, что первое яснѣе, чѣмъ второе? Выраженія «положительный» и «отрицательный» соотносительны (коррелятивны), и ни одного изъ нихъ нельзя употребить, не вспомнивъ о другомъ.

Хорошимъ упражненіемъ для развитія яснаго пониманія тѣхъ соотношеній, которыя существуютъ между положительными, отрицательными и ариѳметическими числами, служитъ разсмотрѣніе соотвѣтствія между положительнымъ и отрицательнымъ рѣшеніемъ уравненія и ариѳметическимъ рѣшеніемъ задачи, давшей начало уравненію, въ связи съ вопросомъ, благодаря какимъ начальнымъ предположеніямъ получится это соотвѣтствіе.

Для нагляднаго выясненія соотношеній, существующихъ между положительнымъ, отрицательнымъ и ариѳметическимъ числомъ, быть можетъ, нѣтъ лучше прибора, чѣмъ вѣсы. Этотъ приборъ прежде всего наилучше выясняетъ ту прямую *противоположность,* которая существуетъ между положительнымъ и отрицательнымъ числомъ. Такъ, тяжесть, находящаяся, скажемъ, на положительной чашкѣ вѣсовъ, уравновѣшиваетъ то напряженіе притяженія, которое оказываетъ равная по массѣ тяжесть, положенная на другую чашку вѣсовъ. Двѣ тяжести на противоположныхъ чашкахъ вѣсовъ имѣютъ равныя массы, равно какъ и два числа, выражающія эти тяжести, имѣютъ одинаковое ариѳметическое значеніе.

Несчастливое выраженіе «меньше, чѣмъ ничто» (пущенное въ оборотъ Штифелемъ), попытка разсматривать отрицательныя числа отдѣльно отъ положительныхъ, «изученіе» отрицательныхъ чиселъ позднѣе положительныхъ, а также названіе «фиктивныхъ», придаваемое прежде отрицательнымъ числамъ,—все это кажется теперь довольно страннымъ. Но только теперь, послѣ того, какъ ясно усвоено истинное значеніе положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, какъ величинъ прямо противоположныхъ по значенію. Такія поясненія, какъ числа дебета и кредита въ бухгалтеріи, или же показанія термометра выше и ниже нуля, также могутъ до нѣкоторой степени способствовать полнотѣ пониманія о противоположности положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ.

Объ иллюстраціи положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ съ помощью прямой линіи см. главу «Наглядное представленіе комплексныхъ чиселъ».

Здѣсь, пожалуй, кстати будетъ привести и небольшую историческую справку изъ Кайорп *(History of Elementary Mathematics)* объ отрицательныхъ числахъ: «Отрицательныя числа казались «абсурдомъ» или «фикціей» такъ долго, что математики не наталкивались даже на ихъ наглядное или графическое представленіе... Впрочемъ, если изгнать всякое наглядное представленіе посредствомъ линій, или термометра, то отрицательныя числа и нынѣшнему учащемуся могли бы показаться такимъ же абсурдомъ, какимъ они казались прежнимъ алгебраистамъ».

Задача 62-я.

Два общихъ наибольшихъ дѣлителя.

Допустимъ, что дано два количества

$$x^3 - a^3 \text{ и } a^2 - x^2;$$

и затѣмъ на вопросъ объ ихъ О. Н. Д. (общемъ наибольшемъ дѣлителѣ) одинъ отвѣтилъ, что О. Н. Д. этихъ количествъ есть $x-a$, а другой, что такой дѣлитель есть $a-x$. Спрашивается: кто правъ?

Рѣшеніе.

Оба отвѣта правильны. Слѣдуетъ только, чтобы отвѣчающій правильно понялъ и обсудилъ вопросъ, такъ какъ въ наличности *двухъ* О. Н. Д. нѣтъ ничего страннаго. Если бы количества были предложены въ формѣ $x^3 - a^3$ и $x^2 - a^2$, то отвѣчающій, естественно, сказалъ бы, что О. Н. Д. ихъ есть $x-a$, и, пожалуй, иной настаивалъ бы, что существуетъ только онъ одинъ. Но не трудно видѣть, что $a-x$ есть тоже общій дѣлитель и такого же порядка, какъ и $x-a$.

Быть можетъ,—замѣтимъ здѣсь кстати,—слѣдовало бы при изученіи элементарной алгебры обращать почаще вниманіе на то, что всякій рядъ алгебраическихъ выраженій можетъ имѣть *два общихъ наибольшихъ дѣлителя*, равныхъ по величинѣ, но противоположныхъ по знаку.

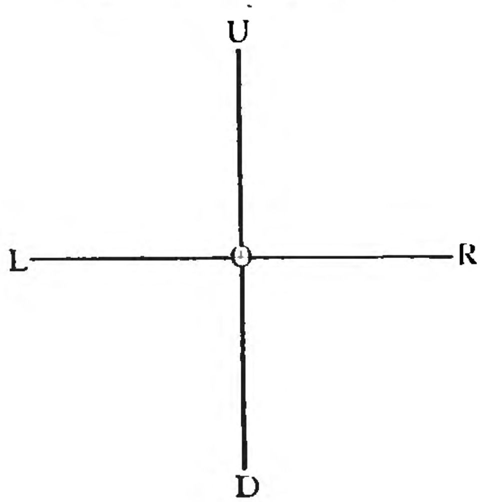
Такъ какъ слово «наибольшій» обозначаетъ превосходную степень, то математику въ данномъ случаѣ приходится извиняться предъ филологомъ за прегрѣшеніе противъ синтаксиса языка.

Въ самомъ дѣлѣ, какой солецизмъ!.. *Два наибольшихъ*...

Примѣчаніе. Все сказанное объ О. Н. Д. можно, очевидно, съ такимъ же основаніемъ отнести и къ общему наименьшему кратному. Такъ что съ алгебраической точки зрѣнія совершенно естественно говорить о *двухъ О. Н. К.*

Наглядное изображенiе комплексныхъ чиселъ.

Возьмемъ отрѣзокъ прямой OR длиной въ одну единицу, направленный вправо отъ O (фиг. 86) и примемъ его за $+1$; тогда -1 изображается отрѣзкомъ OL той же прямой, равнымъ OR, но направленнымъ влѣво отъ O. Вообще говоря, $+a$ изобразится линiей въ a единицъ длины и направленной вправо отъ O, и $-a$ линiей же въ a единицъ длины, но направленной влѣво отъ O. Таково простѣйшее и наиболѣе извѣстное приложенiе прямой линiи, которое даетъ намъ геометрическое изображенiе такъ называемыхъ *дѣйствительныхъ* (положительныхъ и отрицательныхъ) чиселъ. Подобное приложенiе прямой для геометрическаго изображенiя чиселъ разнаго знака было, какъ оказывается, извѣстно еще древнимъ индусамъ, но намъ неизвѣстны случаи подобнаго примѣненiя въ Европѣ до 1629, когда въ сочиненiи «Invention Nouvelle en l'Algèbre» далъ его Альбертъ Жираръ.



Фиг. 86.

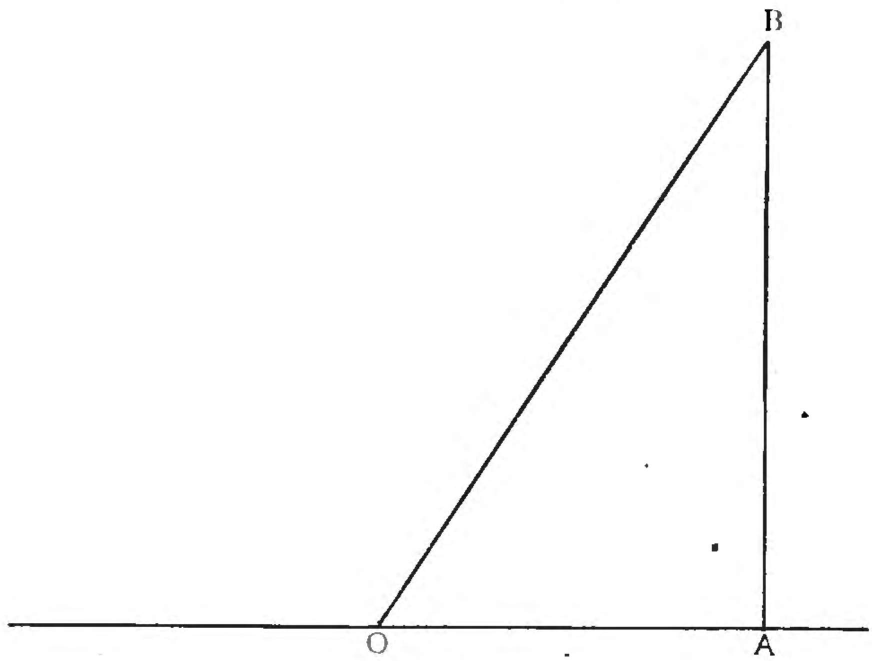
Представимъ теперь себѣ, что направленная въ положительную сторону въ единицу длины линiя OR вращается около O, какъ центра, въ направленiи, принятомъ за *положительное* (противоложно движенiю часовой стрѣлки) и изъ положенiя OR $(+1)$ приходитъ въ положенiе OL (-1), описавъ при этомъ *два прямыхъ* угла. Такимъ образомъ круговому вращенiю положительной единицы длины OR на два прямыхъ угла, когда она принимаетъ прямо противоположное направленіе OL, соотвѣтствуетъ измѣненіе при единицѣ знака: отъ $+1$ мы переходимъ къ -1. Но тотъ же результатъ получится, если мы положительную единицу умножимъ дважды на множитель $+\sqrt{-1}$ (какъ извѣстно, $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$). Итакъ, круговому перемѣщенію прямой на каждый прямой уголъ соотвѣтствуетъ въ данномъ случаѣ множитель $\sqrt{-1}$. Слѣдовательно, когда линія OR приметъ направленіе OU (*вверхъ* и перпендикулярно къ OR), то она изобразится числомъ $+\sqrt{-1}$. Подобнымъ же образомъ, продолжая вращеніе прямой въ томъ же направленіи, мы видимъ, что изъ положенія OL (-1), она черезъ положеніе OD приходитъ опять въ положеніе OR $(+1)$, описавъ еще два прямыхъ угла. Аналитически то же получится, если мы -1 дважды умножимъ на $-\sqrt{-1}$; такъ что множитель $-\sqrt{-1}$ соотвѣтствуетъ вращенію OL на прямой уголъ къ положенію OD, и эту послѣднюю линію (перпендикуляръ къ OL, направленный *внизъ*), мы и должны обозначить числомъ $-\sqrt{-1}$.

Итакъ, если разстоянія, отсчитываемыя вправо, мы будемъ брать съ знакомъ $+$, то разстоянія влѣво должны быть со знакомъ $-$, количество же $b\sqrt{-1}$ обозначитъ линію въ b единицъ длины, направленную *вверхъ*, а количество $-b\sqrt{-1}$ означаетъ линію въ b единицъ длины и направленную *внизъ*.

Количества, въ которыя входитъ множителемъ $\sqrt{-1}$, носятъ названіе *мнимыхъ*, а только что указанное геометрическое изображеніе мнимыхъ величинъ было впервые предложено Кюномъ въ Актахъ С.-Петербургской Академіи Наукъ за 1750 г.

Для графическаго изображенія *комплекснаго* числа, т. е. числа вида $a+b\sqrt{-1}$, отъ точки O (фиг. 87) откладываемъ въ положительномъ направленіи линію OA, равную a единицамъ длины; изъ A возставляемъ перпендикуляръ AB, равный b единицамъ длины и въ направленіи, указываемомъ множителемъ

$\sqrt{-1}$; наконецъ, проводимъ прямую OB. Эта послѣдняя линія по величинѣ и направленію и есть геометрическое изображеніе комплекснаго количества $a+b\sqrt{-1}$. Длина OB, равная $\sqrt{a^2+b^2}$, носитъ названіе *модуля* взятаго нами комплекснаго числа.



Фиг. 87.

Только что указанная геометрическая интерпретація комплексныхъ количествъ была впервые предложена Жаномъ Робертомъ Аргапомъ (Argand) изъ Женевы въ 1806 году. Онъ же первый въ 1814 г. употребилъ и терминъ «модуль» въ указанномъ выше смыслѣ.

Работы Кюна, Аргана и въ особенности датскаго ученаго Весселя (въ 1797 г. Академія Наукъ въ Копенгагенѣ), распространившаго представленіе комплексныхъ количествъ на геометрію въ пространствѣ, представляютъ тѣ подготовительныя ступени, основываясь на которыхъ въ настоящее время выросъ новый важный методъ: «теорія векторовъ» (векторіальный анализъ). Во всей полнотѣ и широтѣ вопросъ этотъ впервые охваченъ и обработанъ проф. Вильямомъ Гамильтономъ въ 1852 и 1866 годахъ подъ именемъ «*Кватерніоновъ*».

Вмѣсто символа $\sqrt{-1}$ обыкновенно употребляется буква i. Обозначеніе это впервые было предложено Эйлеромъ. Популяризацію же среди математиковъ какъ этого символа, такъ и работъ Кюна и Аргана слѣдуетъ приписать «первому изъ математиковъ» К. Ф. Гауссу.

Столь противоположныя по смыслу названія, какъ «дѣйствительный» и «мнимый» были впервые употреблены Декартомъ при изслѣдованіи корней уравненій. Съ тѣхъ поръ это слово *мнимый* такъ и осталось въ математическомъ языкѣ, несмотря на все его несоотвѣтствіе, какъ видимъ, съ дѣйствительнымъ характеромъ количествъ вида $a\sqrt{-1}$ и несмотря на попытки ввести другое болѣе соотвѣтствующее наименованіе. Здѣсь, быть можетъ, кстати будетъ указать на тотъ огромный авторитетъ, которымъ пользовался Декартъ въ математическомъ мірѣ даже въ обозначеніяхъ и выработкѣ алгебраическаго языка. Первыя буквы азбуки для обозначенія извѣстныхъ величинъ и послѣднія—для обозначенія неизвѣстныхъ, нынѣшнее употребленіе показателей степени, точка—для обозначенія умноженія—все это получило начало или окончательно утвердилось авторитетомъ Декарта.

Исторія науки и въ данномъ случаѣ подверждаетъ правило, что каждое новое *обобщеніе* вопроса заключаетъ въ себѣ, какъ частные случаи, все то, что прежде было извѣстно объ этомъ предметѣ. Общая форма комплекснаго количества

$$a+bi$$

заключаетъ въ себѣ, какъ частные случаи, и «дѣйствительныя», и «мнимыя» количества. При $b=0$ комплексъ $a+bi$ даетъ дѣйствительную величину, при $a=0$ получается мнимая. Общая форма комплекснаго числа есть сумма дѣйствительнаго и мнимаго.

Въ 1799 году Гауссъ обнародовалъ первое изъ своихъ 3-хъ доказательствъ, что всякое алгебраическое уравненіе имѣетъ корень вида $a+bi$.

Уравненія первой степени (линейныя) даютъ намъ возможность разсматривать только дѣйствительныя количества противоположныхъ знаковъ: $x+a=0$ и $x-a=0$ удовлетворяются соотвѣтственно значеніями $-a$ и $+a$. Неполное квадратное ур-іе вида $x^2+a^2=0$ и $x^2-a^2=0$ уже вводитъ въ разсмотрѣніе и чисто мнимыя количества, такъ какъ корни этихъ уравненій суть $\pm ai$ и $\pm a$. Наконецъ, полное квадратное уравненіе

$$ax^2 + bx + c = 0$$

даетъ для корней уравненія пару сопряженныхъ комплексныхъ корней (т. е. два количества вида: $a_1 + b_1 i$ и $a_1 - b_1 i$) при условіи, что b не равно нулю, и что выраженіе $b^2 - 4ac$ отрицательно. Послѣднее выраженіе, составленное изъ коэффиціентовъ даннаго уравненія, $(b^2 - 4ac)$ носитъ спеціальное названіе *дискриминанта* ур-ія.

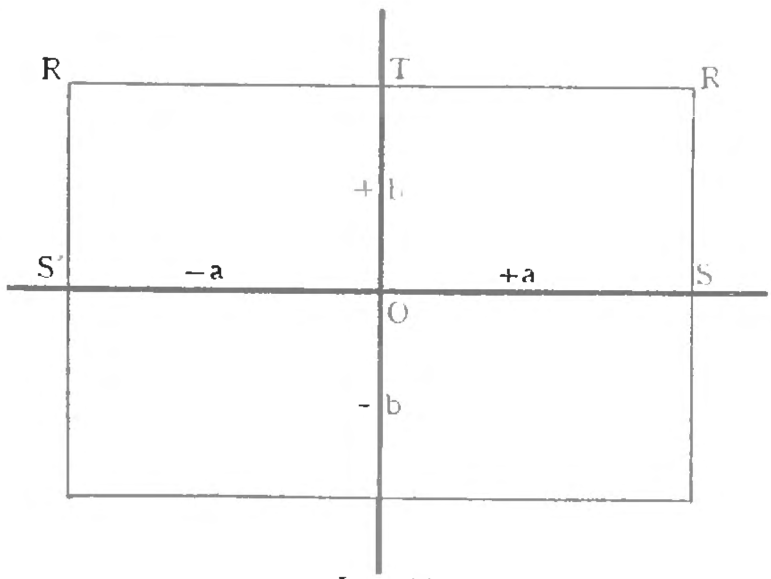
Какъ видимъ, знакомство съ мнимыми и комплексными количествами является непосредственнымъ результатомъ простого алгебраическаго анализа. Но полное пониманіе и надлежащая оцѣнка этихъ количествъ невозможны до тѣхъ поръ, пока не сдѣлается возможнымъ наглядное и, такъ сказать, ощутимое изученіе ихъ. Исторія вопроса и показываетъ намъ, какъ въ изученіе алгебры вводилось постепенно графическое изображеніе положительныхъ, отрицательныхъ, мнимыхъ и комплексныхъ чиселъ.

Подобно тому, какъ раньше съ помощью вѣсовъ мы выясняли понятіе о положительномъ и отрицательномъ количествѣ, можно найти много практическихъ примѣровъ, уясняющихъ комплексное и мнимое число. Такъ, напр., возьмемъ игру въ ножной мячъ (футболъ). Если *силы* ударовъ, толкающихъ мячъ по направленію OR (см. фиг. 86), обозначить положительными, дѣйствительными числами, то силы, двигающія мячъ въ прямо противоположномъ направленіи, выразятся отрицательными числами. При этомъ силы, заставляющія мячъ двигаться въ направленіи OU или OD, изобразятся мнимымъ числомъ, а всякая иная сила, двигающая мячъ въ любую иную сторону площади игры, изобразится комплекснымъ числомъ.

Правила знаковъ при алгебраическомъ умноженіи.

Геометрическое объясненіе.

Разстояніе направо и вверхъ отъ O (фиг. 88) условимся брать со знакомъ $+$, а разстояніе налѣво и внизъ условимся брать со знакомъ $-$. Выполнимъ прилагаемый здѣсь чертежъ (фиг. 88) и разсмотримъ полученные прямоугольники.



Фиг. 88.

Прямоугольникъ OR имѣетъ $a \cdot b$ единицъ площади. *Примемъ*, что это произведеніе имѣетъ знакъ $+$.

Предположимъ теперь, что SR, оставаясь параллельной самой себѣ, передвигается влѣво и, переходя черезъ положеніе OT, передвинется еще лѣвѣе на a единицъ и приметъ положеніе $S'R'$. Основаніе прямоугольника при этомъ будетъ все уменьшаться, обратится въ нуль и, перейдя черезъ это значеніе, станетъ отрицательнымъ. Точно также сдѣлается отрицательнымъ и прямоугольникъ. Значитъ произведеніе $-a$ на $+b$ станетъ отрицательнымъ, оно $= -ab$.

Предположимъ далѣе, что TR' передвигается внизъ, оставаясь параллельной самой себѣ, и опустится на b единицъ ниже линіи SS'. Прямоугольникъ, раньше отрицательный (со знакомъ —), перейдетъ черезъ значеніе 0 и станетъ теперь положительнымъ. Итакъ, произведеніе $-a$ на $-b$ даетъ $+ab$.

Путемъ подобнаго же разсужденія не трудно видѣть, что $(+a)(-b) = -ab$.

На основаніи опредѣленія умноженія.

Умноженіе есть дѣйствіе, при которомъ изъ одного изъ двухъ данныхъ чиселъ (множимое) мы получаемъ новое число (произведеніе) такъ, какъ другое число (множитель) получается изъ единицы, принятой за *основную*.

Предположимъ, что даны 2 множителя: $+4$ и $+3$. *Принимая* за основную единицу $+1$, мы видимъ, что множитель составленъ повтореніемъ три раза этой основной единицы: $(+1)+(+1)+(+1)=+3$. По опредѣленію умноженія, то же самое надо произвести и съ множимымъ: $(+4)+(+4)+(+4)=$ $=+12$, т. е. произведеніе получится положительное. Разсуждая совершенно подобнымъ же образомъ, найдемъ, что произведеніе -4 на $+3 = (-4)+(-4)+(-4) = -12$.

Возьмемъ теперь множители $+4$ и -3. Множитель -3 получается опять-таки троекратнымъ сложеніемъ основной единицы, но *съ измѣненнымъ знакомъ*. Поэтому, чтобы получить произведеніе $+4$ на -3, мы должны также взять множимое $+4$ съ *измѣненнымъ знакомъ* и сложить его 3 раза. Получится $(-4)+(-4)+(-4) = -12$.

Точно также при умноженіи -4 на -3, мы во множимомъ должны перемѣнить знакъ на обратный и сложить его 3 раза, т. е. $(-4)\times(-3) = (+4)+(+4)+(+4) = +12$.

Такимъ образомъ для всѣхъ четырехъ случаевъ мы геометрически и аналитически вывели то извѣстное правило знаковъ, которое часто для краткости выражаютъ такъ: «одинаковые знаки даютъ $+$, а разные $-$».

Обобщеніе правила знаковъ.

Выводя предыдущее правило знаковъ при умноженіи, мы приняли за основную единицу $+1$. Посмотримъ, что произойдетъ, если за основную единицу примемъ -1. Исходя изъ опредѣленія умноженія и разсуждая совершенно такъ же, какъ въ предыдущей главѣ, найдемъ, что *въ этомъ* случаѣ получается:

$$(+4)\times(+3)=-12$$
$$(-4)\times(+3)=+12$$
$$(+4)\times(-3)=+12$$
$$(-4)\times(-3)=-12.$$

Разсматривая *эти* четыре случая, мы видимъ, что при основной единицѣ -1 правило знаковъ будетъ уже не то, что при основной единицѣ $+1$, а именно: въ этомъ случаѣ при одинаковыхъ знакахъ множителей получается $-$, а при разныхъ знакахъ множителей получается $+$.

То же самое мы могли бы получить и геометрически, но только тогда на фиг. 88-ой прямоугольникъ $(+a)\times(+b)$ надо принять отрицательнымъ, т. е. равнымъ $-ab$.

Но примемъ ли мы за основную единицу $+1$, или -1, оба правила знаковъ, выведенныя выше, можно объединить въ одно слѣдующее: *Если два множителя имѣютъ одинаковые знаки, то знакъ ихъ произведенія одинаковъ со знакомъ основной единицы; если же оба множителя имѣютъ разные знаки, то знакъ ихъ произведенія противоположенъ знаку основной единицы.* Или, выражаясь кратко, одинаковые знаки даютъ знакъ одинаковый (съ основной единицей), а разные—противоположный (основной единицѣ).

Если принять за основную еще какую либо иную единицу, то получимъ и другіе законы для знаковъ — другую алгебру, иначе говоря.

Умноженіе, какъ пропорція.

По опредѣленію умноженія, произведеніе находится въ такомъ же отношеніи къ множимому, въ какомъ множитель находится къ основной единицѣ. Это равенство отношеній можно представить пропорціей:

произведеніе : множимое = множитель : основная единица.

Или:

основная единица : множитель = множимое : произведеніе.

Постепенное обобщеніе умноженія.

Съ тѣхъ поръ, какъ Лука Пачіоли (въ XV и въ началѣ XVI столѣтія) находилъ, что необходимо (и при томъ трудно) объяснять, почему это при перемноженіи правильныхъ дробей (въ ариѳметикѣ) получается произведеніе меньшее, чѣмъ множимое, и до нашихъ дней съ современнымъ употребленіемъ термина «*умноженіе*» въ высшей математикѣ, какъ видимъ, произошла большая перемѣна. И этотъ математическій терминъ «умноженіе» служитъ однимъ изъ лучшихъ примѣровъ обобщенія и употребленія слова совсѣмъ уже не въ томъ этимологическомъ смыслѣ, которое оно имѣло вначалѣ.

Геометрическіе софизмы.

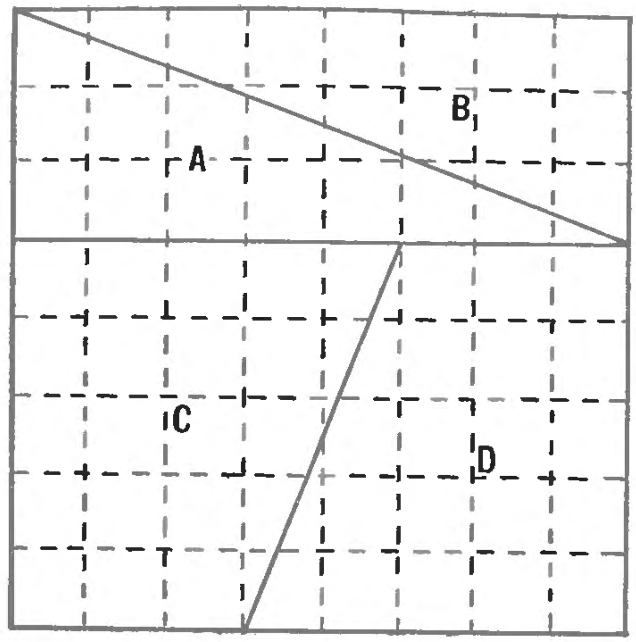
Задача 63-я.

Искусная починка.

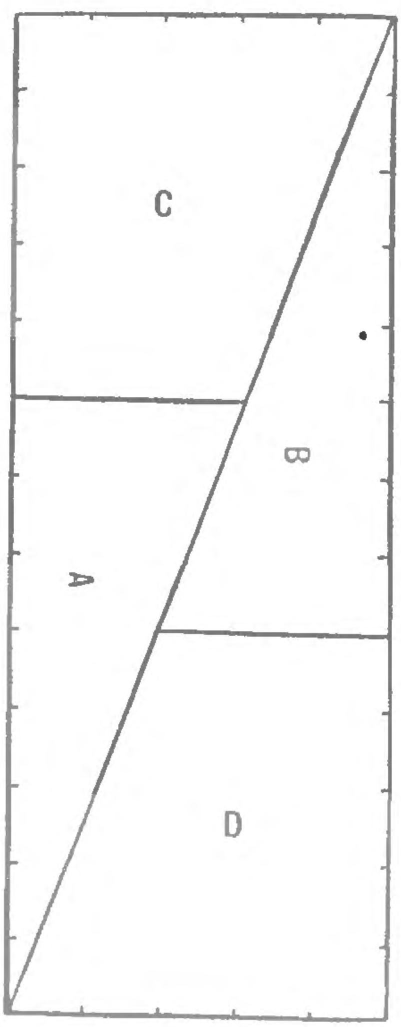
На днѣ деревяннаго судна во время плаванія случилась прямоугольная пробоина въ 13 дюймовъ длины и 5 дюймовъ ширины, т. е. площадь пробоины оказалась равной $13 \times 5 = 65$ квадратныхъ дюймовъ. У судового же плотника для починки нашлась только одна квадратная доска со стороной квадрата въ 8 дюймовъ, т. е. вся площадь квадрата равнялась $8 \times 8 = 64$ квадр. дюймамъ (фиг. 89). Плотникъ ухитрился, однако, разрѣзать квадратъ на части и сложить эти части такъ, что получился какъ разъ прямоугольникъ, соотвѣтствующій пробоинѣ, которую онъ и задѣлалъ. Вышло такимъ образомъ, что плотникъ владѣлъ секретомъ квадратъ въ 64 квадратныхъ единицъ мѣры обращать въ прямоугольникъ съ площадью въ 65 такихъ же квадратныхъ единицъ. Какъ это могло случиться?

Рѣшеніе.

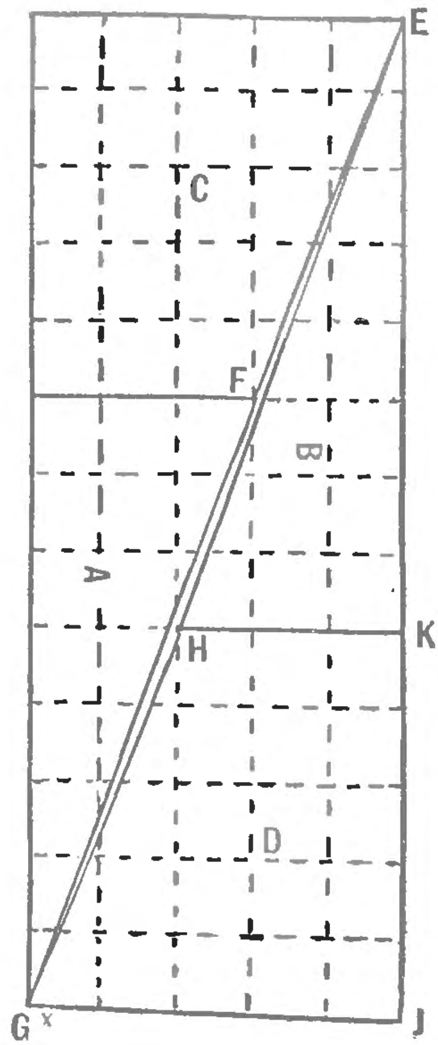
Квадратъ площадью въ 64 квадратныхъ дюйма разрѣжемъ на четыре части *A*, *B*, *C* и *D* такъ, какъ это указано сплошными линіями на фиг. 89. Т. е., сначала разрѣжемъ квадратъ



Фиг. 89.



Фиг. 90.



Фиг. 91.

на два прямоугольника съ одинаковыми основаніями, равными сторонѣ квадрата, но высота одного прямоугольника 3, а другого 5 дюйм. Затѣмъ меньшій прямоугольникъ раздѣлимъ на два равныхъ треугольника, A и B, діагональю, а большій на двѣ равныя трапеціи, C и D. Сложимъ вслѣдъ за этимъ полученныя части такъ, какъ это указано на фиг. 90, и мы получимъ прямоугольникъ со сторонами въ 13 и 5 дюймовъ и съ площадью въ 65 квадратныхъ дюймовъ!

Выходитъ такимъ образомъ, что мы какъ бы и въ самомъ дѣлѣ геометрически показали, что $64=65$. Но допущенный въ нашихъ разсужденіяхъ и построеніяхъ софизмъ легко поясняется фиг. 91-й. Сложивъ полученныя части квадрата, какъ указано рисунками, мы получаемъ, что EH и HG, каждая въ отдѣльности, прямыя линіи, но онѣ не составляютъ продолженія одна другой, т. е. одной прямой, а даютъ ломаную линію. Точно также и линія EFG есть тоже ломаная линія: и это легко доказать. Въ самомъ дѣлѣ:

Пусть X обозначаетъ точку, гдѣ прямая EH встрѣчается съ прямой GJ. Посмотримъ теперь, совпадетъ ли X съ G или нѣтъ? Изъ подобныхъ треугольниковъ EHK и EXJ имѣемъ

$$XJ : HK = EJ : EK$$

или

$$XJ : 3 = 13 : 8$$

т. е.

$$XJ = \frac{3 \cdot 13}{8} = 4,875$$

въ то время какъ $GJ = 5$.

Площадь полученнаго прямоугольника дѣйствительно равна 65 кв. дюйм., но въ ней есть ромбоидальная щель $EFGH$, площадь которой равна какъ разъ 1 квадр. дюйму.

Такимъ образомъ хитрому плотнику, все равно, пришлось замазывать при починкѣ небольшую щель. Иллюзія же сплошного прямоугольника получается вслѣдствіе весьма незначительной разницы наклоненія діагонали прямоугольника со сторонами

13 и 5 къ большей сторонѣ и наклоненія къ большей сторонѣ діагонали прямоугольника со сторонами 3 и 8. Въ самомъ дѣлѣ, наклоненія выражаются соотвѣтственно числами $\frac{5}{13}$ и $\frac{3}{8}$, разность которыхъ есть:

$$\frac{5}{13}-\frac{3}{8}=\frac{1}{104}.$$

Замѣтимъ кстати, что встрѣчаемыя здѣсь числа 3, 5, 8, 13 принадлежатъ къ ряду

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,. . . . .,

въ которомъ каждый членъ получается сложеніемъ двухъ непосредственно предыдущихъ членовъ. Этотъ весьма замѣчательный рядъ былъ впервые указанъ въ XIII вѣкѣ математикомъ Леонардомъ Фибоначчи изъ Пизы.

Воспользуемся даннымъ геометрическимъ парадоксомъ также и для того общаго замѣчанія, что при разрѣзываніи и переложеніи фигуръ (см. также 1-ю часть «Въ царствѣ смекалки» стр. 108—115) не слѣдуетъ довѣрять исключительно глазу, но необходимо подкрѣплять свои дѣйствія и математическими доказательствами.

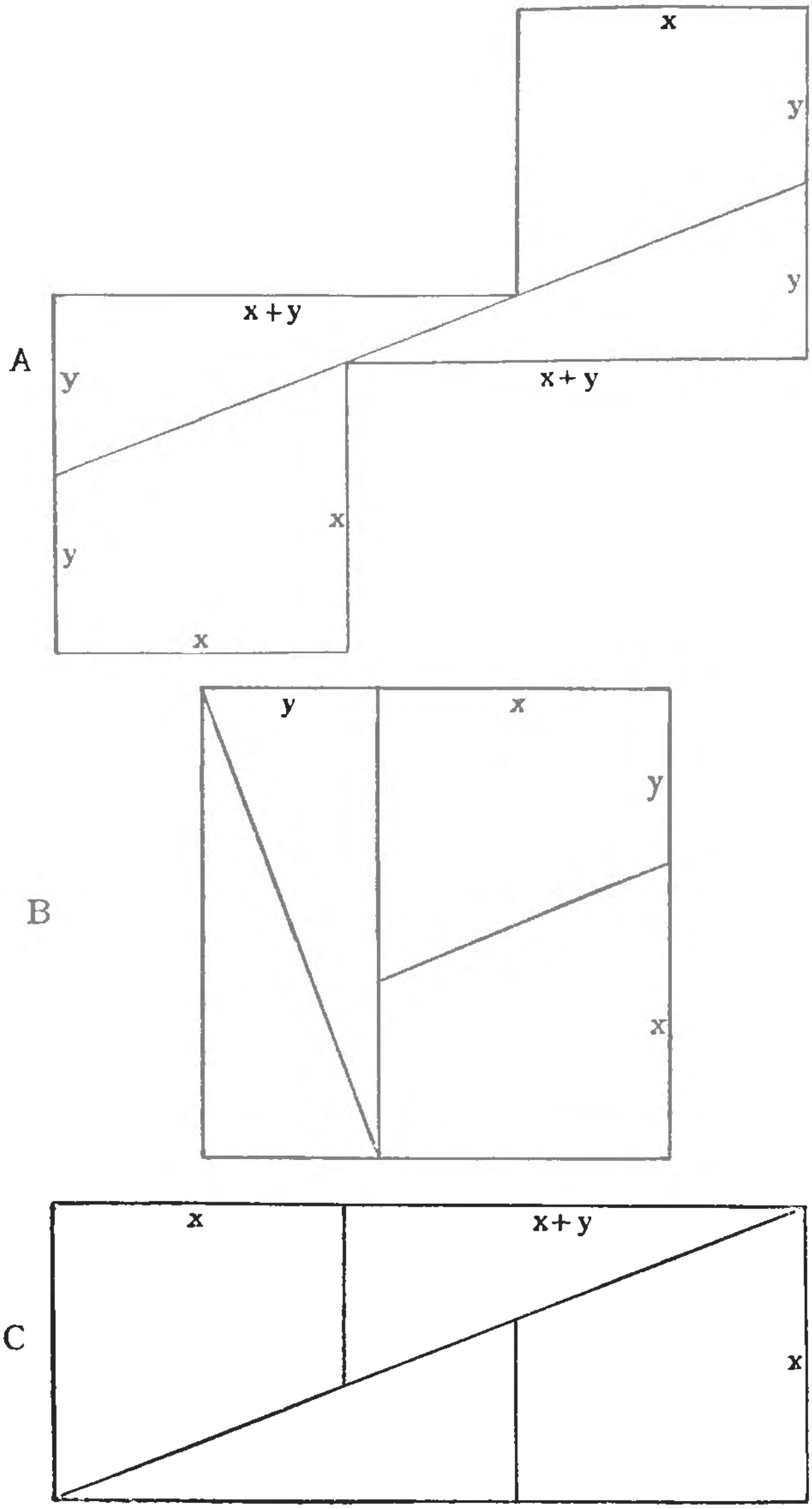
Задача 64-я.

Обобщеніе того же софизма.

На прилагаемой здѣсь фиг. 92-й указано, какъ тѣ же четыре фигуры (два равныхъ треугольника и двѣ равныхъ трапеціи), что и въ предыдущей задачѣ, сложить 3-мя различными способами и получить фиг. A, B и C.

Если теперь обозначимъ $x=5$ и $y=3$, то будемъ имѣть для площадей полученныхъ фигуръ: $A=63$, $B=64$, $C=65$, т. е. $C-B=1$ и $B-A=1$.

Словомъ, теперь уже выходитъ, что будто бы одни и тѣ же извѣстной формы куски, скажемъ, бумаги даютъ три площади различной величины, въ зависимости отъ одного только переложенія!



Фиг. 92.

Изслѣдуемъ полученныя три фигуры алгебраически:

площадь $A = 2xy + 2xy + y(2y - x) = 3xy + 2y^2$;

» $B = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;

» $C = x(2x + y) = 2x^2 + xy$,

» $C - B = x^2 - xy - y^2$;

» $B - A = x^2 - xy - y^2$.

Итакъ, всѣ эти три фигуры будутъ равны, если $x^2 - xy - y^2 = 0$, т. е., иначе говоря, если

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Слѣдовательно, взятыя нами 3 фигуры *не могутъ быть равны*, если x и y выражены оба въ раціональныхъ числахъ. Фиг. A и C кажутся намъ сплошными, опять таки, вслѣдствіе зрительной иллюзіи.

Попытаемся теперь найти тѣ раціональныя значенія x и y, которыя разницу между A и B, или между B и C дѣлаютъ равной 1. Иначе говоря, надо рѣшить ур-іе

$$x^2 - xy - y^2 = \pm 1.$$

Искомыя нами рѣшенія, какъ оказывается, заключается въ упомянутомъ уже нами въ предыдущей главѣ рядѣ Фибоначчи

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... ,

если для y и x соотвѣтственно брать въ этомъ ряду два послѣдовательныхъ члена.

Значенія $y = 3$, $x = 5$ суть тѣ, которыя обыкновенно даются, какъ и въ настоящемъ случаѣ; для нихъ мы и имѣемъ, какъ указано выше, $A < B < C$.

Если взять слѣдующую пару рѣшеній $y = 5$ и $x = 8$, то получится $A > B > C$, ибо въ этомъ случаѣ $A = 170$, $B = 169$, $C = 168$.

Рядъ Фибоначчи.

Какъ видимъ изъ двухъ предшествующихъ задачъ, рядъ Фибоначчи

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... ,

гдѣ каждый послѣдующій членъ получается путемъ сложенія двухъ непосредственно предыдущихъ, играетъ значительную роль въ изслѣдованіи геометрическихъ софизмовъ разсматриваемаго рода. Укажемъ еще на нѣкоторыя свойства этого замѣчательнаго ряда.

Прежде всего обратимъ вниманіе на то, что квадратъ каждаго члена этого ряда, уменьшенный на произведеніе двухъ рядомъ обокъ (справа и слѣва) стоящихъ возлѣ него членовъ даетъ поперемѣнно то $+1$, то -1, т. е.

$$\begin{gathered} 2^2-1.3=+1, \\ 3^2-2.5=-1, \\ 5^2-3.8=+1, \\ 8^2-5.13=-1. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Выдѣляя члены, дающіе -1, начиная съ

$$\begin{gathered} 8^2-5.13=-1, \\ 21^2-13.34=-1, \\ 55^2-34.89=-1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

мы видимъ, что парадоксы, приведенные нами выше, можно разнообразить сколько угодно. Такъ, вмѣсто квадрата на стр въ 8 единицъ длины можно брать квадраты со сторонами 21, 55 и т. д. единицъ длины и получать изъ нихъ парадоксальныя фигуры съ еще большимъ видимымъ приближеніемъ.

Точно также, если взять въ ряду Фибоначчи такіе члены, что

$$\begin{gathered} 13^2-8.21=+1, \\ 34^2-21.55=+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

то можно брать квадраты съ сторонами въ 13, 34 и т. д. единицъ длины. Но здѣсь для достиженія требуемой иллюзіи лучше взять сначала прямоугольникъ (напр., со сторонами 8 и 21), а затѣмъ разрѣзать его такъ, чтобы скрываемая нами щель получалась внутри квадрата (13×13).

Замѣтимъ также, что если взять простѣйшую *непрерывную* дробь

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

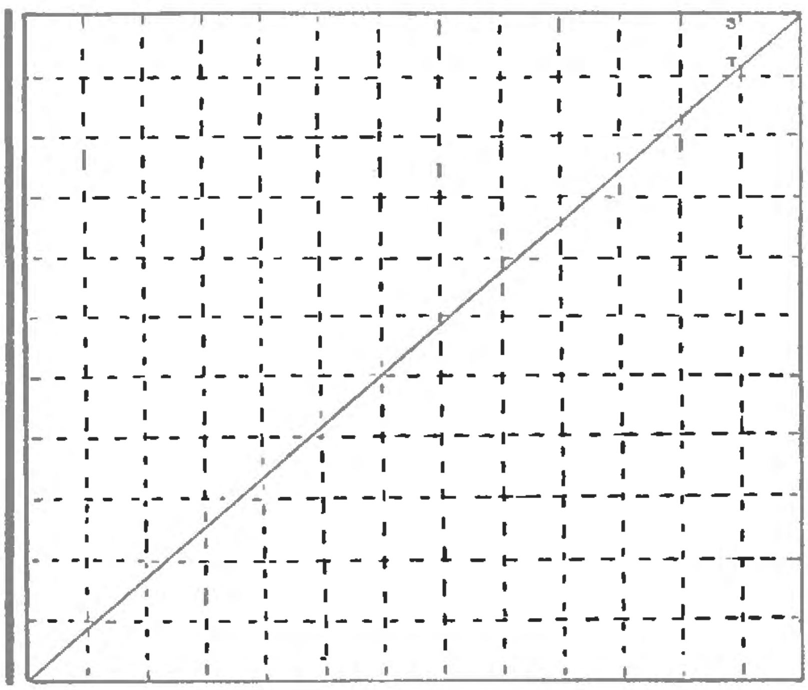
и начать вычислять ея послѣдовательныя *подходящія*, то опять получимъ рядъ Фибоначчи.

Итакъ, разрѣзываніе и переложеніе фигуръ, подобныя указаннымъ выше, можно разсматривать, какъ геометрическое представленіе величины приближенія, даваемаго этой непрерывной дробью.

Задача 65-я.

Похоже, но не то.

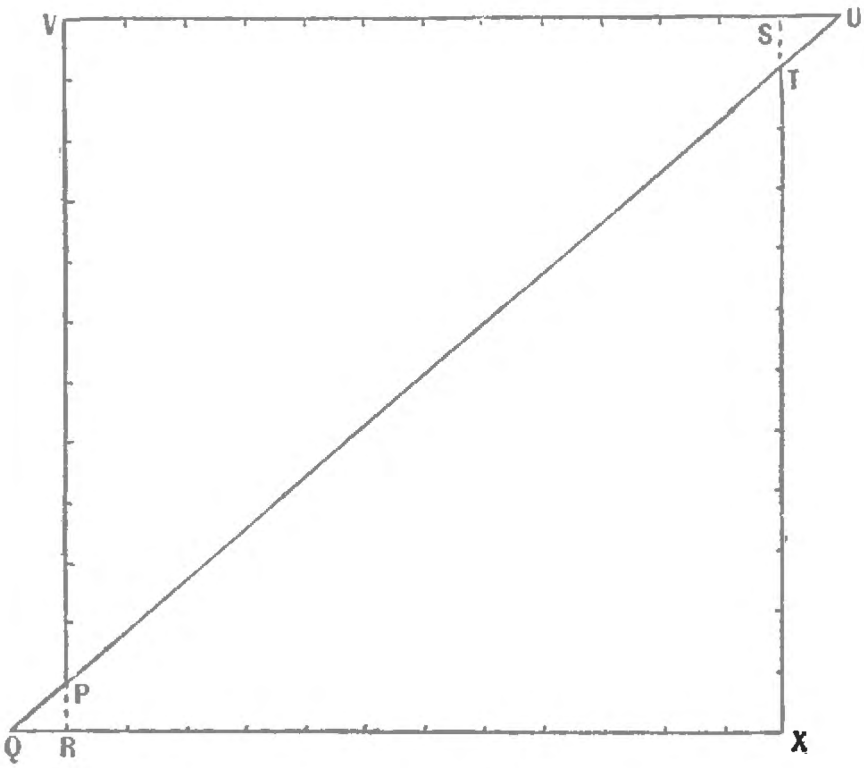
Софизмъ, похожій съ виду на данный раньше (задача 63), получится, если построить прямоугольникъ со сторонами въ 13 и 11 единицъ длины (фиг. 93), разсѣчь его діагональю и сдви-



Фиг. 93.

нуть затѣмъ полученные треугольники по ихъ общей гипотенузѣ въ положеніе, указанное на фиг. 94-ой. Эта послѣдняя фигура по виду состоитъ изъ квадрата $VRXS$ со сторонами въ 12 единицъ длины, т. е. площадью въ $12^2 = 144$ квадр. единицъ. Кромѣ того къ этой площади надо прибавить площади треугольничковъ PQR и STU, каждая величиной въ 0,5 квадр. единицъ. Слѣдовательно, площадь всей фиг. 94 равна 145 квадр. единицамъ. Но какъ же это получилось, если площадь прямоугольника на фиг. 93 равна только $13 \times 11 = 143$ квадр. единицамъ?

Разсмотрѣніе фигуръ, особенно если обратимъ вниманіе на то, какъ діагональ на фиг. 93-ой пересѣкаетъ линіи, докажетъ намъ, что $VRXS$ не есть квадратъ. VS равна 12 единицамъ длины, но $SX < 12$; TX (меньшая сторона на фиг. 94) равна 11 един., но $ST < 1$ (см. ST на фиг. 94). Съ другой стороны, разбирая то же аналитически, имѣемъ:



Фиг. 94.

$$ST : VP = SU : VU$$

или

$$ST : 11 = 1 : 13,$$

т. е.

$$ST = \frac{11}{13}.$$

Значитъ, прямоугольникъ

$$VRXS = 12 \times 11\frac{11}{13} = 142\frac{2}{13}$$

$$\triangle PQR = \triangle STU = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{13} \cdot 1 = \frac{11}{26};$$

Слѣдовательно:

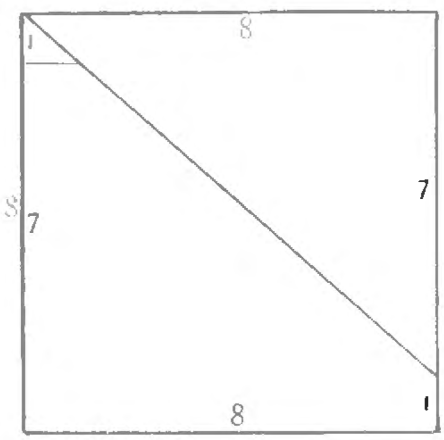
Фигура 94-я = прямоугольнику + 2 треугольника

$$= 142\frac{2}{13} + \frac{11}{13} = 143.$$

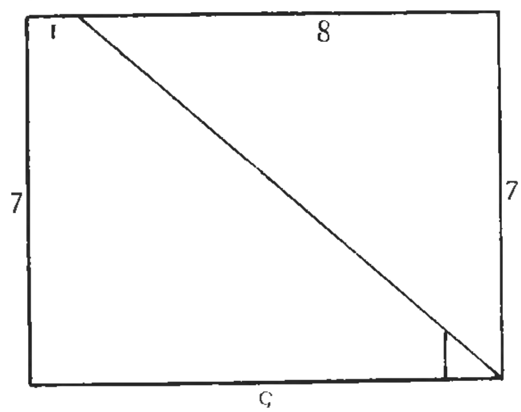
Если бы мы треугольники по той же діагонали сдвинули (до первой перекрестной линіи) съ мѣста въ направленіи, противоположномъ тому, какое указано фиг. 94, то получили бы съ виду прямоугольникъ 14×10 и два треугольника съ площадью въ $\frac{1}{2}$ каждый, т. е. выходило бы, что полученная фигура имѣетъ будто бы площадь 141 квадр. един., т. е. меньшую, чѣмъ площадь прямоугольника, изображеннаго фиг. 93. Разобрать и доказать ошибочность этого заключенія такъ же легко, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Задача 66-я.

Еще парадоксъ.



Фиг. 95а.



Фиг. 95б.

Вотъ еще одинъ «фокусъ», который можно сдѣлать съ квадратомъ.

Возьмемъ квадратъ со стороной въ 8 единицъ длины и, слѣдовательно, съ площадью въ 64 квадр. един. Разрѣжемъ его, какъ указано на фиг. 95**а**, и переложимъ части такъ, какъ указано на фиг. 95**б**. Получается, повидимому, прямоугольникъ съ площадью $7 \times 9 = 63$, и это ничего не отбрасывая отъ площади квадрата, равной 64 квадр. единицамъ.

Три знаменитыхъ задачи древности.

Эти задачи слѣдующія:

1. — Трисекція угла или дуги.
2. — Удвоеніе куба.
3. — Квадратура круга.

Трисекція угла, или раздѣленіе (съ помощью только циркуля и линейки) угла или дуги на три равныя части есть несомнѣнно весьма древняя задача, хотя съ ней не связано никакихъ поэтическихъ вымысловъ или любопытныхъ преданій, на что древніе и средневѣковые писатели были такіе охотники и мастера. Задачу о квадратурѣ круга, т. е. о построеніи квадрата, равновеликаго площади даннаго круга, говорятъ, пытался рѣшить впервые греческій философъ Анаксагоръ (въ V в. до Р. Х.). Задача объ удвоеніи куба носитъ иначе названіе «Делійской задачи», такъ какъ съ ней связана легенда о томъ, какъ древніе совѣтовались относительно рѣшенія съ прославленнымъ Платономъ.

Преданіе, передаваемое нѣкіимъ Филопономъ, говоритъ, что въ 430 году до Р. Х. въ Аѳинахъ разразилась моровая язва. Аѳиняне послали къ оракулу на островѣ Делосѣ вопросить, какъ остановить это бѣдствіе. Аполлонъ отвѣтилъ, будто бы, что они должны удвоить величину его жертвенника, который имѣлъ форму куба. Невѣжественнымъ просителямъ дѣло казалось очень легкимъ, и новый алтарь былъ воздвигнутъ, — или такъ, что каждая его сторона была вдвое больше стороны прежняго куба (т. е. объемъ прежняго куба увеличили въ 8 разъ), или же еще проще, — помѣстивъ на старый алтарь еще новый такой же величины. Эпидемія, однако, не прекращалась, и къ оракулу было снаряжено новое посольство, которое и узнало, что предписаніе Аполлона не было выполнено. Требовалось, чтобы новый алтарь имѣлъ также форму куба и имѣлъ *ровно вдвое большій объемъ*, чѣмъ старый жертвенникъ. Подозрѣвая тайну, Аѳиняне обратились за разгадкой ея къ Платону, который отослалъ ихъ къ геометрамъ и въ частности - къ Евклиду, который, будто бы, спеціально занимался этой задачей. Несмотря на всю заманчивость и нѣкоторое правдоподобіе этой исторіи (оракулы любили говорить загадками), приходится цѣликомъ отбросить ее, хотя бы потому, что Платонъ до 429 г. до Р. Х. еще и не родился, а знаменитый Евклидъ появляется не менѣе вѣка спустя.

Во всякомъ случаѣ мы имѣемъ несомнѣнныя свидѣтельства, что древніе весьма упорно и настойчиво работали надъ рѣшеніемъ указанныхъ выше 3-хъ задачъ. Гиппій элидскій нашелъ даже спеціальную кривую «квадратриксу», рѣшающую вопросъ о трисекціи угла, которой можно пользоваться и для рѣшенія вопроса о квадратурѣ круга. Найдены были и многія другія кривыя, рѣшающія задачу о трисекціи угла и квадратурѣ круга. Эратосѳенъ и Никомедъ изобрѣли даже механическіе приборы для черченія такихъ кривыхъ. Но... *ни одна* изъ этихъ кривыхъ не можетъ быть построена *только* съ помощью *циркуля* и *линейки*, а это какъ разъ и было *главнымъ требованіемъ* при рѣшеніи задачи.

Древность такъ и завѣщала рѣшеніе всѣхъ этихъ трехъ задачъ нашимъ временамъ. Нынѣшніе математики, вооруженные болѣе могущественными методами изслѣдованія, доказали, что всѣ три задачи невозможно рѣшить построеніемъ съ помощью *только* циркуля и линейки, какъ эти приборы употребляются и понимаются въ элементарной геометріи (см. по этому поводу слѣдующую главу). Подобное разрѣшеніе вопроса даже самые сильные математическіе умы древности могли только подозрѣвать, такъ какъ доказать невозможность рѣшенія при тогдашнихъ средствахъ математики они не могли. Но, доказавъ невозможность рѣшенія этихъ задачъ съ помощью *только* циркуля и линейки, математики нашихъ временъ дали новые способы и проложили новые пути къ рѣшенію этихъ задачъ, если отбросить ограниченіе о циркулѣ и линейкѣ. Былъ также изобрѣтенъ и примѣненъ методъ приближеній, который и *рѣшилъ* задачу, если можно здѣсь примѣнить это слово.

Что касается въ частности числа π (выражающаго отношеніе окружности къ діаметру), то только въ 1882 году Линдеманну удалось окончательно установить его *трансцендентальный* характеръ, т. е., что это число не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія. Замѣтимъ здѣсь кстати, что это знакомое каждому ученику старшихъ классовъ число π играетъ большую роль и въ областяхъ математики, довольно удаленныхъ отъ такъ называемой «Элементарной геометріи», напр., π довольно часто встрѣчается въ формулахъ теоріи вѣроятностей.

Приближенное значеніе для π ($=3{,}1\,415\,926\ldots$) было между прочимъ вычислено съ 707 десятичными знаками математикомъ В. Шенксомъ. Этотъ результатъ вмѣстѣ съ формулой вычисленій онъ обнародовалъ въ 1873 г. Ни одна еще задача подобнаго рода не рѣшалась съ такимъ огромнымъ приближеніемъ и съ точностью, далеко превышающей отношеніе микроскопическихъ разстояній къ телескопическимъ.

Шенксъ вычислялъ. Слѣдовательно, онъ стоялъ въ противорѣчіи съ требованіями задачи о квадратурѣ круга, гдѣ требуется найти *рѣшеніе* построеніемъ. Работа, сдѣланная Шенксомъ, въ сущности, безполезна, или — почти безполезна. Но, съ другой стороны, она можетъ служить довольно убѣдительнымъ доказательствомъ противнаго тому, кто, не убѣдившись доказательствами Линдеманна и др. или не зная о нихъ, до сихъ поръ еще надѣется, что можно найти точное отношеніе окружности къ діаметру.

Квадратура круга была въ прежнія времена самой заманчивой и соблазнительной задачей. Армія «квадратурщиковъ» неустанно пополнялась каждымъ новымъ поколѣніемъ математиковъ. Всѣ усилія были тщетны, но число ихъ не уменьшалось. Въ нѣкоторыхъ умахъ доказательство, что рѣшеніе не можетъ быть найдено, зажигало еще большее рвеніе къ изысканіямъ. Что эта задача еще до сихъ поръ не потеряла своего интереса, лучшимъ доказательствомъ служитъ появленіе до сихъ поръ попытокъ ее рѣшить.

Итакъ, всѣ старанія рѣшить три знаменитыя задачи при извѣстныхъ ограничивающихъ условіяхъ (циркуль и линейка) привели только къ доказательству, что подобное рѣшеніе невозможно. Иной, пожалуй, по этому поводу скажетъ, что, слѣдовательно, работа сотенъ умовъ, пытавшихся въ теченіе столѣтій рѣшить задачу, свелась, слѣдовательно, ни къ чему... Но это будетъ невѣрно. При попыткахъ рѣшить эти задачи было сдѣлано огромное число открытій, имѣющихъ гораздо большій интересъ и значеніе, чѣмъ сами поставленныя задачи. Попытка Колумба открыть новый путь въ Индію, плывя все на западъ, окончилась, какъ извѣстно, неудачей. И теперь мы знаемъ, что такъ *необходимо* и должно было случиться. Но геніальная попытка великаго человѣка привела къ «попутному» открытію цѣлой новой части свѣта, предъ богатствомъ и умственнымъ развитіемъ котораго блѣднѣютъ нынче всѣ сокровища Индіи.

Задача 67-я.

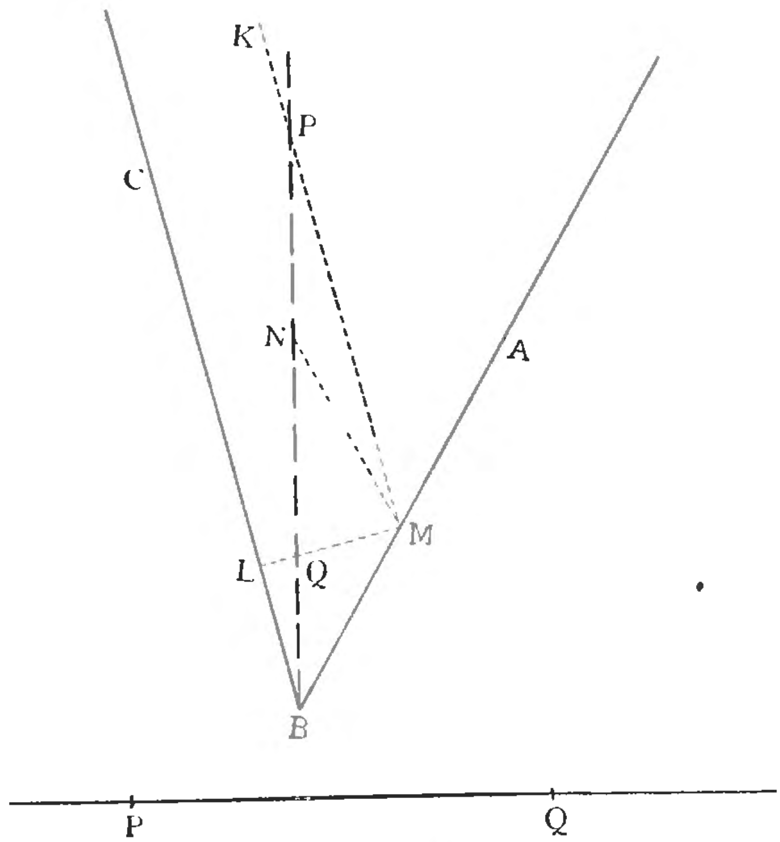
Линейка и циркуль. Трисекція угла.

Для построеній въ элементарной теоретической геометріи допускаются только два прибора: циркуль и линейка. Говорятъ, что такое ограниченіе вспомогательныхъ приборовъ сдѣлано знаменитымъ греческимъ философомъ Платономъ.

При этомъ само собой подразумѣвается, что циркуль, о которомъ идетъ рѣчь, имѣетъ неограниченное раствореніе. Если бы циркуль не обладалъ какимъ угодно нужнымъ намъ раствореніемъ, то его нельзя было бы примѣнять для выполненія требуемаго Эвклидомъ, съ первыхъ же шаговъ, построенія окружности изъ произвольнаго центра и *какого угодно* радіуса (3-й постулатъ Евклида). Точно также подразумѣвается, что геометрическая линейка неограничена по длинѣ (2-й постулатъ).

Вмѣстѣ съ тѣмъ необходимо подразумѣвается, что геометрическая линейка *не имѣетъ дѣленій*. Если бы на ея ребрѣ было хотя всего *два* знака, и если бы позволено было ими пользоваться и вдобавокъ передвигать линейку, *приноровляясь* къ фигурѣ, то задача о раздѣленіи угла на три равныя части (неразрѣшимая въ элементарной геометріи) тотчасъ можетъ быть рѣшена. Въ самомъ дѣлѣ:

Пусть данъ какой-либо уголъ ABC (фиг. 96); и пусть на лезвіи нашей линейки обозначены 2 точки P и Q (см. ту же фиг. внизу).



Фиг. 96.

Построеніе.

На одной изъ сторонъ угла откладываемъ отъ вершины B прямую $BA = PQ$. Дѣлимъ BA пополамъ въ точкѣ M; изъ точки M проводимъ линіи $MK \parallel BC$ и $ML \perp BC$.

Возьмемъ теперь нашу линейку и приспособимъ ее къ полученной уже фигурѣ такъ, чтобы точка P линейки лежала на прямой KM; точка Q лежала бы на прямой LM, и въ то же время продолженіе PQ линейки проходило бы черезъ вершину даннаго угла B. Тогда прямая BP и есть искомая, отсѣкающая третью часть угла B.

Доказательство. $\angle PBC = \angle BPM$, какъ накрестъ-лежащіе. Раздѣлимъ PQ пополамъ и середину N соединимъ съ M прямой NM. Точка N есть середина гипотенузы прямоугольнаго треугольника PQM, а потому $PN=NM$, а слѣдовательно $\triangle PNM$ равнобедренный, и значитъ

$$\angle BPM = \angle PMN.$$

Внѣшній же $\angle BNM = \angle BPM + \angle PMN = 2\angle BPM$.
Вмѣстѣ съ тѣмъ:

$$NM = \frac{1}{2} PQ = BM.$$

Значитъ,

$$\angle MBN = \angle BNM.$$

Итакъ:

$$\angle PBC = \angle BPM = \frac{1}{2}\angle BNM = \frac{1}{2}\angle ABN = \frac{1}{3} ABC.$$

(Ч. Т. Д.).

Приведенное выше рѣшеніе задачи принадлежитъ Кемпе, который при этомъ поднялъ вопросъ, почему Евклидъ не воспользовался дѣленіемъ линейки и процессомъ ея приспособленія для доказательства 4-й теоремы своей первой книги, гдѣ вмѣсто этого онъ накладываетъ стороны одного треугольника на стороны другого (первое приложеніе способа наложенія, извѣстное каждому ученику). На это можно отвѣтить только, что въ задачу Евклида и не входило отысканіе нѣкоторой точки посредствомъ измѣренія и процесса приспособленія линейки (какъ это мы дѣлали выше въ задачѣ для отысканія точки P). Въ своихъ разсужденіяхъ и доказательствахъ онъ просто накладываетъ фигуру на фигуру,—и только.

Принимаемая нами геометрическая линейка не должна считаться раздѣленной, такъ какъ это слишкомъ раздвинуло бы предѣлы «элементарности». Но она должна необходимо быть неограниченно длиной,—иначе эти предѣлы слишкомъ бы сузились.

Всѣ вышеприведенныя замѣчанія слѣдуетъ имѣть въ виду, когда говорятъ о циркулѣ и линейкѣ, какъ геометрическихъ приборахъ.

Два отрицательныхъ вывода XIX вѣка.

I. Общее уравненіе выше четвертой степени неразрѣшимо чисто алгебраическимъ путемъ (иначе говоря — въ радикалахъ).

Рѣшеніе уравненій 3-й и 4-й степени было извѣстно, начиная съ 1545 года. Два съ половиной столѣтія спустя, молодой 22-лѣтній Гауссъ въ своей докторской диссертаціи доказалъ, что всякое алгебраическое ур-іе имѣетъ корень, «дѣйствительный» или «мнимый». Вслѣдъ затѣмъ онъ же далъ еще два доказательства той же теоремы. Въ 1801 году тотъ же Гауссъ замѣтилъ въ одномъ изъ своихъ сочиненій, что, быть можетъ, невозможно разрѣшить съ помощью радикаловъ общее ур-іе степени высшей, чѣмъ четвертая. Это предположеніе было доказано знаменитымъ норвежскимъ математикомъ Абелемъ и было обнародовано къ 1824 году, когда автору его было всего 22 года отъ роду. Два года спустя то же доказательство было имъ напечатано въ болѣе пространной и понятной формѣ съ выясненіемъ многихъ деталей. Съ этихъ поръ изысканія математиковъ, силившихся раньше найти общее алгебраическое рѣшеніе всякаго уравненія, приняли иное направленіе.

II. Знаменитый «постулатъ о параллельныхъ» Евклида не можетъ быть доказанъ съ помощью какихъ-либо иныхъ его аксіомъ.

Въ виду важности вопроса, остановимся на исторіи этого знаменитаго «постулата» нѣсколько подробнѣе.

Несмотря на то, что свѣдѣнія древнихъ по геометріи были весьма обширны, всѣ они до 3-го вѣка до Рождества Христова являлись разрозненными, отдѣльными научными фактами, не имѣющими между собой связи. Творцомъ геометріи, какъ науки въ настоящемъ значеніи этого слова, былъ Евклидъ. Въ 3-мъ вѣкѣ до Р. Х. (около 270 г.) этотъ греческій философъ задался цѣлью собрать всѣ найденныя до его времени свойства фигуръ на идеальной плоскости и въ пространствѣ и опредѣлить, какія изъ нихъ существенны, т. е. зависятъ *непосредственно отъ свойствъ самой плоскости и пространства*, и какія, съ другой стороны, могутъ быть выведены, какъ слѣдствія первыхъ. Евклидъ выполнилъ свою задачу и создалъ стройную дедуктивную геометрическую систему, которая явилась первымъ примѣромъ строгo научныхъ системъ. Онъ показалъ, что *всѣ* свойства пространственныхъ формъ могутъ быть выведены путемъ однихъ только строго логическихъ разсужденій изъ *трехъ* основныхъ положеній, или аксіомъ, характеризующихъ идеальную плоскость и идеальное пространство древнихъ геометровъ, а именно:

1) фигуры на плоскости и въ пространствѣ могутъ быть перемѣщаемы безъ складокъ и разрыва, 2) прямая линія вполнѣ опредѣляется какими угодно двумя ея точками и 3) если изъ какой либо точки прямой линіи будетъ проведенъ къ ней перпендикуляръ, а изъ другой точки той же прямой проведена будетъ какая-либо наклонная линія, то перпендикуляръ и наклонная необходимо встрѣтятся.

Послѣднее положеніе (3) и есть знаменитый постулатъ Евклида (называемый также 11-ой аксіомой Евклида). Въ наше время его очень часто предпочитаютъ выражать въ такой болѣе краткой, такъ называемой Плэйферовской формѣ: *Двѣ пересѣ-*

кающіяся прямыя линіи не могутъ быть объ разомъ параллельны одной и той же прямой. Самъ же Евклидъ этотъ постулатъ (или 11-ю аксіому) дословно выражалъ такъ: «Если двѣ прямыя встрѣчаются третьей такъ, что сумма внутреннихъ угловъ, лежащихъ по одну сторону третьей, меньше двухъ прямыхъ, то двѣ первыя прямыя по достаточномъ продолженіи, встрѣтятся по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутреннихъ угловъ меньше двухъ прямыхъ».

Два первыя изъ приведенныхъ выше положеній суть аксіомы настолько очевидныя и безспорныя, что не возбуждали никогда никакихъ сомнѣній. Не то было съ третьимъ положеніемъ. Оно уже не было столь очевидно, а требовало необходимости убѣдиться, что какъ бы наклонная ни была близка къ перпендикулярности, она необходимо пересѣчется съ перпендикуляромъ, можетъ быть на разстояніи очень далекомъ отъ прямой и для насъ недоступномъ. Такъ какъ непосредственная провѣрка по недоступности для нашихъ чувствъ весьма далекихъ разстояній была невозможна, то Евклидъ и далъ это положеніе, какъ необходимое допущеніе, какъ постулатъ.

Послѣдующіе геометры, однако, не вполнѣ довѣряя генію Евклида, пытались установить связь между первыми двумя аксіомами и третьей, т. е. доказать, что это третье *допущеніе* (постулатъ) Евклида, принятое имъ за аксіому, можетъ быть *доказано* на основаніи первыхъ двухъ аксіомъ и помѣщено въ ряду теоремъ. И вотъ, съ Птоломея (во 2-мъ вѣкѣ по Р. Х.) вплоть до первой четверти XIX столѣтія начинается длинный рядъ попытокъ доказать этотъ постулатъ. Были предложены сотни «доказательствъ».

Въ 1826 году знаменитый русскій геометръ, профессоръ и ректоръ Казанскаго университета Ник. Ив. Лобачевскій доказалъ всю безуспѣшность подобныхъ попытокъ и обнародовалъ свое доказательство въ 1829 году. Лобачевскій построилъ новую, совершенно самостоятельную геометрію, гдѣ, принимая за аксіомы первыя два изъ указанныхъ выше евклидовскихъ положеній, онъ вмѣсто третьяго положенія (постулата Евклида) принялъ обратное ему. Получилась стройная и логическая геометрическая система, безъ всякихъ ошибокъ и противорѣчій, и такимъ образомъ само собой доказывалась независимость первыхъ двухъ аксіомъ отъ постулата, а слѣдовательно, онъ не можетъ быть доказанъ посредствомъ ихъ; и остается, значитъ, принять его за аксіому или строить новую геометрію.

Изслѣдованія Лобачевскаго оставались долгое время непонятыми и неизвѣстными. Русскими учеными они были встрѣчены даже недоброжелательно. Первые благопріятные отзывы о нихъ (Гаусса) сдѣлались извѣстными въ Германіи только въ 1846 г. изъ переписки Гаусса. Но только начиная съ 60-хъ годовъ XIX столѣтія труды Лобачевскаго нашли себѣ достойную оцѣнку и положили начало ряду другихъ замѣчательныхъ работъ различныхъ математиковъ.

Усилія, употребляемыя раньше для доказательства невозможнаго, обратились теперь къ развитію, такъ называемой, не-Евклидовской геометріи, къ изученію геометріи n-измѣреній, при допущеніяхъ, обратныхъ или несогласныхъ съ общепринятыми аксіомами геометріи Евклида. И, какъ всегда бываетъ въ подобныхъ случаяхъ, новое завоеваніе человѣческаго ума, новая побѣжденная трудность открыли новыя области для изслѣдованія, новое направленіе мысли и методовъ изысканія; и такимъ образомъ на очередь выдвинулись новыя еще болѣе трудныя задачи для рѣшенія. Поле дѣятельности, открывающееся пытливому уму,—безгранично.

Николай Ивановичъ Лобачевскій.

(1793—1856).

Начиная съ Евклида Александрійскаго геометры всего міра въ продолженіе болѣе чѣмъ двадцати вѣковъ работали надъ выясненіемъ истинной связи между основными аксіомами геометріи. Завидная честь завершить эту многовѣковую работу и открыть огромные, новые горизонты для дальнѣйшихъ изслѣдованій принадлежитъ, какъ упомянуто въ предыдущей главѣ, нашему великому соотечественнику, Н. И. Лобачевскому. Имя этого геніальнаго математика нынѣ извѣстно всему образованному, и во всякомъ случаѣ—всему математическому міру, хотя умеръ онъ непонятый и неоцѣненный по достоинству. Современники, кромѣ великаго Гаусса, были не въ силахъ его понять.

Жизнь и дѣятельность иныхъ великихъ людей, помимо поучительности, всегда еще полна заманчивой таинственности. Что даетъ силу этимъ рыцарямъ духа подъ градомъ насмѣшекъ и общаго непризнанія творить и созидать? Гдѣ тотъ источникъ святого безпокойства, который не даетъ генію почить ни на служебныхъ, ни на семейныхъ, ни на всякихъ иныхъ лаврахъ, а направляетъ его въ сторону, казалось бы, однихъ непріятностей и огорченій? Ученая дѣятельность и жизнь Лобачевскаго весьма замѣчательны съ этой послѣдней стороны и могутъ служить ободряющимъ примѣромъ для тѣхъ, кто, преслѣдуя великія цѣли, иногда изнемогаетъ и отчаивается предъ равнодушіемъ, непониманіемъ, а иногда даже и враждебностью средней обывательщины. Не задаваясь цѣлью дать здѣсь связную, хотя бы и сжатую, біографію Н. И. Лобачевскаго, постараемся, однако, освѣтить тѣ важнѣйшіе факты его жизни, которые имѣютъ связь съ его математическимъ развитіемъ и на которые есть неоспоримые документальные и архивные документы. О студенчествѣ и первыхъ ученыхъ шагахъ Лобачевскаго мы беремъ драгоцѣнныя данныя въ «разсказахъ по архивнымъ документамъ» проф. Н. Булича: *Изъ первыхъ лѣтъ Казанскаго университета.* Книга эта мало кому знакома по ея спеціальному характеру, хотя она и содержитъ въ себѣ весьма много интереснаго.

Н. И. Лобачевскій былъ сынъ бѣднаго чиновника, уѣзднаго землемѣра изъ Макарьева, Нижегородской губ. Въ оффиціальныхъ бумагахъ онъ показанъ *изъ разночинцевъ*, что означаетъ непринадлежность къ сословію дворянъ. Подобно многимъ другимъ знаменитымъ математикамъ, юноша Лобачевскій въ первые годы студенчества не предполагалъ даже избрать предметомъ своихъ постоянныхъ занятій математику. «Онъ примѣтно предуготовляетъ себя для медицинскаго факультета», — писалъ о немъ къ попечителю Яковкинъ, замѣтившій его дарованія. Появленіе въ Казанскомъ университетѣ профессора математики Бартельса, вызваннаго изъ Германіи, — свѣтлой и ученой личности, — побудило Лобачевскаго избрать предметомъ занятій математику. Вскорѣ онъ дѣлается однимъ изъ самыхъ успѣвающихъ учениковъ Бартельса. Въ свою очередь, профессоръ полюбилъ Лобачевскаго, и его заступничество не разъ помогало молодому и нѣсколько вѣтреному студенту при столкновеніяхъ съ университетской полиціей. Инспекторскій журналъ,—разсказываетъ Н. Буличъ въ названной нами книгѣ,—за годы пребыванія Лобачевскаго въ студентахъ даетъ нѣсколько свидѣтельствъ объ этихъ столкновеніяхъ, причина которыхъ лежала въ живомъ характерѣ молодого студента, въ естественномъ чувствѣ свободы, которое проявлялось, какъ своеволіе, въ желаніи отстоять свою самостоятельность, что считалось дерзостью. Самыя шалости характеризуютъ тогдашнихъ студентовъ. Лобачевскій, какъ и многіе изъ его товарищей, казенныхъ студентовъ, жившихъ въ университетѣ, любилъ заниматься пиротехникою. Разъ Лобачевскій сдѣлалъ ракету и вмѣстѣ съ другими пустилъ ее въ одиннадцать часовъ вечера на университетскомъ дворѣ. За это и за то, «что учинилъ непризнаніе, упорствуя въ немъ, подвергъ наказанію многихъ, совершенно сему не причастныхъ»,—былъ посаженъ въ карцеръ по опредѣленію совѣта. Въ другой разъ, будучи уже правящимъ должность *камернаго студента* («камерный студентъ есть помощникъ помощника инспектора казенныхъ студентовъ» — по опредѣленію правилъ того времени), Лобачевскій былъ замѣченъ «въ участвованіи и потачкѣ проступкамъ студентовъ, грубости и ослушаніи». За эти проступки онъ наказанъ былъ публичнымъ выговоромъ отъ инспектора студентовъ, лишенъ званія правящаго должность камернаго студента, 60 рублей на книги и учебныя пособія, которые только что были ему назначены «за особенные успѣхи въ наукахъ и благоповеденіе» и отпуска до разрѣшенія начальства. Все это происходило на святкахъ 1810 года. Лобачевскому шелъ 18-й годъ, онъ былъ на послѣднемъ курсѣ, молодость требовала удовлетворенія, а потому совершенно естественно и простительно, что по словамъ инспекторскаго журнала: «въ генварѣ мѣсяцѣ Лобачевскій первый оказался самаго худого поведенія. Несмотря на приказаніе начальства не отлучаться изъ университета, онъ въ новый годъ, а потомъ еще разъ, ходилъ въ маскарадъ и многократно въ гости, за что опять наказанъ написаніемъ имени на черной доскѣ и выставленіемъ оной въ студентскихъ комнатахъ на недѣлю. Несмотря на сіе, онъ послѣ снова еще былъ въ маскарадѣ».

Студенческая жизнь Лобачевскаго отличалась вообще нѣсколько бурнымъ характеромъ, но изъ среды своихъ сверстниковъ онъ выдавался далеко впередъ, какъ по уклоненіямъ отъ тогдашнихъ правилъ благоповеденія, вызывавшимъ карательныя мѣры противъ него, такъ и по своимъ дарованіямъ и успѣхамъ въ математикѣ. Вотъ почему только о немъ одномъ дошло до насъ *историческое изображеніе поведенія* его; проступки Лобачевскаго называются *достопримѣчательными*, характеръ—упрямымъ, нераскаяннымъ, «весьма много мечтательнымъ о самомъ себѣ», его мнѣніе «получило многія ложныя понятія» (такъ въ журналѣ инспектора, помощникомъ его Кондыревымъ, было записано, что Лобачевскій «въ значительной степени явилъ *признаки безбожія*» (!) — обвиненіе, которое имѣло бы во время Магницкаго весьма печальныя послѣдствія). Требовались инспекціею противъ Лобачевскаго рѣшительныя мѣры, «самыя побудительныя средства со стороны милосердія или строгости, каковыя найдетъ благоразуміе начальства». Вопросъ о судьбѣ Лобачевскаго перенесенъ былъ въ совѣтъ. Только настоянія Бартельса и тѣхъ профессоровъ, у которыхъ Лобачевскій занимался, доставили ему возможность получить степень кандидата, а вскорѣ затѣмъ магистра, наравнѣ съ прочими его товарищами.

Бартельсъ считалъ Лобачевскаго лучшимъ изъ учениковъ своихъ. Вотъ что писалъ онъ къ попечителю объ успѣхахъ своихъ слушателей и въ особенности о Лобачевскомъ около того времени (приводимъ слова его въ современномъ переводѣ, сдѣланномъ самимъ Румовскимъ и представленномъ имъ министру):

«Послѣдніе два (Симоновъ и Лобачевскій), особливо же Лобачевскій оказали столько успѣховъ, что они даже на всякомъ нѣмецкомъ университетѣ были бы отличными, и я льщусь надеждою, что если они продолжать будутъ упражняться въ усовершенствованіи своемъ, то займутъ значущія мѣста въ математическимъ кругу. О искусствѣ послѣдняго предложу хотя одинъ примѣръ. Лекціи свои располагаю я такъ, что студенты мои въ одно и то же время бываютъ слушателями и преподавателями. По сему правилу поручилъ я предъ окончаніемъ курса старшему Лобачевскому предложить подъ моимъ руководствомъ пространную и трудную задачу о кругообращеніи (Rotation), которая мною для себя уже была по Лагранжу въ удобопонятномъ видѣ обработана. Въ то же время Симонову приказано было записывать теченіе преподаванія, которое я въ четыре пріема кончилъ, дабы сообщить его прочимъ слушателямъ. Но Лобачевскій, не пользовавшись сею запискою, при окончаніи послѣдней лекціи подалъ мнѣ рѣшеніе сей столь запутанной задачи, на нѣсколькихъ листочкахъ въ четвертку написанное. Г. академикъ Вишневскій, бывшій тогда здѣсь, неожиданно восхищенъ былъ симъ небольшимъ опытомъ знаній нашихъ студентовъ».

Эти успѣхи въ математикѣ, за которые Лобачевскій получилъ вмѣстѣ съ другими благодарность отъ министра народнаго просвѣщенія, и были причиною снисходительности къ нему совѣта, возведшаго его вмѣстѣ съ прочими въ степень магистра, т. е. оставившаго его при университетѣ (въ педагогическомъ институтѣ) съ цѣлью приготовленія къ профессорскому званію. Впрочемъ Лобачевскій созналъ свое положеніе. «Вчера по позволенію явившись въ совѣтъ, пишетъ Яковкинъ, оказалъ совершенное признаніе и раскаяніе въ прежнихъ своихъ поступкахъ, публично обѣщавши совершенно исправиться, а по сему совѣтъ и рѣшился его помѣстить въ число представляемыхъ къ удостоенію званія магистровъ, дабы излишнею строгостью не привести его, какъ весьма лестную надежду дарованіями и успѣхами подающаго для университета, въ отчаяніе и не убить духъ его» (12 іюля 1811 года). Защитниками Лобачевскаго въ совѣтѣ были профессоры Бартельсъ, Германъ, Литтровъ и Броннеръ.

Попечитель Казанскаго учебнаго округа Румовскій утвердилъ представленіе совѣта, но далъ съ своей стороны предостереженіе Лобачевскому: «А студенту Николаю Лобачевскому, — писалъ онъ въ своемъ предложеніи совѣту (7 августа 1811 г., № 787), — занимающему первое мѣсто по худому поведенію, объявить мое сожалѣніе о томъ, что онъ отличныя свои способности помрачаетъ несоотвѣтственнымъ поведеніемъ, и для того, чтобы онъ постарался перемѣнить и исправить оное,—въ противномъ случаѣ, если онъ совѣтомъ моимъ не захочетъ воспользоваться, и опять принесена будетъ жалоба на него, тогда я принужденъ буду довести о томъ до свѣдѣнія г. министра просвѣщенія».

Званіе магистра возлагало на него, по тогдашнимъ правиламъ, «споспѣшествованіе профессору или адъюнкту въ разсужденіе большихъ успѣховъ ихъ слушателей». Магистры должны были заниматься съ студентами повтореніемъ пройденнаго (не въ часы, однако, назначенные для лекцій) и объясненіемъ слушателямъ того, что они не понимаютъ, такъ какъ многіе изъ гг. профессоровъ преподаютъ и объясняютъ лекціи на иностранныхъ языкахъ, слушатели же ихъ, преимущественно же вновь поступившіе, часто, особенно въ началѣ курса, по причинѣ объясненія на иностранномъ языкѣ для матеріи совсѣмъ новой, не могутъ иногда всего понимать предлагаемаго профессоромъ ясно». За это магистры получали жалованье. Лобачевскій какъ, магистръ, стоялъ въ самыхъ близкихъ отношеніяхъ къ Бартельсу. Онъ занимался у него на дому по четыре часа въ недѣлю, и у насъ есть свѣдѣнія, что на первыхъ порахъ магистерства предметами изученія Лобачевскаго, подъ руководствомъ Бартельса, были ариеметика Гаусса и первый томъ Лапласовой «*Небесной механики*».

Въ 1814 году Лобачевскій былъ повышенъ въ званіе адъюнкта чистой математики и началъ читать свои лекціи. Съ 1819 года, въ отсутствіе профессора астрономіи Симонова, находившагося въ кругосвѣтномъ плаваніи, Лобачевскій въ теченіе двухъ лѣтъ читалъ сверхъ того астрономію и завѣдывалъ обсерваторіей.

Съ изслѣдованіями, которыя создаютъ новую эпоху въ области геометрической науки, Лобаческій впервые выступилъ въ засѣданіи факультета 12 февраля 1826 года, гдѣ онъ читалъ свое «Exposition succincte des principes de la Géometrie», («Краткое изложеніе началъ геометріи»), которое, къ сожалѣнію, и до сихъ поръ напечатано не было. Статья «О Началахъ Геометріи» была напечатана въ «Казанскомъ Вѣстникѣ» за 1829 и 1830 годъ, и представляетъ только весьма сжатое, и потому трудное для чтенія, изложеніе полученныхъ имъ результатовъ построенія «Геометріи въ болѣе обширномъ смыслѣ, нежели, какъ намъ представилъ ее первый Евклидъ».

Въ слѣдующемъ сочиненіи: «Воображаемая Геометрія», переведенномъ также на французскій языкъ, Лобачевскій, «оставляя геометрическія построенія и выбирая краткой обратный путь», показываетъ, что «главныя уравненія, которыя онъ нашелъ для зависимости сторонъ и угловъ треугольника въ *воображаемой Геометріи,* могутъ быть приняты съ пользою въ Аналитикѣ и никогда не приведутъ къ заключеніямъ ложнымъ, въ какомъ бы то ни было отношеніи».

Такимъ образомъ сдѣланное допущеніе о невозможности доказать постулатъ Евклида было разобрано и изслѣдовано какъ геометрическимъ, такъ и аналитическимъ путемъ и ни къ какимъ противорѣчіямъ не повело. Вопросъ о возможности невѣрности одиннадцатой аксіомы Евклида былъ рѣшенъ и рѣшенъ утвердительно. Но, съ одной стороны пріемъ, оказанный первому сочиненію Лобачевскаго, заставилъ его «подозрѣвать, что его сочиненіе, казавшись съ перваго взгляда темнымъ, предупреждало охоту заняться имъ съ нѣкоторымъ вниманіемъ и даже могло подать поводъ усумниться въ строгости его сужденія и въ вѣрности выведенныхъ заключеній»; съ другой стороны косвенная аналитическая повѣрка не могла замѣнить строгаго прямого доказательства. Поэтому Лобачевскій снова принимается за изложеніе того же вопроса и въ 1835—1838 годахъ печатаетъ сочиненіе: «Новыя Начала Геометріи съ полной теоріей параллельныхъ».

Изъ двухъ остальныхъ его сочиненій по Геометріи первое: «Beiträge zu den Parallellinien» представляетъ нѣсколько сокращенное изложеніе «Новыхъ Началъ Геометріи», а второе: «Пангеометрія», записанная подъ диктовку уже слѣпого Лобачевскаго его учениками и изданная одновременно на русскомъ и французскомъ языкахъ незадолго до его смерти, представляетъ снова конспективное изложеніе всѣхъ его изслѣдованій по Геометріи. Это послѣднее сочиненіе нѣсколько уступаетъ его «Новымъ Началамъ Геометріи», которыя можно считать лучшимъ изъ всѣхъ его произведеній. По силѣ и изяществу изложенія «Новыя Начала Геометріи» мало чѣмъ уступаютъ «Началамъ» Евклида, и по-истинѣ могутъ служить для Лобачевскаго «monumentum aere perennius, regalique situ pyramidum altius». Тому, кто хочетъ познакомиться съ работами Лобачевскаго, необходимо начинать съ изученія именно этого сочиненія.

Наряду съ ученой и преподавательской дѣятельностью шла и высокоплодотворная административная дѣятельность Н. И. Лобачевскаго. Онъ былъ деканомъ и 19 лѣтъ ректоромъ университета, несъ другія разнообразныя и сложныя обязанности по управленію. Вотъ какъ проф. Н. Н. Буличъ отзывается вообще о дѣятельности и характерѣ Лобачевскаго: «Его независимый и самостоятельный характеръ выдержалъ такую нравственную ломку, какъ тяжелое время реакціи въ послѣдніе годы царствованія Александра I и попечительство въ Казани Магницкаго, не поступившись своими убѣжденіями, не измѣнивъ имъ и унеся въ старость молодое стремленіе къ наукѣ, уваженіе къ ней и восторги духовнаго наслажденія. Если спеціалисты говорятъ о его «по-истинѣ глубокомысленныхъ лекціяхъ», доступныхъ однако только избранной аудиторіи, въ послѣдніе годы его жизни, то мы прибавимъ къ этому личное воспоминаніе о его публичныхъ лекціяхъ по физикѣ, гдѣ ему удавалось излагать науку популярно и гдѣ раскрывалъ онъ массу самыхъ разнообразныхъ свѣдѣній. Въ старые глухіе и спящіе годы провинціи, когда все было такъ смирно, гладко и довольно кругомъ, когда однообразныя явленія жизни только скользили по душѣ, не задѣвая и не возбуждая ее, такія лекціи, какъ Лобачевскаго, были отраднымъ явленіемъ. Лобачевскій читалъ просто, безъ желанія придать внѣшнюю красоту своей рѣчи, безъ реторической эмфазы и крика, но въ словахъ его слышался и его логическій умъ и широкое образованіе. Спокойнымъ, ровнымъ голосомъ онъ дѣлалъ свои широкія обобщенія, вызывалъ увлекательные образы и возбуждалъ мысль»...

«Всего интереснѣе было бы прослѣдить,—замѣчаетъ тотъ же проф. Буличъ, — какимъ образомъ развилось его глубокое абстрактное мышленіе. Лобачевскій не бывалъ въ Европѣ; двѣ-три поѣздки въ русскія столицы были кратковременны; онъ почти не оставлялъ Казани. Къ сожалѣнію, и внутреннее развитіе и интимная жизнь Лобачевскаго мало извѣстны, несмотря на то, что живы еще нѣкоторые, бывшіе съ нимъ въ близкихъ отношеніяхъ. Принадлежа по женѣ къ тому, что называлось въ то время казанскимъ обществомъ, Лобачевскій появлялся и въ немъ, но представлялъ изъ себя скорѣе задумчивую, чѣмъ дѣятельную фигуру, особенно въ послѣдніе годы своей жизни. Сколько намъ извѣстно, даже близкіе къ нему люди смотрѣли на него съ точки зрѣнія, раскрывающейся въ обыденной морали Хемницеровой басни «Метафизикъ».

Какъ же относились современники къ научной дѣятельности Лобачевскаго, главное—къ его геометрическимъ изслѣдованіямъ, составляющимъ нынѣ славу и гордость русской математической науки? На этотъ счетъ сохранились также весьма любопытныя свидѣтельства. Въ Россіи работы его были встрѣчены... глумленіемъ. Въ № 41 распространеннаго тогда журнала «Сынъ Отечества» за 1834 годъ появилась статья, оскорбительная для Лобачевскаго. Но отвѣтъ его на эту статью, по сообщенію самого Лобачевскаго, напечатанъ не былъ.

Статья въ «Сынѣ Отечества» носитъ заглавіе: «О начертательной Геометріи соч. Г. Лобачевскаго» и содержитъ критическій отзывъ о сочиненіи Лобачевскаго: «О Началахъ Геометріи». Для лучшей характеристики впечатлѣнія, произведеннаго сочиненіемъ Лобачевскаго на современныхъ ему русскихъ математиковъ слѣдуетъ привести здѣсь интереснѣйшія мѣста названной статьи въ подлинномъ видѣ. Вотъ они:

«Есть люди, которые, прочитавъ иногда книгу, говорятъ: она слишкомъ проста, слишкомъ обыкновенна, въ ней не о чемъ и подумать. Такимъ любителямъ думанья совѣтую прочесть Геометрію Г. Лобачевскаго. Вотъ ужъ подлинно есть о чемъ подумать! Многіе изъ первоклассныхъ нашихъ математиковъ читали ее, думали и ничего не поняли. Послѣ сего уже не считаю нужнымъ упоминать, что и я, продумавъ надъ сею книгою нѣсколько времени, ничего не придумалъ, т. е. не понялъ почти ни одной мысли. Даже трудно было бы понять и то, какимъ образомъ г. Лобачевскій изъ самой легкой и самой ясной въ математикѣ науки, какова Геометрія, могъ сдѣлать такое тяжелое. такое темное и непроницаемое ученіе, если бы самъ онъ отчасти не надоумилъ насъ, сказавъ, что его Геометрія отлична отъ *употребительной*, которой всѣ мы учились, и которой, вѣроятно, ужъ разучиться не можемъ, и есть только *воображаемая*. Да, теперь все очень понятно. Чего не можетъ представить воображеніе, особливо живое и вмѣстѣ уродливое? Почему не вообразить, напр., черное бѣлымъ, круглое четыреугольнымъ, сумму всѣхъ угловъ въ прямолинейномъ треугольникѣ меньше двухъ прямыхъ и одинъ и тотъ же опредѣленный интегралъ равнымъ то $\frac{\pi}{4}$, то ∞? Очень, очень можно, хотя для разума все это и непонятно. Но спросятъ: для чего же писать, да еще и печатать такія нелѣпыя фантазіи? Признаюсь, на этотъ вопросъ отвѣчать трудно. Авторъ нигдѣ не намекнулъ на то, съ какою цѣлью онъ напечаталъ сіе сочиненіе, и мы должны, слѣдовательно, прибѣгнуть къ догадкамъ. Правда, въ одномъ мѣстѣ онъ ясно говоритъ, что будто бы недостатки, замѣченные имъ въ употребляемой доселѣ Геометріи, заставили его сочинить и издать эту новую Геометрію; но это, очевидно, несправедливо, и по всей вѣроятности сказано для того, чтобы еще болѣе скрыть настоящую цѣль его сочиненія. Во-первыхъ, это противорѣчитъ тому, что сказалъ самъ же авторъ о своей Геометріи, т. е. что она въ природѣ вовсе не существуетъ, а могла существовать только въ его воображеніи, и для измѣреній на самомъ дѣлѣ остается совершенно безъ употребленія; во-вторыхъ, это дѣйствительно противорѣчитъ всему тому, что въ ней содержится, и судя по чему скорѣе можно согласиться на то, что новая Геометрія выдумана для опроверженія прежней, нежели для пополненія оной. При томъ же, да позволено намъ будетъ нѣсколько коснуться личности. Какъ можно подумать, чтобы г. Лобачевскій, ординарный профессоръ математики, написалъ съ какою нибудь серьезною цѣлію книгу, которая не много бы принесла чести и послѣднему приходскому учителю. Если не ученость, то по крайней мѣрѣ здравый смыслъ долженъ имѣть каждый учитель, а въ новой Геометріи нерѣдко недостаетъ и сего послѣдняго».

«Соображая все сіе, съ большою вѣроятностью заключаю, что истинная цѣль, для которой г. Лобачевскій сочинилъ и издалъ свою Геометрію, есть просто шутка, или, лучше, сатира на ученыхъ математиковъ, а можетъ быть и вообще на ученыхъ сочинителей настоящаго времени. За симъ и уже не съ вѣроятностію только, а съ совершенною увѣренностію полагаю, что безумная страсть писать какимъ-то страннымъ и неразумительнымъ образомъ, весьма замѣтная съ нѣкотораго времени во многихъ изъ нашихъ писателей, и безразсудное желаніе открывать новое при талантахъ, едва достаточныхъ для того, чтобы надлежащимъ образомъ постигать старое, суть два недостатка, которые авторъ въ своемъ сочиненіи намѣренъ былъ изобразить и изобразилъ какъ нельзя лучше.

«Во-первыхъ, новая Геометрія, какъ я уже упомянулъ о томъ выше, написана такъ, что никто изъ читавшихъ ее почти ничего не понялъ. Желая покороче познакомить васъ съ нею, я собиралъ въ одну точку все мое вниманіе, приковывалъ его къ каждому періоду, къ каждому слову и даже къ каждой буквѣ, и при всемъ томъ такъ мало успѣлъ прояснить мракъ, кругомъ облегающій это сочиненіе, что едва въ состояніи разсказать вамъ то, о чемъ въ немъ говорится, не говоря ни слова о томъ, что говорится. Авторъ говоритъ, кажется, что-то о треугольникахъ, о зависимости въ нихъ угловъ отъ сторонъ, чѣмъ главнѣйшимъ образомъ и отличается его Геометрія отъ нашей; потомъ предлагаетъ новую теорію параллельныхъ, которая, по собственному его признанію, находится или нѣтъ въ природѣ, никто доказать не въ состояніи; наконецъ, слѣдуетъ разсмотрѣніе того, какимъ образомъ въ этой воображаемой геометріи опредѣляется величина кривыхъ линій, площадей, кривыхъ поверхностей и объемовъ тѣлъ, — и все это, еще разъ повторяю, написано такъ, что ничего и понять невозможно».

«Во-вторыхъ, въ концѣ книги г. Лобачевскій помѣстилъ два опредѣленные интеграла, которые *онъ открылъ мимоходомъ, идя прямо къ своей цѣли дать общія правила для измѣренія всѣхъ геометрическихъ величинъ и дозволивши себѣ только нѣкоторыя примѣненія.* Открытіе весьма замѣчательное! Ибо одинъ изъ сихъ новыхъ интеграловъ уже давно извѣстенъ, и находится гораздо легчайшимъ образомъ; другой совершенно невѣренъ, потому что ведетъ къ той нелѣпости, которую мы уже замѣтили выше, т. е. что одинъ и тотъ же опредѣленный интегралъ равенъ то $\frac{\pi}{4}$, то ∞. Но не таковы ли и въ самомъ дѣлѣ большею частію бываютъ прославляемыя у насъ новооткрытія? Не часто ли случается, что старое, представленное только въ какомъ нибудь странномъ образѣ, выдаютъ намъ за новое, или и новое, но ложное за чрезвычайно важное открытіе? Хвала г. Лобачевскому, принявшему на себя трудъ обличить съ одной стороны наглость и безстыдство ложныхъ изобрѣтателей, съ другой простодушное невѣжество почитателей ихъ новоизобрѣтеній».

«Но, сознавая всю цѣну сочиненія г. Лобачевскаго, я не могу однакожъ не попенять ему за то, что онъ, не давъ своей книгѣ надлежащаго заглавія, заставилъ насъ долго думать понапрасну. Почему бы вмѣсто заглавія: «О началахъ Геометріи», не написать напримѣръ — Сатира на Геометрію, Карикатура на Геометрію или что нибудь подобное? Тогда бы всякій съ перваго взгляда видѣлъ, что это за книга, и авторъ избѣжалъ бы множества невыгодныхъ для него толковъ и сужденій. Хорошо, что мнѣ удалось проникнуть настоящую цѣль, съ которою написана эта книга, а то, Богъ знаетъ, что бы и я о ней и ея авторѣ думалъ. Теперь же думаю и даже увѣренъ, что почтенный авторъ почтетъ себя весьма мнѣ обязаннымъ за то, что я показалъ истинную точку зрѣнія, съ которой должно смотрѣть на его сочиненіе»...

Такими глумленіями встрѣчали русскіе современники плоды глубокихъ изысканій великаго ума. И есть весьма вѣскія основанія думать, что приведенная выше въ отрывкахъ статья въ «Сынѣ Отечества» принадлежитъ не какому либо дилетанту, а «глубокоученому» россійскому того времени академику. Извѣстно также, напр., что талантливый русскій математикъ того времени, Остроградскій, открыто насмѣхался надъ изысканіями казанскаго профессора. Заграницей работы Лобаческаго были большинствомъ ученыхъ просто не замѣчены. Только отъ орлинаго взора великаго Гаусса не укрылась вся важность изысканій скромнаго русскаго провинціальнаго профессора. Но Гауссъ сообщилъ объ этомъ только въ частномъ письмѣ къ Шумахеру въ 1846 году. Вотъ это историческое письмо.

«Въ послѣднее время я имѣлъ случай перечитать небольшое сочиненіе Лобачевскаго подъ заглавіемъ: Geometrische Untersuchungen zur Teorie der Parallellinien. Это сочиненіе содержитъ въ себѣ основанія геометріи, которая должна бы была существовать, и строгое развитіе которой представляло бы непрерывную цѣпь, если бы Евклидова геометрія не была истинною. Нѣкто Швейкартъ далъ этой геометріи имя «géométrie australe», а Лобачевскій—геометріи воображаемой.

«Вы знаете, что уже пятьдесятъ четыре года (съ 1792), какъ я раздѣляю тѣ же взгляды, не говоря здѣсь о нѣкоторыхъ развитіяхъ, которыя получили мои идеи объ этомъ предметѣ впослѣдствіи. Слѣдовательно, я собственно не нашелъ въ сочиненіи Лобачевскаго ни одного новаго для меня факта; но изложеніе весьма различно отъ того, какое я предполагалъ сдѣлать, и авторъ трактуетъ о предметѣ, *какъ знатокъ, въ истинно-геометрическомъ духѣ*. Я считалъ себя обязаннымъ обратить ваше вниманіе на эту книгу, чтеніе которой не преминетъ вамъ доставить живѣйшее удовольствіе».

Гетингенъ, 28 ноября 1846 года.

Зналъ ли что-либо объ этомъ письмѣ Гаусса Лобачевскій, уже вступившій въ послѣднее десятилѣтіе своей жизни? Трудно дать утвердительный отвѣтъ. Переписка Гаусса съ Шумахеромъ была опубликована много позже смерти Лобачевскаго. Нашъ же «Коперникъ Геометріи», по выраженію англійскаго ученаго Клиффорда, умеръ въ 1856 году 12 февраля. Признаніе и оцѣнка его заслугъ принадлежитъ послѣднимъ 2—3 десятилѣтіямъ, когда пониманію и уясненію его геніальныхъ мыслей была посвящена цѣлая литература.

Пониманію Лобачевскаго въ особенности содѣйствовали своими трудами такіе выдающіеся ученые, какъ Бельтрами, Риманнъ, Гельмгольцъ, Кэли, Гуэль, Клейнъ, Клиффордъ, Ли, Пуанкаре, Киллингъ и проч...

22 октября 1893 года Россія, или, вѣрнѣе,—всѣ русскія физико-математическія общества торжественно справляли 100-лѣтнія поминки дня рожденія Лобачевскаго. Незадолго до этого времени Казанскій университетъ издалъ «Полное собраніе со-

чиненій по геометріи Н. И. Лобачевскаго» въ 2-хъ томахъ (1883 и 1886 гг.), но въ самомъ дѣлѣ *«Полнаго собранія»* всѣхъ безъ исключенія сочиненій великаго русскаго «Коперника Геометріи» нѣтъ,—да и будетъ ли скоро?.. Въ общемъ, надо сознаться, что Лобачевскому на Руси «везетъ» гораздо менѣе, чѣмъ заграницей. Проявившійся было къ юбилею 1893 года интересъ къ Лобачевскому въ широкихъ кругахъ скоро ослабъ. Были собранія различныхъ обществъ, были дѣльныя, красивыя рѣчи, но... «облетѣли цвѣты, догорѣли огни» и... все почти остается по старому,—и это въ то время, какъ изысканія Лобачевскаго о параллельныхъ линіяхъ приняты, напр., въ японскихъ школахъ въ качествѣ пособія при преподаваніи геометріи. Слѣдуетъ, положимъ, сознаться, что чтеніе многихъ произведеній Лобачевскаго въ подлинникѣ требуетъ довольно значительной подготовки. Лобачевскій, вообще, кратокъ и сжатъ. Но, съ другой стороны, ничего почти не сдѣлано до сихъ поръ у насъ къ популяризаціи работъ Лобачевскаго въ смыслѣ переложенія ихъ на болѣе понятный современный математическій языкъ. Единственную достойную вниманія попытку въ этомъ отношеніи мы нашли въ работѣ Н. П. Соколова: *«Значеніе изслѣдованій Н. И. Лобачевскаго въ Геометріи и ихъ вліяніе на ея дальнѣйшее развитіе»*.

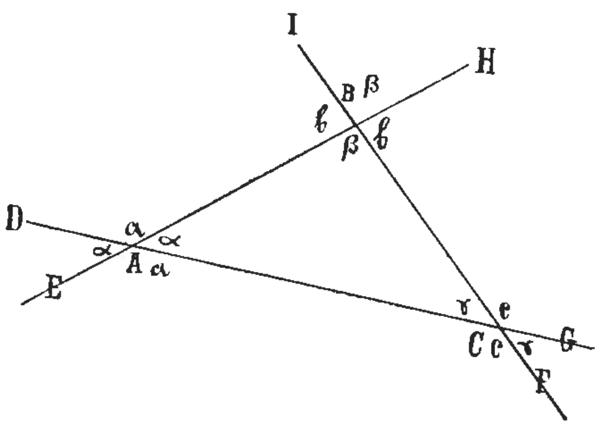
Талантливый авторъ въ этой книгѣ дѣлаетъ попытку изложить по возможности кратко и популярно содержаніе главнаго сочиненія Лобачевскаго «Новыя Начала Геометрія». Нельзя не привѣтствовать такой попытки, какъ нельзя не пожалѣть и о томъ, что г. Соколовъ не продолжалъ своихъ трудовъ къ дальнѣйшей и еще большей популяризаціи трудовъ Лобачевскаго. Во всякомъ случаѣ ближе къ концу этой книги читатель найдетъ содержаніе «Новыхъ Началъ Геометріи» Лобачевскаго въ изложеніи Н. П. Соколова. Быть можетъ, чтеніе этой главы заинтересуетъ кого-либо настолько, что направитъ его на путь изученія подлинныхъ трудовъ Лобачевскаго для широкой популяризаціи его идей.

Два письма о постулатѣ Евклида.

Какъ разъ въ то время, когда въ старой губернской казанской глуши Н. И. Лобачевскій уже рѣшилъ и обнародовалъ свое рѣшеніе относительно мѣста и значенія въ геометріи 11-ой аксіомы (постулата) Евклида, извѣстные европейскіе ученые все еще дѣлали тщательныя попытки «доказать» это Евклидовское допущеніе. Авторитетъ Евклида былъ еще настолько великъ, что никто не осмѣливался подозрѣвать о возможности геометріи и пространства, отличныхъ отъ Евклидовскихъ. Все дѣло заключалось только, по мнѣнію тогдашнихъ ученыхъ, въ возможномъ упрощеніи «Началъ» александрійскаго геометра, — въ стремленіи изложить теорію параллельныхъ линій безъ знаменитаго постулата. Нижеприводимое письмо (отъ 1831 г.) проф. Шумахера къ Гауссу дастъ настолько типичный образчикъ подобныхъ попытокъ, что приводимъ его въ подлинномъ переводѣ:

Шумахеръ къ Гауссу.

Я беру на себя смѣлость представить вамъ попытку, которую я сдѣлалъ, чтобы доказать, безъ помощи теоріи параллелей, предложеніе, по которому сумма трехъ угловъ треугольника равна 180^0, — откуда вытекало бы само собою доказательство Евклидовой аксіомы. Единственныя теоремы, которыя я предполагаю доказанными, суть: что сумма всѣхъ угловъ, образуемыхъ около одной точки, равна 360^0 или четыремъ прямымъ угламъ, и еще, что углы, противоположные въ вершинѣ, равны.



Черт. А.

Продолжимъ неопредѣленно стороны прямолинейнаго треугольника ABC (черт. А), или, другими словами, разсмотримъ систему трехъ прямыхъ въ одной плоскости, которыя своими пересѣченіями образуютъ треугольникъ ABC. При трехъ вершинахъ имѣемъ уравненія:

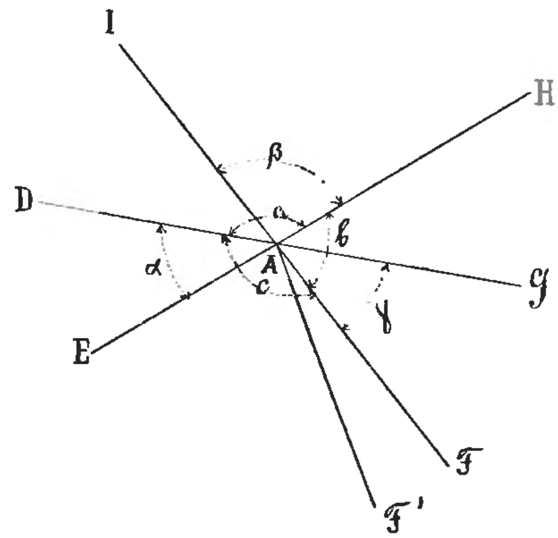
$$2a+2\alpha=4d,$$
$$2b+2\beta=4d,$$
$$2c+2\gamma=4d,$$

откуда

$$\alpha+\beta+\gamma=6d-(a+b+c).$$

Такъ какъ эти соотношенія существуютъ, какъ бы ни были расположены точки A, B и C, или, что все равно, какъ бы ни были проведены три прямыя въ плоскости, оставимъ неподвижными линіи DG, EH и заставимъ линію IF проходить черезъ точку A (черт. **B**) такъ, чтобы она составляла съ EH тотъ же самый уголъ, какъ и въ первоначальномъ своемъ положеніи, или вообще,— такъ какъ этотъ уголъ произволенъ, — такъ, чтобы линія IF всегда шла внутри угла. Мы будемъ имѣть тогда

$$a+b+c=4d.$$



Черт. **B**.

Слѣдовательно

$$\alpha+\beta+\gamma=2d.$$

Можетъ быть, возразятъ на это, что хотя и имѣемъ по предположенію

$$b \text{ (черт. } \mathbf{A})=b \text{ (черт. } \mathbf{B}),$$

но что равенство:

$$c \text{ (черт. } \mathbf{A})=c \text{ (черт. } \mathbf{B})$$

должно быть доказано.

Мнѣ кажется однако, что, вслѣдствіе произвольной величины угловъ, въ этомъ доказательствѣ нѣтъ необходимости.

Таковы начала доказательства, о которомъ я жду вашего отзыва. Я прибавлю только въ оправданіе моего разсужденія, что, хотя второе дѣйствіе и уничтожаетъ треугольникъ ABC, но оно не уничтожаетъ угловъ треугольника. Какъ бы ни были расположены линіи, всегда имѣемъ:

$$IBH=\beta,\ GCF=\gamma,\ DAE=\alpha,$$

какъ въ конечномъ треугольникѣ, такъ и въ исчезающемъ; сумма:

$$IAH+GAF+DAE$$

всегда равна, слѣдовательно, суммѣ угловъ прямолинейнаго треугольника.

Такимъ образомъ докажемъ предложеніе для произвольнаго треугольника (котораго углы суть A, B, C), проводя линіи DG, EH такъ, чтобы было $a=A$, и дѣлая кромѣ того $IAH=B$ и $GAF=C$. Если бы тогда IAF оказалась не прямою, но ломаною линіею IAF', то уголъ c сдѣлася бы меньше на dc; но уголъ b сталъ бы на ту же величину больше, такъ что сумма этихъ угловъ осталась бы безъ перемѣны, и мы имѣли бы, — что намъ и требуется для доказательства,—равенство:

$$b+c\ (\text{черт. }\mathbf{A})=b+c\ (\text{черт. }\mathbf{B}).$$

Копенгагенъ, 3-го мая 1831 года.

Гауссъ къ Шумахеру.

Разсматривая внимательно то, что вы мнѣ пишете о теоріи параллелей, я замѣчаю, что *вы употребили въ вашихъ разсужденіяхъ, не выразивъ его явно*, слѣдующее предложеніе:

Если двѣ пересѣкающіяся прямыя, (1) и (2), образуютъ съ третьею прямою (3), ихъ встрѣчающею, соотвѣтственно углы A' и A'', и если четвертая прямая (4), лежащая въ той же плоскости, будетъ пересѣкать (1) подъ угломъ A', то та же прямая (4) будетъ пересѣкать (2) подъ угломъ A''.

Это предложеніе не только требуетъ доказательства, но можно сказать, что оно-то, въ сущности, и составляетъ ту теорему, о доказательствѣ которой идетъ рѣчь.

Вотъ уже нѣсколько недѣль, какъ я началъ излагать письменно нѣкоторые результаты моихъ собственныхъ размышленій объ этомъ предметѣ, занимавшихъ меня сорокъ лѣтъ тому назадъ и никогда мною не записанныхъ, вслѣдствіе чего я долженъ былъ три или четыре раза возобновлять весь трудъ въ моей головѣ. Мнѣ не хотѣлось бы однако, чтобы это погибло вмѣстѣ со мною.

Гегингенъ, 17 мая 1831 года.

Отвѣтъ Гаусса типиченъ въ томъ отношеніи, что указываетъ на тотъ обыкновенный недостатокъ, которымъ страдали *всѣ* безъ исключенія попытки доказать постулатъ Евклида, или обойти его въ теоріи параллельныхъ линій. Вмѣсто этого постулата авторы вводили *незамѣтно* для самихъ себя какое-нибудь новое, нуждающееся въ доказательствѣ, предложеніе. Такъ было и съ Шумахеромъ.

Къ крайнему сожалѣнію, до сихъ поръ ничего неизвѣстно о томъ, остались ли, въ самомъ дѣлѣ, въ бумагахъ Гаусса хоть какіе-либо наброски по этому поводу, какъ онъ пишетъ въ своемъ письмѣ.

Суть ошибки Шумахера еще лучше выяснится изъ дальнѣйшаго, гдѣ о суммѣ угловъ треугольника будетъ также приведенъ извѣстнаго рода «софизмъ».

Выясненіе трехъ постулатовъ о параллельныхъ линіяхъ.

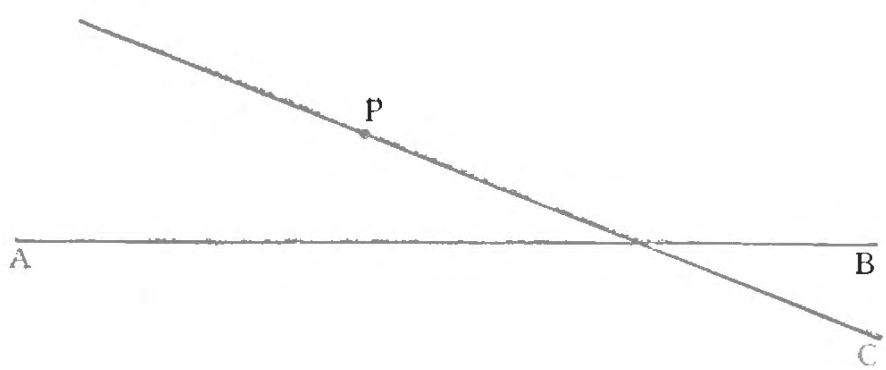
Въ противоположность постулату Евклида, о которомъ мы говорили въ главѣ «Два отрицательныхъ вывода XIX вѣка», Лобачевскій ставитъ иной, а именно:

Черезъ данную точку на плоскости можно провести неопредѣленно большое число линій, изъ которыхъ ни одна не пересѣчетъ данной въ той же плоскости линіи.

Въ то же время еще одинъ постулатъ нѣмецкаго геометра Риманна говоритъ, что

черезъ точку на плоскости нельзя провести такой линіи, которая не пересѣкала бы данной линіи въ этой плоскости.

Отправляясь отъ каждаго изъ этихъ допущеній въ отдѣльности, мы получимъ три различныхъ системы геометріи на плоскости. Различіе этихъ геометрій лучше всего выясняется на слѣдующемъ примѣрѣ:



Фиг. 97.

Пусть AB и PC (см. фиг. 97) будутъ двѣ прямыя линіи, лежащія въ одной и той же плоскости и неограниченно продолжающіяся по обоимъ противоположнымъ направленіямъ. AB примемъ неподвижной и занимающей опредѣленное положеніе, а PC пусть вращается въ плоскости около точки P, напр., въ направленіи, принимаемомъ за положительное, т. е. обратно движенію часовой стрѣлки, и пусть PC сначала пересѣкаетъ AB, какъ указано на фиг. 97. При дальнѣйшемъ вращеніи линіи PC, точка пересѣченія уходитъ все далѣе и далѣе вправо и здѣсь логически возможны три случая:

1) Вращающаяся линія перестаетъ пересѣкать неподвижную прямую AB съ одной стороны (напр., справа) и тотчасъ же непосредственно при продолженіи вращенія пересѣкаетъ эту линію съ противоположной стороны (слѣва); 2) или же линія PC, переставъ пересѣкать AB и продолжая вращаться въ нѣкоторой части плоскости до новаго пересѣченія, совсѣмъ не встрѣчается съ линіей AB; 3) или, наконецъ, наступитъ такой промежутокъ времени, въ продолженіе котораго обѣ линіи будутъ одновременно пересѣкаться въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ.

Первая изъ этихъ возможностей даетъ геометрію Евклида, вторая—геометрію Лобачевскаго, а третья—геометрію Римана.

Извѣстнымъ образомъ развиваемые и пріобрѣтаемые нами умственные навыки приводятъ къ тому, что всѣ три предыдущія допущенія мы послѣдовательно иллюстрируемъ довольно своеобразнымъ путемъ, а именно съ помощью того *опытнаго* понятія о прямой линіи, какое мы уже имѣемъ о ней. Логически каждое изъ этихъ трехъ допущеній, повторяемъ, такъ же допустимо, какъ и другое. Съ этой точки зрѣнія, строго говоря, нѣтъ никакого основанія одно допущеніе (постулатъ) предпочитать другому. Психологически, однако же, выходитъ такъ, что гипотеза Римана представляется начинающему совершенно недопустимою, и даже допущеніе Евклида менѣе понятно, чѣмъ допущеніе Лобачевскаго.

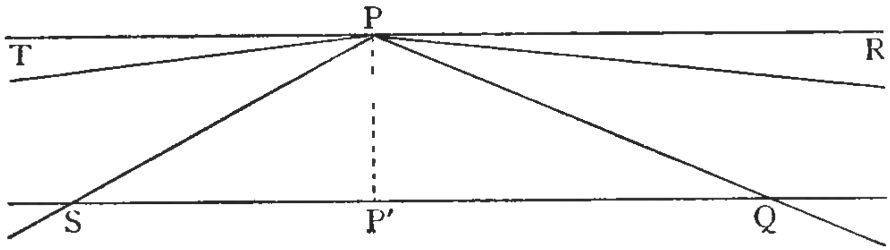
Интересный опытъ въ этомъ отношеніи былъ сдѣланъ американскимъ математикомъ Уайтомъ (White) со своими начинающими курсъ «нормальной школы» учениками. Онъ начертилъ на доскѣ рисунокъ, подобный фиг. 97, изложилъ простыми и немногими словами всѣ три допущенія и попросилъ каждаго изъ учениковъ высказать свое мнѣніе по поводу каждаго изъ постулатовъ, записавъ свой отзывъ на клочкѣ бумажки. И вотъ оказалось, что 46 учениковъ (изъ общаго числа 54) высказались за вѣрность второго допущенія, т. е. постулата Лобачевскаго. Голоса этихъ 46 подѣлились такъ: 2 заявили, что они «догадываются», что должно быть такъ, а не иначе; 21, — что они «думаютъ» такъ, 13 — въ этомъ «вполнѣ увѣрены», 10 «знаютъ» это. Что касается постулата Евклида, то за него высказались только остальные 8 изъ 54 учениковъ и при томъ такъ, что 6 изъ нихъ «думали», что это допущеніе правильно, а два были въ этомъ «вполнѣ увѣрены». Интересно отмѣтить обстоятельство, что среди этихъ не искусившихся еще ни въ какихъ софистическихъ изворотахъ умовъ не нашлось ни одного, который бы высказался за пріемлемость допущенія Риманна. Пониманіе его, очевидно, требуетъ нѣсколько болѣе повышеннаго математическаго развитія. Въ свою очередь, большая часть сторонниковъ большинства, подавшаго голоса за 2-е предположеніе (Лобачевскаго), обнаружили склонность перемѣнить свое мнѣніе, какъ только они узнали, что это предположеніе сводится къ тому, что двѣ пересѣкающіяся прямыя могутъ быть одновременно параллельны одной и той же прямой. Во всякомъ случаѣ вышеизложенное свидѣтельствуетъ о томъ, что постулатъ Евклида не имѣетъ по формѣ характера убѣдительности даже для неискушеннаго ума.

Обращаясь къ *тригонометріи*, возьмемъ линію, дающую значенія тангенсовъ центральнаго угла при возрастаніи этого угла отъ 0 до 90°. При величинѣ угла въ 90° тангенсъ его, какъ извѣстно, равенъ ∞ (безконечности). Но какъ только вращающаяся сторона угла перейдетъ хотя бы безконечно мало за (лѣвѣе) значеніе 90°, мы принимаемъ, что она тотчасъ же пересѣкается съ линіей тангенсовъ на безконечно далекомъ разстояніи, но въ противоположномъ направленіи (внизу), чѣмъ раньше. Это именно допущеніе и обосновываетъ, слѣдовательно, нашу тригонометрію на началахъ Евклида, а не иныхъ.

Знаменитый астрономъ Кеплеръ ввелъ опредѣленіе параллельныхъ, какъ *линій, встрѣчающихся въ безконечности.*

Такимъ опредѣленіемъ можно пользоваться, пожалуй, даже въ элементарной геометріи; необходимо только правильно понимать его и съ этой цѣлью перевести на языкъ такъ называемой *теоріи предѣловъ*.

Пусть линія (фиг. 98) PP' будетъ перпендикулярна къ SQ и пусть точка Q движется все далѣе и далѣе вправо въ то время, какъ точка P остается неподвижной, и пусть, наконецъ, уголъ $P'PR$ будетъ предѣлъ, къ которому приближается уголъ $P'PQ$ при безпредѣльномъ возрастаніи разстоянія Q отъ P'. Въ



Фиг. 98.

такомъ случаѣ PR есть линія, параллельная SQ. То есть параллельность приписывается предѣльному положенію пересѣкающихся линій, когда точка пересѣченія уходитъ въ безконечность. Это понятіе мы и выражаемъ коротко извѣстными словами, что «параллельныя прямыя встрѣчаются въ безконечности».

Возвращаясь къ нашимъ тремъ постулатамъ, предположимъ (см. фиг. 98), что точка P неподвижна, а PS передвигается такъ, что точка S уходитъ безпредѣльно влѣво, при чемъ, при безпредѣльномъ возрастаніи $P'S$ уголъ TPP' будетъ предѣломъ для угла SPP'. Въ такомъ случаѣ TP есть линія, параллельная SQ. Итакъ:

Согласно съ постулатомъ Евклида PT и PR составляютъ одну прямую линію:

Согласно Лобачевскому, обѣ эти прямыя могутъ представлять и нѣкоторую ломаную линію.

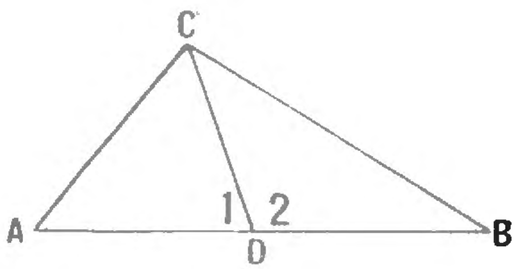
Наконецъ, по допущенію Римана, Q и S не могутъ удалиться на безконечное пространство (но Q переходитъ, такъ сказать, чрезъ значеніе S опять къ P'), а это, по понятіямъ теоріи предѣловъ, не есть предѣльное положеніе и, слѣдовательно, не параллельная линія въ Евклидовскомъ смыслѣ этого слова.

Сумма угловъ треугольника.

Извѣстная теорема о суммѣ угловъ треугольника во всѣхъ учебникахъ геометріи доказывается на основаніи теоремъ о параллельныхъ линіяхъ. Но мы знаемъ уже (см. предыдущую главу), что въ теоріи параллельныхъ есть одно не могущее быть доказаннымъ допущеніе—знаменитый Евклидовъ постулатъ. Слѣдовательно, строго говоря, и теорема о суммѣ угловъ треугольника оказывается недоказанной.

Но вотъ другое «очень простое» доказательство этой важнѣйшей теоремы,—доказательство, которое, казалось бы, должно положить конецъ всѣмъ сомнѣніямъ и спорамъ.

Пусть сумма угловъ треугольника равна не двумъ прямымъ, а какой-нибудь еще неизвѣстной пока величинѣ, которую обозначимъ черезъ x. Проведемъ въ треугольникѣ ABC линію CD, соединяющую вершину C съ произвольной точкой основанія. Имѣемъ два новыхъ треугольника ADC и DBC. Сумма угловъ каждаго изъ нихъ равна x, а сумма этихъ суммъ $= 2x$. Ясно, что если отъ этой суммы отнять углы 1 и 2 (т. е. $2d$), то получится сумма угловъ треугольника ABC. Слѣдовательно, мы въ правѣ написать уравненіе



Фиг. 99.

$$2x - 2d = x,$$

откуда $x = 2d$, другими словами: *сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ.*

Правильно ли это доказательство? Конечно, нѣтъ. Это не болѣе, какъ софизмъ, и мы сейчасъ укажемъ, гдѣ здѣсь кроется ошибка.

Ходъ доказательства совершенно вѣренъ, но съ самаго же начала сдѣлано было бездоказательное допущеніе. Вспомнимъ, что мы приравняли сумму угловъ всякаго треугольника неизвѣстной величинѣ x. Хотя, казалось бы, мы ничего этимъ не предрѣшаемъ, но на самомъ дѣлѣ мы утверждаемъ заранѣе, что сумма угловъ *одинакова у всѣхъ треугольниковъ,* — другими словами, что она есть величина постоянная. Между тѣмъ въ этомъ-то и заключается весь вопросъ. Если бы было доказано, что у всѣхъ треугольниковъ, разной формы и размѣровъ, сумма угловъ остается постоянной, то ужъ не трудно было бы, какъ мы видѣли, доказать, что постоянная эта есть именно $2d$, а не какая-либо другая.

Итакъ, выше мы доказали не ту теорему, которую брались доказать, а иную:

если сумма угловъ треугольника есть величина постоянная, то она равна $2d$.

Эта новая теорема, которую мы случайно и неожиданно для самихъ себя доказали, не совсѣмъ, однако, безполезна: она поможетъ намъ кое-что уяснить въ области не-Евклидовыхъ геометрій.

Для этого мы сначала перефразируемъ эту теорему,— выскажемъ то, что въ геометріи называется теоремой «обратной противоположной». Получимъ:

если сумма угловъ треугольника не равна $2d$, то она не есть постоянная величина.

Какъ и всѣ «обратныя противоположной», теорема эта должна быть вѣрна, разъ вѣрна прямая теорема. Да и въ самомъ дѣлѣ, если бы сумма угловъ $\triangle$-ка была величиной постоянной, то, согласно прямой теоремѣ, она равнялась бы $2d$,— что противорѣчитъ условію.

Отсюда сразу получается очень важный выводъ. Мы знаемъ, что въ геометріи Лобачевскаго сумма угловъ треугольника меньше $2d$, а въ геометріи Риманна больше $2d$,—т. е. и въ томъ и другомъ случаѣ она *не равна* $2d$. Пользуясь нашей теоремой, мы заранѣе уже, не зная деталей этихъ не-Евклидовыхъ геометрій, можемъ утверждать, что въ этихъ геометріяхъ *сумма угловъ треугольника есть величина перемѣнная.* Въ этомъ-то непостоянствѣ суммы угловъ треугольника и заключается характерное отличіе упомянутыхъ не-Евклидовыхъ геометрій. Не то важно, что сумма угловъ $\triangle$-ка больше или меньше $2d$, а то, что она вообще не есть величина постоянная.

Итакъ, вотъ чему научило насъ разсмотрѣніе приведеннаго выше софизма:

1) Въ Евклидовой геометріи сумма угловъ треугольника есть величина постоянная и равна $2d$.

2) Въ геометріи Лобачевскаго и Риманна сумма угловъ треугольника не есть величина постоянная.

Задача 68-я.

Нѣсколько «коварныхъ» вопросовъ.

Какое число дѣлится на всякое другое число безъ остатка?

* *
*

Можетъ ли дробь, въ которой числитель меньше знаменателя, быть равна дроби, въ которой числитель больше знаменателя? Если нѣтъ, то какъ же

$$\frac{-3}{+6} = \frac{+5}{-10}?$$

* *
*

Въ пропорціи:

$$+6 : -3 = -10 : +5$$

каждый изъ крайнихъ членовъ не больше ли, чѣмъ каждый изъ среднихъ? Что же сдѣлалось съ извѣстнымъ намъ «правиломъ», что въ пропорціи «бо̀льшій членъ такъ относится къ меньшему, какъ бо̀льшій же къ меньшему»?

* *
*

Можно ли написать равенство, что

полуполный стаканъ = полупустому стакану?

* *
*

Есть ли на свѣтѣ люди съ одинаковымъ числомъ волосъ на головѣ?

О четвертомъ измѣреніи по аналогіи.

Американскій математикъ W. F. White разсказываетъ объ интересномъ вопросѣ, который предложилъ ему одинъ изъ его слушателей въ нормальной школѣ, и передаетъ свой отвѣтъ на него.

Вопросъ. Если слѣдъ движущейся точки (не имѣющей измѣреній) есть линія (одно измѣреніе), а слѣдъ движенія линіи есть поверхность (два измѣренія), наконецъ, слѣдъ движенія поверхности есть тѣло (три измѣренія),— то почему же не заключить, что слѣдъ движенія тѣла есть величина четвертаго измѣренія?

Отвѣтъ. Если бы ваши предположенія были вѣрны и совершенно точны, то по аналогіи могло бы быть вѣрнымъ заключеніе. Путь движущейся въ пространствѣ точки есть, дѣйствительно, линія. Слѣдъ движенія линіи даетъ поверхность, но *за исключеніемъ* случая, когда линія движется въ своемъ собственномъ измѣреніи, скользитъ, такъ сказать, по своимъ собственнымъ слѣдамъ. Слѣдъ движенія поверхности даетъ тѣло, но только въ томъ случаѣ, когда поверхность движется не въ своихъ двухъ, а въ новомъ, третьемъ, измѣреніи. Образованіе величины четвертаго измѣренія движеніемъ тѣла предполагаетъ, слѣдовательно, наличность этого самаго четвертаго измѣренія, по которому тѣло могло бы двигаться.

Въ странѣ чудесъ математики.

Во время своего пребыванія на курсахъ Елена полюбила математику и дѣлала въ ней большіе успѣхи. Одну изъ лекцій профессоръ какъ-то посвятилъ выясненію понятія о пространствѣ *n*-измѣреній, а незадолго передъ этимъ дома Елена прочла, по его совѣту, очень интересную небольшую книжечку *«Страна плоскости. Разсказъ изъ области многихъ измѣреній»*.

Вернувшись съ занятій въ жаркое майское утро, молодая дѣвушка сѣла въ легкое кресло-качалку и съ удовольствіемъ отдыхала. Тихое покачиванье качалки навѣвало на нее легкое полузабытье, а въ головѣ мелькали одна за другой геометрическія фигуры: прямыя, кривыя линіи, круги... Въ послѣднее время среди студентовъ предметомъ упражненій и оживленныхъ обсужденій были кривыя линіи, носившія поэтическое названіе «цѣпей маргаритокъ».

— Какая она длинная, эта линія! — думала Елена. — Пожалуй, что ей нѣтъ конца... Въ дѣтствѣ я читала книжку «Въ странѣ чудесъ» и помню, что послѣ того я нѣсколько ночей видѣла во снѣ, какъ путешествую по этой странѣ. Вотъ, если бы сдѣлаться опять маленькой дѣвочкой, попасть въ страну чудесъ и тамъ найти концы «маргариткиныхъ цѣпей». Но возможно ли это? У круга, напримѣръ, нѣтъ конца, какъ извѣстно. Можетъ быть, я пришла бы къ безконечнымъ вѣтвямъ кривой...

Вдругъ Елена очутилась на узенькой тропинкѣ, почти закрытой большими деревьями. Она пошла по этой тропинкѣ и пришла въ большую тронную залу, гдѣ сидѣла прелестная женщина, похожая на фею или «богиню». Приблизясь къ трону, Елена вѣжливо поклонилась.

— Здравствуй, Елена! — привѣтливо сказала фея.

Еленѣ не показалось страннымъ, что прекрасной незнакомкѣ извѣстно ея имя.

— Тебѣ хочется побывать въ странѣ чудесъ?

— О да! — съ жаромъ отвѣтила Елена.

— Я дамъ тебѣ въ провожатые одного изъ моихъ придворныхъ, — сказала фея, махнувъ палочкой.

Тотчасъ же появился юноша въ костюмѣ пажа. Онъ преклонилъ колѣно передъ феей, затѣмъ привѣтливо поклонился Еленѣ.

— Вотъ, Роландъ, — сказала фея, — эта дѣвушка желаетъ идти въ страну чудесъ, — поручаю ее твоимъ заботамъ. Покажи ей все, чѣмъ она будетъ интересоваться.

Съ этими словами она передала свой волшебный жезлъ пажу и сама исчезла.

— Идемъ! — сказалъ пажъ, подавая руку Еленѣ и махнувъ жезломъ.

Въ ту же минуту они очутились въ совершенно новой своеобразной и удивительной мѣстности.

Все, что здѣсь существовало, тянулось только *въ длину*, но не имѣло ни толщины ни ширины. Измѣренія въ этихъ двухъ послѣднихъ направленіяхъ были совершенно невозможны: настолько предметы были тонки и узки. Живыя существа въ этой странѣ могли двигаться только по одной какой-либо линіи.

— О! я понимаю! — воскликнула Елена. — Это страна линій. Я читала о ней.

— Да, — сказалъ пажъ, — я только то и могу вамъ показать, о чемъ вы читали или думали.

Елена вопросительно посмотрѣла на его жезлъ.

— И это, въ самомъ дѣлѣ, великое чудо! — подтвердилъ пажъ. — Показывать вамъ такимъ нагляднымъ образомъ все, о чемъ вы только думали, вѣдь и это волшебство! Но показывать вамъ то, о чемъ вы никогда и не думали даже, это было бы...

Елена не разслышала послѣдняго слова, и пажъ опять махнулъ жезломъ.

Они находились теперь въ мѣстѣ, откуда страна линіи была видна яснѣе. Елена протянула ладонь поперекъ линіи прямо противъ одного изъ движущихся по линіи странныхъ жителей. Онъ внезапно остановился. Она отняла руку. Но обитатель страны линій остолбенѣлъ отъ изумленія: какое-то таинственное тѣло, или, по его понятіямъ, *точка* внезапно появилась въ его пространствѣ и такъ же внезапно исчезла!

Еленѣ странно было видѣть, какъ вся жизнь обитателя страны линій заключена между двумя точками.

— Они никогда не обходятъ препятствій!—замѣтила она.

— Линія—это ихъ міръ... Міръ одного измѣренія...—сказалъ пажъ.—Какъ это кто-либо выйдетъ изъ своего міра, чтобы обойти вокругъ препятствія?..

— Не могла ли бы я поговорить съ ними и разсказать о второмъ измѣреніи?

— Эти существа не имѣютъ второго измѣренія!—лаконически сказалъ пажъ.

— Хорошо!—смѣясь продолжала Елена.—Дѣйствительно, это такъ. Ну, а если они *случайно* выйдутъ изъ предѣловъ своего узкаго міра?

— Случайно?—съ изумленіемъ повторилъ пажъ.—Я думалъ, что вы болѣе философъ!

— Нѣтъ,—скромно возразила Елена,—я еще только школьная ученица.

— Но вы ищете знанія и истины и любите ихъ. Развѣ это не значитъ быть философомъ?

— Правда,—согласилась Елена,—пожалуй, я могу считать себя философомъ. Но скажите, все-таки, какъ подобное существо можетъ получить точное понятіе о пространствѣ, отличномъ отъ того, въ которомъ заключено оно.

— Оно можетъ, вѣроятно, обратиться къ существу нѣсколькихъ измѣреній...

Елена на минуту пришла въ замѣшательство, думая, что ея проводникъ шутитъ. Но тотъ совершенно серьезно продолжалъ.

— Существа одного измѣренія могутъ почувствовать другое измѣреніе только при воздѣйствіи иныхъ существъ не изъ ихъ пространства. Но обратимся къ другому міру.

Пажъ снова махнулъ жезломъ, и они увидали новую область, всѣ обитатели которой имѣли длину и ширину, но не имѣли толщины.

— Это страна плоскостей! — весело сказала Елена, а чрезъ минуту прибавила:—но только я думала, что плоскостныя существа всѣ представляютъ собой правильныя геометрическія фигуры, а здѣсь я вижу очень разообразныя.

Пажъ расхохотался такъ громко и заразительно, что Елена стала вторить ему, не зная еще причины его смѣха. Онъ объяснился.

— Вы представляли себѣ, значитъ, такую страну плоскостей, гдѣ государственные мужи похожи на однообразные правильные квадраты, и гдѣ остроуміе формъ есть принадлежность низшихъ, а однообразіе считается отличіемъ знатности. Да, есть и такая страна плоскостей, только пишется она съ прописной, а не съ маленькой буквы...

Елена стала присматриваться къ жизни существъ съ двумя измѣреніями и размышлять о ихъ сферѣ представленій. Она соображала, что многоугольники, круги и всякія другія плоскія фигуры всегда видны имъ только, какъ отрѣзки линій; что они не могутъ видѣть угла, но могутъ вывести заключеніе о его существованіи; что они могутъ быть заключены внутри четыреугольника или другой плоской фигуры, если она имѣетъ замкнутый периметръ, который они не могутъ пересѣчь; и если существо трехъ измѣреній пересѣкло бы ихъ пространство (поверхность), оно могло бы понять только сѣченіе на поверхности, сдѣланное этимъ трехмѣрнымъ тѣломъ, такъ что тѣло представлялось бы имъ существомъ также двухъ измѣреній, но обладающимъ чудесными свойствами и могуществомъ движенія.

Елена заинтересовывалась все больше и больше.

— Покажите мнѣ пространства еще и другихъ измѣреній! — просила она спутника.

— Хорошо! Пространство трехъ измѣреній вы можете видѣть во всякое время,—сказалъ пажъ, махнувъ жезломъ и измѣняя картину.—Но, если вы возьмете мой жезлъ и съ его помощью покажете мнѣ пространство четырехъ измѣреній, то я буду вамъ очень благодаренъ!

— О, этого я не могу!—воскликнула Елена.

— И я тоже.

— А можетъ кто-нибудь это сдѣлать?

— Говорятъ, что въ пространствѣ четырехъ измѣреній можно видѣть внутренность нашего закрытаго ящика, смотря въ него изъ четвертаго измѣренія такъ, какъ вы могли видѣть внутренность прямоугольника въ странѣ плоскостей, смотря на него извнѣ, сверху внизъ. Говорятъ также, что въ четырехмѣрномъ пространствѣ не можетъ быть завязанъ узелъ. Существо этого четырехмѣрнаго пространства, переходя въ наше, должно казаться намъ существомъ трехъ измѣреній, такъ какъ все, что мы можемъ видѣть отъ такого существа, есть только сѣченіе, сдѣланное имъ въ нашемъ пространствѣ, и это сѣченіе есть то, что мы называемъ тѣломъ. Это существо можетъ представиться намъ, скажемъ, какъ человѣкоподобное. И оно можетъ быть, дѣйствительно, не менѣе человѣкомъ, чѣмъ мы, и не менѣе реальнымъ, а даже болѣе реальнымъ, если только слово «реальный» здѣсь приложимо. Существа страны плоскостей (двухъ измѣреній), пересѣкающія страну линій (пространство перваго измѣренія) кажутся обитателямъ линейнаго пространства существами одного измѣренія, только обладающими чудеснымъ могуществомъ. Точно также наше трехмѣрное тѣло въ плоскомъ (двухмѣрномъ) пространствѣ. Пересѣченіе наше съ поверхностью—это и все, что видимо и понятно для существа плоскостного пространства, и только это пересѣченіе, только одна фаза нашего тѣла доступна существу двухъ измѣреній. Отсюда слѣдуетъ заключить, что существа болѣе чѣмъ трехъ измѣреній имѣютъ чудесную для насъ способность появляться и исчезать, входить и уходить изъ комнаты, гдѣ заперты всѣ двери; они могутъ казаться намъ «духами», хотя вмѣстѣ съ тѣмъ онѣ могутъ быть на самомъ дѣлѣ существами болѣе реальными, чѣмъ мы сами.

Онъ замолчалъ, а Елена замѣтила:

— Все, что вы сказали, есть только результатъ извѣстнаго рода логическихъ соображеній. Я хотѣла бы *видѣть* четырехмѣрное пространство.

Спохватившись, она сообразила, что такая настойчивость можетъ быть неделикатной по отношенію къ спутнику, и она прибавила:

— Но я знаю, что жезлъ не можетъ показывать намъ все, что мы захотѣли бы видѣть. Тогда не было бы предѣловъ нашему познанію.

— Можетъ быть, безпредѣльное познаніе есть то же, что и безконечное познаніе? - спросилъ пажъ.

— Это похоже на каламбуръ,— отвѣтила Елена.— Не есть ли это простая игра словъ?

— А вотъ идетъ господинъ Вычислителевъ. Спросимъ его мнѣнія.—Эй! Господинъ Вычислителевъ!

Елена увидѣла почтеннаго пожилого господина съ развѣвающейся бѣлой бородой. Онъ обернулся, когда услыхалъ свое имя.

Пока онъ приближался, пажъ сказалъ тихо Еленѣ:

— Онъ будетъ въ восторгѣ отъ такой ревностной ученицы, какъ вы. Это для него праздникъ.

Вычислителевъ съ большимъ достоинствомъ раскланялся съ Еленой и ея спутникомъ и, ознакомившись съ темой разговора, началъ такъ энергично высказывать свои мнѣнія, что пажъ остановилъ его:

— Осторожнѣе, это не спеціалистъ по математикѣ.

Еленѣ неособенно понравилось это замѣчаніе, такъ какъ она вообще не соглашалась, когда дѣвушекъ считали менѣе способными къ математикѣ, чѣмъ другихъ людей. «Ну, да это шутка!»—подумала она про себя и продолжала слушать.

Вычислителевъ продолжалъ начатое поясненіе.

— Если вы хотите спросить, одно ли и то же безпредѣльно увеличивающееся перемѣнное и абсолютная безконечность, то я отвѣчу—*нѣтъ!* Безгранично, или безпредѣльно, увеличивающееся перемѣнное всегда ближе къ *нулю*, чѣмъ къ абсолютной *безконечности*. Для простоты поясненія сравнимъ такое перемѣнное съ другимъ однообразно измѣняющимся перемѣннымъ,—со временемъ. Предположимъ, что разсматриваемое нами перемѣнное удваивается каждую секунду. Въ такомъ случаѣ все равно, — какъ бы долго ни продолжалось подобное увеличеніе перемѣннаго, оно все-таки будетъ ближе къ нулю, чѣмъ къ безконечности.

— Поясните, пожалуйста,—попросила Елена.

— Хорошо! — продолжалъ Вычислителевъ. — Разсмотримъ значенія перемѣннаго въ нѣкоторый моментъ. Въ этотъ моментъ значеніе перемѣннаго равно только половинѣ того, которое оно пріобрѣтетъ черезъ секунду, и равно четверти того значенія, которое получится черезъ 2 секунды, если оно будетъ все возрастать. Такимъ образомъ *теперь*, въ данный моментъ, оно гораздо ближе къ нулю, чѣмъ къ безконечности. Но то, что вѣрно относительно перемѣннаго въ данный моментъ, будетъ вѣрно и въ слѣдующій и, вообще, въ каждый моментъ. И какъ бы перемѣнное ни возрастало, оно всегда будетъ ближе къ нулю, чѣмъ къ безконечности.

— Значитъ, — сказала Елена,— правильнѣе говорить «безпредѣльно увеличивается», вмѣсто «приближается къ безконечности, какъ къ предѣлу».

— Разумѣется! Перемѣнное не можетъ приближаться къ безконечности, какъ къ предѣлу. Учащимся часто напоминаютъ объ этомъ.

— Я думаю,—замѣтила Елена,—что знаніе можно увеличивать всегда, хотя это и кажется чудеснымъ.

— Что вы называете чудеснымъ?

— Потому что...—начала Елена и остановилась.

— Когда начинаютъ съ «потому что», рѣдко даютъ отвѣтъ!—сказалъ пажъ.

— Боюсь, что я дѣйствительно не отвѣчу, — произнесла Елена. — Обыкновенно называютъ чудеснымъ то, что является отступленіемъ отъ естественныхъ законовъ.

— Мы должны показать барышнѣ начертаніе кривой,—сказалъ Вычислителевъ пажу.

— Конечно, — отвѣтилъ тотъ.— Любите вы фейерверки? — спросилъ онъ Елену.

— Благодарю васъ,—отвѣтила Елена,—но я не могу остаться здѣсь до вечера.

— Хорошо, мы покажемъ вамъ ихъ очень скоро.

— Фейерверки при дневномъ освѣщеніи?—спросила Елена.

Но въ ту же минуту пажъ махнулъ жезломъ и наступила ночь, свѣтлая ночь, хотя безъ луны и звѣздъ.

Такъ какъ эта перемѣна была сдѣлана при помощи магическаго жезла, то Елена не очень была изумлена.

— Теперь вы мнѣ покажете начертаніе кривой?—спросила она.

— Да, — сказалъ пажъ.

Разговаривая такимъ образомъ, всѣ трое шли дальше, пока не подошли къ мѣсту, гдѣ находилось нѣчто въ родѣ электрической станціи подъ наблюденіемъ прелестной молодой женщины.

— Это Ана-Литика,—сказалъ Вычислителевъ Еленѣ,—вы, вѣроятно, съ ней знакомы.

— Знакомое имя, сказала Елена, но я не припоминаю, чтобы видѣла гдѣ-нибудь эту госпожу. Мнѣ хотѣлось бы познакомиться съ ней.

Познакомившись, Елена назвала женщину «госпожа Литика».

Но та улыбнулась и сказала:

— Меня никогда такъ не зовутъ. Всѣ зовутъ меня обыкновенно «Ана-Литика».

— Эта барышня хотѣла бы познакомиться съ нѣкоторыми изъ вашихъ работъ,—сказалъ Вычислителевъ.

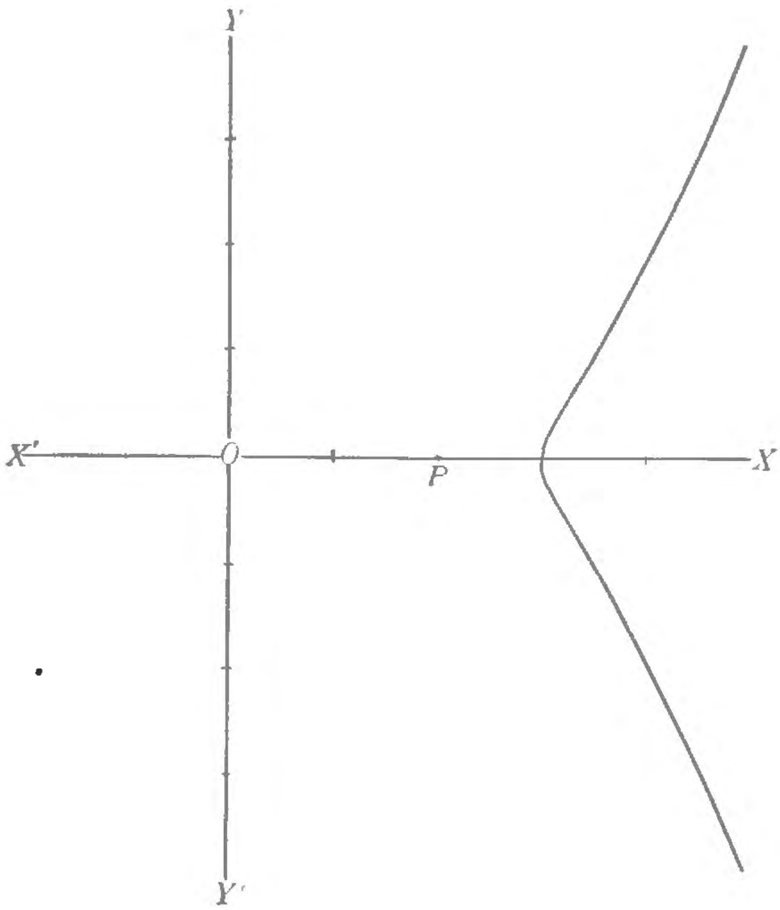
— Пиротехническое начертаніе кривой,—пояснилъ словоохотливый пажъ.

— Пожалуйста, покажите намъ алгебраическую кривую съ особенной точкой,—прибавилъ Вычислителевъ.

Ана-Литика тронула одну изъ кнопокъ и сквозь темноту прорѣзалась полоса яркаго свѣта, образовавшая въ пространствѣ блестящую *плоскость*. Затѣмъ она поблекла, но остались два луча, перпендикулярныхъ одинъ къ другому. Изображеніе было слабое, но неизмѣняющееся.

— Это *оси координатъ*,—объяснила Ана-Литика.

Она нажала вторую кнопку, и Елена увидѣла нѣчто, похожее на метеоръ. Онъ явился изъ огромнаго отдаленія, пересѣкъ лучъ свѣта, который былъ названъ одной «изъ осей», и понесся по другую сторону этой оси такъ же быстро, какъ появился, все время двигаясь въ плоскости, показанной первоначальной исчезнувшей полосой свѣта. Елена невольно подумала о кометѣ. Но вмѣсто кометнаго блестящаго хвоста пронесшійся «метеоръ» оста-



Фиг. 100.

вилъ за собой неизмѣняемый путь свѣта въ видѣ кривой линіи. Ана-Литика близко подошла къ Еленѣ, и обѣ дѣвушки смотрѣли на блестящую кривую, которая тянулась сквозь темноту на все пространство, которое только было доступно зрѣнію.

— Какъ это красиво!—воскликнула Елена.

Попытка изобразить на бумагѣ то, что видѣла Елена, даетъ объ этомъ не столь сильное и эффектное представленіе. На фиг. 100-ой даны оси координатъ и самая кривая.

Вдругъ Елена воскликнула:

Это, вѣдь *отдѣльная точка свѣта?* При этомъ она показали на точку, обозначенную на фигурѣ буквой *P*.

— Это *точка кривой*,—сказала Ана-Литика.

— Но она такъ отдалена отъ всей остальной кривой!—замѣтила Елена.

Отойдя къ аппарату и дѣлая что-то, чего Елена не могла разсмотрѣть, Ана-Литика начала писать въ темнотѣ, словно на аспидной доскѣ. Знаки выходили блестящіе и рѣзко выдѣлялись на темномъ фонѣ ночи. Вотъ что́ она написала:

$$y^2 = (x-2)^2(x-3).$$

Оступя назадъ, она сказала:

— Это уравненіе кривой.

Елена любовалась горящимъ въ темнотѣ уравненіемъ.

— Я никогда не представляла себѣ геометрическія координаты столь красивыми,—сказала она.

— Точка, о которой вы спрашивали, сказала Ана-Литика, есть точка (2, 0). Вы видите, что она удовлетворяетъ уравненію. Это точка изображенія.

Елена теперь замѣтила, что единицы длины были намѣчены на слабо видныхъ осяхъ легкими болѣе блестящими точками свѣта.

— Да, сказала она, я вижу ее, но странно все-таки, что она отдалена отъ остальной кривой.

— Да,—сказалъ Вычислителевъ, который все время внимательно слушалъ,—вы ожидали, что кривая будетъ непрерывна. Непрерывность—вотъ постоянная предпосылка нынѣшней научной мысли. Эта точка кажется нарушающей этотъ законъ; она, слѣдовательно, есть то, что вы назвали нѣсколько минутъ тому назадъ «чудомъ». Если бы всѣ наблюдаемыя явленія, кромѣ одного, имѣли нѣкоторую видимую связь, мы были бы склонны назвать это одно «чудеснымъ», а все остальное естественнымъ. Если только то кажется удивительнымъ, что необычно, то и «чудомъ» въ математикѣ слѣдовало бы называть всякій отдѣльный случай.

— Благодарю васъ,—сказала Елена,—я очень хотѣла бы согласиться съ этимъ. Но исключительность смущаетъ меня. Я хотѣла бы думать, что здѣсь есть общее царство закона.

— *Очевидно,* сказалъ пажъ,—здѣсь исключеніе! *Ясно,* что здѣсь есть разныя альтернативы, какъ, напримѣръ, что точки нѣтъ на чертежѣ, что чертежъ имѣетъ единственную точку *и такъ далѣе...*

Вычислителевъ, Ана-Литика и пажъ смѣялись. На вопросъ Елены пажъ пояснилъ:

— Мы часто говоримъ «очевидно» или «ясно», когда не можемъ дать объясненія, и часто говоримъ «и такъ далѣе», когда не знаемъ, какъ продолжать.

Елена сначала думала, что эта насмѣшка относится къ ней, но потомъ вспомнила, что она ни одного такого выраженія не употребила. Вообще, вѣдь, все это приключеніе съ ней была только шутка, а потому она успокоилась и стала спрашивать объ интересующихъ ее предметахъ.

— Разскажите мнѣ объ этой изолированной, особенной точкѣ,—обратилась она къ Вычислителеву.

Этотъ послѣдній обо всемъ говорилъ въ поучительномъ тонѣ, который былъ ему свойственъ.

Вычислителевъ. Если въ написанномъ выше уравненіи кривой $x=2$, то, какъ видите, $y=0$. Но для всякаго другого значенія x, меньшаго, чѣмъ 3, какое получится значеніе для y?

Елена. Такъ называемое *мнимое.*

Вычислителевъ. А какъ изображаются мнимыя числа геометрически?

Елена. Линіей, длина которой дается абсолютнымъ (или ариѳметическимъ) числомъ мнимаго количества, и направленіе которой перпендикулярно къ той, по которой отсчитываются положительныя и отрицательныя направленія.

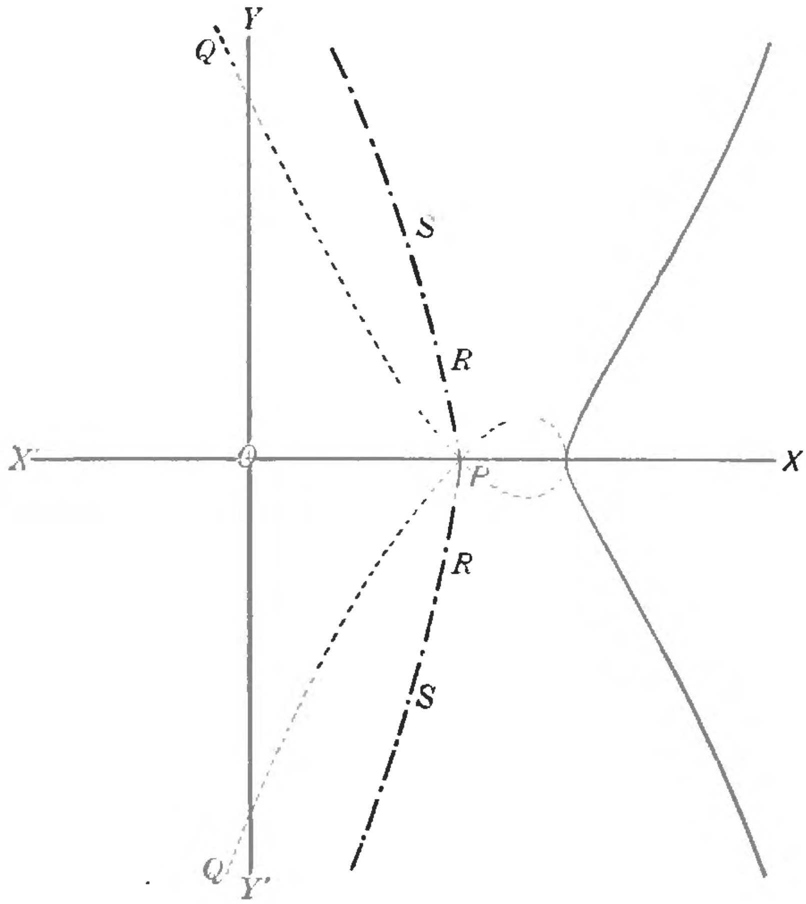
Вычислителевъ. Хорошо. Въ такомъ случаѣ...

Елена (съ восторгомъ). О! Теперь я понимаю, я вижу. Здѣсь должны быть еще точки кривой внѣ плоскости.

Вычислителевъ. Вотъ именно. Здѣсь имѣются еще такъ называемыя мнимыя вѣтви кривой, и, можетъ быть, Ана-Литика будетъ настолько добра, что покажетъ ихъ намъ теперь.

Ана-Литика тронула еще кнопку своего аппарата, и другая блестящая кривая прорѣзалась на фонѣ ночного неба. Плоскость, опредѣляемая этой кривой, была перпендикулярна къ предыдущей плоскости (Обозначенная точками линія на фиг. 101 воспроизводитъ обыденнымъ образомъ то, что видѣла Елена) [1].

— О, я вижу! —повторила Елена.—Точка P не есть изолированная, отдѣльная, точка отъ кривой. Это точка, въ которой наша «мнимая» вѣтвь (на самомъ дѣлѣ столь же *дѣйствитель-*



Фиг. 101.

ная, какъ и всякая другая) пересѣкаетъ плоскость двухъ осей координатъ.

— Теперь,—сказалъ Вычислителевъ,—вмѣсто того, чтобы подставлять дѣйствительныя значенія для x и находить соотвѣтственныя значенія y, вы можете придавать дѣйствитель-

---

[1]) На этой фигурѣ пунктирная линія QPQ', если ее повернуть на 90 около xx', какъ оси, такъ, чтобы она была въ плоскости, перпендикурной къ плоскости чертежа, и изобразить «мнимую часть» чертежа.

Вычерченная точками и черточками линія $SRPRS$ представляетъ проекцію на плоскость бумаги двухъ «комплексныхъ» частей» кривой. Въ точкѣ P каждая вѣтвь находится въ плоскости бумаги, для каждой точки R соотвѣтствующія точки на самой вѣтви кривой находятся на разстояніи 0,7 отъ плоскости по ту и другую сторону плоскости, для точки S соотвѣтствующія точки будутъ на каждой вѣтви въ разстояніи 1,5 отъ плоскости и т. д...

ныя значенія y и рѣшать уравненіе относительно x. И тогда, вообще, для каждаго значенія y вы получите 3 значенія x: одно дѣйствительное и 2 комплексныхъ сопряженныхъ числа. Кривая, проходящая чрезъ всѣ точки съ комплексными абсциссами, никоимъ образомъ не лежитъ въ плоскости осей, но въ плоскости, имъ перпендикулярной. Впрочемъ, вы знаете это. (Линія $SRPRS$ на черт. 101 представляетъ эти вѣтви).

Ана-Литика опять обратилась къ аппарату; и эти вѣтви кривой появились также въ видѣ свѣтящихся линій.

Елена была очень возбуждена. Глубочайшее удовлетвореніе звучало въ ея голосѣ, когда она сказала:

— Точка, которая смущала меня своей непонятной обособленностью, есть, какъ оказывается, *общая* точка нѣсколькихъ вѣтвей одной и той же кривой.

— Сверхестественное болѣе естественно, чѣмъ что-либо иное,—сказалъ пажъ.

«Чудесное, размышляла Елена, есть только особенный случай высшаго закона. Мы не понимаемъ фактовъ, потому что связь ихъ иногда находится внѣ плоскости нашихъ наблюденій или размышленій». Затѣмъ она прибавила вслухъ:

— Это я могла бы назвать *чудесной кривой.*

— Нѣтъ ничего исключительнаго въ этой кривой,—сказалъ Вычислителевъ. Каждая алгебраическая кривая съ сопряженной точкой имѣетъ подобныя особенности.

Вычислителевъ сказалъ что-то Ана-Литикѣ и она прикоснулась къ аппарату. Послышался сильный ударъ грома. Елена очутилась въ своей комнатѣ и, дѣйствительно, проснулась отъ сильнаго удара грома. Она приподнялась и старалась припомнить все, что̀ съ ней было. Затѣмъ она сказала сама себѣ:

— Нѣтъ никакихъ кривыхъ изъ свѣта, пересѣкающихъ небеса. И пространства одного или двухъ измѣреній существуютъ только въ нашемъ умѣ. Они—абстракціи, какъ и пространство 4-хъ измѣреній. Но все-таки они мыслимы. Я рада, что видѣла такой сонъ. Воображеніе есть волшебный жезлъ. Предстоящая мнѣ жизнь будетъ настоящая страна чудесъ и...

Въ это время бой часовъ прервалъ ея мысли и напомнилъ, что пора идти на вечернія занятія.

Случай съ Пляттнеромъ.

Описанныя въ предыдущей главѣ сонныя грезы молодой курсистки, въ частности о возможности пространства, отличнаго отъ нашего, умѣстно будетъ дополнить здѣсь еще нѣкоторыми, соображеніями о «пространствѣ четырехъ измѣреній». Читатель, надѣемся, прочтетъ эту главу съ тѣмъ большимъ интересомъ, что въ ней излагаются взгляды на четырехмѣрное пространство Генри Уэльса,— этого оригинальнѣйшаго и интереснѣйшаго писателя научныхъ романовъ-утопій. Произведенія Г. Уэльса поражаютъ какъ полетомъ фантазіи, такъ глубиной и логическимъ развитіемъ положенныхъ въ основаніе научныхъ мыслей или выводовъ.

Въ небольшомъ и почти неизвѣстномъ русскому читателю разсказѣ «Случай съ Пляттнеромъ» авторъ сквозь призму своего богатаго воображенія и тонкаго дисциплинированнаго ума освѣщаетъ «пространство четырехъ измѣреній» такъ, какъ оно ему представляется на основаніи послѣдняго слова математической науки. Утопіи такихъ писателей, какъ Г. Уэльсъ, заслуживаютъ конечно, самаго серьезнаго вниманія: онѣ—результатъ серьезной работы мысли.

Суть разсказа «Случай съ Пляттнеромъ» состоитъ въ томъ, что нѣкій школьный учитель, Пляттнеръ, неожиданно для самого себя попалъ въ пространство 4-хъ измѣреній, пробылъ тамъ 9 дней и, наконецъ, такъ же неожиданно возвратился въ родное ему и намъ 3-мѣрное пространство. Не имѣя возможности, въ видахъ экономіи мѣста, привести весь разсказъ цѣликомъ, передаемъ по возможности связно его существенные моменты.

О томъ, какъ Пляттнеръ неожиданно попалъ въ пространство четырехъ измѣреній, повѣствуется слѣдующее. Учитель Пляттнеръ любилъ, между прочимъ, заниматься химическимъ анализомъ различныхъ веществъ. Одинъ взъ его учениковъ, Уиббль, интересовался химіей и постоянно приносилъ учителю различныя вещества для изслѣдованія. Разъ онъ принесъ ему гдѣ-то случайно найденную аптечную стклянку съ какимъ-то зеленымъ порошкомъ.

«Это было вечеромъ. Пляттнеръ сидѣлъ въ классѣ, надзирая за четырьмя учениками, оставленными для приготовленія уроковъ. Въ углу того же класса находился и маленькій шкапчикъ, содержавшій всѣ принадлежности для преподаванія химіи, всю лабораторію школы, такъ сказать. Пляттнеръ, которому надоѣло сидѣть безъ дѣла, очень обрадовался зеленому порошку и тотчасъ же занялся его анализомъ; а Уиббль наблюдалъ за этимъ процессомъ, къ счастью,— издали. Четверо другихъ учениковъ, дѣлая видъ, что прилежно занимаются уроками, тоже исподтишка слѣдили за тѣмъ, что̀ творилось у шкапа.

«Всѣ они единогласно показываютъ, что Пляттнеръ отсыпалъ сначала немного порошка въ пробирный цилиндрикъ и попробовалъ растворить его послѣдовательно въ водѣ, хлористо-водородной, азотной и сѣрной кислотахъ. Не получивъ никакого результата, онъ высыпалъ почти половину всего порошка на металлическую пластинку и, держа стклянку въ лѣвой рукѣ, попробовалъ поджечь его спичкой. Порошокъ затлѣлся, сталъ плавиться... и вдругъ вспыхнулъ со страшнымъ взрывомъ!..

«Всѣ пятеро мальчиковъ, ожидавшіе съ замираніемъ сердца какой-нибудь катастрофы, какъ по командѣ спрятались за парты и никто изъ нихъ не пострадалъ. Окно разлетѣлось вдребезги, классная доска упала; пластинка, на которой лежалъ порошокъ, превратилась, должно быть, въ пыль,—обломковъ ея нигдѣ не не нашли, — штукатурка посыпалась съ потолка, но другихъ, болѣе важныхъ, поврежденій не оказалось. Когда прошла первая минута страха, мальчики поднялись изъ-за партъ и, не видя Пляттнера, думали, что онъ сбитъ съ ногъ и лежитъ на полу. Всѣ, конечно, поспѣшили къ нему на помощь, но были очень удивлены, когда не нашли его на полу. Оставалось предположить, что онъ, въ минуту общаго смятенія, выскочилъ изъ комнаты. Согласно такому предположенію, мальчики тоже побѣжали вонъ изъ класса, но передній изъ нихъ, Карсонъ, чуть не столкнулся въ дверяхъ съ хозяиномъ школы, мистеромъ Лиджетомъ.

«Мистеръ Лиджетъ—кривой, толстый и страшно раздражительный человѣкъ. Мальчики говорятъ, что онъ ворвался въ комнату, красный, растрепанный, съ цѣлымъ потокомъ своихъ обычныхъ ругательствъ. «Балбесы», «сопляки», «паршивые щенки»—такъ и сыпалось изъ его устъ до тѣхъ поръ, пока буря не кончилась вопросомъ: «Гдѣ мистеръ Пляттнеръ?»

«Куда дѣвался мистеръ Пляттнеръ? Этотъ вопросъ былъ всѣми безпрестанно повторяемъ въ теченіе нѣсколькихъ слѣдующихъ дней, но отвѣтить на него никто не могъ. Мистеръ Пляттнеръ исчезъ, не оставивъ за собою никакого слѣда: ни капли крови, ни пуговицы отъ своего костюма! Точно будто онъ въ самомъ дѣлѣ разлетѣлся на атомы...»

Черезъ девять дней, однако, Пляттнеръ возвратился въ школу, но возвращеніе его было не менѣе странно, чѣмъ исчезновеніе:

«Въ среду вечеромъ, закончивъ дневные труды, мистеръ Лиджетъ собиралъ въ саду свою любимую ягоду, малину. Только-что онъ подошелъ къ особенно усыпанному ягодами кусту, какъ вдругъ сзади него послышался сильный трескъ, сопровождаемый какъ бы вспышкой молніи, и какое-то тяжелое тѣло такъ сильно толкнуло мистера Лиджета въ спину, что онъ упалъ на-корячки, малина разсыпалась, а шелковый картузъ съѣхалъ ему на глаза.

«Сильно разсерженный, мистеръ Лиджетъ, еще не успѣвъ подняться на ноги, выпустилъ цѣлую тучу ругательствъ по адресу неизвѣстнаго тѣла. Каково же было его изумленіе, когда, обернувшись назадъ, онъ увидалъ мистера Пляттнера, сидящаго среди куста малины, въ самомъ растрепанномъ видѣ, безъ шапки, безъ галстуха, въ грязной рубашкѣ и съ окровавленными руками!..»

Съ возвратившимся изъ неожиданнаго «путешествія» Готфридомъ Пляттнеромъ произошли, однако, весьма удивительныя перемѣны.

«Начать съ того, что, по изслѣдованію, произведенному опытнымъ врачомъ, всѣ внутренніе органы Готфрида Пляттнера оказались перемѣщенными: сердце перешло на правую сторону груди, печень смѣстилась къ лѣвому боку, а доли легкихъ помѣнялись мѣстами. Имѣя въ виду, что такое расположеніе внутренностей, хотя и не часто, но все же встрѣчается, ничѣмъ до поры до времени не проявляясь, я не придаю ему особеннаго значенія, такъ какъ оно могло существовать у Пляттнера и раньше случившагося съ нимъ приключенія. Но вотъ что важно и чего у Готфрида раньше этого приключенія положительно не было: онъ сталъ лѣвшой, и при томъ до такой степени, что правая его рука едва держала перо, а лѣвая могла писать только съ правой стороны къ лѣвой. Есть еще одно обстоятельство, указывающее на перемѣну, которая произошла въ организмѣ Готфрида Пляттнера. Раньше приключенія лицо его, какъ у большей части людей, было не совсѣмъ симметрично: правый глазъ былъ немножко больше лѣваго и правая щека массивнѣе лѣвой. Между тѣмъ теперь, послѣ приключенія, у Пляттнера лѣвый глазъ и лѣвая щека больше правыхъ, какъ я въ этомъ убѣдился изъ сравненія фотографій...»

Словомъ, — новое состояніе Пляттнера представляло собой *какъ бы зеркальное изображеніе нормальнаго человѣка*. Не менѣе интересно и то, что, по увѣреніямъ Г. Уэльса, Пляттнеръ разсказывалъ о собственныхъ своихъ субъективныхъ ощущеніяхъ.

«Пляттнеръ говоритъ, что послѣ взрыва почувствовалъ себя убитымъ наповалъ. Ноги его отдѣлились отъ пола, и все тѣло было отброшено куда-то назадъ, при чемъ онъ упалъ на спину. На минутку паденіе его ошеломило; затѣмъ онъ ясно ощутилъ запахъ жженыхъ волосъ и услышалъ голосъ мистера Лиджета, — однако, какъ сквозь сонъ.

«Все кругомъ казалось ему какъ бы въ туманѣ. Это онъ тотчасъ же приписалъ дыму, выдѣлившемуся во время взрыва. Фигуры Лиджета и учениковъ двигались въ этомъ туманѣ безшумно, какъ тѣни, но все же онъ ясно ихъ видѣлъ, видѣлъ обстановку класса и потому сообразилъ, что живъ и даже не особенно пострадалъ; только лицо саднило отъ ожога, да слухъ и зрѣніе нѣсколько притупились, вслѣдствіе взрыва, какъ онъ думалъ.

«Мало-по-малу Пляттнеръ приходилъ въ себя и собирался встать, какъ вдругъ былъ пораженъ неожиданнымъ и въ высшей степени страннымъ обстоятельствомъ: *два ученика, одинъ за другимъ, прошли сквозь его тѣло, какъ черезъ какой-нибудь туманъ или дымъ!* Ни одинъ изъ нихъ даже не чувствовалъ его присутствія. Трудно описать ощущеніе, испытанное Пляттнеромъ. Онъ вскрикнулъ отъ неожиданности.

«Попробовавъ протянуть руку, Пляттнеръ замѣтилъ, что она свободно прошла сквозь стѣну дома.

«Стараясь обратить на себя вниманіе, Пляттнеръ громко звалъ Лиджета, ловилъ проходящихъ мимо мальчиковъ, но всѣ они, очевидно, совсѣмъ его не замѣчали. Онъ чувствовалъ себя какъ бы отрѣзаннымъ отъ міра, хотя и не переставалъ быть его частью. Всѣ попытки сообщаться съ этимъ міромъ оставались безплодными.

«Тогда Пляттнеръ сталъ внимательно осматривать все окружающее и съ удивленіемъ замѣтилъ, что онъ находится не въ классѣ, а подъ открытымъ небомъ и сидитъ на камнѣ, который обросъ бархатистымъ мохомъ. Склянка съ остаткомъ зеленаго порошка находилась еще у него въ рукахъ. Совершенно безсознательно онъ сунулъ ее въ карманъ. Кругомъ было почти совсѣмъ темно.

«Тишина была абсолютная, несмотря на сильный вѣтеръ, который долженъ бы, казалось, сопровождаться шумомъ деревьевъ и травы. Всѣ окрестности казались скалистыми и пустынными.

«Попробовавъ спуститься по склону холма, Пляттнеръ свободно прошелъ сквозь стѣну школы и очутился въ залѣ верхняго этажа, гдѣ пансіонеры приготовляли свои уроки. Пляттнеръ замѣтилъ, что нѣкоторые изъ нихъ иголками царапаютъ на таблицахъ геометрическихъ чертежей полный ходъ доказательства соотвѣтствующей теоремы, о чемъ онъ прежде никогда не догадывался.

«Чѣмъ свѣтлѣе становилось, тѣмъ Пляттнеръ хуже видѣлъ земные предметы. Наконецъ, они совсѣмъ скрылись у него изъ глазъ. Судя по времени, надо думать, что это случилось какъ разъ тогда, когда зашло солнце. Взамѣнъ того передъ его изумленнымъ взглядомъ рѣзко обрисовался скалистый и пустынный пейзажъ, надъ которымъ поднялся съ горизонта какой-то огромный зеленый дискъ, свѣтившій, однако же, гораздо слабѣе земного солнца. Пляттнеръ стоялъ на высокомъ холмѣ. У ногъ его разстилалась глубокая долина, усѣянная камнями.

«Исчезновеніе земныхъ предметовъ при восходѣ зеленаго солнца въ пространствахъ четвертаго измѣренія есть странный и въ то же самое время самый интересный пунктъ въ показаніяхъ Пляттнера. Онъ положительно говоритъ, что день въ этихъ пространствахъ соотвѣтствуетъ нашей ночи и, наоборотъ, ночь соотвѣтствуетъ дню, при чемъ самое сильное дневное освѣщеніе не достигаетъ силы нашего луннаго. Поэтому-то, можетъ быть, днемъ мы и не видимъ того, что происходитъ въ четвертомъ измѣреніи: у насъ въ это время сильный свѣтъ, а тамошніе пейзажи совсѣмъ не освѣщены.

«Когда зеленое солнце освѣтило окрестности, то Пляттнеръ увидалъ на днѣ долины цѣлую улицу, составленную изъ какихъ-то черныхъ зданій, похожихъ на гробницы и мавзолеи. Съ большимъ трудомъ спустившись по крутому каменистому и скользскому склону горы, Пляттнеръ встрѣтилъ цѣлую толпу какихъ-то существъ, расходившихся изъ одного большого зданія, какъ у насъ народъ расходится изъ церкви. Существа эти издали похожи были на шары, освѣщенные блѣдно-зеленымъ свѣтомъ. Одни изъ нихъ исчезали въ проходахъ, окружающихъ зданіе, другія входили въ дома, а нѣкоторыя стали подниматься на гору, навстрѣчу Пляттнеру. При видѣ ихъ послѣдній остановился въ изумленіи, хотя увѣряетъ, что нисколько не испугался. Впрочемъ, въ самомъ дѣлѣ, пугаться было нечего. Существа эти, которыхъ какъ бы несло вѣтромъ, представляли собой что-то въ родѣ головастиковъ: коротенькое, безрукое и безногое туловище и большая голова съ лицомъ совершенно человѣческой формы. Только глаза были, пожалуй, нѣсколько больше человѣческихъ и выражали, въ большинствѣ случаевъ, такую скорбь, такое страданіе, которыхъ человѣкъ трехъ измѣреній не могъ бы вынести. Приблизившись къ этимъ существамъ, Пляттнеръ замѣтилъ, что они смотрятъ совсѣмъ не на него, а на какіе-то движущіеся предметы.

«Каждое изъ нихъ какъ бы приставлено къ кому-нибудь изъ живущихъ въ трехъ измѣреніяхъ и внимательно слѣдитъ за всякимъ его шагомъ. Сначала эти существа не обращали на Пляттнера никакого вниманія, но потомъ два изъ нихъ, имѣвшихъ большое сходство съ его покойными отцомъ и матерью, стали слѣдить за нимъ по пятамъ. Онъ нѣсколько разъ пробовалъ заговорить съ матерью, но она только смотрѣла на него грустно, пристально и какъ бы съ какимъ-то упрекомъ. Впослѣдствіи онъ сталъ встрѣчать и еще лица, напоминавшія ему людей, которыхъ онъ знавалъ въ дѣтствѣ и съ которыми входилъ въ какія-нибудь сношенія. Всѣ они тоже грустно смотрѣли на него, видимо узнавая и какъ бы упрекая въ чемъ-то.

«... День за днемъ, усталый, измученный, бродилъ Пляттнеръ, такъ сказать, на порогѣ между двумя мірами, ни къ одному изъ нихъ всецѣло не принадлежа.

«Въ концѣ-концовъ, это ему очень надоѣло, и онъ сталъ сильно желать возвращенія въ нашъ трехмѣрный міръ.

«На девятый день, вечеромъ, Пляттнеръ, ходя по улицамъ Суссексвиля, споткнулся о камень и упалъ на тотъ бокъ, гдѣ въ карманѣ его брюкъ лежала сткляночка съ зеленымъ порошкомъ. Раздался страшный взрывъ, — и Пляттнеръ съ изумленіемъ увидалъ себя въ старомъ саду школы, лицомъ къ лицу съ мистеромъ Лиджетомъ!..»

Замѣчанія къ «Случаю съ Пляттнеромъ».

Разсказъ Уэльса не есть продуктъ «безпочвенной фантазіи», а скорѣе образчикъ живого *разсужденія по аналогіи.*

Мы, конечно, неспособны *представить* себѣ пространство четырехъ измѣреній. Такъ что описаніе, такъ сказать, внѣшняго вида этого пространства и его обитателей всецѣло оставляемъ на отвѣтственности мистера Пляттнера и его вдохновителя Генри Уэльса. Но *мыслить* о пространствахъ, отличныхъ отъ нашего, мы можемъ, какъ можемъ дѣлать болѣе или менѣе вѣроятныя заключенія о такихъ пространствахъ — по аналогіи. Аналогія, конечно, не доказательство, но иногда она можетъ привести къ любопытнымъ и даже полезнымъ соображеніямъ. Остроумный почипъ въ этомъ отношеніи сдѣланъ такими глубокомысленными учеными, какъ Гельмгольцъ и Риманнъ, которые для примѣра взяли болѣе понятное и простое для насъ идеально плоское пространство — «пространство *двухъ* измѣреній», въ которомъ живутъ, движутся и мыслятъ существа тоже, конечно, двухъ измѣреній. Такое пространство можно (приблизительно, впрочемъ) мыслить, какъ огромный листъ не имѣющей толщины бумаги, покрытый множествомъ «живыхъ» линій, треугольниковъ, квадратовъ и другихъ фигуръ, движущихся въ плоскости листа. Движеніе это можетъ происходить, понятно, только въ самой одной этой плоскости, такъ какъ третьяго измѣренія нѣтъ, и потому фигуры здѣсь не могутъ ни подыматься, ни опускаться внѣ плоскости. Обитатели такого плоскаго міра, поэтому, не могутъ имѣть ни малѣйшаго представленія о движеніи еще въ одномъ—перпендикулярномъ направленіи и такъ же прикованы тѣломъ и мыслью къ своему двухмѣрному пространству, какъ мы — къ нашему трехмѣрному міру. Самая идея третьяго измѣренія была бы имъ столь же чужда, какъ многимъ изъ насъ идея пространства 4-хъ измѣреній.

Каковы, напримѣръ, жилища обитателей такого плоскаго міра? Это не что иное, какъ замкнутыя линіи, открытыя сверху и снизу. Но будемъ помнить, что «верхъ» и «низъ» понятны только для насъ, существъ трехъ измѣреній; обитателямъ же двухмѣрнаго міра эти понятія чужды, и они считаютъ свои жилища прекрасно защищенными со всѣхъ сторонъ. Чтобы заключить обитателя плоскаго міра въ тюрьму, достаточно было бы начертить вокругъ него замкнутую линію. Будучи самъ плоскостью, линіею или точкой и не имѣя возможности выйти изъ плоскости, онъ не можетъ ни перешагнуть черезъ стѣны своей тюрьмы, ни подлѣзть подъ нихъ, и онѣ были бы для него непроницаемы, какъ для насъ каменныя или желѣзныя стѣны съ поломъ и потолкомъ.

Предположимъ, что этотъ міръ о двухъ измѣреніяхъ помѣщенъ въ самой серединѣ нашего міра о трехъ измѣреніяхъ. Обитатели плоскаго міра, все же, не имѣли бы ни малѣйшаго понятія о трехмѣрномъ пространствѣ, ихъ окружающемъ. Они просто не замѣчали бы всего нашего міра и даже склонны были бы отрицать самое его существованіе. Если бы кто-нибудь изъ нашего міра попалъ въ ихъ плоскость, они могли бы узнать, пожалуй, о существованіи другого міра. Но, конечно, такой пришелецъ казался бы имъ существомъ сверхъестественнымъ.

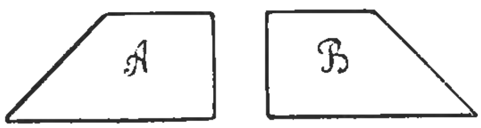
Въ самомъ дѣлѣ, попробуемъ представить себѣ ощущенія обитателя «плоскаго» міра, когда онъ вдругъ замѣчаетъ у себя въ спальнѣ, скажемъ, человѣка изъ нашего міра. Онъ, ложась спать, убѣдился, въ прочности запоровъ на случай ночного вторженія грабителя. И, вдругъ, его изумленому взору представляется чудесная фигура, непохожая ни на что видѣнное имъ до сихъ поръ. Наше трехмѣрное тѣло *не было бы видимо* плоскимъ существамъ въ обычномъ своемъ образѣ, и при малѣйшемъ движеніи вверхъ оно совсѣмъ исчезало бы изъ виду,— къ великому изумленію «двухмѣрца»,— такъ мы будемъ называть это существо двухъ измѣреній. Но все время, пока человѣкъ находился бы въ пересѣченіи съ плоскимъ міромъ, онъ былъ бы видимъ для «двухмѣрца» въ видѣ плоской фигуры, обладающей непостижимой способностью измѣнять свой видъ и чудесной силой движенія.

Самый способъ, какимъ неожиданный гость проникъ въ его домъ, составлялъ бы для «двухмѣрца» непостижимую задачу, настоящее чудо. Не подозрѣвая, что его домъ и спальня, будучи плоскими фигурами, открыты сверху, онъ не могъ бы додуматься до того, что человѣку достаточно было просто перешагнуть черезъ линію, чтобы очутиться въ его домѣ.

Его удивленіе не имѣло бы границъ, когда таинственный пришелецъ сталъ бы перечислять содержимое его кармановъ, шкафовъ, бюро, кассы, описывать внутренніе органы тѣла двухмѣрца и даже доставать изъ наглухо запертыхъ ящиковъ (наглухо для двухмѣрца, конечно) любую вещь. Двухмѣрецъ вообразилъ бы, что пришелецъ умѣетъ проникать черезъ стѣны, что для него недѣйствителенъ законъ непроницаемости матеріи. Мало того,—«трехмѣрному» гостю ничего не стоило бы, глядя поверхъ двухмѣрныхъ стѣнъ, описать самымъ подробнымъ образомъ, что творится въ сосѣднихъ, также наглухо запертыхъ домахъ, и даже далеко за горами и морями плоскаго міра. Двухмѣрецъ при этомъ рѣшилъ бы, конечно, что его гость одаренъ даромъ ясновидѣнія и т. д...

Итакъ, разсуждая логически, нѣтъ ничего страннаго въ допущеніи пространства со свойствами, отличными отъ нашего, «Евклидовскаго», пространства. Ничего нѣтъ страннаго въ *мыслимости* пространства четырехъ измѣреній, если только разсужденія о немъ не шагаютъ за предѣлы логики и даже здраваго смысла.

Упомянемъ еще о такихъ весьма интересныхъ примѣрахъ, какъ симметрія и выворачиваніе на изнанку. Еще великій философъ и математикъ Кантъ обратилъ вниманіе на нѣкоторую, словно, бы, «тайну», связанную съ такимъ, казалось бы, простымъ предметомъ, какъ симметрія. Сравните вашу правую и лѣвую руку, — онѣ совершенно сходны во всѣхъ подробностяхъ. А между тѣмъ всякій хорошо знаетъ, что эти, казалось бы, тождественныя тѣла, несовмѣстимы, и правая перчатка не можетъ быть надѣта на лѣвую руку. Запомнивъ это, пойдемъ далѣе и разсмотримъ свойства симметричныхъ плоскихъ фигуръ. Вотъ передъ нами два симметричныхъ четырехугольника *A* и *B* (фиг. 102). Про нихъ нельзя сказать, что они несовмѣстимы. Правда, если просто *надвигать* *B* на *A*, то никакъ не удастся ихъ совмѣстить, но стоитъ перевернуть *B*, такъ сказать, на лѣвую сторону, на изнанку,— и тогда обѣ фигуры не трудно будетъ привести къ совмѣщенію. Прослѣдимъ, что, собственно, мы сдѣлали. Для того, чтобы превратить фигуру *B* въ *A*. намъ необходимо было на время оторвать ее отъ плоскости, перенести въ міръ трехъ измѣреній и снова вернуть ее на плоскость.



Фиг. 102.

Но сколько бы мы ни поворачивали правую руку, мы никогда не превратимъ ее въ лѣвую. Отчего это? Да оттого, что для этого намъ нужно вывести руку за предѣлы трехмѣрнаго пространства, — совершенно такъ же, какъ мы только что вынесли нашъ четырехугольникъ изъ двухмѣрной плоскости въ міръ трехъ измѣреній. Не покидая же нашего міра, мы такъ же не можемъ совмѣстить симметричныя тѣла, какъ «двухмѣрцы» не въ состояніи совмѣщать плоскихъ симметричныхъ фигуръ. Отсюда замѣчательный выводъ: если бы человѣкъ былъ способенъ хотя на мгновеніе покинуть нашъ трехмѣрный міръ, онъ могъ бы вернуться намъ въ видѣ, симметричномъ самому себѣ: его правая рука сдѣлалась бы лѣвой, сердце и желудокъ перемѣстились бы на правую сторону, а печень — на лѣвую. Словомъ, каждая частица его тѣла была бы перемѣщена,—и все это произошло бы чисто геометрически, безъ малѣйшаго разстройства организма, какъ у м-ра Пляттнера въ разсказѣ Уэльса.

То же самое произошло бы со всякимъ предметомъ о трехъ измѣреніяхъ, даже съ очень массивнымъ. Наибольшая пирамида, попавъ въ міръ четырехъ измѣреній, можетъ быть перевернута очень легко. Кромѣ того, всѣ пустыя внутри вещи, какъ резиновые мячи и пр., могутъ быть вывернуты наизнанку безъ всякаго ущерба для матеріала, ихъ составляющаго; напримѣръ, перчатка правой руки, послѣ путешествія въ четвертомъ измѣреніи, возвратилась бы перчаткой лѣвой руки, и наоборотъ.

Таковы нѣкоторыя логическія заключенія, «по аналогіи», о пространствѣ 4-хъ измѣреній.

И читатель теперь, надѣемся, вполнѣ убѣдится, насколько уже не фантастически, а аналого-логически, если можно такъ выразиться, правъ Генри Уэльсъ во многихъ существенныхъ частяхъ своего разсказа.

Взрывъ зеленаго порошка понадобился автору потому, что только *посторонней силой* можно существо какого-либо пространства перенести въ другое пространство. Дѣлается также понятнымъ, почему организмъ Пляттнера послѣ «путешествія» сдѣлался собственнымъ своимъ «зеркальнымъ изображеніемъ». «Понятно», почему Пляттнеръ получилъ способность проходить сквозь стѣны нашихъ домовъ. «Понятно», пожалуй, даже и то, что сквозь его тѣло проходили его ученики. Словомъ, теперь понятны многія остроумныя детали разсказа. Непонятно, пожалуй, какъ это такъ, все же, у Пляттнера сохранилась сначала въ рукахъ (а не прошла черезъ тѣло) бутылочка съ остатками зеленаго порошка? Какъ потомъ она могла удержаться въ его карманахъ.. Ну, да это, какъ и «описаніе» внѣшности міра 4-хъ измѣреній, уже всецѣло оставляется на отвѣтственности остроумнаго автора. Во всякомъ случаѣ разсказъ его—замѣчательный и единственный въ своемъ родѣ разсказъ.

Математика въ природѣ.

«Золотое дѣленіе».

Подъ названіемъ «золотого дѣленія», «золотого сѣченія» или даже «божественнаго дѣленія» у древнихъ геометровъ было извѣстно дѣленіе «въ крайнемъ и среднемъ отношеніи», вошедшее теперь во всѣ наши школьные учебники. Напомнимъ, въ чемъ оно состоитъ.

Раздѣлить данную величину *«въ крайнемъ и среднемъ отношеніи»*, значитъ раздѣлить ее на такія двѣ неравныя части, чтобы большая относилась къ меньшей, какъ вся величина относится къ большей части. Въ алгебраическихъ символахъ это выразится такъ. Если a есть величина, подлежащая дѣленію, а x и $a-x$ искомыя части (большая и меньшая), то между величинами a, x и $a-x$ должна существовать слѣдующая пропорціональная зависимость:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x},$$

т. е. x есть среднее геометрическое между a и $a-x$. Изъ этой пропорціи легко опредѣлить и значеніе x. По свойству пропорціи имѣемъ:

$$x^2 = a(a-x),$$

откуда

$$x^2+ax-a^2=0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, получаемъ, что

$$x_1 = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$x_2 = -a\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Условію задачи непосредственно удовлетворяетъ лишь первый корень. Отрицательный корень также имѣетъ извѣстное значеніе, но мы его здѣсь разсматривать не будемъ.

Итакъ, запомнимъ, что большая часть величины a, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, равна ирраціональному выраженію $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Отношеніе этой части къ цѣлому, т. е. $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}:a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таково же, согласно пропорціи, должно быть и отношеніе меньшей части къ большей. Если мы пожелаемъ вычислить это выраженіе, то получимъ безконечную непеEріодическую дробь:

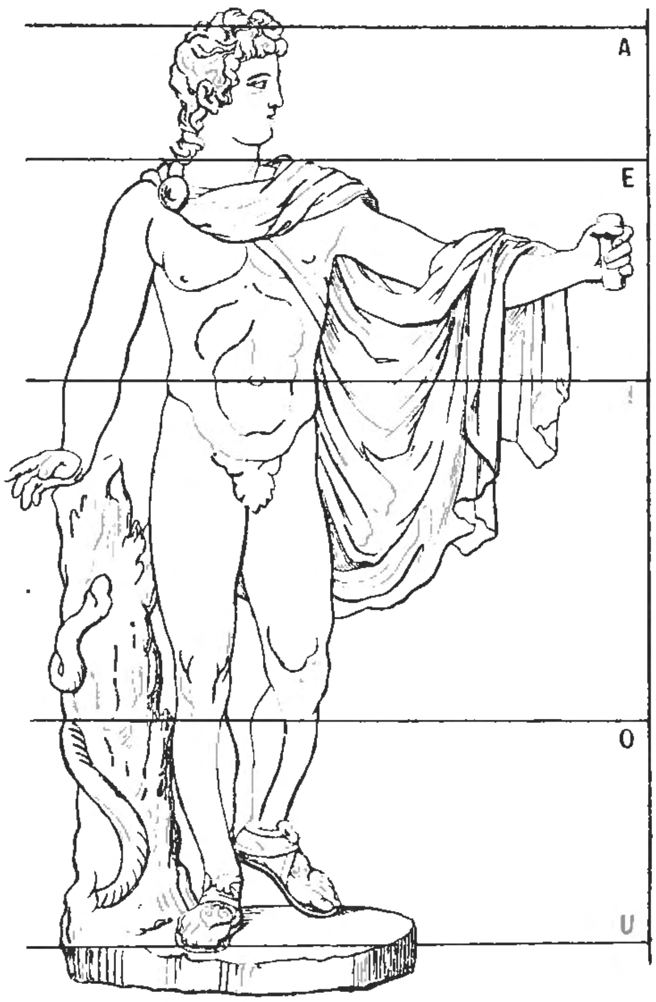
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61804.....$$

И вотъ оказывается, что эта на первый взглядъ столь искусственная пропорція, которую нельзя даже выразить раціонально, имѣетъ широкое примѣненіе въ природѣ. Приведемъ тому два примѣра — одинъ изъ анатоміи человѣческаго тѣла, другой — изъ морфологіи [1]) растеній.

Что части красиво сложеннаго человѣческаго тѣла отвѣчаютъ извѣстной пропорціи — это всякій знаетъ: недаромъ мы говоримъ о «пропорціонально» сложенной фигурѣ. Но далеко не всѣ знаютъ, что здѣсь имѣетъ мѣсто именно та пропорція, которую древніе называли золотымъ дѣленіемъ. Античныя статуи—лучшее доказательство того, что древніе ваятели хорошо знали о примѣненіи золотого дѣленія къ расчлененію человѣческаго тѣла.

[1]) Отдѣлъ ботаники, носящій названіе «морфологіи» изучаетъ строеніе органовъ растеній и, слѣд., соотвѣтствуетъ анатоміи животныхъ.

Идеально сложенное человѣческое тѣло, можно сказать, всецѣло построено на принципѣ золотого дѣленія. Если высоту хорошо сложенной фигуры раздѣлить въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то линія раздѣла придется какъ разъ на высотѣ таліи или, точнѣе, пупка. Особенно хорошо удовлетворяетъ этой пропорціи мужская фигура,—и художники давно знаютъ, что, вопреки общему мнѣнію, мужчины красивѣе сложены, нежели женщины.

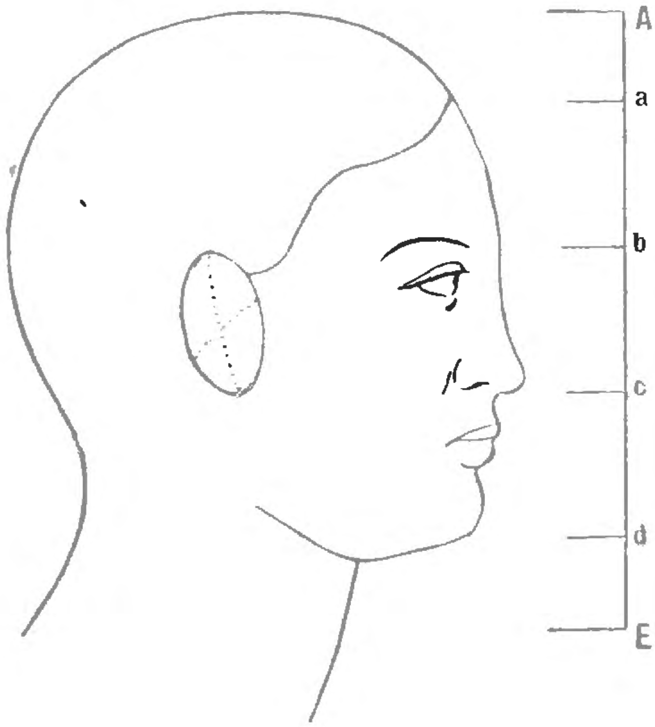


Фиг. 103.

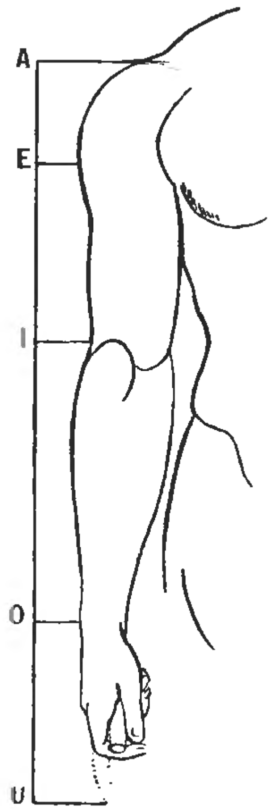
На любой античной статуѣ можно провѣрить этотъ своеобразный законъ. Но дѣло этимъ не ограничивается. Если каждую изъ полученныхъ частей въ свою очередь раздѣлить въ крайнемъ и среднемъ отношеніи то линія раздѣла пройдетъ опять таки въ вполнѣ опредѣленныхъ (анатомически) пунктахъ: на высотѣ такъ наз. Адамова яблока и надколѣнныхъ чашекъ. На фигурѣ 103 обозначено расчлененіе статуи Аполлона Бельведерскаго: *I* дѣлитъ всю высоту *AU* фигуры въ кр. и ср. отношеніи; линія *E* дѣлитъ точно такъ же верхнюю часть туловища (короткая часть вверху), а линія *O*—нижнюю часть (короткая часть внизу).

Но и это еще не все. Каждая отдѣльная часть тѣла—голова, рука, кисть и т. д. также расчленяется на естественныя части по закону золотого дѣленія. Раздѣливъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи самую верхнюю изъ полученныхъ прежде частей (см. фиг. 104), мы убѣдимся, что раздѣлъ придется на линіи бровей (*b*); при дальнѣйшимъ дѣленіи образовавшихся частей получимъ послѣдовательно: кончикъ носа (*c*), кончикъ подбородка (*d*) и т. д.

Рука (фиг. 105) при расчлененіи согласно принципу золотого дѣленія распадается на свои анатомическія части—плечо, предплечье, кисть. Послѣдняя въ своемъ расчлененіи также отвѣчаетъ этому принципу (фиг. 106)—и т. д.

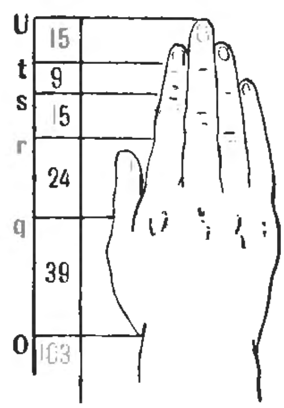


Фиг. 104.



Фиг. 105.

Если бы съ самаго начала мы раздѣлили тѣло человѣка въ крайнемъ и среднемъ отношеніи такъ, чтобы меньшая часть была не вверху, а внизу, то оказалось бы, что линія раздѣла проходитъ черезъ концы свободно свисающихъ рукъ [1]). Словомъ, расчлененіе наружныхъ формъ правильно сложеннаго человѣческаго тѣла подчиняется до мельчайшихъ частей принципу золотого дѣленія. Этотъ замѣчательный законъ былъ хорошо извѣстенъ древнимъ, но честь воскрешенія его принадлежитъ нѣмецкому ученому Цейзингу, который шестьдесятъ лѣтъ тому назадъ выпустилъ книгу, спеціально посвященную примѣненію золотого дѣленія въ природѣ и эстетикѣ,—ибо оказывается, что



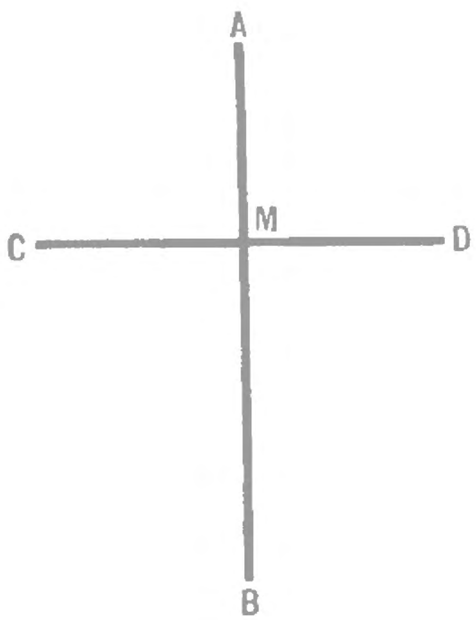
Фиг. 106.

[1]) Ранке, «Человѣкъ»; Проф. Брандтъ, «Антропологическіе очерки».

тотъ же законъ въ широкихъ рамкахъ примѣнимъ и въ изобразительныхъ искусствахъ, и въ архитектурѣ, и музыкѣ и даже стихосложеніи. Останавливаться на этой интересной темѣ не входить въ нашу задачу, и мы можемъ отвести ей лишь немного мѣста.

Золотое дѣленіе въ эстетикѣ.

Существуетъ, какъ извѣстно, опредѣленный геометрическій способъ дѣленія даннаго отрѣзка въ крайнемъ и среднемъ отношеніи,— способъ хотя и не сложный, однако же и не слишкомъ простой. Изъ людей, проходившихъ геометрію, добрыхъ девять десятыхъ его забываютъ. Но оказывается, что мы часто совершенно безсознательно выполняемъ это дѣленіе, при чемъ люди, никогда не изучавшіе геометріи, дѣлаютъ это нисколько не хуже, чѣмъ записные математики. Для этого достаточно обладать лишь развитымъ художественнымъ вкусомъ.



Фиг. 107.

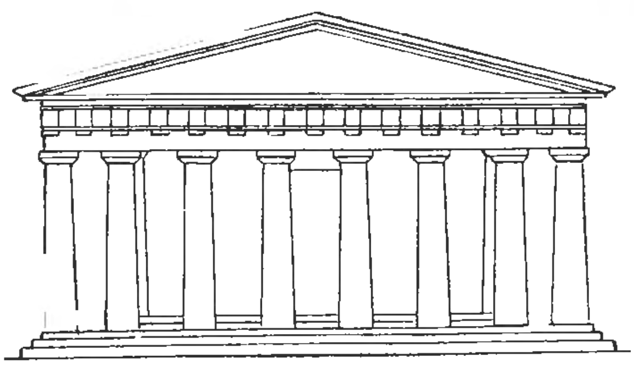
Примѣровъ такого безсознательнаго примѣненія принципа золотого дѣленія можно привести сколько угодно. Возьмемъ хотя бы обыкновенный крестъ. Всѣ замѣтили, вѣроятно, что фигура эта гораздо изящнѣе, если меньшая перекладина помѣщается не ровно по серединѣ большей, а немного повыше.

Если бы вамъ предложили самимъ устроить крестъ изъ двухъ планокъ, то вы, послѣ нѣсколькихъ пробъ, придали бы ихъ длинамъ опредѣленное отношеніе и расположили бы вполнѣ опредѣленнымъ образомъ. Окажется при этомъ, что меньшая перекладина будетъ дѣлить большую въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Другими словами, вы совершенно безсознательно примѣнили здѣсь пропорцію золотого дѣленія: отрѣзки AM, MB и AB (см. фиг. 107) будутъ удовлетворять пропорціи:

$$AM : MB = MB : AB.$$

Любопытно однако, что части меньшей перекладины должны быть равны, чтобы удовлетворять чувству изящнаго. На этомъ примѣрѣ очень ясно обнаруживается свойственная намъ склонность предпочитать симметрію въ горизонтальномъ направленіи и золотое дѣленіе въ вертикальномъ. Не потому ли, что и человѣческое тѣло построено по этому принципу?

Вотъ еще одинъ примѣръ той же категоріи. Въ 60-хъ годахъ истекшаго столѣтія члены Рижскаго общества естествоиспытателей предприняли слѣдующее любопытное изслѣдованіе: они собрали нѣсколько тысячъ визитныхъ карточекъ различныхъ лицъ и опредѣлили отношеніе длинъ ихъ неравныхъ сторонъ. Изъ многочисленныхъ цифръ вывели среднюю и оказалось, что она довольно точно подходитъ къ «крайнему и среднему отношенію». Принципъ золотого дѣленія сказался, слѣдовательно, и здѣсь. Очевидно, выбирая форму карточки по своему вкусу, мы безсознательно руководимся этимъ принципомъ. Намъ представляются одинаково некрасивыми и квадратная и слишкомъ удлиненная прямоугольная форма — и та и другая грубо нарушаетъ пропорцію золотого дѣленія.



Фиг. 108. Пареенонъ.

То же наблюдается и во многихъ другихъ случаяхъ, гдѣ прямоугольная форма предмета не зависитъ отъ притязаній практики и можетъ свободно подчиняться требованіямъ вкуса. Прямоугольная форма книгъ, бумажниковъ, фотографическихъ карточекъ, рамокъ для картинъ — болѣе или менѣе точно удовлетворяютъ пропорціи золотого дѣленія. Даже такіе предметы, какъ столы, шкафы, ящики, окна, двери — не состаставляютъ исключенія: въ этомъ легко убѣдиться, взявъ среднее изъ многихъ измѣреній.

Въ архитектурѣ мы имѣемъ дѣло уже съ болѣе или менѣе сознательнымъ примѣненіемъ того же принципа. Для примѣра разсмотримъ одно изъ знаменитѣйшихъ произведеній древне-греческой архитектуры — Пареенонъ (фиг. 108). Длина его архитрава

107 футовъ, высота же всего зданія отъ основанія до верхушки — 65 фут. Эти двѣ цифры, ширины и вышины, вполнѣ удовлетворяютъ пропорціи золотого дѣленія: если взять 0,618 отъ 107, получимъ 65,27 — т. е., пренебрегая дробью, высоту зданія. Если высоту Пароенона разбить на части по пропорціи золотого дѣленія, то окажется, что всѣ получающіяся при этомъ точки обозначены характерными выступами фасада.

Произведенія готической архитектуры также часто удовлетворяетъ тому же математическому принципу.

Послѣ этого отступленія въ область эстетики, вернемся снова къ нашей основной темѣ — математика въ природѣ.

Законъ листорасположенія.

Листья на стеблѣ могутъ располагаться двояко: либо къ извѣстному пункту стебля прикрѣпляется всего одинъ листъ, либо сразу нѣсколько. Въ томъ и другомъ случаѣ расположеніе ихъ не случайно и подчиняется опредѣленнымъ математическимъ законамъ. Мы разсмотримъ здѣсь только первый случай, болѣе общій и интересный.

Если вы внимательно разсмотрите вѣточку съ одиноко сидящими листьями, то замѣтите, что основанія черешковъ располагаются по *винтовой* линіи: каждый слѣдующій листъ прикрѣпляется повыше и въ сторону отъ предыдущаго. Это выступитъ отчетливѣе, если соединить послѣдовательно основанія листьевъ ниткой—она будетъ обвиваться вокругъ стебля въ формѣ правильной винтовой или спиральной линіи.

Слѣдя за расположеніемъ листьевъ на этой спирали[1]), мы непремѣнно наткнемся на такіе листья, которые сидятъ одинъ надъ другимъ,—по образующей цилиндрической поверхности стебля. Часть спирали, заключающаяся между двумя такими листьями, называется въ ботаникѣ *цикломъ*; въ предѣлахъ одного цикла спираль можетъ нѣсколько разъ огибать стебель, въ зависимости отъ ея крутизны.

---

[1]) Строго говоря, терминъ «винтовая линія» здѣсь умѣстнѣе, нежели «спираль», но въ ботаникѣ установилось употребленіе второго термина, котораго мы и держимся.

Въ ботаникѣ листорасположеніе характеризують числомъ оборотовъ спирали и числомъ листьевъ—въ предѣлахъ одного цикла. Для краткости и удобства обозначають листорасположеніе въ видѣ дроби: въ числителѣ пишутъ число оборотовъ одного цикла спирали, а въ знаменателѣ число листьевъ въ этомъ циклѣ. Такъ, дробь $\frac{3}{8}$ показываетъ, что одинъ циклъ спирали *трижды* обходитъ кругомъ стебля, и что въ этомъ циклѣ 8 листьевъ. Легко понять, что та же самая дробь выражаетъ и уголъ расхожденія двухъ сосѣднихъ листьевъ — въ данномъ случаѣ $\frac{3}{8}$ окружности, т. е. 135°. Отсюда слѣдуетъ также, что дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$ выражаютъ, въ сущности, одно и то же листорасположеніе, ибо уголъ въ $\frac{3}{8}$ окружности дополняетъ до 360° уголъ въ $\frac{5}{8}$ окружности; различныя цифры получаются въ зависимости отъ того, что въ одномъ случаѣ спираль вели, напр., справа налѣво, въ другомъ — слѣва направо.

Каждый видъ растеній имѣетъ свое листорасположеніе, или, вѣрнѣе,— свой уголъ расхожденія листьевъ, который выдерживается съ большей или меньшей строгостью во всѣхъ его частяхъ и распространяется не только на листья, но и на расположеніе вѣтокъ, почекъ, цвѣтовъ, чешуекъ внутри почекъ. Но этотъ уголъ, варьируя отъ растенія къ растенію, однако непроизволенъ: во всемъ растительномъ мірѣ наблюдается сравнительно небольшое число типовъ листорасположенія, выражающихся немногими дробями. Вотъ табличка наиболѣе распространенныхъ листорасположеній:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21} \ldots$$

Ботаники давно замѣтили, что рядъ этотъ отличается одной любопытной и довольно неожиданной особенностью, а именно, что каждая изъ этихъ дробей (начиная съ третьей) получается изъ двухъ предыдущихъ черезъ сложеніе ихъ числителей и знаменателей.

Такъ

$$\frac{2}{5}=\frac{1+1}{2+3};\ \frac{8}{21}=\frac{3+5}{8+13}\ \text{и т. д.}$$

Поэтому достаточно запомнить только двѣ первыя дроби, чтобы удержать въ памяти всю табличку.

Однако, въ чемъ разгадка этого страннаго свойства дробей листорасположенія? Этимъ мы сейчасъ и займемся. Прежде всего замѣнимъ въ табличкѣ дроби $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ и т. д. равнозначущими имъ дробями $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ и т. д.- мы вѣдь знаемъ уже, что такая замѣна вполнѣ допустима, ибо эти дроби выражаютъ одно и то же листорасположеніе. Получимъ рядъ

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21}\ldots,$$

гдѣ числители и знаменатели послѣдовательныхъ дробей даютъ уже извѣстный намъ рядъ Фибоначчи (см. стр. 165). Разгадка раскрывается довольно просто и находится въ тѣснѣйшей связи опять таки съ принципомъ золотого дѣленія.

Въ самомъ дѣлѣ, не трудно убѣдиться, что дроби только что приведеннаго ряда суть простѣйшія приближенія величины $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, найденныя путемъ разложенія ея въ безконечную непрерывную дробь:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

Заинтересовавшее насъ выше правило составленія ряда (черезъ сложеніе числителей и знаменателей) есть просто слѣдствіе закона составленія подходящихъ дробей при знаменателѣ, равномъ единицѣ:

		1	1	1	1	1
1	1	2	3	5	8	13
1	2	3	5	8	13	21

Итакъ, къ чему же мы пришли? Къ правилу, что *листья на стеблѣ стремятся расположиться такимъ образомъ, чтобы раздѣлить окружность стебля въ крайнемъ и среднемъ отношеніи,—избирая при томъ простѣйшія приближенія этой пропорціи.*

Простѣйшія,— ибо въ теоріи непрерывныхъ дробей доказывается, что подходящія дроби, при данной степени приближенія, отличаются наименьшими числителемъ и знаменателемъ: не существуетъ никакой иной дроби, которая, имѣя меньшіе члены, нежели взятая подходящая, выражала бы искомую величину точнѣе.

Замѣчательная связь, существующая между листорасположеніемъ и пропорціей золотого дѣленія, была открыта болѣе 60-ти лѣтъ тому назадъ уже упомянутымъ выше Цейзингомъ и опубликована въ его трудѣ «Эстетическія изысканія» (Aesthetische Forchungen. Frankfurt a. M. 1855). Но его открытіе почему-то забыто и при томъ такъ основательно, что когда пишущій эти строки, въ свои студенческіе годы, самостоятельно подмѣтилъ эту законосообразность и обратился за разъясненіемъ къ профессору — выдающемуся авторитету въ ботанической наукѣ,—то спеціалистъ откровенно сознался, что ему ничего неизвѣстно о связи листорасположенія съ золотымъ дѣленіемъ...

Труды Цейзинга (откуда заимствованы нѣкоторые изъ прилагаемыхъ рисунковъ) стали теперь рѣдкостью. На русскомъ языкѣ въ 1875 г. была издана анонимная брошюра «Золотое дѣленіе, какъ основной морфологическій законъ въ природѣ и искусствѣ» (Москва). Но и ее можно достать только у букинистовъ. Знаменитый художникъ и ученый Леонардо-да-Винчи хорошо понималъ и цѣнилъ эстетическое значеніе золотого сѣченія; подъ его вліяніемъ и при его сотрудничествѣ было написано въ 1609 году сочиненіе Луки Пачіоло «Божественное дѣленіе» (Divina proportio), гдѣ эта тема трактуется съ большой обстоятельностью.

Математическій инстинктъ пчелъ.

Задолго, быть можетъ, до появленія человѣка на земномъ шарѣ, пчелы разрѣшили задачу, представляющую не малыя геометрическія трудности. Хотя она разрѣшается средствами элементарной математики, но не думаемъ, чтобы ученики выпускного класса были довольны, если бъ имъ на экзаменѣ предложили эту «пчелиную задачу».

Архитектура сотъ съ ихъ шестигранными ячейками извѣстна всякому. Однако далеко не всѣ знаютъ, съ какимъ поистинѣ поразительнымъ расчетомъ онѣ сооружаются. Стремясь возможно экономнѣе использовать мѣсто въ тѣсномъ ульѣ и возможно меньше затратить драгоцѣннаго воска, пчелы показали себя не только трудолюбивыми архитекторами, но и отмѣнными математиками.

Остановимся прежде всего на шестиугольной формѣ ячеекъ и разберемъ, почему пчелы отдали предпочтеніе этому многоугольнику. Передъ ними стояла задача—заполнить данную плоскость правильными многоугольниками *сплошь безъ просвѣтовъ*, - ибо улей тѣсенъ и надо использовать каждое мѣстечко. Какіе многоугольники годятся для этой цѣли? Вотъ первый вопросъ, и мы займемся его разсмотрѣніемъ.

Сумма угловъ всякаго многоугольника $= 2d\,(n-2)$, слѣд. каждый уголъ правильнаго многоугольника о n сторонахъ $=$ $= \frac{2d\,(n-2)}{n}$. Если такіе многоугольники *сплошь* заполняютъ какую-либо плоскость, то вокругъ каждой вершины ихъ должно быть расположено цѣлое число такихъ угловъ. Другими словами, правильный многоугольникъ только тогда годится для сплошного заполненія плоскости, когда уголъ его, повторенный k разъ, составитъ $4d$. Поэтому мы можемъ составить слѣд. уравненіе:

$$k \cdot \frac{2d\,(n-2)}{n} = 4d.$$

Сокративъ на d и сдѣлавъ упрощенія, получимъ:

$$nk - 2k - 2n = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (1)$$

гдѣ n — число угловъ (или сторонъ) многоугольника, а k число многоугольниковъ, имѣющихъ общую вершину. Слѣд., n и k должны быть числа цѣлыя и положительныя. Намъ остается найти всѣ цѣлыя и положительныя рѣшенія этого неопредѣленнаго уравненія 2-й степени.

Для этого придется сдѣлать рядъ преобразованій. Опредѣливъ n изъ уравненія (1), имѣемъ:

$$n = \frac{2k}{k-2} = \frac{2k-4+4}{k-2} = 2 + \frac{4}{k-2}.$$

Разсматривая равенство

$$n = 2 + \frac{4}{k-2},$$

мы видимъ, что n будетъ цѣлымъ числомъ лишь тогда, когда частное $\frac{4}{k-2}$ будетъ число цѣлое; другими словами — когда $k-2$ будетъ однимъ изъ дѣлителей числа 4. Такихъ дѣлителей немного, и ихъ легко найти всѣ: 4, 2 и 1. Дальнѣйшій ходъ рѣшенія ясенъ.

$k-2=$	4	2	1
$\frac{4}{k-2}=$	1	2	4
$n=2+\frac{4}{k-2}=$	3	4	6
$k=$	6	4	3

Итакъ, только три рѣшенія удовлетворяютъ нашимъ условіямъ и, слѣдовательно, только три правильныхъ многоугольника могутъ заполнить плоскость сплошь, безъ просвѣтовъ. Это— **треугольникъ, квадратъ** и **шестиугольникъ.** Въ первомъ случаѣ въ каждой вершинѣ будутъ сходиться 6 многоугольниковъ, во второмъ—4, въ третьемъ—3.

Какому же изъ нихъ надо отдать предпочтеніе? При устройствѣ торцовыхъ мостовыхъ шашкамъ придаютъ шестиугольную форму,—но дѣлается это просто потому, что тупые углы (120°)

менѣе скалываются, нежели прямые углы квадрата или острые— треугольника (замѣтимъ, къ тому же, что дерево колется вдоль годичныхъ слоевъ, имѣющихъ форму концентрическихъ круговъ). Пчеламъ съ этимъ особенно считаться не приходится, зато имъ крайне важно экономить воскъ для стѣнокъ ячеекъ. Значитъ, надо опредѣлить, какой изъ этихъ многоугольниковъ, при равныхъ площадяхъ, имѣетъ наименьшій контуръ. Это второй математическій вопросъ, также правильно разрѣшенный пчелами, ибо изъ трехъ упомянутыхъ фигуръ шестиугольникъ какъ разъ имѣетъ наименьшій контуръ.

Въ самомъ дѣлѣ. Вообразимъ треугольникъ, квадратъ и шестиугольникъ, имѣющіе одну и ту же площадь S, и сравнимъ ихъ периметры.

Для $\triangle$-ка изъ равенства

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

находимъ сначала сторону a, а затѣмъ и периметръ $P_1=3\,a$

$$P_1=6\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}.$$

Для квадрата имѣемъ, что сторона его $b=\sqrt{S}$, а слѣдов. периметръ

$$P_2=4\sqrt{S}.$$

Для правильнаго шестиугольника со стороной c имѣемъ:

$$S=\frac{3\,c^2\sqrt{3}}{2},$$

откуда периметръ

$$P_3=6\,c=6\sqrt{\frac{2\,S}{3\sqrt{3}}}.$$

Отношеніе:

$$P_1:P_2:P_3=6\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}:4\sqrt{S}:6\sqrt{\frac{2\,S}{3\sqrt{3}}}=1:\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}:\frac{1}{3}\sqrt{6}=$$

$$=1:0{,}905:0{,}816,$$

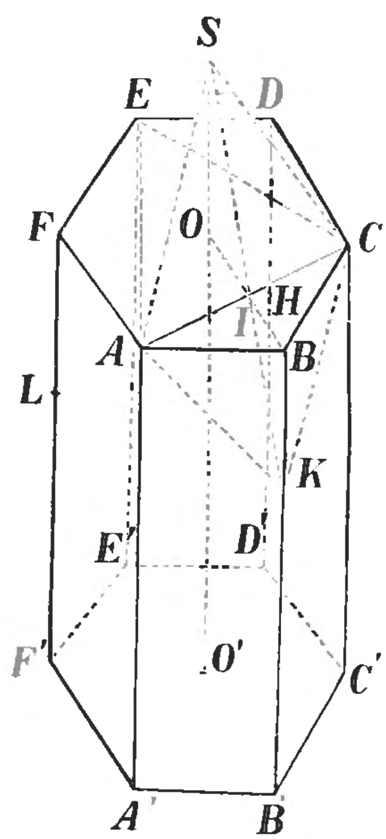
откуда ясно, что периметръ шестиугольника (P_3) наименьшій.

Но и это еще не всѣ математическіе вопросы, разрѣшенные пчелами. Самую трудную задачу намъ еще предстоитъ разсмотрѣть. Она-то собственно и есть та «задача о пчелиныхъ ячейкахъ», которою занимались ученые XVIII вѣка. Полное рѣшеніе ея принадлежитъ извѣстному математику Маклорену, который занялся ею по совѣту натуралиста Реомюра. Ниже мы помѣщаемъ задачу и ея рѣшеніе въ томъ видѣ, какъ они приведены въ курсѣ алгебры П. Н. Маракуева.

Задача 69-я.

О пчелиныхъ ячейкахъ.

На продолженіи оси OO' правильной шестиугольной призмы возьмемъ точку S; черезъ эту точку и чрезъ каждую изъ сторонъ равносторонняго треугольника ACE, полученнаго соединеніемъ чрезъ одну вершинъ верхняго основанія призмы, проведемъ три плоскости, по которымъ отрѣжемъ отъ призмы три тетраэдра $BACK$, $DCEH$ и $FEAL$ и замѣнимъ ихъ однимъ тетраэдромъ $SACE$, поставленнымъ надъ призмой. Новый многогранникъ будетъ ограниченъ сверху тремя ромбами $SAKC$, $SCEH$, $SEAL$; объемъ его всегда равенъ объему взятой призмы, гдѣ бы ни взять точку S на оси, ибо пирамида $SACE$ составлена изъ трехъ пирамидъ $SOAC$, $SOCE$ и $SOEA$, соотвѣтственно равныхъ тремъ отрѣзаннымъ пирамидамъ; такъ пирамида $SOAC =$ пир. $KABC$, ибо онѣ имѣютъ равныя основанія ($\triangle OAC = \triangle ABC$, какъ половины



Фиг. 109.

ромба $ABCO$) и равныя высоты SO и KB (по равенству прямоугольныхъ треугольниковъ SOI и KBI).

Имѣя равные объемы, многогранники имѣютъ, однако, различныя поверхности, и *задача состоитъ въ опредѣленіи точки S такъ, чтобы поверхность новаго десятигранника имѣла наименьшую величину.*

Рѣшеніе задачи.

Пусть $AB = a$, $BB' = OO' = b$, $BK = SO = x$; въ такомъ случаѣ: $AC = a\sqrt{3}$; $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + a^2};\ \text{слѣд.}\ SK = \sqrt{4x^2 + a^2};$$

площадь ромба $SAKC$, равная полупроизведенію діагоналей AC и SK, выразится формулою $\frac{1}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2}$; площадь трапеціи $CKB'C'$ — формулою $\frac{1}{2}a(2b - x)$. Слѣдоват., поверхность многогранника, не считая основанія, выражается формулою

$$\frac{3}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 3a(2b - x),$$

или

$$3a\left[\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 2b - x\right].$$

Постоянный множитель $3a$ не вліяетъ на условія max. и min., и потому вопросъ приводится къ опредѣленію minimum'а скобочнаго выраженія. Положивъ

$$\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 2b - x = m$$

и освободивъ это уравненіе отъ радикала, найдемъ

$$8x^2 - 8(m - 2b)x + 3a^2 - 4(m - 2b)^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{2(m - 2b) \pm \sqrt{6[2(m - 2b)^2 - a^2]}}{4}.$$

Чтобы x было дѣйствительно, необходимо, чтобы

$$2(m-2b)^2-a^2 \geqslant 0, \text{ или } (m-2b)^2 \geqslant \frac{a^2}{2} \text{ или } m-2b \geqslant \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда minim. $(m) = 2b + \frac{a}{\sqrt{2}}$. Помноживъ на $3a$, найдемъ, что искомая минимальная поверхность равна

$$6ab + \frac{3a^2}{\sqrt{2}},$$

а соотвѣтствующая величина $x = \frac{1}{4} a \sqrt{2}$.

Формула для x показываетъ, что разность двухъ смежныхъ боковыхъ реберъ должна быть равна четверти діагонали квадрата, построеннаго на сторонѣ шестиугольника, служащаго основаніемъ призмы.

Поверхность призмы, не считая основанія, была бы $6ab + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; слѣд. поверхность многогранника минимальной поверхности меньше на $\frac{3}{2} a^2 (\sqrt{3} - \sqrt{2})$ поверхности шестиугольной призмы, имѣющей то же основаніе и тотъ же объемъ.

Легко видѣть, что для треугольника KBI имѣетъ мѣсто пропорція

$$BK : BI : IK = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3},$$

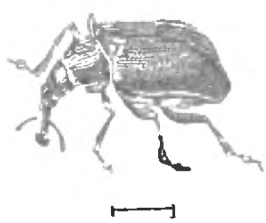
откуда (при помощи тригонометріи) найдемъ, что уголъ $BIK = 35^\circ 15' 52''$.

Остается прибавить, что ячейки пчелъ суть именно такіе десятигранники съ наименьшей поверхностью, т. е. шестигранныя призмы, ограниченныя съ одной стороны шестиугольникомъ (входъ въ ячейку), съ другой тремя ромбами подъ указаннымъ угломъ (дно). Два слоя ячеекъ вплотную входятъ другъ въ друга острыми выступами своихъ доньевъ и обращены открытыми шестиугольниками въ противоположныя стороны. Каждая пара такихъ слоевъ и составляетъ сотъ.

Столь совершенная архитектура пчелиныхъ сотъ, съ математическимъ разсчетомъ и экономіей использующая помѣщеніе улья и строительный матеріалъ (воскъ), уже давно приводитъ въ изумленіе наблюдателей. Еще Паппусъ, математикъ IV вѣка по Р. Хр., обратилъ вниманіе на строго геометрическую форму ячеекъ. Дарвинъ пытался объяснить возникновеніе этого сложнаго инстинкта пчелъ своей теоріей естественнаго отбора. а именно, онъ допускаетъ, что предки нашихъ пчелъ сооружали ячейки цилиндрической формы, и что эти цилиндры, тѣсня другъ друга, постепенно превратились въ шестигранники. Однако его теорія далеко не объясняетъ всѣхъ особенностей структуры сотъ (напр. того, что ячейки при данномъ объемѣ имѣютъ наименьшую поверхность). Нѣтъ сомнѣнія, что мы стоитъ здѣсь предъ одной изъ глубочайшихъ загадокъ природы.

Жукъ геометръ.

Если пчелы разрѣшили задачу изъ курса элементарной математики, то небольшой жучекъ семейства слониковъ разрѣшилъ еще болѣе трудную задачу—изъ курса высшей математики.



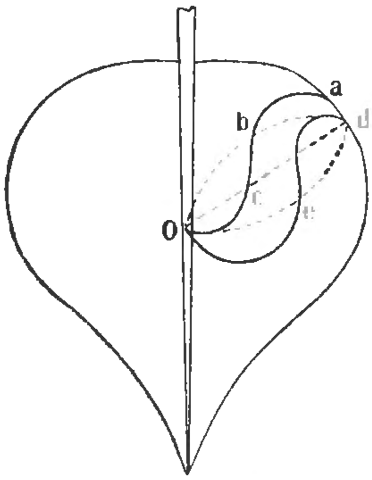
Фиг. 110. Жукъ-геометръ въ увеличенномъ видѣ. Черточка внизу даетъ понятіе о его натуральной величинѣ.

Зоологическое названіе этого жука-математика *Rhynchites betulae*, а народное — *березовый слоникъ*. Этотъ маленькій (4 миллиметра) черный, блестящій жучокъ съ длиннымъ хоботкомъ имѣетъ привычку свертывать въ трубки листья березы, ольхи, бука, чтобы положить въ нихъ свои яички. Большого удовольствія садоводамъ и лѣсоводамъ березовый слоникъ, конечно, не доставляетъ, но зато онъ способенъ привести въ восхищеніе математика, если послѣдній обратитъ вниманіе на способъ, какимъ жучекъ свертываетъ листья. Въ общихъ чертахъ эта манера такова. Предварительно слоникъ прогрызаетъ близъ основанія листа двѣ кривыя линія, которыя идутъ отъ средней жилки къ краямъ (см. фиг. 111, цифра 3). Послѣ этого онъ свертываетъ въ трубку сначала одну половину листа, а затѣмъ обвертываетъ эту трубку другой половиной. Получается нѣчто въ родѣ сигары, которая и остается висѣть на черешкѣ (фиг. 111, цифры 4 и 5), укрывая положенныя въ нихъ яйца. Все это длится около получаса.

Математическій инстинктъ березоваго слоника проявляется въ выборѣ формы кривого прорѣза, который онъ дѣлаетъ на пла-

Фиг. 111. *Жукъ-геометръ.* 1 и 2—Березовый слоникъ. 3—листъ, на которомъ показаны форма и положеніе прорѣзовъ. 4 и 5—свернутые листья. 6—личинка 7—слоникъ въ увеличенномъ видѣ.

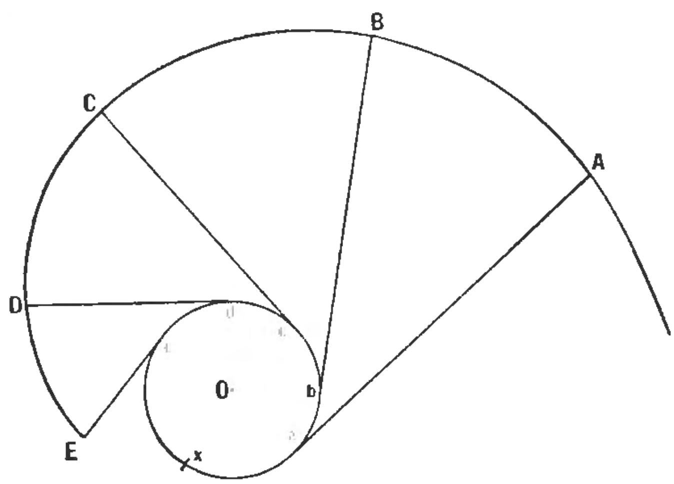
стинкѣ листа. Эта кривая выбирается далеко не случайно и находится въ нѣкоторой, довольно сложной, — однако вполнѣ опредѣленной—связи съ формой самаго края листа. Вы можете убѣдиться въ этомъ на опытѣ. Вырѣжьте изъ бумаги фигуру листа (фиг. 112) и попробуйте свертывать ея половины въ трубку, какъ это дѣлаетъ слоникъ, прорѣзавъ предварительно листъ у его основанія. Окажется, что если прорѣзъ сдѣланъ по прямой *od* или по дугамъ *obd* и *oed*, свертываніе удается далеко не такъ легко и удобно, какъ въ томъ случаѣ, когда надрѣзу придана форма *S*-образной линіи *oca* или *ocd*. Для полнаго же успѣха дѣла важно, чтобы эта *S*-образная кривая имѣла вполнѣ опредѣленную форму и занимала опредѣленное положеніе по отношенію къ краю листа. Въ терминахъ такъ называемой высшей математики эта взаимная связь можетъ быть выражена такъ: линія прорѣза должна быть «*эволютой*» краевой линіи листа; или, что то же самое, краевая линія листа должна быть «*эвольвентой*» линіи прорѣза.



Фиг. 112.

Эволюта и эвольвента.

Постараемся объяснить кратко и наглядно, что такое «эволюта» и «эвольвента». Обратите вниманіе на фигуру 113. Здѣсь изображены двѣ кривыя—окружность *O* и кривая *ABCDE*. Зависимость между ними та, что каждая касательная къ кривой *O* перпендикулярна къ кривой *ABCDE*. Если двѣ кривыя находятся между собой въ такой зависимости, то ту, которая перпендикулярна къ касательнымъ первой кривой, называютъ *эвольвентой* или развертывающей, а первую — *эволютой* или разверткой. Въ нашемъ примѣрѣ кругъ *O* будетъ эволютой, а кривая *ABCDE*—эвольвентой.

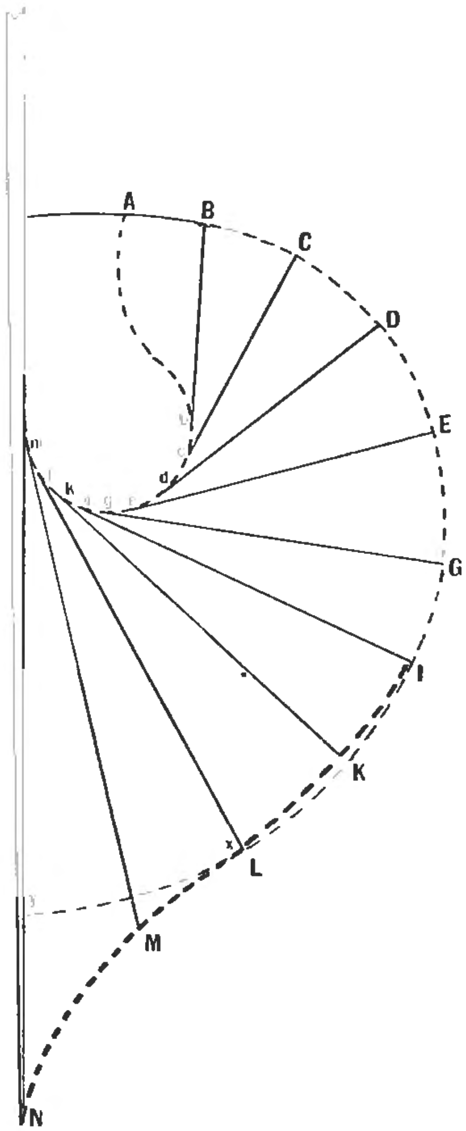


Фиг. 113.

Если вы желаете по данной эволютѣ построить ея эвольвенту, то можете поступить слѣдующимъ образомъ. Начертите эту эволюту на толстомъ картонѣ или деревѣ и вырѣжьте ее по краю. Положите вашу картонную эволюту на листъ бумаги, закрѣпите нить Aa въ точкѣ a (см. фиг. 113); на другомъ же концѣ нити сдѣлайте петельку и вставьте въ нее карандашъ. Теперь *наматывайте* нить на эволюту, слѣдя за тѣмъ, чтобы нить все время оставалась натянутой. Тогда конецъ A начертитъ вамъ эвольвенту взятой кривой. Это строго доказывается въ курсахъ аналитической геометріи.

Вы могли поступить и иначе — а именно, предварительно обмотать нить кругомъ эволюты и, держа въ натянутомъ видѣ, *разматывать* ее. Въ этомъ случаѣ вы получите ту же самую эвольвенту, что и ранѣе.

Отсюда слѣдуетъ, между прочимъ, что касательныя эволюты (онѣ же и радіусы кривизны эвольвенты) равны длинѣ той части эволюты, съ которой онѣ смотались. Другими словами: если мы начали сматывать съ точки x (фиг. 113), то длина прямой eE равна длинѣ дуги ex, $dD = dex$, $cC = cdex$ и т. д.



Фиг. 114.

Обратно, если по данной эвольвентѣ надобно начертить ея эволюту, то проводятъ къ эвольвентѣ рядъ нормалей (перпендикулярныхъ линій), которыя пересѣкаясь одна съ другой, образуютъ нѣкоторую ломаную линію. Вписавъ въ эту ломаную линію кривую, касательную къ ея элементамъ, вы получите искомую эволюту.

Задача 70-я.

Построеніе жука-геометра.

Вотъ такого-то рода задачу—постройки эволюты по данной эвольвентѣ—и рѣшаетъ березовый слоникъ. На той половинѣ листа, которая потомъ послужитъ внутренней трубкой, онъ выгрызаетъ эволюту краевой линіи листа. Если для линіи надрѣза *Abcdegiklm* (см. фиг. 114) построить ея эвольвенту, то эта послѣдняя будетъ имѣть форму кривой *ABCDEGIKLxy*, весьма близко подходящую къ краевой линіи листа.

Прорѣзъ другой половины листа, которая облекаетъ первую, не отличается такой математической правильностью. Этого и нельзя ожидать, такъ какъ вторая половина не свертывается свободно, какъ первая, а навивается на первую.

На жукѣ-геометрѣ мы и закончимъ нашу бесѣду о «математикѣ въ природѣ».

«Новыя начала геометріи».

Знаменитый мемуаръ Лобачевскаго въ краткомъ изложеніи Н. П. Соколова.

Тому, кто желаетъ ознакомиться съ работами Лобачевскаго, лучше всего начинать съ изученія его сочиненія «Новыя начала геометріи». Вотъ почему, желая ознакомить читателя съ характеромъ изслѣдованій нашего великаго геометра, мы и даемъ ниже разборъ содержанія этого сочиненія. Если читатель, въ силу малой подготовки, не осилитъ сразу всей этой главы, то достаточно внимательно прочесть на первый разъ первую ея половину,—особенно начала новой теоріи параллельныхъ—до введенія въ изложеніе тригонометрическихъ и гиперболическихъ функцій. Это не составитъ особаго труда.

Разсматриваемое сочиненіе Лобачевскаго состоитъ изъ введенія и тринадцати главъ.

Во введеніи, которое Лобачевскій начинаетъ «разборомъ прежнихъ теорій», онъ указываетъ недостатки главнѣйшихъ изъ извѣстныхъ ему доказательствъ одиннадцатой аксіомы Евклида и старается выяснить ихъ причины. Вопреки мнѣнію Лежандра, онъ находитъ, что эти причины коренятся вовсе не въ недостаточно точномъ опредѣленіи прямой и даже «нисколько не зависятъ отъ тѣхъ недостатковъ, которые скрывались въ первыхъ понятіяхъ». Тѣмъ не менѣе эти недостатки весьма важны сами по себѣ, и, къ чести Лобачевскаго надо сказать, онъ одинъ изъ первыхъ обратилъ вниманіе на эти недостатки, замѣтивъ, что эти первыя понятія: «пространство, протяженіе, мѣсто, тѣло, поверхность, линія, точка, направленіе, уголъ слова, которыми начинаютъ Геометрію, но съ которыми никогда не соединяютъ яснаго понятія».

Онъ первый сдѣлалъ попытку устранить эти недостатки, перестроивъ съизнова начала Геометріи, начала, къ которымъ со времени Евклида не смѣлъ прикасаться ни одинъ смертный. Только блестящій успѣхъ первыхъ изслѣдованій, правда, не признанныхъ и даже осмѣянныхъ современниками, могъ внушить такую смѣлую, скажемъ даже, дерзкую мысль.

Уже доказанная предыдущими изслѣдованіями необходимость опыта для доказательства одиннадцатой аксіомы Евклида, приводитъ Лобачевскаго къ заключенію, нынѣ уже, можно сказать, ходячему, что «первыми данными будутъ всегда тѣ понятія, которыя мы пріобрѣтаемъ въ природѣ посредствомъ нашихъ чувствъ» и что темноту въ основныхъ понятіяхъ Геометріи производитъ именно «отвлеченность, которая въ примѣненіи къ дѣйствительнымъ измѣреніямъ дѣлается лишней, а слѣдовательно въ самую теорію введена напрасно». Многія опредѣленія онъ считаетъ недостаточными уже и потому, что эти опредѣленія «не только не указываютъ на происхожденіе геометрической величины, которую хотятъ опредѣлить, но даже не доказываютъ, что такія величины существовать могутъ». Посему онъ «вмѣсто того, чтобы начинать Геометрію прямой линіею и плоскостью, какъ это дѣлается обыкновенно, предпочелъ начать сферой и кругомъ, которыхъ опредѣленіе не подлежитъ упреку въ неполнотѣ, потому что въ этихъ опредѣленіяхъ заключается способъ, какимъ образомъ эти величины происходятъ».

Плоскость онъ послѣ этого опредѣляетъ, какъ геометрическое мѣсто круговъ пересѣченія равныхъ сферъ, описанныхъ около двухъ неподвижныхъ точекъ полюсовъ. Изъ этого опредѣленія онъ выводитъ уже всѣ основныя свойства плоскости. Соотвѣтственно этому, прямая опредѣляется, какъ геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія равныхъ круговъ, описанныхъ около двухъ данныхъ точекъ на плоскости, хотя это опредѣленіе выражено у Лобачевскаго недостаточно ясно и начинается собственно такимъ опредѣленіемъ: «Прямой называется та линія, которая между двухъ точекъ покрываетъ сама себя во всѣхъ положеніяхъ», а затѣмъ уже выводятся всѣ остальныя свойства прямой и устанавливаются ея отношенія къ кругу и плоскости. Этимъ опредѣленіямъ основныхъ элементовъ геометріи и установленію ихъ основныхъ соотношеній посвящены обѣ первыя главы сочиненія.

Третья глава посвящена изученію мѣровыхъ соотношеній отрѣзковъ и угловъ. Здѣсь, кажется, въ первый разъ дается понятіе объ углѣ, какъ числѣ отвлеченномъ, показывающемъ только отношеніе двухъ дугъ одного круга, изъ которыхъ одна принята за единицу мѣры; опредѣленіе, которое надо, мнѣ кажется, считать единственно правильнымъ, но которое, къ сожалѣнію, во всѣхъ нашихъ учебникахъ замѣняется болѣе или менѣе неудачными альтернативами опредѣленій Евклида или Бертрана изъ Женевы. Вотъ подлинное опредѣленіе Лобачевскаго.

«*Величина дуги или части сферы, выраженная въ градусахъ и доляхъ градуса, даже вообще по сравненію съ тѣмъ же кругомъ или съ тою же сферой, называется уголъ, который бываетъ прямой, когда равенъ* $\frac{1}{2}\pi$, *острый, когда* $<\frac{1}{2}\pi$, *тупой, когда* $>\frac{1}{2}\pi$ *и* $<\pi$».

Это опредѣленіе дополняется еще двумя теоремами: 40. Линейный уголъ не зависитъ отъ величины полупоперечника въ кругѣ, но служитъ только къ опредѣленію взаимнаго положенія двухъ прямыхъ; и 42. Плоскостной уголъ не зависитъ отъ полупоперечника сферы, ни отъ мѣста для центра на линіи пересѣченія двухъ плоскостей.

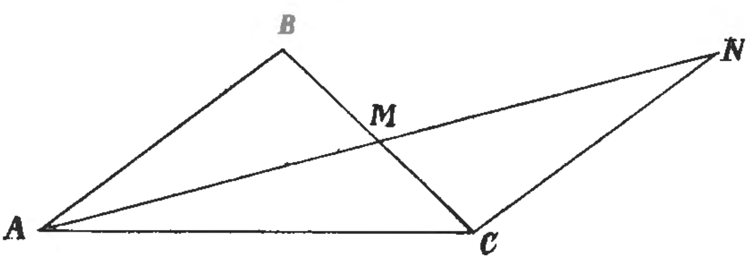
Опредѣливъ такимъ образомъ уголъ и указавъ вмѣстѣ съ тѣмъ способъ его измѣренія, Лобачевскій переходитъ въ слѣдующей четвертой главѣ къ изученію взаимнаго положенія прямыхъ на плоскости, плоскостей и прямыхъ въ пространствѣ, при чемъ находитъ основныя зависимости между сторонами и углами треугольниковъ какъ плоскихъ, такъ и сферическихъ.

Пятая глава, посвященная измѣренію тѣлесныхъ угловъ, представляетъ весьма изящное изложеніе основныхъ теоремъ сферической Геометріи съ приложеніемъ ея къ теоріи правильныхъ тѣлъ. Глава шестая разсматриваетъ условія равенства треугольниковъ и зависимость свойствъ треугольника отъ гипотезы о суммѣ его угловъ. Наконецъ въ главахъ VII, VIII, X и отчасти XI Лобачевскій излагаетъ свою новую теорію параллельныхъ линій, не зависящую отъ справедливости одиннадцатой аксіомы Евклида. Главы IX, XII и XIII посвящены изложенію тригонометріи какъ плоской, такъ и сферической, и для насъ особаго значенія уже не имѣютъ; поэтому, не останавливаясь на нихъ, ограничимся только изложеніемъ новой теоріи параллельныхъ. При этомъ, простоты ради, позволимъ себѣ отступать иногда отъ подлиннаго изложенія, пользуясь трудами другихъ геометровъ, какъ предшествовавшихъ, такъ и слѣдовавшихъ за Лобачевскимъ.

Начнемъ съ доказательства трехъ послѣднихъ теоремъ главы шестой.

Сумма угловъ прямолинейнаго треугольника ABC не можетъ быть больше двухъ прямыхъ.

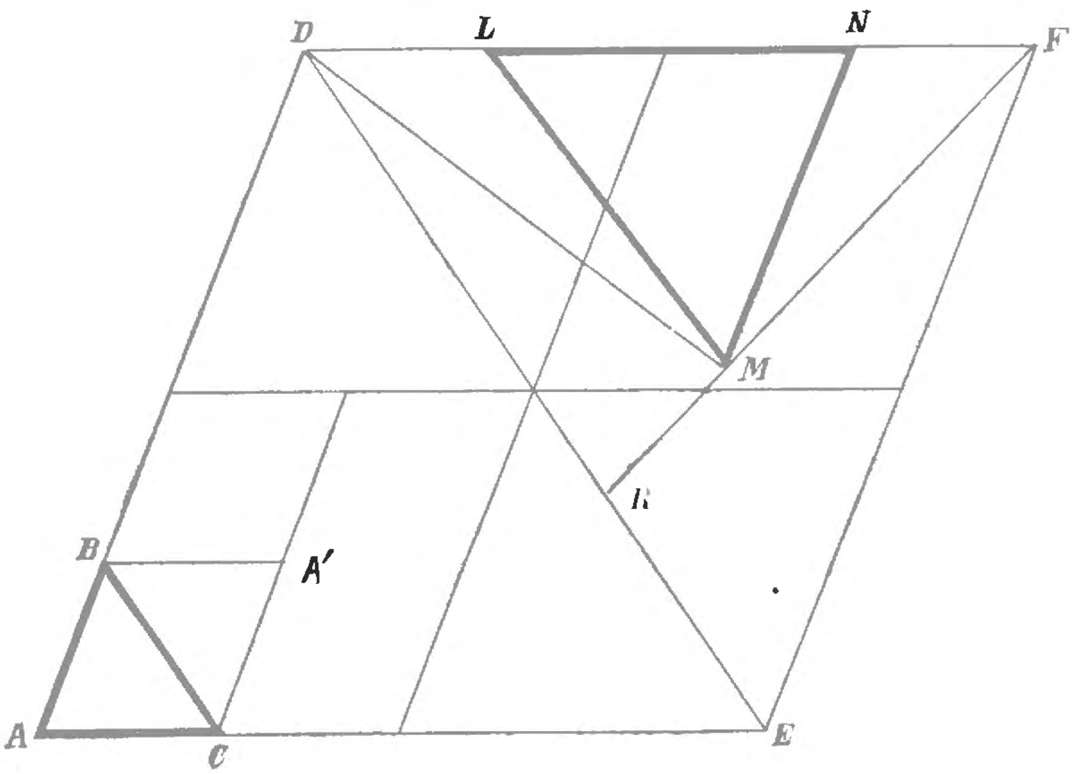
Пусть эта сумма $\pi + \alpha$, гдѣ α какъ угодно малый уголъ, и пусть A наименьшій уголъ $\triangle$ ABC (Фиг. 115). Чрезъ середину M стороны BC проведемъ прямую AM и на продолженіи ея отложимъ отрѣзокъ $MN = AM$. Тогда $\triangle$ $AMB = NMC$, ибо имѣютъ равные вертикальные при вершинѣ M углы, заключенные между равными по построенію сторонами.



Фиг. 115.

Значитъ, сумма угловъ треугольника ANC должна быть равна суммѣ угловъ $\triangle$-ка ABC, т. е. равна $\pi + \alpha$, причемъ хотя одинъ изъ угловъ его будетъ $< \frac{1}{2} A$. Продолжая подобное построеніе, мы придемъ наконецъ къ такому треугольнику, одинъ изъ угловъ котораго будетъ $< \frac{A}{2^n} < \alpha$, что невозможно, ибо сумма двухъ угловъ треугольника всегда $< \pi$.

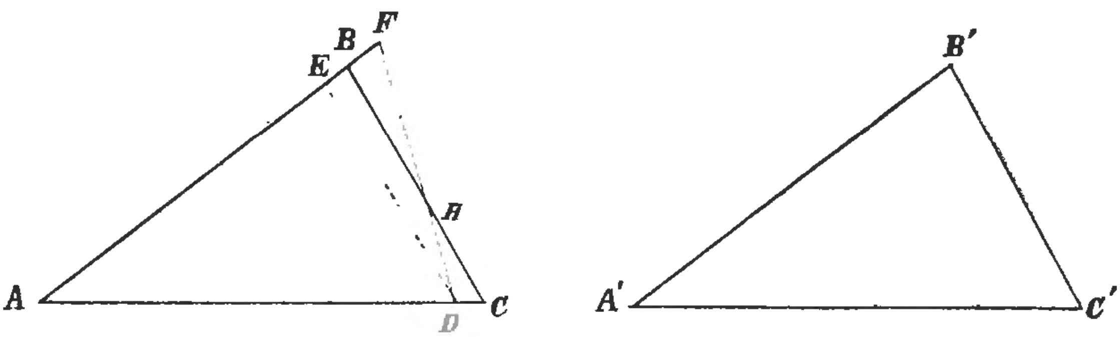
Итакъ, сумма угловъ треугольника можетъ быть только или равна, или меньше π. Если она будетъ равна π хотя въ одномъ треугольникѣ, то она будетъ равна π и во всякомъ треугольникѣ.



Фиг. 116.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, построимъ на сторонѣ BC такого треугольника ABC равный ему $\triangle\ A'BC$ (Фиг. 116). Сумма угловъ полученнаго параллелограмма будетъ 2π. Ясно, что изъ такихъ параллелограммовъ можно построить параллелограммъ, стороны котораго какъ угодно велики, а сумма угловъ 2π. Такой параллелограммъ въ свою очередь можетъ быть діагональю раздѣленъ на два равныхъ треугольника, сумма угловъ въ каждомъ изъ которыхъ будетъ π, а одинъ изъ угловъ равенъ углу A даннаго треугольника. Пусть FDE одинъ изъ такихъ треугольниковъ, достаточно большой для того, чтобы какой-либо произвольно взятый треугольникъ NLM могъ помѣститься внутри его. Помѣстимъ его такъ, чтобы N и L лежали на FD, а M гдѣ либо внутри FDE. Прямая FM, пересѣкая DE въ точкѣ R, раздѣлитъ FDE на два треугольника DFR и FRE. Согласно опредѣленію смежныхъ угловъ, сумма ихъ равна $2d$, т. е. $DRF+FRE=\pi$. Слѣдовательно, сумма угловъ этихъ двухъ треугольниковъ, очевидно, равная суммѣ угловъ $\triangle$-ка DEF, сложенной съ суммой двухъ названныхъ смежныхъ угловъ при точкѣ R, будетъ равна 2π. Но, согласно доказанному выше, сумма угловъ треугольника не можетъ быть больше π, значитъ, необходимо сумма угловъ каждаго изъ треугольниковъ DFR и FRE должна быть равна π. То же будетъ и для прямыхъ DM, ML и MN. Посему сумма угловъ $\triangle NLM$ также равна π.

Если сумма угловъ треугольника меньше π, то *двухъ неравныхъ треугольниковъ, имѣющихъ данные углы, быть не можетъ.*

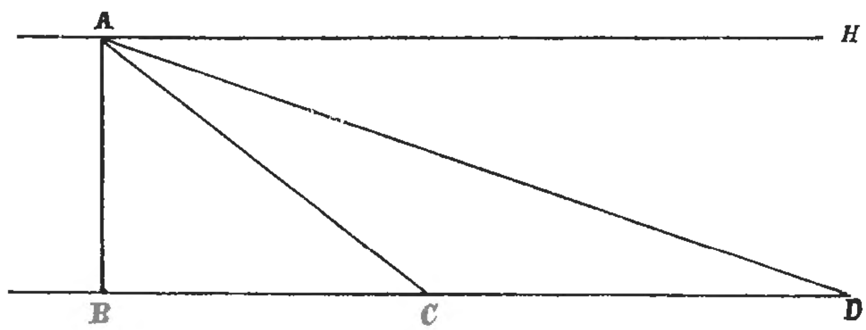


Фиг. 117.

Пусть ABC и $A'B'C'$ два треугольника (фиг. 117), такъ что $A=A'$, $B=B'$ и $C=C'$; $AC>A'C'$. Наложимъ $A'B'C'$ на ABC такъ, чтобы углы A и A' совмѣстились; пусть при этомъ точка C' упадетъ на точку D; точка B' можетъ упасть либо въ точку E на сторонѣ AB, либо въ точку F на ея продолженіи. Въ первомъ случаѣ сумма угловъ четыреугольника $BCDE$ будетъ равна 2π, а именно: сумма смежныхъ угловъ $\angle AED+\angle BED=\pi$. Но уголъ $AED=\angle B$, поэтому $\angle B+\angle BED=\pi$. То же, очевидно, имѣетъ мѣсто и для остальной пары угловъ, такъ что $\angle C+\angle CDE=\pi$. Четыреугольникъ $BCDE$, сумма угловъ котораго равна 2π, любой изъ діагоналей дѣлится на 2 треугольника, въ каждомъ изъ которымъ сумма угловъ должна быть равна π, что, согласно вышедоказанному, *невозможно*. Во второмъ случаѣ прямыя BC и DF, пересѣкаясь, образуютъ два треугольника DCH и FBH, въ каждомъ изъ которыхъ сумма двухъ угловъ π, а слѣдовательно сумма всѣхъ четырехъ угловъ больше π, что невозможно. И такъ необходимо $A'B'=AB$, а потому и $A'B'C'=ABC$.

Разсмотрѣнныя предложенія даютъ возможность уже вполнѣ строго изложить новую теорію параллельныхъ Лобачевскаго, изложеніе коей начнемъ со слѣдующаго предложенія.

Чрезъ любую данную точку можно провести прямую, составляющую съ данной прямой какой угодно малый уголъ.

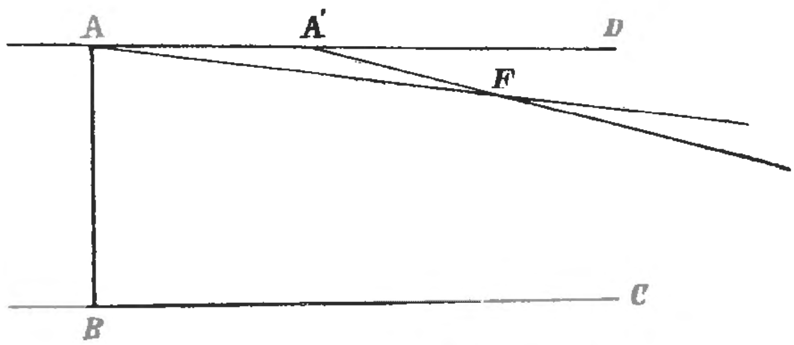


Фиг. 118.

Пусть прямая AC, проходящая чрезъ данную точку A (фиг. 118), составляетъ съ данной прямой BC уголъ α; отложимъ $DC=AC$; въ обѣихъ гипотезахъ уголъ ADB будетъ не больше $\frac{\alpha}{2}$. Повторяя то же построеніе, можемъ сдѣлать его меньше $\frac{\alpha}{2^n}$, т. е. меньше всякой данной величины. Посему, если сумма угловъ треугольника равна π, есть только одна прямая, проходящая чрезъ данную точку A параллельно BC (фиг. 118); ибо пусть AB перпендикуляръ къ BC, и AH перпендикуляръ къ AB, прямая AH не пересѣкаетъ BC. Проведемъ прямую AC, составляющую съ BC уголъ $C<\alpha$, уголъ HAC будетъ также, слѣдовательно, $<\alpha$, и потому какъ угодно малъ вмѣстѣ съ α, такъ что, какъ бы мало мы ни отклонили AH отъ ея положенія, она уже будетъ пересѣкать BC. Не трудно видѣть, что и обратное предложеніе также имѣетъ мѣсто.

Если сумма угловъ треугольника $<\pi$, то прямыхъ, не пересѣкающихъ данной и проходящихъ чрезъ данную точку, можно провести безконечно много. Лобачевскій называетъ параллельными данной прямой BC двѣ такія прямыя AD и AE, которыя отдѣляютъ прямыя, пересѣкающія BC отъ непересѣкающихъ. Острый уголъ, который эти прямыя составляютъ съ перпендикуляромъ AB изъ A на BC, онъ называетъ угломъ параллельности относительно длины AB, и, если $AB=p$, обозначаетъ его символомъ $\Pi(p)$. Ту сторону, съ которой параллельныя прямыя приближаются другъ къ другу, онъ называетъ стороною параллельности.

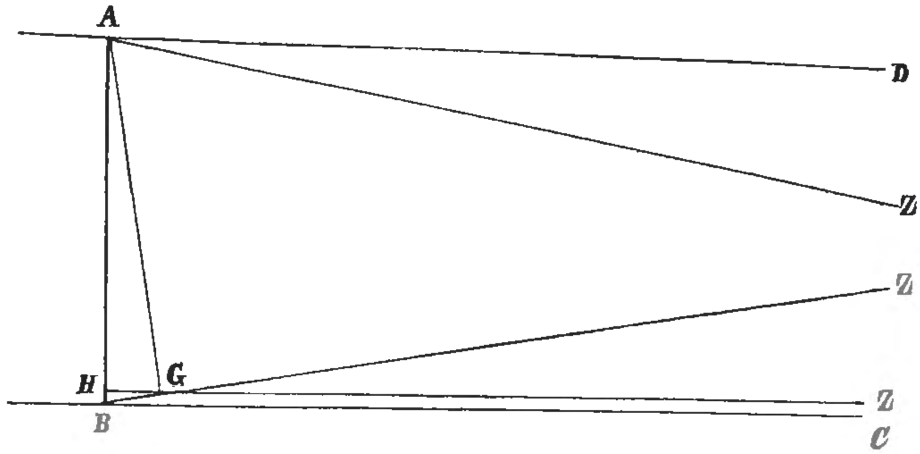
Двѣ параллельныя прямыя параллельны другъ другу во всѣхъ своихъ точкахъ.



Фиг. 119.

Пусть AD параллельна BC (фиг. 119), на продолженіи AD въ сторону параллельности возьмемъ точку A' и проведемъ прямую $A'F$ внутри полосы между AD и BC; прямая AF непремѣнно пересѣкаетъ BC гдѣ либо въ точкѣ H, прямая $A'F$, входящая въ треугольникъ ABH, можетъ выйти изъ него, только пересѣкая сторону BC, посему параллельной къ BC въ точкѣ A' можетъ быть только прямая AD. То же можно доказать и для любой точки прямой AD.

Прямая BC также параллельна прямой AD. Для сего достаточно показать, что всякая прямая BZ между BC и AD пересѣкаетъ AD. Опустимъ перпендикуляръ изъ A на BZ'



Фиг. 120.

(фиг. 120), и повернемъ всю полученную фигуру, кромѣ прямой BC, около точки A такъ, чтобы этотъ перпендикуляръ AG совмѣстился съ AB, прямая BZ займетъ тогда положеніе HZ между AD и BC, прямая AD положеніе AZ и будетъ пересѣкать HZ, ибо въ этомъ положеніи она должна пересѣкать прямую BC. Слѣдовательно, и въ начальномъ положеніи AD пересѣкала BC', что и требовалось доказать.

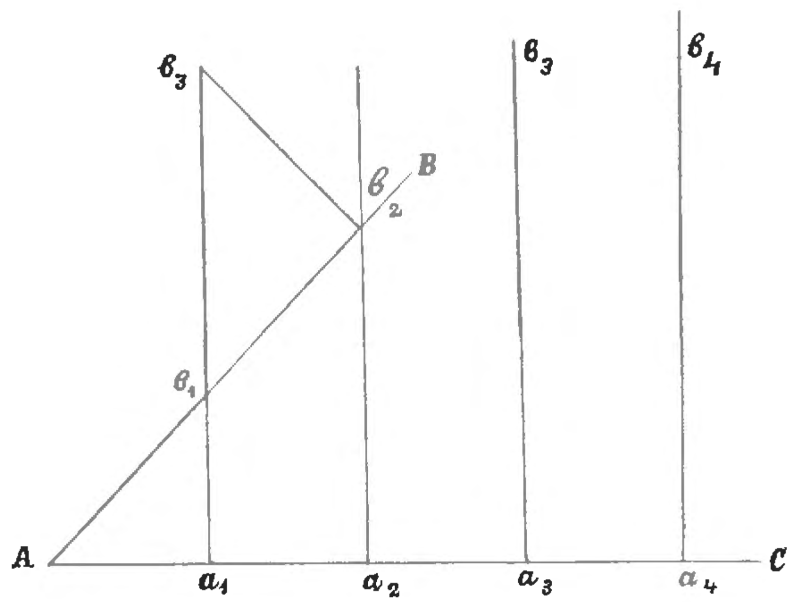
Двѣ прямыя, параллельныя третьей, параллельны между собою.

Пусть изъ трехъ непересѣкающихся прямыхъ AB параллельна CD и EF. Положимъ, что CD лежитъ между AB и EF, тогда любая прямая EF', направленная въ сторону CD, пересѣчетъ AB, а потому и CD, лежащую ближе ея. На доказательствѣ этой теоремы для случая, когда AB лежитъ между CD и EF, или когда AB, CD и EF не лежатъ въ одной плоскости, я останавливаться не буду, и перейду прямо къ выводу важнѣйшихъ слѣдствій самой теоремы.

Эта теорема даетъ намъ прежде всего возможность *судить о характерѣ функціи* $\Pi(x)$. Такъ, мы уже можемъ утверждать, что эта функція однозначна и всегда конечна; не трудно также показать, что она убываетъ съ возрастаніемъ перемѣннаго x. Дѣйствительно $\Pi(a) = \Pi(b)$ невозможно, ибо иначе два перпендикуляра къ одной прямой были бы параллельны, и $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ всегда; въ то же время $\Pi(a) > \Pi(b)$ при $a > b$

также невозможно, ибо иначе прямая, проходящая чрезъ конецъ перпендикуляра a подъ угломъ $\Pi(b)$ къ нему, не пересѣкаетъ уже и прямой, параллельной къ данной въ концѣ перпендикуляра b; слѣдовательно, всегда $\Pi(a) < \Pi(b)$, или $a > b$.

Покажемъ еще, что *функція $\Pi(x)$ можетъ принимать всѣ значенія отъ нуля до* $\frac{\pi}{2}$. Пусть BAC (фиг. 121) данный



Фиг. 121.

уголъ. Изъ точки b_1 на сторонѣ AB опускаемъ перпендикуляръ $b_1 a_1$ на сторону AC и откладываемъ на AC отрѣзокъ $a_1 a_2 = Aa_1$. Пусть перпендикуляръ изъ a_2 къ AC пересѣкаетъ сторону AB въ точкѣ b_2. Если сумма угловъ треугольника Aa_1b_1 будетъ $\pi - \alpha$, то въ треугольникѣ Ab_1a_2 она будетъ $\pi - 2\alpha$, а въ треугольникѣ $Aa_2b_2 < \pi - 2\alpha$. Повторяя подобное построеніе, мы будемъ получать все такіе треугольники съ общимъ угломъ A, сумма угловъ которыхъ будетъ меньше $\pi - 4\alpha$, $\pi - 6\alpha$ и вообще послѣ n построеній меньше $\pi - 2n\alpha$. Но такъ какъ она не можетъ быть меньше A, то такое построеніе можетъ быть повторено лишь конечное число разъ $n \leqq \frac{\pi - 1}{2\alpha}$. Дальнѣйшіе перпендикуляры перестанутъ уже пересѣкать AB, начиная съ нѣкотораго конечнаго разстоянія x отъ точки A, для котораго $\Pi(x) = A$. Отсюда заключаемъ, что функція $\Pi(x)$ убываетъ непрерывно, начиная отъ значенія

$\Pi(0)=\frac{\pi}{2}$ до значенія $\Pi(\infty)=0$. Послѣднее обстоятельство позволяеть намъ предполагать, что эта функція $\Pi(x)$ будеть показательнаго характера.

Всякую показательную функцію можно выразить съ помощью простѣйшихъ показательныхъ функцій, къ которымъ принадлежать функціи тригонометрическія и гиперболическія. Основнымъ свойствомъ ихъ является ихъ однозначность. Это свойство утрачивается при обращеніи; функціи обратныя показательнымъ — логариѳмическія и круговыя оказываются уже безконечно многозначными. Тѣмъ не менѣе онѣ обладають всѣми свойствами однозначныхъ функцій, если только мы будемъ принимать во вниманіе одну какую либо опредѣленную вѣтвь такой функціи, напр. если мы за значеніе z, соотвѣтствующее $u=e^z$ будемъ принимать $z=\lg\rho+\vartheta i$ гдѣ $\lg\rho$ — дѣйствительный логариѳмъ модуля u, а ϑ аргументъ u, не превосходящій π. Воспользовавшись этими соображеніями, попробуемъ разыскать аналитическое выраженіе функціи $\Pi(x)$.

Пусть BC — данная прямая (фиг. 118), A — точка внѣ ея, $AB=y$ — перпендикуляръ изъ A на BC. Пусть AD — какая либо прямая, проходящая чрезъ точку A, отрѣзокъ $BD=x$, уголъ $BAD=\theta$. Такъ какъ двѣ прямыя пересѣкаются только въ одной точкѣ, то каждому значенію θ будетъ тогда соотвѣтствовать одно и только одно значеніе x, а потому, согласно вышесказанному, каждому значенію $\operatorname{tg}\theta$ будетъ соотвѣтствовать одно и только одно значеніе $\operatorname{tg}hx$ и обратно. Посему $\operatorname{tg}\theta$ и $\operatorname{tg}hx$ должны быть связаны между собою линейнымъ соотношеніемъ, т. е. соотношеніемъ вида $\operatorname{tg}hx=\frac{A\operatorname{tg}\theta+B}{C\operatorname{tg}\theta+D}$. Но при $\theta=0$ и $x=0$, а потому $\operatorname{tg}\theta$ и $\operatorname{tg}hx$ обращаются въ нуль одновременно; сверхъ того обѣ функціи при переходѣ чрезъ нуль мѣняють знакъ; посему необходимо $B=0$, $C=0$, и искомая зависимость принимаетъ видъ $\operatorname{tg}hx=\operatorname{tg}A\theta$. Пусть теперь θ_0 — уголъ параллельности для y, такъ что $\theta_0=\Pi(y)$, тогда $x_0=\infty$, $\operatorname{tg}h\infty|=A\operatorname{tg}\Pi(y)$, откуда $A=\operatorname{Ctg}\Pi(y)$.

Возьмемъ теперь какой либо треугольникъ ABC прямоугольный при точкѣ C, такъ что гипотенуза его будетъ c, катеты a и b. Изъ послѣдняго соотношенія находимъ $\cot\mathrm{g}ha = d(b)\cot\mathrm{g}A$. $\cot\mathrm{g}hb = d(a)\cot\mathrm{g}B$, откуда, замѣчая, что $\cos h^2 = x| = \sin h^2 x$, находимъ:

$$\sin A = \frac{\sin ha}{\sqrt{\varphi^2(b) + \sin h^2 a + \varphi^2(b)\sin h^2 a}},$$

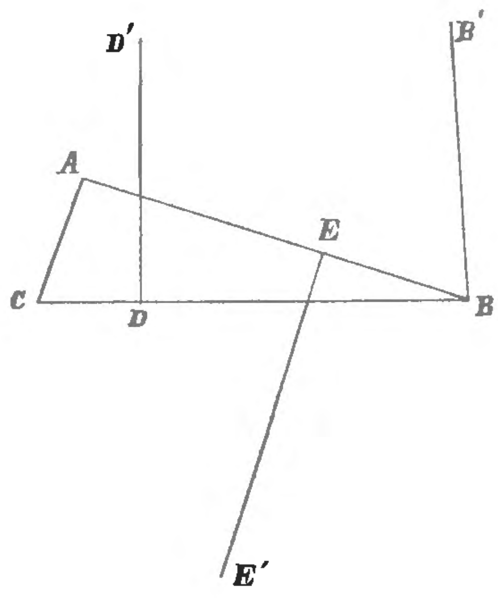
$$\sin B = \frac{\sin hb}{\sqrt{\varphi^2(a) + \sin h^2 b + \varphi^2(a)\sin h^2 b}}.$$

Такъ какъ $\sin A$ долженъ обращаться въ единицу при $a = c$ и въ $\sin B$ при $a = b$, то выраженія полученныя необходимо должны быть вида $\frac{f(a)}{f(c)}$ и $\frac{f(b)}{f(c)}$, что возможно только при $\varphi(a) = \sin h\,(a)$. Посему вообще должно быть $\varphi(y) = \cot\mathrm{g}\,\Pi(y) = \sin hy$, или послѣ небольшихъ преобразованій:

$$\cot\mathrm{g}\,\frac{1}{2}\,\Pi(y) = e^{-y}$$

Это выраженіе дано Лобачевскимъ, послѣ продолжительныхъ весьма сложныхъ, хотя и болѣе прямыхъ геометрическихъ соображеній.

Перейдемъ теперь къ изученію зависимостей между сторонами и углами треугольника.



Фиг. 122.

Пусть ABC имѣетъ углы $A = \Pi(\alpha)$, $B = \Pi(\beta)$ и $C = \Pi(\gamma)$. На сторонѣ BC (фиг. 122) отложимъ отрѣзокъ $CD = \gamma$ и на сторонѣ AB отрѣзокъ $AE = \alpha$; изъ точекъ D и E возставимъ перпендикуляры DD' и EE' къ соотвѣтственнымъ сторонамъ и проведемъ прямую BB', параллельную прямой DD', а потому и EE'. Такимъ образомъ у насъ получаются углы $CBB' = \Pi(a - \gamma)$ и $ABB' = \Pi(c - \alpha)$, связанные между собою соотношеніемъ $\Pi(\beta) = \Pi(a-\gamma) - \Pi(c-\alpha)$. Отрѣзки a и γ должны быть взяты съ обратнымъ знакомъ, если соотвѣтствующіе имъ углы будутъ тупые.

Съ помощью этого соотношенія могутъ быть найдены всѣ остальныя зависимости между сторонами и углами треугольника.

Если стороны какого либо угла BAC (фиг. 121) пересѣчемъ двумя прямыми, перпендикулярными къ AB, то отношеніе меньшаго отрѣзка къ большему на этой сторонѣ будетъ больше отношенія соотвѣтствующихъ отрѣзковъ на другой сторонѣ.

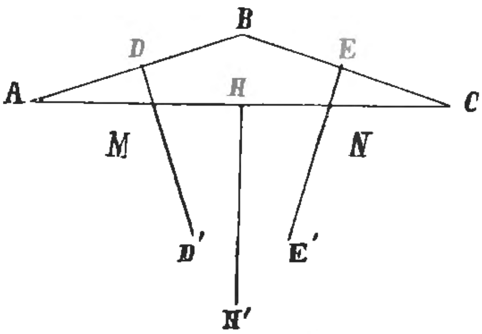
Чтобы убѣдиться въ этомъ, отложимъ на AC произвольное число равныхъ отрѣзковъ $Aa_1 = a_1a_2 = a_2a_3 = \ldots = a_{n-1}C$ и изъ полученныхъ точекъ возставимъ перпендикуляры къ AC, которые пусть пересѣкутъ AC въ точкахъ b_1, $b_2, \ldots b_{n-1}$, C. Разсмотримъ два какихъ либо смежныхъ изъ полученныхъ четыреугольниковъ: $a_{p-1}a_pb_{p-1}b_p$ и $a_pa_{p+1}b_pb_{p+1}$. Перегнемъ полученную фигуру по прямой a_pb_p; тогда точки a_{p+1} и a_{p-1} совпадутъ, а потому совпадутъ и прямыя $a_{p-1}b_{p-1}$ и $a_{p+1}b_{p+1}$. Въ полученномъ такимъ образомъ треугольникѣ $b_pb_{p-1}b_{p+1}$, очевидно, уголъ b_{p+1} будетъ меньше угла b_{p-1}, а потому и сторона $b_{p-1}b_p$ меньше стороны $b_pb'_{p+1}$ b_p b_{p+1}, такъ что отрѣзки эти возрастаютъ по мѣрѣ удаленія отъ точки A, откуда и слѣдуетъ высказанное предложеніе.

Примѣняя эту теорему къ прямоугольному треугольнику, найдемъ, что *квадратъ гипотенузы больше суммы квадратовъ катетовъ*. Изъ той же теоремы заключаемъ, *что разстояніе между двумя перпендикулярами къ одной прямой возрастаетъ по мѣрѣ удаленія ихъ отъ нея до безконечности. Разстояніе между двумя параллельными прямыми возрастаетъ въ одну сторону до безконечности, а въ другую убываетъ до нуля.*

Не останавливаясь на доказательствахъ этихъ предложеній, перейдемъ къ послѣднему предложенію седьмой главы:

Перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ треугольника, могутъ пересѣкаться въ одной точкѣ, или вовсе не пересѣкаться, или быть параллельными. Если два изъ этихъ перпендикуляровъ пересѣкаются, то необходимо и третій пройдетъ чрезъ точку ихъ пересѣченія; это очевидно. Если эти перпендикуляры не пересѣкаются, то параллельность двухъ изъ нихъ влечетъ за собою и параллельность имъ третьяго.

Приведемъ доказательство этого предложенія только для одного случая, именно, когда углы A и C треугольника ABC (фиг. 123) острые и перпендикуляры изъ срединъ сторонъ его AB и BC параллельны. Эти перпендикуляры необходимо пересѣкають сторону AC треугольника въ точкахъ M и N, лежащихъ съ разныхъ сторонъ средины ея H, такъ что перпендикуляръ, возставленный къ AC въ точкѣ H долженъ лежать между ними, а такъ какъ онъ пересѣкаться ни съ однимъ изъ нихъ не можетъ, то онъ имъ долженъ быть параллеленъ.



Фиг. 123.

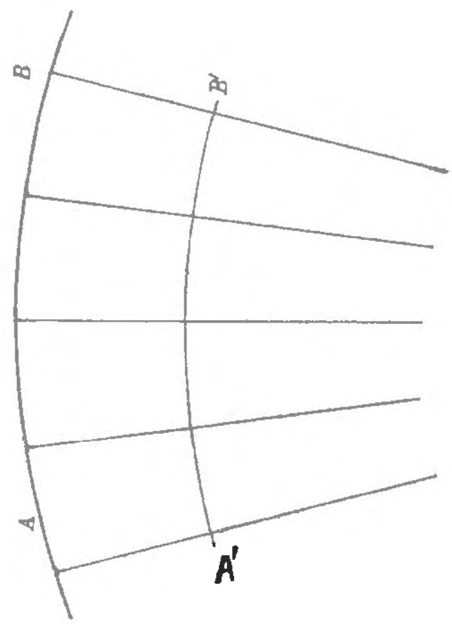
Послѣднее обстоятельство показываетъ, что *чрезъ три данныя точки не всегда можно провести кругъ, и что кругъ съ возрастаніемъ радіуса не можетъ стремиться къ прямой*, ибо иначе перпендикуляры къ одной прямой были бы параллельны.

Предѣльнымъ положеніемъ круга должна, слѣдовательно, служить какая-то другая линія, обладающая тѣмъ свойствомъ, что перпендикуляры изъ срединъ хордъ ея всѣ параллельны другъ другу. Эту кривую Лобачевскій называетъ **предѣльною кривою**, перпендикуляры изъ средины хордъ ея—*осями предѣльной кривой*, поверхность, происшедшую отъ вращенія предѣльной кривой около одной изъ ея осей,—**предѣльной поверхностью.**

Вся восьмая глава посвящена именно изученію свойствъ этихъ предѣльныхъ линій и поверхностей.

Въ самомъ опредѣленіи предѣльной кривой уже указывается и способъ построенія. Именно, на данной прямой AB строимъ уголъ $\Pi(\alpha)$ при точкѣ A и на полученной прямой откладываемъ отрѣзокъ $AC = 2\alpha$; точка C будетъ лежать на предѣльной кривой. Такимъ образомъ по точкамъ можемъ построить и всю предѣльную кривую. Изъ самаго способа построенія ея видно, что дуги ея покрываютъ сами себя во всѣхъ частяхъ, и что кругъ не можетъ пересѣчь ее болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ.

Подобными же свойствами должна обладать, конечно, и предѣльная поверхность. Плоскость, проходящая по оси поверхности, пересѣчетъ ее по предѣльной кривой, всякая другая плоскость—по кругу. Предѣльныя линіи на предѣльной поверхности играютъ ту же роль, какъ прямыя на плоскости и, такъ какъ сумма двугранныхъ угловъ, происходящихъ отъ пересѣченія трехъ плоскостей по прямымъ, параллельнымъ другъ другу, равна π, то сумма угловъ предѣльнаго треугольника равна π, такъ что на этой поверхности геометрія Евклида примѣнима вполнѣ и безъ всякихъ ограниченій.



Фиг. 124.

Въ заключеніе укажемъ еще одно метрическое свойство предѣльной кривой.

Пусть AB и $A'B'$— дуги предѣльныхъ кривыхъ (фиг. 124), пересѣченныя парою параллельныхъ прямыхъ AA' и BB'; покажемъ сначала, что отношеніе этихъ дугъ не зависитъ отъ ихъ длины. Для сего раздѣлимъ дугу AB на n равныхъ частей и чрезъ точки дѣленія $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ проведемъ прямыя $A_1A_1', A_2A_2' \ldots A_{n-1}A_{n-1}'$, параллельныя прямымъ AA' и BB'. Эти прямыя раздѣлятъ дугу $A'B'$ также на n равныхъ частей, ибо по свойству предѣльной кривой полоса $AA_1A_1'A'$ можетъ быть совмѣщена съ полосою $A_1A_2A'_2A'_1$ и съ каждою слѣдующею, при чемъ, слѣдовательно, будутъ совмѣщаться также и дуги $A'A_1'$, $A'_1A'_2$ и т. д. Отношеніе дугъ двухъ предѣльныхъ кривыхъ между двумя параллельными прямыми зависитъ, слѣдовательно, только отъ разстоянія этихъ кривыхъ другъ отъ друга. Если это разстояніе будетъ x и если отношеніе двухъ дугъ, разстояніе между которыми равно единицѣ, примемъ за C, то это отношеніе будетъ выражаться числомъ C^x, при чемъ C должно быть необходимо больше единицы. Полагая $C^k = e$, гдѣ e основаніе Неперовыхъ логариомовъ, можемъ представить это отношеніе въ видѣ

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB}{A'B'} = e^{\frac{x}{k}}.$$

На этомъ и закончимъ изложеніе геометрическихъ изслѣдованій Лобачевскаго.

Результатомъ этихъ изслѣдованій явилась новая, вполнѣ стройная и строго логическая система Геометріи, которая должна была бы замѣнить Геометрію Евклида, если бы его одиннадцатая аксіома оказалась ложной. Но непосредственныя измѣренія, напримѣръ измѣренія суммы угловъ треугольниковъ, вершинами которыхъ служатъ весьма отдаленныя отъ насъ и другъ отъ друга неподвижныя звѣзды, не обнаруживаютъ замѣтныхъ отклоненій отъ этой аксіомы; посему Геометрія Евклида вообще для любыхъ разстояній или по крайней мѣрѣ для разстояній, съ которыми намъ приходится имѣть дѣло, должна имѣть мѣсто безусловно.

Вопросъ о *реальномъ* существованіи Геометріи Лобачевскаго и о значеніи одиннадцатой аксіомы въ Геометріи Евклида оставался, слѣдовательно, открытымъ. Рѣшеніемъ этого вопроса первый началъ заниматься одинъ изъ наиболѣе выдающихся современныхъ геометровъ, итальянскій ученый, профессоръ Beltrami, работы котораго и открываютъ собственно, нынѣ уже весьма обширную, область изслѣдованій по геометріи Лобачевскаго. Въ своемъ «Saggio di Interpretazione della Geometria non Euclidea», и затѣмъ въ «Teoria fondamedtale degli Spazii di Curvatura constante» въ 1868 году онъ показываетъ, что Геометрія Лобачевскаго для двухъ измѣреній, т. е. соотвѣтствующая Геометріи Евклида на плоскости, вполнѣ примѣнима на поверхностяхъ, имѣющихъ постоянную отрицательную кривизну, которыя онъ называетъ **псевдосферическими поверхностями.**

Такимъ образомъ, реальное представленіе для системы Лобачевскаго, по крайней мѣрѣ для двухъ измѣреній, было найдено, а вмѣстѣ съ тѣмъ былъ рѣшенъ вопросъ о значеніи одиннадцатой аксіомы Евклида. Эта аксіома отличаетъ плоскость отъ псевдосферы.

Нѣкоторые фокусы.

Къ области здраваго развитія смекатки слѣдуетъ отнести умѣнье найтись не только при рѣшеніи какого-либо хитроумнаго вопроса, или при выясненіи математическаго парадокса и софизма. Необходимо, кромѣ того, развивать въ себѣ навыкъ, чтобы различать истинно математическую задачу отъ простого *фокуса*, основаннаго на отводѣ глазъ или попросту иногда—обманѣ. Нѣсколько образцовъ распространенныхъ фокусовъ подобнаго рода мы и разъясняемъ въ этомъ отдѣлѣ, начиная съ простѣйшаго изъ нихъ.

Странная исторія.

На столѣ лежитъ 5 спичекъ (или иныхъ какихъ предметовъ) $\overset{1}{|}\ \overset{2}{|}\ \overset{3}{|}\ \overset{4}{|}\ \overset{5}{|}$ и въ каждой рукѣ держатъ по одной. Теперь разсказываютъ такую исторію:

Пять овецъ (5 спичекъ) паслись на лугу, а въ лѣсу находились 2 разбойника (показываютъ обѣ спички въ рукахъ). Разбойники украли овецъ одну за другой (берутъ № 1 лѣвой рукой, № 5 правой, № 2 лѣвой, № 4 правой, № 3 лѣвой). Въ это время пришелъ пастухъ, и разбойники отпустили овецъ обратно (кладутъ обратно на столъ 1 спичку изъ правой руки, 1 изъ лѣвой, 1 изъ правой, 1 изъ лѣвой, 1 изъ правой (Теперь въ лѣвой рукѣ находятся 2 спички, въ то время, какъ зрители считаютъ, что въ каждой рукѣ — по одной).

Пастухъ удалился, и разбойники опять забрали одну за другой всѣхъ овецъ (начинаютъ брать лѣвой рукой). Но въ это время пришли солдаты, и разбойники убѣжали, оставивъ овецъ въ лѣсу. Открываютъ руки, и въ самомъ дѣлѣ: въ одной рукѣ 5 овецъ, въ другой 2 разбойника.

Эта веселенькая, хотя нѣсколько и странная, исторійка основана, очевидно, только на быстротѣ разсказа и постоянномъ подсовываніи внѣ очереди лѣвой руки вмѣсто правой. Какъ ни простъ этотъ «отводъ глазъ», но сначала онъ удивляетъ.

Феноменальная память.

Знаменитый «счетчикъ» Жакъ Иноди производившій въ умѣ математическія дѣйствія надъ многозначными числами, обладалъ, прежде всего, поистинѣ феноменальной памятью чиселъ—онъ запоминалъ сразу длиннѣйшіе ряды цифръ и повторялъ ихъ безъ ошибки, словно читалъ по писанному. Здѣсь мы имѣемъ дѣло съ рѣдкимъ природнымъ даромъ. Совсѣмъ другое дѣло, когда такую же способность демонстрируютъ предъ публикой провинціальныхъ городовъ заѣзжіе фокусники. Здѣсь дѣло вовсе не въ памяти, а въ примѣненіи остроумнаго и крайне простого мнемоническаго пріема. Полагаемъ, что читателю небезынтересно будетъ съ нимъ ознакомиться, чтобы умѣть, при случаѣ, отличить истинную, природную способность отъ простой уловки.

Вотъ примѣръ. Фокусникъ диктуетъ вамъ нѣсколько длиннѣйшихъ рядовъ цифръ и затѣмъ безъ запинки повторяетъ ихъ сколько угодно разъ, не смѣшивая одного ряда съ другимъ и не пропуская ни одной цифры.

Весь секретъ въ томъ, что фокусникъ твердо выучилъ небольшую табличку, гдѣ каждой изъ 10-ти цифръ отвѣчаютъ опредѣленныя согласныя буквы. Для тѣхъ, кто пожелалъ бы самъ позабавить своихъ гостей рядомъ эффектныхъ фокусовъ, мы приводимъ ниже такую табличку. Въ ней стоящимъ наверху цифрамъ отвѣчаютъ по двѣ согласныхъ буквы.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
н	г	д	к	ч	п	ш	с	в	р
м	ж	т	х	щ	б	л	з	ф	ц

Для облегченія небезполезны будутъ кое-какія мнемоническія указанія. Что нулю соотвѣтствуетъ буква **н** легко запомнить, **м** же похоже на **н**, стоитъ съ нимъ рядомъ въ алфавитѣ. **Г** похоже на единицу по начертанію, и часто при смягченіи переходитъ въ **ж**. Буква **д** выбрана для двойки, какъ начальная и часто произносится, какъ **т**. Буква **к** напоминаетъ три, потому что состоитъ изъ трехъ черточекъ; съ **х** она родственна, какъ гортанная. **Ч**—первая буква слова «четыре» и напоминаетъ **щ**. **П**—первая буква **пяти** и родственна **б**. Точно также **ш** напоминаетъ шестерку (**л** приходится просто запомнить), и **с**—семерку; **з**—родственна **с**. **В**—первая буква слова восемь, **ф**—родственна **в**. Наконецъ, **р** выбрана для девятки, такъ какъ напоминаетъ ее, если перевернуть ее набокъ; **ц**—приходится выучить.

Какъ ни смѣшны могутъ показаться эти мнемоническія сближенія, они все же принесятъ огромное облегченіе: зная ихъ, вы въ одну-двѣ минуты твердо выучите приведенную табличку и навѣрно провозитесь надъ ней цѣлый часъ, если пренебрежете ими.

Затвердивъ табличку, вы можете уже изумлять пріятелей вашей феноменальной памятью не хуже упомянутаго выше фокусника. Передъ тѣмъ, какъ продиктовать рядъ цифръ, вы вспоминаете какое-нибудь хорошо знакомое стихотвореніе и мысленно замѣняете въ немъ всѣ согласные звуки соотвѣтственными цифрами. Пусть вами выбраны слѣдующія четыре строки изъ Пушкина:

> Поэтъ, не дорожи любовію народной,
> Восторженныхъ похвалъ пройдетъ минутный шумъ,
> Услышишь судъ глупца и смѣхъ толпы холодной,
> Но ты останься твердъ, спокоенъ и угрюмъ.

Подставляя въ умѣ, вмѣсто согласныхъ, отвѣчающія имъ цифры, вы диктуете слѣдующіе ряды чиселъ:

5202916580920
8729100353865922002060
766672165970326536620
272072892753019O

Если вас, спустя сколько угодно времени, попросят повторить продиктованные вами ряды цифр, то зная, какими стихами вы пользовались, вы безошибочно воспроизведете всѣ четыре ряда. Если вас попросят сразу сказать, напримѣръ, третій рядъ, то вы вспомните третью строчку («услышишь судъ глупца...») и тотчасъ же назовете всѣ цифры ряда.

«Математическое ясновидѣніе».

Заговоривъ о фокусахъ, разоблачимъ тайну еще одного весьма эффектнаго фокуса, которымъ ловкіе «престидижаторы» часто морочатъ провинціальную публику. Мы говоримъ о такъ наз. «математическомъ ясновидѣніи», «мантевизмѣ», «чтеніи мыслей» и т. п. «нумерахъ», которые пересчисляются въ программахъ подобныхъ сеансовъ. Обыкновенно дѣло происходитъ такъ. Фокусникъ выводитъ на эстраду свою «ясновидящую», усаживаетъ ее въ кресло и, для вящшей благонадежности, завязываетъ ей глаза. Затѣмъ онъ съ аспидной доской спускается въ зрительный залъ, ходитъ между креселъ и предлагаетъ зрителямъ самимъ написать какое-нибудь число, меньшее 1000. Когда число написано, фокусникъ, оставаясь попрежнему среди зрителей, въ партерѣ, обращается къ ясновидящей съ просьбой назвать это число и та тотчасъ же выкрикиваетъ съ эстрады это число, словно читая его на аспидной доскѣ.

Озадаченные зрители пишутъ второе, третье число, въ оба глаза слѣдятъ за фокусникомъ и «ясновидящей», но ничего подозрительнаго не открываютъ: фокусникъ спрашиваетъ, — «ясновидящая» отвѣчаетъ.

Ни ясновидѣнія, ни внушенія, ни чтенія мыслей здѣсь однако никакого нѣтъ. Просто-на-просто фокусникъ и его помощница твердо выучили уже приведенную выше табличку: обращаясь къ «ясновидящей» съ просьбой отгадать число, онъ ловко составляетъ фразу какъ разъ изъ такихъ словъ, первыя согласныя которыхъ означаютъ написанное зрителемъ число. Вотъ и вся тайна этого эффектнаго фокуса.

Теперь вы и сами сможете произвести его, разъ Колумбово яйцо уже поставлено. Вамъ необходимо только изощриться въ составленіи соотвѣтствующихъ фразъ, въ быстромъ и ловкомъ подыскиваніи подходящихъ словъ, начинающихся съ нужной согласной. Но прежде всего вы должны какъ-нибудь дать знать вашей «ясновидящей», сколько цифръ въ угадываемомъ числѣ: одна, двѣ или три. Дѣло въ томъ, что въ расчетъ принимаются всегда только первыя слова фразы, и «ясновидящая» должна знать, гдѣ остановиться.

Для этого фокусникъ обыкновенно пользуется опять-таки разъ навсегда условленными словами. Если задумано однозначное число, то онъ начинаетъ свое обращеніе къ помощницѣ всегда съ односложныхъ словечекъ: «А» или: «Вотъ». Если написано двузначное число, то вопросъ начинается двусложнымъ обращеніемъ: «Ну-ка» или: «Еще». Наконецъ, при трехзначномъ числѣ никакихъ условныхъ обращеній не употребляютъ, такъ что отсутствіе въ началѣ вопроса перечисленныхъ четырехъ словъ указываетъ, что число трехзначное.

Теперь продѣлаемъ нѣсколько опытовъ. Пусть написано число 34; фокусникъ спрашиваетъ ясновидящую: «Ну-ка, какое число написалъ этотъ господинъ?» Слово «ну-ка» указываетъ, что число двузначное; **какое** = 3, а **число** = 4.

Пусть написано 92. Фокусникъ спрашиваетъ: «Еще разъ, дружокъ, отгадай-ка!» Еще—двѣ цифры; **разъ** = 9; **дружокъ** = 2.

Написано 4. Фраза: «А что написалъ теперь этотъ господинъ? (А—одна цифра, **что** = 4).

Написано 207. Обращеніе: «Ты не устала? Какое же число сейчасъ написано?» (Отсутствіе условныхъ обращеній указываетъ на то, что число трехзначное; **ты** = 2, **не** = 0; **устала** = 7).

Какъ видитъ читатель изъ этихъ примѣровъ, составленіе подходящихъ обращеній—дѣло не Богъ вѣсть какое трудное; навыкъ пріобрѣтается легко.

Часто фокусники нѣсколько видоизмѣняютъ опытъ: просятъ зрителя обозначить какое-либо дѣйствіе между двумя числами, и мнимая ясновидящая сразу произноситъ результатъ (если только онъ не больше тысячи). Зритель пишетъ, напримѣръ, 11×14. И ясновидящая сразу отвѣчаетъ 154. Зная секретъ «мантевизма», легко догадаться, что при этомъ фокусникъ сначала мысленно производитъ въ умѣ нужныя дѣйствія и затѣмъ, извѣстнымъ уже способомъ, сообщаетъ помощницѣ результатъ. Въ нашемъ примѣрѣ онъ можетъ обратиться къ ней такъ: «Голубушка, прикинь, что составляется изъ этихъ чиселъ?» (г = 1; п = 5; ч = 4).

Можно еще болѣе изумить публику, если заставить «ясновидящую» сообщать не только конечный результатъ, но и указать, отъ какого дѣйствія онъ полученъ—сложенія, вычитанія, умноженія или дѣленія. Для этого опять-таки прибѣгаютъ къ условнымъ обозначеніямъ. Именно, связываютъ съ тѣмъ или инымъ дѣйствіемъ опредѣленныя буквы, на этотъ разъ—гласныя: *о* обозначаетъ сложеніе, *ы* или *и* вычитаніе, *ѣ* или *е*—*дѣле*ніе, и, наконецъ *у*—*у*множеніе.

Подобнымъ же образомъ «ясновидящая» можетъ угадывать, напр., день или годъ рожденія. Кто-нибудь изъ публики пишетъ эту дату на доскѣ, фокусникъ проситъ помощницу прочесть написанное и получаетъ вполнѣ точный отвѣтъ. Здѣсь число мѣсяца и годъ рожденія сообщаются ей, какъ и всякія другія числа, а мѣсяцъ—условной цифрой. Напр. 25 марта = = 25 и 3, такъ какъ мартъ третій мѣсяцъ.

Хотя гг. фокусники будутъ на насъ въ большой претензіи за то, что мы разоблачаемъ ихъ незамысловатыя профессіональныя тайны, мы все же разсмотримъ еще одинъ фокусъ. Разъ мы забрели въ этотъ уголокъ «царства смекалки», то ужъ осмотримъ его повнимательнѣе.

Отгадываніе камней домино.

Этотъ салонный фокусъ обычно также выдаютъ за «чтеніе мыслей». Но «чтеніе мыслей» здѣсь такого сорта, что вы сами можете осуществить его, не обладая никакими сверхъестественными способностями.

Вы заявляете своимъ гостямъ, что беретесь отгадать задуманный ими камень домино, находясь съ завязанными глазами въ дальнемъ углу залы или даже въ сосѣдней комнатѣ. И дѣйствительно, когда гости, выбравъ изъ груды камней любую костяшку, спрашиваютъ васъ, какой это камень,—вы сразу же отвѣчаете, хотя не можете видѣть не только камни, но даже гостей.

Объясненіе фокуса.

У васъ долженъ быть сообщникъ среди гостей, съ которымъ вы предварительно условились, что личныя и притяжательныя мѣстоименія будутъ означать опредѣленныя числа, именно:

я, мой—1	мы, нашъ—4
ты, твой—2	вы, вашъ—5
онъ, его—3	они, ихъ—6

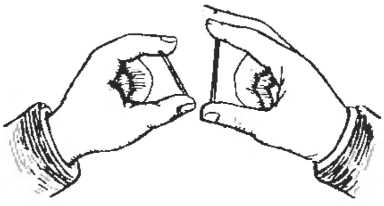
Пусть гости выбрали камень $^4/_3$. Тогда вашъ сообщникъ обращается къ вамъ съ такой фразой: «Мы задумали камень, отгадайте-ка его!» Если нужно «протелеграфировать», напр., $^1/_5$, то вашъ сообщникъ, улучивъ моментъ, вставляетъ такую фразу: «А я думаю. что вы на этотъ разъ не угадаете». Фраза: «Ну, теперь у насъ такіе камни, что тебѣ ихъ не угадать»—означаетъ $^4/_2$ и т. п.

Само собой понятно, что имѣютъ значеніе лишь первыя два мѣстоименія. Для обозначенія бѣлаго поля также выбираютъ какое-нибудь слово, напр. сударь: «отгадайте-ка, сударь, что мы тутъ задумали» будетъ означать $^0/_4$.

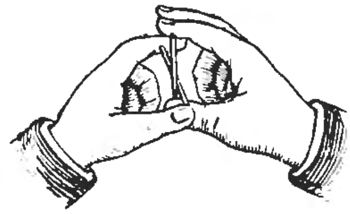
Какъ ни просты секреты этихъ фокусовъ,—ихъ, все же, трудно разгадать. Нужно обладать большой смёткой, чтобы догадаться, къ какой уловкѣ прибѣгъ фокусникъ.

Хитрая механика!

Вотъ еще два фокуса, при ловкомъ исполненіи которыхъ иной можетъ подумать, что здѣсь и въ самомъ дѣлѣ таится какая либо «хитрая механика».



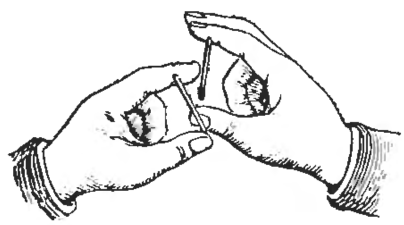
Фиг. 125.



Фиг. 126.

Между указательнымъ и большимъ пальцами каждой руки я держу по спичкѣ,—спичку въ лѣвой рукѣ горизонтально, въ правой вертикально; я приближаю руки другъ къ другу такъ, чтобы спички скрестились (фиг. 125). Теперь я дѣлаю быстрое движеніе руками... и спички опять образують крестъ, но теперь горизонтальная спичка находится по другую сторону вертикальной (фиг. 126). Снова дѣлаю движеніе руками, и спички снова находятся въ первоначальномъ положеніи. Можно повторить этотъ фокусъ нѣсколько разъ, но никто не можетъ понять, какъ это дѣлается.

Этотъ фокусъ, требующій предварительнаго небольшого упражненія, производится слѣдующимъ образомъ. Вертикальная спичка помѣщается головкой внизъ, такъ что послѣдняя покоится на большомъ пальцѣ, въ то время какъ указательный палецъ опирается о другой ея конецъ. При небольшомъ сдавливаніи этихъ пальцевъ спичка пристаетъ къ указательному пальцу. Теперь стоитъ только слегка раздвинуть пальцы, и спичка удерживается однимъ указательнымъ пальцемъ — какъ бы виситъ на немъ (фиг. 127). Черезъ полученное такимъ образомъ маленькій прозоръ между спичкой и большимъ пальцемъ вы быстро и незамѣтно для другихъ вводите и выводите горизонтальную спичку, всякій разъ тотчасъ же закрывая отверстіе.

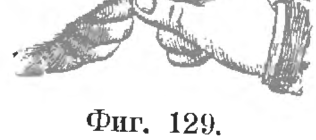


Фиг. 127.

* *
*

По серединѣ двухъ спичекъ проводятъ поперечную черту. Большимъ и указательнымъ пальцами правой руки берутъ спички такъ, чтобы обѣ черты были видны сверху (фиг. 128), вслѣдъ затѣмъ тѣми же пальцами лѣвой руки поворачиваютъ эти спички на полъ-оборота вокругъ ихъ короткой оси (т. е., принимая черту за ось вращенія) такъ, что пальцы правой руки будутъ уже касаться противоположныхъ концовъ спичекъ (фиг. 129). Теперь спрашиваютъ: «черточки — сверху или снизу?» Всякій отвѣтитъ: «снизу», и ошибется, если, поворачивая спички вокругъ ихъ короткой оси, вы въ то же время, въ пальцахъ лѣвой руки, незамѣтно повернете ихъ вокругъ длинной оси (т. е. оси, параллельной длинѣ спичекъ).

Фиг. 128.



Фиг. 129.

Математика, какъ упражненіе въ искусствѣ хорошо говорить.

Цѣнность перевода съ иностраннаго языка заключается въ умѣніи проникать въ тайники мысли, изложенной на чужомъ языкѣ. Цѣнность рисованія состоитъ въ наглядномъ изображеніи точныхъ соотношеній частей и перспективы. Цѣнность естествознанія—въ развитіи независимости мысли. Всѣ эти положенія извѣстны приступающимъ къ изученію пріемовъ краснорѣчія, къ выработкѣ въ себѣ умѣнья говорить плавно, убѣдительно и красиво. Начинающіе свою жизненную карьеру часто говорятъ о пользѣ изученія перечисленныхъ наукъ. Но рѣдко слышно о математическихъ чтеніяхъ и упражненіяхъ, какъ объ образцахъ краснорѣчія. А между тѣмъ математика имѣетъ въ этомъ отношеніи свои несомнѣнныя преимущества передъ всѣми названными науками и искусствами.

Цѣль, къ которой долженъ стремиться говорящій, состоитъ въ томъ, чтобы заставить другихъ сосредоточить все свое вниманіе на мысли и убѣжденіи оратора, заставить ихъ отвлечься отъ ихъ собственной личности. И ни въ одной аудиторіи, можетъ быть, не достигается эта цѣль легче, чѣмъ въ аудиторіи математика.

Сжатое разсужденіе, точное доказательство, изображеніе необходимыхъ выводовъ изъ данныхъ предположеній приковываютъ и сосредоточиваютъ всѣ умственныя силы какъ объясняющаго, такъ и слушающаго.

Въ какихъ иныхъ случаяхъ, изучающій инстинктивно найдетъ легчайшую возможность въ немногахъ словахъ изложить многое? Въ какихъ иныхъ обстоятельствахъ, слѣдовательно, простая, не бьющая на эффектъ, но легкая и красивая форма изложенія будетъ такъ умѣстна и плодотворна, какъ здѣсь? Вычурность и аффектація, какъ результаты дурной привычки рисоваться, не имѣютъ здѣсь мѣста и потому быстро исчезаютъ! Между тѣмъ всѣ другія особенности умѣнья говорить находятъ здѣсь примѣненіе и постепенно развиваются при общемъ и связномъ теченіи мыслей объясняющаго и слушателей.

Одинъ наблюдатель, самъ математикъ, говоритъ, что ему удалось отмѣтить не болѣе двухъ примѣровъ вычурности въ ченія и изложеніи лекцій по математикѣ. И въ обоихъ случаяхъ эта манера исчезла сама собой и незамѣтно. Въ одномъ случаѣ женщина-лекторъ сдѣлала введеніе въ курсъ очень манерно и вычурно, но тотчасъ же невольно перешла на совершенно другой тонъ, такъ какъ слушатели обратили ея вниманіе нѣкоторыми вопросами на сущность предмета и заставили ее собрать всѣ силы, чтобы объяснить все понятно.

Постоянная необходимость объяснительныхъ чертежей пріучаетъ лектора и слушателя также къ иллюстраціи своихъ мыслей.

Эффектъ математическаго краснорѣчія долженъ заключаться въ ясномъ, сжатомъ и точномъ выводѣ изъ извѣстныхъ фактовъ. Къ такимъ пріемамъ и къ такому образу мышленія долженъ пріучаться математикъ-ораторъ.

Было бы, пожалуй, хорошо, еслибы во всѣхъ нашихъ школахъ не только такъ называемыхъ «точныхъ» наукъ, но и въ школахъ или обществахъ, обучающихъ краснорѣчію, было бы написано извѣстное изреченіе Платона: «Пусть не входитъ сюда никто не знакомый съ геометріей!»

Рисунокъ изъ «Margarita Philosophica» (1503 г.). Прежній абакъ и новыя цифры.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

СТРАН.

Книга третья и последняя

Въ царствѣ смекалки.

Е. И. Игнатьевъ

Второе пересмотрѣнное и дополненное изданіе.

Е. И. Игнатьевъ.

ВЪ ЦАРСТВѢ СМЕКАЛКИ

или

АРИѲМЕТИКА ДЛЯ ВСѢХЪ

КНИГА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ.

СО МНОГИМИ РИСУНКАМИ И ЧЕРТЕЖАМИ ВЪ ТЕКСТѢ.

Книга третья

(послѣдняя).

2-е пересмотрѣнное и дополненное изданіе.

ПЕТРОГРАДЪ
1915

Типографія А. С. Суворина. «Новое Время». Эртелевъ пер., 13.

ПРЕДИСЛОВІЕ КО 2-му ИЗДАНІЮ.

Помимо исправленія замѣченныхъ опечатокъ и промаховъ, а также общей редакціонной переработки, настоящее изданіе по сравненію съ первымъ значительно дополнено. Дополненія коснулись главнымъ образомъ свѣдѣній по Теоріи Вѣроятностей. Такъ, введена знаменитая теорія Якова Бернулли въ его собственномъ изложеніи, т. е. данъ переводъ IV и V-ой главъ изъ четвертой части его классическаго сочиненія «*Ars Conjectandi*»; прибавлена глава о рулеткѣ въ Монте-Карло и др. Точно также особенно внимательно пересмотрѣнъ и исправленъ отдѣлъ о счетныхъ машинахъ. Добавлены многіе портреты и рисунки. Словомъ, приложены всѣ усилія, чтобы и это новое изданіе книги нашло такой же благосклонный пріемъ среди широкой публики, какъ и предыдущее.

Петроградъ. 1915.

Нѣкоторыя историческія задачи.

Задача 1-я.

Одно изъ древнѣйшихъ математическихъ развлеченій.

Въ знаменитомъ Британскомъ музеѣ среди «коллекціи Ринда» находится египетскій папирусъ, который считается теперь чуть ли не самымъ древнимъ изъ извѣстныхъ нынѣ руководствъ по математикѣ. Папирусъ этотъ переведенъ Эйзенлоромъ на нѣмецкій языкъ въ 1877 г. Онъ написанъ египтяниномъ Ахмесомъ между 1700 и 2000 годами до Рождества Христова.

Подлинное заглавіе папируса таково:

«*Наставленіе къ пріобрѣтенію знанія всѣхъ тайныхъ вещей*».

Ахмесъ, въ свою очередь, упоминаетъ о томъ, что его книга написана на основаніи еще болѣе древнихъ сочиненій. Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность судить о состояніи математическихъ знаній у древнихъ египтянъ, быть можетъ, за время не менѣе 5 000 лѣтъ до нашихъ дней. Почтенная давность!

«Египетская задача» и замѣтка «Начатки математики на Нилѣ», данныя во второй книгѣ «Въ царствѣ смекалки» (стр. 20 и 22), основаны именно на египетскомъ папирусѣ Ахмеса изъ коллекціи Ринда. Но есть въ этомъ папирусѣ еще одно весьма любопытное мѣсто, надъ разгадкой котораго останавливалось не мало историковъ математики. Вотъ въ чемъ дѣло.

Ахмесъ даетъ **лѣстницу** такихъ 5-ти чиселъ:

7, 49, 343, 2401, 16807.

Рядомъ же съ этими числами стоятъ соотвѣтственно слова:

картина, кошка, мышь, ячмень, мѣра.

И все! Никакихъ дальнѣйшихъ поясненій, никакого ключа къ раскрытію смысла этой задачи папирусъ не даетъ. Что же это за задача?

Прежде всего замѣтимъ, что написанныя выше числа, составляющія *лѣстницу*, суть послѣдовательныя *степени* числа 7. Въ самомъ дѣлѣ, помножая послѣдовательно 7 само на себя одинъ, два, три, четыре и пять разъ и ставя рядомъ соотвѣтствующія слова, какъ въ рукописи Ахмеса, находимъ:

	7 . .	**картина**
$7 \times 7 = 7^2 =$	**49** . .	**кошка**
$7 \times 7 \times 7 = 7^3 =$	**343** . .	**мышь**
$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 =$	**2401** . .	**ячмень**
$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5 =$	**16807** . .	**мѣра**

Основываясь на такомъ сопоставленіи чиселъ и словъ, а также на нѣкоторыхъ позднѣйшихъ математическихъ сочиненіяхъ, ученый оріенталистъ Родэ и извѣстный историкъ математики Канторъ съ весьма большой вѣроятностью рѣшаютъ, что данное мѣсто папируса Ахмеса представляетъ такую задачу:

У нѣкоторыхъ семи лицъ имѣется по семи кошекъ. Каждая кошка съѣдаетъ по семи мышей, каждая мышь съѣдаетъ по семи колосьевъ ячменя, изъ каждаго колоса можетъ выросли по семи мѣръ зерна. Сколько всего предметовъ?

Складывая числа, составляющія *лѣстницу*, получаемъ въ отвѣтъ на вопросъ задачи число *19607*. Число мѣръ зерна (16807), спасаемыхъ всего 49-ю кошками, также весьма велико. Если догадки названныхъ выше ученыхъ вѣрны, то не даромъ, пожалуй, у египтянъ кошка, истребительница мышей, считалась священнымъ животнымъ.

Задачи подобнаго рода могли предлагаться для забавы и для развитія сметки. Слѣдовательно, можно думать, что исторія математическихъ развлеченій также имѣетъ за собой почтенную давность по меньшей мѣрѣ въ 50 вѣковъ.

Только что приведенная древняя задача повторяется въ различныхъ варіантахъ въ разныя времена и у разныхъ народовъ. Нѣкоторые изъ этихъ варіантовъ, замѣчательнѣйшіе въ историческомъ отношеніи, приводятся сейчасъ ниже.

Задача 2-я.

Семь старухъ.

Приблизительно черезъ 3 000 лѣтъ послѣ появленія папируса Ахмеса, а именно въ 1202 году послѣ Р. Х., Леонардъ изъ Пизы (онъ же *Фибоначчи*, или *Фибоначи*) издалъ на латинскомъ языкѣ сочиненіе *Liber abaci*, содержащее въ себѣ всю совокупность тогдашнихъ ариѳметическихъ и алгебраическихъ знаній.

Въ этой книгѣ имѣется, между прочимъ, такая задача:

Семь старухъ отправляются въ Римъ. У каждой старухи по семи муловъ, каждый мулъ несетъ по семи мѣшковъ. въ каждомъ мѣшкѣ по семи хлѣбовъ, въ каждомъ хлѣбѣ по семи ножей, каждый ножъ въ семи ножнахъ. Сколько всего предметовъ?

Рѣшеніе.

Задача отличается отъ Ахмесовой только тѣмъ, что къ пяти числамъ *лѣстницы* Ахмеса надо прибавить еще шестое число, равное семи, повторенному множителемъ 6 разъ, т. е. $7^6 = 117\,649$.

Всего получится $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6 = 137\,256$ предметовъ.

Задача 3-я.

По дорогѣ въ St.-Ives.

Въ 1801 году въ Соединенныхъ Штатахъ Америки вышло 1-е изданіе *Школьной ариѳметики* (Scholar's Arithmetic) Даніила Адамса, пользовавшейся тамъ большимъ распространеніемъ въ началѣ 19-го вѣка. Варіантъ Ахмесовой задачи изложенъ въ этой ариѳметикѣ уже въ такихъ англійскихъ стихахъ:

As I was going to St.-Ives,
I met seven wives;
Every wife had seven sacks;
Every sack had seven cats;
Every cat had seven kits:
Kits, cats, sacks and wives,
How many were going to St.-Ives?

Если попробовать это же передать «школьными стихами» по-русски, получимъ:

Въ Сентъ-Айвзъ какъ-то я шагалъ;
Я семь женщинъ повстрѣчалъ;
И у каждой семь мѣшковъ,
А въ мѣшкахъ по семь котовъ;
При котахъ по семь котятъ.
Сколько всѣхъ придти хотятъ
Въ Сентъ-Айвзъ: женщинъ и мѣшковъ,
И котятокъ, и котовъ?

Рѣшить задачу предоставляемъ читателю. Послѣ двухъ предыдущихъ задачъ рѣшеніе очевидно.

Задача 4-я.

Русская народная задача.

Для нашего читателя, быть можетъ, интересно будетъ узнать, что изъ мрака отдаленнѣйшихъ временъ отголоски задачи Ахмеса перешли также и въ русскій народный эпосъ. Существуетъ русская народная задача о нищихъ (или старцахъ), о которой упоминаетъ П. А. Износковъ въ своемъ докладѣ «о памятникахъ народной математики», прочитанномъ въ 1884 г. въ казанскомъ обществѣ естествоиспытателей. Задачу эту авторъ сообщенія слышалъ въ Казанской губ.

И. Ю. Тимченко въ своихъ примѣчаніяхъ къ русскому переводу «Исторіи элементарной математики» проф. Ф. Кэджори приводитъ эту задачу такъ, какъ она распространена среди населенія Орловской губ.:

Шли семь старцевъ.
У каждаго старца по семи костылей,
На всякомъ костылѣ по семи сучковъ,
На каждомъ сучкѣ по семи кошелей,
Въ каждомъ кошелѣ по семи пироговъ,
А въ каждомъ пирогѣ по семи воробьевъ.
Сколько всего?

Рѣшеніе.

Задача требуетъ опредѣленія числа всѣхъ предметовъ, т. е. старцевъ, костылей, сучковъ, кошелей, пироговъ и воробьевъ. Рѣшеніе, очевидно, дается числомъ $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6$, приведеннымъ нами уже въ задачѣ 2-й (стр. 3).

Интересно отмѣтить, что во всѣхъ четырехъ предыдущихъ задачахъ главную роль играетъ число *семь*. Въ главѣ «о числовыхъ суевѣріяхъ» мы увидимъ, что число это имѣло у различныхъ народовъ особое символическое, священное значеніе. Быть можетъ, раньше, чѣмъ сдѣлаться предметомъ простого развлеченія или развитія народной смекалки, задачи подобнаго рода носили миѳологическій, астрологическій или религіозный характеръ.

Задача 5-я.

Жизнеописаніе Діофанта.

Прохожій! Подъ этимъ камнемъ покоится прахъ Діофанта, умершаго въ преклонныхъ годахъ. $^1/_6$ часть своей продолжительной жизни онъ провелъ въ дѣтствѣ, $^1/_{12}$—въ юности. Слѣдующую затѣмъ $^1/_7$ своей жизни онъ былъ холостымъ. Черезъ пять лѣтъ послѣ его женитьбы у него родился сынъ, доживщій до возраста вдвое меньшаго, чѣмъ лѣта его отца. Черезъ четыре года послѣ смерти сына умеръ и Діофантъ, оплакиваемый родными.—Скажи, если умѣешь считать, въ какомъ возрастѣ онъ умеръ?

Высчитать, что Діофантъ дожилъ до 84-хъ-лѣтняго возраста, не составляетъ особаго труда. Но задача эта имѣетъ спеціальный историческій интересъ. Существуютъ свидѣтельства, что она служила дѣйствительно надгробной эпитафіей надъ прахомъ одного изъ замѣчательнѣйшихъ математиковъ древности, о жизни котораго *только почти и имѣется свѣдѣній, что эта задача.*

Діофантъ былъ совершенно исключительный математикъ послѣдняго періода знаменитой александрійской школы. О времени и мѣстѣ его рожденія, а также о его происхожденіи мы ничего не знаемъ. Предполагаютъ съ нѣкоторой долей вѣроятности, что онъ умеръ около 330 года по Р. Х. Другіе для времени его жизни даютъ дату 325—409 г. по Р. Х. Діофантъ считается родоначальникомъ современной алгебры и занимаетъ въ ряду великихъ греческихъ математиковъ совершенно исключительное мѣсто. Вотъ что говоритъ о немъ проф. Ф. Кэджори (Cajori) въ своей «Исторіи элементарной математики»: «Если бы сочиненія его не были написаны по-гречески, никто и не подозрѣвалъ бы, что они произведенія греческаго ума. Его главное, образцовое произведеніе, «Ариѳметика», написанное, какъ гворятъ, въ 13-ти книгахъ, изъ коихъ только шесть дошли до насъ] проникнуто духомъ, настолько отличнымъ отъ духа великихъ классическихъ сочиненій, написанныхъ во времена Эвклида, насколько чистая геометрія отличается отъ чистаго анализа. Между греками у Діофанта не было ни одного выдающагося предшественника, ни одного выдающагося послѣдователя. Не будь его сочиненій, намъ пришлось бы сказать, что греческій умъ не создалъ въ области алгебры ничего замѣчательнаго. До открытія папируса Ахмеса *Ариѳметика* Діофанта была древнѣйшимъ извѣстнымъ намъ трудомъ по Алгебрѣ».

Задача 6-я (Архимеда).

О числѣ песчинокъ (Псаммитъ).

Задача эта, предложенная и разрѣшенная Архимедомъ (287—212 до Р. Х.), изложена имъ въ формѣ обращенія къ Гелону, сыну Гіерона, тирану города Сиракузъ. Главнѣйшій интересъ ея состоитъ въ томъ, что знаменитый философъ древности показалъ, какъ расширить несовершенную греческую систему счисленія, распространивъ ее на сколь угодно большія числа. Вотъ какъ излагаетъ свою задачу Архимедъ:

Архимедъ.

Нѣкоторые люди, о царь Гелонъ, воображаютъ, что число песчинокъ безконечно велико. Я говорю не о пескѣ, находящемся въ Сиракузахъ или во всей Сациліи, но о пескѣ всей суши, какъ обитаемой, такъ и необитаемой. Другіе признаютъ это число, правда, не неограниченнымъ, но все же думаютъ, что оно больше всякаго задуманнаго числа. Если бы эти люди представили себѣ кучу песку, величиною въ земной шаръ, при чемъ этимъ пескомъ были бы покрыты всѣ моря и всѣ углубленія до вершины высочайшихъ горъ, то, конечно, эти люди тѣмъ болѣе были бы склонны принять, что нѣтъ числа, превосходящаго число песчинокъ въ этой кучѣ.

Я, однако, приведу доказательства, съ которыми и ты согласишься, что я въ состояніи назвать нѣкоторыя числа, не только превосходящія число песчинокъ въ кучѣ, равной земному шару, но даже число песчинокъ въ кучѣ, равной всей вселенной.

Рѣшеніе.

Ты знаешь, конечно, что подъ *вселенной* большинство астрономовъ подразумѣваетъ шаръ, центръ котораго находится въ центрѣ Земли, а радіусъ образуется разстояніемъ между центрами Земли и Солнца. Въ своемъ сочиненіи противъ астрономовъ Аристархъ Самосскій пытается опровергнуть это и доказать, что вселенная составляетъ кратное этой величины. Онъ приходитъ къ выводу, что звѣзды и Солнце неподвижны, тогда какъ Земля вращается вокругъ Солнца по кругу, въ центрѣ котораго стоитъ Солнце [1]). Согласимся, что діаметръ сферы неподвижныхъ звѣздъ относится къ діаметру вселенной, понимаемой въ томъ смыслѣ, какъ это понимаетъ большинство астрономовъ, (т. е. солнечной системы), какъ этотъ послѣдній къ діаметру Земли. Я утверждаю, что если бы существовала песочная куча даже величиною въ Аристархову звѣздную сферу, то и въ этомъ случаѣ я могу привести число, даже превышающее число песчинокъ въ такой воображаемой сферѣ.

---

[1]) Аристархъ, родившійся въ Самосѣ около 270 г. до Р. Х., уже за $1\frac{1}{2}$ тысячи лѣтъ до Коперника, какъ это видно изъ только что приведенныхъ словъ Архимеда, совершенно ясно выразилъ основанія геліоцентрической системы. Изъ его сочиненій сохранилось только одно: «О величинахъ и разстояніяхъ Солнца и Луны».

Предполагаю слѣдующее:

1) *Окружность Земли менѣе 3 милліоновъ стадій* (стадія приблизительно равна нынѣшним 185 метрамъ).

Какъ тебѣ извѣстно, были попытки доказать, что окружность Земли составляетъ около 300.000 стадій [1]; но я превзойду предшественниковъ и приму для нея въ десять разъ большее число.

2) *Солнце больше Земли, а Земля больше Луны.*

Въ этомъ я согласуюсь съ большинствомъ астрономовъ [2].

3) *Поперечникъ Солнца не болѣе, чѣмъ въ 30 разъ, превышаетъ поперечникъ Луны* [3].

4) *Діаметръ Солнца больше, нежели сторона тысячеугольника, вписаннаго въ наибольшій кругъ небесной сферы.*

Это я принимаю по Аристарху, который считаетъ, что видимые размѣры Солнца составляютъ $\frac{1}{720}$ размѣровъ задіакальнаго круга. Я самъ измѣрялъ уголъ, подъ которымъ видно Солнце, но точное измѣреніе этого угла не легко произвести, ибо ни глазъ, ни рука, ни измѣрительные приборы не достаточно надежны. Но здѣсь не мѣсто объ этомъ распространяться. Достаточно только знать, что этотъ уголъ меньше, чѣмъ $\frac{1}{164}$, и больше, чѣмъ $\frac{1}{300}$ прямого угла [4].

На основаніи допущеній 2) и 3) діаметръ Солнца меньше, чѣмъ 30 земныхъ діаметровъ. Поэтому, по допущенію 4, периметръ тысячеугольника, вписаннаго въ одинъ изъ наибольшихъ круговъ небесной сферы, меньше, чѣмъ 30 000 земныхъ діаметровъ. Но если это такъ, то діаметръ вселенной (т. е. согласно Аристарху солнечной системы) меньше 10 000 земныхъ

---

[1]) Эратосѳенъ (отъ 275—194 до Р. Х.), произведшій первое градусное измѣреніе, опредѣлилъ окружность Земли въ 250 000 стадій, однако, неизвѣстно, о какихъ стадіяхъ онъ писалъ—о греческихъ или египетскихъ.

[2]) Согласно вычисленію Аристарха, Солнце въ 7 000 разъ больше Земли, а Луна въ 27 разъ меньше.

[3]) Въ дѣйствительности діаметръ Солнца почти въ 400 разъ больше діаметра Луны.

[4]) Т.-е. заключается между 27′ и 33′; $\frac{1}{164}R = 33'$; $\frac{1}{200}R = 27°$; по измѣреніямъ помощью новѣйшихъ геліометровъ, средній видимый діаметръ Солнца составляетъ около 32′, что ближе къ высшему предѣлу, указываемому Архимедомъ.

діаметровъ; ибо только для правильнаго шестиугольника, діаметръ равенъ $\frac{1}{3}$ периметра, а для всякаго многоугольника діаметръ меньше $\frac{1}{3}$ периметра.

По первому предположенію, окружность Земли меньше 3 милл. стадій; стало быть, діаметръ меньше 1 милл. стадій, такъ какъ діаметръ окружности меньше $\frac{1}{3}$ длины ея. Стало быть, также и діаметръ вселенной меньше, чѣмъ 10 000 милліоновъ стадій.

Допустимъ теперь, что песчинки до того малы, что 10 000 такихъ песчинокъ составляютъ лишь величину одного маковаго зерна. Я приму діаметръ маковаго зерна въ $\frac{1}{40}$ дюйма. Въ одномъ изъ моихъ опытовъ, уже 25 маковыхъ зеренъ, положенныхъ рядомъ по прямой, заняли дюймъ, но я желаю обезпечить свое доказательство противъ всякихъ возраженій.

У насъ (грековъ) существуютъ названія чиселъ лишь до миріады [1] ($10\,000 = 10^4$). Считаемъ мы, однако, и до 10 000 миріадъ ($10^4 \cdot 10^4 = 10^8$). Чтобы пойти еще далѣе, примемъ 10 000 миріадъ (10^8) за единицу второго порядка и возьмемъ ее снова 10 000 миріадъ разъ, то получимъ $10^8 \cdot 10^8 = 10^{8 \cdot 2}$, или единицу третьяго порядка. Точно также можемъ взять 10 000 миріадъ разъ полученную единицу третьяго порядка и получимъ единицу четвертаго порядка ($10^{8 \cdot 3}$) и т. д. $10^{56} = 10^{8 \cdot 7}$ будетъ представлять единицу восьмого порядка, 1 же есть единица перваго порядка.

Теперь вычислимъ, сколько песчинокъ, миріада которыхъ занимаетъ объемъ маковаго зерна, помѣстится въ шарѣ съ діаметромъ, равнымъ дюйму? По нашему предположенію, діаметръ маковаго зерна равняется $\frac{1}{40}$ дюйма, но по извѣстному геометрическому положенію объемы шаровъ относятся, какъ кубы ихъ діаметровъ, стало быть, въ данномъ случаѣ, какъ $1^3 : 40^3 = 1 : 64\,000$. Итакъ, шаръ одного дюйма въ діаметрѣ содержитъ 64 000 маковыхъ зеренъ или 64 000 миріады песчинокъ, т. е. $64 \cdot 10^8$, что меньше, чѣмъ $10 \cdot 10^8 = 10^9$ песчинокъ. Шаръ 100 дюймовъ въ діаметрѣ относится къ шару 1 дюйма

---

[1]) Въ дальнѣйшемъ мы будемъ примѣнять систему изображенія чиселъ при помощи 10 въ извѣстной степени, такъ какъ Архимедовъ способъ выраженія не такъ удобопонятенъ.

въ діаметрѣ (по объему), какъ $100^3 : 1^3$, или $10^6 : 1$. Итакъ, песочный шаръ 100 д. въ діаметрѣ, очевидно, содержитъ не болѣе $10^6 \cdot 10 \cdot 10^8$ песчинокъ.

Шаръ 10 000 дюймовъ въ діаметрѣ содержитъ не болѣе $10^{21} = 10 \cdot 10^4 \cdot 10^{16}$, т. е. десяти миріадъ единицъ нашего третьяго порядка.

Но такъ какъ стадія меньше 10 000 дюймовъ, то ясно, что песочный шаръ, съ діаметромъ въ стадію, содержитъ менѣе 10 миріадъ единицъ третьяго порядка.

Точно такимъ же образомъ найдемъ, что шаръ съ діаметромъ въ 10^2 стадій содержитъ меньше чѣмъ $1000 \cdot 10^{8 \cdot 3}$ песчинъ

въ	10^4.	$10 \cdot 10^{8 \cdot 4}$
»	10^6.	$10^6 \cdot 10 \cdot 10^{8 \cdot 4}$
»	10^8.	$10 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 5}$
»	10^{10}.	$1000 \cdot 10^{8 \cdot 6}$

Но 10^{10} есть 10 000 милліоновъ стадій. Такъ какъ діаметръ вселенной меньше 10 000 милліоновъ стадій; стало быть, вселенная содержитъ песчинокъ менѣе, нежели $1000 \cdot 10^{8 \cdot 6}$. Далѣе. Діаметръ Аристарховой сферы неподвижныхъ звѣздъ заключаетъ въ себѣ столько разъ діаметръ вселенной (10 000 милліоновъ стадій), сколько разъ въ этомъ послѣднемъ содержится діаметръ Земли (1 милліонъ стадій), и выходитъ, что сфера Аристарха (неподвижныхъ звѣздъ) относится къ сферѣ вселенной, какъ $10^{12} : 1$, а стало быть, содержитъ песчинокъ менѣе, чѣмъ 1 000 миріадъ единицъ восьмого порядка

$$1000 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 7} = 10^{63}.$$

Это, царь Гелонъ, можетъ показаться невѣроятнымъ толпѣ и всѣмъ несвѣдущимъ въ математикѣ; но тѣ, которые обладаютъ математическими познаніями и умѣютъ размышлять о разстояніяхъ и величинѣ Земли, Солнца, Луны и всего мірозданія, признаютъ это за доказанное. Поэтому я счелъ не неумѣстнымъ предпринять это изслѣдованіе.

Въ ряду другихъ работъ великаго геометра Сиракузъ разсужденіе о числѣ песчинокъ («Псаммитъ»—по-гречески) занимаетъ сравнительно второстепенное мѣсто. Но и эта небольшая работа,—«нѣсколько размышленій», какъ говоритъ самъ Архимедъ,—даетъ достаточное понятіе о мощи генія этого человѣка. Предъ нами въ простой и наглядной формѣ лежитъ въ сущности изложеніе десятичной системы. Введи только Архимедъ систему помѣстнаго значенія цифръ да... нуль, и дальше некуда идти!... Представляется удивительнымъ, что это открытіе ускользнуло отъ его проницательности. Или же этотъ геній величественно пренебрегалъ всѣмъ тѣмъ, что такъ упрощаетъ и облегчаетъ работу намъ, обыкновеннымъ смертнымъ?

Задача 7-я.

Юридическій вопросъ.

Древніе римляне ничего или почти ничего не сдѣлали для развитія математическихъ наукъ. Они извѣстны болѣе въ области законодательства. Дошедшія до насъ римскія математическія сочиненія носятъ преимущественнно чисто практическій, утилитарный характеръ. Такъ, напримѣръ, поводъ къ составленію ариѳметическихъ задачъ давали римскіе *законы о наслѣдствѣ*. Вотъ одна изъ такихъ дошедшихъ до насъ задачъ.

Нѣкто, умирая, оставилъ жену въ ожиданіи ребенка и сдѣлалъ такое завѣщаніе: въ случаѣ рожденія сына отдать ему $^2/_3$ оставленнаго имущества, а $^1/_3$ матери. Въ случаѣ же рожденія дочери—она должна получить $^1/_3$, а мать $^2/_3$ имущества. Вдова завѣщателя родила близнецовъ, мальчика и дѣвочку. Какъ раздѣлить имущество, чтобы удовлетворить условіямъ завѣщанія?

Рѣшеніе.

Задачу эту, представляющую такъ называемый «юридическій казусъ», рѣшилъ, между прочимъ, знаменитый римскій юристъ Сальвіанъ Юліанъ. Рѣшеніе его состоитъ въ томъ, что имущество должно быть раздѣлено на *семь* равныхъ частей. Четыре изъ этихъ частей должны перейти къ сыну, двѣ—къ женѣ и одна къ дочери. Предлагаемъ читателю рѣшить эту задачу на основаніи не юридическихъ, а математическихъ соображеній.

Индусскія задачи.

Индусамъ, какъ утверждаютъ иные, мы обязаны нашей системой письменнаго счисленія и введеніемъ нуля, т. е. открытіями, имѣющими величайшее значеніе въ исторіи развитія математическихъ наукъ. Вообще, въ свое время индусы довели искусство вычисленій до такой степени совершенства, которой не достигалъ ни одинъ изъ ранѣе ихъ жившихъ народовъ. Особенности національнаго склада этого народа отразились и на дошедшихъ до насъ его математическихъ сочиненіяхъ. Послѣднія обыкновенно написаны стихами и часто полны темныхъ и мистическихъ выраженій. Съ другой стороны, задачи, составленныя въ легкой и пріятной стихотворной формѣ и предлагаемыя въ качествѣ загадокъ, были любимымъ развлеченіемъ индусовъ. «Эти задачи,—говоритъ индусскій астрономъ Брахмагупта (конецъ 6-го и начало 7-го вѣка по Р. Х.),—предлагаются просто для забавы. Мудрый человѣкъ можетъ придумать тысячу другихъ, или можетъ рѣшать задачи, предложенныя ему другими по изложеннымъ здѣсь правиламъ. Какъ Солнце затмеваетъ звѣзды своимъ блескомъ, такъ и ученый человѣкъ можетъ затмить славу другихъ въ народныхъ собраніяхъ, предлагая алгебраическія задачи и, тѣмъ болѣе, рѣшая ихъ».

Въ сочиненіи *Сиддхантасиромани* («Вѣнецъ астрономической системы»), написанномъ индусскимъ ученымъ Бхаскара Ачарья въ 1150 году, есть двѣ главы, посвященныя спеціально математикѣ. Одна глава носитъ заглавіе *Лилавати*, т. е. «прекрасная» (въ смыслѣ «благородная наука»), а другая—*Виджа-Ганита*, т. е. «извлеченіе корней». Вотъ примѣръ задачъ, взятыхъ изъ этихъ главъ.

Задача 8-я.

Прекрасная дѣва съ блестящими очами, ты, которая знаешь, какъ правильно примѣнять методъ инверсіи, скажи мнѣ величину такого числа, которое, будучи умножено на 3, затѣмъ увеличено на $^3/_4$ этого произведенія, раздѣлено на 7, уменьшено на $^1/_3$ частнаго, умножено само на себя, уменьшено на 52, послѣ извлеченія квадратнаго корня, прибавленія 8 и дѣленія на 10 дастъ число 2?

Рѣшеніе.

Указаніе на способъ рѣшенія заключается въ самомъ условіи задачи. Предполагается, что дѣвушка умѣетъ правильно примѣнять *методъ инверсіи*». Инверсіей называется такой способъ рѣшенія задачи, при которомъ начинають съ послѣдняго числа задачи, такъ сказать, «съ конца», и идутъ въ *обратномъ* порядкѣ, производя дѣйствія также *обратныя* названнымъ въ задачѣ.

Такъ, напримѣръ, въ данной задачѣ отправляемся отъ числа два и идемъ къ искомому числу слѣдующимъ путемъ:

2	множимъ на	10,	получаемъ	20;
Отъ 20	отнимаемъ	8	»	12;
12	множимъ на	12 [1])	»	144;
Къ 144	прибавляемъ	52	»	196;
Изъ 196	извлекаемъ квадратный корень		»	14;
Отъ 14	беремъ	$\frac{3}{2}$	»	21;
21	множимъ на	7	»	147;
Отъ 147	беремъ	$\frac{4}{7}$	»	84;
84	дѣлимъ на	3	»	28.

---

[1]) Т. е. *возвышаемъ въ квадратъ* ($12 \times 12 = 12^2$). Дѣйствіе, обратное *извлеченію квадратнаго корня*.

28 и есть искомое число. То же рѣшеніе при системѣ нашихъ обозначеній можно написать въ одной строкѣ:

$$(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196;\ \sqrt{196} = 14;\ 14 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7 \cdot \frac{4}{7} : 3 = 28.$$

Древнѣйшій изъ извѣстныхъ намъ индусскихъ математиковъ (V-й вѣкъ по Р. Х.) *Арьябхатта* объясняетъ способъ инверсіи съ такой характерной краткостью:

«Умноженіе становится дѣленіемъ, дѣленіе становится умноженіемъ. Прибыль обращается въ убытокъ, убытокъ въ прибыль; инверсія».

Тотъ же Арьябхатта предлагаетъ въ ряду прочихъ и нижеслѣдующую «практическую» для индусовъ задачу:

Задача 9-я.

Цѣна рабыни.

Шестнадцатилѣтняя дѣвушка-рабыня стоитъ 32 нишка (индусская монета). Что стоитъ рабыня 20-ти лѣтъ?

Рѣшеніе.

Рѣшеніе этой любопытной для насъ по условію задачи не отличается само по себѣ ничѣмъ особеннымъ. Но исторически оно доказываетъ, что индусы уже не позже V-го вѣка были хорошо знакомы съ такъ называемымъ у насъ «тройнымъ правиломъ», равно какъ, кстати сказать, были знакомы и со многими другими «правилами» рѣшеній задачъ, до сихъ поръ еще часто безъ нужды обременяющими наши учебные курсы.

Въ частности при рѣшеніи задачи о цѣнѣ рабыни Арьябхатта руководствуется началомъ «обратной пропорціи», потому что, говоритъ онъ, «стоимость живыхъ существъ (рабовъ и скота) устанавливается сообразно ихъ возрасту»,—чѣмъ старше, тѣмъ дешевле.

На такомъ основаніи выходитъ, что если 16-лѣтняя рабыня стоитъ 32 нишка (индусская монета), то однолѣтняя будетъ стоить въ 16 разъ больше, т. е. 32×16 нишка, а 20-лѣтняя въ 20 разъ меньше послѣдней суммы, т. е. $\frac{32 \times 16}{20} = 25\frac{3}{5}$ нишка.

Приведемъ еще двѣ индусскія задачи, въ которыхъ говорится о болѣе веселыхъ и безобидныхъ вещахъ, чѣмъ о продажѣ человѣка человѣкомъ. Обѣ задачи взяты изъ сочиненій уже упомянутаго нами Бгаскары. Рѣшеніе ихъ, особенно для лицъ, знакомыхъ съ квадратными уравненіями, не представляетъ ни малѣйшаго затрудненія. Поэтому приводимъ только отвѣты.

Задача 10-я.

Пчелы.

Пчелы въ числѣ, равномъ корню квадратному изъ половины роя, слетѣли на кустъ жасмина. $^8/_9$ всего роя осталось дома. Одна пчела-самка летаетъ вокругъ цвѣтка лотоса. Тамъ жужжитъ неосторожный самецъ, привлеченный сладкимъ запахомъ цвѣтка и теперь заключенный внутри его. Скажи мнѣ число пчелъ?

Отвѣтъ: 72.

Задача 11-я.

Обезьяны.

Стая обезьянъ забавлялась. Одна восьмая часть въ квадратѣ ихъ бѣгала по лѣсу. Остальныя 12 кричали на верхушкѣ холма. Скажи мнѣ число обезьянъ?

Отвѣтъ: 16 или 48.

Задачи Ньютона.

Выше приведены нѣкоторыя задачи, по тѣмъ или инымъ причинамъ извѣстныя въ исторіи развитія математическихъ знаній. Было бы нѣсколько страннымъ обойти при этомъ молчаніемъ нѣкоторыя задачи великаго Ньютона, хотя они далеко не носятъ характера общедоступности.

Въ первые девять лѣтъ своей профессуры въ Кэмбриджскомъ университетѣ Ньютонъ читалъ лекціи по алгебрѣ. Лекціи эти подъ заглавіемъ «*Arithmetica Universalis*» («Всеобщая Ариѳметика») были опубликованы Уистономъ (Whiston) въ 1707 году. По многочисленности входящихъ въ нихъ задачъ можно судить, что великій теоретикъ и пролагатель новыхъ путей въ математикѣ прекрасно сознавалъ развивательное значеніе чисто практическихъ задачъ. Объ этомъ онъ и самъ говоритъ въ своей «Ариѳметикѣ»: «Я показалъ выше рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ, такъ какъ при изученіи наукъ примѣры полезнѣе правилъ» («In scientiis enim addiscendis prosunt exempla magis quam praecepta»).

Слѣдующія сейчасъ двѣ задачи можно считать самыми извѣстными изъ Ньютоновскихъ задачъ. Для рѣшенія ихъ мало одной хотя бы и самой быстрой сообразительности, а необходима еще нѣкоторая математическая подготовка, охватывающая, впрочемъ, только знаніе квадратныхъ уравненій и первыя ступени неопредѣленнаго анализа. Предполагая, что только такой читатель заинтересуется этими задачами серьезно, мы даемъ ихъ рѣшеніе, не входя въ подробности.

Задача 12-я.

Быки на лугу.

На лугу, площадь котораго равна $3\frac{1}{2}$ акрамъ, пасутся въ продолженіе 4 недѣль 12 быковъ и за это время съѣдаютъ какъ ту траву, что была раньше, такъ и ту, что подростала во все это время равномѣрно. На другомъ лугу, площадь котораго равна 10 акрамъ, пасутся въ продолженіе 9 недѣль 21 бықъ и также съѣдаютъ какъ ту траву, что была раньше, такъ и ту, что подростала во все это время равномѣрно. Сколько нужно пустить быковъ на третій лугъ, площадь котораго равна 24 акрамъ, чтобы они въ продолженіе 18 недѣль съѣли какъ ту траву, что на немъ есть, такъ и ту, которая будетъ подростать во все это время равномѣрно?

Примѣчаніе. Предполагается, что высота травы на всѣхъ трехъ лугахъ до выгона на нихъ быковъ одинакова, и что ростъ травы на всѣхъ трехъ лугахъ за одинъ день одинаковъ.

Рѣшеніе.

Рѣшеніе, наиболѣе быстро приводящее къ цѣли, требуетъ введенія *новыхъ вспомогательныхъ неизвѣстныхъ.* Поэтому обозначимъ искомое число быковъ черезъ x; пусть y есть первоначальная высота травы на лугахъ и пусть на всѣхъ трехъ лугахъ трава подростаетъ ежедневно на z. Тогда количества травы (по объему), съѣденныя быками на трехъ лугахъ, выразятся соотвѣтственно черезъ:

$$3^1/_3(y+7\cdot 4z);\quad 10(y+7\cdot 9z);\quad 24(y+7\cdot 18z).$$

Слѣдовательно, одинъ быкъ съѣдалъ за одинъ день на каждомъ лугу соотвѣтственно травы (по объему):

$$\frac{3^1/_3(y+7\cdot 4z)}{12\cdot 7\cdot 4};\quad \frac{10(y+7\cdot 9z)}{21\cdot 7\cdot 9};\quad \frac{24(y+7\cdot 18z)}{x\cdot 7\cdot 18}.$$

Отсюда имѣемъ два уравненія:

$$\frac{10(y+28z)}{3\cdot 12\cdot 7\cdot 4}=\frac{10(y+63z)}{21\cdot 7\cdot 9}=\frac{24(y+126z)}{x\cdot 7\cdot 18}$$

или

$$\frac{5(y+28z)}{16}=\frac{5(y+63z)}{21}=\frac{12(y+126z)}{2x}.$$

Изъ уравненія

$$\frac{5(y+28z)}{16}=\frac{5(y+63z)}{21}$$

имѣемъ: $y=84z$.

Подставивъ это значеніе y въ уравненіе

$$\frac{5(y+28z)}{16}=\frac{12(y+126z)}{2x},$$

находимъ, что $x=36$.

Итакъ, на третій лугъ нужно пустить 36 быковъ.

Задача 13-я.

Глубина колодца.

Камень падаетъ въ колодецъ. Опредѣлить глубину колодца по звуку, происходящему отъ удара камня о дно.

Рѣшеніе.

Если обозначить черезъ x глубину колодца и затѣмъ условиться, что камень проходитъ пространство a во время b, а звукъ то же пространство во время d, что время отъ начала паденія камня до получаемаго ухомъ звука отъ его удара о дно есть t, то рѣшеніе задачи приводитъ къ квадратному уравненію

$$x^2 - \frac{2adt + ab^2}{d^2}x + \frac{a^2t^2}{d^2} = 0.$$

Для нахожденія отвѣта для каждаго частнаго случая необходимо знать законы свободнаго паденія тѣлъ и скорость распространенія звука.

Къ приведеннымъ задачамъ прибавимъ еще слѣдующую, взятую изъ англійскаго сборника за 1742 годъ («Miscellany of Mathematical Problems»).

Задача остроумна по условію и рѣшается сравнительно просто. Изъ вышеуказаннаго сборника она перешла во многіе задачники и руководства.

Задача 14-я.

Кто на комъ женатъ?

Трое крестьянъ, Иванъ, Петръ и Алексѣй, пришли на рынокъ со своими женами: Марьей, Екатериной и Анной. Кто на комъ женатъ, намъ неизвѣстно. Узнать это на основаніи такихъ соображеній: каждое изъ этихъ 6-ти лицъ заплатило за каждый купленный предметъ столько копѣекъ, сколько предметовъ оно купило. Каждый мужчина истратилъ на 63 копѣйки больше своей жены. Кромѣ того, Иванъ купилъ 23-мя предметами больше Катерины, а Петръ 11-ю предметами больше Марьи.

Рѣшеніе.

Если одинъ изъ мужчинъ купилъ, скажемъ, x предметовъ, то по условію задачи онъ заплатилъ за нихъ x^2 коп. Если его жена купила y предметовъ, то она заплатила за нихъ y^2 коп. Разница $x^2-y^2=63$, но $x^2-y^2=(x+y)\,(x-y)$, т. е. $(x+y)\,(x-y)=63$.

Числа $x+y$ и $x-y$ найдемъ, разложивъ 63 на два цѣлыхъ множителя; но $63=3^2\cdot 7$, и разложеніе возможно на три манеры: 63×1, 21×3, 9×7, откуда ур-нія

$$x_1+y_1=63 \qquad x_2+y_2=21 \qquad x_3+y_3=9$$
$$x_1-y_1=1 \qquad x_2-y_2=3 \qquad x_3-y_3=7.$$

Ихъ рѣшенія:

$$x_1=32,\ y_1=31;\ x_2=12,\ y_2=9;\ x_3=8,\ y_3=1.$$

Отыскиваемъ тѣ значенія x и y, разность которыхъ $=23$, и находимъ x_1 и y_2; слѣдовательно, 32 предмета куплено Иваномъ, а 9—Катериною, и т. д. Такимъ образомъ, имѣемъ слѣдующія комбинаціи

Иванъ	32	Петръ	12	Алексѣй	8
Анна	31	Катерина	9	Марья	1

Русскія задачи.

О состояніи и развитіи математическихъ знаній на Руси въ ея древнѣйшій періодъ неизвѣстно почти ничего. Въ «Русской Правдѣ» Ярослава есть, положимъ, статья съ такимъ расчисленіемъ: «А отъ 20 овецъ и отъ двою приплода на 12 лѣтъ—90 000 овецъ» и т. д. Вычисленіе стоимости приплода, или прибытка, и получаемыхъ отъ скота продуктовъ вѣрны и доказываютъ, что составители «Русской Правды» были знакомы съ умноженіемъ и дѣленіемъ. Но въ общемъ есть основанія думать, что о какихъ бы то ни было самостоятельныхъ шагахъ ни въ одной области математики въ Россіи говорить не приходится чуть ли не до 18-го или даже 19-го вѣка. Немногочисленныя дошедшія до настоящихъ дней математическія рукописи служатъ тому убѣдительнымъ доказательствомъ.

Такъ, въ своихъ извѣстныхъ примѣчаніяхъ къ «Исторіи Государства Россійскаго» Карамзинъ говоритъ, что въ его распоряженіи была рукопись геометріи XVII вѣка подъ заглавіемъ: «*Книга именуемая геометрія или землемѣрія радиксомъ и цыркулемъ*». За геометріей слѣдуетъ: «книга *о сошномъ и вытномъ* письмѣ»; потомъ рукописная ариѳметика, озаглавленная: «книга рекома по-гречески *Ариѳметика*, а по-нѣмецки *Алгоризма*, а по-русски *цифирная счетная мудрость*». Въ предисловіи книги говорится:

«Сиръ, сынъ Асиноровъ, мужъ мудръ бысть: сій же написа численную сію философію финическими письмены, яко же онъ мудрый глаголетъ, яко безплотна сущи начала, тѣлеса же преминующая.—Безъ сея книги не единъ философъ, ни дохтуръ не можетъ быти а хто сію мудрость знаетъ, можетъ быть у государя въ великой чести и въ жалованіи; по сей мудрости гости (купцы) по государствамъ торгуютъ, и во всякихъ товарѣхъ и въ торгѣхъ силу знаютъ, и во всякихъ вѣсѣхъ и въ мѣрахъ и въ земномъ верстаніи и въ морскомъ теченіи зело искусны, и счетъ изъ всякаго числа перечню знаютъ».

Изъ памятниковъ русской старинной математической литературы въ настоящее время имѣются шесть математическихъ рукописей въ Императорской публичной библіотекѣ, шесть въ Румянцевскомъ музеѣ, одна въ книгохранилищахъ Чудова монастыря, одна въ библіотекѣ общества любителей древней письменности. Вотъ, напр., содержаніе рукописной ариѳметики (рукопись № 681) Румянцевскаго музея:

Рукопись имѣетъ слѣдующее заглавіе: «Пятая мудрость въ семи великихъ мудростѣхъ нарицается Ариѳметика». Изложеніе ариѳметики раздѣлено на статьи, а статьи распадаются на нумерованныя отдѣленія, называемыя *строками*, отвѣчающими нашимъ дѣленіямъ на главы и параграфы. Вотъ содержаніе: *Первая статья отъ числа.* Нюмерація или считаніе словесемъ и начертаніе числомъ цыфирнымъ. *Другая статья*—адитсіе или считаніе—наше сложеніе; статья именуется сютракіе—по нашему вычитаніе; *статья мюлтипликасіе*, или умноженіе числу всякому; *статья дивизіе или дѣловая*; указъ како костьми считати; *статья адитіе или счетная костьми или пѣнязи. Статья костьми мултипликасіе* или умножальная. *Статья сюбстаксіе* костьми или выниманіе. Статья *дѣловая* костьми, дивизіе или росчитаніе. *Указъ о дощаномъ счетѣ. Указъ како класти костьми* сошную кладь. Статья о вѣсѣхъ и о мѣрахъ *московскаго государства русскіе земли.* Статья о вѣсѣхъ и о мѣрахъ нѣмецкіе земли. Статья французскіе земли о денежномъ счетѣ ливонскомъ, виницейскомъ и флоренсхомъ».

Потомъ идетъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе въ *вѣсахъ и въ мѣрахъ и въ деньгахъ*, или по современному: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе именованныхъ чиселъ. «*Статья численная* о *всякихъ доляхъ*; *уменьшеніе долямъ:* сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе дробей; потомъ *статья стройная въ цѣлыхъ и въ доляхъ всякихъ. Статья тройная въ доляхъ. Статья дѣловая; статья торговая; статья о прикупахъ*; о накладѣхъ счетъ; статья спрашиваемая въ тройной строкѣ; статья спрашиваемая во времени. Статья ростовая и добычная; статья о нечисти во всякихъ овощахъ и въ товарахъ; *статіа фальшивая или сбойливая статіа мѣновая* въ торгу. Статіа торговая складная; статіа торговая складная съ прикащики и др., о деньгахъ въ кучѣ увѣдати; о плотникѣхъ (задача); *о яйцахъ* (задача); о хожденіи юношей трехъ зерньщиковъ.

Способъ изложенія въ рукописи строго догматическій. Правила предлагаются въ формѣ предписанія или рецепта, не содержащаго даже намека на указаніе мотивовъ и основаній. Примѣры идутъ: одни тотчасъ за изложеніемъ правила, другіе наоборотъ. Вотъ образчикъ преподанія правила сокращенія дробей:

«Уменьшеніе долямъ». Когда оставляются въ дѣловой великія доли въ числахъ ибо надобе ихъ сводить въ невеликія числа. Смотри возьму остатковъ въ доляхъ 40, а дѣловой перечень (дѣлитель) 60 и ты поставь еще $^{40}/_{60}$ и прежъ оными у обоихъ чиселъ 0 ино станетъ $^{4}/_{6}$; да смотри льзяли оба числа верхнія и нижнія во единъ дѣлъ раздѣлити и ты дѣли какъ на два придетъ $^{2}/_{3}$ т. е. двѣ трети».

Относительно употребляемыхъ въ рукописи знаковъ должно замѣтить, что употребленіе арабскихъ цифръ не вытѣснило церковно-славянскихъ знаковъ, такъ статья о «нюмерасіи или счисленіи числомъ цыфирнымъ» начинается съ перевода первыхъ девяти церковно-славянскихъ знаковъ на употребляемыя нами цифры. Въ примѣрахъ съ отвлеченными числами исключительно употребляются цифры; въ именованныхъ — употребляются смѣшанно церковно-славянскіе знаки и цифры.

Въ Императорской публичной библіотекѣ есть рукописная ариѳметика, гдѣ упомянуть годъ, когда писалась рукопись. Она озаглавлена такъ: «Книга, глаголемая ариѳметика, пятая изъ седьми мудростей наука. Начата бысть писати отъ созданія міра въ лѣто 7199 года, индикта 14, круга солнечнаго 3, луннаго 17; отъ рождества по плоти единосущнаго отцу Слова 1691 года; справнаго луннаго слова **О**, а ключевого пасхальнаго **Ф**, мѣсяца Іуніа 28 дня».

«Увѣщеваніе» и предисловіе въ этой рукописи написаны стихами, часть которыхъ посвящена восхваленію счета и нуля, называемаго «*ономъ*».

Да увѣстся о семъ, яко ариѳметика
Девяти чиселъ, девяти и статей наука,
Десятое же мѣсто *ономъ* исполняетъ,
Своего числа мѣсто просто сохраняетъ.

Кому либо въ счетѣ необрѣтатися
Ту есть станетъ *Онъ* ему же не считатися,
Разумѣй, идѣ же *Онъ* мѣсто порожже есть:
Тако въ статьяхъ десятья науки нѣсть!

Точію вмѣсто того поставки различны.
Въ строкахъ считаніе славяномъ не обычны:
Тѣхъ поставокъ подробно и счести,
Кто ихъ навыкнетъ, можетъ вся подъ солнцемъ счести.

Итакъ, въ то время какъ въ Западной Европѣ создавались «Principia mathematica» и «Arithmetica universalis» Ньютона, когда блестящая плеяда математиковъ раздвигала все шире и шире всѣ области естествознанія, россійскіе «цыфирные грамотеи» все еще перебивались пережитками отдаленнаго средневѣковья. Математическіе курсы и сочиненія, стоящіе на болѣе высокомъ уровнѣ знаній, начинають появляться на Руси только послѣ Петра Великаго. Однимъ изъ первыхъ и замѣчательнѣйшихъ учебниковъ ариѳметики, по которому учились наши прапрадѣды, былъ учебникъ Л. Магницкаго, изданный въ 1703 г. Приводимъ изъ него двѣ нижеслѣдующія задачи.

Задача 15-я.

Отвѣтъ учителя.

Вопроси нѣкто учителя нѣкоего глаголя: повѣждь ми колико имаши учениковъ у себе во училищи, понеже имамъ сына отдати во училище: и хощу увѣдати о числѣ учениковъ твоихъ? Учитель же отвѣщавъ рече ему: аще придетъ ми учениковъ толико же, елико имамъ, и полтолика, и четвертая часть, еще же и твой сынъ, и тогда будетъ у мене учениковъ 100. Вопросивый же удивлся отвѣту его отиде, и начатъ изобрѣтати.

Рѣшеніе.

Задача представляетъ, очевидно, варіантъ извѣстной задачи о стадѣ гусей, данной нами въ 1 части нашей книги. Отвѣтомъ на задачу служитъ число 36.

Нѣкоторыя старорусскія мѣры и выраженія.

Въ условіяхъ слѣдующихъ задачъ встрѣчаются слова, врядъ ли понятныя многимъ изъ современныхъ читателей. Приводимъ ихъ здѣсь для удобства въ особой табличкѣ:

1 алтынъ = 3 копѣйки = 6 денегъ

1 копѣйка = 2 деньги = 4 полушки = $^1/_2$ гроша

1 гривна = 10 копѣекъ.

пѣнязь (польская монета) = копѣйка
полтаражды значитъ $1^1/_2$
полтретья » $2^1/_2$
полчетвертажды » $3^1/_2$
полпята » $4^1/_2$ и т. д.

Задача 16-я.

Недогадливый купецъ.

Нѣкій человѣкъ продаде коня за 156 рублевъ, раскаявся же купецъ нача отдавати продавцу глаголя: яко нѣсть мнѣ лѣть взяти сицеваго коня недостойнаго таковыя высокія цѣны; продавецъ же предложи ему иную куплю глаголя: аще ти мнится велика цѣна сему коню быти, убо купи токмо гвоздіе ихже сей конь имать въ подковахъ своихъ ногъ, коня же возми за тою куплею въ даръ себѣ. А гвоздей во всякомъ подковѣ по шести, и за единъ гвоздь даждь ми едину полушку, за другій же двѣ полушки, а за третій копѣйку, и тако всѣ гвозди купи. Купецъ же видя толь малу цѣну и коня хотя въ даръ себѣ взяти: обѣщася тако цѣну ему платити, чая не больше 10 рублевъ за гвоздіе дати. И вѣдателно есть: коликимъ купецъ онъ проторговался?

Рѣшеніе.

Купецъ дѣйствительно «проторговался» очень сильно, такъ какъ за гвозди ему приходится заплатить

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\ldots + 2^{23} \text{ полушекъ,}$$

что составитъ 41 787 руб. $3^3/_4$ коп.!

Задача опять таки принадлежитъ къ типу уже извѣстныхъ намъ задачъ, рѣшающихся прогрессіей (см., напр., «Въ Царствѣ смекалки», книга 1-я, стр. 120; книга 2-я, стр. 70 и слѣд.).

Вообще же говоря, всѣ почти задачи въ руководствѣ Магницкаго носятъ характеръ простыхъ переводовъ съ иностранныхъ руководствъ. Бо̀льшую самостоятельность въ обработкѣ матерьяла проявилъ артиллеріи штыкъ-юнкеръ Ефимъ Войтяховскій, издавшій курсъ математики въ 1820 году.

Вотъ полный заголовокъ этой книги: «Полный курсъ чистой математики, сочиненный артиллеріи штыкъ-юнкеромъ и математики партикулярнымъ учителемъ Ефимомъ Войтяховскимъ, въ пользу и употребленіе юношества и упражняющихся въ математикѣ». 4 тома, изд. 1820 г.

Задачи курса Войтяховскаго болѣе переработаны и приспособлены къ русскому кругозору, а нѣкоторыя изъ нихъ положительно остроумны, иногда, впрочемъ, до игривости, сбивающейся на «раешникъ». Не обходится въ иныхъ изъ нихъ и безъ сатиры, предметомъ которой обыкновенно избираются въ силу условій времени французы. Вотъ нѣсколько задачъ изъ курса Войтяховскаго. Рѣшенія ихъ незамысловаты, такъ что даемъ только отвѣты.

Задача 17-я.

Богатство мадамы.

Нововыѣзжей въ Россію Французской Мадамѣ вздумалось цѣнить свое богатство въ чемоданѣ: новой выдумки нарядное фуро и праздничный чепецъ а ла фигаро; оцѣнщикъ былъ Русакъ, сказалъ Мадамѣ такъ: богатства твоего первая вещь фуро вполчетверта дороже чепца фигаро; вообщежъ стоютъ не съ половиною четыре алтына, но настоящая имъ цѣна только сего половина; спрашивается каждой вещи цѣна, съ чѣмъ Француженка къ Россамъ привезена.

Отвѣтъ. Чепецъ «а ла фигаро» стоитъ $1^1/_2$ коп., а нарядное фуро $5^1/_4$ коп.

Задача 18-я.

Богатство Гасконца.

У прiѣзжаго Гасконца оцѣнили богатство: модной жилетъ съ поношеннымъ фракомъ въ три алтына безъ полушки, но фракъ вполтретья дороже жилета; спрашивается каждой вещи цѣна?

Отвѣтъ. Цѣна фрака $6^1/_4$ коп., жилета $2^1/_2$ коп.

Задача 19-я.

Веселый французъ.

Веселый Французъ пришедъ въ трактиръ съ неизвѣстною суммою своего богатства, занялъ у содержателя столько денегъ, сколько у себя имѣлъ; изъ сей суммы издержалъ 1 рубль. Съ остаткомъ пришелъ въ другой трактиръ, гдѣ опять занявши столько сколько имѣлъ, издержалъ въ ономъ также 1 рубль; потомъ пришедъ въ третiй и четвертый трактиръ учинилъ тоже, наконецъ по выходѣ изъ четвертаго трактира не имѣлъ ничего; спрашивается количество его денегъ.

Отвѣтъ. $93^3/_4$ коп.

Задача 20-я.

Куплено сукна полтораждны полтретья аршина, заплачено полчетвертажды полпята рубли; спрашивается, сколько должно заплатить за полсемажды полдевята аршина того же сукна?

Отвѣтъ. 232 руб. 5 коп. Задачу эту, говорятъ, любилъ предлагать на экзаменахъ покойный Императоръ Николай I-й.

Задача 21-я.

Дѣлежъ.

4 путешественника: купецъ съ дочерью, да крестьянинъ съ женою нашли безъ полушки 9 алтынъ

да лапти, изъ коихъ крестьянкѣ дали грошъ безъ полушки да лапти, а остальныя деньги раздѣлили между собой такъ: купеческая дочь взяла вполтора больше крестьянина, а купецъ вполтретья больше крестьянина; спрашивается, сколько которому досталось?

Отвѣтъ. Крестьянинъ получилъ 5 коп., дочь купца $7^1/_2$ коп., купецъ $12^1/_2$ коп.

Задача 22-я.

Мѣна.

Крестьянинъ мѣнялъ зайцевъ на домашнихъ курицъ, бралъ за всякихъ двухъ зайцовъ по три курицы; каждая курица снесла яицъ третью часть противъ числа всѣхъ курицъ. Крестьянинъ, продавая яйцы, бралъ за каждыя девять яицъ по столько копѣекъ, сколько каждая курица яицъ снесла, за которыя выручилъ онъ 24 алтына; спрашивается число куръ и зайцовъ?

Отвѣтъ. 12 зайцевъ и 18 куръ.

Послѣдующіе составители нашихъ ариѳметическихъ учебниковъ и задачниковъ не развивали идеи Войтяховскаго—предлагать задачи и примѣры въ легкой, доступной и даже забавной формѣ. Объ этомъ надо пожалѣть.

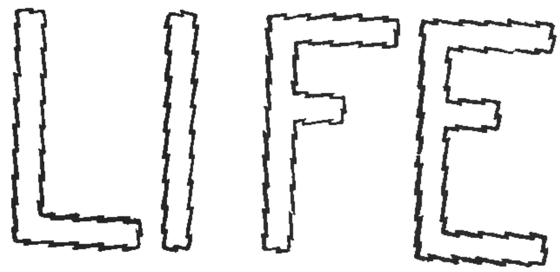
Иллюзіи зрѣнія.

Большая часть такъ называемыхъ иллюзій (обмановъ) зрѣнія извѣстны въ теченіе многихъ столѣтій,—и многіе изъ нихъ остаются необъяснимыми еще по сей день. Новые типы зрительныхъ обмановъ такъ рѣдки, что можно, пожалуй, считать эту любопытную область исчерпанной. Лишь изрѣдка случается наталкиваться на совершенно новый родъ зрительныхъ иллюзій, неизвѣстный нашимъ предкамъ. Къ числу ихъ, между прочимъ, принадлежитъ та, которая описана во второмъ томѣ (стран. 15 и сл.) настоящей хрестоматіи—это кажущаяся непараллельность буквъ въ словѣ Life и мнимая спираль на клѣтчатомъ фонѣ.

Объяснить, въ силу какихъ причинъ получаются подобные обманы зрѣнія, мы не можемъ. Вотъ почему тѣмъ интереснѣе будетъ подробно прослѣдить за процессомъ, съ помощью котораго рисовальщикъ достигаетъ этихъ удивительныхъ иллюзій зрѣнія. Беремъ то же слово «Life».

Фиг. 1 даетъ буквы, поставленныя совершенно прямо; но очертанія ихъ выведены зубчатой линіей, при чемъ вершины зубцовъ лежатъ на линіяхъ, строго параллельныхъ горизонтальному и вертикальному краямъ бумаги.

На фиг. 2 часть промежуточныхъ звеньевъ зубчатыхъ линій удалена, остальные же штрихи оставлены на своихъ мѣстахъ. Уже здѣсь замѣчается легкій наклонъ буквъ.

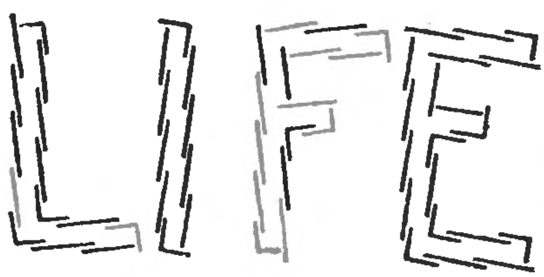


Фиг. 1.

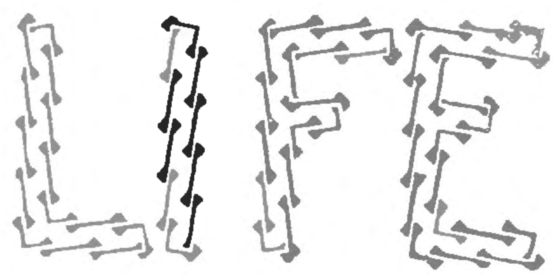
Фиг. 2.

На фиг. 3 каждый штрихъ удлиненъ вдвое.

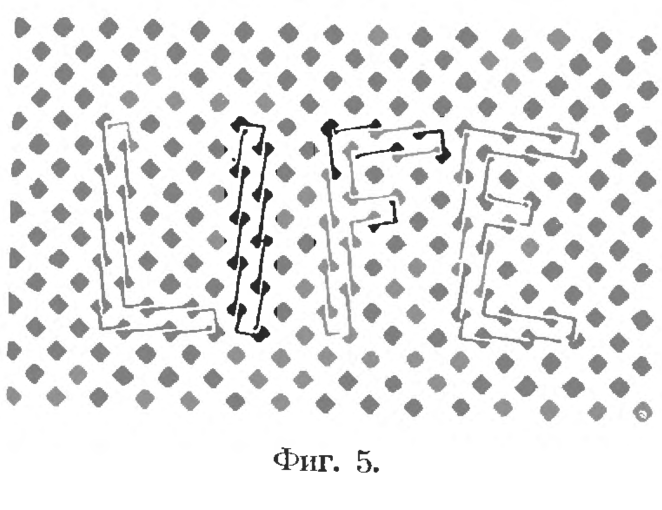
На фиг. 4-й къ концамъ каждаго штриха пририсованъ черный треугольникъ. Здѣсь иллюзія выступаетъ уже съ полной отчетливостью.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



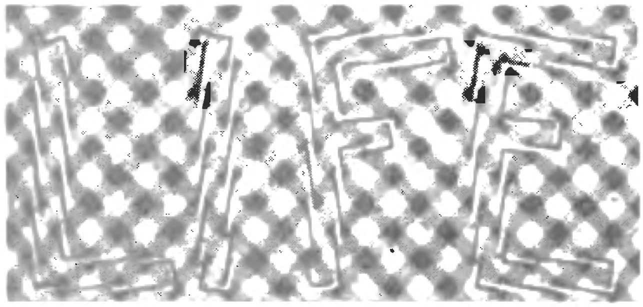
Фиг. 5.

На фиг. 5 все свободное поле между литерами заполнено черными квадратиками, расположенными косыми рядами.

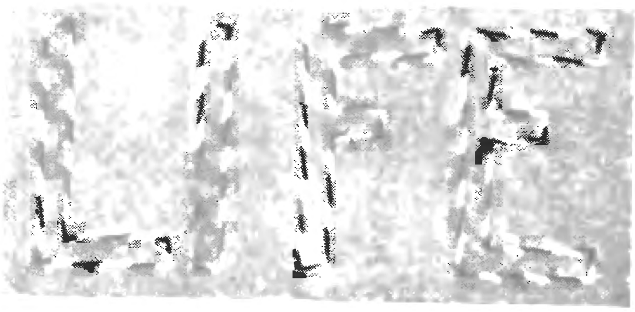
На фиг. 6 промежутки между черными квадратиками заполнены сѣрыми квадратиками—и иллюзія достигаетъ наибольшей разительности.

Фиг. 7 наглядно показываетъ, насколько ослабляется иллюзія съ удаленіемъ клѣтчатаго черно-сѣро-бѣлаго фона.

Иллюзіи съ концентрическими кругами построены приблизительно по тому же типу. Разница въ томъ, что косые прямолинейные штрихи замѣняютъ здѣсь эксцентричными дугами окружностей бо̀льшаго радіуса. Отъ направленія этихъ маленькихъ дугъ и зависитъ окончательный эффектъ,—то впечатлѣніе, которое производятъ на насъ концентрическія окружности. Какія необычайныя метаморфозы могутъ при этомъ происходить съ ними, лучше всего доказываютъ приложенные здѣсь рисунки.

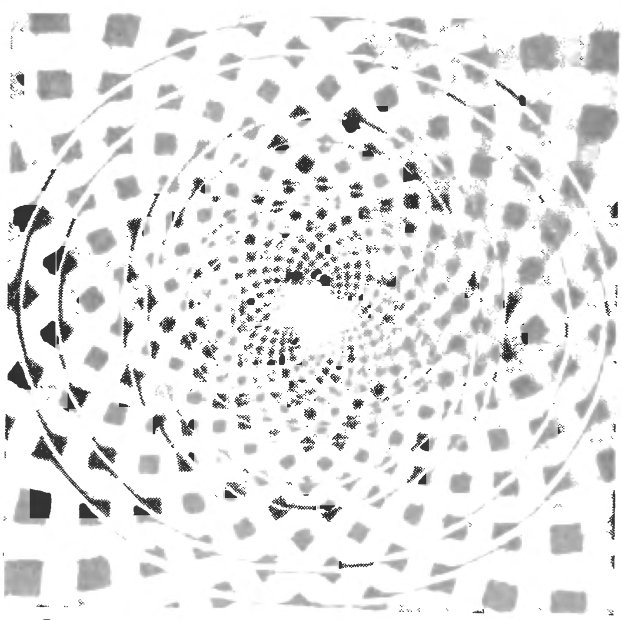


Фиг. 6.

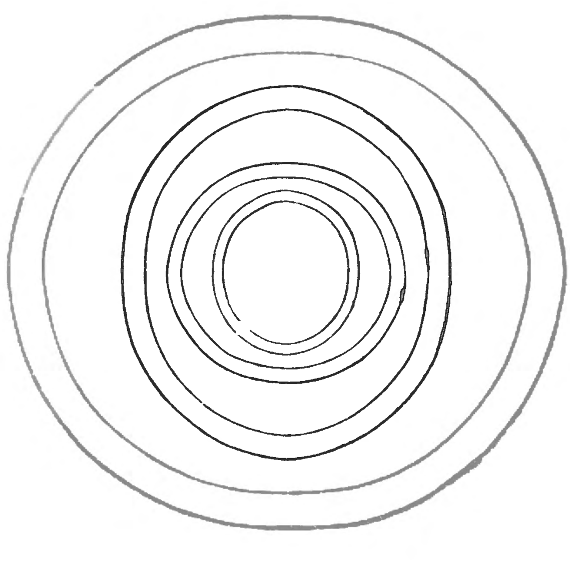


Фиг. 7.

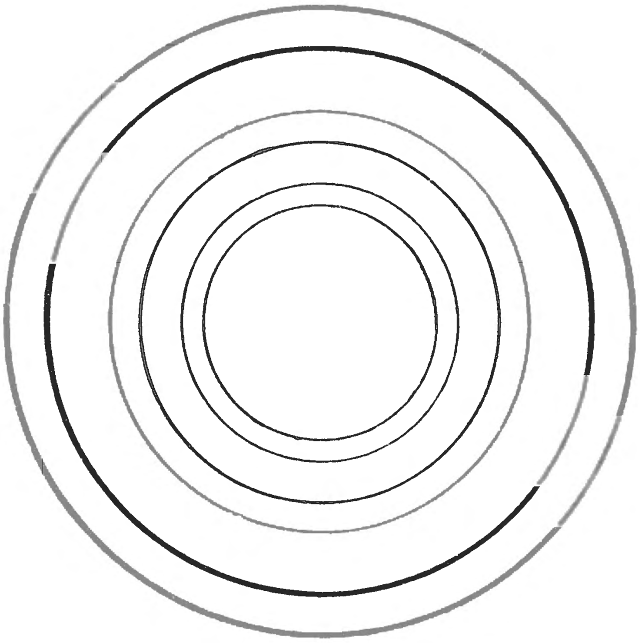
На фиг. 8 вы отчетливо видите серію вложенныхъ другъ



Фиг. 8.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

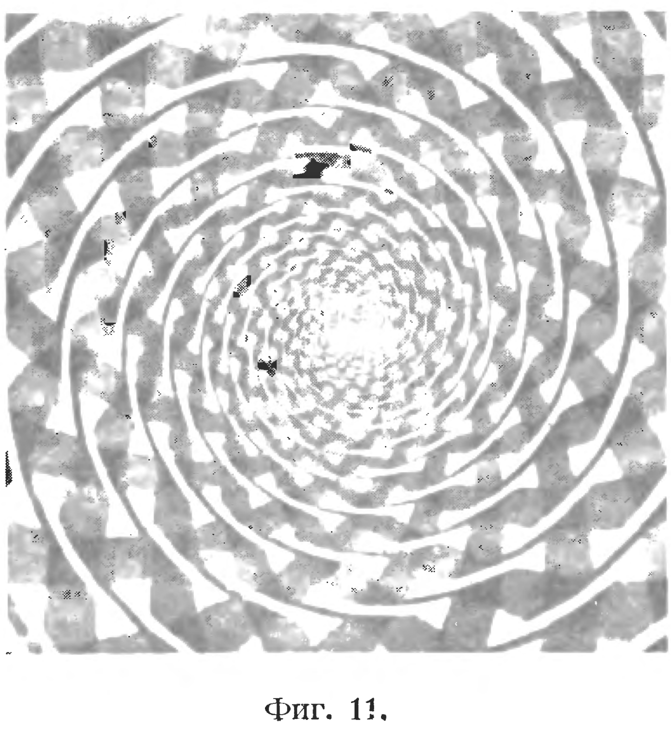
въ друга сплющенныхъ окружностей, — какъ это изображено на фиг. 9. А между тѣмъ при помощи циркуля легко убѣдиться, что передъ вами рядъ строго - концентрическихъ окружностей, какъ это начерчено на фиг. 10.

На фиг. 11 концентрическіе круги кажутся спиралью, съ концентрическими завитками. На фиг. 12 эти завитки какъ будто становятся съ каждымъ оборотомъ все шире и шире, - чего на самомъ дѣлѣ, конечно, нѣтъ.

Еще оригинальнѣе спираль фиг. 13,—она то разжимается, то суживается, и, глядя на нее, никакъ не можешь себѣ представить, чтобы это были строго-концентрическія окружности.

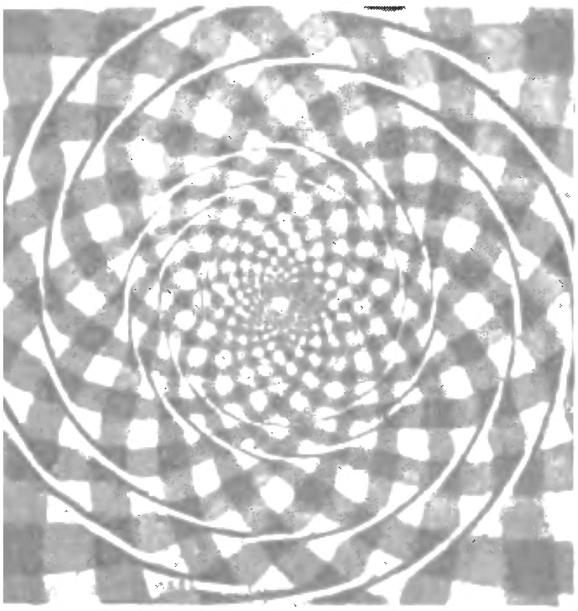
Самый поразительный эффектъ производитъ фиг. 14: передъ вами совершенно ясно вырисовывается рядъ квадратовъ съ закругленными углами! А между тѣмъ это опять-таки совершенно правильныя окружности.

На фиг. 15 концентрическія окружности принимаютъ обликъ какой-то совершенно неправильной, запутанной кривой.

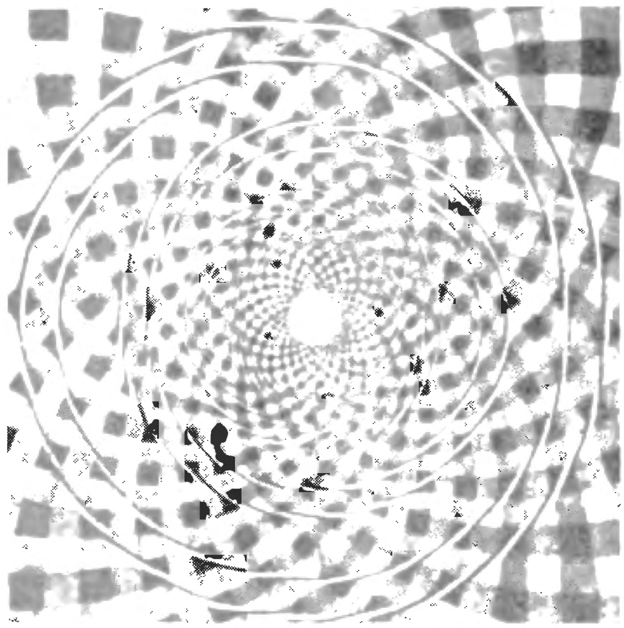


Фиг. 11.

Любопытно отмѣтить двѣ особенности описанныхъ здѣсь оптическихъ иллюзій. Въ противоположность всѣмъ остальнымъ типамъ иллюзій, эффектъ здѣсь не только не ослабляется при продолжительномъ разсматриваніи, но, напротивъ, еще усили-

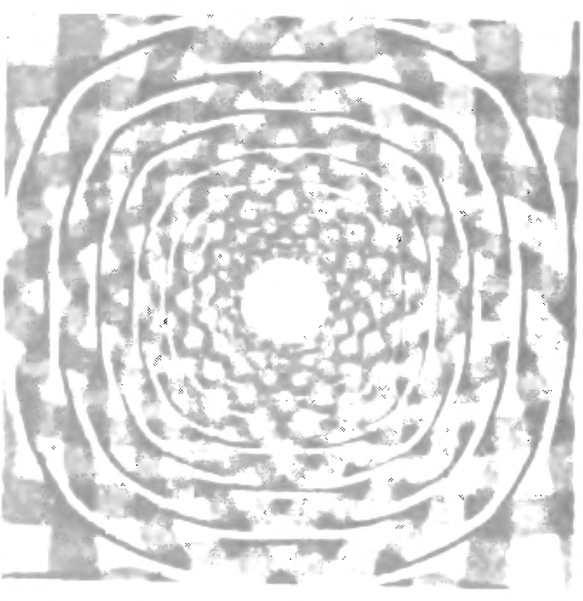


Фиг. 12.

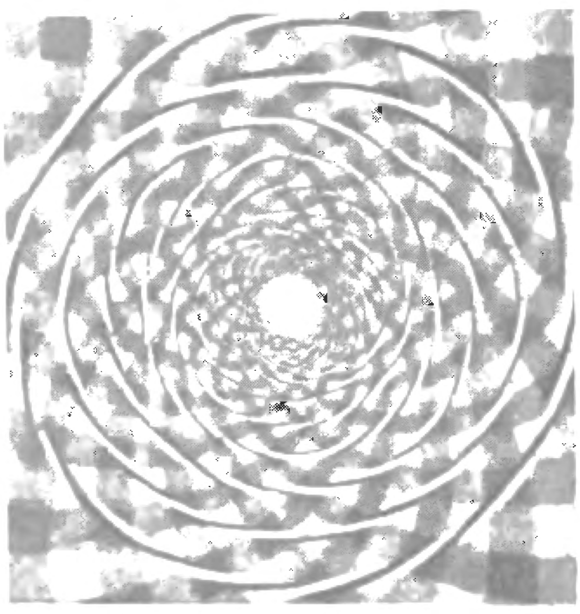


Фиг. 13.

вается. Вы можете смотрѣть на рисунки цѣлые часы,—и спирали все же не превратятся для вась въ концентрическіе круги.



Фиг. 14.



Фиг. 15.

Другая особенность—это усиленіе эффекта съ приближеніемъ рисунка къ глазу. При удаленіи отъ глаза отдѣльные косые штрихи начинаютъ расплываться, уклонъ ихъ стушевывается—и основная причина иллюзіи отпадаетъ.

Очень забавно производить слѣдующій опытъ: показавъ кому-нибудь одинъ изъ этихъ рисунковъ, попросить обвести контуры фигуры на прозрачной бумагѣ. Разсматривая потомъ отдѣльно свой собственный чертежъ, рисовавшій положительно не вѣритъ своимъ глазамъ.

Задачи-шутки.

Есть не мало задачъ-шутокъ, основанныхъ на такъ называемомъ «гипнозѣ» словъ или обозначеній, вѣрнѣе же говоря,— на томъ или иномъ «отводѣ глазъ». Постановка вопроса, а затѣмъ «разрѣшеніе» его бываютъ иногда столь искусно разсчитаны на отвлеченіе вниманія слушателя въ другую сторону, что послѣднему часто бываетъ трудно не поддаться, а хладнокровно сообразить, въ чемъ секретъ. Въ дополненіе къ разнымъ задачамъ-шуткамъ, приведеннымъ нами въ предыдущихъ томахъ настоящей книги, даемъ здѣсь для образца нѣсколько «гипнотическихъ» задачъ.

Задача 23-я.

Искусное размѣщеніе.

Можно ли размѣстить 11 лошадей въ 10-ти стойлахъ такъ, чтобы въ каждомъ стойлѣ было всего по одной лошади?

Всякій скажетъ, что невозможно: для одиннадцатой лошади недостанетъ стойла. Но не угодно ли убѣдиться, что при нѣкоторомъ искусствѣ это «вполнѣ возможно».

Въ самомъ дѣлѣ, помѣстимъ временно одиннадцатую лошадь въ первое стойло:

2 л.	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	

и затѣмъ станемъ помѣщать остальныхъ лошадей по одной въ каждое стойло. Тогда въ первомъ стойлѣ окажутся двѣ лошади, третью лошадь мы помѣстимъ во второе стойло, четвертую—въ третье и т. д Десятая лошадь займетъ девятое стойло, и останется лишь перевести 11-ую лошадь изъ перваго стойла въ свободное десятое.

Рѣшеніе.

Весь прямо ошеломляющій иныхъ эффектъ этой задачи-шутки зиждется на *гипнозѣ словъ*, которому почти невозможно не поддаться. Мы такъ увлеклись поисками мѣста для *одиннадцатой* лошади, что совершенно не замѣчаемъ отсутствія *второй* лошади. У насъ есть 1-я, 11-я, 3-я, 4-я, 5-я, 6-я, 7-я, 8-я, 9-я и 10-я лошадь, —но гдѣ же 2-я? Ея отсутствіе замаскиривано цифрой 2 въ первомъ стойлѣ.

Задача 24-я.

Расплатился безъ денегъ.

Въ ресторанъ заходитъ посѣтитель и требуетъ пива. Офиціантъ приноситъ бутылку и готовъ уже раскупорить, какъ вдругъ посѣтитель передумываетъ.

— Дайте мнѣ лучше лимонаду.

— Извольте-съ. Намъ все единственно. И цѣна та же,—отвѣчаетъ оффиціантъ и, унеся пиво, является съ лимонадомъ.

Посѣтитель выпиваетъ лимонадъ и собирается уходить. Его догоняетъ офиціантъ.

— Забыли заплатить-съ!..

— За что?—изумляется посѣтитель.

— За бутылку лимонаду-съ.

— Вы же взяли за нее пиво.

— Тогда извольте заплатить за пиво. Вы и за пиво не заплатили-съ...

— Но вѣдь я не пилъ пива. Вы унесли бутылку нераскупоренной,—невозмутимо отвѣчаетъ посѣтитель, оставляя официанта въ полномъ недоумѣніи.

Задача 25-я.

Дешевая покупка.

Въ часовой магазинъ заходитъ покупатель и проситъ показать ему дорогіе часы. Онъ долго выбираетъ и, наконецъ, останавливаетъ выборъ на солидныхъ дорогихъ часахъ.

— Что стоятъ?

— Двѣсти рублей.

— Хорошо, я беру ихъ. Заверните.

Покупатель собирается уже платить, но вдругъ взглядъ его падаетъ на изящные серебряные часы.

— А эти сколько у васъ стоятъ?

— Эти подешевле будутъ: сто рублей!

— Право, они мнѣ больше нравятся. Заверните.

Покупатель платитъ 100 рублей, беретъ часы и направляется къ выходу. Но затѣмъ снова возвращается.

— Нѣтъ, я передумалъ: рѣшилъ-таки купить тѣ золотые.

— Какъ угодно. Прикажете завернуть.

— Пожалуйста. Они стоятъ двѣсти?

— Да.

— Сто рублей я уже далъ вамъ?

— Да. Съ васъ причитается еще сто.

— Возьмите вмѣсто нихъ эти серебряные часы: вѣдь я купилъ ихъ у васъ за сто рублей...

Рѣшеніе.

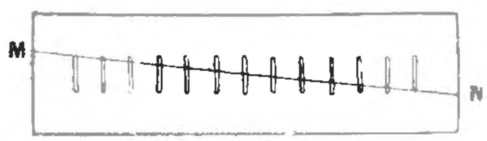
Обѣ задачи, какъ уже сказано, основаны на гипнозѣ словъ. Въ первомъ случаѣ слова «Я не пилъ пива» кажутся достаточнымъ основаніемъ, чтобы не платить за напитокъ. На самомъ же дѣлѣ продавцу совершенно безразлично, какое употребленіе вы дѣлаете изъ вещи,—уничтожаете ее или даете ее въ уплату за другую вещь: вы ее такъ или иначе употребили, значитъ, должны за нее платить.

Въ задачѣ съ часами одни и тѣ же сто рублей идутъ въ уплату два раза: разъ — за серебряные часы, и вторично — за золотые.

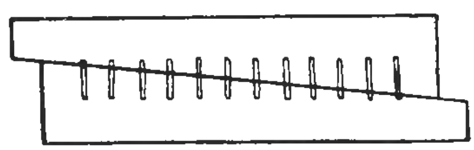
Задача 26-я.

Загадочное исчезновеніе.

Начертите на прямоугольномъ кускѣ картона 13 одинаковыхъ палочекъ, на равномъ разстояніи другъ отъ друга, такъ, какъ показано на фиг. 16-ой. Теперь разрѣжьте прямоугольникъ по косой линіи *MN*, про-



Фиг. 16.



Фиг. 17.

ходящей черезъ верхній конецъ первой палочки и черезъ нижній конецъ послѣдней. Если затѣмъ вы сдвинете обѣ половины такъ, какъ показано на фиг. 17, то замѣтите любопытное явленіе: вмѣсто 13 палочекъ передъ вами окажется всего 12! Одна палочка исчезла безслѣдно. Куда же она дѣвалась?

Рѣшеніе.

Идея задачъ подобнаго рода для нашихъ читателей не нова. Съ ней мы уже встрѣчались во II-ой книгѣ «Въ царствѣ смекалки» при разсмотрѣніи геометрическихъ софизмовъ.

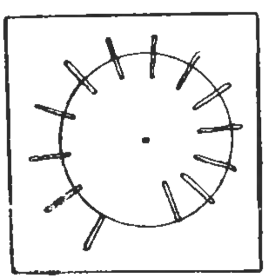
Если вы внимательно разсмотрите оба чертежа и дадите себѣ трудъ сопоставить длину старыхъ и новыхъ палочекъ, то замѣтите, что новыя чуть длиннѣе старыхъ. Тщательное измѣреніе убѣдитъ васъ, а то можно показать и вычисленіемъ, что разница въ длинѣ $=\frac{1}{12}$ долѣ старой палочки, и что, слѣдовательно, исчезнувшая 13-я палочка улетучилась не безслѣдно: она словно растворилась въ 12-ти остальныхъ, удлинивъ каждую изъ нихъ на $\frac{1}{12}$ своей длины.

Понять геометрическую причину того, что при этомъ произошло, очень не трудно. Прямая MN и та прямая, которая проходитъ черезъ верхніе концы всѣхъ палочекъ, образуютъ стороны угла, пересѣченныя рядомъ параллельныхъ на равныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга. Вспомнивъ соотвѣтствующую геометрическую теорему, мы поймемъ, что линія MN отсѣкаетъ отъ второй палочки $\frac{1}{12}$ ея длины, отъ третьей $\frac{2}{12}$, отъ четвертой $\frac{3}{12}$ и т. д.

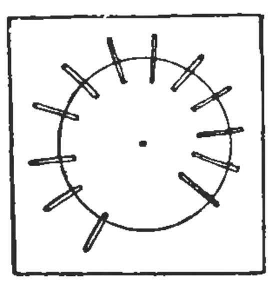
Когда же мы сдвигаемъ обѣ части картона, мы приставляемъ отсѣченный отрѣзокъ каждой палочки (начиная со второй) къ нижней части предыдущей. А такъ какъ каждый отсѣченный отрѣзокъ больше предыдущаго на $\frac{1}{12}$, то каждая палочка вслѣдствіе этой операціи должна удлиниться на $\frac{1}{12}$ своей длины, и всѣхъ палочекъ должно получиться 12.

На глазъ это удлиненіе незамѣтно, такъ что исчезновеніе 13-й палочки на первый взглядъ представляется довольно загадочнымъ.

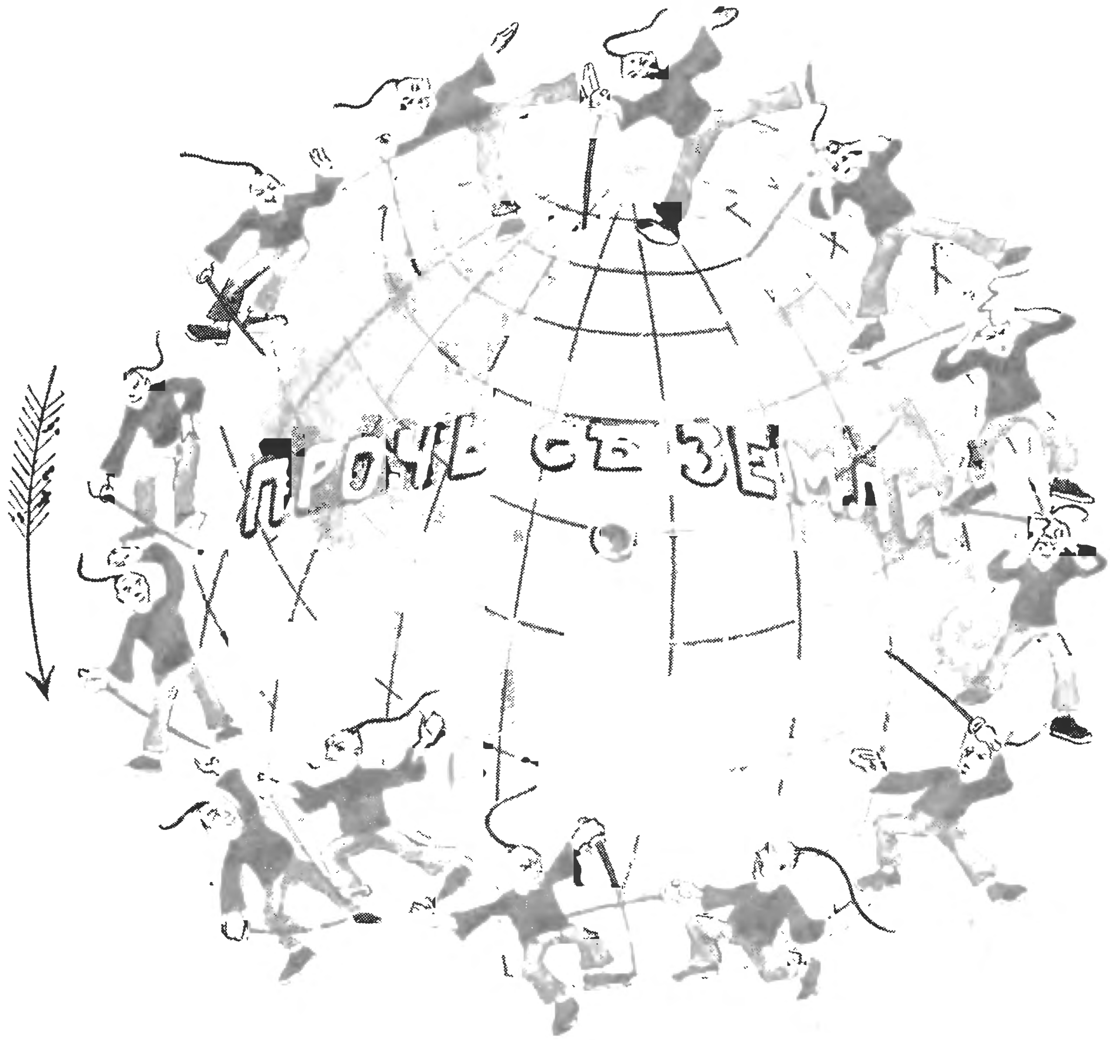
Чтобы усилить эффектъ, можно расположить палочки по кругу, какъ показано на фиг. 18-й. Если вырѣзать внутренній кругъ и укрѣпить его въ центрѣ такъ, чтобы онъ могъ вращаться, то поворотомъ круга на небольшой уголъ мы опять достигаемъ исчезновенія одной палочки (фиг. 19).



Фиг. 18.



Фиг. 19.

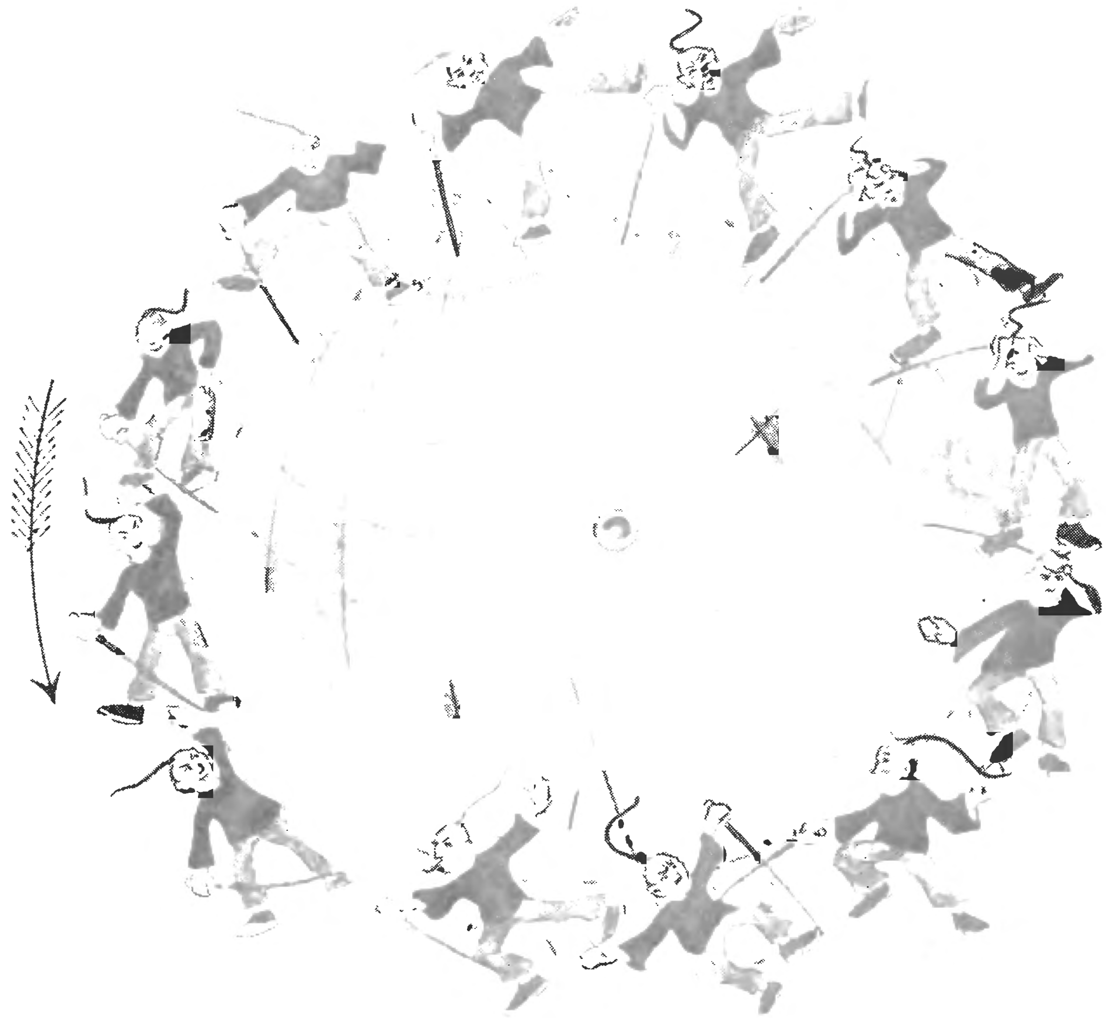


Фиг. 20.

Задача 27-я.

Куда дѣвался китаецъ?

На только что разсмотрѣнномъ принципѣ основана остроумная игрушка-задача, изображенная на фиг. 20-й. Вы видите земной шаръ, по краямъ котораго художникъ размѣстилъ 13 китайцевъ въ весьма воинственныхъ позахъ. Внутренній дискъ вырѣзанъ и можетъ вращаться вокругъ своего центра. И вотъ, слегка повернувъ этотъ кругъ, вы уничтожаете одного китайца (фиг. 21): вмѣсто прежнихъ 13, передъ вами уже всего 12 сыновъ Небесной Имперіи! Тотъ китаецъ, который находился внутри круга и такъ воинственно наступалъ на своего компатріота, безслѣдно улетучился!..



Фиг. 21.

Исчезновенiе китайца заставило бы васъ долго ломать голову, если бы вы не познакомились съ разсмотрѣнными выше схематическими примѣрами. А теперь дѣло ясно: онъ «растворился» въ дюжинѣ своихъ соотечественниковъ, какъ раньше «растворялась» у насъ простая палочка.

Надо отдать справедливость рисовальщику: не мало потребовалось остроумiя и терпѣнiя, чтобы достичь такого эффекта!

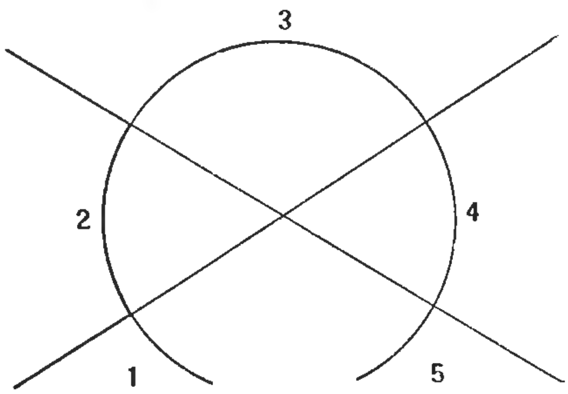
Задача 28-я.

Разрубить подкову.

Двумя ударами топора разрубить подкову на шесть частей, не перемѣщая частей послѣ перваго удара.

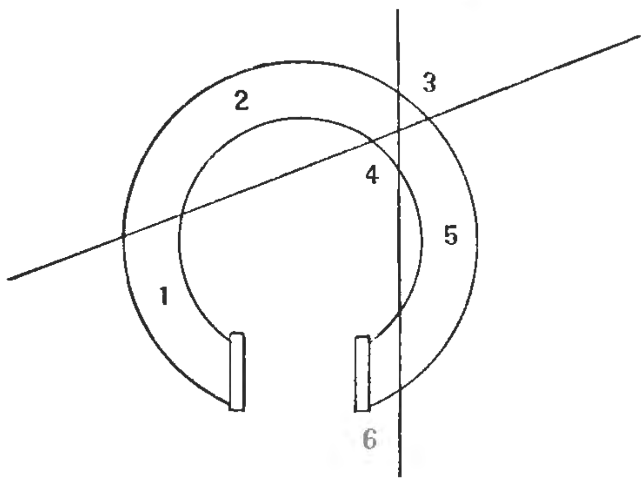
Рѣшеніе.

Если вы начертите подкову въ видѣ одиночной дугообразной линіи,—какъ это обыкновенно и дѣлаютъ, то сколько бы вы ни ломали голову, вамъ не удастся разрѣзать ее двумя прямыми больше, чѣмъ на 5 частей (фиг. 22).



Фиг. 22.

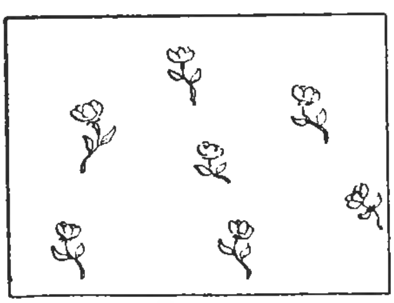
Другое дѣло, если вы начертите подкову въ видѣ двухъ параллельныхъ кривыхъ,—т. е. дадите фигурѣ ширину, какъ оно и есть на самомъ дѣлѣ. Тогда, послѣ нѣсколькихъ пробъ, вы нападете на вѣрное рѣшеніе задачи — разрѣжете подкову двумя прямыми на 6 частей (фиг. 23).



Фиг. 23.

Задача 29-я.

7 розъ.

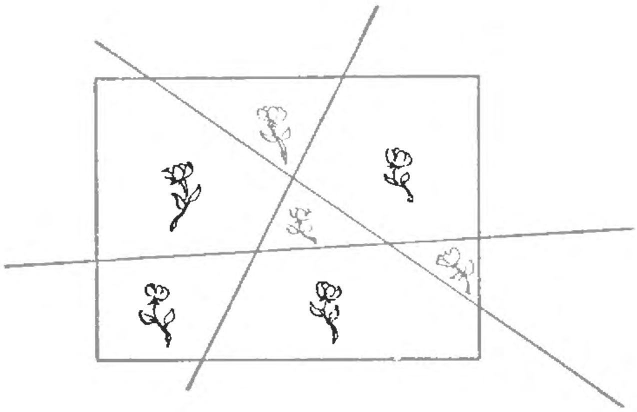


Фиг. 24.

На коврѣ (фиг. 24) изображено 7 розъ. Требуется тремя прямыми линіями разрѣзать коверъ на семь частей, каждая изъ которыхъ содержала бы по одной розѣ.

Рѣшеніе.

См. фиг. 25-ю.

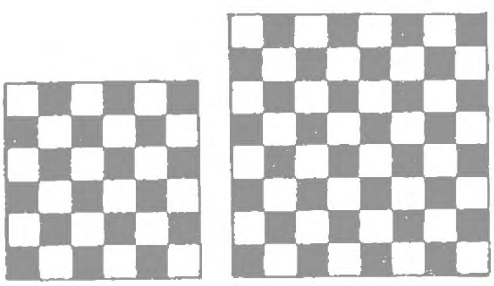


Фиг. 25.

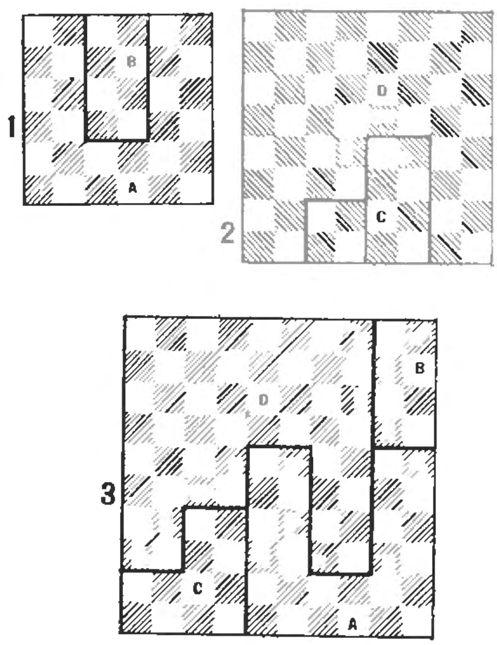
Задача 30-я.

Разрѣзать шахматную доску.

Даны двѣ шахматныхъ доски: обыкновенная въ 64 клѣтки и другая—въ 36 клѣтокъ (фиг. 26). Требуется каждую изъ нихъ разрѣзать на двѣ части такъ, чтобы изъ всѣхъ полученныхъ 4 частей составить новую шахматную доску, содержащую на каждой сторонѣ по 10 клѣтокъ.



Фиг. 26.



Фиг. 26а.

Рѣшеніе.

См. фиг. 26-юа.

Задача 31-я.

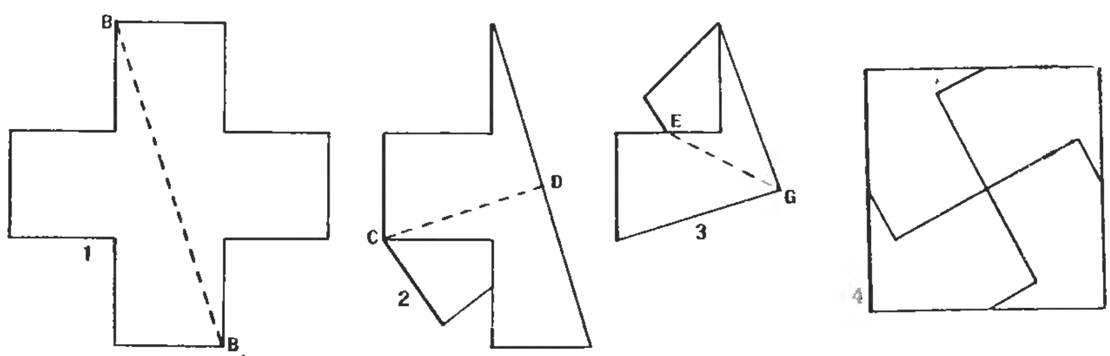
Изъ креста квадратъ.

Намъ уже дважды случалось предлагать эту задачу въ различныхъ варiантахъ (см. «Въ царствѣ смекалки» книга I-я, стр. 110, и книга II-я, стр. 15). Вотъ третiй весьма остроумный ея варiантъ:

Разрѣзать бумажный греческiй крестъ (прямой и равноконечный) однимъ взмахомъ ножницъ на четыре такихъ одинаковыхъ части, чтобы изъ нихъ можно было сложить квадратъ.

Рѣшенiе.

Задача рѣшается посредствомъ маленькой, но вполнѣ позволительной уловки: крестъ необходимо *предварительно перегнуть* два раза и лишь затѣмъ произвести разрѣзъ. Линiи перегиба обозначены на прилагаемыхъ чертежахъ (фиг. 27) пунк-



Фиг. 27.

тиромъ: перегибаютъ сначала по BB, потомъ еще разъ по CD. Разрѣзъ производятъ по EG, при чемъ получаютъ четыре одинаковыхъ фигуры, изъ которыхъ складывается квадратъ.

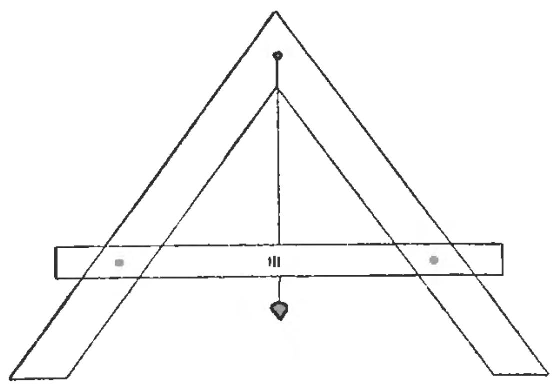
Подыскать доказательство правильности полученнаго рѣшенiя—предоставляемъ читателю. Это не трудно.

Задача 32-я.

Устроить хозяйственный уровень.

Изъ трехъ тонкихъ, прямыхъ, хорошо выструганныхъ и съ параллельными краями досокъ можно легко построить приборъ, полезный при многихъ домашнихъ столярныхъ, плотничьихъ и сельско-хозяйственныхъ работахъ. Приборъ носитъ названіе уровня и служитъ для опредѣленія горизонтальности поверхности въ случаяхъ, когда не требуется слишкомъ большой точности, напримѣръ, при нивеллировкѣ почвы на поляхъ и огородахъ и т. д. Приборъ устраивается такъ:

Полосы изъ тонкихъ дощечекъ скрѣпляются вмѣстѣ, какъ указано на фигурѣ, образуя треугольникъ съ двумя равными сторонами (равнобедренный). Средняя точка основанія отмѣчена перпендикулярной чертой, а съ противоположной верхушки спускается *отвѣсъ* (нить съ грузомъ).



Фиг. 28.

Если приборъ помѣщенъ такъ, что нить отвѣса совпадаетъ со средней отмѣткой, то, слѣдовательно, полоса основанія лежитъ горизонтально, будучи перпендикулярной къ линіи отвѣса. Весь приборъ, слѣдовательно, основанъ на томъ, что *линія, выходящая изъ вершины и дѣлящая пополамъ основаніе равнобедреннаго треугольника, перпендикулярна этому основанію.*

Въ зависимости отъ длины сторонъ треугольника можно вычислить (или прямо опредѣлить опытнымъ путемъ), какъ дѣленія вправо и влѣво отъ средняго можно провести на основаніи такъ, чтобы линія отвѣса, совпадая съ ними, указывала уклоны отъ горизонтальности въ отношеніяхъ 1 на 200, 1 на 100 и т. д.

Синусъ.

Изучающіе тригонометрію задаютъ часто такой вопросъ: «изъ понятія о значеніи линіи, или, точнѣе, геометрическаго представленія тригонометрическихъ отношеній легко понять, откуда произошли *названія* «тангенса» или «секанса», а также соотвѣтственныхъ имъ функцій дополнительнаго угла («котангенсъ» и «косекансъ»). Но откуда взялось слово *синусъ?* На этотъ вопросъ историки математики Канторъ, Финкъ и Кэджори отвѣчаютъ такъ (хотя Канторъ считаетъ такое рѣшеніе вопроса всетаки сомнительнымъ):

Греки всегда брали полную хорду удвоенной дуги. Индусы, хотя и употребляли въ вычисленіяхъ половину хорды удвоенной дуги (то, что мы называемъ теперь *синусомъ*), но сохранили для этой линіи названіе полной хорды, *Ziva (дживa)*, что въ буквальномъ переводѣ означаетъ *тетива*, самое естественное названіе для хорды.

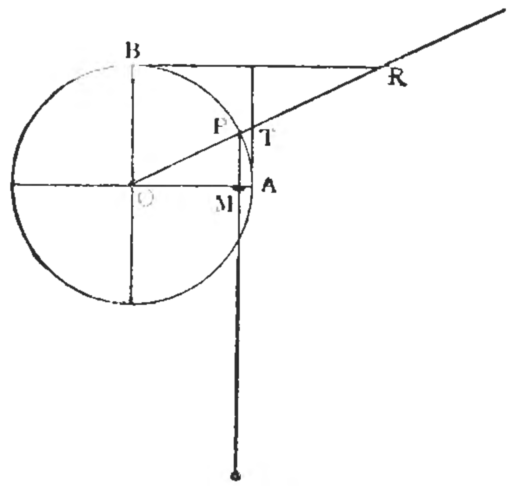
Произведенія индусовъ дошли вначалѣ до насъ черезъ арабовъ. Эти послѣдніе изъ *санскритскаго джива* сдѣлали *джиба*, слово ничего не значущее по-арабски. Но такъ какъ арабы пишутъ безъ гласныхъ буквъ, а только одни согласныя (гласныя у нихъ обозначаются особыми значками, которыя часто опускаются), то съ теченіемъ времени они слово *джиба* передѣлали въ арабское *джаибъ*, писавшееся тѣми же согласными и значившее по-арабски *грудь*. Въ такомъ видѣ это слово встрѣчается въ сочиненіи древнѣйшаго арабскаго астронома Аль-Батани (IX столѣтіе по Р. X.), написавшаго книгу о движеніи небесныхъ тѣлъ.

Въ двѣнадцатомъ столѣтіи этотъ трудъ былъ переведенъ на латинскій языкъ *Платономъ Тибуртинскимъ*, передавшимъ арабское слово *dschaib* дословно латинскимъ *синусъ* (Sinus—грудь). Такъ это совершенно не соотвѣтствующее геометрическому представленію слово и удержалось въ математикѣ до нашихъ дней.

Задача 33-я.

Построить приборъ, наглядно поясняющій тригонометрическія линіи.

Желающій можетъ заняться на-досугѣ устройствомъ рода прибора, наглядно иллюстрирующаго тригонометрическія линіи, представляющія тригонометрическія отношенія. При устройствѣ такого прибора можно руководствоваться нижеслѣдующей общей схемой (см. фиг. 29).



Фиг. 29.

Въ центрѣ O круга укрѣпленъ тонкій стержень (прутъ) OR, который можетъ вращаться. Прутъ, изображающій касательную, привинченъ къ диску въ точкѣ A. Вдоль этого послѣдняго легко скользитъ маленькій блокъ, помѣченный буквой T. Этотъ блочокъ соединенъ со стержнемъ OR такъ, что T обозначаетъ пересѣченіе двухъ линій. Точно также еще маленькій блокъ R можетъ скользить вдоль другого касательнаго тонкаго стержня BR.

Въ мѣстѣ P на единицѣ разстоянія отъ O (т. е. на разстояніи радіуса круга) ввинченъ, или укрѣпленъ какъ либо иначе, другой тоненькій стержень PM. Тяжесть на нижнемъ концѣ этого стержня держитъ его постоянно въ вертикальномъ положеніи. Въ свою очередь онъ свободно проходитъ черезъ блочокъ, свободно скользящій вдоль OA и который обозначенъ на фиг. 29 буквой M.

Пусть, теперь, стержень OR вращается въ положительномъ направленіи (обратномъ движенію часовой стрѣлки); тогда уголъ при O увеличивается, а вмѣстѣ съ тѣмъ:

MP	представитъ	соотвѣтственное	увеличеніе синуса,
OM	»	»	уменьшеніе косинуса,
AT	»	»	увеличеніе тангенса,

BR представить соотвѣтственное уменьшеніе котангенса,
OT » » увеличеніе секанса,
OR » » уменьшеніе косеканса.

Преодолѣвшій небольшія сравнительно техническія трудности и внесшій возможныя усовершенствованія въ предлагаемую схему можетъ, мы думаемъ, составить себѣ имя и даже заработать, введя въ школу полезное учебное пособіе.

Задача 34-я.

Устроить приборъ для обращенія кругового движенія въ прямолинейное.

Положимъ, что мы ведемъ карандашомъ, касаясь края какого либо кружка, и такимъ образомъ получаемъ окружность. Въ данномъ случаѣ мы пользуемся, значитъ, однимъ кругомъ для полученія другого. Но для полученія окружности и круговъ у насъ есть и другой инструментъ, не круглый самъ по себѣ, а именно —циркуль.

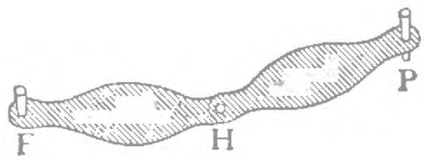
Если необходимо провести прямую линію, то извѣстный геометрическій постулатъ допускаетъ употребленіе линейки, что требуетъ прямого края для проведенія прямой линіи, т. е. прямая линія получается какъ копія.

Возможно ли устроить приборъ не прямой самъ по себѣ, который могъ бы вычерчивать прямую линію? Такой приборъ впервые былъ изобрѣтенъ офицеромъ инженернаго корпуса французской арміи Поселье (Peaucellier) въ 1864 году. Съ тѣхъ поръ изобрѣтались и другіе подобные приборы, дающіе прямолинейное движеніе, и притомъ приборы болѣе простого устройства, чѣмъ изобрѣтенный Поселье. Но такъ какъ послѣдній изобрѣтенъ раньше, его слѣдуетъ считать за типъ. Замѣтимъ также, что независимо отъ Поселье тотъ же приборъ былъ изобрѣтенъ русскимъ математикомъ Липкинымъ въ 1868 году.

Прежде чѣмъ разсмотрѣть устройство всего инструмента, разсмотримъ одно его звено (фиг. 30), вращающееся на штифтикѣ съ одного конца и съ прикрѣпленнымъ карандашомъ на другомъ. Карандашъ въ этомъ случаѣ описываетъ окружность.

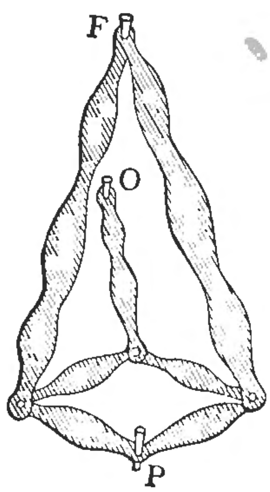
Если два такихъ звена (фиг. 31) соединены въ точкѣ H, а въ точкѣ F прикрѣплены къ плоскости, точка P можетъ двигаться всячески, ея путь неопредѣлененъ. Число звеньевъ должно быть нечетное, чтобы дать опредѣленное движеніе. Если систему изъ трехъ звеньевъ прикрѣпить въ двухъ концахъ, конецъ средняго звена опишетъ опредѣленную кривую скажемъ петлю. Система изъ пяти звеньевъ уже можетъ дать искомое прямолинейное движеніе. Но аппаратъ Поселье имѣетъ семь звеньевъ.

Фиг. 30.

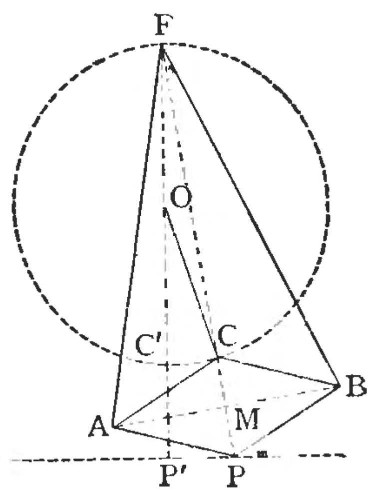


Фиг. 31.

Такой приборъ, какой угодно величины, можетъ быть сдѣланъ каждымъ. Звенья можно вырѣзать изъ картона и скрѣпить ихъ толстыми булавками (см. фиг. 32). Концы F и O (фиг. 32) можно прикрѣпить къ классной доскѣ, а въ P укрѣпить кусокъ карандаша. Такимъ образомъ можно получить полезное и интересное приспособленіе къ уроку геометріи. Фигура 33-я даетъ діаграмму аппарата, изображеннаго на фиг. 32.



Фиг. 32.



Фиг. 33.

Здѣсь $FA = FB$. Во всѣхъ положеніяхъ $APBC$ есть, очевидно, *ромбъ*. F и O прикрѣплены въ точкахъ, разстояніе между которыми равно OC. Въ такомъ случаѣ C двигается по дугѣ круга, центръ котораго есть O. — A и B двигаются по дугѣ, имѣющей центромъ F. Остается показать, что P двигается по прямой линіи.

Проведемъ прямую PP' перпендикулярно къ FO. Уголъ FCC', вписанный въ полукругъ, есть прямой. Значитъ треугольники $FP'P$ и $FC'C$, имѣющіе общій уголъ F, подобны.

$$\text{Слѣдовательно,}\quad FP : FP' = FC' : FC$$
$$\text{и}\qquad FP \cdot FC = FP' \cdot FC'. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

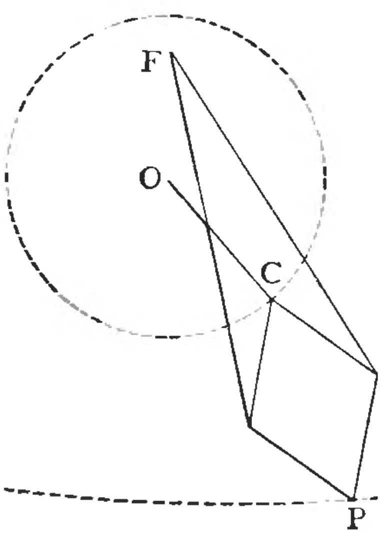
Точки F, C и P, каждая въ отдѣльности, находятся на равномъ разстояніи отъ A и B, а потому, значитъ, лежатъ на одной и той же прямой линіи. Діагонали ромба $APBC$, какъ извѣстно, взаимно перпендикулярны и въ точкѣ пересѣченія дѣлятся пополамъ. Отсюда

$$FB^2 = FM^2 + MB^2$$
$$PB^2 = MP^2 + MB^2$$
$$FB^2 - PB^2 = FM^2 - MP^2$$
$$= (FM + MP)\,(FM - MP)$$
$$= FP \cdot FC \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

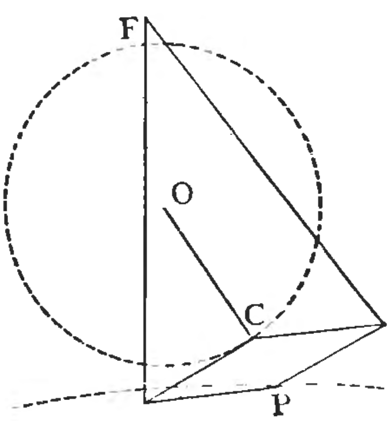
Изъ (1) и (2) заключаемъ, что $FP' \cdot FC' = FB^2 - PB^2$.

Но при движеніи прибора FC', FB и PB всѣ остаются постоянными; слѣдовательно, FP' тоже постоянно. Это значитъ, что P', проэкція точки P на FO, есть всегда одна и та же точка. Или, другими словами, P двигается по *прямой линіи* (перпендикулярной къ FO).

Если разстояніе между двумя означенными точками, F и O, сдѣлать меньше длины звена OC, P будетъ двигаться по дугѣ круга, вогнутой по направленію къ O (фиг. 34). Такъ какъ $OC - OF$ приближается къ нулю, какъ къ предѣлу, радіусъ дуги, вычерчиваемой P, увеличивается безпредѣльно. Если OF сдѣлать больше, чѣмъ OC, то P будетъ описывать дугу, выгнутую относительно O (фиг. 35). Чѣмъ меньше $OF - OC$, тѣмъ болѣе радіусъ дуги, означенной черезъ P.



Фиг. 34.



Фиг. 35.

Отсюда видно, что этотъ небольшой приборъ можетъ быть употребленъ для описанія дуги круга съ огромнымъ радіусомъ и съ центромъ дуги на противоположной сторонѣ отъ инструмента.

Прямая линія — «простѣйшая кривая» математиковъ — лежитъ, такъ сказать, между двумя такими, означенными выше, дугами, и есть предѣльная форма каждой изъ нихъ.

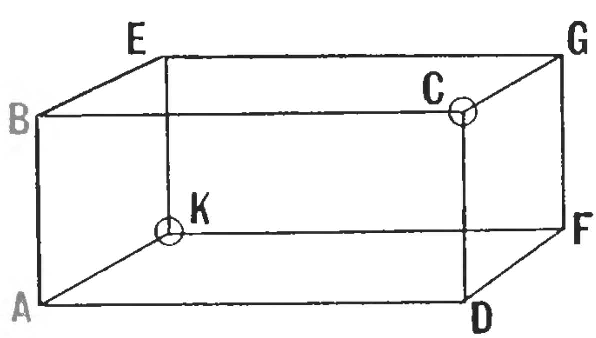
Приборы подобнаго рода обладаютъ многими интересными особенностями. Дальнѣйшей разработкой идеи Поселье занимался извѣстный математикъ Сильвестеръ. А. В. Кемпе (Kempe) въ 1877 году издалъ небольшую книгу, посвященную этому предмету, подъ заглавіемъ *How to draw a straight line* («Какъ провести прямую линію»). Онъ же доказываетъ, что съ помощью подобныхъ сочленепій звеньевъ можно вообще вычертить любую такъ называемую алгебраическую кривую.

Читатель навѣрное не посѣтуетъ на насъ, если самъ займется устройствомъ описаннаго прибора, имѣющаго связь съ существеннѣйшими основами геометріи.

Задача 35-я.

О паукѣ и мухѣ.

На потолкѣ въ углу C комнаты (фиг. 36) сидитъ паукъ, а на полу, въ противоположномъ углу K — муха. Какой путь долженъ избрать паукъ, чтобы добраться до мухи по кратчайшему разстоянію?



Фиг. 36

Рѣшеніе.

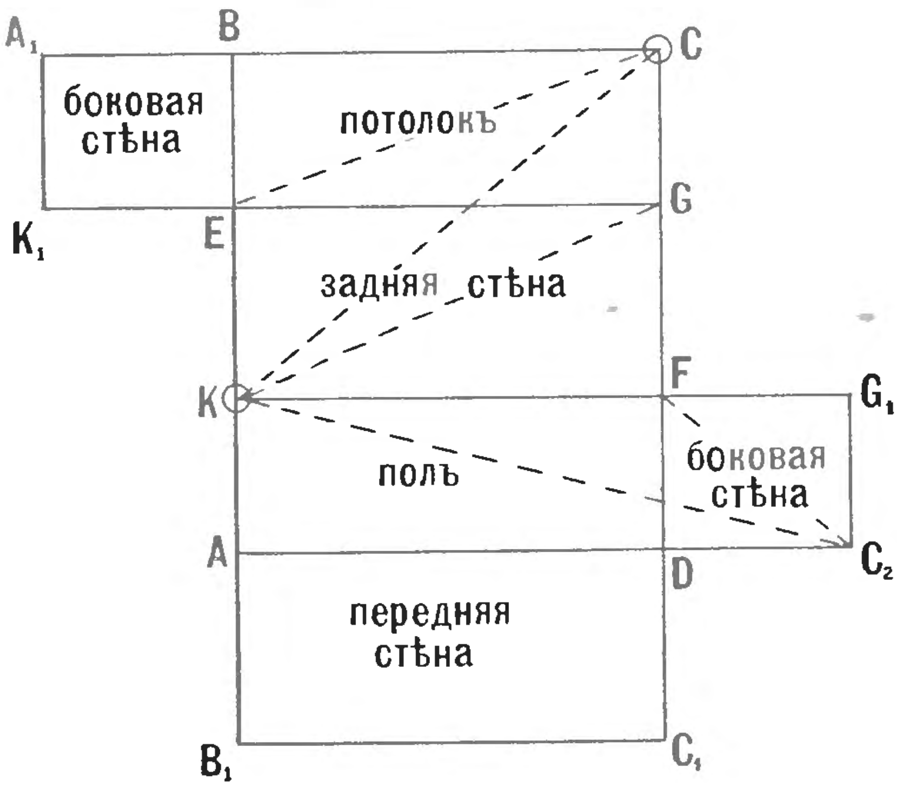
Съ перваго взгляда кажется яснымъ, что паукъ долженъ пробѣжать потолокъ по діагонали CE и затѣмъ спуститься къ мухѣ по ребру EK—(1-й путь).

Поразмысливши, мы найдемъ для паука и другой «кратчайшій» путь: онъ можетъ пробѣжать боковую стѣну по діагонали CF и подобраться къ жертвѣ вдоль FK—(2-й путь).

И, наконецъ,—паукъ могъ бы пойти по CG и по діагонали GK (3-й путь).

Какой же изъ этихъ трехъ путей является, дѣйствительно, кратчайшимъ?

Оказывается, что ни тотъ, ни другой, ни третій. Есть еще болѣе короткіе пути, и мы займемся ихъ разысканіемъ.



Фиг. 37.

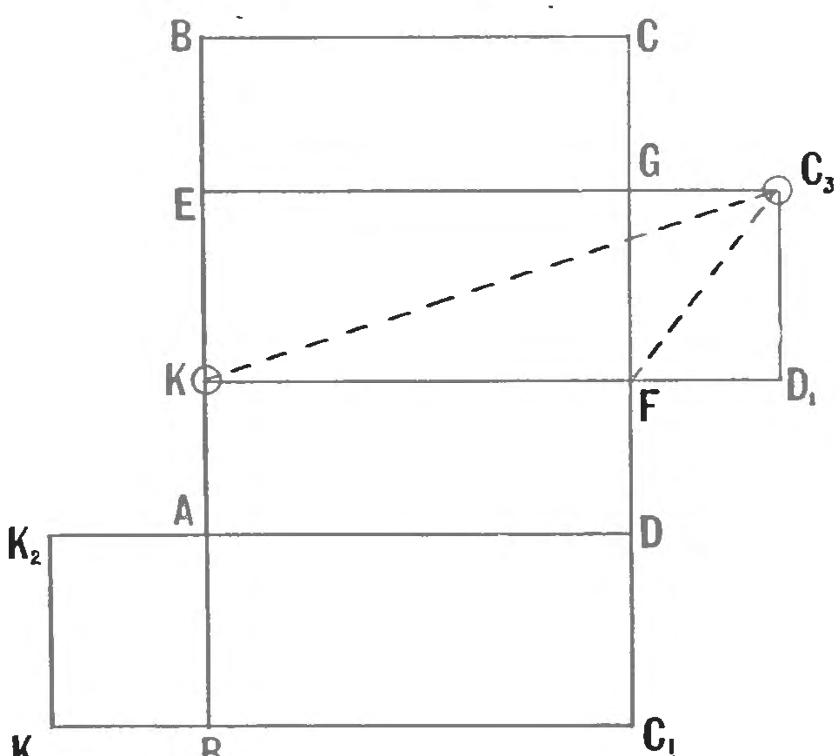
Для этого развернемъ параллелопипедъ, изображающій нашу комнату, на плоскость. Получимъ чертежъ, изображенный фиг. 37-ой. Паукъ сидитъ въ точкѣ C, а муха въ точкѣ K.

Теперь мы ясно видимъ, что путь CEK, который въ неразвернутомъ чертежѣ казался намъ кратчайшимъ, на самомъ дѣлѣ не является таковымъ. Стоитъ соединить точки C и K прямой линіей, чтобы получить замѣтно болѣе короткій путь. Этотъ новый путь будетъ также короче и пути CGK, какъ видно изъ чертежа.

Далѣе, если предположить, что паукъ сидитъ въ точкѣ C_2 (также отвѣчающей углу C нашего параллелопипеда), то C_2FK будетъ путь, обозначенный нами выше, какъ «2-й путь». Ясно, что онъ больше прямого пути C_2K.

Мы узнали, слѣдовательно, уже два «кратчайшихъ» пути CK и C_2K.

Но это еще не все: есть и третій. Чтобы найти его, развернемъ комнату, какъ показано на фиг. 38-й. Помѣстивъ



Фиг. 38.

мысленно паука въ точку C_3, мы увидимъ, что путь C_3FK (отвѣчающій пути CFK на нашемъ параллелопипедѣ) длиннѣе прямого пути KC_3.

Остается теперь рѣшить вопросъ: какой же изъ этихъ трехъ новыхъ путей будетъ самымъ короткимъ: KC, KC_2 или KC_3?

Оказывается, что это зависитъ отъ относительныхъ размѣровъ комнаты въ длину, ширину и высоту,—какъ легко видѣть изъ слѣдующаго.

Обозначимъ длину комнаты AD черезъ a, высоту AB черезъ b и ширину AK черезъ c. Тогда изъ черт. 37 и 38 имѣемъ.

$$KC = \sqrt{\overline{KF}^2 + \overline{CF}^2} = \sqrt{a^2 + (b+c)^2}$$

$$KC_2 = \sqrt{\overline{AK}^2 + \overline{AC_2}^2} = \sqrt{c^2 + (a+b)^2}$$

$$KC_3 = \sqrt{\overline{KD}^2 + \overline{C_3D_1}^2} = \sqrt{b^2 + (a+c)^2}$$

Сравнивая между собой подрадикальныя количества, мы увидимъ по раскрытіи скобокъ, что онп отличаются другъ отъ друга лишь членами

$$2bc,\ 2ab \text{ и } 2ac;$$

отъ соотношенія этихъ произведеній и зависятъ сравнительныя длины линій KC, KC_2 и KC_3.

Дѣля всѣ три произведенія на $2abc$, получимъ

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{c} \text{ и } \frac{1}{b}$$

Отсюда видно, что если $a > b$ и $a > c$, то кратчайшимъ путемъ будетъ KC.

Если $b > a$ и $a > c$, кратчайшій путь KC_2, и если $c > b$ и $c > a$, кратчайшій путь KC_3.

Мы видимъ, что задача о паукѣ и мухѣ оказалась гораздо сложнѣе, чѣмъ можно было думать съ перваго взгляда. Читатель, можетъ быть, полюбопытствуетъ узнать, какъ сами пауки рѣшаютъ эту задачу. Къ сожалѣнію, намъ никогда не приходилось наблюдать пауковъ при такихъ обстоятельствахъ, да и болѣе чѣмъ сомнительно, чтобы паукъ могъ замѣтить муху изъ одного угла комнаты въ другомъ.

Объясненіе симметріи посредствомъ сложенія бумаги.

Простое приспособленіе даетъ возможность начинающимъ получить понятіе о симметріи съ вѣрностью и правильностью, какихъ не дастъ никакое словесное объясненіе.

Предложите каждому взять листъ вощеной (такъ называемая калька), или проклеенной, бумаги, сложить ее одинъ разъ, затѣмъ снова выпрямить, быстро начертить чернилами на одной половинѣ какую нибудь фигуру и быстро, чтобы чернила не успѣли просохнуть, сложить опять вмѣстѣ. Рисунокъ на одной сторонѣ и отпечатокъ его на другой будутъ симметричны до мельчайшихъ подробностей, при чемъ сгибъ бумаги и есть такъ называемая *ось симметріи*.

Еще: сложите бумагу въ двѣ перпендикулярныя складки (вчетверо—вдоль и поперекъ). Въ одной изъ полученныхъ «четвертей» куска бумаги нарисуйте фигуру такъ, чтобы два конца ея упирались каждый въ одинъ сгибъ. Быстро вновь сложите бумагу такъ, чтобы получился отпечатокъ въ каждомъ изъ остальныхъ квадратовъ. Полученная замкнутая фигура будетъ симметрична по отоношенію къ пересѣченію сгибовъ, какъ ея центру.

Вмѣсто простыхъ чернилъ еще лучше чертить такъ называемыми «копировальными» чернилами или копировальнымъ карандашомъ и, перегнувъ бумагу, смочить ее.

Т. Сундара Роу, въ своемъ трудѣ «*Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги* [1]), указалъ, какъ можно строить очень много фигуръ плоской геометріи съ помощью перегибанія бумаги. Здѣсь же находятся прекрасныя изображенія нѣкоторыхъ правильныхъ многоугольниковъ, а также даются способы опредѣленія точекъ нѣкоторыхъ кривыхъ высшаго порядка на плоскостяхъ.

[1]) Есть въ переводѣ на русскій языкъ въ изданіи одесскаго книгоиздательства «Mathesis».

О пространствѣ четырехъ измѣреній.

Редакціи научнаго американскаго журнала «Scientific American» пришла въ голову счастливая мысль объявить всемірный конкурсъ на соисканіе преміи въ 500 долларовъ (около 1000 руб. на наши деньги). Эта довольно значительная премія выдавалась за наилучшую представленную редакціи статью о четвертомъ измѣреніи, при чемъ такая статья, не теряя въ научности, должна была быть по возможности *общедоступна* по изложенію и невелика по размѣрамъ (не болѣе обыкновеннаго печатнаго листа). Въ качествѣ судей представляемыхъ работъ были приглашены извѣстные ученые и профессора.

Въ результатѣ конкурса — въ іюлѣ 1909 г. въ «Scientific American» были напечатаны о четвертомъ измѣреніи три замѣчательныхъ, увѣнчанныхъ преміями и почетными отзывами, статьи, принадлежащія Грагаму Денби Фичу (Graham Demby Fitch), Ф. К. Ферри (F. C. Ferry) и Карлу А. Ричмонду (Carl A. Richmond). Приводимъ ниже переводъ этихъ трехъ статей, нисколько не сомнѣваясь, что чтеніе ихъ доставитъ живѣйшее удовольствіе каждому, кто «Въ царствѣ смекалки» ищетъ не одного только забавнаго «препровожденія времени».

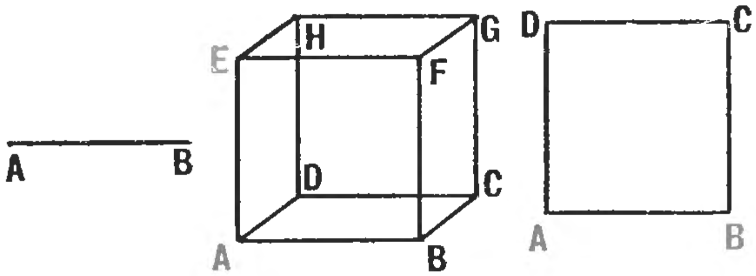
Статьи эти, взаимно дополняющія и освѣщающія одна другую, точно также прекрасно развиваютъ и дополняютъ то, что сказано уже нами о четвертомъ измѣреніи во второй нашей книгѣ. Читатель легко убѣдится самъ, что для чтенія ихъ не требуется никакой особой математической подготовки, кромѣ пониманія самыхъ элементарныхъ основъ геометріи. Можно сказать, пожалуй, что приступить къ чтенію этихъ статей и вполнѣ овладѣть ихъ содержаніемъ будетъ легко, если уяснить себѣ что такое точка, прямая линія, квадратъ и кубъ, и запомнить принятыя въ геометріи названія элементовъ, входящихъ въ эти фигуры. Разсужденіе К. А. Ричмонда требуетъ также понятія объ уравненіяхъ. Вотъ и все, что требуется для того, чтобы преодолѣть нижеслѣдующія страницы и вмѣстѣ съ тѣмъ сразу поразительно раздвинуть и углубить свое пониманіе геометрическихъ основъ и взглядовъ на ученіе о пространствѣ вообще. Въ самой доступной и, можно сказать, наглядной формѣ математика соприкасается здѣсь съ тончайшими отвлеченіями философіи и съ теоріей познаванія въ частности. Вотъ почему кажется вполнѣ умѣстнымъ въ концѣ этого отдѣла помѣстить небольшіе отрывки изъ «Критики чистаго разума» Канта, въ которыхъ излагаются взгляды этого величайшаго мыслителя всѣхъ временъ на пространство, а также на время. Разсужденіе объ этомъ послѣднемъ не входитъ прямо въ нашу задачу. Но разъ «царство смекалки» приводитъ насъ къ области философіи познанія, то было бы упущеніемъ не упомянуть кстати, наряду съ пространствомъ, и о *времени*, какъ *категоріи* нашего познанія. Для дополненія и разъясненія отрывковъ изъ Канта приводимъ также два параграфа изъ трактата Н. Н. Шиллера «*Значеніе понятій о «силѣ» и о «массѣ»*. Это небольшое глубоко ученое сочиненіе, появившееся первоначально въ «Кіевскихъ Университетскихъ Извѣстіяхъ» въ 1898 году, мы настойчиво рекомендовали бы для прочтенія всякому желающему расширить свой естественнонаучный кругозоръ. Почтемъ себя удовлетворенными, если приведенные отрывки побудятъ кого-либо къ чтенію полныхъ сочиненій.

Въ заключеніе этого небольшого вступленія въ настоящій отдѣлъ прибавимъ, что о «четвертомъ измѣреніи» и о «пространствѣ четвертаго измѣренія» разсѣяно въ нашемъ обществѣ довольно много и довольно таки смутныхъ, а часто мистическихъ и просто нелѣпыхъ толковъ и представленій. Появляющіяся на этотъ счетъ книги и брошюрки обыкновенно еще болѣе сбиваютъ читателя съ толку... Задача истиннаго знанія состоитъ прежде всего въ томъ, чтобы въ область мрака и тумана внести лучи свѣта и во все вникающей трезвой мысли. Быть можетъ, многія вещи теряютъ при этомъ значительную часть своей мистической «прелести» и «таинственности», но несомнѣнно, что они выигрываютъ въ смыслѣ остроумія, ясности и простоты.

О четвертомъ измѣреніи.

(F. E. Ferry).

Ученикъ обыкновенно знакомится съ линейными мѣрами, затѣмъ съ квадратными и, наконецъ, съ кубическими мѣрами, или мѣрами тѣлъ. Онъ усваиваетъ ихъ себѣ соотвѣтственно, какъ «измѣренія длины», затѣмъ «мѣры площадей, или поверхностей, которыя зависятъ отъ длины и ширины, взятыхъ вмѣстѣ», и, наконецъ, «мѣры объемовъ, или тѣлъ, которыя зависятъ отъ длины, ширины и высоты, взятыхъ вмѣстѣ». Первое заключаетъ въ себѣ одно измѣреніе — длину; второе — два



Фиг. 39.

взаимно-перпендикулярныхъ измѣренія — длину и ширину, перемноженныхъ одно на другое, и третье—три измѣренія, каждое перпендикулярное двумъ другимъ — длину, ширину и высоту, всѣ взаимно перемноженныя. Пусть единицы этихъ трехъ родовъ измѣренія (напримѣръ, футъ, квадратный футъ и кубическій футъ) будутъ изображены линіей AB, квадратомъ $ABCD$ съ той же линіей, какъ стороной, и кубомъ $ABCD$-G съ той же линіей (ребромъ) и тѣмъ же квадратомъ, какъ основаніемъ (фиг. 39).

Единица AB можетъ быть разсматриваема, какъ составленная изъ безконечно большого числа M точекъ, непрерывно слѣдующихъ одна за другой отъ A къ B. Квадратъ $ABCD$ въ такомъ случаѣ содержитъ $M \times M = M^2$ точекъ, а кубъ $ABCD$-G содержитъ $M \times M \times M = M^3$ точекъ. Можно идти отъ одной точки на AB ко всякой другой точкѣ въ ней, придерживаясь только одного принятаго направленія по AB. Точно также, отъ одной какой-нибудь точки ко всякой другой въ $ABCD$ можно достичь, придерживаясь двухъ направленій, опредѣленныхъ линіями, ограничивающими квадратъ. Точно также въ $ABCD$-G любая точка достигается изъ начальной движеніемъ въ трехъ направленіяхъ, опредѣляемыхъ 3-мя ребрами куба, выходящими изъ одной точки (вершины куба). Отсюда, въ зависимости отъ движенія отъ одной точки до другой, первая единица будетъ одномѣрная, вторая—двухмѣрная, третья—трехмѣрная.

Человѣкъ не можетъ сдѣлать движенія, которое не могло бы разложиться по тремъ взаимно-перпендикулярнымъ направленіямъ. Онъ не можетъ достигнуть никакого мѣста иначе, какъ идя на сѣверъ или югъ, западъ или востокъ, а также вверхъ или внизъ. Онъ не можетъ найти ни одной точки въ комнатѣ, которой не могъ бы достигнуть движеніемъ въ направленіяхъ длины, ширины и высоты комнаты. Зрѣніе различаетъ правильно два измѣренія, ширину и высоту видимаго предмета, между тѣмъ какъ третье измѣреніе, разстояніе отъ предмета, опредѣляется посредствомъ мускульнаго поворота глазъ для сосредоточенія ихъ на немъ. Нѣтъ, казалось бы, смысла требовать четвертаго направленія, перпендикулярнаго къ тремъ упомянутымъ. Фактически весь человѣческій опытъ заставляетъ насъ удовлетворяться тремя измѣреніями.

Оставляя опытъ въ сторонѣ и размышляя всецѣло по аналогіи, четвертое измѣреніе вводится съ помощью такого разсужденія: четырехмѣрное измѣреніе зависитъ отъ длины, ширины, высоты и четвертаго измѣренія, взаимно перемноженныхъ. Оно заключаетъ въ себѣ четыре линейныхъ измѣренія, каждое изъ которыхъ перпендикулярно къ тремъ остальнымъ. Слѣдовательно, четвертое измѣреніе составляетъ прямой уголъ съ каждымъ изъ трехъ измѣреній трехмѣрнаго пространства. Его единица должна имѣть AB, какъ ребро, квадратъ $ABCD$, какъ грань, и кубъ $ABCD$-G, какъ основаніе. Онъ содержитъ $M \times M \times M \times M = M^4$ точекъ. Переходъ отъ одной точки ко всякой другой точкѣ въ этомъ пространствѣ 4-хъ измѣреній возможенъ при движеніи въ четырехъ направленіяхъ, опредѣляемыхъ этими 4-мя линіями.

Квадратъ $ABCD$ (фиг. 39) можетъ быть образованъ линіей AB,—передвиженіемъ AB съ ея M точками на разстояніе въ одинъ футъ въ направленіи, перпендикулярномъ къ одному измѣренію AB. Всякая точка AB въ этомъ движеніи описываетъ линію, и $ABCD$ содержитъ, слѣдовательно, M линій, такъ же, какъ M^2 точекъ. Кубъ $ABCD$-G образуется квадратомъ $ABCD$ при движеніи его на разстояніи въ одинъ футъ въ направленіи, перпендикулярномъ къ его двумъ измѣреніямъ. M линій и M^2 точекъ квадрата описываютъ соотвѣтственно M квадратовъ и M^2 линій. Согласно этому $ABCD$-G содержитъ M квадратовъ, M^2 линій и M^3 точекъ. Подобнымъ же образомъ, четырехмѣрная единица получается изъ куба $ABCD$-G при движеніи его на разстояніе одного фута въ направленіи, перпендикулярномъ къ каждому изъ его трехъ измѣреній, т. е. «въ направленіи четвертаго измѣренія». Его M квадратовъ, M^2 линій и M^3 точекъ описываютъ при этомъ соотвѣтственно M кубовъ, M^2 квадратовъ и M^3 линій.

Согласно съ такимъ опредѣленіемъ единица четвертаго измѣренія содержитъ M кубовъ, M^2 квадратовъ, M^3 линій и M^4 точекъ.

Разсматривая предѣлы единицъ, мы видимъ, что AB имѣетъ предѣлами двѣ точки. $ABCD$ имѣетъ такихъ предѣльныхъ точекъ (вершинъ квадрата) четыре; $ABCD$-G имѣетъ такихъ точекъ (вершинъ куба) восемь — четыре отъ начальнаго и 4 отъ конечнаго положеній двигающагося квадрата. Наконецъ, для четырехмѣрной единицы такихъ предѣльныхъ точекъ должно получиться 16 (изъ нихъ 8 отъ начальнаго и 8 отъ конечнаго положенія перемѣстившагося куба).

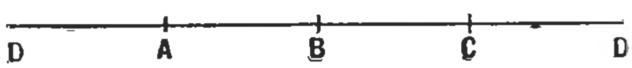
Для предѣльныхъ *линій* мѣръ получимъ: AB имѣетъ одну линію (или —она сама по себѣ одна), $ABCD$ ограниченъ четырьмя линіями (стороны квадрата), $ABCD$-G ограниченъ двѣнадцатью ребрами (по четыре отъ каждаго начальнаго и окончательнаго положеній двигающагося квадрата и четыре, описанныя четырьмя вершинами перемѣстившагося квадрата).

Наконецъ, для четырехмѣрной единицы число ограничивающихъ ея линій (реберъ) равно 32, а именно: по 12 реберъ даетъ каждое начальное и конечное положенія перемѣстившагося куба, да еще 8 реберъ опишутъ 8 точекъ (вершинъ) перемѣстившагося въ 4-е измѣреніе куба.

Точно также для числа ограничивающихъ мѣры *квадратныхъ граней* имѣемъ: *ABCD* самъ по себѣ составляетъ одинъ квадратъ. Кубъ *ABCD-G* имѣемъ 6 такихъ квадратовъ-граней (2 квадрата отъ начальнаго и конечнаго положеній перемѣстившагося квадрата и 4 квадрата описаны его сторонами при перемѣщеніи). Наконецъ, 4-мѣрная единица такихъ квадратныхъ граней имѣетъ 24 (12 квадратовъ отъ начальнаго и конечнаго положеній куба да его 12 реберъ опишутъ еще 12 квадратовъ).

Въ концѣ концовъ, для числа ограничивающихъ мѣры *кубовъ* имѣемъ: *ABCD-G* самъ по себѣ одинъ кубъ, а четырехмѣрная единица имѣетъ восемь предѣльныхъ кубовъ (по одному отъ начальнаго и конечнаго положеній движущагося куба да 6 кубовъ, описанныхъ гранями движущагося по направленію 4-го измѣренія куба).

Если линіи, ограничивающія квадратъ *ABCD*, предположить сдѣланными изъ сплошной проволоки и разрѣзать эту проволоку въ *D*, то эти линіи можно, очевидно, тогда разогнуть всѣ вдоль по направленію *AB*, образуя такимъ образомъ одномѣрную фигуру (фиг. 40), равную четыремъ линейнымъ единицамъ.

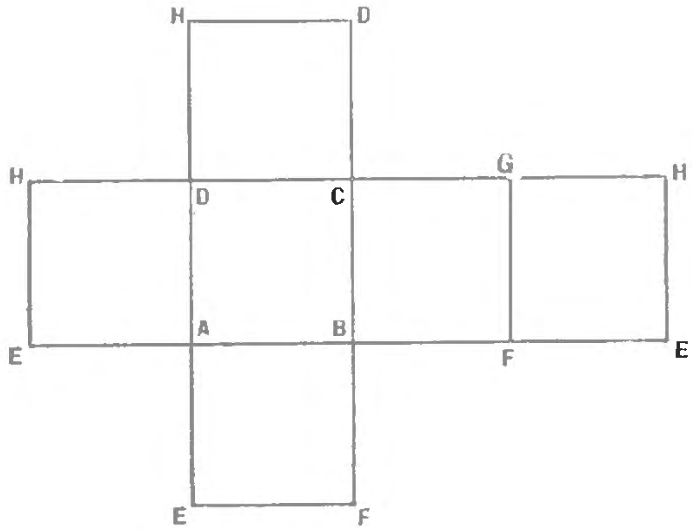


Фиг. 40.

Получится по линейной единицѣ по обѣ стороны *AB* да еще внѣ ихъ линейная единица *CD* съ какой либо стороны (у насъ справа).

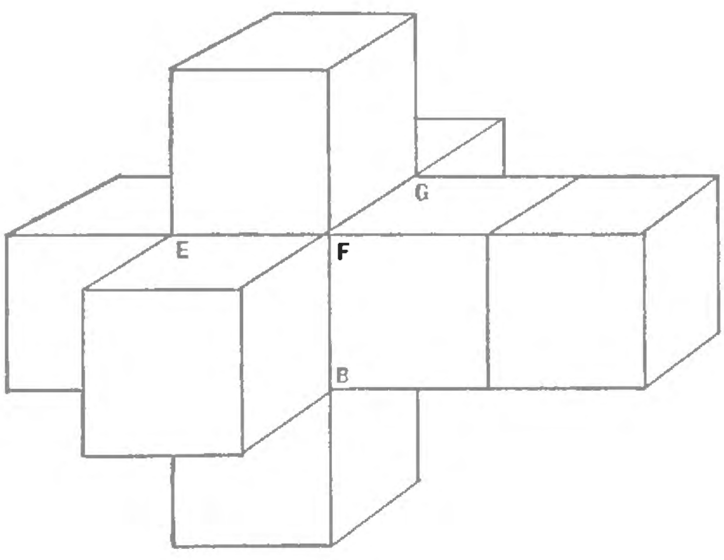
Если въ кубѣ *ABCD-G* предположить квадратныя его грани сдѣланными изъ пластинокъ олова, и эти пластинки обрѣзать вдоль линій *EF*, *GH*, *HE*, *AE*, *BF*, *CG* и *DH*, то квадратныя грани ихъ могутъ быть сложены такъ, чтобы образовать одну двухмѣрную фигуру изъ шести квадратовъ. Квадратъ

ABCD имѣетъ по квадрату на каждой своей сторонѣ да кромѣ того одинъ, *EFGH*, внѣ этихъ съ какой-либо стороны (фиг. 41).



Фиг. 41.

Точно также, если въ четырехмѣрной единицѣ представить ея предѣльные кубы сдѣланными изъ сплошного дерева, и это дерево обрѣзать затѣмъ въ соотвѣтствующихъ плоскостяхъ, то кубы могутъ быть сложены такъ, чтобы образовать, по аналогіи съ предыдущимъ, трехмѣрную фигуру изъ восьми кубовъ. Кубъ *ABCD-G* (центральный) имѣетъ по кубу на каждой своей сторонѣ и кромѣ того одинъ кубъ сбоку, внѣ его сторонъ



Фиг. 42.

(фиг. 42). Эти восемъ кубовъ, образуя теперь трехмѣрную фигуру, составляли, какъ мы предполагаемъ, какую-то поверхность, ограничивающую четырехмѣрную единицу.

Въ слѣдующихъ табличкахъ сдѣлана сводка результатовъ, полученныхъ выше для объема и границъ четырехъ разсматриваемыхъ здѣсь единицъ:

Объемы

	Точекъ.	Линій.	Квадратовъ.	Кубовъ.
Одномѣрная единица . . .	M	1	0	0
Двухмѣрная единица . . .	M^2	M	1	0
Трехмѣрная единица . . .	M^3	M^2	M	1
Четырехмѣрная единица .	M^4	M^3	M^2	M

Границы

	Точекъ.	Линій.	Квадратовъ.	Кубовъ.
Одномѣрная единица . . .	2	1	0	0
Двухмѣрная единица . . .	4	4	1	0
Трехмѣрная единица . . .	8	12	6	1
Четырехмѣрная единица .	16	32	24	8

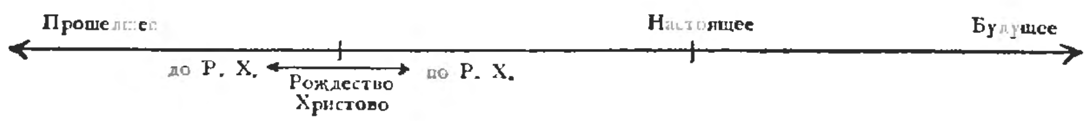
Разсуждая совершенно подобно предыдущему, можно перейти отъ разсмотрѣнныхъ единицъ къ единицамъ пяти и болѣе измѣреній.

Если одномѣрную единицу продолжить безконечно вправо отъ B и влѣво отъ A такъ, что ея длина сдѣлается больше, чѣмъ можно обозначить какимъ угодно числомъ,—она будетъ представлять одномѣрное пространство вообще. Такимъ же образомъ, безконечно большое продолженіе по всѣмъ измѣреніямъ другихъ единицъ дастъ соотвѣтственное представленіе о двухмѣрномъ, трехмѣрномъ и четырехмѣрномъ пространствахъ.

Одномѣрная единица выдѣлена изъ остального одномѣрнаго пространства, въ которомъ она лежитъ, двумя точками. Двухмѣрная единица—отъ остального ея двухмѣрнаго пространства отдѣлена четырьмя линіями. Трехмѣрная единица выдѣляется изъ остального ея трехмѣрнаго пространства шестью площадями-квадратами; и, наконецъ, четырехмѣрная единица выдѣляется изъ остального четырехмѣрнаго пространства (сверхпространства), въ которомъ она лежитъ, восемью кубами.

Чтобы получить замкнутую фигуру какого-либо измѣренія въ пространствѣ того же измѣренія, требуется: въ одномѣрномъ пространствѣ двѣ точки, въ двухмѣрномъ — по крайней мѣрѣ три линіи, въ трехмѣрномъ—по крайней мѣрѣ четыре плоскости, въ четырехмѣрномъ—по крайней мѣрѣ пять трехмѣрныхъ пространствъ.

То, что говорилось о единицахъ различныхъ измѣреній, относится и къ соотвѣтствующимъ пространствамъ. Отъ каждой точки можно перейти къ другой точкѣ въ томъ же пространствѣ движеніемъ въ столькихъ опредѣленныхъ направленіяхъ, перпендикулярныхъ каждое къ остальнымъ, сколько измѣреній имѣетъ данное пространство. Время представляетъ одномѣрное пространство, какъ какъ оно продолжается только въ одномъ направленіи отъ безконечнаго отдаленія прошедшаго къ безконечному разстоянію будущаго (фиг. 43). Настоящее есть точка,

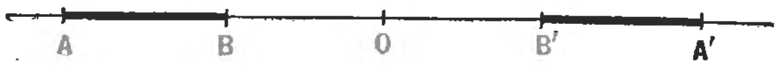


Фиг. 43.

текущая по времени (или допускающая время скользить мимо себя) съ равномѣрной скоростью; и каждая точка во времени можетъ быть достигнута движеніемъ черезъ опредѣленное пространство (въ годахъ, мѣсяцахъ и т. д.), исходя отъ напередъ избранной извѣстной точки (напр. отъ Р. Х.).

Каждая часть земной поверхности, разсматриваемая какъ плоскость, представляетъ часть двухмѣрнаго пространства, а два принятыхъ здѣсь направленія суть широта и долгота. Иллюстраціей трехмѣрнаго пространства служитъ то пространство (по понятіямъ человѣческимъ), въ которомъ находится вселенная. Для четырехмѣрнаго пространства у человѣка никакихъ иллюстрацій и наглядныхъ представленій нѣтъ.

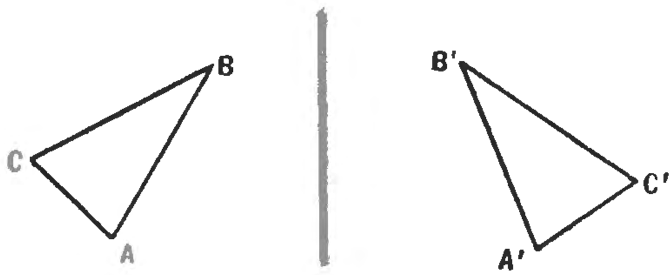
Если двѣ линіи, AB и $B'A'$, въ томъ же самомъ одномѣрномъ пространствѣ симметричны относительно точки O того же пространства (фиг. 44), то AB не можетъ передвинуться въ этомъ же пространствѣ такъ, чтобы *соотвѣтствующія* одновременно точки совпали (A съ A', B съ B' и т. д.). Чтобы достигнуть такого совпаденія, необходимо вращать AB черезъ двухмѣрное пространство около O, какъ центра; или, говоря грубо, AB должна



Фиг. 44.

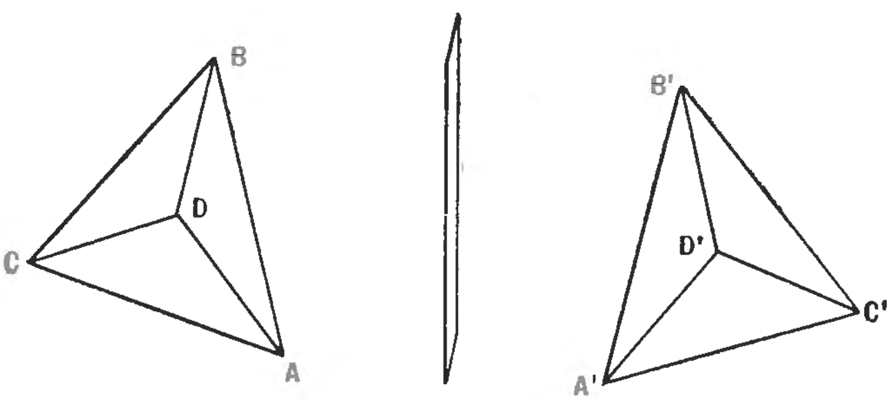
быть взята въ двухмѣрное пространство, перевернута и опущена внизъ на $B'A'$.

Если два треугольника, въ двухмѣрномъ пространствѣ, симметричны относительно нѣкоторой линіи (фиг. 45), то полное



Фиг. 45.

совпаденіе *соотвѣтственныхъ* точекъ и линій этихъ треугольниковъ можетъ быть достигнуто только при вращеніи одного треугольника черезъ трехмѣрное пространство около линіи (оси) симметріи; или, говоря грубо, одинъ треугольникъ долженъ быть взятъ въ трехмѣрное пространство, перевернутъ и опущенъ внизъ на другой. Опять, если два многогранныхъ тѣла въ одномъ и томъ же трехмѣрномъ пространствѣ симметричны



Фиг. 46.

относительно нѣкоторой плоскости (фиг. 46), то совпаденіе *соотвѣтственныхъ* точекъ, линій и плоскостей можетъ быть достигнуто только при вращенiи одной многогранной фигуры черезъ четырехмѣрное пространство около плоскости симметрiи; или, говоря грубо, одна изъ многогранныхъ фигуръ должна быть взята въ четырехмѣрное пространство, перевернута тамъ и положена на другую.

Правая рука и ея отраженiе (лѣвая рука) въ зеркалѣ симметричны относительно плоскости зеркала, и только вращенiемъ около этой плоскости будетъ достигнуто ихъ совпаденiе. Подобное же вращенiе можетъ сдѣлать правую перчатку лѣвой; или, говоря грубо, правая перчатка, брошенная по направленiю четвертаго измѣренiя и тамъ перевернутая, упадетъ къ намъ назадъ лѣвой перчаткой.

Неспособность человѣка умѣстить въ своемъ представленiи четвертое измѣренiе или обнаружить существованiе четырехмѣрнаго пространства можно сравнить съ подобной же неспособностью «двухмѣрнаго человѣка», живущаго въ двухмѣрномъ пространствѣ, понять третье измѣренiе или обнаружить трехмѣрное пространство, хотя его собственное пространство можетъ быть только частью того, какъ плоскость часть тѣла. Предположимъ двухмѣрное пространство, изображаемое этой страницей книги, обитаемымъ двухмѣрными существами. Они имѣютъ длину и ширину, могутъ двигаться въ этихъ двухъ измѣренiяхъ и, предполагается, сознаютъ ихъ. Они не имѣютъ объема, не могутъ подняться отъ бумаги или опуститься подъ нее и не сознаютъ измѣренiй въ такомъ направленiи, они не знаютъ «низа» и «верха». Пусть они интеллигентны въ предѣлахъ ихъ пространства, какъ человѣкъ интеллигентенъ въ предѣлахъ своей вселенной; пусть у нихъ есть дома и житницы, вообще пусть ихъ жизнь богата, насколько можетъ быть. Ихъ дома и житницы не будутъ имѣть ни потолка ни пола, потому что трехъ линiй достаточно въ этомъ мiрѣ, чтобы замкнуть каждый предметъ; и человѣкъ плоскости самъ по себѣ также расположенъ только въ своемъ многоугольномъ плоскомъ контурѣ. Внутрь этого многоугоульника (его собственная внутренность), по мнѣнiю существа плоскости, можно пройти только черезъ его контуръ, такъ какъ нѣтъ верха и нѣтъ низа въ его сознанiи. Было бы безнадежной попыткой убѣдить его, что существуетъ третье измѣреніе «верха» и «низа», касающееся даже внутренности его многоугольнаго плоскаго «тѣла»—его собственныхъ внутреннихъ частей. Если бы даже онъ принялъ доказательства аналогіи объ особенностяхъ такого измѣренія, то возмутился бы противъ мысли заглянуть въ самого себя, чтобы найти тамъ такое измѣреніе. Если кто нибудь объяснитъ человѣку плоскости, что существо третьяго измѣренія, приближаясь отъ направленія этого неизвѣстнаго ему третьяго измѣренія, можетъ проникнуть въ хорошо запертую житницу и взять ея содержимое, не отпирая замка и не ломая стѣны, человѣкъ плоскости все же не будетъ ближе къ понятію этого третьяго измѣренія. Не пойметъ онъ также его и въ томъ случаѣ, если кто нибудь скажетъ ему, что трехмѣрное существо можетъ коснуться его собственнаго сердца, не проникая черезъ кожу. Совершенно такъ же невозможно для человѣка понять, изъ какого направленія четырехмѣрный грабитель долженъ придти, чтобы украсть сокровища изъ его крѣпчайшаго подвала, не открывая и не ломая ничего; или, какимъ путемъ можетъ приблизиться четырехмѣрный врачъ и коснуться сокровеннѣйшаго мѣста человѣческаго сердца, не нарушая цѣлости кожи, тѣла и даже стѣнокъ сердца. А путь какъ подобнаго грабителя, такъ и врача, лежитъ—вдоль четвертаго измѣренія. Такимъ же путемъ четырехмѣрное существо можетъ придти и удалить содержимое яйца безъ поврежденія скорлупы, или выпить ликеръ, не открывая бутылки. Такія четырехмѣрныя существа, обитающія въ пространствѣ, заключающемъ въ себѣ наше трехмѣрное пространство, могутъ представляться людямъ въ видѣ болѣе совершенныхъ духовъ. Но отсутствіе подобныхъ духовъ болѣе всего говоритъ противъ существованія четыремѣрнаго пространства. Алгебра требуетъ, чтобы геометрія изображала всѣ ея задачи. Разъ алгебраическая задача можетъ содержать четыре, пять или болѣе неизвѣстныхъ чиселъ, равно какъ и меньшее количество ихъ, алгебра требуетъ четырехмѣрнаго, пятимѣрнаго или еще высшаго пространства. Они ей нужны для использованія такъ же, какъ и пространства низшихъ измѣреній.

Быть можетъ, нѣкоторыя явленія молекулярной физики или механическихъ принциповъ электрическаго тока могутъ быть вполнѣ объяснены только введеніемъ четвертаго измѣренія. Можетъ быть, четвертое измѣреніе ускользаетъ отъ человѣческаго наблюденія только потому, что измѣренія въ этомъ направленіи всегда слишкомъ незначительны въ сравненіи съ мѣрами въ трехъ другихъ измѣреніяхъ.

До сихъ поръ, какъ бы то ни было, пространство четырехъ или еще бо́льшаго числа измѣреній могло быть только «фиктивнымъ геометрическимъ изображеніемъ алгебраическаго тождества».

Опытъ разсужденія о четвертомъ измѣреніи.

(*Carl A. Richmond*).

Рой пчелъ, помѣщенный въ стеклянномъ ульѣ такъ, что можно наблюдать движеніе каждой пчелы, представляетъ весьма поучительное зрѣлище для изслѣдователя природы. Такой же стеклянный улей можетъ служить хорошимъ пособіемъ для разсмотрѣнія четвертаго измѣренія.

Вообразимъ улей съ поломъ и потолкомъ изъ горизонтальныхъ и параллельныхъ стеколъ, помѣщенныхъ на такомъ близкомъ разстояніи, что пчелы могутъ двигаться *только* въ узкомъ пространствѣ между ними. Вообразимъ также въ цѣляхъ наглядности, что пчелы обладаютъ разумомъ людей. Живущимъ въ такихъ условіяхъ пчеламъ могутъ быть знакомы только представленія о движеніи взадъ и впередъ, вправо и влѣво. Ихъ міръ былъ бы *только двухмѣрный.* Лишенныя движенія вверхъ и внизъ тѣсно сложенными стеклами, онѣ не могутъ понимать словъ «вверхъ» и «низъ», потому что у нихъ нѣтъ опыта, на которомъ они могли бы основывать эти представленія. Какъ ни мало достаточенъ, вообще говоря, взятый нами примѣръ, онъ даетъ все же представленіе о мірѣ только двухъ измѣреній—длины и ширины.

Планиметрія (геометрія на плоскости) есть наука, имѣющая дѣло съ такими фигурами, какъ треугольники, четыреугольники и круги. Интересно, что она зародилась въ Египтѣ, гдѣ развивалась въ цѣляхъ облегченія измѣренія страны. Отъ этого происхожденія науки произошло и ея названіе—геометрія, что значитъ измѣреніе земли. Со времени ея египетской эры наука подъ именемемъ геометріи тѣлъ (геометрія въ пространствѣ) развилась до изученія такихъ фигуръ, какъ сфера (шаръ), кубъ, конусъ и т. д.

Пчелы во взятомъ стеклянномъ ульѣ могутъ двигаться по квадрату, могутъ дѣлать треугольники и круги, и для нихъ планиметрія можетъ быть практической наукой, но при незнаніи направленія вверхъ и внизъ кубъ и шаръ будутъ для нихъ непонятны. Третье измѣреніе будетъ для нихъ такимъ же абсурдомъ, какимъ является для насъ четвертое.

Предположимъ, что мы положили на столъ два пера такъ, чтобы они одно съ другимъ образовали прямой уголъ; затѣмъ, приставимъ къ нимъ третье перо такъ, чтобы оно образовало съ двумя другими тоже прямой уголъ. Это ясно и возможно сдѣлать для насъ, но это было бы невозможно для пчелъ съ ихъ незнаніемъ 3-го измѣренія—высоты. Они, безъ сомнѣнія, могутъ положить два тонкихъ пера въ своемъ ульѣ такъ, что, пересѣкаясь, они образуютъ прямой уголъ, но третьяго пера для образованія прямого угла съ двумя первыми они поставить не могутъ.

Мы можемъ разсматривать эти два пера, какъ представляющія два измѣренія міра пчелъ, а три взаимно-перпендикулярныхъ пера, какъ изображеніе трехъ измѣреній нашего міра. Предположимъ дальше, что кто нибудь предлагаетъ намъ къ этимъ перьямъ приставить четвертое такъ, чтобы составить прямой уголъ съ каждымъ изъ прежнихъ трехъ. Въ нашемъ полѣ опыта мы не можемъ найти мѣста для него такъ же, какъ пчелы въ ихъ полѣ опыта не могутъ найти мѣста для третьяго пера. Это четвертое перо представляетъ такъ называемое четвертое измѣреніе. Но, хотя для насъ нѣтъ возможности поставить четвертое перо требуемымъ образомъ, примѣръ отношенія къ третьему измѣренію пчелъ указываетъ намъ, что ограниченіе опыта не даетъ еще права окончательно утверждать, сколько измѣреній имѣетъ пространство.

Разсужденія о томъ, что такое пространство четырехъ измѣреній само по себѣ, какъ и относительно существъ, разумъ которыхъ проявляется въ этихъ четырехъ измѣреніяхъ,—дѣло чисто умозрительное. Но ни въ какомъ случаѣ не дѣло математиковъ упорно отклонять представляющуюся имъ задачу, а, наоборотъ, они должны идти во главѣ и изучать съ возможной добросовѣстностью и съ необходимыми ограниченіями всѣ особенности четырехмѣрнаго пространства, если бы таковое существовало.

Основное, руководящее начало ихъ разсужденій состоитъ въ слѣдующемъ: если существуютъ взаимоотношенія геометріи 2-хъ измѣреній къ геометріи трехъ измѣреній, значитъ можно предполагать подобныя же (аналогичныя) отношенія между геометріей трехъ измѣреній и нѣкоторой геометріей четырехъ измѣреній. Какъ кругъ находится въ извѣстныхъ соотношеніяхъ къ шару, такъ и шаръ, быть можетъ, имѣетъ связь съ нѣкоторымъ извѣстнымъ тѣломъ, существующимъ въ пространствѣ 4-хъ измѣреній. Какъ относится квадратъ къ кубу, такъ можетъ относиться кубъ къ какой либо фигурѣ четвертаго измѣренія, которую мы можемъ назвать хотя «кубоидомъ» (или «сверхкубомъ»).

Безъ сомнѣнія, четвертое измѣреніе, такъ сказать, неосязаемо. Математики не просятъ насъ представлять себѣ четвертое измѣреніе, еще менѣе они просятъ вѣрить въ него. Нельзя предполагать, чтобы наиболѣе даже изучающій эту область могъ представить себѣ хотя умственно изображеніе четырехмѣрнаго пространства. Тѣмъ не менѣе особенности и отношенія фигуръ, предполагаемыхъ въ четырехмѣрномъ пространствѣ, могутъ быть изслѣдованы и установлены.

Алгебра есть наука о числахъ вообще. Она оказываетъ существенную помощь при изученіи геометріи. Алгебра широко оперируетъ съ такими уравненіями, какъ $xy = 12$, которое означаетъ, что x и y суть два такихъ перемѣнныхъ числа, которыя, будучи помножены другъ на друга, дадутъ 12; какъ, наприм., 3 и 4 или 5 и $\frac{12}{5}$ Всѣ простѣйшія геометрическія фигуры, какъ прямая линія и кругъ, могутъ быть изображены уравненіями, другими словами, уравненія—это сокращенныя описанія соотвѣтствующихъ геометрическихъ фигуръ. Математики показываютъ, что особенности соотвѣтствующихъ геометрическихъ фигуръ могутъ быть изучаемы гораздо скорѣе посредствомъ ихъ уравненій, чѣмъ посредствомъ прямого изученія самихъ фигуръ. Математикъ, понимающій этотъ способъ изученія, можетъ, смотря на уравненіе кривой, опредѣлить всѣ роды интересныхъ и полезныхъ особенностей ея, не только не видя самой кривой, но не имѣя даже представленія о ея изображеніи.

Не входя въ подробности, скажемъ, что одно уравненіе съ двумя перемѣнными представляетъ плоскую фигуру: такъ $x^2 + y^2 = 15$ изображаетъ кругъ. Одно уравненіе съ тремя перемѣнными представляетъ фигуру въ пространствѣ; такъ уравненіе $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ изображаетъ конусъ. Что же изображаетъ одно уравненіе съ четырьмя перемѣнными числами, скажемъ, напримѣръ, $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 20$? *По аналогіи* мы должны бы сказать, что оно изображаетъ фигуру въ пространствѣ четырехъ измѣреній. Хотя мы и не можемъ, вообразить такой фигуры, мы можемъ, однако, продолжить аналогію и изучить эту несуществующую фигуру посредствомъ ея уравненія, и такимъ образомъ мы можемъ вывести многія изъ ея особенностей.

Разница въ данномъ случаѣ просто такова: изучая уравненіе конуса, мы всегда можемъ имѣть дѣло съ реальнымъ конусомъ и толковать наши результаты на немъ самомъ. Изучая же уравненіе четырехмѣрной фигуры, мы должны обойтись безъ такого реальнаго толкованія. Другими словами, хотя наша геометрія держится на трехъ измѣреніяхъ, наша алгебра можетъ имѣть дѣло со всякимъ числомъ измѣреній и можетъ побуждать насъ воображать геометрію съ большимъ количествомъ, чѣмъ три измѣренія.

Набросаемъ кратко путь, которымъ алгебра можетъ помочь составить хотя слабое представленіе о фигурѣ, имѣющей *четыре измѣренія*.

Фигуру, имѣющую три измѣренія, изучаютъ обыкновенно посредствомъ ея равноотстоящихъ другъ отъ друга параллельныхъ сѣченій. Напримѣръ, если натуралисту нужно изслѣдовать подъ микроскопомъ клѣточку зародыша, онъ разрѣзываетъ ее тщательно на тончайшія пластинки и укладываетъ ихъ послѣдовательно на гладкомъ стеклѣ. Разсматривая затѣмъ послѣдовательно эти сѣченія, онъ можетъ представить себѣ все строеніе клѣточки зародыша.

Математики имѣютъ правила, по которымъ подобныя же сѣченія всякой трехмѣрной фигуры могутъ быть представлены посредствомъ уравненій. Они начинаютъ съ уравненія, которое представляетъ твердое тѣло, напримѣръ, съ уравненія $x^2+y^2+z^2=9$, представляющаго шаръ. Затѣмъ они выполняютъ рядъ нѣкоторыхъ дѣйствій, въ результатѣ которыхъ получаютъ ряды уравненій, представляющихъ послѣдовательныя сѣченія этого трехмѣрнаго тѣла. Остается затѣмъ только начертить изображенія сѣченій, данныхъ этими уравненіями, и изъ совмѣстнаго разсмотрѣнія всѣхъ этихъ изображеній можно составить себѣ ясное представленіе о формѣ взятаго начальнаго тѣла. Въ случаѣ шара сѣченія будутъ круги разныхъ величинъ.

Какъ мы уже сказали раньше, уравненіе, имѣющее четыре перемѣнныхъ числа, можетъ по аналогіи представлять фигуру въ пространствѣ четырехъ измѣреній. Предположимъ, что имѣемъ такое уравненіе:

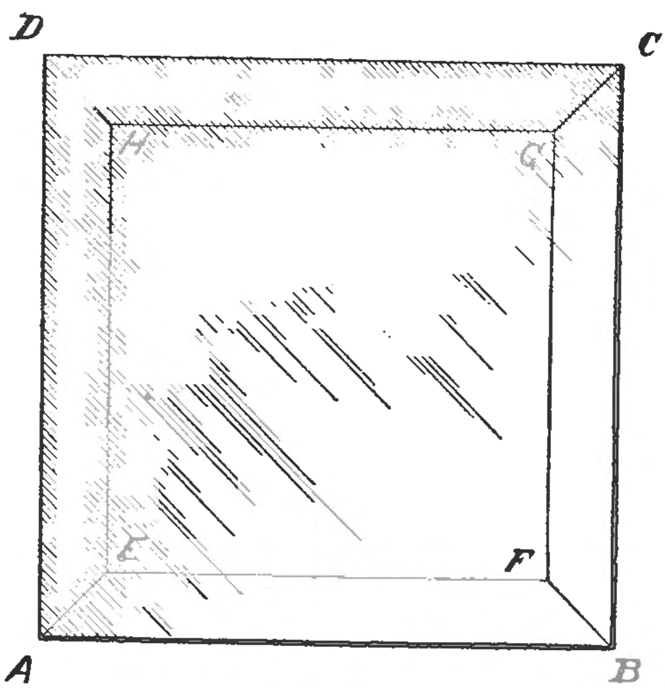
$$x^2+y^2+z^2+w^2=20.$$

Мы можемъ примѣнить здѣсь тѣ же, упомянутыя выше, правила и выполнить тѣ же дѣйствія, чтобы получить сѣченія фигуры, представленной этимъ уравненіемъ. Любопытно, но вполнѣ логично, что эти сѣченія представляютъ собой трехмѣрныя фигуры. По даннымъ, доставленнымъ результатами уравненій, математики могутъ сдѣлать себѣ модели полученныхъ тѣлъ изъ глины и положить эти твердыя тѣла въ ряды на столѣ передъ собой. Какъ натуралистъ, разсматривая въ микроскопъ послѣдовательный рядъ плоскихъ сѣченій клѣтки, получаетъ представленіе о строеніи всей клѣтки зародыша, такъ и математикъ можетъ разсматривать ряды глиняныхъ моделей передъ нимъ и по возможности «чувствовать», что онъ имѣетъ хотя нѣкоторое понятіе о природѣ четырехмѣрной фигуры, представленной уравненіемъ, изъ котораго онъ исходилъ.

Такимъ образомъ, мы видимъ теперь, какъ четвертое измѣреніе можетъ быть изучаемо посредствомъ уравненій, доставляемыхъ алгеброй.

Есть другой болѣе смѣлый путь. Мы уже видѣли, что можно расположить въ пространствѣ три пера такъ, что каждое изъ нихъ образуетъ прямой уголъ съ каждымъ изъ остальныхъ. Вмѣсто утвержденій, что безсмысленно, молъ, предполагать, что четвертое перо можетъ быть поставлено такъ, чтобы образовать прямые углы съ каждымъ изъ первыхъ трехъ, *предположимъ*, что это *можетъ быть сдѣлано*. Вслѣдъ затѣмъ уже безъ дальнѣйшихъ предположеній можетъ быть построена на чистомъ разсужденіи полная геометрія четырехъ измѣреній. Многія изъ заключеній такой геометріи будутъ не болѣе очевидны для смысла, чѣмъ основное предположеніе, изъ котораго она исходитъ. Слѣдуетъ помнить, однако, что это есть *только* допущеніе, и что все остальное можетъ быть выведено изъ этого единственнаго допущенія и изъ принциповъ нашей хорошо извѣстной планиметріи и геометріи тѣлъ.

Все сказанное выше о спеціальномъ способѣ изученія пространства четырехъ измѣреній можетъ служить примѣромъ того, какъ математики разсуждаютъ о нѣкоторыхъ вещахъ, не имѣя возможности дѣйствительно вообразить ихъ. Мы начинаемъ съ установленія отношеній между двумя и тремя измѣреніями, а затѣмъ устанавливаемъ подобныя же отношенія уже *по аналогіи* между тремя измѣреніями и четырьмя измѣреніями. Предположимъ, что передъ нами стоитъ на столѣ стеклянный кубъ. Закроемъ одинъ глазъ и устремимъ другой прямо въ низъ куба. Онъ представится намъ приблизительно такъ, какъ на прилагаемомъ рисункѣ (фиг. 47). Рисунокъ этотъ въ дѣйствительности есть плоская фигура (двухъ измѣреній) и можетъ быть начерчена слѣдующимъ образомъ: вычерчивается одинъ квадратъ внутри другого и затѣмъ прово-



Фиг. 47. Трехмѣрная фигура въ плоскомъ изображеніи. Видъ стекляннаго куба, если смотрѣть на него однимъ глазомъ сверху.

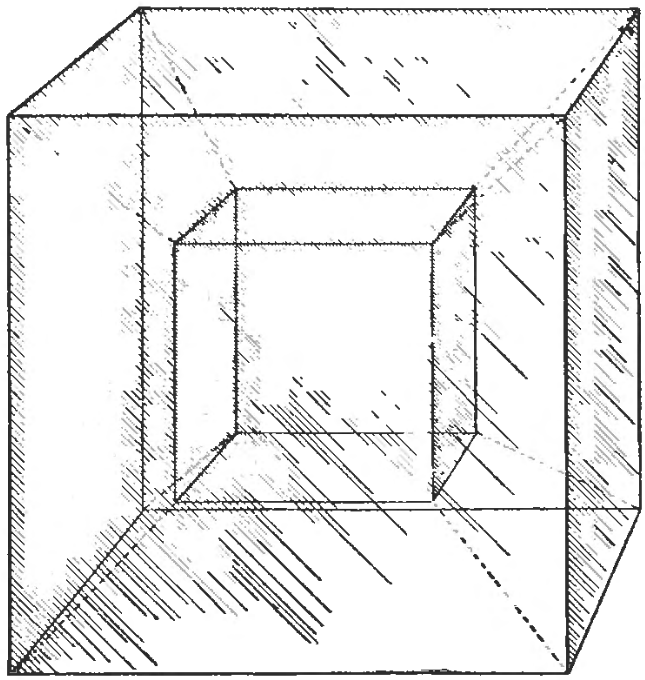
дятся линіи, соединяющія соотвѣтствующіе углы. Все это можетъ быть сдѣлано безъ всякой мысли о трехъ измѣреніяхъ.

Пчелы въ стеклянномъ ульѣ могутъ начертить такую же фигуру (фиг. 47), какая здѣсь передъ нами на бумагѣ, и на основаніи этой фигуры могутъ быть изучены многія изъ особенностей куба. Считая четырехстороннія фигуры (*ABCD*, *EFGH*, *AEFB*, *BFGC*, *CGHD*, *DHEA*), которыхъ шесть, мы узнаемъ, сколько граней имѣетъ кубъ. Считая точки верхнихъ угловъ, которыхъ восемь, мы узнаемъ, сколько имѣетъ кубъ вершинъ. Считая линіи, которыхъ двѣнадцать, узнаемъ, сколько въ кубѣ реберъ.

Итакъ, исходя изъ квадрата, мы въ состояніи построить двухмѣрную фигуру, которую въ цѣляхъ изслѣдованія можемъ разсматривать, какъ представляющую кубъ. Не можемъ ли мы точно также, исходя отъ куба, построить такую трехмѣрную фигуру, которая могла бы служить изображеніемъ той четырехмѣрной фигуры, которую мы зовемъ кубоидомъ, или сверхкубомъ? И вотъ, точно такъ же, какъ мы рисовали меньшій квадратъ внутри бо̀льшаго, такъ можемъ думать о меньшемъ кубѣ внутри бо̀льшаго куба, и какъ чертили линіи, соединяющія соотвѣтствующіе углы квадратовъ, такъ можемъ провести плоскости, соединяющія соотвѣтственныя ребра (края) кубовъ. Фигура, такъ образованная, нѣсколько несовершенно изображена здѣсь фигурой 48-й, и для ясности предположимъ, что у насъ есть дѣйствительно такое твердое стеклянное тѣло.

Въ случаѣ квадратовъ, выше, чтобы найти, сколько квадратныхъ граней имѣетъ кубъ, мы считали большой наружный квадратъ, маленькій—внутренній, четыре его окружающія четыреугольныя фигуры, и получили такимъ образомъ въ результатѣ шесть. Точно такъ же въ случаѣ кубовъ, чтобы найти здѣсь число кубическихъ граней въ кубоидѣ (сверхкубѣ), считаемъ большой наружный кубъ, маленькій внутренній кубъ и шесть окружающихъ его твердыхъ тѣлъ и такимъ образомъ получаемъ въ результатѣ *восемь*. Это показываетъ, что кубоидъ, или сверхкубъ, имѣетъ восемь ограничивающихъ его кубическихъ граней. Дальнѣйшее изученіе представленной здѣсь фигуры обнаруживаетъ, что кубоидъ имѣетъ 24 плоскихъ квадратныхъ грани, 32 ребра и 16 вершинъ. Такъ можемъ мы получить родъ изображенія четырехмѣрнаго тѣла и по этому изображенію изучать его нѣкоторыя особенности. Есть много соображеній, подтверждающихъ точность вышеизложенныхъ выводовъ, для которыхъ у насъ нѣтъ мѣста.

Какая же польза отъ этихъ обобщеній, отвлеченій и разсужденій? Приблизительно та же, что и отъ знанія того, вертится ли Земля вокругъ Солнца, или, наоборотъ, Солнце вокругъ Земли. Пространство собственно такой же предметъ науки, какъ планеты или геологическія наслоенія. Кромѣ того, изученіе подобныхъ основныхъ вопросовъ геометріи бросаетъ свѣтъ на нашъ собственный природный мыслительный запасъ. Мы узнаемъ такимъ путемъ лучше природу мыслительнаго процесса, и какъ развивается наука изъ простыхъ основныхъ элементовъ. Такія размышленія ведутъ иногда къ очень полезнымъ результатамъ.



Фиг. 48. Аналогичное изображеніе «кубоида» (или сверхкуба) 4-хъ измѣреній посредствомъ фигуры 3-хъ измѣреній.

Если вы держите пять шариковъ въ рукѣ и говорите, что отняли изъ нихъ восемь, то подобное увѣреніе покажется немыслимымъ такъ же, какъ понятіе о четвертомъ измѣреніи. Но, когда люди стали изображать черезъ —3 (отрицательное число) результатъ вычитанія 8 изъ 5 вмѣсто того, чтобы говорить, что это невозможно, то было положено основаніе огромнѣйшей и плодотворной науки —алгебры.

Допущеніе четвертаго измѣренія не привело еще ни къ какимъ существеннымъ практическимъ результатамъ. Но во всякомъ случаѣ нельзя утверждать, что наука о четырехмѣрной геометріи не можетъ имѣть полезныхъ примѣненій.

Проф. Карлъ Пирсонъ какъ-то сказалъ, что, быть можетъ, атомъ и есть мѣсто, откуда эѳиръ проникаетъ въ наше пространство изъ пространства 4-хъ измѣреній. Можно показать математически, что подобное допущеніе объясняло бы многія явленія матеріи. При настоящемъ состояніи нашихъ знаній такое предположеніе кажется фантастичнымъ даже самому высказавшему его. Впрочемъ, оно гораздо менѣе фантастично, чѣмъ предположенія германскихъ спиритовъ, смотрящихъ на 4-е измѣреніе, какъ на мѣстопребываніе какихъ-то безплотныхъ духовъ.

Четвертое измѣреніе въ доступномъ изложеніи.

(*Graham Demby Fitch*).

Нарисовать, хотя бы умственно, картину пространства четырехъ измѣреній—невозможно. Между тѣмъ четвертое измѣреніе не есть нелѣпость, а полезное математическое понятіе, не стоящее въ противорѣчіи съ правильнымъ развитіемъ геометріи. Чтобы выяснить его особое и символическое значеніе, необходимо прибѣгнуть къ сопоставленіямъ съ измѣреніями низшаго порядка.

О какой либо данной совокупности говорятъ, что она одного, двухъ или трехъ измѣреній, смотря по тому, — одно, два или три числа необходимы для опредѣленія какого либо изъ ея элементовъ.

Если разсматривать пространство, какъ совокупность точекъ, то линія есть пространство одного измѣренія, такъ какъ, чтобы опредѣлить на ней положеніе какой либо точки, достаточно одного числа, дающаго разстояніе этой точки отъ другой напередъ назначенной точки. Подобнымъ же образомъ, плоскость есть двухмѣрное пространство; а окружающее насъ «обыкновенное» пространство трехмѣрно.

Въ самомъ дѣлѣ, точное положеніе какого нибудь пункта на землѣ дѣлается извѣстнымъ, когда даны его географическая широта, долгота и высота надъ уровнемъ моря.

Значитъ, если мы имѣемъ нѣкоторыя четыре перемѣнныхъ количества и связанныя такъ, что каждое способно независимо отъ другихъ принимать всякую возможную числовую величину, то мы получаемъ нѣкоторую *четырехмѣрную* совокупность. Если такую совокупность принять состоящей изъ точекъ, то она и составляетъ какое-то четырехмѣрное пространство (сверхпространство), или пространство четырехъ измѣреній, какъ говорятъ.

Если мы соединимъ всѣ точки нашего обыкновеннаго трехмѣрнаго пространства съ какой-то подразумѣваемой точкой гдѣ-то внѣ его, то совокупность всѣхъ точекъ, соединяющихъ линіи и составитъ четырехмѣрное пространство (сверхпространство).

Съ другой стороны, какъ движеніе точки образуетъ линію, движеніе (не по собственному слѣду, а въ новомъ измѣреніи) линіи образуетъ плоскость, а движущаяся въ новомъ измѣреніи плоскость образуетъ трехмѣрное тѣло, такъ и это тѣло, движеніемъ еще въ новомъ направленіи уже внѣ нашего пространства, образовало бы сверхтѣло или часть сверхпространства. Иначе говоря, сверхпространство (пространство четырехъ измѣреній) можетъ произойти, какъ слѣдствіе движенія всего нашего пространства пераллельно самому себѣ по какому-то направленію *внѣ себя*, совершенно такъ же, какъ наше пространство можетъ быть образовано движеніемъ неограниченной плоскости, которая въ свою очередь сама образуется неограниченной прямой линіей.

Всякое пространство есть то, что образуетъ границу (сѣченіе) между двумя частями другого высшаго пространства. Какъ каждая неограниченная плоскость раздѣляетъ наше пространство на двѣ равныхъ безконечныхъ части, точно такъ каждое трехмѣрное пространство должно раздѣлять сверхпространство на двѣ равныя безконечныя области, между которыми это трехмѣрное пространство образуетъ границу безконечно малой толщины въ четвертомъ измѣреніи.

Въ сверхпространствѣ мы должны имѣть слѣдующія возможныя пересѣченія: сверхтѣло и трехмѣрное пространство въ пересѣченіи даютъ тѣло; два трехмѣрныхъ пространства пересѣкаются по плоскости; три трехмѣрныхъ пространства пересѣкаются по прямой линіи, четыре трехмѣрныхъ пространства пересѣкаются въ одной точкѣ, трехмѣрное пространство и плоскость пересѣкаются по прямой линіи; трехмѣрное пространство въ пересѣченіи съ прямой линіей даетъ точку; двѣ плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если пересѣченія имѣютъ мѣсто на безконечномъ разстояніи, то пересѣкающіеся элементы, какъ говорятъ, параллельны; и если два трехмѣрныхъ пространства параллельны, всѣ фигуры, или тѣла въ одномъ трехмѣрномъ пространствѣ находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ другого трехмѣрнаго пространства. Что касается плоскостей, то въ сверхпространствѣ существуетъ два рода параллелизма. Параллельныя плоскости вполнѣ или не вполнѣ параллельны, смотря по тому, находятся ли онѣ въ одномъ и томъ же или различныхъ трехмѣрныхъ пространствахъ, или же представляется ли пересѣченіе ихъ въ безконечности прямой линіей или точкой.

Въ одной и той же плоскости къ данной прямой линіи изъ данной на ней точки можно возставить только одинъ перпендикуляръ; между тѣмъ въ трехмѣрномъ пространствѣ можно провести безконечное число перпендикуляровъ, образующихъ вмѣстѣ одну перпендикулярную плоскость къ данной прямой. Значитъ, въ сверхпространствѣ можно провести безконечное количество перпендикулярныхъ плоскостей, образующихъ вмѣстѣ трехмѣрное пространство, перпендикулярное къ данной прямой линіи. Трехмѣрное пространство можетъ быть здѣсь, слѣдовательно, перпендикулярно къ плоскости или другому трехмѣрному пространству. Плоскости могутъ быть перпендикулярны двояко, вполнѣ или не вполнѣ перпендикулярны, согласно тому, находятся ли онѣ въ одномъ и томъ же трехмѣрномъ пространствѣ или нѣтъ. Въ послѣднемъ случаѣ всякая прямая линія одного трехмѣрнаго пространства перпендикулярна ко всякой прямой линіи другого.

Положеніе точки на плоскости можетъ быть опредѣлено ея разстояніемъ отъ каждой изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ линій [1]). Въ нашемъ трехмѣрномъ простран-

[1]) Эти прямыя носятъ названіе *координатъ*. Для выясненія понятія о координатахъ см. «Въ царствѣ смекалки», книга вторая: глава «Графики» (стр. 117—127), а также стр. 151, 155, 156 и др.

ствѣ положеніе точки можетъ быть опредѣлено ея разстояніемъ отъ каждой изъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей (координатныя плоскости), а въ сверхпространствѣ это положеніе опредѣлится ея разстояніями отъ каждаго изъ четырехъ взаимно перпендикулярныхъ трехмѣрныхъ пространствъ. Въ сверхпространствѣ эти разстоянія измѣряются соотвѣтственно *по четыремъ взаимно-перпендикулярнымъ* прямымъ, которыя, взятыя по двѣ, опредѣляютъ шесть взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, а взятыя по три,—опредѣляютъ вышеупомянутыя четыре взаимно-перпендикулярныя трехмѣрныя пространства.

Какъ въ нашемъ пространствѣ требуются по меньшей мѣрѣ три точки, чтобы опредѣлить плоскость, такъ въ сверхпространствѣ требуются по меньшей мѣрѣ четыре точки, чтобы опредѣлить трехмѣрное пространство. Трехмѣрное пространство, такимъ образомъ, можетъ быть опредѣлено двумя непересѣкающимися прямыми линіями, или одной плоскостью и точкой внѣ ея.

Какъ части нашего пространства ограничены поверхностями, плоскими или кривыми, такъ части сверхпространства ограничиваются сверхповерхностями (трехмѣрными), т. е. плоскими или изогнутыми трехмѣрными пространствами.

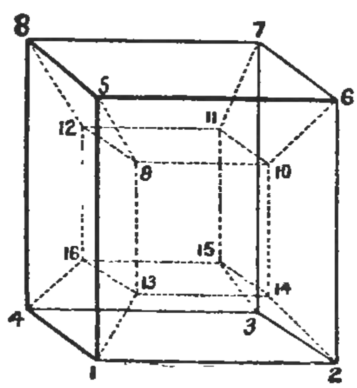
Сверхпространство содержитъ не только безконечное число плоскихъ трехмѣрныхъ пространствъ, подобныхъ нашему, но также безконечное число кривыхъ трехмѣрныхъ пространствъ или сверхповерхностей различнаго типа. Сверхсфера или сверхшаръ, напримѣръ, есть замкнутая сверхповерхность, всѣ точки которой находятся на равномъ разстояніи отъ ихъ центра. Пять точекъ, не лежащихъ въ одномъ и томъ же трехмѣрномъ пространствѣ, опредѣляютъ сверхсферу такъ же, какъ четыре точки, не лежащія на одной и той же плоскости, опредѣляютъ сферу, а три точки, не лежащія на одной прямой, опредѣляютъ окружность. Всѣ ея (сверхсферы) плоскія сѣченія—круги, и всѣ ея пространственныя сѣченія суть сферы.

Сверхсфера радіуса R, проходящая черезъ наше пространство, казалась бы сферой съ радіусомъ, постепенно увеличивающимся отъ нуля до R и затѣмъ постепенно уменьшающимся отъ R до нуля.

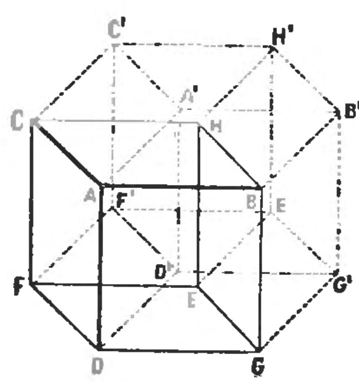
Въ то время какъ въ нашемъ пространствѣ только пять правильныхъ многогранниковъ (тѣла, ограниченныя равными правильными многоугольниками), и именно четырехгранникъ (тетраэдръ), шестигранникъ (кубъ), осьмигранникъ (октаэдръ), двѣнадцатигранникъ (додекаэдръ) и двадцатигранникъ (икосаэдръ), въ сверхпространствѣ *шесть* правильныхъ сверхтѣлъ, ограниченныхъ равными правильными многогранниками. Это C^5 (ограниченъ пятью четырехгранниками), C^8 (восемью кубами), C^{16} (шестнадцатью четырехгранниками), C^{24} (24 восьмигранниками), C^{120} (120 двѣнадцатигранниками), C^{600} (600 четырехгранниками).

Всѣ эти тѣла основательно изучены математиками, и модели ихъ изображенiй въ нашемъ пространствѣ были построены. Изъ нихъ C^9 (или сверхкубъ) простѣйшiй, потому что, хотя онъ ограниченъ и большимъ числомъ многоугольниковъ, чѣмъ C^5, за то онъ прямоугольный со всѣхъ сторонъ и, слѣдовательно, можетъ служить готовой мѣрой для измѣренiя сверхпространства. Сверхкубъ получается движенiемъ куба по какому-то направленiю, перпендикулярному къ нашему пространству, на разстоянiе, равное одной изъ его сторонъ.

На фиг. 50-й, гдѣ всѣ линiи, обозначенныя точками, предполагаются находящимся въ сверхпространствѣ, первоначальный



Фиг. 49.



Фиг. 50.

кубъ обозначенъ буквами $A\ B\ G\ D\ E\ F\ C\ H$, а конечный кубъ буквами $A'B'G'D'E'F'C'H'$, направленiе AA' предполагается перпендикулярнымъ къ нашему пространству. Проэктируя ребра сверхкуба на наше пространство, мы получаемъ сѣтчатую модель, плоская проэкцiя которой изображена на фиг. 49-ой. Восемь ограничивающихъ кубовъ изображены на модели слѣдующими знаками: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), (5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), (9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16), (13, 14, 15, 16, 1, 2, 3, 4), (1, 5, 9, 13, 2, 6, 10, 14), (2, 6, 10, 14, 3, 7, 11, 15), (3, 7, 11, 15, 4, 8, 12, 16), (4, 8, 12, 16, 5, 9, 13, 1).

Форма сверхкуба находится въ зависимости отъ взаимнаго отношенія этихъ кубовъ. Они только ограничиваютъ его. Самъ же сверхкубъ содержитъ безконечное количество кубовъ, подобно тому какъ кубъ содержитъ безконечное количество квадратовъ.

При образованіи сверхкуба движеніемъ куба, вершины послѣдняго образуютъ ребра сверхкуба, ребра куба производятъ квадратныя грани сверхкуба, а грани куба образуютъ кубы. Число элементовъ сверхкуба, слѣдовательно, таково (для ясности даемъ табличку его образованія):

	Начальный кубъ.	Образуется движеніемъ.	Конечный кубъ.	Сверхкубъ.
Вершины	8	—	8	16
Ребра.	12	8	12	32
Грани (квадраты) . .	6	12	6	24
Кубы	1	6	1	8

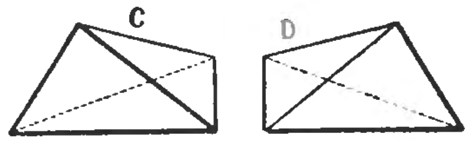
Каждая вершина сверхкуба есть общая четыремъ взаимноперпендикулярнымъ ребрамъ, шести гранямъ и четыремъ кубамъ; каждое ребро принадлежитъ тремъ гранямъ и тремъ кубамъ, и каждая грань принадлежитъ двумъ кубамъ. Всякій кубъ, слѣдовательно, имѣетъ одну грань, общую съ 6 изъ 7 другихъ.

Мы должны, слѣдовательно, воображать сверхкубъ, какъ составленный изъ кубовъ, начинающихся отъ параллельныхъ граней куба, и изъ этихъ кубовъ всѣ существующіе въ нашемъ пространствѣ параллельны квадратамъ, изъ которыхъ они начинаются.

Единственный возможный родъ вращенія въ плоскости, это— вращеніе вокругъ точки; въ трехмѣрномъ пространствѣ вращеніе можетъ совершаться вокругъ осевой линіи, а въ сверхпространствѣ и вокругъ осевой плоскости.

Двѣ симметрическія плоскія фигуры, какъ треугольники *A* и *B* (фиг. 51), не могутъ быть приведены къ совпаденію при какомъ угодно движеніи въ одной ихъ собственной плоскости; но при поворотѣ на 180 градусовъ одной изъ нихъ въ третьемъ измѣреніи одна совпадетъ съ другой. Подобнымъ образомъ два симметрическихъ тѣла (съ гранями равными, но въ обратномъ порядкѣ), такихъ, какъ, напр., пирамиды C и D (фиг. 52), не

Фиг. 51.



Фиг. 52.

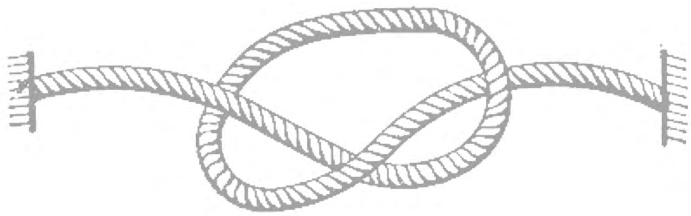
могутъ совпадать при движеніи въ нашемъ пространствѣ, но при поворотѣ одной изъ нихъ на 180 градусовъ въ сверхпространствѣ обѣ пирамиды совпадутъ.

Вращающаяся пирамида при этомъ должна исчезнуть изъ нашего пространства и по ея возвращеніи, послѣ вращенія на 180 градусовъ, она уже можетъ совпасть съ другой. Въ нашемъ пространствѣ два движенія вращенія слагаются въ одно окончательное вращеніе, подобное составляющимъ его вращеніямъ, исключая случай, когда направленіе оси различно. Въ сверхпространствѣ наоборотъ: здѣсь вообще нѣтъ движенія слагающагося изъ двухъ вращеній. Отсюда два различные типа движенія въ сверхпространствѣ, и тѣло, подчиненное двумъ вращеніямъ, находится тамъ въ совершенно различномъ условіи отъ того, когда оно подчинено только одному. При подчиненіи одному вращенію вся плоскость тѣла неподвижна. При подчиненіи двойному вращенію ни одна часть тѣла не остается неподвижной, исключая точки, содержащей двѣ плоскости движенія. Если же оба вращенія равны, всякая точка въ тѣлѣ, за исключеніемъ одной, описываетъ кругъ.

Свободъ движенія въ сверхпространствѣ болѣе, чѣмъ въ нашемъ. Степеней свободы твердаго тѣла въ пространствѣ 6, а именно: 3 перемѣщенія вдоль и 3 вращенія около 3 осей. Въ то же время прикрѣпленіе трехъ изъ точекъ тѣла можетъ предупредить всякое его движеніе. Въ сверхпространствѣ, однако, тѣло съ закрѣпленными тремя точками можетъ все еще вращаться около плоскости, проходящей черезъ эти точки. Въ сверхпространствѣ твердое тѣло имѣетъ десять возможныхъ различныхъ движеній (10 степеней свободы), а именно: 4 перемѣщенія вдоль 4 осей и 6 вращеній около шести плоскостей; и по меньшей мѣрѣ четыре изъ его точекъ должны быть закрѣплены, чтобы предупредить всякое движеніе.

Матеріальная точка въ нашемъ пространствѣ будетъ неподвижной, если связать ее съ тремя неподвижными точками внѣ ея. Въ сверхпространствѣ такая точка должна быть твердо связана по крайней мѣрѣ съ шестью точками внѣ.

Въ сверхпространствѣ упругая сфера можетъ быть безъ вытягиванья или разрыва вывернута на другую сторону. Два кольца цѣпи могутъ быть раздѣлены безъ разрыва. Наши узлы тамъ безполезны. Такъ, узелъ, показанный на фиг. 53, можетъ



Фиг. 53.

быть развязанъ безъ передвиженія скрѣпленныхъ концовъ. Какъ въ нашемъ пространствѣ точка можетъ войти въ кругъ и выйти изъ него (черезъ 3-е измѣреніе), не прикасаясь къ окружности, такъ въ сверхпространствѣ тѣло можетъ пройти въ сферу и изъ нея (или другое замкнутое пространство), не проходя черезъ поверхность, окружающую ее. Словомъ, все ограниченное и закрытое въ нашемъ пространствѣ, всякая внутренность плотнаго тѣла открыты для наблюденія или дѣйствія изъ четвертаго измѣренія, которое распространяется по совершенно невѣдомому намъ направленію отъ всякой точки пространства.

Имѣетъ ли сверхпространство реальное, физическое существованіе? Если да, то наша вселенная должна имѣть чрезвычайно малую толщину въ четвертомъ измѣреніи, иначе говоря, она подобна въ немъ геометрической плоскости, которую мы принимаемъ совсѣмъ не имѣющей толщины. Нашъ міръ въ такомъ случаѣ представляется только абстракціей (какъ и думали нѣкоторые идеалисты-философы), т. е. ничѣмъ инымъ, какъ «только тѣнью, бросаемой болѣе реальнымъ четырехмѣрнымъ міромъ».

Реальное существованіе тончайшаго протяженія въ четвертомъ измѣреніи можетъ упростить нѣкоторыя научныя теоріи. Напримѣръ, въ нашемъ пространствѣ 4 есть наибольшее число точекъ, взаимныя разстоянія которыхъ (числомъ 6) всѣ независимы другъ отъ друга. Но въ сверхпространствѣ 10 разстояній между каждыми 2 изъ 5 точекъ геометрически независимы. Если эту большую свободу положенія признать допустимой для атомовъ, то это помогло бы объяснить такое химическое явленіе, какъ изомеризмъ, гдѣ молекулы одинаковаго состава имѣютъ различныя свойства. Съ другой стороны, вращеніе въ сверхпространствѣ могло бы объяснить перемѣну въ тѣлѣ, происходящую справа въ то время, какъ слѣва происходитъ поляризація свѣта. Далѣе, проф. Макэндрикъ въ засѣданіи Британскаго научнаго общества сказалъ: «Можно думать, что жизнь есть не что иное, какъ переходъ къ мертвой матеріи... въ формѣ движенія своего рода (*sui generis*)».

Мысль о сверхпространствѣ была нѣсколько опошлена спиритуалистами, которые населили его измышленіями собственной фантазіи. Тѣмъ не менѣе, возможность его существованія никогда еще не была несовмѣстима съ научными фактами. Слѣдовательно, ограниченіе пространства тремя измѣреніями, хотя, быть можетъ, и правильное, есть чисто опытное (эмпирическое).

Къ чему же нужно понятіе сверхпространства? Хотя бы для одного: оно даетъ болѣе глубокій взглядъ на геометрію. Такъ, кругъ, разсматриваемый только въ одномъ измѣреніи, какъ совокупность ряда точекъ, имѣетъ очень мало особенностей. Между тѣмъ, разсматриваемый въ плоскости, онъ уже имѣетъ центръ, радіусъ, касательныя и т. д., а въ трехмѣрномъ пространствѣ онъ имѣетъ еще дальнѣйшія числовыя и геометрическія соотношенія съ сферой, конусомъ и т. д.

Подобнымъ же образомъ свойства какой нибудь данной линіи, или поверхности, увеличиваются въ числѣ, когда изслѣдуются въ сверхпространствѣ.

Итакъ, стоитъ только намъ включить въ трехмѣрное пространство какія нибудь одномѣрныя совокупности (спираль, напримѣръ), какъ до сихъ поръ неизвѣстныя линіи и поверхности дѣлаются математически возможными и въ сверхпространствѣ. Низшія пространства содержатся въ высшихъ, и какъ наши понятія о геометріи плоскости расширяются разсмотрѣніемъ плоскихъ фигуръ въ трехмѣрномъ пространствѣ, такъ и геометрія тѣлъ еще болѣе освѣщается геометріей сверхпространства. Математическія области, до сихъ поръ недоступныя геометріи, освѣщаются теперь геометрическими представленіями. Наконецъ, понятіе о сверхпространствѣ вноситъ полное различіе между геометрическимъ пространствомъ и дѣйствительнымъ (реальнымъ) окружающимъ насъ пространствомъ. Оба эти пространства не считаются болѣе необходимо одинаковыми, и такимъ образомъ опять-таки расширяются наши умственные горизонты.

И. Кантъ о пространствѣ.

При помощи внѣшняго чувства (свойства нашей души) мы представляемъ себѣ предметы, какъ находящіеся внѣ насъ и притомъ всегда въ пространствѣ. Въ немъ опредѣляются, или могутъ быть опредѣляемы ихъ форма, величина и взаимныя отношенія. Внутреннее чувство, посредствомъ котораго наша душа созерцаетъ самое себя или свое внутреннее состояніе, не даетъ, правда, представленія о самой душѣ, какъ объектѣ, однако существуетъ опредѣленная форма, въ которой только и возможно созерцаніе внутренняго состоянія души, а именно, все, что сюда относится, представляется въ отношеніяхъ времени. Внѣ насъ мы не можемъ созерцать времени, равно какъ не можемъ представить себѣ пространство находящимся внутри насъ. Что же такое пространство и время? Представляютъ ли они собою дѣйствительныя сущности? Быть можетъ, это лишь опредѣленія или отношенія вещей, но такія, которыя присущи вещамъ въ себѣ, т. е. если бы мы даже не созерцали ихъ? Или же они присущи только формѣ нашего созерцанія и, слѣдовательно, зависятъ отъ субъективнаго свойства нашей души, безъ котораго они отнюдь не прилагались бы къ предметамъ? Чтобы уяснить себѣ это, разсмотримъ сначала пространство.

1. Пространство не есть эмпирическое понятіе, отвлеченное изъ внѣшняго опыта. Для того, чтобы (въ опытѣ) извѣстныя ощущенія относить къ чему-нибудь, внѣ меня находящемуся (т. е. къ чему-нибудь, находящемуся въ другомъ пунктѣ пространства, а не въ томъ, гдѣ я нахожусь), равнымъ образомъ, чтобы представлять ихъ одно внѣ другого или одно рядомъ съ

другимъ, т. е. не только различными, но и находящимися въ различныхъ мѣстахъ,—для этого я уже долженъ имѣть представленіе о пространствѣ. Поэтому не представленіе пространства заимствуется путемъ опыта изъ отношеній внѣшнихъ явленій, а наоборотъ, самый опытъ возможенъ лишь при существованіи представленія пространства.

2. Пространство есть необходимое представленіе a priori и лежитъ въ основѣ всякаго внѣшняго созерцанія. Нельзя представить отсутствія пространства, хотя очень легко себѣ вообразить, что пространство не наполнено никакими предметами. Стало быть, въ пространствѣ должно видѣть условіе возможности явленій, а не зависящее отъ нихъ отношеніе; оно есть представленіе a priori, которое составляетъ необходимую основу внѣшнихъ явленій.

3. Пространство не есть отвлеченное или, какъ говорятъ, общее понятіе объ отношеніяхъ вещей, а чистое созерцаніе. Это видно, прежде всего, изъ того, что мы можемъ себѣ представить лишь одно пространство, и когда мы говоримъ о немъ во множественномъ числѣ, то разумѣемъ части одного и того же единаго пространства. Эти части не могутъ предшествовать этому единому, всеобъемлющему пространству, какъ его составныя части, изъ которыхъ его можно было бы сложить, но мыслятся только въ немъ. Оно вполнѣ едино, и разнообразіе въ немъ, равно какъ и общее понятіе о пространствахъ вообще основываются исключительно на ограниченіяхъ. Отсюда слѣдуетъ, что въ основѣ всѣхъ понятій о немъ лежитъ созерцаніе a priori (не извлекаемое изъ опыта). Такъ и всѣ геометрическія положенія, напр., что сумма двухъ сторонъ въ треугольникѣ, больше третьей, никогда не могутъ быть выведены изъ общихъ понятій о линіи и треугольникѣ, а выводятся изъ созерцанія, и притомъ a priori, съ аподиктической достовѣрностью.

4. Пространство наглядно представляется, какъ безконечная данная величина. Общее, отвлеченное понятіе о пространствѣ (одинаковое какъ для фута, такъ и для локтя) не можетъ ничего опредѣлить въ смыслѣ величины пространства. Если бы въ самомъ процессѣ созерцанія пространства не создавалась безграничность, то никакое понятіе объ отношеніяхъ въ немъ не привело бы за собою принципа его безконечности.

И. Кантъ о времени.

1. Время не есть понятіе эмпирическое, отвлеченное изъ какого-либо опыта. Сосуществованіе или послѣдовательность сами по себѣ не могли бы быть предметомъ воспріятія, если бы уже a priori не существовало представленіе времени. Только при этомъ условіи можно мыслить, что нѣчто

существуетъ въ одно и то же время (вмѣстѣ) или въ различное время (послѣдовательно).

2. Время есть необходимое представленіе, лежащее въ основѣ всякаго созерцанія. Изъ явленій время вообще невозможно устранить, хотя мыслимо время безъ явленій. Время, слѣдовательно, дано a priori. Только въ немъ возможна вся дѣйствительность явленій. Послѣднія могутъ совершенно отпасть, но оно само (какъ общее условіе ихъ возможности) не можетъ быть уничтожено.

3. На этой необходимости a priori покоится возможность аподиктическихъ положеній объ отношеніяхъ времени, или аксіомъ о времени вообще. Время имѣетъ лишь одно измѣреніе: различныя времена не могутъ существовать одновременно, а лишь одно послѣ другого (между тѣмъ какъ различныя пространства не могутъ существовать одно послѣ другого, а всегда одновременно). Эти принципы не могутъ быть выведены изъ опыта, такъ какъ послѣдній не далъ бы имъ ни строгой всеобщности, ни аподиктической достовѣрности. Мы могли бы тогда только сказать: такъ свидѣтельствуетъ обычное воспріятіе,—но не могли бы говорить: иначе не можетъ быть. Эти принципы имѣютъ значеніе правилъ, въ которыхъ только и возможенъ опытъ; они поучаютъ насъ до опыта, а не посредствомъ него.

4. Время не есть отвлеченное или, какъ выражаются, общее понятіе, а лишь чистая форма чувственнаго созерцанія. Различныя времена суть лишь части одного и того же времени. Но представленіе, которое можетъ быть сообщено только однимъ единственнымъ предметомъ, и есть созерцаніе. Положеніе, что различныя времена не могутъ существовать одновременно, также не можетъ быть выведено изъ общаго понятія. Какъ положеніе синтетическое, оно не можетъ возникнуть изъ однихъ только понятій. Слѣдовательно, оно непосредственно заключается въ созерцаніи и представленіи времени.

5. Безконечность времени обозначаетъ, что всѣ опредѣленныя величины времени возможны лишь благодаря ограниченіямъ единаго основного времени. Слѣдовательно, первоначальное представленіе времени должно быть неограниченнымъ. Но если отдѣльныя части и всякая опредѣленная величина предмета могутъ быть представлены лишь благодаря ограниченіямъ, то цѣлое представленіе не можетъ быть дано черезъ понятія (такъ какъ въ понятіи частичныя представленія предшествуютъ), а должно имѣть въ своей основѣ непосредственное созерцаніе.

Замѣчанія.

Кантъ въ другомъ мѣстѣ Критики чистаго разума» говоритъ, что «вещи, которыя мы созерцаемъ, равно какъ и ихъ отношенія, сами по себѣ не таковы, какъ они намъ представляются, и если бы устранили нашъ субъектъ или хотя бы только субъективныя свойства нашихъ чувствъ, то всѣ свойства и всѣ отношенія объектовъ въ пространствѣ и времени, а также само пространство и время исчезли бы, ибо, какъ явленія, они могутъ существовать не сами въ себѣ, а только въ насъ. Какъ обстоитъ съ предметами, взятыми сами въ себѣ, независимо отъ этой воспріимчивости нашихъ чувствъ, намъ остается совершенно неизвѣстнымъ».

На субъективность познаваемыхъ чувствами качествъ указывали различные философы до Канта (напр. Декартъ и Локкъ) и для Канта эта субъективность была, разумѣется, такъ же несомнѣнна, какъ и для нихъ. Онъ заходитъ дальше Локка въ томъ отношеніи, что время и пространство считаетъ тоже субъективными—какъ формы созерцанія,—но онъ тщательно отличаетъ идеальность времени и пространства отъ субъективности чувственныхъ качествъ. Тогда какъ различія въ цвѣтовыхъ впечатлѣніяхъ, вкусовыхъ ощущеніяхъ (у отдѣльнаго лица) и т. д. являются чисто индивидуальными и, слѣдовательно, вызываютъ сомнѣніе въ дѣйствительности, время и пространство Кантъ выдѣляетъ изъ *всѣхъ* формъ созерцанія, какъ нѣчто *всеобщее и постоянное*, почему Локкъ и отнесъ ихъ къ числу первичныхъ качествъ.

Міръ есть лишь явленіе, не только вслѣдствіе субъективности чувственныхъ качествъ, которыя индивидуальны и случайны, но и потому, что мы познаемъ его посредствомъ формъ созерцанія—времени и пространства,—которыя служатъ *необходимыми и всеобщими* условіями явленій. Противъ Кантовскаго доказательства идеальности времени и пространства выдвигаются нѣкоторыя вѣскія возраженія, которыя, въ главномъ, сводятся къ возстановленію правъ опыта и къ доказательству его участія въ происхожденіи понятій пространства и времени.

Въ дополненіе къ вышеприведеннымъ отрывкамъ изъ Канта и замѣчаніямъ къ нимъ приведемъ еще слѣдующія страницы изъ замѣчательной книги проф. Н. Н. Шиллера *Значеніе понятій о «силѣ» и о «массѣ»*.

§ 2. *Формы познанія сущаго.* Огромнымъ шагомъ впередъ, который можно сравнить съ прыжкомъ черезъ пропасть, и значеніе котораго, можетъ быть, даже до сихъ поръ не вполнѣ оцѣнено, было дойти до сознанія, что самыя первоначальныя наши представленія, вплетающіяся въ каждый элементъ нашего мышленія, каковы суть представленія о времени и пространствѣ не могутъ быть признаны точными копіями, воспроизводящими нѣчто объективно существующее, не могутъ быть также принимаемы за свойства объектовъ, а суть только формы, въ коихъ мы умѣемъ представлять себѣ существующее, и кои вполнѣ обусловлены свойствами нашихъ мыслительныхъ способностей. Если мы на время отвлечемся отъ мыслящаго человѣка, то внѣшній міръ все-таки останется, но не останется ни времени, ни пространства. Если на мѣсто человѣка поставимъ другое мыслящее существо, но съ другими мыслительными способностями, то для ума такого существа тотъ же самый несомнѣнно существующій міръ можетъ представиться въ какихъ-либо иныхъ формахъ, совершенно независящихъ отъ представленій времени и пространства.

Проф. Николай Николаевичъ Шиллеръ. Извѣстный русскій физикъ-философъ (1848—1910).

Это отрицательное по формѣ положеніе о несущественности элементарныхъ представленій тѣмъ не менѣе положительнымъ образомъ расширяетъ несказанно наше міровоззрѣніе. Вселенная не является уже намъ безконечною только по своему протяженію или вѣчною во времени. Пространство и время, съ помощію коихъ мы представляемъ себѣ вселенную и ея процессы и кои по величинѣ мыслятся нами необъятными, являются намъ только двумя формами представленія среди возможнаго безчисленнаго множества другихъ формъ, въ которыхъ способна быть познаваема та же вселенная для болѣе усовершенствованнаго разумнаго существа. Доразвиться же до любой степени умственнаго совершенства не лежитъ внѣ предѣловъ возможности и для человѣка. Такимъ образомъ вселенная становится для насъ необъятною не только по отношенію къ пространству и времени, но вообще по отношенію къ возможному безконечно большому числу формъ ея познаванія. Для человѣка, лишеннаго зрѣнія и знакомящагося съ окружающими его предметами посредствомъ чувства осязанія, представленіе о мірѣ все-таки значительно обобщается, коль скоро этотъ человѣкъ придетъ къ убѣжденію, что кромѣ чувства осязанія можетъ быть еще и иное средство общенія съ міромъ, средство (положимъ, зрѣніе), которымъ человѣкъ нашего примѣра даже сейчасъ и располагать не можетъ, но сознаніе о возможности существованія котораго можетъ побудить того же человѣка къ стремленію развить и усовершенствовать недостающее ему чувство. Точно такимъ же образомъ сознаніе возможнаго расширенія формъ мышленія, подобныхъ понятіямъ о пространствѣ и времени, ставитъ насъ на новую точку зрѣнія относительно познаванія міра и открываетъ намъ новыя возможныя направленія умственной дѣятельности человѣка.

Для того, чтобы, хотя до нѣкоторой степени, представить себѣ возможность измѣненія міросозерцанія съ измѣненіемъ формъ мышленія, прибѣгнемъ къ иллюстраціи, подобной той, которою неоднократно пользовался Гельмгольцъ. Вообразимъ себѣ нѣкоторое существо, которое живетъ и мыслитъ въ нѣкоторой плоскости и которое не имѣетъ способности представить себѣ что-либо существующее внѣ упомянутой плоскости. Пусть, однако, это существо можетъ координировать во времени явленія, происходящія въ его плоскомъ мірѣ. Вообразимъ себѣ, затѣмъ, нѣкоторую группу конусовъ, которые наша плоскость пересѣкаетъ, перемѣщаясь постепенно по перпендикулярному къ себѣ направленію. Группа конусовъ будетъ оставлять на движущейся плоскости слѣды въ видѣ круговъ или иныхъ коническихъ сѣченій, то расширяющихся, то суживающихся, то приближающихся другъ къ другу, то другъ отъ друга удаляющихся, сообразно съ распредѣленіемъ и взаимнымъ положеніемъ упомянутыхъ конусовъ и движущейся плоскости. Мы, имѣющіе способность мыслить въ трехъ пространственныхъ измѣреніяхъ, скажемъ, что существуетъ опредѣленная группа конусовъ, неизмѣнная со временемъ, при чемъ, конечно, мы можемъ мысленно перенестись въ то или другое сѣченіе этихъ конусовъ плоскостію, не теряя изъ виду всей группы. Не такъ представится то же обстоятельство для нашего фиктивнаго существа, живущаго и мыслящаго только въ плоскости. Группа конусовъ скажется ему движеніемъ сходящихся и расходящихся круговъ, или иныхъ коническихъ сѣченій, которыя, можетъ быть, ему покажутся притягивающими или отталкивающими другъ друга, при чемъ, можетъ быть, онъ усмотритъ также, съ своей точки зрѣнія, силы, дѣйствующія между частями одного и того же коническаго сѣченія, и откроетъ законы, управляющіе будто тѣмъ, что онъ называетъ по своему міромъ. Конечно, для насъ, обладающихъ болѣе разнообразными формами мышленія, нежели воображаемое плоскостное существо, его міровые законы представятся совсѣмъ въ иномъ видѣ. Пользуясь подобною же иллюстраціею, мы могли бы до нѣкоторой степени представить себѣ возможность разницы между нашимъ человѣческимъ міровоззрѣніемъ и міровоззрѣніемъ существа, одареннаго, можетъ быть, способностью мыслить болѣе чѣмъ въ трехъ пространственныхъ измѣреніяхъ.

§ 3. *Понятіе объ апріорности идеи не исключаетъ возможности понятія объ ея эволюціи.* Ходячее возраженіе противъ положенія объ апріорности элементовъ мышленія состоитъ въ томъ, что этой теоріи навязывается отрицаніе опыта, отрицаніе эволюціи человѣческаго разума и связи функцій этого послѣдняго съ физіологическими процессами нашего организма. Не трудно усмотрѣть слабыя стороны подобныхъ возраженій.

Прежде всего обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что человѣкъ имѣетъ замѣчательную способность наблюдать и обсуждать свои собственные умственные процессы, т. е. объективировать свою субъективную жизнь. Но такое объективированіе возможно для нашего анализирующаго ума не иначе, какъ съ помощію тѣхъ же присущихъ ему формъ мышленія, въ числѣ коихъ на первомъ мѣстѣ стоятъ временныя и пространственныя отношенія. Поэтому очевидно, что теорія апріорныхъ идей не только не можетъ отрицать распредѣленія мыслительныхъ процессовъ во времени и исключать связанное съ такимъ распредѣленіемъ представленіе объ эволюціи, но что подобныя понятія являются непосредственнымъ слѣдствіемъ этой теоріи, основанной на единствѣ разума и на непрерывности перехода отъ субъекта къ объекту. Эта же непрерывная связь между субъектомъ и объектомъ и обусловливаетъ, между прочимъ, то обстоятельство, что каждый шагъ впередъ въ развитіи нашего самопознанія сейчасъ же отражается шагомъ впередъ въ позваніи объективнаго міра, а также и наоборотъ. Подобнымъ же образомъ нисколько не идетъ въ разрѣзъ съ теоріею апріорныхъ представленій то обстоятельство, что разумъ, обсуждающій объективируемые имъ процессы мышленія, локализируетъ ихъ въ той иди другой части организма, ставя въ причинную связь (опять апріорная категорія) съ наблюдаемыми физіологическими процессами. Для теоріи важно то, что во всѣхъ случаяхъ такого самопознанія представленія и выводы нашего разума ограничены тѣмъ же самымъ опредѣленнымъ конечнымъ числомъ свойственныхъ разуму формъ познанія сущаго, какое ихъ число имѣетъ мѣсто при умозаключеніяхъ объ объективномъ мірѣ. Абсолютное познаніе сущаго мыслимо только подъ условіемъ исчерпанія всѣхъ возможныхъ формъ этого познанія, которыя могутъ намъ представляться не иначе, какъ въ безконечномъ множествѣ.

Обратимся, наконецъ, опять къ легче усваиваемому примѣру цвѣтовыхъ представленій. Замѣтимъ только въ началѣ же, что цвѣтовыя представленія нельзя принимать за полную аналогію съ пространственными или временными представленіями, ибо эти послѣднія входятъ непремѣнными элементами во всѣ наши мысли о мірѣ, тогда какъ первыя не являются неизбѣжными спутниками понятій о вещахъ, распредѣленныхъ въ пространствѣ и времени. Сходство цвѣтовыхъ представленій и апріорныхъ формъ познанія заключается въ ихъ условности, зависящей отъ творящаго ихъ человѣческаго разума. Итакъ, мы до очевидности сознаемъ, что цвѣту, какъ впечатлѣнію, нельзя приписать абсолютно объективнаго существованія, независимаго отъ свойствъ глаза наблюдателя. Однако такое сознаніе никакъ не влечетъ за собою сомнѣнія въ возможности послѣдовательнаго приспособленія глаза къ воспріятію свѣтовыхъ ощущеній и въ участіи многовѣковой практики при вырабатываніи способностей зрительнаго органа. Почему же отрицаніе объективнаго существованія времени и пространства, въ видѣ субстанцій, независимыхъ отъ свойствъ познающаго разума, должно вести къ заключенію объ отсутствіи опыта, послѣдовательнаго приспособленія и прогрессивнаго развитія въ вырабатываніи представленій о временныхъ и пространственныхъ отношеніяхъ? Можетъ быть, поводъ къ подобному недоразумѣнію былъ данъ тѣмъ варіантомъ толкованія теоріи апріорныхъ категорій, по которому эти послѣднія существуютъ данными въ нашемъ представленіи независимо отъ объекта, пріурочиваемаго къ нимъ уже потомъ. Дѣйствительная теорія апріорныхъ формъ познанія не имѣетъ ничего общаго съ ученіемъ о врожденныхъ идеяхъ. Апріорность времени и пространства сказывается только тѣмъ, что эти понятія являются уже включенными a priori во всякое наше сужденіе объ объектѣ, но вовсе не тѣмъ, что они возникли и сложились въ нашемъ умѣ независимо отъ объекта и прежде его. Если наше знаніе только формально и вполнѣ обусловлено свойствами нашего разума, то все же, какой бы видъ и какое бы направленіе это знаніе ни получило, оно немыслимо внѣ всякой зависимости отъ объекта, хотя сущность этой зависимости и оставалась бы для насъ всегда неопредѣленною.

Съ другой стороны, вопросъ объ эволюціи пространственныхъ представленій, или, выражаясь менѣе точно, вопросъ о воспріятіи пространства собственно не относится къ чистой теоріи познанія, будучи предметомъ практической или экспериментальной психологіи. Для теоріи познанія важна классификація и взаимное отношеніе готовыхъ уже понятій, откуда и вытекаетъ заключеніе о способѣ и направленіи мышленія при построеніи міровоззрѣнія. Конечно, трудно сразу представить себѣ, какъ изъ скромной, повидимому, задачи классификаціи понятій могутъ вытекать вопросы о міросозерцаніи; но нужно обратить вниманіе на то, что мы можемъ, правда, говорить, не зная грамматики, мыслить, не зная логики, строить мелодіи, не зная акустики, видѣть безъ оптики, вѣрить безъ знанія; но мы не можемъ познавать безъ теоріи познанія, ибо вѣнецъ и крайній предѣлъ всякаго знанія и представляетъ именно сама теорія познанія.

О числовыхъ суевѣріяхъ.

Число звѣря.

«Здѣсь мудрость. Кто имѣетъ умъ, тотъ сочти число звѣря, ибо это число человѣческое. Число его шестьсотъ шестьдесятъ шесть» (Откровеніе св. Іоанна XIII, 18).

Приведенный текстъ изъ Апокалипсиса всегда производилъ сильное впечатлѣніе на древнихъ и средневѣковыхъ толкователей, занимавшихся апокалиптической литературой. Особенно занимало оно послѣдователей Пиѳагорейской школы, всегда придававшей числамъ особый скрытый и мистическій смыслъ. Надъ выясненіемъ этой загадки трудились многіе въ продолженіе вѣковъ. Толкователи позднѣйшихъ временъ (1835 г.) Бенари, Фритче, Хитцигъ и Реуссъ связывали число 666 со словами «императоръ (Цезарь) Неронъ», написанными по-еврейски:

По древнееврейской системѣ обозначеній чиселъ находящіяся въ этихъ словахъ буквы означаютъ: קסר נרון

ק = 100, ס = 60, ר = 200, נ = 50, ר = 200, ו = 6, ן = 50.

Складывая эти числа (100 + 60 + 200 + 50 + 200 + 6 + 50), получаемъ, дѣйствительно, 666.

Такое скрытое обозначеніе имени Нерона писатели объясняютъ естественной боязнью современниковъ этого полусумашедшаго человѣка-звѣря. Когда же съ его смертью мало-по малу страхъ, возбуждаемый его именемъ, прошелъ, то забылось и значеніе числа, принятаго для обозначенія этого имени, и только спустя много времени опять вспомнили о немъ. Во всякомъ случаѣ представляется страннымъ, что одному изъ первыхъ отцовъ церкви - Иринею, жившему, по предположенію, всего около 100 лѣтъ послѣ того, какъ былъ написанъ Апокалипсисъ, была, очевидно, неизвѣстна связь числа 666 съ именемъ Нерона, такъ какъ для объясненія этого числа онъ самъ предлагалъ различныя комбинаціи словъ.

Въ средніе вѣка и позднѣе католики начали считать это число еретическимъ и означающимъ еретиковъ, въ частности протестантовъ. Протестанты, наоборотъ, находили несомнѣнную связь между этимъ числомъ и именемъ, или символомъ папы. Такъ, напр., принимая во вниманіе, что въ латинскомъ языкѣ буквы *M*, *D*, *C*, *L*, *X*, *V*, *I* употребляются въ видѣ числовыхъ знаковъ ($M=1000$, $D=500$, $C=100$, $L=50$, $X=10$, $V=5$, $I=1$), протестанты изъ титула папы «намѣстникъ сына Бога», написаннаго по-латыни (vicarius filii dei) выводили также звѣриное число, какъ видно изъ нижеслѣдующаго.

V I C A R I V S F I L I I D E I

$5+1+100+1+5+1+50+1+1+500+1=666$

Католики, въ свою очередь, производили подобныя же выкладки съ именемъ Мартина Лютера и т. д. Количество подобныхъ поясненій звѣринаго числа очень велико, и часто эти поясненія настолько противорѣчивы, что взаимно исключаютъ другъ друга. Словомъ, изъ факта, что нѣкоторый ключъ подходитъ къ замку, нельзя ничего вывести, если замокъ такого рода, что въ немъ можно повернуть почти каждый ключъ.

Всякія каббалистическія изысканія подобнаго рода, пожалуй, могутъ представлять извѣстный интересъ, какъ предметъ шутки или съ точки зрѣнія изобрѣтательности и пріемовъ счета, употребляемыхъ толкователями. Но когда подобныя числовыя выдумки употребляются какъ средства религіозной борьбы и возбужденія одной церкви противъ другой, то конечно, мы должны видѣть здѣсь лишь «покушеніе съ негодными средствами».

Числовая мистика.

Пріобрѣвшее всеобщую извѣстность и разсмотрѣнное въ предыдущей замѣткѣ «звѣриное число» принадлежитъ къ одному изъ весьма многочисленныхъ остатковъ той числовой мистики или просто числовыхъ суевѣрій, которыя ведутъ свое начало съ древнѣйшихъ временъ. Изученіе древнѣйшихъ дошедшихъ до насъ памятниковъ халдейской, египетской, индусской и китайской культуры доказываетъ, что древняя наука всегда была связана съ суевѣріемъ даже въ области «точныхъ» математическихъ знаній. Суевѣріе заключается обыкновенно въ томъ, что числамъ или геометрическимъ фигурамъ приписывались извѣстныя таинственныя свойства, устанавливались нѣкоторыя символическія соотношенія между числами, съ одной стороны, и божествами, личностями или событіями, съ другой. На основаніи этихъ соотношеній дѣлались обыкновенно различные выводы, гаданія и предсказанія. Числовая мистика подобнаго рода проходитъ черезъ всю исторію человѣческой культуры вплоть до нашихъ дней. Въ самомъ дѣлѣ, развѣ и въ настоящее время вы не встрѣчаетесь съ разговорами о «чортовой дюжинѣ», о нежеланіи сидѣть за столомъ въ числѣ 13-ти человѣкъ, о счастливыхъ и несчастливыхъ числахъ и дняхъ въ мѣсяцѣ и недѣлѣ, о той или иной роли, которую какое-либо число играетъ въ жизни какого-либо (обыкновенно «знаменитаго») человѣка и т. д.?

Человѣческому духу свойственно стремленіе къ чему-то болѣе общему и таинственному, чѣмъ то, что дается однимъ опытомъ (эмпиризмомъ) и нагляднымъ представленіемъ. Отвлекаясь въ область обобщенія и «чистаго разума», этотъ бѣдный человѣческій разумъ на первыхъ порахъ часто впадаетъ въ *слишкомъ* широкія обобщенія, подсказываемыя только однимъ «маленькимъ допущеніемъ» въ область... «сверхзнанія».

Въ отдѣлѣ о пространствѣ 4-хъ измѣреній намъ уже приходилось упоминать, какъ даже въ наше время чисто алгебраическое и аналитическое допущеніе «спириты» поспѣшили обратить въ какой-то «дѣйствительный міръ, населенный какими то «духами» и т. д. Что же удивительнаго въ томъ, что из-начала человѣческой культуры въ науку просто чиселъ вошелъ было элементъ таинственности и мистицизма, кажущійся теперь, пожалуй, смѣшнымъ, но въ свое время способствовавшій разработкѣ познанія чиселъ. Такъ, въ свое время мистическія бредни алхиміи и астрологіи способствовали появленію наукъ химіи и астрономіи. Такъ, въ настоящее время запутанные толки разныхъ «спиритовъ» и «теософовъ» объ области духовъ 4-хъ измѣреній вызываютъ людей трезвой науки дать свои заключенія и продолжить свои изслѣдованія хотя бы въ той же области *геометріи 4-хъ измѣреній*. Математика не должна бояться вопросовъ, а идти впереди ихъ.

Вотъ почему хотя бы бѣглый обзоръ мистики чиселъ въ исторіи развитія математическихъ знаній полонъ глубокой поучительности. Съ одной стороны, мы видимъ, какъ изъ общей массы всякихъ мистическихъ бредней и суевѣрій, словно зерно отъ шелухи, отдѣляется, въ концѣ концовъ, истинное знаніе. Съ другой,—интересно прослѣдить, какъ черезъ вѣка и тысячелѣтія доходятъ до нашихъ временъ извѣстныя суевѣрія и предразсудки.

Исторія обыкновенно такова: вымираютъ ученыя касты, разрушаются и гибнутъ культуры. Но тѣмъ или инымъ путемъ какое-либо мистическое ученіе проникаетъ въ широкія народныя массы и передается отъ народа къ народу, Богъ вѣсть, какими неуловимыми путями, и перерабатывается каждой народностью въ своеобразныя и причудливыя формы. Такъ, напр., въ задачѣ 4-ой настоящей книги можно съ большой долей вѣроятности видѣть отголоски древнѣйшихъ суевѣрій, связанныхъ съ числомъ 7.

Помимо египетскаго папируса Ахмеса, къ самымъ древнѣйшимъ памятникамъ математики принадлежатъ дошедшія до насъ таблички *клинообразныхъ* письменъ халдейской или вавилоно-ассирійской культуры. По взгляду большинства ученыхъ, халдейская культура есть наслоеніе двухъ культуръ: древнѣйшей—сумерійской и другой болѣе поздней—семитической.

Сумерійской культурѣ принадлежитъ единственная въ своемъ родѣ система *клинообразнаго* письма. Каждая буква въ этомъ письмѣ составлена изъ собранія чертъ, имѣющихъ видъ клина или гвоздя. Матеріаломъ для писанія служили квадратныя плитки изъ обожженной глины. Древнѣйшія поселенія Сумеровъ были на нижнемъ Евфратѣ: тамъ находились ихъ города Уръ и Сенкере. Въ Сенкере при раскопкѣ цѣлой громадной библіотеки найдены были въ 1854 г. двѣ глиняныя таблички, имѣющія не болѣе 15 миллиметровъ въ длину и ширину. Ученый Раулинсонъ указалъ, что одна изъ этихъ глиняныхъ табличекъ есть таблица квадратовъ цѣлыхъ чиселъ. Впослѣдствіи Ленорманъ показалъ, что вторая табличка есть табличка кубовъ.

Эти двѣ таблички, по мнѣнію Сэйса, извѣстнаго ассиріолога, составлены между 2300 г. и 1600 г. до Р. Х. По мнѣнію же другихъ, ихъ слѣдуетъ отнести къ еще болѣе раннему времени, а именно за 4500 лѣтъ до Р. Х. Если послѣднія предположенія вѣрны, то найденнымъ табличкамъ не менѣе 6000 лѣтъ. Можно думать, что таблички имѣютъ связь съ халдейской мистикой чиселъ. Вотъ что говоритъ по этому поводу проф. А. В. Васильевъ въ своей интересной публичной лекціи, прочитанной въ пользу высшихъ женскихъ курсовъ въ Казани въ 1886 году. Приводимъ изъ этой лекціи обширную выдержку:

Въ одной изъ табличекъ Ниневійской библіотеки царя Ассурбанипала сохранились имена главныхъ боговъ и противъ каждаго имени бога стоитъ извѣстное мистическое число, ему соотвѣтствующее. Напротивъ, злымъ демонамъ соотвѣтствуетъ рядъ дробныхъ чиселъ.

Встрѣчаются и заклинанія, основанныя на силѣ чиселъ. Тайна, которую божество Сумеровъ Эа повѣряетъ своему сыну, называется числомъ.

Въ собраніи риѳмованныхъ пословицъ и старыхъ народныхъ сумерійскихъ пѣсенъ мы встрѣчаемъ два куплета, которые, повидимому, должно было пѣть на сельскомъ праздникѣ:

«Злакъ, поднимающійся прямо, достигнетъ благополучнаго конца роста; число для этого мы знаемъ.

«Злакъ изобилія достигнетъ благополучнаго конца роста; число для этого мы знаемъ».

Къ сожалѣнію, хотя въ сохранившихся памятникахъ магіи часто упоминаются заговоры числами, хотя мы и знаемъ, что число 7 играло при этомъ особенно таинственную роль, но ни одинъ изъ заговоровъ не достигъ до насъ.

Такова роль чиселъ въ халдейской цивилизаціи.

Мы имѣемъ, поэтому, право предполагать, что наши (сенкерейскія) таблички столько же могли служить для цѣлей практической жизни, сколько и для составленія комбинацій, основанныхъ на свойствахъ чиселъ и имѣющихъ мистическое значеніе, употреблявшихся, можетъ быть, при гаданіяхъ.

Нельзя не поставить, напр., табличку кубовъ въ связь съ числомъ 36, равнымъ суммѣ кубовъ первыхъ трехъ чиселъ 1, 2, 3 и вмѣстѣ съ тѣмъ равнымъ суммѣ первыхъ четырехъ четныхъ и первыхъ четырехъ нечетныхъ чиселъ.

Это число тридцать шесть имѣло весьма важное значеніе на двухъ почти противоположныхъ концахъ стараго континента: въ Греціи, у пиѳагорейцевъ, и въ Китаѣ. У пиѳагорейцевъ высшая, самая страшная клятва была клятва числомъ тридцать шесть. Весь міръ, по ихъ мнѣнію, былъ составленъ изъ четырехъ первыхъ четныхъ и четырехъ первыхъ нечетныхъ чиселъ. У китайцевъ четыре первыя четныя числа представляютъ чистые и небесные элементы мірозданія, четыре первыя нечетныя числа—нечистые и земные, и сумма ихъ, т.-е. число тридцать шесть, символиризуетъ міръ.

Такая поразительная аналогія всего легче можетъ быть объяснена допущеніемъ, что идея о таинственномъ значеніи числа тридцать шесть возродилась еще на халдейской почвѣ, и вліяніемъ халдейскихъ идей, съ одной стороны, на крайній Востокъ, съ другой стороны—на Грецію. Такое вліяніе халдейской культуры нисколько неудивительно, если мы припомнимъ ту степень развитія, которой она достигла, напримѣръ, во времена Ассурбанипала (721—606 г. до Р. Х.), когда въ его дворцѣ находилась громадная библіотека, открытая для всеобщаго пользованія, содержавшая трактаты по грамматикѣ, исторіи, законовѣдѣнію, миѳологіи, естествознанію, астрономіи, астрологіи (содержаніе всей этой библіотеки заняло бы, по словамъ Смита, болѣе 500 томовъ in 4 по 500 стр. въ каждомъ), когда существовали уже археологи, по приказанію царя переводившие сумерійскія надписи на языкъ, бывшій въ то время въ употребленіи.

Есть еще другія основанія думать, что именно халдейскія идеи о таинственномъ соотношеніи между числами и явленіями, приводившія халдеевъ только къ заговорамъ и заклинаніямъ, обратились у даровитаго и одареннаго философскимъ духомъ греческаго народа въ важное философское ученіе Пиѳагора, положившее въ основаніе объясненія природы *числа*. Ученіе было создано Пиѳагоромъ, который, какъ говорятъ его жизнеописатели, жилъ долгое время на Востокѣ и между прочимъ посвятилъ продолжительное время изученію халдейской магіи. Мы имѣемъ, кромѣ того, свидѣтельство Ямблиха, который прямо указываетъ на халдейское происхожденіе многихъ математическихъ теоремъ. Сущность Пиѳагорейскаго ученія заключается въ слѣдующихъ словахъ ихъ ученія: «Вещи суть копіи чиселъ, числа—начала вещей».

Они почитали числа не только какъ основаніе всякаго познанія, не только какъ причину всякаго порядка и всякой опредѣленности, не только какъ управляющую міромъ божественную силу, но и прямо объявили, что міръ состоитъ изъ чиселъ.

Если одинъ толчокъ къ этому философскому ученію былъ данъ халдейскимъ взглядомъ на числа, то другой несомнѣнно былъ данъ подмѣченною великимъ умомъ Пиѳагора математическою опредѣленностью многихъ явленій. Современная наука и положительная философія ставятъ цѣлью познанія раскрывать во всѣхъ явленіяхъ эту математическую опредѣленность. Припомнимъ, напримѣръ, слова Канта: «въ каждомъ знаніи есть столько науки, сколько математики». Но мы не отожествляемъ теперь эту математическую опредѣленность явленій съ самими явленіями, какъ это сдѣлала Пиѳагорейская школа. Съ ея точки зрѣнія, объявившей всѣ вещи числами, естественно было затѣмъ заняться рѣшеніемъ вопросовъ, какія числа соотвѣтствуютъ какимъ вещамъ; и здѣсь открылся широкій просторъ ихъ фантазіи.

Прежде всего они объявили различие между четными и нечетными числами соотвѣтствующимъ различію между ограниченнымъ и неограниченнымъ, между мужскимъ и женскимъ. Затѣмъ они пошли далѣе. Справедливость, напримѣръ, которая отдаетъ равнымъ равное, отожествлялась съ квадратными числами, въ которыхъ оба множителя равны, напримѣръ, съ числомъ 4 или съ числомъ 9. Число 5, какъ сумма перваго мужского числа (3) и женскаго (2) (единица у пиѳагорейцевъ не считалась сама числомъ, а только началомъ всѣхъ чиселъ), называлось бракомъ.

Особенно важное таинственное значеніе придавалось двумъ числамъ: числу 7, которое играло такую важную роль въ халдейской миѳологіи, и числу 36, которое извѣстно было подъ названіемъ Tetractys. Я уже говорилъ о значеніи этого числа и о томъ, что это число, вѣроятно, также вавилонскаго происхожденія. Его особенности носятъ чисто математическій характеръ, и вообще пиѳагорейцы, установляя аналогіи между числами и вещами, должны были вдумываться въ математическія свойства цѣлыхъ чиселъ, тѣ свойства, которыми теперь занимается теорія чиселъ. Вотъ почему Пиѳагоръ и его школа могутъ считаться основателями этой науки. Школа Пиѳагора первая разсматривала рядъ чиселъ треугольныхъ. Такъ называются числа, которыя получаются, складывая подъ-рядъ, начиная съ перваго, нѣсколько цѣлыхъ чиселъ; таковы числа: 3, 6, 10,... Они же разсматривали числа «совершенныя», въ которыхъ сумма дѣлителей равна самому числу, и числа «дружественныя», т. е. пары чиселъ, изъ которыхъ первое равно суммѣ дѣлителей второго, и второе равно суммѣ дѣлителей перваго. Таковы, напр., 220 и 284. Ямблихъ, жизнеописатель Пиѳагора, разсказываетъ, что Пиѳагора спросили однажды, что такое другъ. Отвѣтъ былъ: «Тотъ, кто есть другой я, вотъ какъ числа 220 и 284».

Всѣ эти вопросы о треугольныхъ, совершенныхъ, дружественныхъ числахъ занимали затѣмъ наиболѣе извѣстныхъ математиковъ, напр., Эйлера.

Основная идея Пиѳагорейской школы имѣла большое вліяніе и на философію Платона, великаго почитателя математики, а стѣнахъ Академіи начертавшго: «Пусть никто не входитъ , кто не занимается геометріею». Платонъ и нѣкоторые учениковъ не были свободны отъ числовой мистики.

Но съ особенною силою возродилась эта числовая мистика въ ученіяхъ неоплатониковъ и неопиѳагорейцевъ, философскихъ школъ, образовавшихся въ то время, когда вліяніе Востока, и въ томъ числѣ халдейской религіи, халдейской магіи сдѣлалось особенно сильнымъ. У неопиѳагорейцевъ, напр., *число* есть прототипъ міра, первоначальная мысль божества, властитель надъ формами и идеями, посредствующій членъ между богомъ и міромъ. Понятно, что при такомъ взглядѣ на первый планъ должно было выступить теологическое, метафизическое и натурфилософское значеніе чиселъ. Понятнымъ дѣлается появленіе сочиненій, имѣющихъ заглавіемъ: «Ариѳметическія изслѣдованія о Богѣ и Божественныхъ вещахъ, или Ариѳметическія теологіи». Въ этой «Ариѳметической теологіи», авторъ которой есть неопиѳагореецъ язычникъ Никомахъ, слѣдующимъ образомъ разсматриваются числа отъ 1 до 10:

Единица есть божество, разумъ, добро, гармонія, счастье; она называется Аполлонъ, Геліосъ; но она можетъ разсматриваться и какъ матерія, тьма, хаосъ.

Два есть принципъ неравенства, предположенія; оно есть матерія, природа, вещество, основаніе всякой множественности; оно должно носить имя матери боговъ Изиды; оно есть источникъ всякой гармоніи, храбрость, потому что изъ него развиваются смѣло всѣ остальныя числа... и т. д. въ томъ же родѣ,

Послушаемъ еще еврея Филона. Вотъ какъ онъ объясняетъ, почему люди послѣ потопа жили 120 лѣтъ. Число 120 есть сумма 15 первыхъ чиселъ, 15 есть число свѣта, ибо послѣ новолунія въ 15 дней является полная луна; притомъ 120 есть 15-е треугольное число, имѣетъ пятнадцать различныхъ дѣлителей и всѣ частныя суть весьма важныя числа, при томъ сумма ихъ равняется 240, т. е. вдвое больше 120, что имѣетъ несомнѣнное отношеніе къ двойной жизни, духовной и тѣлесной, и т. д. и т. д. въ томъ же родѣ.

Подобныя же числовыя мистическія соотношенія находимъ мы у другихъ философовъ того же времени — Плотина, Ямблиха и другихъ.

Если такія соотношенія занимали выдающихся философовъ, то можно себѣ вообразить, какъ вообще были развиты числовыя бредни, предсказанія посредствомъ чиселъ и т. п. и т. п. среди массы общества. Къ этому-то времени относится извѣстный эдиктъ Юстиніана, изгонявшій изъ столицъ, вмѣстѣ съ астрологами, магами, и математиковъ; тогда-то математики и были объявлены злодѣями — mathematici-malefici.

Но наряду съ числовыми бреднями шло изученіе математическихъ свойствъ цѣлыхъ чиселъ. Тотъ же Никомахъ написалъ «Введеніе въ ариѳметику»—сочиненіе чисто научное, въ которомъ въ первый разъ дано полное ученіе о фигурныхъ числахъ, изложено ариѳметически ученіе о пропорціяхъ и т. п.

Каббала.

Изъ древности перешло въ средніе вѣка и здѣсь пышнымъ цвѣтомъ развилось цѣлое полурелигіозное, полуфилософское ученіе, носящее названіе *каббалы*. Это мистическое ученіе развивалось преимущественно евреями. Въ немъ наряду съ мистикой пиѳагорейцевъ, приписывавшей особенно таинственное значеніе самому числу, придавалось еще значеніе составленію чиселъ изъ буквъ слова. Буквамъ азбуки приписываются по порядку числа

$$1, 2, 3, \ldots 10, 20, 30, \ldots$$

Въ такомъ случаѣ каждому слову будетъ соотвѣтствовать извѣстное число. Соотношенія же, существующія между такими числами, указываютъ, молъ, на соотношенія между лицами или событіями. Такое суевѣріе носило имя *«каббалистики»*, и оно играло важную роль въ ученіи каббалы.

Въ исторіи философіи ученіе это сыграло довольно важную роль. Сущность его—пантеизмъ. Вотъ почему въ ученіи великаго философа-еврея Спинозы многіе не безъ основанія видятъ вліяніе каббалы. Подъ ея же вліяніемъ сложилась та числовая тарабарщина, которая играла извѣстную роль въ заклинаніяхъ алхимиковъ и магиковъ среднихъ вѣковъ, между которыми встрѣчаемъ время отъ времени такія почтенныя въ наукѣ имена, какъ Реймонда Лулліуса, гуманиста Рейхлина, Рожера Бэкона, врача Парацельса и мн. др.

Не разъ въ одной и той же личности совмѣщалось страстное увлеченіе каббалистикою съ не менѣе страстною любовью къ наукѣ. Однимъ изъ такихъ людей былъ извѣстный математикъ XVI столѣтія Михаилъ Стифель. Ему, напримѣръ, обязана алгебра введеніемъ знаковъ + и —, знака для корня и пр. И въ то же время складъ его ума постоянно увлекалъ его къ числовой мистикѣ.

Изъ текста *Videbunt in quem transfixerunt* (воззрятъ на того, кого пронзили), придавая буквамъ числовыя значенія, онъ вывелъ предсказаніе о погибели міра въ 1533 году, и крестьяне его прихода (Стифель былъ протестантскій пасторъ), расточившіе въ ожиданіи близкой кончины міра все свое имущество, когда кончины міра не послѣдовало, подъ ударами прогнали его въ Виттенбергъ, гдѣ онъ былъ спасенъ только благодаря личному заступничеству Лютера. Другой разъ, сидя въ ваннѣ, онъ составилъ сумму чиселъ, приходящихся на фразу *Vae tibi, Papa, vae tibi* (Горе тебѣ, папа, горе тебѣ!) и восторгъ его, когда получилось число 1260, мистическое число, былъ такъ великъ, что, подобно Архимеду, онъ выскочилъ изъ ванны, провозглашая «великое открытіе».

Но вскорѣ послѣ Стифеля наука теоріи чиселъ дѣлается уже независимой отъ числовой мистики, и послѣдняя становится достояніемъ только массы или мистиковъ, имѣющихъ весьма мало общаго съ наукою.

Изъ Запада числовая мистика всякаго рода перешла и въ Россію, гдѣ держалась весьма долго. Существуетъ «Ариѳмологія» 17-го вѣка, переведенная молдаваниномъ Спафаріемъ съ греческаго языка. Вопросы въ ней основаны на таинственномъ значеніи чиселъ. Вотъ эти значенія чиселъ до 12-ти, изложенныя стихами:

Дванадесять апостоловъ;
Единъ десять праотецъ;
Десять Божьихъ заповѣдей;
Девять въ году радостей;
Восемь круговъ солнечныхъ;
Семь чиновъ ангельскихъ;

Шесть крылъ Херувимскихъ;
Пять ранъ безъ вины Господь терпѣлъ;
Четыре мѣста Евангельски;
Три патріарха на землѣ;
Два главля Моисеовыхъ;
Единъ сынъ Маріинъ
Царствуетъ и ликуетъ
Господь Богъ надъ нами.

Тайнопись.

Настоящая глава можетъ служить какъ дополненіемъ предыдущаго, такъ и полезнымъ введеніемъ въ излагаемую дальше «Теорію соединеній». Съ одной стороны, мы увидимъ, что комбинаціями чиселъ и буквъ можно пользоваться не для мистическихъ, а чисто практическихъ цѣлей секретнаго письма. Съ другой, искусство тайнописи, какъ увидимъ ниже, многими сторонами примыкаетъ и связывается съ такъ называемыми *перестановками*, *размѣщеніями* и *сочетаніями*.

Потребность въ такомъ способѣ письма, который скрывалъ бы смыслъ написаннаго отъ посторонняго глаза и дѣлалъ бы его доступнымъ лишь для немногихъ посвященныхъ, существуетъ у людей съ древнихъ поръ. Отсюда и возникло искусство секретнаго письма, разросшееся въ наши дни чуть не до размѣровъ цѣлой науки—*криптографіи*. О тайнописи упоминаетъ еще Геродотъ и даже приводитъ образцы такихъ писемъ, которыя понятны лишь адресату. По свидѣтельству Плутарха, у спартанцевъ были въ употребленіи спеціальные механическіе приборы для записыванія и прочтенія тайныхъ посланій. Для записыванія религіозныхъ тайнъ жрецы пользовались особыми письменами, непонятными для непосвященныхъ.

У Юлія Цезаря была своя система тайнописи, при помощи которой онъ записывалъ свои тайны; *она была основана на замѣнѣ однихъ буквъ другими*,—пріемъ употребительный и въ наше время.

Въ средніе вѣка надъ изобрѣтеніемъ и усовершенствованіемъ криптографическихъ системъ работали многіе выдающіеся умы—какъ, напр., философъ Бэконъ Веруламскій, математикъ Віета, историкъ Гуго Гроцій и др.

Но высшаго своего развитія криптографія достигла лишь въ новое время, съ развитіемъ дипломатическихъ сношеній и сложныхъ торговыхъ оборотовъ, требующихъ соблюденія строжайшей тайны. Въ наши дни ежедневно по всему міру циркулируютъ сотни и тысячи такъ называемыхъ шифрованныхъ, т. е. тайнописныхъ телеграммъ. Важнѣйшія административныя мѣры во всѣхъ почти странахъ передаются шифрованными телеграммами. Точно также шифруется и большая часть военныхъ депешъ. Въ Германіи каждый офицеръ долженъ знать криптографію. Мы не говоримъ уже о дипломатахъ, которымъ «языкъ данъ для того, чтобы скрывать свои мысли»: они не останавливаются ни передъ какими затратами денегъ и времени, чтобы, полно и точно передавая депешу по назначенію, сохранить въ то же время и строжайшую тайну. Тайнопись находитъ себѣ обширное примѣненіе и въ торговомъ мірѣ, при разнаго рода биржевыхъ и т. п. спекуляціяхъ. Корреспонденты большихъ заграничныхъ газетъ, желая, чтобы ни одна газета не предупредила ихъ органъ въ опубликованіи какого-нибудь сенсаціоннаго извѣстія, также шифруютъ свои телеграммы.

Въ дальнѣйшемъ мы знакомимъ съ нѣкоторыми пріемами тайнописи. Читатель самъ сможетъ разсудить, насколько много въ криптографіи «математики». Но если математикѣ, собственно говоря, принадлежитъ здѣсь довольно скромная роль, то во всякомъ случаѣ легко убѣдиться, что свободное пользованіе тайнописью требуетъ, все же, запаса сообразительности и остроумія,—словомъ, въ обширномъ царствѣ смекалки и этому отдѣлу должно быть удѣлено извѣстное вниманіе.

Простая замѣна.

Казалось бы, самой простой системой тайнописи была бы простая замѣна общепринятыхъ буквъ какими-нибудь условными знаками или числами. Но это, какъ оказывается, далеко не падежная тайнопись, и при извѣстномъ навыкѣ очень легко доискаться до истиннаго смысла подобной криптограммы.

Пусть, напримѣръ, въ наши руки попала слѣдующая криптограмма, написанная по способу простой замѣны буквъ какими-нибудь числами (такъ что одинаковыя буквы замѣнялись одинаковыми же числами). Отдѣльныя слова разграничены тире, а буквы—запятыми.

1, 2, 3—2, 4—5, 6, 7, 8, 5, 9—2, 3, 8, 10—11, 12, 2, 9,
13, 5, 14, 15, 16—1, 17, 18, 19, 10—7—5, 11, 2, 10—15, 11, 19, 16, 20, 2, 21, 22.
23, 11, 15, 10—20, 18, 5, 11, 13, 10—24, 7, 25, 26—11, 15, 2, 11, 27, 13, 16, 20,
2, 21, 22.
17, 18, 27, 15, 18, 4, 8, 5, 9—28, 24, 7, 27, 10—1, 4, 2, 9.

Съ самаго начала видно. что передъ нами стихи, тождество концовъ строкъ обличаетъ риѳмы.

Вотъ одинъ изъ многихъ возможныхъ путей дешифрированія заданной криптограммы.

Обращаемъ вниманіе на второе слово первой строки—2,4. Цифра 4 не можетъ быть ъ, такъ какъ она встрѣчается въ серединѣ другихъ словъ той же криптограммы. Такимъ образомъ, 2,4 можетъ быть *бы*, *ли*, *не*, *на*. . .

Сопоставляя первыя два слова криптограммы:

1, 2, 3—2, 4

и принимая во вниманіе, что въ послѣднемъ словѣ четвертой строки (1, 4, 2, 9) цифры и 1 и 4 стоятъ рядомъ (слѣд., если 4 гласная, то 1 скорѣе всего согласная),—убѣждаемся рядомъ пробъ, что слова

1, 2, 3—2,4

суть:—*мнѣ не*.

Подставивъ во всѣхъ словахъ вмѣстѣ 1, 2, 3 и 4, буквы *м*, *н*, *ѣ*, *е*, обращаемъ вниманіе на четвертое слово первой строки—2, 3,8,10 = *нѣ* 8, 10. Очевидно, передъ нами слово *нѣтъ*: это подтверждается и частой повторяемостью числа 10 на концѣ словъ, заставляющей подозрѣвать въ ней букву *ъ*.

Точно такъ же выясняется, что послѣднее слово четвертой строки 1, 4, 2, 9 = *мен* 9 — *меня.*

Сдѣлавъ подстановку, обращаемъ вниманіе на первое слово четвертой строки:

17, 18, 27, 15, 18, *е*, *т*, 5, *я*

Подозрѣваемъ глагольную форму *тся.* Испытывая 5 = *с*, убѣждаемся, что третье слово первой строки: *с*, 6, 7, *тся* и четвертое второй строки: *с*, 11, *нъ*,—суть *спится* и *сонъ*.

(Слово *сынъ* отвергаемъ, ибо число 11, какъ стоящее въ началѣ послѣдняго слова первой строки, не можетъ быть *ы*).

Подставивъ найденныя буквы въ остальныя слова криптограммы, поступаютъ далѣе по тому же методу, т. е. обращаютъ прежде всего вниманіе на тѣ слова, въ которыхъ либо больше всего извѣстныхъ буквъ, либо получается характерное ихъ размѣщеніе. При этомъ, уловивъ размѣръ стиха, можно пользоваться правилами стихосложенія, угадывая число слоговъ въ словѣ (а слѣдовательно, и гласныхъ буквъ). Не слѣдуетъ пренебрегать и указаніями, которыя даетъ риѳма.

Въ результатѣ всѣхъ поисковъ, пробъ, подстановокъ и т. п. получаемъ слѣдующее четверостишіе (А. С. Пушкина):

Мнѣ не спится, нѣтъ огня,
Всюду мракъ и сонъ докучный;
Ходъ часовъ лишь однозвучный
Раздается близъ меня.

Въ общемъ весь ходъ дешифрированія сходенъ до извѣстной степени съ методомъ рѣшенія неопредѣленнаго уравненія рядомъ испытаній.

Между прочимъ, какъ извѣстно, древне-египетскіе іероглифы были «дешифрированы» именно такимъ путемъ.

Что такое „тарабарская грамота"?

Мы часто употребляемъ это выраженіе, но мало кто знаетъ его точный смыслъ. А между тѣмъ это просто опредѣленный видъ тайнописи, бывшій въ употребленіи въ древней Руси.

Согласныя буквы располагались въ два ряда, какъ показано ниже:

б	*в*	*г*	*д*	*ж*	*з*	*к*	*л*	*м*	*н*
щ	*ш*	*ч*	*ц*	*х*	*ф*	*т*	*с*	*р*	*п*

и при писанiи употребляли вмѣсто верхнихъ согласныхъ нижнiя, и наоборотъ. Гласныя же оставались безъ замѣны.

Такъ слово *человѣкъ* по «тарабарской грамотѣ» получало начертанiе: *гесошѣтъ.*

Само собой разумѣется, что такая тайнопись легко дешифрируется и не гарантируетъ тайны.

Другое названiе для «тарабарской грамоты»—«простая литорея», въ отличiе отъ «мудрой литореи», представлявшей болѣе сложную систему древне-русской тайнописи.

Системы перестановокъ.

Мы видѣли, что простая замѣна обычнаго алфавита другими условными знаками нисколько ни гарантируетъ тайны написаннаго: при извѣстномъ навыкѣ и остроумiи не трудно возстановить полностью весь шифрованный текстъ, не зная условнаго алфавита. Поэтому простой замѣной для серьезныхъ цѣлей никогда я не пользуются. Гораздо надежнѣе шифровать по методу такъ наз. *транспозицiи* (перестановки). Вотъ одинъ изъ простѣйшихъ способовъ.

Положимъ, требуется передать такую фразу:

Скупайте акцiи Нобеля.

Располагаютъ буквы этой фразы въ клѣткѣ прямоугольника въ какомъ-нибудь опредѣленномъ порядкѣ, напримѣръ снизу вверхъ:

п	*е*	*i*	*б*	*г*
у	*т*	*ц*	*о*	*я*
к	*й*	*к*	*н*	*л*
с	*а*	*а*	*и*	*е*

(Буква *z* поставлена лишь для заполненія пустого квадратика и не должна приниматься во вниманіе при дешифрированіи).

Теперь пишутъ буквы нашей таблички слѣва направо въ одну строку:

п е і б у т ц о я к й к н л с а а и е

и эту «тарабарщину» посылаютъ адресату. Послѣднему остается лишь размѣстить буквы въ рѣшеткѣ и читать написанное колоннами снизу вверхъ. Само собою разумѣется, что форма рѣшетки (5 × 4) и порядокъ чтенія (снизу вверхъ) составляютъ секретъ, извѣстный лишь отправителю и адресату. А такъ какъ рѣшетка можетъ быть самой разнообразной формы, точно такъ же какъ и порядокъ чтенія (сверху внизъ, по діагоналямъ и т. п.), то непосвященному довольно трудно дешифрировать такое посланіе.

Одно время въ военныхъ вѣдомствахъ всѣхъ странъ была весьма употребительна система тайнописи, близкая къ только что описанной. Объяснимъ эту систему на примѣрѣ. Подлежитъ передачѣ фраза:

Главнокомандующій прибудетъ въ семь вечера.

Принятъ опредѣленный числовой «ключъ» шифра, составляющій, конечно, тайну для непосвященныхъ. Пустъ такимъ «ключомъ» служитъ 23154.

Располагаемъ буквы депеши слѣдующимъ образомъ:

1.	2.	3.	4.	5.
г	*л*	*а*	*в*	*н*
о	*к*	*о*	*м*	*а*
н	*д*	*у*	*ю*	*щ*
і	*й*	*п*	*р*	*и*
б	*у*	*д*	*е*	*т*
в	*с*	*е*	*м*	*ь*
в	*е*	*ч*	*е*	*р*
а	*z*	*z*	*z*	*z*

Затѣмъ переставляемъ колонны буквъ въ порядкѣ нашего ключа:

2.	3.	1.	5.	4.
л	*а*	*г*	*н*	*в*
к	*о*	*о*	*а*	*м*
д	*у*	*н*	*щ*	*ю*
й	*п*	*і*	*и*	*р*
у	*д*	*б*	*т*	*е*
с	*е*	*в*	*ъ*	*м*
е	*ч*	*в*	*р*	*е*
z	*z*	*а*	*z*	*z*

Остается написать теперь всѣ буквы въ обыкновенномъ порядкѣ слѣва направо:

л а г н в к о о а м д у н щ ю й п і и р у д б т е
с е в ъ м е ч в р е z z а z z

Знающій «ключъ» легко прочтетъ такую телеграмму,— но попробуйте прочесть ее безъ «ключа»! Разумѣется, если перебрать всѣ возможныя перестановки изъ 40 элементовъ, то успѣхъ обезпеченъ, но для такой работы, какъ мы убѣдимся далѣе, нужны цѣлые годы.

Къ тому же, мы примѣнили эту систему пока лишь въ самомъ простомъ ея видѣ. Нѣтъ ничего легче еще болѣе затруднить дешифрированіе, почти нисколько ни затрудняя адресата. Такъ въ предыдущемъ примѣрѣ можно было условиться телеграфировать строки не въ ихъ естественномъ порядкѣ сверху внизъ, а въ любомъ иномъ:— сначала всѣ нечетныя строки, затѣмъ четныя; или въ алфавитномъ порядкѣ буквъ крайней колонны и т. п. Наконецъ, для вящшаго сохраненія тайны можно каждую букву замѣнить другой, отстоящей отъ нея въ алфавитѣ на опредѣленное число буквъ.

Квадратный шифръ.

Самая остроумная система этой категоріи тайнописи— употребленіе такъ наз. *квадратнаго* шифра. Суть его въ слѣдующемъ.

Буквы алфавита располагають въ вертикальные и горизонтальные ряды, какъ показано въ прилагаемой схемѣ:

	а	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	. .	. .	*э*	*ю*	*я*	*ѳ*	
а	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	*и*	. . . .	. .	*ю*	*я*	*ѳ*	*а*	
б	*в*	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	*и*	*і*	. . . .	. .	*я*	*ѳ*	*а*	*б*	
в	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	*и*	*і*	*к*	. . . .	. .	*ѳ*	*а*	*б*	*в*	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	. . . .	. .	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	. . . .	. .	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.		. . .	.	.			.	

и т. д. до конца алфавита.

Условный ключъ—слово «пушка». Чтобы зашифровать по этому способу ту же фразу «главнокомандующій прибудетъ въ семь вечера», производимъ слѣдующія манипуляціи: пишемъ буквы нашего ключа надъ буквами депеши:

п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у
г л а в н о к о м а н д у ю щ і й п р и б у д е т ъ в ъ с е м ъ
ш к а п у ш.
в е ч е р а.

Каждая буква нашей депеши вмѣстѣ съ соотвѣтствующей буквой ключа послужатъ намъ теперь координатами для избранія буквъ вышеприведенной таблицы. Въ вертикальной колоннѣ *г* и горизонтальномъ ряду *п* найдемъ букву *у*. Это и будетъ первая буква шифрованнаго текста. Далѣе на пересѣченіи колонны *л* и ряда *у* находимъ *я*—это вторая буква и т. д. Слово «главнокомандующій» изобразится при этомъ такъ:

у я щ н о ю ю ж ш б э ш к і ъ щ э

Легко усмотрѣть на этомъ примѣрѣ одно серьезное преимущество квадратнаго шифра: въ немъ однѣ и тѣ же буквы (*ю*, *ю*; *щ*, *щ*; *э*, *э*) обозначаютъ на самомъ дѣлѣ совершенно различные звуки; и, наоборотъ,—одинаковые звуки (*а*, *о*) получаютъ различное начертаніе (*а* = *щ* = *б*; *о* = *ю* = *ж*). Это создаетъ неимовѣрныя трудности для всякаго, кто пожелалъ бы разгадать смыслъ депеши, не зная «ключа». А между тѣмъ адресатъ, имѣющій ключъ («пушка»), безъ большихъ хлопотъ прочтетъ эту тарабарщину. Стоитъ ему лишь написать ключъ надъ текстомъ:

п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у
у я щ н о ю ю ж ш б э ш к і ъ щ э

и затѣмъ при разысканіи истинныхъ буквъ задаваться каждый разъ вопросомъ: какая буква помѣщена въ первомъ ряду таблицы надъ такой-то буквой такого-то ряда? Напр., для розысканія первой буквы спрашиваемъ: что стоитъ надъ *у* въ горизонтальномъ рядѣ *п*? Оказывается: *г* и т. д., пока не получимъ въ результатѣ все слово «главнокомандующій».

Словари для шифрованія.

Какъ ни остроумна система квадратнаго шифра, какъ ни затрудняетъ она чтеніе криптограммы непосвященнымъ,—все же дипломаты не считаютъ ее достаточно надежной. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что любопытствующій членъ дипломатическаго корпуса сосѣдней державы раздобылся текстомъ шифрованнаго посланія и какимъ-либо путемъ раскрылъ смыслъ одного лишь слова,—напр. въ вышеприведенной телеграммѣ ему посчастливилось заподозрить въ первой длинной группѣ буквъ слово «главнокомандующій»,—уже этого ему достаточно, чтобы рядомъ пробъ и испытаній добраться до «ключа» и, слѣдовательно, дешифрировать все посланіе.

Вотъ почему въ дипломатическихъ сферахъ употребляются совершенно иные способы тайнописи—именно такъ называемая система *словарей*.

Словари для шифрованія бываютъ двухъ родовъ: численные и буквенные. Въ первомъ случаѣ каждая группа цифръ, во второмъ—группа буквъ обозначаютъ какое нибудь слово. Пользуясь такимъ словаремъ, отправитель пишетъ посланіе на этомъ условномъ языкѣ, а получатель, при помощи словаря же, переводитъ его снова на общеупотребительный языкъ.

Само собою разумѣется, что въ дипломатическомъ корпусѣ каждой страны есть свой словарь, который держится въ строжайшей тайнѣ и экземпляры котораго выдаются немногимъ, вполнѣ надежнымъ и непосредственно заинтересованнымъ лицамъ. Случайная утрата словаря въ такихъ случаяхъ можетъ иногда повлечь за собой серьезныя послѣдствія, такъ какъ посланіе остается непрочитаннымъ. Разсказываютъ о подобномъ случаѣ изъ исторіи послѣдней русско-турецкой войны: помощникъ главнокомандующаго Мегметъ-Али, отлучившись, захватилъ съ собой по небрежности шифровальный словарь, въ его отсутствіе пришло на имя главнокомандующаго множество шифрованныхъ телеграммъ, которыя остались непрочитанными,—и въ результатѣ турки понесли изъ-за этого большой уронъ.

Счетныя машины.

Въ настоящемъ отдѣлѣ мы предполагаемъ ознакомить читателя съ одной изъ наиболѣе интересныхъ областей ариѳметики, а именно—съ исторіей и отчасти практикой счетныхъ машинъ. Думаемъ. что эта глава будетъ интересна для всѣхъ. Быть можетъ, для иныхъ она не останется даже безъ практической пользы. Счетныя машины совершенствуются съ каждымъ днемъ и все болѣе входятъ въ практику. Недалеко, пожалуй, то время, когда счетная машина завоюетъ въ культурномъ обиходѣ такое же мѣсто, какое уже завоевала пишущая машина.

Болѣе подробныя свѣдѣнія по исторіи вопроса желающій найдетъ въ классическомъ трудѣ Кантора «Исторія математики» и отчасти въ «Исторіи элементарной математики» Кэджори. Послѣдняя есть въ русскомъ переводѣ (изданіе «Mathesis»).

Обстоятельный очеркъ тому же вопросу посвящаетъ Э. Люка (Lucas) въ III-мъ томѣ своихъ знаменитыхъ «Récréations Mathématiques». См. также брошюру Л. А. Золотарева: «Какъ люди научились считать». Изд. 1910 года. Москва. — «Публичная лекція о *Цифраръ* діаграммометрѣ В. С. Козлова», читанная Эдуардомъ Люка въ 1890 году. (Переводъ съ франц. под. редакціей проф. А. В. Васильева. Казань. 1895.). Наконецъ. обращаемъ особенное вниманіе читателя на ученыя изслѣдованія по исторіи математики (въ древности и въ средніе вѣка) профессора Н. М. Бубнова. Изучая произведенія знаменитаго ученаго и дѣятеля среднихъ вѣковъ (X—XI вв. по Р. Х.) Герберта, впослѣдствіи папы Сильвестра II († 1003 г.), проф. Бубновъ обратилъ особенное вниманіе на математическія сочиненія этого замѣчательнаго человѣка. Жупелъ математики не испугалъ филолога, а, наоборотъ, подвинулъ его къ энергичному труду овладѣть предметомъ. Результатомъ неустанной работы талантливаго ученаго, помимо полнаго и обстоятельно комментированнаго изданія математическихъ произведеній Герберта (на латинскомъ языкѣ, изданіе Фридлендера и сына въ Берлинѣ Gerberti Opera Mathematica, Berolini 1899, Rob. Friedländer und Sohn, pp. XIX + 620), явились русскія книги «Ариѳметическая самостоятельность европейской культуры» (Кіевъ, 1908, стр. X+408), «Происхожденіе и исторія нашихъ цифръ» (Кіевъ, 1908, стр. 196), «Абакъ и Боэцій» (Журн. Мин. Нар. Просв. 1907—1910 и отдѣльно Спб. 1912, стр. 311), «Подлинное сочиненіе Герберта объ абакѣ» (Кіевъ, 1911), «Древній абакъ — колыбель современной ариѳметики» (Кіевъ, вып. I, 1912) и др.

Нѣтъ сомнѣнія, что эти труды сыграютъ важную роль въ исторіи нашей науки — и прежде всего потому, что въ нихъ наглядно указано, какъ историкъ математики долженъ отнестись къ историческому документу или сочиненію, попавшему ему въ руки, прежде чѣмъ дѣлать изъ него какія-либо заключенія. Вслѣдъ затѣмъ выводы, къ которымъ приходитъ проф. Бубновъ въ результатѣ своихъ огромныхъ и часто кропотливыхъ изслѣдованій, проливаютъ новый свѣтъ на чрезвычайно важные и интересные вопросы, какъ-то: о такъ называемыхъ *абацистахъ* и *абакѣ* древняго міра, о происхожденіи и выработкѣ нашихъ цифръ, о состояніи элементарной ариѳметики въ средніе вѣка и, наконецъ, едва ли не самой важной и смѣлой (но обстоятельной) въ научномъ отношеніи является попытка проф. Бубнова возсоздать систему элементарной математики классической древности изъ отысканныхъ имъ же ея обломковъ среди средневѣковаго хлама [1]).

[1]) Отрывки изъ изслѣдованій проф. Бубнова читатель найдетъ въ нашей «Математической Хрестоматіи». Книга 1-я.

Счетъ и число.

Понятія о счетѣ и числѣ представляются на первый взглядъ столь элементарными, что едва ли кто затруднится отвѣтить утвердительно на вопросъ, знаетъ ли онъ, что такое число?

Однако дать точное опредѣленіе понятій о счетѣ и числѣ вовсе не такъ просто; ибо если число возникло въ результатѣ счета, то и сознательный, приведенный въ систему счетъ немыслимъ безъ яснаго представленія о безконечной измѣняемости чиселъ, и о числѣ, какъ о выраженіи конкретнаго множества. (См. по этому поводу «Въ Царствѣ Смекалки», книга 2-я, стр. 116, 148—155 и др.).

Разсужденія о томъ, когда именно возникли у людей представленія о числѣ, какъ о выраженіи множества, совершенно праздны. Есть наблюденія, показывающія, что и животныя не лишены нѣкоторой способности къ подсчету, а между тѣмъ не могутъ выразить результатъ его ни звукомъ, ни движеніемъ, ни начертаніемъ. Исключительные случаи, достигнутые дрессировкой, не могутъ считаться доказательными.

А разъ человѣкъ еще раньше полнаго обособленія отъ животнаго таилъ въ себѣ зачатки понятій о числѣ, онъ не можетъ, конечно, помнить о процессѣ ихъ возникновенія, какъ не помнитъ о своей утробной жизни.

Безусловно важны въ исторіи числа и счета лишь процессы, съ помощью которыхъ люди научились схватывать и удерживать въ памяти, выражать, передавать другимъ и развивать врожденныя имъ несложныя числовыя представленія.

Изслѣдованія въ области языкознанія, наблюденія надъ числовыми представленіями дикарей, пережитки въ языкахъ культурныхъ представителей человѣчества показываютъ, что «реализація числа», т. е. отвлеченіе отъ частныхъ случаевъ множества къ общимъ, обособленіе опредѣленнаго множества отъ неопредѣленнаго, началось съ сопоставленія самаго элементарнаго свойства: множественность выражалась описательно, реченіями и оборотами: «столько, сколько я да ты»; «столько, сколько у меня глазъ»; «столько, сколько у животнаго ногъ»; «столько, сколько у меня пальцевъ».

Дѣйствительно, даже у наиболѣе культурныхъ народовъ, числительныя: «два, deux, duo, two, zwei», въ несомнѣнномъ родствѣ съ «ты, tu, du, toi, thou»; «vier»—съ «Vieh» (скотина); «пять, пентъ, fifth, fünf, five»—съ «пясть, пята, пента, fist, Faust»: «zehn»—съ «Zehen» (пальцы на ногѣ); англійское «digits» (единицы счета) съ digiti» (пальцы).

Рамки примѣровъ можно бы значительно расширить использованіемъ всѣхъ языковъ, живыхъ и мертвыхъ. Всѣ они подтверждаютъ возникновеніе представленій о числѣ и самыхъ названій чиселъ именно такимъ конкретнымъ, а не умозрительнымъ путемъ.

Орудія счета. - Босоногая машина.

Части тѣла человѣка и животныхъ, явясь, такимъ образомъ, первоначальными критеріями множественности, косвенно легли впослѣдствіи въ основаніе системъ счисленія. Съ усложненіемъ быта и взаимоотношеній между представителями человѣчества, съ развитіемъ культуры и расширеніемъ торговыхъ сношеній, выраженіе «множества» при посредствѣ глазъ, ушей, конечностей и т. п., становилось все менѣе и менѣе удобнымъ, и, мало-помалу, первенствующая роль въ ряду простѣйшихъ орудій счета перешла къ пальцамъ. Пальцы же послужили образцомъ для нѣкоторыхъ примитивныхъ числовыхъ знаковъ, а счетъ на нихъ легъ въ основаніе всѣхъ, получившихъ сколько-нибудь широкую извѣстность и распространеніе, системъ счисленія.

Естественно, что рука, въ качествѣ элементарнѣйшаго счетнаго прибора, должна была повести къ счету пятками: пятокъ яблокъ, пятокъ куръ, пятокъ яицъ существуютъ до сихъ поръ какъ ходячія выраженія предметнаго счисленія. Такой «пятокъ», отсчитанный на пальцахъ одной руки, положимъ, правой, и отложенный на другой загибаніемъ одного пальца, являлся *первой единицей высшаго порядка.* По мѣрѣ нарастанія пятковъ получались отсчеты: «одинъ пятокъ и два» (т. е. 7); «два пятка и три» (т. е. 13); «три пятка и четыре» (т. е. 19); «четыре пятка и палецъ» (т. е. 21), и т. д. Пять пятковъ на лѣвой рукѣ давали вторую единицу высшаго порядка (т. е. 25), которая отмѣчалась, положимъ, загибаніемъ мизинца лѣвой ноги. Всѣ пять пальцевъ лѣвой ноги составляли одну единицу третьяго порядка (т. е. 125), которая отмѣчалась однимъ изъ пальцевъ правой ноги, и т. д. Такимъ образомъ выраженіе «четыре пальца правой ноги, да два пальца лѣвой ноги, да три пальца лѣвой руки, да одинъ палецъ правой руки», значило бы на нашъ счетъ:

$$4 \cdot 125 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 1 = 566.$$

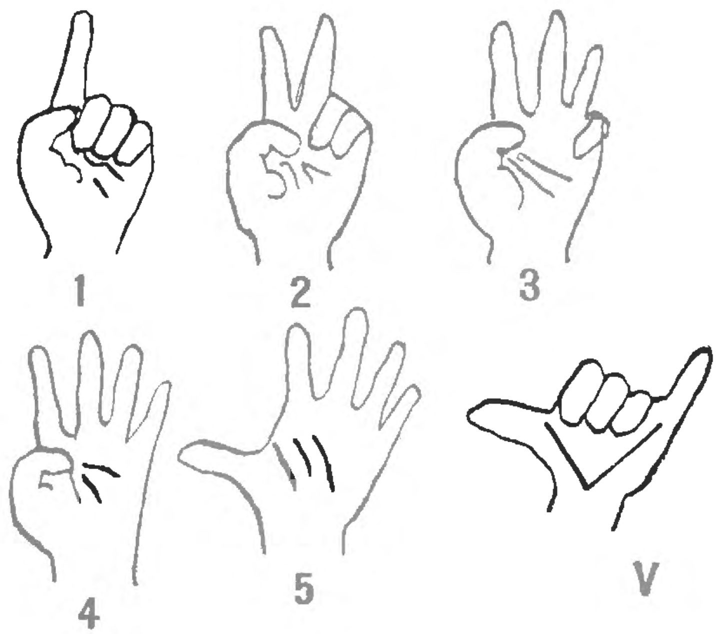
Судя по сохранившимся остаткамъ, такой счетъ нигдѣ не сложился въ прочную и законченную систему.

Родиной его слѣдуетъ считать Америку, гдѣ обрывки его въ ходу отъ крайняго сѣвера до крайняго юга. Изолировано онъ встрѣчается также у нѣкоторыхъ африканскихъ племенъ и у сибирскихъ инородцевъ.

Однако отсутствіе отдѣльныхъ названій для 25, 125, 625 и т. д. лишаютъ счетъ послѣдовательности. Для выраженія большихъ чиселъ приходится прибѣгать къ степенямъ чиселъ 10-ти и 20-ти.

Въ глубокой древности пятеричный счетъ принадлежалъ, вѣроятно, къ наиболѣе распространеннымъ: слѣды его находятся въ Гомеровскомъ діалектѣ Иліады и Одиссеи. Римскія цифры также носятъ явный отпечатокъ пятеричности. Такъ, отдѣльныя обозначенія существуютъ для единицы, для пяти, пятидесяти, пятисотъ, пяти и пятидесяти тысячъ. Самая цифра X представляетъ двѣ пятерки, сложенныя основаніями. Очертанія первыхъ пяти цифръ, несомнѣнно, получились изъ очертаній пальцевъ руки (фиг. 54). Пятеричныя цифры пережили пятеричный счетъ и наложили своеобразный оттѣнокъ на римскую нумерацію.

Конечно, счетъ пятками былъ счетомъ босоногаго человѣчества, съ подвижными пальцами ступни; потому онъ ранѣе другихъ частью забылся, частью усовершенствовался, давъ начало счету двадцатеричному. Съ другой же стороны, наиболѣе культурноспособныя человѣческія расы раньше другихъ стали обуваться и терять подвижность ножныхъ пальцевъ. Пока же всѣ ходили босикомъ, было совершенно естественно не останавливаться на пятеричномъ счетѣ, а продолжалъ счисленіе на пальцахъ ногъ, вплоть до двадцати. Новая единица счета, т. е. «двадцатка» называлась, вѣроятно, либо «человѣкъ», либо



Фиг. 54.

«шкура», по числу пальцевыхъ отростковъ на шкурахъ пятипалыхъ животныхъ.

На позднѣйшее происхожденіе двадцатеричнаго счета указываетъ малое распространеніе его среди теперешнихъ дикарей, параллельно съ многочисленными пережитками въ языкахъ наиболѣе цивилизованныхъ народовъ.

Такъ до сихъ поръ во французскомъ языкѣ въ ходу числительныя quatre-vingts, quatre-vingts dix, six-vingts, quinze-vingts; англичане сплошь и рядомъ считаютъ на «scores of pounds» (двадцатки фунтовъ стерлинговъ); они же говорятъ «three score» (60), «three score and ten» (70), «four score» (80) вмѣсто sixty, seventy и eighty; въ живой датской рѣчи не только сохранились числительныя «tresindstyve» ($3 \cdot 20 = 60$), «firesindstyve ($4 \cdot 20 = 80$), но и болѣе сложныя выраженія, соотвѣтствующія древнерусскимъ «полтретьядвадцата», «полчетвертадвадцата», «полпятадвадцата», вмѣсто 50, 70 и 90.

Какъ отсчитывались на пальцахъ рукъ и ногъ высшія единицы двадцатеричной системы т. е. «двадцатью-двадцать», «двадцатью-четыреста», «двадцатью-восемь тысячъ» — сказать довольно трудно. Вѣрнѣе всего, что въ счетѣ участвовало нѣсколько человѣкъ, изъ которыхъ первый отсчитывалъ единицы, второй двадцатки, третій четырехсотки, четвертый восьмерки тысячъ и т. д., подобно тому, какъ поступаютъ современные полудикіе американскіе кочевники при десятичномъ счетѣ.

Отдѣльныя названія для высшихъ единицъ двадцатеричнаго счета сохранились въ памятникахъ доисторическихъ народовъ Центральной Америки. Такъ напримѣръ, у майевъ (Юкатанъ) существовали непроизводныя названія для 20, для 400 (20^2), для 8 000 (20^3) и для 160 000 (20^4); у ацтековъ — для 20, для 400 и для 8 000.

Такимъ образомъ майи съ помощью пальцевъ рукъ и ногъ могли отсчитывать до двадцати разъ по 160 000, т. е. до 3 200 000.

Этимъ, вѣроятно, и ограничивалась у нихъ потребность въ счетѣ, такъ какъ нѣтъ указаній, чтобы они считали дальше.

На языкѣ майевъ наши, напримѣръ, 7 095 выразились бы какъ семнадцать четырехсотокъ, четырнадцать двадцатокъ и пятнадцать единицъ.

Тамъ же, на предполагаемой родинѣ двадцатеричнаго счета, т. е. въ Америкѣ, гдѣ онъ достигъ наивысшаго развитія, естественная двуногая и двурукая босая человѣческая счетная машина была впервые дополнена механическими приспособленіями. Есть достовѣрныя историческія свидѣтельства, что перуанцами употреблялись для этой цѣли разноцвѣтные шкуры съ завязанными на нихъ узлами (квипосы).

Такими же механическими дополненіями къ человѣческому тѣлу надо считать общеевропейскія «бирки» и на нихъ «рѣзы».

Въ классической странѣ несообразностей, консервативно-прогрессивной Англіи, счетъ бирками и рѣзами, на «scores of pounds», просуществовалъ до конца семнадцатаго столѣтія при взиманіи государственныхъ налоговъ и повинностей. Одинъ «score» вмѣщалъ въ себѣ двадцать фунтовъ стерлинговъ, одинъ фунтъ стерлинговъ — двадцать шиллинговъ.

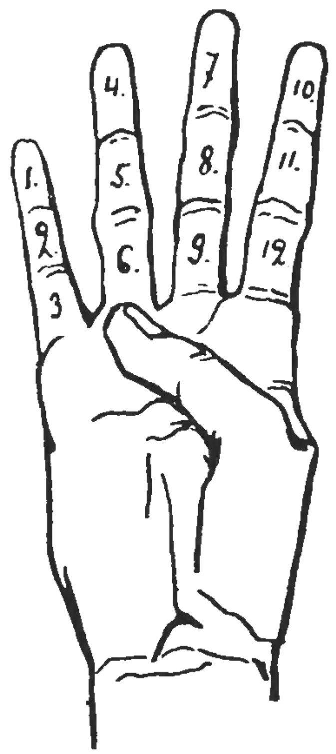
Сопоставленіе словъ «skin»—кожа, древне-англійскаго «core» — тѣло, и «score» — двадцать, невольно ассоціируется со «шкурой», въ смыслѣ двадцатипалой единицы. Бирки, на которыхъ рѣзами наносились «score of pounds» были оструганныя палки (tally, tallies). По заключеніи расчета, ихъ раскалывали пополамъ, и одна половина вручалась плательщику, другая сохранялась въ казначействѣ.

Такимъ образомъ, пережитки двадцатеричнаго счета, съ его примитивнѣйшими механическими приспособленіями, бирками и рѣзами, еще въ семнадцатомъ столѣтіи напоминали человѣку, что было время, когда онъ самъ, своей особой, игралъ роль босоногой счетной машины.

Орудія счета. Обутая машина.

Когда культурные представители человѣчества обулись и одѣлись въ долгополыя одежды, ноги перестали служить имъ орудіями счета. Остались только руки съ десятью пальцами и тремя суставами на каждомъ, за исключеніемъ большихъ.

Очень вѣроятно, что, только достигнувъ извѣстнаго культурнаго уровня, человѣкъ замѣтилъ, какое удобное счетное приспособленіе представляютъ суставы пальцевъ. Иначе двѣнадцатеричная система опередила бы десятичную, и, какъ болѣе удобная, не уступила бы ей первенства.



Фиг. 55.

Отсчетъ ногтемъ большого пальца правой руки суставовъ остальныхъ четырехъ пальцевъ, давалъ основаніе двѣнадцать, или дюжину (фиг. 55).

Аналогичное отсчитываніе дюжинъ на суставахъ пальцевъ лѣвой руки дало дюжину дюжинъ, или «гроссъ». Дальнѣйшаго развитія система, повидимому, не получила. Интересна она своей живучестью, а также тѣмъ, что легла въ основаніе шестидесятичной системы, употреблявшейся въ Вавилонѣ.

Ключъ къ послѣдней былъ найденъ на двухъ плиткахъ изъ обожженной глины, открытыхъ во время раскопокъ въ древнемъ Вавилонѣ. Первая содержала равенства вида:

$$1.4 = 8^2, \quad 1.21 = 9^2; \quad 1.40 = 10^2; \quad 2.1 = 11^2 \text{ и др.}$$

На второй находились числовыя коэффиціенты освѣщенной части луннаго диска, въ 240-хъ доляхъ луннаго діаметра, въ періодъ отъ новолунія до полнолунія, выраженная въ такой формѣ:

$$5,\ 10,\ 20,\ 40,\ 1.20,\ 1.36,\ 1.52,\ 2.8 \text{ и т. д.},$$

при чемъ всѣмъ числамъ меньшимъ шестидесяти соотвѣтствовали самостоятельные знаки. Формулы эти понятны и возможны лишь при условіи, что каждая единица влѣво, отдѣленная отъ предыдущей точкой, равна шестидесяти. Тогда дѣйствительно:

$$1.4 = 60 + 4 = 8^2; \quad 1.21 = 60 + 21 = 81 = 9^2$$
$$1.40 = 60 + 40 = 10^2; \quad 2.1 = 120 + 1 = 11^2$$
$$1.20 = 60 + 20 = 80; \quad 1.52 = 60 + 52 = 112$$
$$2.8 = 2 \cdot 60 + 8 = 120 + 8 = 128.$$

Шестьдесятъ называлось на языкѣ вавилонянъ «соссъ»; а шестьдесять соссовъ, или 3 600, называлось «саръ». Такимъ образомъ число 192 924 читалось и писалось у нихъ какъ «53 саръ 35 соссъ 24 единицы».

По мнѣнію Кантора и Кэджори, вавилонскій способъ счисленія «не могъ находиться въ связи съ устройствомъ человѣческаго тѣла».

Ошибка обоихъ кроется въ томъ, что ни одинъ изъ нихъ, повидимому, не наблюдалъ, какъ дѣйствуетъ счетная машина человѣческаго тѣла въ тѣхъ мѣстностяхъ земного шара, въ которыхъ по сю пору уцѣлѣли остатки шестидесятичнаго счета: мы говоримъ о широкой полосѣ на границѣ германскаго и славянскаго міровъ, захватывающей часть нашихъ сѣверо-западныхъ, западныхъ и юго-западныхъ губерній, отъ Кіева на югѣ и на сѣверѣ до Риги, и простирающейся на западъ черезъ Галицію, Саксонію, Бранденбургъ и Померанію до Данцига. Въ этой полосѣ, вдалекѣ отъ главныхъ центровъ, счетъ продолжается на *копы* (60 штукъ), «полукопы» (30 штукъ) и «мандели»

(15 штукъ). А лѣтъ 30—40 тому назадъ даже въ такомъ торгово-культурномъ центрѣ, какъ Рига, яйца и раки продавались на рынкахъ не иначе, какъ на мандели и копы (Schock).

Механизмъ счета былъ чрезвычайно простъ; загибая пальцы лѣвой руки, и продавцы и покупатели отсчитывали пятки; каждый пятокъ отмѣчался ногтемъ большого пальца правой руки на суставахъ остальныхъ четырехъ пальцевъ, начиная съ мизинца.

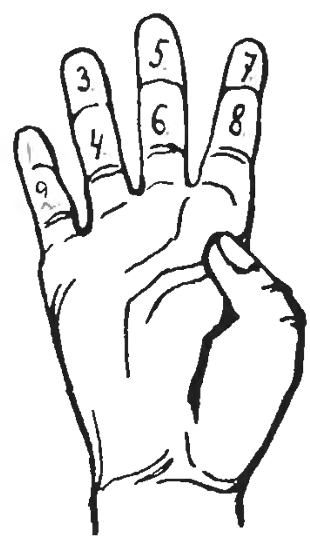
Мизинецъ давалъ первый мандель копы: безымянный—второй; средней—третій и указательный—четвертый. Самое нѣмецкое слово «Schock» звучитъ нѣсколько похоже на «зоссъ» и могло быть занесено съ Востока во время великаго переселенія народовъ. Этимологія и происхожденіе слова «Mandel» неизвѣстны. Русская «копа» одного корня съ «совокупность», «накопленіе», «копить».

Живая счетная машина человѣка дала начало и еще одной системѣ счисленія, весьма рѣдкой, отъ которой остались лишь жалкіе обрывки.

«Сорокъ сороковъ церквей» въ Бѣлокаменной, да уплата ясака «сороками соболей» инородческимъ населеніемъ Сибири, сорокъ фунтовъ въ пудѣ суть единственные пережитки нѣкогда весьма распространеннаго счета.

Начатки его опять-таки въ пальцахъ и рукѣ.

Грубая, заскорузлая, коротколапая рука сибирскаго звѣролова и кочевника не годилась для счета дюжинами, потому что укороченный большой палецъ, и то съ трудомъ, нащупывалъ на остальныхъ по два сустава вмѣсто трехъ. Цѣлая рука давала такимъ образомъ восемъ единицъ (фиг. 56), а пять пальцевъ другой руки позволяли отсчитать пять восьмерокъ, или сорокъ.



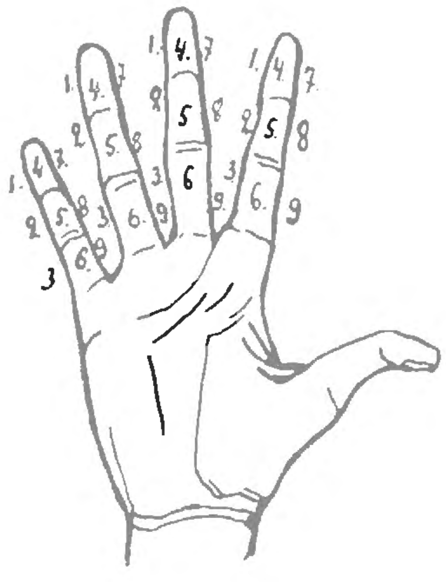
Фиг. 56.

Для «сорока сороковъ» требовалось, конечно, двое счетчиковъ.

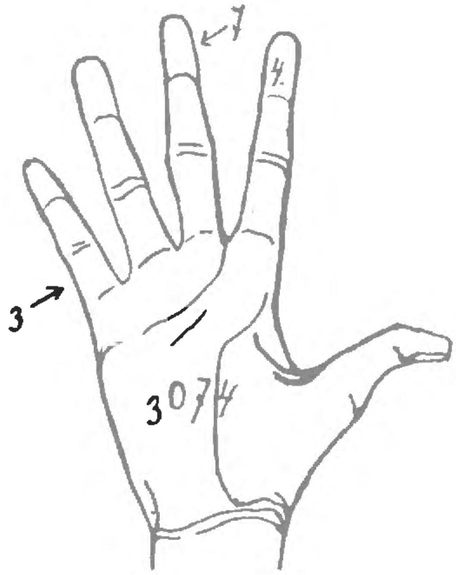
Наивысшаго расцвѣта счетъ на пальцахъ достигъ въ Китаѣ уже въ періодъ полнаго торжества десятичной системы счисленія.

Холеная, гибкая рука. съ длинными пальцами и ногтями, культурнаго китайца позволяла нащупывать на каждомъ суставѣ по три мышечныя утолщенія: два боковыхъ и среднее, итого на цѣломъ пальцѣ девять. Девять утолщеній, соотвѣтственно девяти цифрамъ, восемь разрядовъ, соотвѣтственно восьми трехсуставнымъ пальцамъ, позволяли отмѣчать прикосновеніемъ ногтя большого пальца всѣ числа отъ 1 и до 99 999 999 (фиг. 57).

Путешественники удостовѣряютъ, будто китайцы съ большимъ умѣньемъ сообщаютъ другъ другу съ помощью пальцевъ



Фиг. 57.



Фиг. 58.

биржевыя цѣны и коммерческія тайны. Они торгуются и совершаютъ сдѣлки молча на глазахъ многочисленныхъ свидѣтелей, спрятавъ руки подъ полами длинныхъ одѣяній.

Въ прежнія времена русскіе купцы также при сдѣлкахъ ударяли рука объ руку подъ полой кафтановъ. Обычай этотъ былъ перенятъ, вѣроятно, у китайцевъ, но съ утратой его внутренняго, практическаго смысла.

На фиг. 58-й соотвѣтствующими цифрами обозначено, какимъ порядкомъ прикосновеній могло бы быть отмѣчено и прочитано на одной рукѣ число 3 074.

Нашествіе обутыхъ варваровъ и торжество десятичной системы счета.

Расцвѣтъ двѣнадцатеричной и шестидесятеричной системъ счисленія предполагается около 2000 л. до Р. Х. въ халдейскомъ Урѣ. Предѣлъ дальнѣйшему его развитію и распространенію былъ положенъ разрушеніемъ Урской и Ассиро-Вавилонской цивилизацій.

Потокъ народовъ, стершій съ лица земли древнѣйшія культурныя царства, стоялъ на перепутьи отъ варварства къ культурѣ. Покорители Халдейскаго Востока сравнительно недавно обулись и перешли отъ пятеричнаго или двадцатеричнаго счета къ десятичному.

Кто они были—въ точности неизвѣстно. Но ихъ было много, и они были побѣдителями.

Послѣ временнаго пониженія уровня культуры наступилъ снова подъемъ умственной жизни и явились новые запросы духа. Тогда извѣстная живая счетная машина человѣческаго тѣла вскорѣ оказалась недостаточной. Невозможность производить на пальцахъ сложныя выкладки заставила искать вспомогательныхъ средствъ — сначала только для облегченія памяти, а потомъ и для выполненія операцій съ числами.

Счетныя пособія графическія и предметныя.

Выше мы уже говорили о биркахъ и узлахъ, какъ о средствахъ облегчить память, а также закрѣпить и сообщить другимъ результаты счета. Но ранѣе, чѣмъ бирки и узлы сдѣлались общимъ достояніемъ и счетными пособіями, искусство счета прошло черезъ болѣе элементарныя фазы. Такъ, несомнѣнно, что замѣна ограниченнаго числа пальцевъ камешками, раковинами, зернами предшествовала узламъ и биркамъ. Кучки однородныхъ подвижныхъ предметовъ облегчали счетъ и позволяли ощупью производить четыре основныхъ дѣйствія надъ числами не исключительно въ умѣ.

Результаты стали изображать условными знаками, число которыхъ первоначально было очень велико. Потребовалось много вѣковъ, пока люди убѣдились, что при десятичной системѣ счисленія достаточно десяти знаковъ для выраженія любыхъ чиселъ.

Условные знаки писались на пескѣ, на глинѣ, или иной пластичной массѣ, отмѣчались узлами, бирками, нестираемыми надписями. Камешковъ, раковинъ, зеренъ бралось первоначально столько, сколько было объектовъ счета и лишь впослѣдствіи стали приписывать имъ помѣстное значеніе, въ зависимости отъ взаимнаго ихъ положенія.

Ни исторія, ни преданіе не сохранили именъ тѣхъ, которые стали считать камешекъ или раковину, положенные лѣвѣе или правѣе, въ нѣсколько разъ больше или меньше своихъ ближайшихъ сосѣда или сосѣдки. Вѣроятнѣе всего, что такимъ изобрѣтателемъ явилось все человѣчество, додумавшееся сообща до счета: по пальцамъ, на пятки, десятки, дюжины, двадцатки, сорока и копы, приглашавшее отдѣльныхъ счетчиковъ для единицъ, отдѣльныхъ для десятковъ, отдѣльныхъ для сотенъ; приписывавшее пальцамъ на ногахъ числовое значеніе въ 25 и въ 125 разъ больше, чѣмъ пальцамъ на рукахъ.

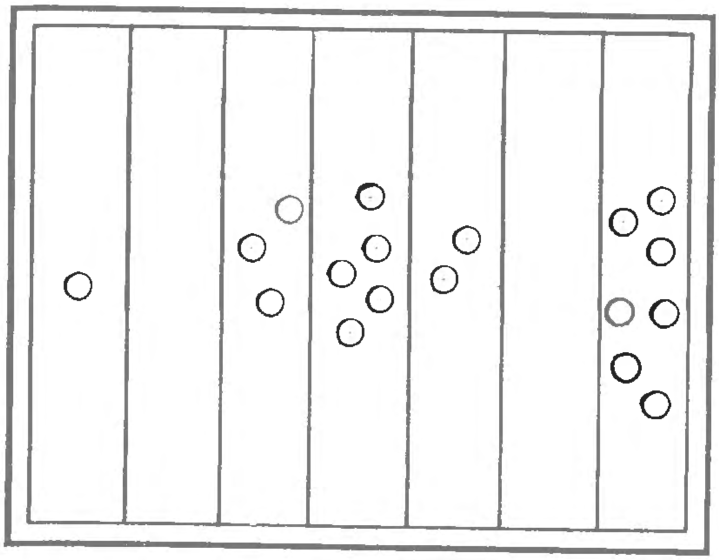
Отсюда уже одинъ шагъ къ графическому изображенію полосками, клѣтками или кружками полей, для помѣщенія въ нихъ предметовъ, или знаковъ, имѣющихъ помѣстно-возростающее или убывающее значеніе. Но человѣческій умъ затратилъ много времени прежде, чѣмъ додумался до этого шага.

Первый намекъ на такое счетное приспособленіе находимъ у Геродота. Онъ пишетъ:

«Египтяне считаютъ камешками, водя рукой справа налѣво, между тѣмъ какъ эллины водятъ рукой слѣва направо».

Въ чемъ состоялъ египетскій «счетъ камешками», достовѣрно неизвѣстно. Одно несомнѣнно, что столбцы, графы, клѣтки или поля, на которые клались камешки, были расположены въ горизонтальной послѣдовательности, иначе приходилось бы водить рукой снизу вверхъ, или сверху внизъ, а не справа налѣво (или наоборотъ). Значитъ столбцы, или графы, по отношенію къ считавшему, были вертикальные.

Изъ послѣдующихъ формъ, которыя принялъ счетъ въ Греціи, въ Римѣ и далѣе на западъ, можно лишь догадаться, что у современныхъ Геродоту грековъ значенiе камешковъ возрастало справа налѣво, у египтянъ же наоборотъ. Такъ, на прилагаемой фиг. 59-ой сочетанiе камешковъ въ графикахъ означало бы въ греческомъ чтенiи 1 035 207, а въ египетскомъ 7 025 301.



Фиг. 59.

Правильность такой догадки подтверждается всей дальнѣйшей исторiей развитiя искусства счета въ древнiе и среднiе вѣка. Ибо только изъ такихъ, какъ выше, графиковъ, могла возникнуть основная идея счетной машины древности, такъ называемаго «абака» [1]).

Абакъ и римскiе счеты.

Названiе «абакъ», по мнѣнiю нѣкоторыхъ, стоитъ въ связи съ семитическимъ корнемъ «бакъ», что значитъ «прахъ», въ смыслѣ «пыль» или «песокъ». Другiе же видятъ въ немъ коренное греческое слово «abax»—столъ.

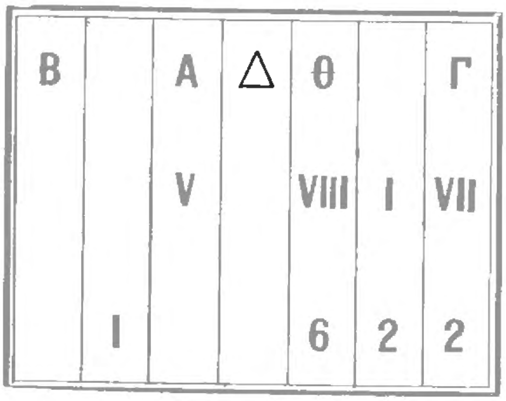
Словопроизводство отъ «бакъ—прахъ» неправдоподобно, хотя иные и доказываютъ, что въ первичной формѣ абакъ представлялъ собою доску, покрытую тонкимъ слоемъ пыли или песка, на которомъ чертили числовые знаки, буквы или геометрическiя фигуры, и что въ такомъ видѣ абакъ сохранился до послѣднихъ

---

[1]) Абакъ, греческое «абаксъ»; въ латинской транскрипцiи «abacus».

временъ древней культуры, въ качествѣ пособія при изученіи геометріи. Песокъ употреблялся синій, крашеный или естественный; вѣрнѣе мелкорастертая голубая глина, ложащаяся довольно плотнымъ, не легко сдуваемымъ слоемъ.

Въ школахъ абакъ исполнялъ роль грифельной доски, на которой писались, и вновь стирались, числовые знаки и геометрическія фигуры. На фиг. 60 представлены написанныя на абакѣ числа; греческимъ шрифтомъ 2 014 903; латинскимъ — 50 817 и арабскимъ — 100 622.



Фиг. 60.

Вѣрнѣе всего то, что для практическихъ цѣлей счетоводства, абакъ очень рано принялъ видъ разграфленной доски, на которой считали камешками, а впослѣдствіи марками или жетонами. Графы вначалѣ не имѣли наименованій, такъ что одинъ и тотъ же абакъ могъ служить и для денежныхъ расчетовъ, и для мѣръ длины, емкости и вѣса. Помѣстныя значенія камешковъ или жетоновъ мѣнялись въ зависимости отъ существовавшихъ отношеній между послѣдовательными единицами вѣса, цѣнности и мѣры. Извѣстному греческому мудрецу Солону приписывается изреченіе, что «человѣкъ, который дружитъ съ тиранами, подобенъ камешку при вычисленіи, значеніе котораго бываетъ иногда большое, а иногда малое». А у историка Полибія находимъ упоминаніе о маркахъ на абакѣ, которыя «обозначаютъ, по желанію считающаго, то таланты, то халкосы».

Встрѣчались и такіе абаки, которые были приспособлены исключительно для денежныхъ расчетовъ.

Такъ, въ 1846 году, при раскопкахъ на Саламинѣ, былъ найденъ мраморный абакъ огромныхъ размѣровъ до 2 арш. 2 верш. въ длину, при аршинѣ въ ширину — одинаково приспособленный для счета и на вавилонскіе и на аттическіе таланты. Онъ имѣлъ пять главныхъ столбцовъ и четыре дополнительныхъ. Главные столбцы предназначались, при счетѣ на вавилонскіе таланты, для талантовъ, тысячъ, сотенъ, десятковъ и единицъ драхмъ [1]); при счетѣ на аттическіе таланты для талантовъ, десятковъ минъ, единицъ минъ, десятковъ драхмъ и единицъ драхмъ [2]). На дополнительныхъ столбцахъ откладывались половины, трети и шестыя доли драхмы, или оболы [3]); на послѣднемъ—халкосы [4]).

Ближе къ верхнему краю, черезъ всѣ столбцы, проходила поперечная черта, о значеніи которой поговоримъ ниже.

Вѣрнѣе всего, что найденный абакъ употреблялся для расчетовъ въ большой мѣняльной лавкѣ, или служилъ въ притонѣ для азартныхъ игръ. Въ послѣднемъ случаѣ на столбцы могли ставиться и не жетоны, а звонкая монета, или же метаться кости, по мѣсту паденія которыхъ на тѣ или иные столбцы опредѣлялись размѣры выигрыша или проигрыша.

Жетоны или марки назывались у грековъ «псефы» (псефой), т. е. «камешки»; римляне, заимствовавъ абакъ, стали называть ихъ «calculi», т. е. «счетчики». Марки эти вначалѣ были безписьменные, гладкіе.

Вслѣдъ затѣмъ появляются жетоны *мѣченые*, т. е. съ обозначеніями первыхъ десяти знаковъ или чиселъ, греческимъ или римскимъ письмомъ. Изобрѣтеніе ихъ приписывается новопиѳагорейцамъ, почему и самый абакъ съ числовыми жетонами сталъ называться у римлянъ «mensa pythagoreana», т. е. «пиѳагоровъ столъ». Эти «пиѳагоровы столы» не пользовались вначалѣ особеннымъ распространеніемъ, вслѣдствіе мѣшкотности процесса при переходѣ отъ числа, написаннаго римскими цифрами, къ изображенію его на абакѣ и обратно.

Такъ, напр., число 2 973 римскими цифрами писалось такъ:

MMDCCCCLXXIII

Для перевода на языкъ столбцовъ его требовалось предварительно расчленить, что, примѣнительно къ теперешнему знакоположенію, могло бы быть изображено какъ

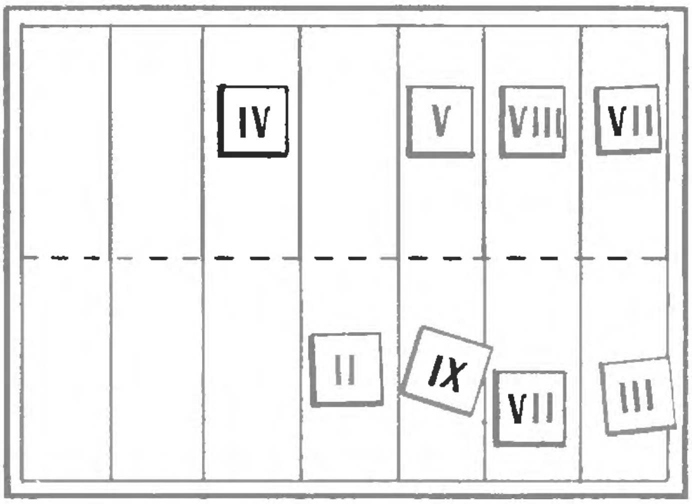
MM + DCCCC + LXX + III

[1]) Вавилонскій талантъ равнялся 10 000 драхмъ.
[2]) Аттическій талантъ составлялъ 60 минъ; мина = 100 драхмъ.
[3]) Драхма = 6 оболамъ.
[4]) Оболъ = 8 халкосамъ.

Послѣ того, написанное жетонами на столбцахъ абака, или пиѳагорова стола, оно представилось бы какъ на фиг. 61-ой (внизу).

На томъ же рисункѣ, сверху, отдѣленное отъ нижняго пунктиромъ, изображено жетонами число

$$40\,587 = \overline{\mathrm{XL}}\,\mathrm{DLXXXVII}$$



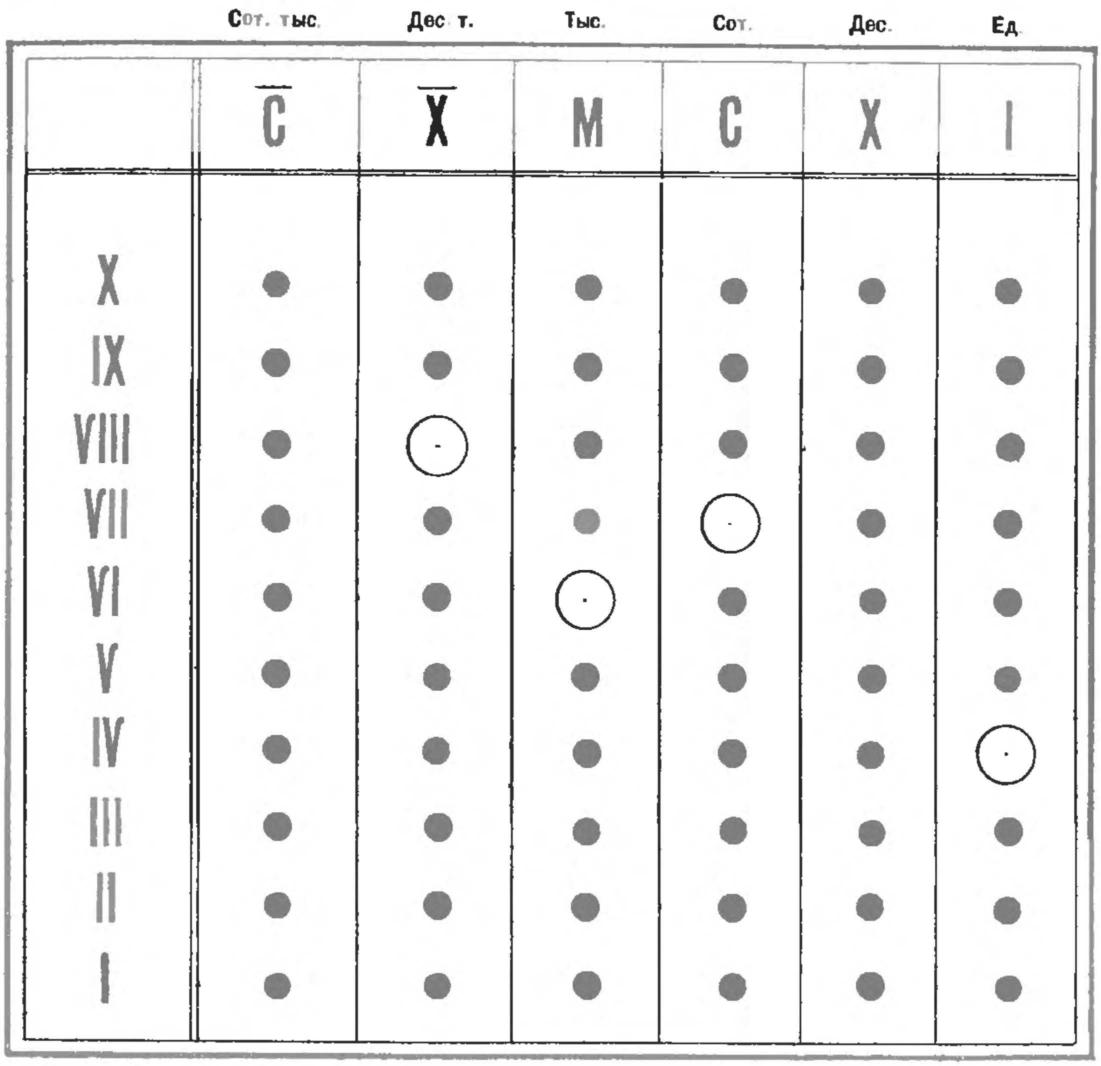
Фиг. 61.

Интересною разновидностью пиѳагорова стола былъ абакъ съ отверстіями и колышками (или втулками). Въ каждомъ столбцѣ имѣлось по десяти отверстій, съ нумераціею слѣва; въ отверстія вставлялись втулки. Образца подобнаго абака не сохранилось и рисунокъ 62-й возстановленъ по описанію. Число, отложенное на немъ колышками или втулками, очевидно 86 704, или, по римскому написанію, $\overline{\mathrm{LXXXVI}}\,\mathrm{DCCIV}$.

Несомнѣнно, что десятыя отверстія въ каждомъ изъ столбцовъ, при изображеніи чиселъ, являлись лишними; но они могли сослужить хорошую службу при сложеніи и вычитаніи, выполнявшихся на абакахъ съ жетонами и колышками такъ же, какъ на нашихъ счетахъ.

Что касается умноженія и дѣленія, то о пріемахъ ихъ выполненія у древнихъ ничего достовѣрнаго неизвѣстно, такъ какъ у математиковъ даются одни лишь результаты безъ указанія способовъ ихъ полученія.

Что древніе не только множили и дѣлили, но и извлекали корни на своихъ абакахъ, не отступая передъ дробями, явствуетъ изъ сохранившихся сборниковъ задачъ и ихъ рѣшеній. Пріемы были, по мнѣнію иныхъ, чрезвычайно длительные, требовавшіе большого напряженія памяти. Едва ли обходились безъ одновременнаго пользованія двумя абаками, однимъ съ жетонами или колышками, для закрѣпленія результатовъ, другимъ песочнымъ, для выкладокъ по ходу дѣйствія. Дроби



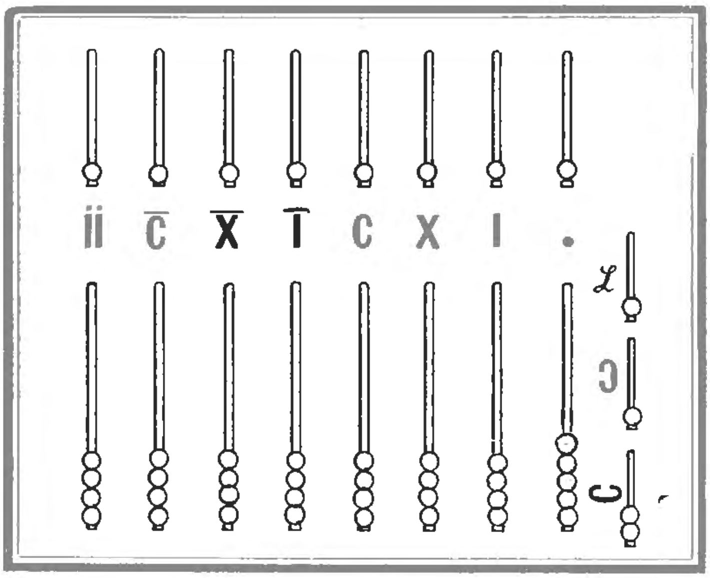
Фиг. 62.

употреблялись двѣнадцатеричныя и шестидесятеричныя [1]), вполнѣ отвѣчавшія конкретнымъ случаямъ подраздѣленія денежныхъ, вѣсовыхъ и прочихъ единицъ у древнихъ.

Послѣднимъ словомъ римской техники по устройству счетныхъ приборовъ былъ, повидимому, абакъ, хранящійся въ музеѣ древностей въ Неаполѣ.

[1]) Т. е. со знаменателями, кратными 12 или 60.

Онъ представляетъ металлическую доску съ прорѣзами, или пазами, вдоль которыхъ ходятъ пуговки. Прорѣзовъ восемь длинныхъ и одиннадцать короткихъ, изъ которыхъ восемь составляютъ какъ бы продолженіе длинныхъ, а три расположены дополнительно, по одной линіи (фиг. 63).



Фиг. 63.

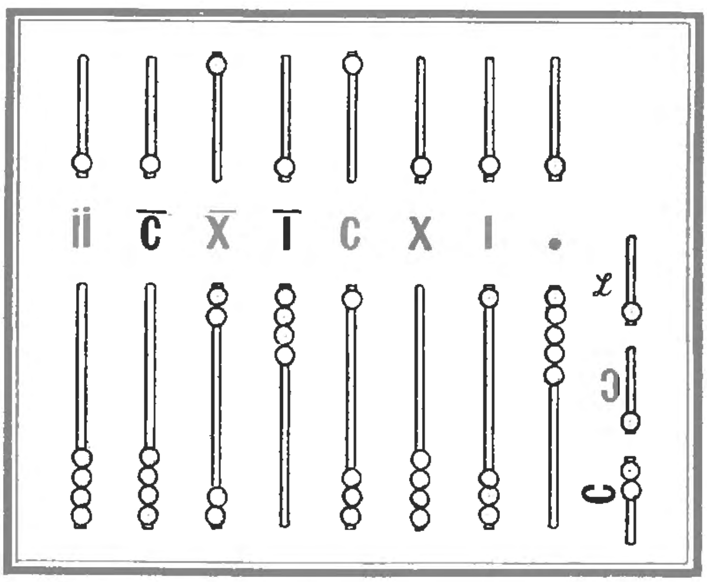
Во всѣхъ короткихъ прорѣзахъ по одной пуговкѣ, за исключеніемъ самаго нижняго, въ которомъ ихъ двѣ. Длинные прорѣзы имѣютъ по четыре пуговки, а крайній правый пять; надъ нимъ точка; а надъ прочими, въ послѣдовательномъ порядкѣ, справа влѣво, римскія цифры для обозначенія единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д. Боковые прорѣзы снабжены условными знаками для половины (*L*), четверти (Ɔ) и шестой (ᴗ).

Значеніе каждой верхней пуговки въ пять разъ болѣе помѣстнаго значенія соотвѣтствующей нижней—за исключеніемъ послѣдней пары столбцовъ, обозначенныхъ точкой. для которыхъ верхняя пуговка имѣетъ значеніе въ шесть разъ больше каждой изъ нижнихъ. Прорѣзъ съ точкой давалъ возможность отсчитывать двѣнадцатыя доли единицы, а короткіе прорѣзы сбоку—половины, четверти и шестыя двѣнадцатыхъ долей.

Устройство неаполитанскаго абака уясняетъ, между прочимъ, назначеніе поперечной черты абака, найденнаго при раскопкахъ въ Саламинѣ: надъ нею ставились на поля столбцовъ жетоны, имѣвшіе значеніе тождественное, по смыслу, съ верхними пуговками неаполитанскаго абака. Этимъ достигалось сокращеніе числа жетоновъ, облегчалась память, но за то страдала наглядность и ясность хода вычисленій. При игрѣ же въ кости поперечная черта давала одинъ лишній шансъ азарта.

Итакъ, фактически римскій абакъ съ прорѣзами и пуговками былъ ничѣмъ инымъ какъ *счетами*. Онъ могъ служить для *вѣсовыхъ* единицъ: фунтовъ, унцій ($^1/_{12}$ фунта), семунцій ($^1/_{24}$ ф.), силиціевъ ($^1/_{48}$ ф.) и секстулъ ($^1/_{72}$ ф.); *денежныхъ*: ассовъ и унцій, и *отвлеченныхъ*—съ подраздѣленіями на двѣнадцатыя, двадцать четвертыя, сорокъ восьмыя и семьдесятъ вторыя доли.

Приспособленность этихъ римскихъ счетовъ къ потребностямъ повседневнаго жизненнаго обихода въ древнемъ Римѣ заслуживаетъ полнаго вниманія. Простою перемѣною условнаго значенія пуговокъ на короткихъ дополнительныхъ столбцахъ приборъ въ одинаковой мѣрѣ могъ быть пригоденъ и для единицъ площади, и для жидкихъ, и для сыпучихъ тѣлъ.



Фиг. 64.

На фиг. 63 онъ изображенъ съ пуговками въ положеніи покоя, т. е. до начала счетныхъ операцій. На фиг. 64 отложено число

$$74\,601+\frac{5}{12}+\frac{2}{72}=74\,601\,\frac{4}{9}$$

Сложеніе и вычитаніе производились на приборѣ легко быстро; имъ обучали въ римскихъ школахъ, какъ у насъ преподается счисленіе на счетахъ.

Умноженіе представлялось уже гораздо болѣе затруднительнымъ; и едва ли было удобовыполнимо безъ вспомогательной доски, главнымъ образомъ вслѣдствіе неуклюжаго изображенія чиселъ помощью громоздкихъ римскихъ цифръ. Простой, на нашъ взглядъ, случай умноженія $105^1/_2$ на $24^5/_{12}$ требовалъ ряда очень сложныхъ выкладокъ, изобразимыхъ такою послѣдовательностью формулъ:

$$105\frac{1}{2}\cdot 24\frac{5}{12}=(100+5+\frac{1}{2})\,(20+4+\frac{1}{3}+\frac{1}{12})=$$

$$=100\cdot 20+5\cdot 20+10+100\cdot 4+5\cdot 4+2+100\cdot\frac{1}{3}+$$

$$+5\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+100\cdot\frac{1}{12}+5\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12};$$

$$100\cdot 20+5\cdot 20+10+100\cdot 4+5\cdot 4+2=2\,532;$$

$$\left.\begin{aligned}100\cdot\frac{1}{3}&=33+\frac{4}{12}\\ 5\cdot\frac{1}{3}&=1+\frac{8}{12}\\ 100\cdot\frac{1}{12}&=8+\frac{4}{12}\end{aligned}\right\}=43+\frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{12}+\frac{1}{24}=\frac{7}{12}+\frac{1}{24}$$

$$43+\frac{4}{12}+\frac{7}{12}+\frac{1}{24}=43+\frac{11}{12}+\frac{1}{24}$$

$$2532+43+\frac{11}{12}+\frac{1}{24}=2575+\frac{11}{12}+\frac{1}{24}$$

Какъ промежуточные, такъ и окончательный результатъ вполнѣ укладываются въ рамки удобопредставляемыхъ на римскихъ счетахъ чиселъ.

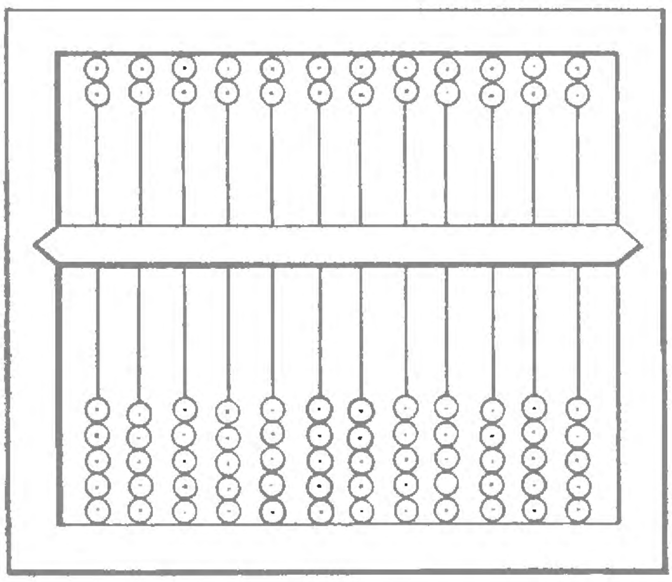
Какъ поступали въ случаѣ дробей, неудобоприводимыхъ къ двѣнадцатичнымъ или шестидесятичнымъ, сказать довольно трудно. Вѣрнѣе всего, что прибѣгали къ упрощеніямъ не всегда безупречнаго, съ нашей точки зрѣнія, характера.

Китайскій суанъ-панъ и русскіе счеты.

Весьма интересной, съ точки зрѣнія историческихъ «совпаденій», является почти полная тождественность абака вышеописаннаго типа (т. е. римскихъ счетовъ) съ китайскимъ суанъпаномъ, однимъ изъ древнѣйшихъ счетныхъ приспособленій, происхожденіе котораго неизвѣстно.

Римскій абакъ почти до мелочей повторилъ китайское изобрѣтеніе, въ условіяхъ, повидимому, исключающихъ заимствованіе или переносъ.

Суанъ-панъ представляетъ рамку, какъ у нашихъ счетовъ, раздѣленную продольной перекладиной на двѣ неравныя части.



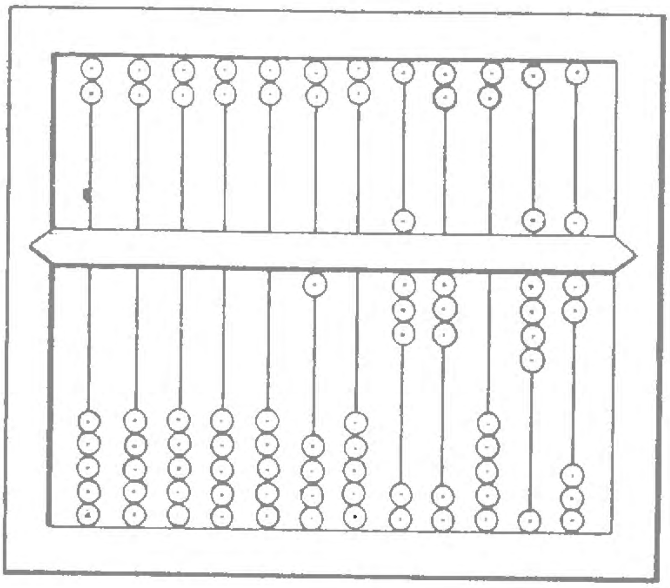
Фиг. 65.

Сквозь перекладину и продольныя рейки рамы продѣты отъ 9 до 15 жесткихъ прутьевъ или проволокъ съ шариками или костяшками, какъ на русскихъ счетахъ.

Въ верхнемъ отсѣкѣ шариковъ по два, въ нижнемъ по пяти на каждой проволокѣ. Такимъ образомъ, костяшки даютъ возможность отсчитывать единицы и пятки послѣдовательныхъ разрядовъ. На каждую единицу высшаго разряда приходится по два пятка, или по десяти единицъ низшаго разряда. До начала счета костяшки отодвигаются къ внѣшнимъ краямъ рамы, какъ на фиг. 65.

Для приданія костяшкамъ числовыхъ значеній, ихъ сдвигаютъ, въ томъ или иномъ порядкѣ, къ средней поперечинѣ.

На фиг. 66-й отложено на суанъ-панѣ число 1 083 097.



Фиг. 66.

Главное отличіе суанъ-пана не въ прутьяхъ, вмѣсто пазовъ, и не въ отсутствіи укороченныхъ разрядовъ для изображенія дробей, а въ лишнихъ шарикахъ: римляне надѣли бы на короткія проволоки по одному, на длинныя по четыре шарика. Конечно, соотвѣтственно четырехъ и одного шарика было бы достаточно для изображенія на суанъ-панѣ всевозможныхъ чиселъ, но при выполненіи дѣйствій не хватало бы по одному шарику на длинныхъ прутьяхъ для полнаго раздробленія единицъ высшихъ разрядовъ въ низшія.

Въ нѣкоторыхъ математическихъ сборникахъ встрѣчается анекдотъ о суанъ-панѣ, касающійся лишнихъ шариковъ, имѣющій, однако, несомнѣнно европейское, а не китайское происхожденіе.

Миѳическій изобрѣтатель суанъ-пана послалъ, будто, другу своему модель прибора съ золотыми шариками на серебряныхъ проволокахъ, предлагая угадать, въ чемъ дѣло. Другъ, въ доказательство своей понятливости, снялъ съ каждой проволоки по шарику, а серебряные прутья замѣнилъ стальными, обративъ такимъ образомъ суанъ-панъ въ подобіе римскихъ счетовъ.

Анекдотъ имѣетъ фактическую подкладку въ проектахъ усовершенствованія русскихъ счетовъ, возникавшихъ въ умахъ нѣкоторыхъ западныхъ ученыхъ, смѣшивавшихъ русскіе счеты съ суанъ-паномъ. Въ дѣйствительности же русскіе счеты построены по образцу древнѣйшихъ абаковъ съ камешками или гладкими жетонами.

Такъ, если на столбцахъ того примитивнаго абака, который изображенъ на фиг. 59, въ верхней или нижней части ихъ постоянно держать на-готовѣ по десятку камешковъ, шариковъ или костяшекъ, вмѣсто того, чтобы, по мѣрѣ надобности, брать изъ общей кучи; затѣмъ, чтобы костяшки не терялись, нанизать ихъ на шнурокъ или на проволоку, то получатся типичнѣйшіе русскіе счеты.

Всѣ поползновенія къ усовершенствованію русскихъ счетовъ сводились къ удаленію по одной лишней костяшкѣ съ каждой проволоки. Усовершенствованія не привились по той простой причинѣ, что счеты предназначены вовсе не для изощренія сообразительности, а для облегченія механизма вычисленій, наглядность которыхъ значительно теряла при неполномъ числѣ шариковъ.

Изъ всѣхъ простѣйшихъ числительныхъ приборовъ русскіе счеты единственный, удержавшійся до нашихъ дней, благодаря чрезвычайной незатѣйливости своего устройства, приспособленности къ десятичной системѣ счисленія, а также осязательности и наглядности счетныхъ операцій.

Апексы Боэція. Захуданіе абака.

Римскій абакъ съ пуговками (римскіе счеты) имѣлъ одну особенность, свидѣтельствовавшую о постепенномъ укрѣпленіи въ сознаніи грамотныхъ людей важности помѣстнаго значенія числовыхъ символовъ. Так, въ обозначеніяхъ I, X, C, I, X, $\overline{\text{C}}$, II, XX и т. д., совершенно недвусмысленно выражены классы единицъ, тысячъ и милліоновъ [1]). Хотя аналогичный (но не тожде-

[1]) Слово «милліонъ» или «большая тысяча» впервые вошло въ употребленіе въ XIV вѣкѣ. Итальянскаго происхожденія.

ственный) принципъ раздѣленія былъ установленъ еще Архимедомъ, въ его задачѣ о «псаммитѣ» (См. стр. 7-ю настоящей книги).

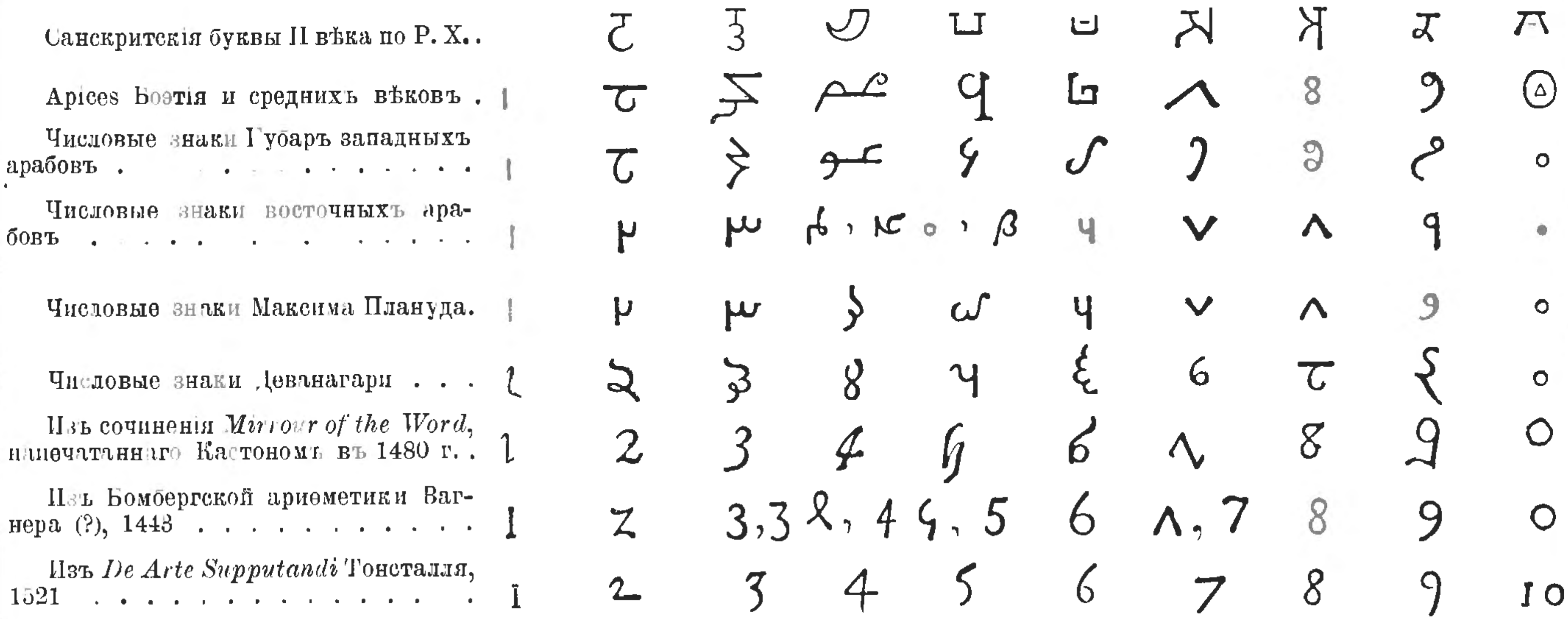
Потребовалось нѣсколько столѣтій работы на абакѣ, пока наконецъ, на зарѣ среднихъ вѣковъ, послѣдній римскій математикъ изъ школы древнихъ геометровъ, Боэцій (умеръ въ 524 г. по Р. Х.), а по болѣе обоснованному мнѣнію проф. Бубнова нѣкто, выдавшій себя за Боэція (Лжебоэцій), въ своемъ сочиненіи «De institutione Arithmetica», не предложилъ пользоваться, для вычисленій на абакѣ, только *девятью* знаками, которые онъ назвалъ apices (apex, icis), по-русски «апексы».

Самые апексы были шашечки или боченочки, въ родѣ употребляющихся при игрѣ въ лото, а начертанія на нихъ, заимствованныя изъ Индіи, долгимъ путемъ перекочевокъ и случайныхъ передѣлокъ явились родоначальниками нашихъ цифръ.

Что касается названія этихъ цифръ «арабскими», то вопросъ о ихъ происхожденіи довольно-таки запутанъ массой матеріала легендарнаго характера. Во всякомъ случаѣ, современныя ихъ формы выработались продолжительнымъ взаимодѣйствіемъ культуръ греко-римской и восточной, чему имѣются весьма вѣскія свидѣтельства. Укрѣпилось же за цифрами названіе «арабскихъ» потому, что въ апексахъ Боэція нѣтъ знака, соотвѣтствующаго нулю; нуль же дѣйствительно заимствованъ у арабовъ, вмѣстѣ съ названіемъ его «сифръ», что по-арабски значитъ «пустой».

Отсюда и латинское «zephirum» и французское «zéro» и англійское «cipher» въ смыслѣ *нуль*; а равно и общеевропейское «цифра» въ различныхъ произношеніяхъ и измѣненіяхъ, въ смыслѣ любого изъ десяти числовыхъ знаковъ.

Исторія превращенія апексовъ Боэтія въ современныя «цифры» представлена на прилагаемыхъ (фиг. 67 и 68) табличкахъ и важна намъ лишь постольку, поскольку повліяла на измѣненія формы счетныхъ приборовъ. Первымъ и главнымъ дѣломъ, употребленіе апексовъ уничтожило разницу между числомъ отложеннымъ на абакѣ и написаннымъ, а эта разница, какъ мы выше видѣли, была очень велика. Послѣ Боэція, даже ранѣе изобрѣтенія нуля и введенія его во всеобщее употребленіе достаточно было нарисовать клѣтки и заполнить ихъ соотвѣт-


Санскритскія буквы II вѣка по Р. Х..
Apices Боэтія и среднихъ вѣковъ .
Числовые знаки Губаръ западныхъ арабовъ
Числовые знаки восточныхъ арабовъ
Числовые знаки Максима Плануда.
Числовые знаки Деванагари
Изъ сочиненія *Mirrour of the Word*, напечатаннаго Кастономъ въ 1480 г.
Изъ Бомбергской ариѳметики Вагнера (?), 1443
Изъ *De Arte Supputandi* Тонсталля, 1521
3,3 4 5 6 7 8 9 0
2 3 4 5 6 7 8 9 10

Фиг. 67.

ствующими апексами. чтобы прочесть число, и въ такомъ же видѣ перенести его для вычисленій на абакъ. Смыслъ начертаній:

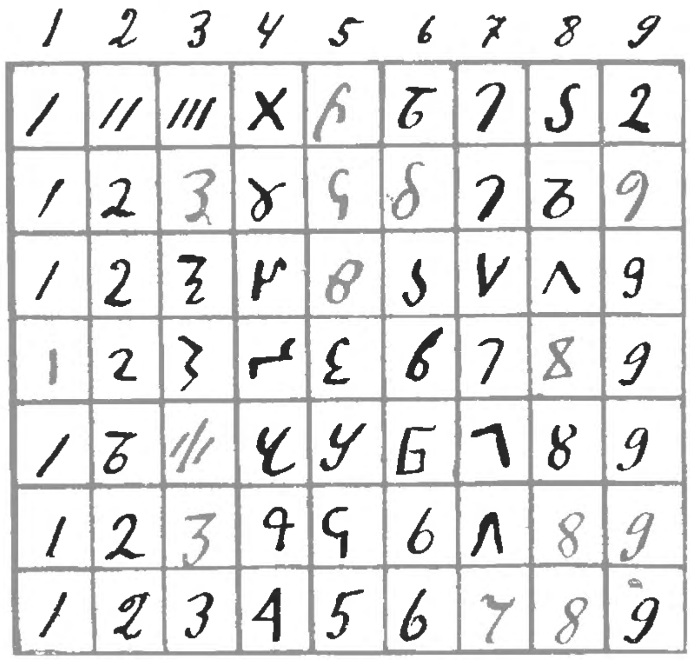
				или				
3		8			4			7

былъ понятенъ всѣмъ обучавшимся счисленію на абакѣ.

Несмотря. однако, на явныя преимущества новыхъ знаковъ, многіе предпочитали употреблять ихъ въ перемежку со старыми, во всѣхъ случаяхъ, когда получались пустыя клѣтки. Такъ, вмѣсто

2	3		7	5		9	8

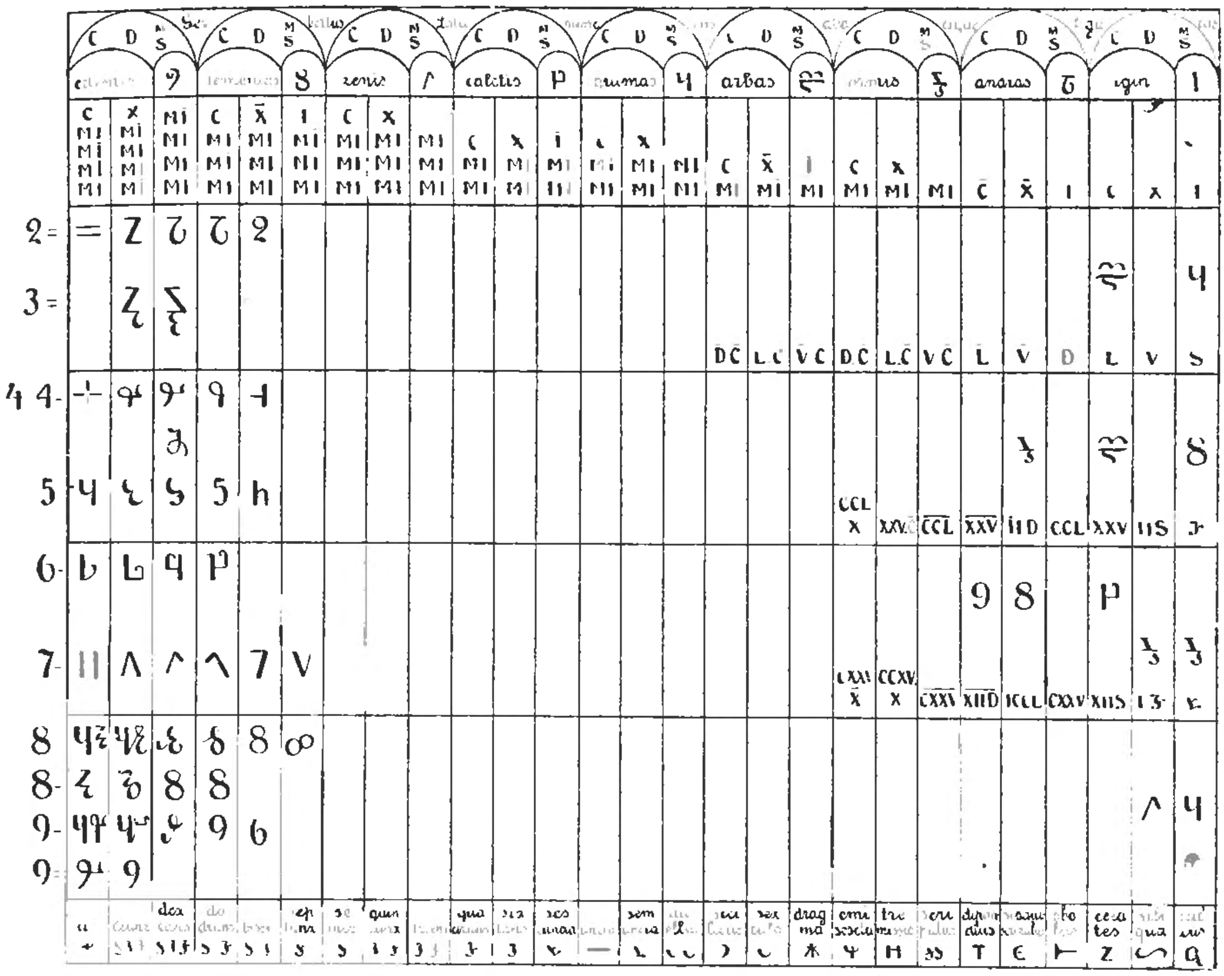
писали 2XXX7L98. Встрѣчались и другіе способы начертанія 38 и 47 вмѣсто 308 и 4007 (смотрите выше).



Фиг. 68.

Путаница въ начертаніи сохранила на нѣкоторое время жизнь абаку, но онъ захудалъ, и изъ роли дѣйствительной машины, т. е. предмета матеріальнаго прибора обратился въ машину нарисованную—разграфку, съ обозначенными на ней разрядами и классами.

Процессъ перерожденія абака длился долго — не менѣе 500 лѣтъ, и только въ концѣ X столѣтія по Р. Х. французскій математикъ Гербертъ, извѣстный въ исторіи католичества подъ именемъ папы Сильвестра II (умеръ въ 1002 по Р. Х.), написалъ два посвященныя абаку сочиненія: «Правила вычисленія съ помощью абака» и «Небольшую книгу о дѣленіи чиселъ», которыми упразднилъ абакъ-машину и ввелъ въ употребленіе абакъ-разграфку.



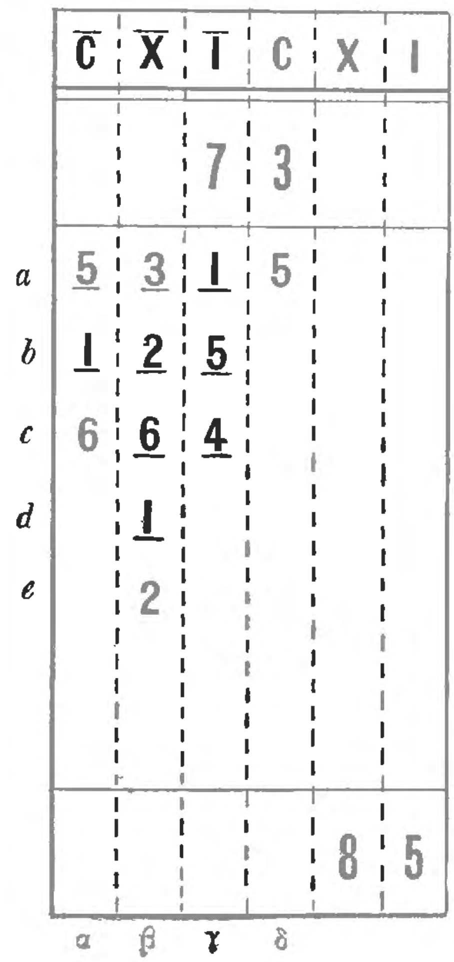
27-колонный абакъ Герберта, возстановленный проф. Бубновымъ по различнымъ рукописямъ.

Поясненіе къ рисунку абака. Абакъ представляетъ доску (поверхность стола, таблицу, вообще плоскость), обыкновенно раздѣленную на нѣсколько вертикальныхъ колоннъ (въ данномъ случаѣ на 27). Счисленіе на абакѣ отличается отъ нашего только тѣмъ, что необходимый намъ нуль замѣняется здѣсь пустой колонной абака, а значащія цифры не пишутся, а раскладываются, будучи разъ навсегда изображены на жетонѣ. Значитъ, наши *десятичные разряды* изображаются колоннами абака въ восходящемъ порядкѣ справа налѣво, а жетоны со значками-цифрами первыхъ десяти цѣлыхъ чиселъ (S и S) играютъ роль *коэффиціентовъ* числа, изображеннаго по нашей десятичной системѣ. Большія дуги соединяютъ колонны—разряды въ группы по 3 (классы), какъ у насъ. Въ каждомъ классѣ различаются единицы (S singularis), десятки (D—decenus) и сотни (C—centenus). Начиная съ 1.000 при знакѣ S наверху ставится еще M, т.-е. далѣе идутъ тысячи единицъ, затѣмъ тысячи тысячъ единицъ и т. д. Подъ самыми дужками помѣщены девять тогдашнихъ цифръ, а рядомъ ихъ таинственныя, извѣстныя только абацистамъ, названія: igin, andras, ormis, arbas, quimas, zenis, temenias, calctis, celentis. На самомъ верху приведенъ стихъ: *Gerbertus Latio numeros abacique figuras*, т.-е. Гербертъ даетъ Лацію (латинской Европѣ) фигуры и числа абака. На данномъ рисункѣ проведены и горизонтальныя линіи. Въ первой сверху горизонтальной колоннѣ (направо) изображено (нужно подразумѣвать, положенными жетонами) число 405, во второй—30408, въ третьей—980600 и 33, въ четвертой 75. На крайнихъ колоннахъ слѣва показано, какъ, по мнѣнію проф. Бубнова, образовались цифры абацистовъ, а изъ нихъ наши. На самомъ низу стоятъ знаки дробей у абацистовъ.

Гербертовъ абакъ. Введеніе нуля и торжество письменнаго счисленія.

Итакъ, Гербертовъ абакъ представлялъ разграфку, которая въ полномъ видѣ имѣла 27 столбцовъ для девяти классовъ единицъ и три столбца для двѣнадцатичныхъ дробей.

Счисленіе производилось письменно; все ненужное или использованное зачеркивалось. Сложеніе, вычитаніе и умноженіе производились весьма близко къ современному, хотя выкладки при умноженіи по Герберту представляютъ, на нашъ глазъ, нѣсколько хаотическую картину. Разобраться въ нихъ, все-таки, возможно, не прибѣгая къ тексту его «Правилъ вычисленія».



Фиг. 69.

Такъ на прилагаемой таблицѣ (фиг. 69) изображено умноженіе 7300 (вверху) на 85 (внизу). У насъ подчеркнутыми напечатаны цифры, по ходу дѣйствія зачеркиваемыя.

Для ясности, столбцы и строчки пронумерованы у насъ буквами латинскаго и греческаго алфавитовъ, о чемъ, конечно, въ Гербертовыхъ правилахъ ничего не говорится. Порядокъ выкладокъ былъ слѣдующій:

1) произведеніе 300×5; вписывалось въ клѣтки $a\delta$ и $a\gamma$;
2) 700×5; въ $b\gamma$ и $a\beta$;
3) 300×8; въ $c\beta$ и $b\beta$;
4) 700×8; въ $c\beta$ и $a\alpha$.
5) Получалась фигурная запись такого вида:

5 3 1 5
2 5
6 4

6) Суммировались и зачеркивались цифры столбца $1+5+$ $+4=10$; единица высшаго порядка вписывалась въ $d\beta$;

7) суммированіе столбца β давало: $3+2+6+1=12$; единица высшаго порядка вписывалось въ $b\alpha$, а 2 въ $e\beta$;

8) суммировался столбецъ $5+1=6$ и результатъ вписывался въ $c\alpha$.

Полученное произведеніе оказывалось разбросаннымъ по клѣткамъ $c\alpha$, $e\beta$ и $a\delta$, читалось такъ же, какъ читаемъ его мы, а затѣмъ выписывалась, куда слѣдуетъ, въ одной изъ слѣдующихъ трехъ транскрипцій:

либо						
	6	2		5		

либо 6$\dot{2}\ddot{5}$, либо 6XXI).

Процессъ дѣленія значительно разнится отъ современнаго. На фиг. 70-й изображенъ ходъ дѣйствій на простомъ примѣрѣ 4087 : 6.

Фиг. 70.

$\overline{\mathrm{I}}$	C	X	I
			4
			6
4		8	7
1	6	6	4
1	4	4	8
	4	8	9
	1	4	4
	1	2	3
	1	4	4
		6	7
		2	1
		1	
		1	
	4	*4*	*6*
	1	*1*	*2*
	1	*1*	*1*
	6	*1*	*1*
		8	*1*
			1

Обыкновеннымъ шрифтомъ напечатаны всѣ зачеркивавшіяся, по ходу вычисленій, цифры. Надъ единицами дѣлимаго стоитъ дѣлитель 6; выше его дополненіе до 10, т. е. 4. Подъ чертою рядъ послѣдовательныхъ наращеній частнаго. Единица крупнымъ шрифтомъ въ серединѣ крайняго праваго столбца есть остатокъ отъ дѣленія.

Разобраться въ нарисованной подъ номеромъ 70 таблицѣ, безъ объясненій, невозможно.

Примѣнявшееся Гербертомъ дѣленіе было такъ называемое «дополнительное». Зачатки его встрѣчаются еще у римскихъ математиковъ, но индусы и арабы имъ не пользовались. Существовало двоякаго рода дополнительное дѣленіе: «съ избыткомъ», когда дѣлитель дополнялся до ближайшаго полнаго числа единицъ высшаго порядка (напр. 6 до 10, 18 до 20 и т. п.) или же «съ недостаткомъ», когда дѣлитель округлялся отбрасываніемъ нѣкотораго избытка (напр. 43 округлялось въ 40, 105 въ 100 и т. п.). Разнообразіе въ пріемахъ было безконечное: существовали отдѣльныя правила для дѣлителей двузначныхъ, трехзначныхъ, четырехзначныхъ. Общаго въ нихъ было только слѣдующее: при дѣленіи «съ избыткомъ» къ каждому послѣдовательному остатку прибавлялось произведеніе найденной цифры частнаго на дополненіе дѣлителя. При дѣленіи «съ недостаткомъ» дѣлимое уменьшалось на одну единицу наивысшаго разряда, и изъ этой единицы вычитались произведенія найденныхъ послѣдовательныхъ частныхъ на отброшенное, для округленія, число.

Приведенному, на фиг. 70, ходу выкладокъ соотвѣтствовалъ бы, примѣнительно къ теперешнему знакоположенію, такой рядъ формулъ:

$$
\begin{aligned}
1)\quad 4087 &= (6+4)\cdot 400 + 87 \\
&= 6\cdot \mathit{400} + 1600 + 87 \\
2)\quad 1600 &= (6+4)\cdot 100 + 600 \\
&= 6\cdot 100 + 400 + 600 \\
&= 6\cdot \mathit{100} + 1000 \\
3)\quad 1000 &= (6+4)\cdot 100 = 6\cdot \mathit{100} + 400 \\
4)\quad 400 &= (6+4)\cdot 10 = 6\cdot \mathit{40} + 160 \\
5)\quad 160 &= (6+4)\cdot 10 + 60 = 6\cdot 10 + 40 + 60 \\
& = 6\cdot \mathit{10} + 100
\end{aligned}
$$

6) $100 = (6+4)\cdot 10 = 6\cdot \mathit{10} + 40$

7) $40 + 87 = 127$

8) $127 = (6+4)\cdot 10 + 27 = 6\cdot 10 + 4\cdot 10 + 27$
$= 6\cdot \mathit{10} + 67$

9) $67 = (6+4)\cdot 6 + 7 = 6\cdot \mathit{6} + 24 + 7$

10) $24 = (6+4)\cdot 2 + 4 = 6\cdot 2 + 4\cdot 2 + 4$
$= 6\cdot \mathit{2} + 12$

11) $12 = (6+4)\cdot 1 + 2 = 6\cdot \mathit{1} + 6$

12) $6 = 6\cdot \mathit{1}$

13) $7 = 6\cdot \mathit{1} + 1$

Всѣ послѣдовательныя наращенія частнаго набраны курсивомъ какъ въ вышеданныхъ формулахъ, такъ и въ выкладкахъ на фиг. 70 подъ нижнею горизонтальною чертой. Суммированіе курсивовъ даетъ частное 681, набранное на фиг. 70-й жирнымъ шрифтомъ.

Окончательный ударъ абаку былъ нанесенъ, однако, не профессіональнымъ ученымъ или математикомъ, а человѣкомъ практической сметки—итальянскимъ купцомъ и дѣльцомъ Леонардомъ Пизанскимъ, по прозванію «Фибоначчи», жившимъ въ концѣ XII началѣ XIII вѣка.

Въ 1202 году онъ издалъ книжку, подъ названіемъ «Liber abaci», «книжка объ абакѣ», начинающуюся такъ:

«Девять индусскихъ знаковъ суть слѣдующіе: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Съ помощью этихъ знаковъ и знака 0, который называется по-арабски *сифръ*, можно написать какое угодно число».

Въ 1228 г. книжка вышла вторымъ изданіемъ.

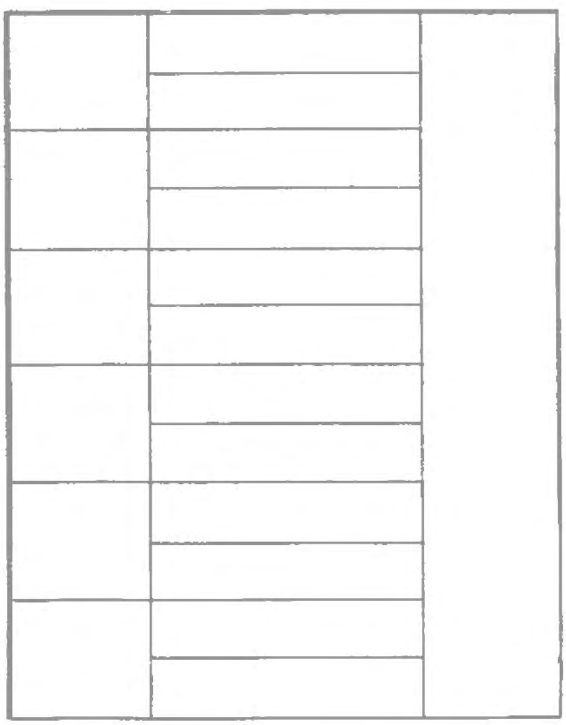
Авторъ, составляя «Liber abaci», навѣрное не думалъ, что убьетъ абакъ. Случилось это, конечно, не сразу, а постепенно. Еще три столѣтія Гербертова разграфка влачила жалкое существованіе, мѣняя по временамъ внѣшнее обличье. Введеніе нуля сдѣлало абакъ излишнимъ для наиболѣе труднаго изъ дѣйствій дѣленія, такъ какъ давало возможность использовать индусскій и арабскій пріемы, весьма близкіе съ теперешнимъ. Арабскій способъ сталъ даже вскорѣ называться «divisio aurea» (золотое дѣленіе), въ отличіе отъ Гербертовскаго «divisio ferrea» (желѣзное дѣленіе).

Можно только удивляться, какъ народы Запада, болѣе двухъ тысячъ лѣтъ работавшіе на абакѣ, не пришли давно къ заключенію о полезности особаго знака для *пустыхъ* мѣстъ, *пустыхъ* столбцовъ [1]). Можетъ быть, случилось это именно *благодаря* абаку, облегчавшему наглядное чтеніе числа. О неудобствахъ начертанія числа тогда не думали, такъ какъ письменное численіе играло очень незначительную роль въ жизни древнихъ и первой половины средневѣковья.

Нуль — *ничто* — далъ, временно, полную побѣду письменному счету надъ механическимъ и устнымъ.

Рецидивъ безписьменности.—Счетная скамья (Rechenbank) около-реформаціоннаго періода.

Въ то время какъ абакъ медленно умиралъ, а представители ученыхъ—свѣтскихъ и духовныхъ—корпорацій увлекались письменнымъ численіемъ и математическими откровеніями, шедшими съ Востока, грамотный и полуграмотный дѣловой міръ незамѣтно выработалъ для своихъ узкихъ цѣлей счетную машину новаго типа, образцомъ которой послужилъ тотъ же абакъ, но видоизмѣненный и, въ главной сути, возвращенный къ своей первообразной простотѣ: исчезли не только апексы и надписи, но даже римскія цифры, и водворились вновь безписьменныя марки. Притомъ верхняя сторона абака повернулась влѣво, столбцы легли горизонтально, и каждый раздѣлился пополамъ на двѣ продольныя графы или полоски. Справа же получилось поле для запасныхъ марокъ (фиг. 71).



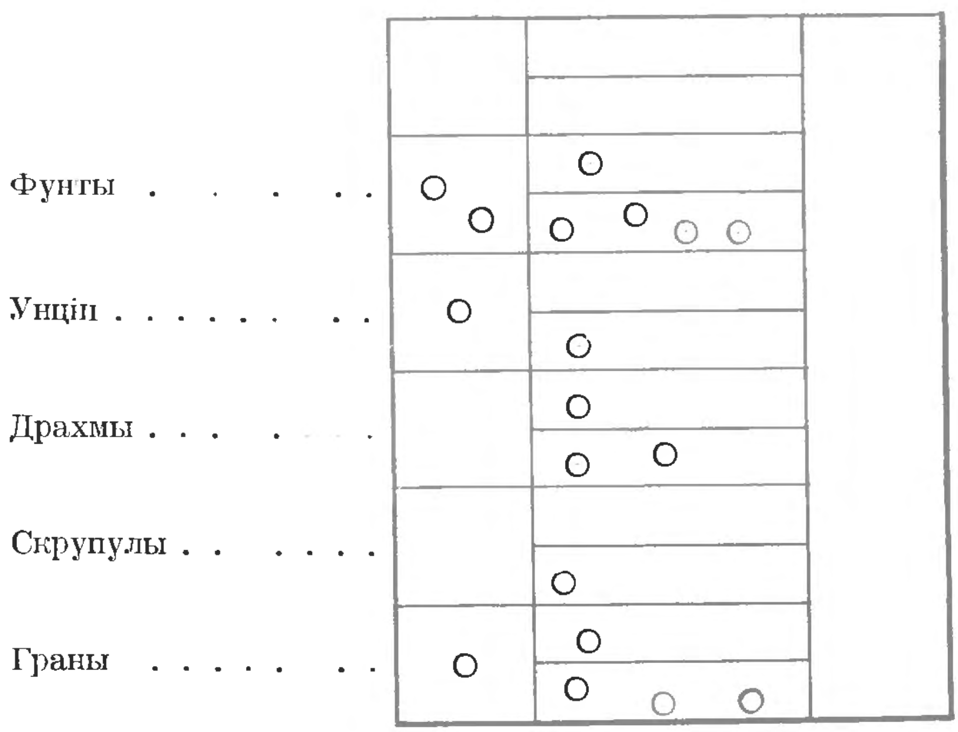
Фиг. 71.

---

[1]) Сравни древнерусское «безчислъ» въ смыслѣ «нуля».

Встрѣчались разные варіанты описаннаго устройства; изъ нихъ главные—англійскіе и нѣмецкіе. Въ англійскомъ жетоны ставились на поля клѣтокъ, въ нѣмецкомъ -передвигались вдоль линій, почему самый счетъ назывался «линейнымъ» (Linienrechnung; nach Linien rechnen).

Въ англійскихъ доскахъ широкая клѣтка слѣва каждой горизонтальной полосы предназначалась для десятковъ; нижняя узкая—для единицъ; верхняя узкая для пятковъ. Отношеніе единицъ любого изъ столбцовъ къ единицамъ близлежащихъ верхняго и нижняго было совершенно произвольно и зависѣло исключительно отъ системы цѣнностей и мѣръ, съ которыми приходилось имѣть дѣло.

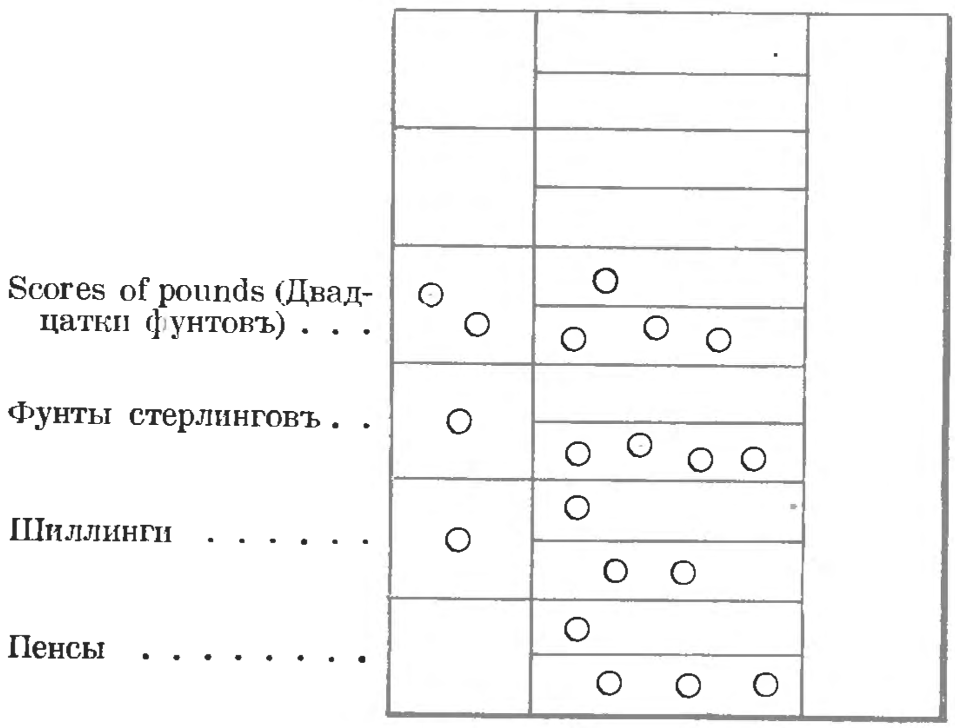


Фиг. 72.

Такъ на фиг. 72 и 73 на первой отложены 29 фунтовъ 11 унцій 7 драхмъ 1 скрупулъ 18 грановъ нюрнбергскаго или аптекарскаго вѣса; на второй — 574 фунта 17 шиллинговъ 8 пенсовъ въ англійской валютѣ.

Въ качествѣ общепринятаго въ дѣловыхъ кругахъ числительнаго прибора, счетная скамья вошла во всеобщее употребленіе въ первой половинѣ XV вѣка: слѣдовательно, къ этому времени окончилось официальное существованіе абака.

Несмотря на примитивность, а можетъ быть благодаря ей, новое счетное приспособленіе проявило большую жизненность, продержавшись въ романскихъ государствахъ около полутораста лѣтъ, въ Германіи свыше двухсотъ, а въ Англіи безъ малаго триста. Послѣдніе расчеты помощью счетной скамьи и бирокъ встрѣчаются въ англійскомъ государственномъ казначействѣ въ документахъ, относящихся къ 1676 году.



Фиг. 73.

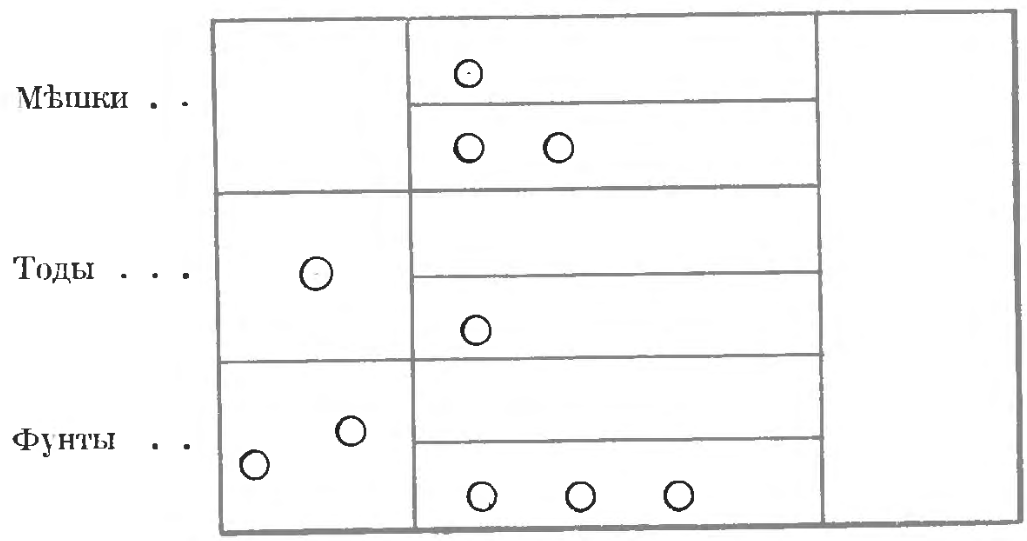
Такая живучесть именно въ Германіи и Англіи объясняется чрезвычайной запутанностью мѣровѣснаго обихода обоихъ государствъ на рубежѣ среднихъ и новыхъ вѣковъ: раздробленность Германіи и консервативность Англіи представляли удобную почву для нарожденія и сохраненія самыхъ фантастичныхъ системъ мѣръ, вѣса и денегъ, а счетная скамья чрезвычайно легко приспособлялась къ каждой. Такъ, напр., въ Англіи сравнительно еще недавно шерсть въ работѣ учитывалась «мѣшками», «тодами» и «фунтами». Одинъ мѣшокъ составлялъ 13 тодовъ (tods), одинъ тодъ—28 фунтовъ.

Любой безграмотный прядильщикъ на ткацкой фабрикѣ могъ сообразить по выданному ярлычку, что за нимъ числилось 7 мѣшковъ 11 тодовъ 23 фунта отпущенной для обработки шерсти, или же, что ему причиталось именно столько-то задѣльной платы.

И въ Германіи и въ Англіи счетная скамья оставила надолго неизгладимые слѣды.

Въ первой это была дѣйствительно «скамья» (Bank, Rechenbank)—непремѣнная принадлежность всякой конторы, торговаго дома и мѣняльной лавки.

Отсюда—завоевавшее себѣ всемірное распространеніе слово «банкъ», въ значеніи учрежденія, торгующаго деньгами и производящаго расчетныя операціи съ валютой.



Фиг. 74.

Въ болѣе практичной Англіи доску или скамью замѣнили клеенчатыя и кожаныя салфетки или скатертки: ихъ можно было свернуть, убрать и снова разложить; спрятать въ портфель или карманъ.

Соотвѣтствующимъ образомъ разрисованныя въ клѣтку (chequered) скатертки напоминали шашешницу. По ихъ же образцу графили небольшихъ размѣровъ бланки. для расчетовъ съ плательщиками и кліентами. А такъ какъ въ XVI и XVII столѣтіяхъ почти весь денежный обмѣнъ страны сосредоточивался въ казнѣ, то естественно, что отъ «chequered» самое Государственное Казначейство стало называться «Exchequer» (Эксчекеръ), а расчетный бланкъ для платежей наличными—«чекомъ» (cheque).

Однако, несмотря на отсталость Германіи и консерватизмъ Англіи, всеобщая грамотность и письменность не только добили къ концу XVII столѣтія счетную скамью, но и породили своеобразное презрѣніе къ механическимъ пріемамъ вычисленія. Такъ что, когда Западная Европа познакомилась въ началѣ XIX столѣтія съ русскими счетами и китайскимъ суанъ-паномъ, большинство было склонно вйдѣть въ нихъ остатки варварства.

Это и неудивительно, такъ какъ никто не придавалъ тогда серьезнаго значенія даже тѣмъ, сравнительно очень совершеннымъ, прототипамъ современныхъ счетныхъ машинъ, которыя были созданы еще въ XVII столѣтіи Паскалемъ и Лейбницемъ.

Люди не могли себѣ представить, чтобы человѣкъ со своею сметкою, соображительностью и умомъ когда-либо являлся въ роли только силы, всѣ же счетныя операціи производились бы самостоятельно машиной. Главными двигателями прогресса и единственными законными пособниками математическаго мышленія считались бумага и перо, отъ вѣры въ исключительную непогрѣшимость и всемогущество которыхъ не такъ-то легко было отрѣшиться.

Заря и расцвѣтъ механическаго счета.

Когда въ Англіи еще процвѣтали счетная скамья и бирки, во Франціи уже занималась заря механическаго счета.

Въ серединѣ тридцатыхъ годовъ XVII вѣка извѣстный французскій философъ и математикъ Власъ Паскаль (Blaise Pascal), будучи пятнадцатилѣтнимъ юношей, задался цѣлью облегчить счетныя операціи механическимъ откладываніемъ и подведеніемъ итоговъ.

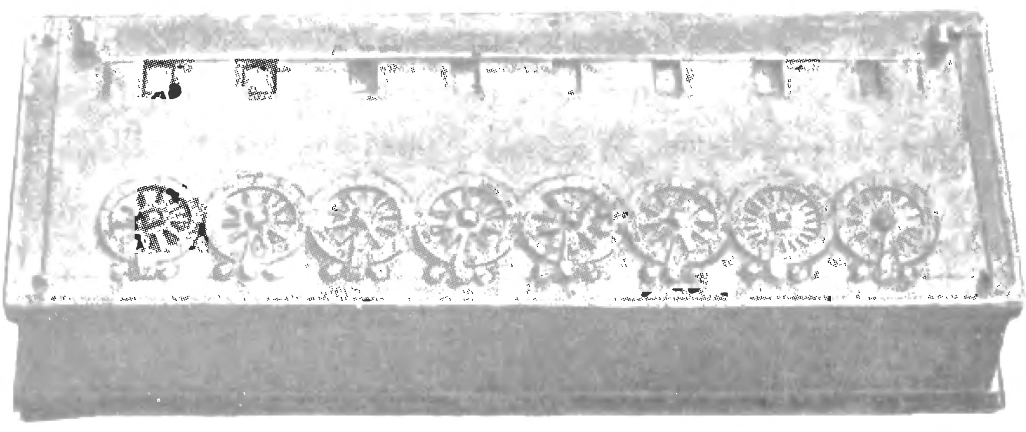
Если принять въ соображеніе, что римскій абакъ съ передвижными пуговками (римскіе счеты) былъ уже заброшенъ, что апексами Боэція никто не пользовался, а употреблялись гладкія безписьменныя марки, что съ русскими счетами Западная Европа не была знакома, то слѣдуетъ признать, что Паскаль задался дѣйствительно смѣлой и геніальной идеей.

Онъ проработалъ надъ ней не менѣе десяти лѣтъ, построилъ свыше пятидесяти пробныхъ моделей, прежде чѣмъ остановился на опредѣленномъ типѣ.

Въ числѣ моделей были съ рейками и съ зубчатками, прямыми и криволинейными, съ передаточными цѣпями и безконечными ремнями, съ движеніемъ прямолинейнымъ и круговымъ, съ коническими и цилиндрическими валами, съ дисками, лентами и шестернями. Однимъ словомъ, Паскалемъ былъ испробованъ весь арсеналъ приспособленій, изъ котораго черпали позднѣйшіе изобрѣтатели машинъ.

Наконецъ, въ 1646 году Паскаль придалъ своей машинѣ окончательный видъ, приспособивъ ее къ спеціальной цѣли подсчета денежныхъ сборовъ и налоговъ по городу Руану и окрестностямъ, гдѣ отецъ его занималъ мѣсто «интенданта», т. е. агента государственнаго обложенія и фиска.

Счетъ велся тогда во Франціи на «динаріи» (déniers), «су» (sols) и «ливры» (livres); на одинъ су приходилось двѣнадцать динаріевъ и на одинъ ливръ двадцать су [1]). Въ соотвѣтствіи съ денежной системой, на крышкѣ ящика, въ которомъ помѣщался механизмъ, было восемь вращающихся дисковъ съ рукоятками и циферблатами. На первомъ, считая справа, было



Фиг. 75.

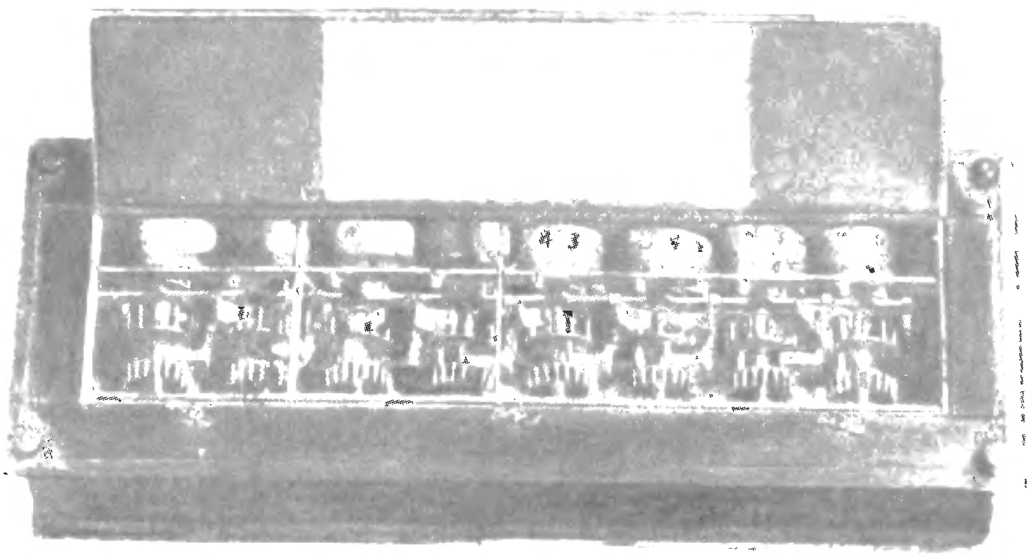
12 подраздѣленій для отсчета динаріевъ, или «денье» (déniers); на второмъ двадцать—для су (sols), а на остальныхъ по десяти, для ливровъ и десятковъ, сотенъ, тысячъ, десятковъ тысячъ и т. д. ливровъ (фиг. 75).

Вращеніе дисковъ, помощью системы зубчатыхъ колесъ, передовалось валикамъ. съ нанесенными на нихъ цифрами (фиг. 76).

---

[1]) Сравни англійское 12 пенс. на 1 шилл. и 20 шилл. на 1 ф. ст.

Полному обороту каждаго изъ дисковъ соотвѣтствовало автоматическое перемѣщеніе ближайшаго слѣва валика на одно дѣленіе. Такимъ образомъ двѣнадцать денье сами собой отмѣчали на соотвѣтствующемъ валикѣ приращеніе на одинъ су; 20 су немедленно переводились въ ливры; каждые 10 ливровъ—въ десятки ливровъ и т. д.



Фиг. 76.

Механизмъ приводился въ движеніе вращеніемъ рукоятокъ по направленію часовой стрѣлки; обратное служило для приведенія всѣхъ показаній къ нулю.

Въ верхней половинѣ крышки было 8 окошечекъ, по числу дисковъ. Первое изъ нихъ, считая справа влѣво, показывало денье, второе — су, третье — ливры, четвертое — десятки ливровъ и т. д.

Высшій возможный итогъ, даваемый машиной, былъ, слѣдовательно, 999 999 ливровъ 19 су и 11 денье.

Для уясненія процесса работы на машинѣ Паскаля, покажемъ, какъ сложить на ней 19 ливровъ 16 су 7 денье и 27 ливровъ 14 су 15 денье.

По приведеніи всѣхъ рукоятокъ и показаній окошечекъ къ нулю, четвертая рукоятка справа ставится на 1, третья на 9, вторая на 16 и первая на 7. Въ окошечкахъ немедленно выскакиваютъ соотвѣтствующія цифры и числа, послѣ чего всѣ рукоятки опять приводятся къ нулю.

Затѣмъ ставимъ четвертую рукоятку на 2 въ соотвѣтственномъ оконцѣ появляется цифра 3 ($1 + 2 = 3$). Третью рукоятку ставимъ на 7—въ третьемъ оконцѣ мелькаетъ рядъ цифръ и устанавливается цифра 6, и въ то же время цифра 3 четвертаго оконца мѣняется на 4.

Переводимъ рукоятку на 14—во второмъ оконцѣ выскакиваетъ 10, а цифра третьяго мѣняется съ 6 на 7. Въ самомъ дѣлѣ, $16 + 14 = 30$; $30 = 20 + 10$; 20 су даютъ полный оборотъ, отмѣчающійся единицей на валикѣ ливровъ ($6 + 1 = 7$), а 10 су остаются во второмъ оконцѣ.

Наконецъ ставимъ первую рукоятку на 5—въ первомъ оконцѣ цифра 7 мѣняется на 0, а во второмъ 10 на 11.

Окончательныя показанія дадутъ: 47 ливровъ 11 су 00 денье.

Слѣдуетъ отмѣтить чрезвычайно остроумное приспособленіе, придуманное Паскалемъ для дѣйствія вычитанія: на валикахъ, на двухъ параллельныхъ лентахъ, имѣлся двойной рядъ цифръ и чиселъ—одинъ восходящій, другой нисходящій. Самыя оконца были снабжены общимъ для всѣхъ скользящимъ затворомъ, открывавшимъ, по желанію, то восходящую, то нисходящую ленту валиковъ. Достаточно было открыть нижнюю половину всѣхъ оконцевъ и закрыть верхнюю, чтобы вращеніе рукоятокъ перемѣщало данныя въ убывающемъ порядкѣ.

Работа на машинѣ Паскаля шла, относительно, крайне медленно. Процессы умноженія и дѣленія протекали едва ли не еще медленнѣе, чѣмъ на русскихъ счетахъ, такъ какъ каждократное приведеніе къ нулю передъ повторнымъ сложеніемъ и вычитаніемъ, которыми замѣнялись умноженіе и дѣленіе, отнимало много времени.

Нынѣ машина Паскаля—антикварная рѣдкость, имѣющаяся только въ музеяхъ; извѣстны всего четыре сохранившіеся экземпляра.

Лучшій изъ нихъ—съ котораго сдѣланы прилагаемые рисунки—собственность частнаго коллекціонера, г-на М. Богуэна (Baugouin) въ Бордо.

Предполагается, что бордоскій экземпляръ—собственноручной работы Паскаля. Изготовленъ въ 1647 году для великаго канцлера Франціи Сегюе (le grand chancelier Séhuier) по случаю испрошенія привилегіи и патента на изобрѣтеніе.

На внутренней сторонѣ крышки ящика надпись:

«Illustrissimo et integerrimo Franciae cancellario D. D. Petro Seguier Blasius Pascal patricius arvernus inventor L. D. D.Pascal».

Т. е.:

«Достославнѣйшему и безупречнѣйшему канцлеру Франціи Д. Д. Петру Сегюе—овернскій дворянинъ Д. Д. Паскаль, изобрѣтатель».

Паскалева машина—прототипъ всѣхъ существующихъ, даже наиболѣе усовершенствованныхъ, машинъ. Кто хорошо понялъ механизмъ прототипа, легко усвоитъ особенности всякой другой конструкціи.

Другъ Паскаля, богословъ Арно (Arnaud), говоритъ въ своихъ воспоминаніяхъ, что Паскаль предполагалъ приспособить свою машину также къ извлеченію корней и четыремъ дѣйствіямъ надъ дробями, но смерть помѣшала ему осуществить свои планы.

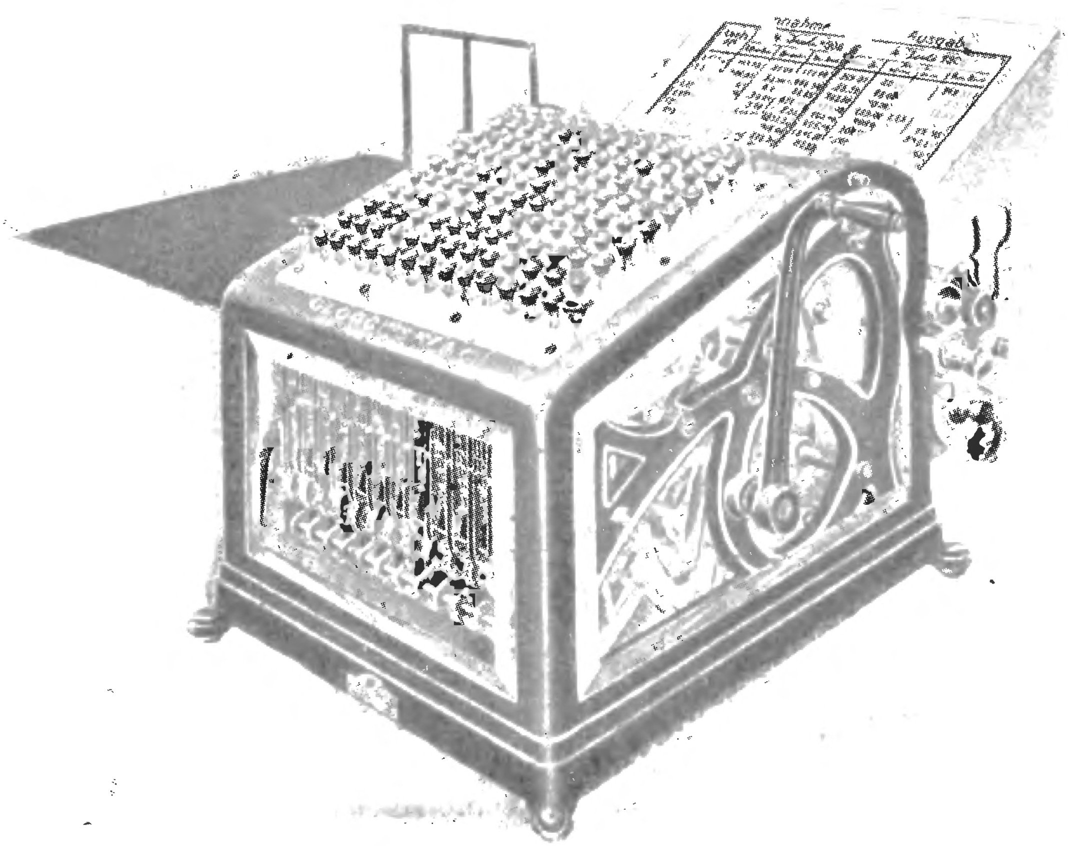
Послѣдователи Паскаля.

Новѣйшія машины.

Усилія всѣхъ послѣдователей Паскаля были направлены къ двумъ главнымъ цѣлямъ: во-первыхъ, къ устраненію медлительнаго процесса поочереднаго вращенія ряда отдѣльныхъ рукоятокъ; и во-вторыхъ, къ ускоренію дѣйствій умноженія и дѣленія.

Побочными усовершенствованіями явились уже впослѣдствіи: отпечатываніе результатовъ на карточкахъ, бумажныхъ лентахъ листахъ или книгахъ, приспособленіе особыхъ механизмовъ для возведенія въ степень, извлеченія корня, логариѳмированія; устройство звонковъ, предупреждающихъ о неправильномъ манипулированіи; электрическихъ двигателей взамѣнъ работы вручную, клавишей вмѣсто рукоятокъ и пр. Нѣкоторые изъ типовъ новѣйшихъ сложныхъ машинъ представлены на фиг. 77, 78, 79.

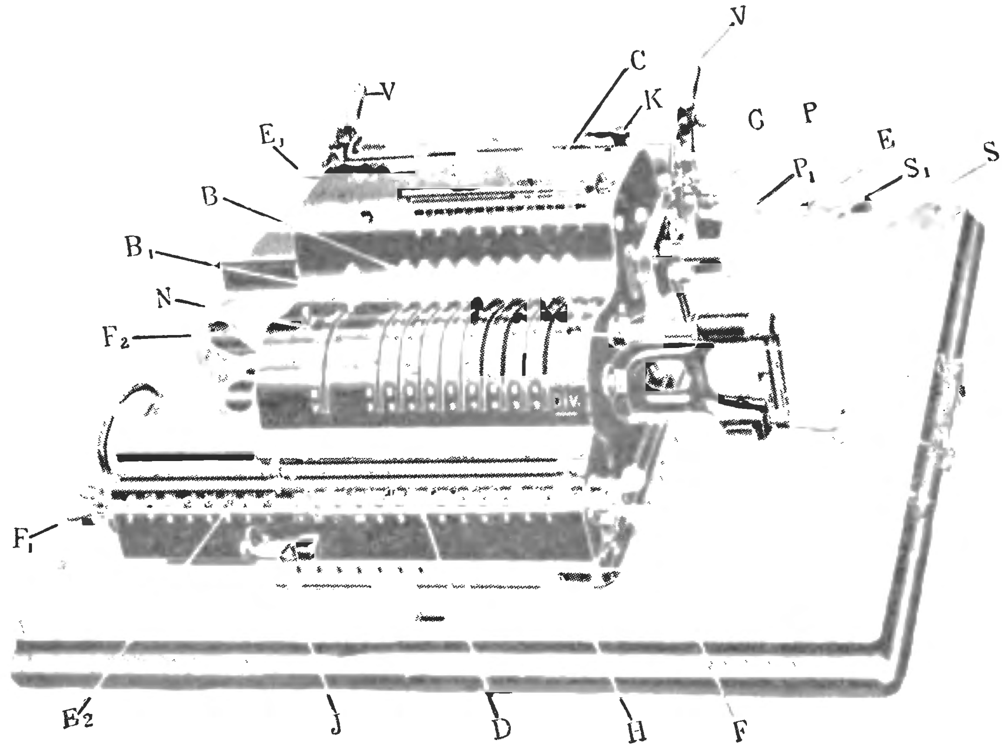
Замѣнить рядъ отдѣльныхъ рукоятокъ одною общею удалось еще при жизни Паскаля нѣмецкому ученому Лейбницу, создавшему въ 1671—73 гг. типъ машины, усовершенствованный впослѣдствіи Томасомъ. Задача—однимъ оборотомъ рукоятки не только поворачивать цифровые валики каждый на различныя доли оборота, но и вовсе выключать нѣкоторые изъ общаго всѣмъ прочимъ вращательнаго движенія была разрѣшена Лейбницемъ путемъ введенія въ систему такъ называемыхъ «дифференціальныхъ зубчатыхъ колесъ», или цилиндровъ, съ наискось срѣзанными зубцами. Такимъ образамъ каждое «дифференціальное колесо» являлось, по отношенію къ приводимымъ имъ въ движеніе шестернямъ, какъ бы имѣющимъ перемѣнное число зубцовъ (отъ 0 и до 10) въ зависимости отъ того, какою частью своей зубчатой поверхности оно входило въ соприкосновеніе съ шестер-



Фиг. 77.

нями. Внесенное Томасомъ усовершенствованіе состояло главнымъ образомъ въ томъ, что дифференціальныя колеса Лейбница онъ замѣнилъ такими же валами. Разница между тѣми и другими наглядно усматривается на фиг. 80 и 81.

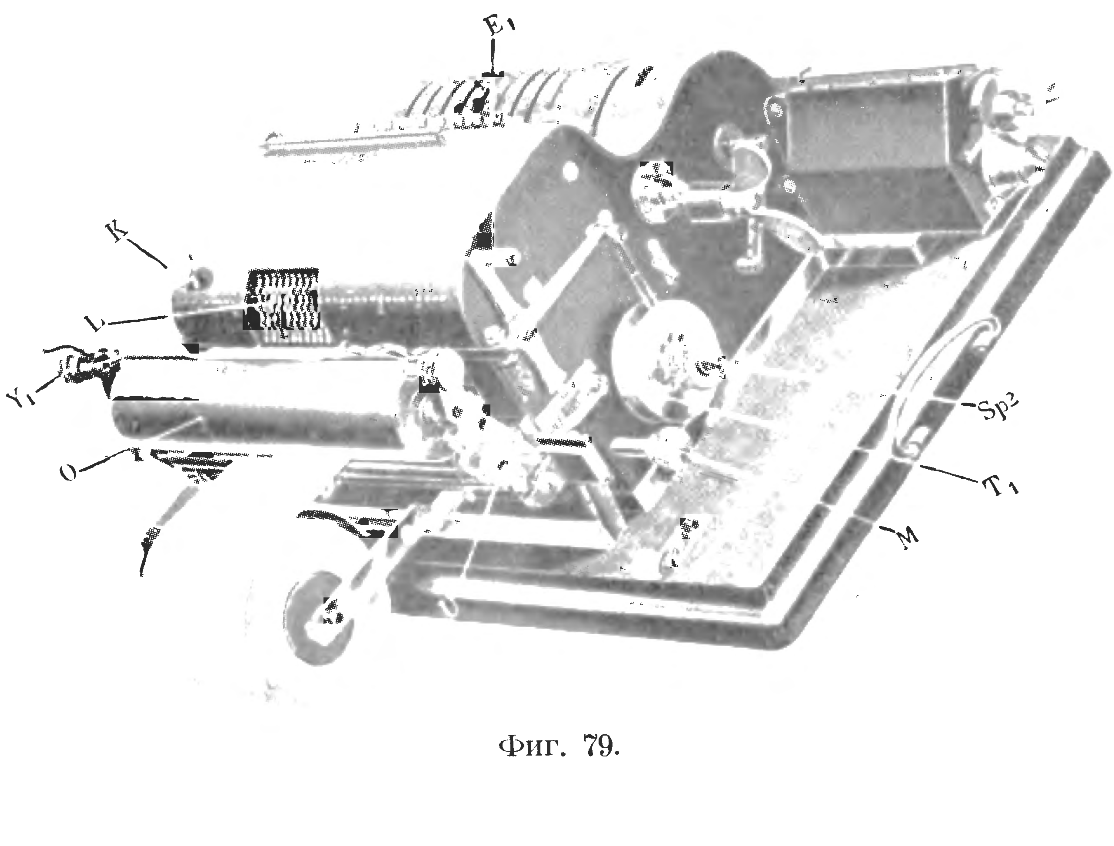
На фигурѣ 81-ой ясно видно, какъ съ помощью кнопокъ, скользящихъ вдоль прорѣзовъ въ крышкѣ аппарата, перемѣщаются скользящія вдоль осей подъ крышкой шестерни, которыя, въ зависимости отъ установки, либо вовсе не входятъ въ соприкосновеніе съ зубчиками вала, либо, по желанію работаю-



Фиг. 78.

щаго,—съ однимъ, двумя, тремя, пятью и пр.; всѣ же валы приводятся въ движенiе одной общей рукоятью *b*.

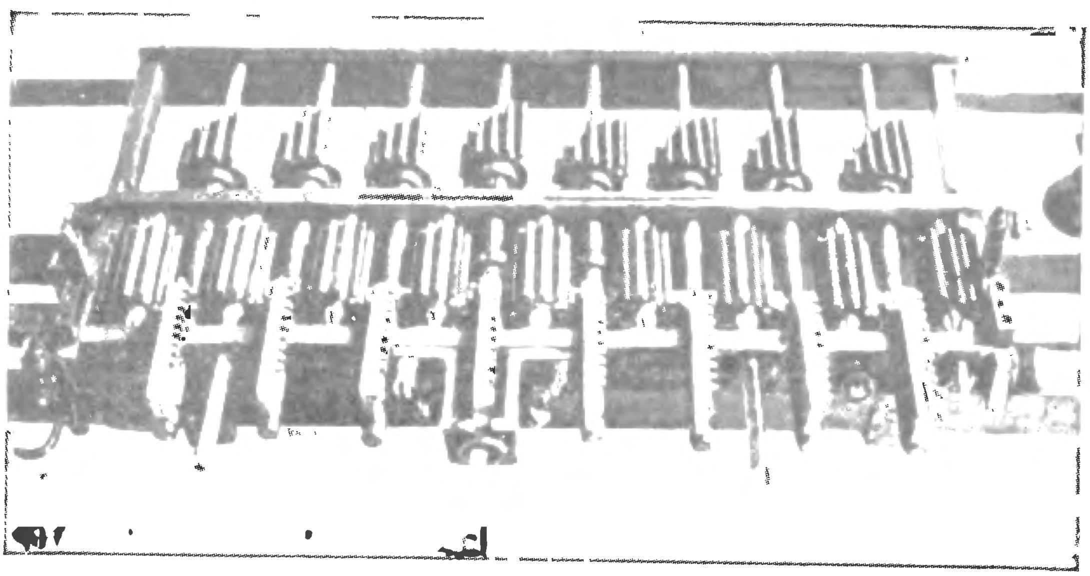
На фиг. 82 изображена типичная для всѣхъ построенныхъ по системѣ Томаса машинъ рабочая доска ариѳмометра Буркхарда. Подъ буквой *O* обозначены на ней щели съ цифрами,



Фиг. 79.

вдоль которыхъ движутся салазки съ указателемъ, помощью котораго шестерни устанавливаются на соприкосновеніе съ любымъ числомъ зубчиковъ дифференціальнаго вала. Понятно, что каждой щели соотвѣтствуетъ отдѣльный валъ; а K — общая всѣмъ имъ рукоятка.

Чрезвычайно остроумную разновидность машины Томаса встрѣчаемъ въ круглой машинкѣ «Гауссъ», представленной на фиг. 83 (общій видъ), 84 (разрѣзъ вдоль оси) и 85 (разрѣзъ перпендикулярно оси). Всѣ Томасовскіе валы замѣнены въ

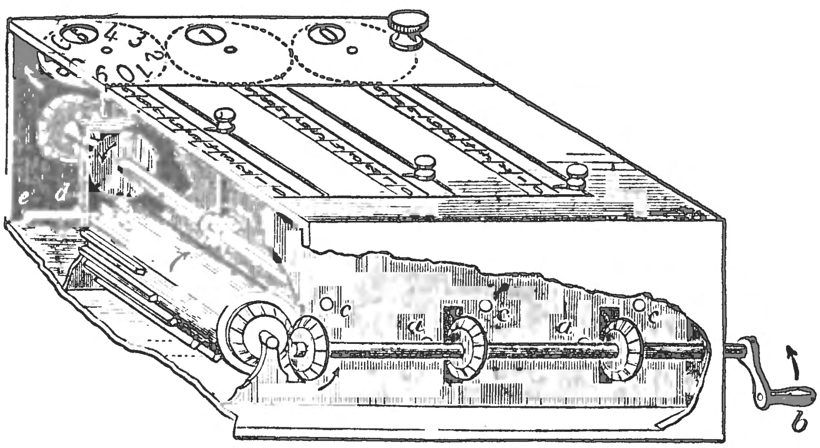


Фиг. 80.

«Гауссѣ» однимъ дискомъ съ рельефно выдающимися зубцами. Оси шестерней расположены лучеобразно; самыя шестерни, свободно скользящія вдоль осей по желобкамъ, устанавливаются на соотвѣтствующее заданію число зубцовъ помощью кнопокъ S (фиг. 84 и 85). Тогда одинъ полный оборотъ рукоятки K приводитъ зубцы диска по очереди въ соприкосновеніе со всѣми шестернями, которыя, въ свою очередь, перемѣщаютъ на соотвѣтствующее число дѣленій цифрованные валики.

Результаты выскакиваютъ въ оконцахъ вдоль внѣшняго горизонтальнаго обода цилиндрической коробки, въ которую заключенъ механизмъ.

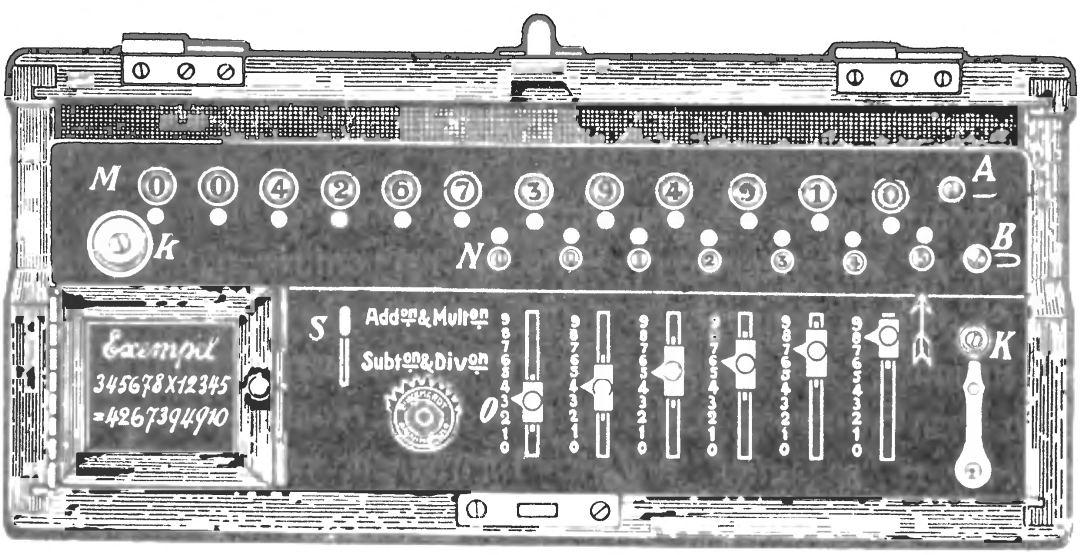
Машинка «Гауссъ» весьма интересна по мысли и по выполненію, но не имѣетъ серьезнаго значенія, вслѣдствіе неудобнаго размѣщенія частей, такъ какъ круговое и лучеобразное расположеніе заданій и отвѣтовъ не соотвѣтствуетъ общепринятому способу нашего письма, а потому даетъ поводъ къ опискамъ и ошибкамъ. Къ тому же регистръ дѣйствія машинки очень ограниченъ, какъ слѣдствіе ея незначительныхъ размѣ-



Фиг. 81.

ровъ. Увеличеніе же размѣровъ сдѣлало бы машинку громоздкой, а результаты неудобоохватываемыми однимъ взглядомъ.

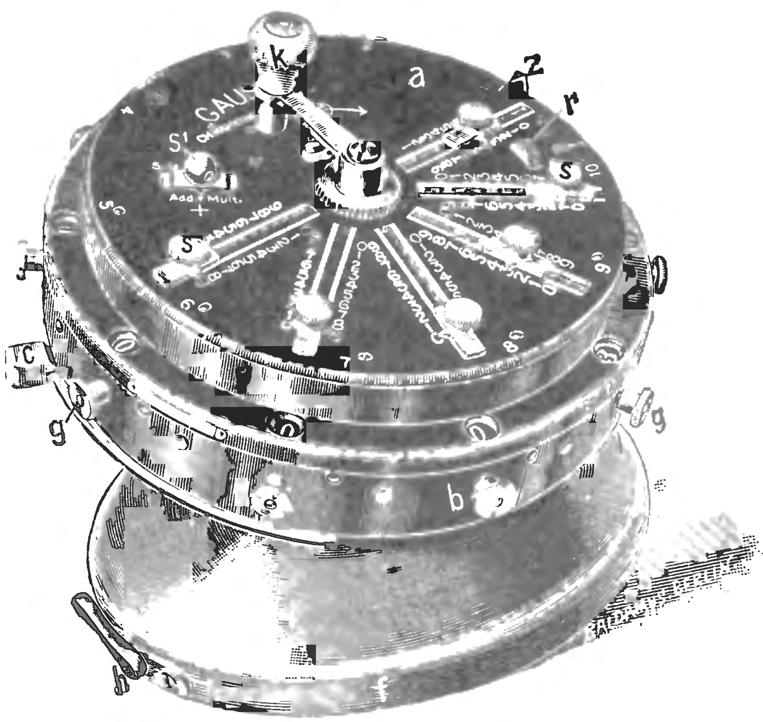
Достойными соперницами Томасовскихъ машинъ и, безспорно, лучшими изъ всѣхъ счетныхъ аппаратовъ, доступныхъ



Фиг. 82.

по цѣнѣ и безупречныхъ по выполненію, являются нынѣ машины Однеровскаго типа по имени петроградскаго механика Однера. Изъ нихъ наиболѣе совершенной конструкціей обладаютъ такъ называемыя «Брунсвиги» (Гриммъ, Наталисъ и К°, Брауншвейгъ).

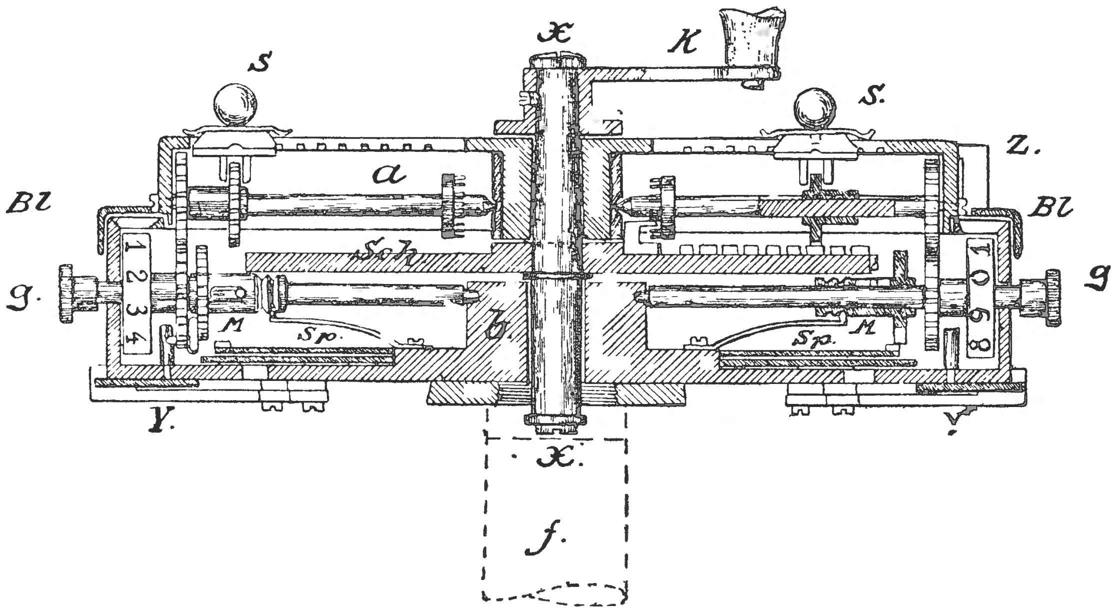
Главную особенность однеровскаго типа составляетъ устройство зубчатыхъ колесъ и весьма остроумное приспособленіе для быстраго умноженія и дѣленія, дѣйствующее помощью скользящаго механизма нижней части машины, благодаря которому вращеніе рукоятки и зубчатыхъ колесъ переводится, по волѣ работающаго, изъ нижнихъ регистровъ въ верхніе.



Фиг. 83.

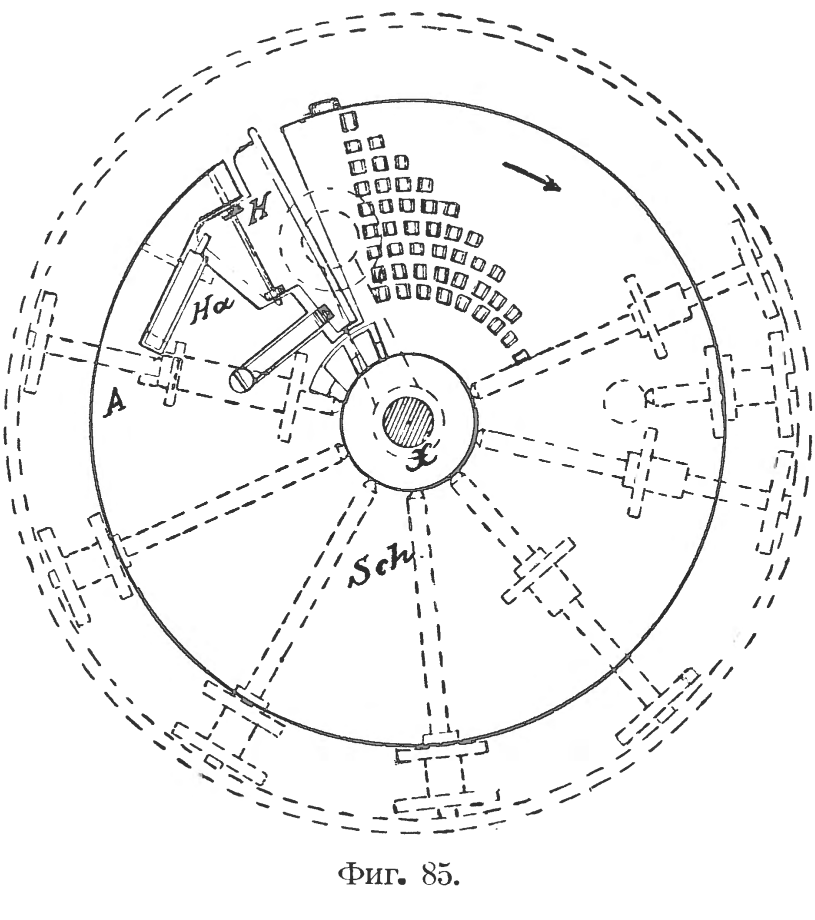
Зубцы колесъ въ машинахъ однеровскаго типа и, въ частности, въ «Брунсвигахъ» какъ бы временные, и, пока машина не работаетъ, скрыты въ толщѣ колеса. По волѣ работающаго на машинѣ, изъ числа зубцовъ выдвигаются установкой особаго рода рычаговъ или «спицъ» лишь столько, сколько соотвѣтствуетъ заданной цифрѣ. Благодаря такому остроумному устройству, весь промежуточный механизмъ машинъ Томасовскаго типа—дифференціальные колеса и валы, диски съ зубчатками—отпадаетъ, и колеса, соединенныя съ общей рукоятью, непосредственно дѣйствуютъ на цифрованные валики (фиг. 86).

На фиг. 87-й мы видимъ нормальнаго типа «Брунсвигу», съ рычагами или спицами, обозначенными пунктиромъ *h*. Значительно лучше рукоятки спицъ видны на «ариѳмотипѣ» Тринка (фиг. 78), построенномъ по типу «Брунсвиги».



Фиг. 84.

Скользящая часть нижняго затвора съ оконцами для результатовъ дѣйствій обозначена у «Брунсвиги» буквами «*ff*»;



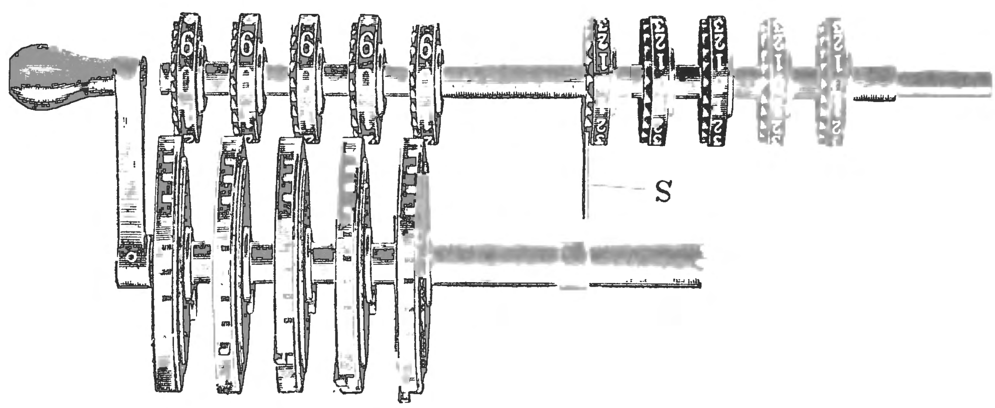
Фиг. 85.

у «ариѳмотипа» буквами «*FF*». Кромѣ скользящаго затвора или салазокъ, новѣйшія «Брунсвиги» снабжены отдѣльной рукоятью» (рис. 88 и 89) для моментальной установки всѣхъ спицъ и показаній на ноль.

Обратимся теперь къ подробностямъ работы съ помощью «Брунсвиги».

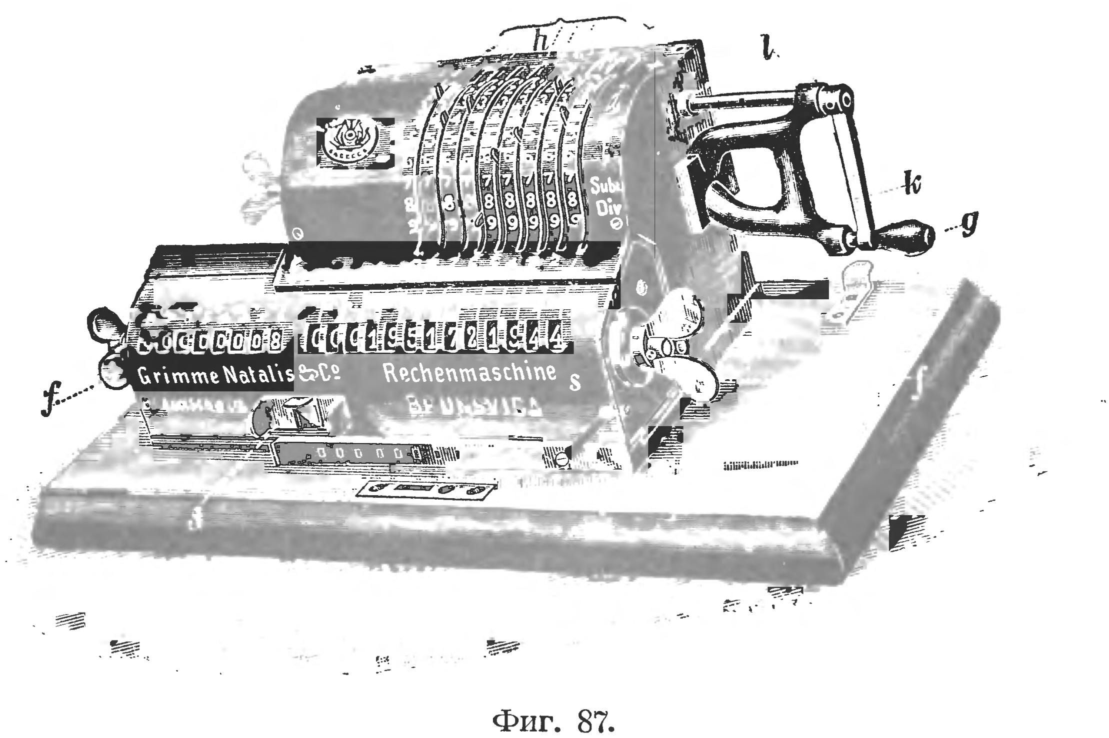
Положимъ надо найти сумму чиселъ 48 175 и 29 801.

Приводимъ всѣ показанія аппарата къ нулю и устанавливаемъ бѣлыя рукоятки спицъ (рис. 88) на цифры 5, 7, 1, 8, 4,



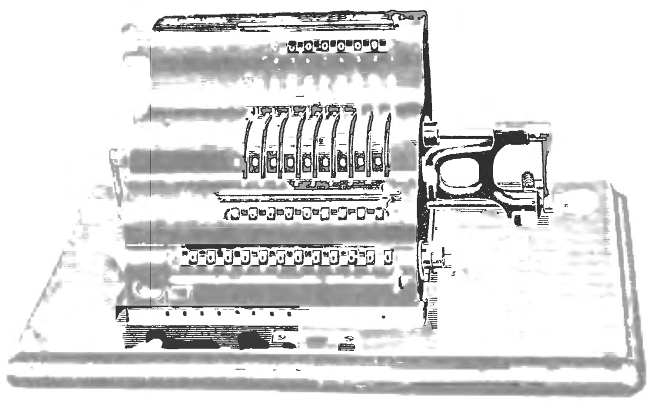
Фиг. 86

считая справа влѣво. Одинъ оборотъ главной рукояти и въ нижнемъ ряду отверстій появляется число 48 175. Затѣмъ устанавливаемъ спицы на другое слагаемое 29 801, и, послѣ новаго оборота главной рукояти, въ нижнемъ рядѣ отверстій выскакиваетъ сумма 77 976.



Фиг. 87.

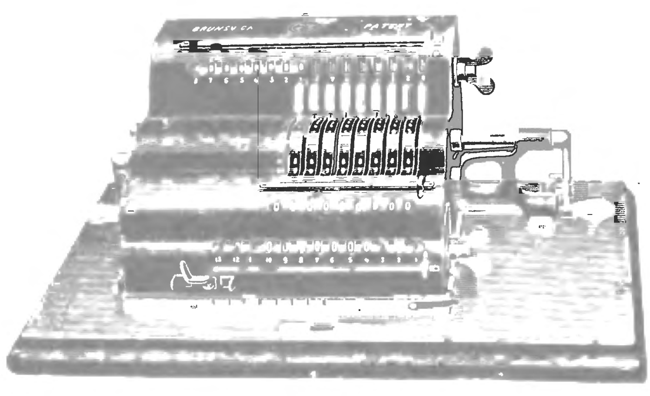
При вычитанiи вращаемъ главную рукоятку въ обратную сторону. Но есть машины, въ которыхъ рукоятка всегда вращается въ одну и ту же сторону; дѣйствiя же вычитанiя и дѣленiя производятся надавливанiемъ на кнопку для обратнаго вращенiя колесъ—подобно тому, какъ это дѣлается въ паровыхъ



Фиг. 88.

машинахъ помощью приспособленiя, называемаго «кулиссой».

Умноженiе на однозначные множители производится «Брунсвигой» такъ же, какъ и машиною Паскаля: повторенiемъ сложенiя 2, 3, 4 и т. д. до 9 разъ. Для множителей многозначныхъ имѣется скользящее приспособленiе въ нижней части машины, о которомъ уже упоминалось выше.



Фиг. 89.

Такъ, положимъ, что мы задались умножить на «Брунсвигѣ» 12 753 на 8 049. Какъ извѣстно, процессъ умноженiя разлагается, математически, на рядъ послѣдовательныхъ умноженiй, по формулѣ:

$$(12\,753 \times 8\,000) + (12\,753 \times 40) + (12\,753 \times 9).$$

То же дѣлаетъ и «Брунсвига»: Устанавливаютъ спицами число 12 753; перемѣщаютъ скользящее приспособленіе (салазки) съ нижнимъ рядомъ оконцевъ слѣва вправо такъ, чтобы цифра 3 множимаго пришлась противъ тысячнаго (четвертаго) оконца (считая справа влѣво) названнаго ряда и дѣлаютъ восемь оборотовъ главной рукоятью. Такимъ образомъ зубчатыя колеса, соединенныя съ главной осью, работаютъ въ тысячахъ и выше, а полученное произведеніе 102 024 имѣетъ справа три не введенныхъ въ оборотъ оконца, т. е. *три нуля*.

Затѣмъ передвигаютъ салазки справа влѣво такъ, чтобы цифра 3 множимаго пришлась противъ второго (десятковаго) оконца скользящей части машины, и поворачиваютъ рукоятку четыре раза. Полученное въ десяткахъ произведеніе $12\,753 \times 4 = 51\,012$ автоматически суммируется съ предыдущимъ и даетъ:

$$\begin{array}{r} 10\,202\,4 \\ +\ 51\,012 \\ \hline 10\,253\,412 \end{array}$$ съ нулемъ справа.

Наконецъ, устанавливаютъ салазки въ нормальное положеніе, т. е. такъ, чтобы цифра 3 множимаго пришлась противъ перваго (единичнаго) оконца салазокъ, и поворачиваютъ рукоятку 9 разъ.

Послѣднее частное произведеніе немедленно, по мѣрѣ возникновенія, суммируется съ приведеннымъ выше и даетъ окончательный результатъ какъ бы въ такой формѣ:

$$\begin{array}{r} 102\,534\,12 \\ +\ 114\,777 \\ \hline 102\,648\,897 \end{array}$$

«Брунсвига» не даетъ, конечно, промежуточныхъ произведеній 510 120 и 114 777, а лишь первое, сумму перваго и второго и окончательное, въ такой послѣдовательности: 1) 102 024 000; 2) 102 534 120 и 3) 102 648 897.

Процессъ дѣленія сводится на «Брунсвигѣ» къ процессу вычитанія, повторенному столько разъ, сколько единицъ оказывается въ частномъ. Для сокращенія медлительнаго процесса пользуются опять салазками, заставляя зубчатыя колеса оси работать послѣдовательно, отъ высшихъ разрядовъ къ низшимъ. Но установка салазокъ на высшую цифру частнаго не можетъ быть произведена самой машиною, автоматически, а требуетъ знакомства работающаго съ математическимъ процессомъ. Такъ онъ самъ долженъ, напримѣръ, сообразить, что при дѣленіи 8 147 255 на 6 375 можно заставить машину работать, начиная съ тысячъ; но при дѣленіи 4 875 111 на 5 037 слѣдуетъ начать съ сотенъ. Т. е., иначе говоря, въ первомъ случаѣ, прежде чѣмъ вращать рукоятку, надо установить неподвижную часть машины въ такое взаимное положеніе:

6 375
8 147 255

а во второмъ въ такое:

503 7
4 875 111

Ибо машина сама по себѣ отнюдь не мыслитъ и не соображаетъ, а лишь безупречно, съ недоступной для человѣка точностью, складываетъ, вычитаетъ и передаетъ влѣво наростающія единицы высшихъ порядковъ (при сложеніи и умноженіи).

Работа дѣленія на «Брунсвигѣ» идетъ въ такой послѣдовательности: послѣ установки, какъ выше, вращаютъ рукоятку до тѣхъ поръ, пока часть дѣлимаго, стоящая непосредственно подъ дѣлителемъ, не станетъ меньше дѣлителя. Въ оконцѣ, показывающемъ число оборотовъ рукоятки получаемъ первую цифру частнаго, послѣ чего передвигаемъ салазки влѣво такъ, чтобы подъ дѣлителемъ стояла опять часть дѣлимаго, большая дѣлителя, но не свыше одной лишней цифры.

Такъ въ первомъ примѣрѣ:

6 375
8 147 255

послѣ перваго же оборота получается:

6 375
1 772 255

и въ контрольномъ оконцѣ числа оборотовъ цифра 1.

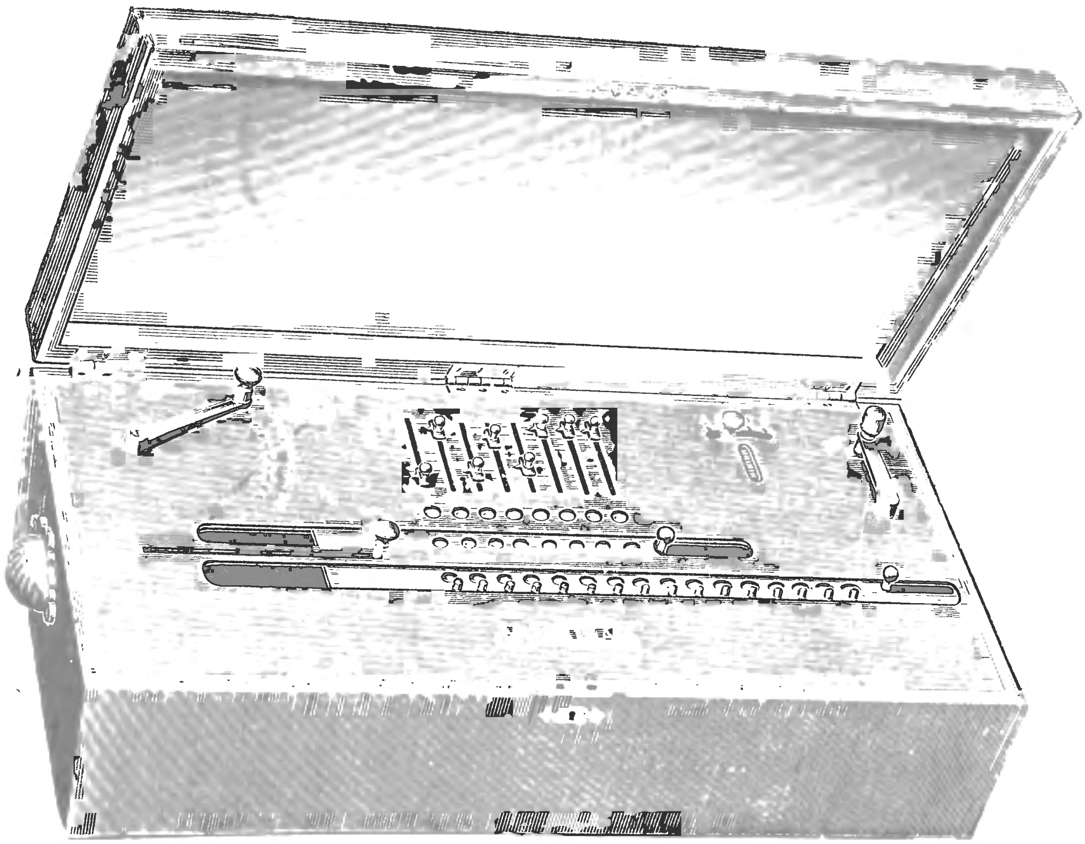
Перемѣщаемъ салазки въ положеніе:

637 5
1 772 255

Послѣ двухъ новыхъ оборотовъ устанавливаются числа:

637 5
497 255

а въ контрольномъ оконцѣ цифра 2.



Фиг. 90.

Перемѣщаемъ салазки въ положеніе:

63 75
497 255

дѣлаемъ семь оборотовъ рукоятью; читаемъ на машинѣ:

63 75
51 005

Перемѣщаемъ салазки влѣво такъ:

6 375
51 005

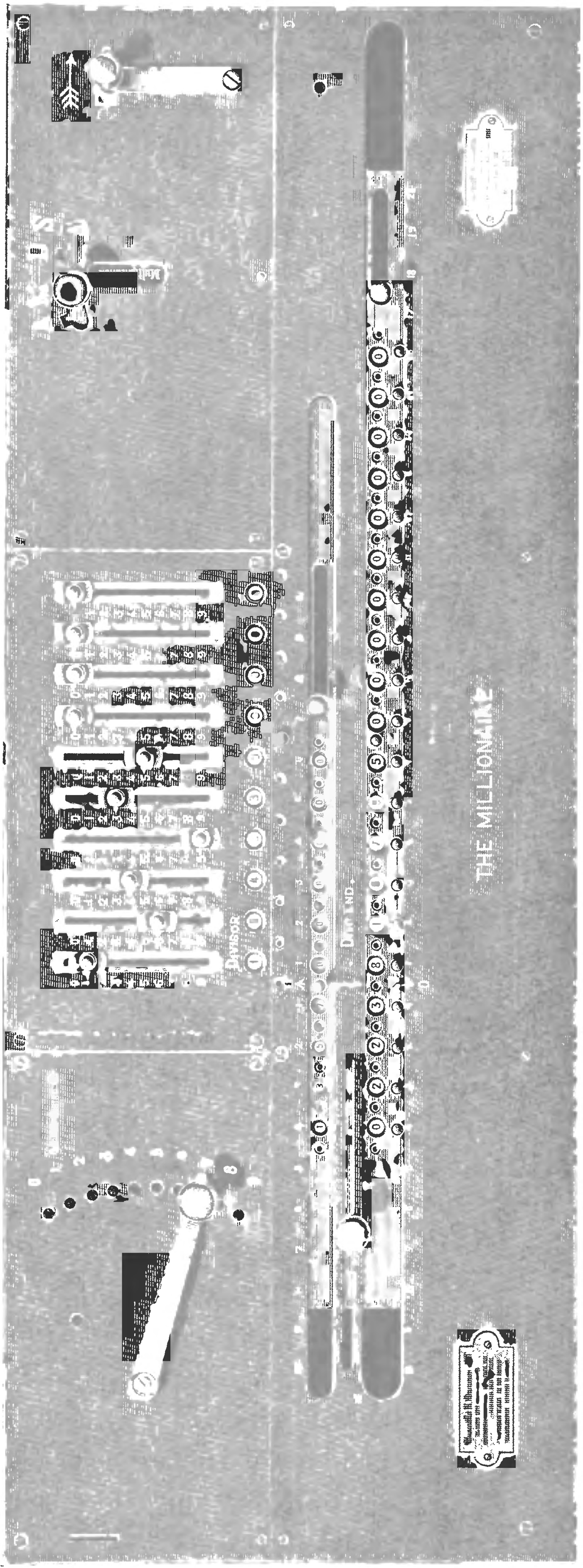
и, послѣ восьми оборотовъ рукоятки, получаемъ:

6 375
5

Контрольныя оконца даютъ готовое частное 1 278, а салазки остатокъ 5.

Быстрота самыхъ сложныхъ вычисленій на «Брунсвигѣ» изумительна; въ машинахъ, не имѣющихъ контрольныхъ оконцевъ для числа оборотовъ, надо вести имъ счетъ отдѣльно, записями на бумажкѣ или матовомъ стеклѣ.

Впрочемъ, человѣческая изобрѣтательность пошла еще дальше. Существуютъ машины, обезпечивающія впередъ необходимое для производимаго дѣйствія число оборотовъ механизма, при *одномъ* лишь оборотѣ рукояти. Такъ въ машинѣ «Милліонеръ»,— построенной по типу Томасовскихъ машинъ (фиг. 90 и 91). имѣется для этой цѣли



Фиг. 91.

особый рычагъ (фиг. 91, въ верхнемъ углу слѣва), установкой котораго на ту или на другую цифру обезпечивается соотвѣтствующее число оборотовъ механизма при каждомъ оборотѣ рукояти. Очевидно, что для сложенія и вычитанія рычагъ долженъ устанавливаться на 1.

Изъ машинъ съ клавишами вмѣсто спицъ лучшія—машины Пайка («Pike», фиг. 92), въ основѣ которыхъ, какъ и «Брунсвиги», лежитъ Однеровскій принципъ.

Фиг. 92.

Онѣ чрезвычайно напоминаютъ общераспространенныя пишущія машины и, подобно имъ, отпечатываютъ на бумагѣ наигранныя на клавишахъ и переданныя рукоятью печатающему механизму цифры и итоги дѣйствій.

Но безъ одухотворенной разумной мыслью работы человѣка всѣ подобныя машины, всетаки, не болѣе, какъ мертвый наборъ колесъ и рычаговъ: онѣ не въ состояніи *сами* рѣшать хотя бы наиболѣе простыя ариѳметическія задачи. Назначеніе ихъ—облегчать и выполнять механическую долю труда.

Охватить сразу, хотя бы бѣглымъ взглядомъ, все творчество, проявленное человѣчествомъ съ цѣлью ускоренія и облегченія механизма одних только точныхъ вычисленій, не легко; и на предыдущихъ страницахъ мы пока остановили вниманіе читателя преимущественно на тѣхъ счетныхъ аппаратахъ, которые пользовались или пользуются теперь наибольшимъ распространеніемъ для практическихъ приложеній. Но, съ одной стороны, всѣ эти машины еще далеко не составляютъ послѣдняго слова въ области достижимаго, а съ другой, читатель справедливо могъ бы посѣтовать на то, что въ исторіи (хотя бы бѣглой) изобрѣтенія счетныхъ машинъ нами опущены имена и попытки, заслуживающія самаго серьезнаго вниманія. Поэтому къ изложенному сдѣлаемъ еще кое-какія дополненія.

Замѣтимъ прежде всего, что основная задача точныхъ вычисленій разрѣшается по преимуществу четырьмя главными способами: *графическимъ (геометрическимъ)*, *динамическимъ*, *кинематическимъ* и *электрическимъ*.

Графическій методъ. — Палочки Непера.

Изъ счетныхъ аппаратовъ, основанныхъ на графическомъ методѣ, прежде всего необходимо вспомнить о Неперовскихъ палочкахъ. Джонъ Неперъ, баронъ Маркистонъ, знаменитый изобрѣтатель логариѳмовъ, носящихъ его имя, предложилъ остроумный способъ механическаго умноженія и дѣленія. Способъ этотъ описанъ въ его сочиненіи «Рабдологія», изданномъ въ 1617 году,—годъ смерти самого Непера.

Цифровая таблица, изображенная на фиг. 93-й, представляетъ таблицу Пиѳагора, помѣщенную на десяти палочкахъ или дощечкахъ. Лѣвая пластинка неподвижна, всѣ же остальныя могутъ передвигаться и перемѣщаться всячески. Каждый изъ квадратиковъ таблицы раздѣленъ діагональю на два треугольника. Въ нижнемъ треугольникѣ находится цифра единицъ произведеній таблицы умноженія, а въ верхнемъ, налѣво, цифра десятковъ. Предположимъ теперь, что рядомъ съ неподвижной лѣвой линеечкой помѣщены послѣдовательно линеечки, имѣющія сверху цифры **7**, **5** и **8**. Въ такомъ случаѣ нетрудно почти моментально получить произведеніе изъ 758 на всякое число отъ **1** до **9**.

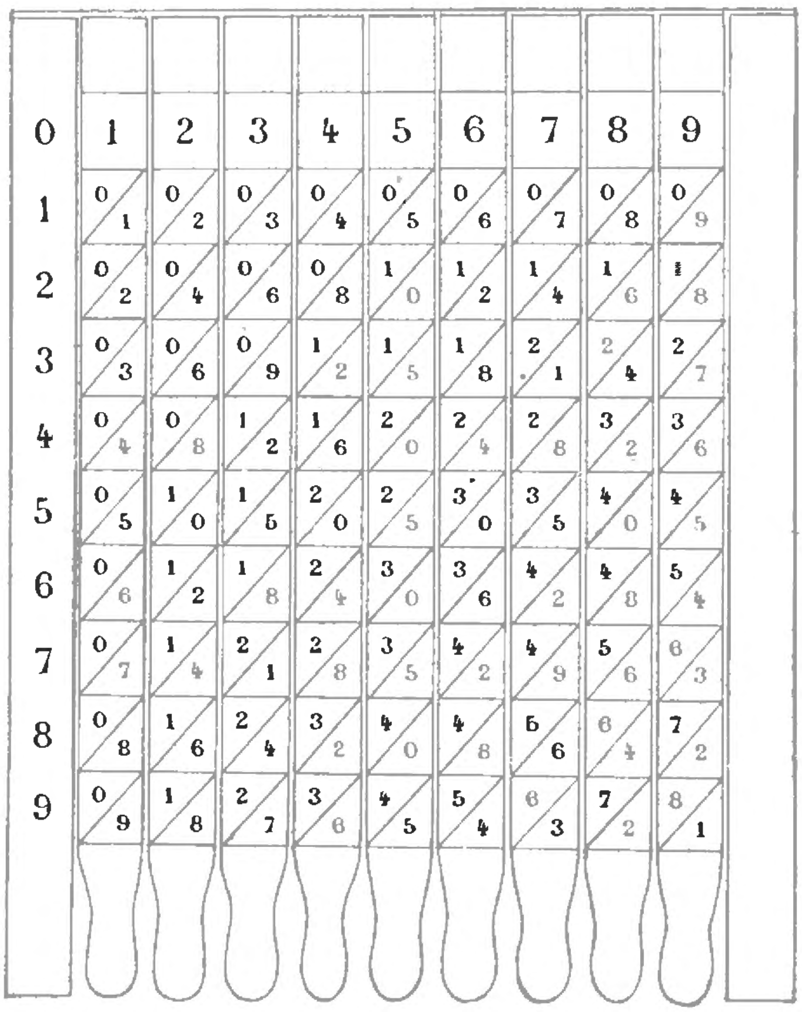
Такъ, напримѣръ, желая умножить это число **758** на **6**, мы смотримъ на неподвижную линейку и въ данномъ случаѣ противъ числа 6 по горизонтальному направленію находимъ:

$$6 \left|{}^{4}\!/_{2}\right|{}^{3}\!/_{0}\left|{}^{4}\!/_{8}\right|$$

Сложимъ числа параллельно діагоналямъ треугольничковъ, находимъ:

$$4,\ 2+3,\ 0+4,\ 8$$

т. е. число **4 548**, которое и есть произведеніе числа 758 на **6**.



Фиг. 93.

Такимъ образомъ Неперовы палочки позволяютъ очень быстро находить частныя произведенія любого числа на любую изъ первыхъ девяти цифръ, при чемъ не требуется знанія таблицы умноженія. Дѣйствіе умноженія сводится къ сложенію, а дѣленіе къ вычитанію, при чемъ не требуется дѣлать никакихъ пробъ. Очевидно, что чѣмъ болѣе числа, тѣмъ болѣе ускоряется работа при помощи Неперовыхъ палочекъ или линеекъ, хотя слѣдуетъ признать, что описаный счетный аппаратъ Непера самъ по себѣ далеко уступаетъ другому его великому открытію—логариѳмамъ.

Изъ послѣдователей и усовершенствователей системы Непера слѣдуетъ упомянуть о счетчикѣ Тронсета, о счетчикѣ Прюво Ле Гюэ (Pruvost Le Guay) и о Неперовскихъ кругахъ Кинемана (Quinemant). Графическій способъ счисленія въ послѣднее время въ особенности усовершенствованъ Женайлемъ (Genaille), который, по авторитетному свидѣтельству Люка, вполнѣ разрѣшилъ задачу устройства прибора для точныхъ вычисленій посредствомъ геометрическаго метода.

Динамическій методъ.

Начало приложенія къ счисленію динамическаго метода было положено Паскалемъ. Какъ видно изъ предыдущаго, этотъ способъ механическаго точнаго счета имѣетъ пока наибольшее число послѣдователей и изобрѣтателей. Наибольшей извѣстностью въ дѣлѣ устройства машинъ этого типа пользуются имена Рота, Томаса, Однера, Барбура, Мореля, Жайе, Гранта и мн. другихъ, упомянутыхъ уже нами въ своемъ мѣстѣ. Имена же англичанина Баббеджа и шведа Шейца знатоками вопроса произносятся съ особымъ уваженіемъ. Чарльзъ Баббэджъ всю свою жизнь и все свое состояніе посвятилъ на устройство универсальнаго счетчика, дающаго послѣдовательные члены ариѳметическихъ прогрессій какихъ угодно порядковъ. Устройствомъ своей машины онъ успѣлъ заинтересовать англійское правительство, которое выдало Баббэджу денежную помощь, но изобрѣтатель умеръ, не закончивъ устройства своей машины.

Георгъ Шейцъ, издатель техническаго журнала въ Стокгольмѣ въ серединѣ прошлаго столѣтія, и сынъ его Эдуардъ Шейцъ осуществили замыселъ Баббэджа. Благодаря денежной поддержкѣ стокгольмской академіи наукъ и шведскаго короля, они устроили счетную машину, служившую предметомъ удивленія самого Баббэджа на парижской выставкѣ 1855 года. Машина эта была пріобрѣтена американцемъ Ратбономъ (Rathbone) и принесена имъ въ даръ обсерваторіи Дюдлея въ Альбани. Другой экземпляръ былъ сдѣланъ для англійскаго правительства и облегчаетъ вычисленія англійскаго «Морского календаря» (Nautical Almanac).

Машина имѣетъ видъ небольшого піанино и операціи съ ней не болѣе сложны, чѣмъ на шарманкѣ. Простымъ поворотомъ рукоятки получаются послѣдовательные члены ариѳметическихъ прогрессій перваго, второго, третьяго и даже четвертаго порядка. Кромѣ того полученные результаты стереотипируются и могутъ быть отданы въ печать. Съ помощью этой машины чрезвычайно удобно издавать таблицы логариѳмовъ, синусовъ и синусъ-логариѳмовъ, не содержащія въ себѣ никакихъ ариѳметическихъ или типографскихъ ошибокъ. Машина высчитываетъ и стереотипируетъ въ часъ 120 строкъ, готовыхъ къ печати. Сравнительные опыты доказали, что машина даетъ двѣ съ половиной страницы въ то время, которое потребно опытному составителю, чтобы заполнить цифрами одну только страницу.

Кинематическій методъ.

Кинематическое рѣшеніе задачи предложено нашимъ знаменитымъ соотечественникомъ, нынѣ покойнымъ, академикомъ Чебышевымъ. Во всѣхъ вышеописанныхъ машинахъ динамическаго типа движенія неровны и прерывчаты. Во время поворота рукоятки каждая шестерня движется по своему: однѣ останавливаются въ то время, какъ другія еще продолжаютъ движеніе, и т. д. Нашъ знаменитый ученый устроилъ машину съ непрерывными и однообразными движеніями. Въ его ариѳметической машинѣ дѣйствіе, заключающееся въ прибавленіи 1 къ 999 999 не сложнѣе дѣйствія прибавленія 1 къ 000 000. Кромѣ того въ ней нѣтъ никакихъ пружинъ, а потому исключается возможность ошибокъ при вычисленіи. Въ настоящее время существуетъ всего одинъ экземпляръ этой машины. Между тѣмъ при нѣкоторыхъ поправкахъ она можетъ быть наилучшей изъ всѣхъ существующихъ нынѣ счетныхъ машинъ.

Электрическій методъ.

Мысль объ устройствѣ *электрической счетной машины* принадлежитъ уже упомянутому нами Женайлю (Genaille). Но труды этого несомнѣнно геніальнаго изобрѣтателя, къ сожалѣнію, не нашли достойной оцѣнки и поддержки въ свое время какъ со стороны ученыхъ и общественныхъ учрежденій, такъ и со стороны частныхъ лицъ.

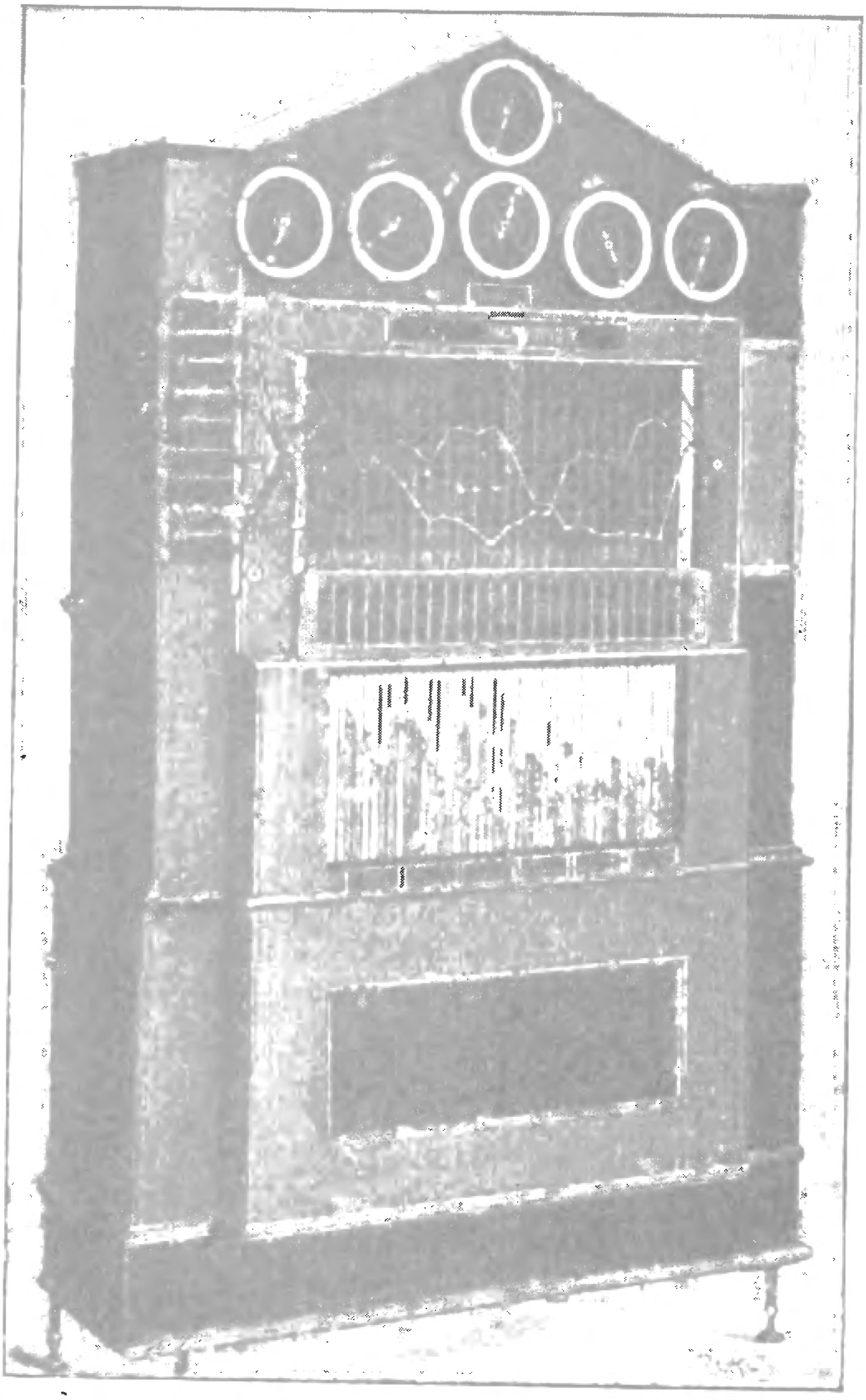
Цифрарь-діаграммометръ В. С. Козлова.

Въ числѣ новѣйшихъ изобрѣтателей счетныхъ машинъ необходимо указать и на аппаратъ нашего соотечественника В. С. Козлова, о которомъ безвременно скончавшійся Э. Люка прочелъ публичную лекцію въ 1890 году въ парижскомъ національномъ музеѣ искусствъ и ремеслъ. Изображенія цифраря-діаграммометра г. Козлова даны у насъ на фиг. 94 и 95.

Извѣстные до сего времени счетные аппараты и такъ называемые *интеграторы* обыкновенно служатъ для одного какого-либо опредѣленнаго дѣйствія или для однихъ какихъ-либо вычисленій. Основная же идея изобрѣтенія г. Козлова состоитъ въ томъ, что позволяетъ удобно одновременно получать разрѣшеніе различныхъ проблемъ, относящихся къ измѣренію различныхъ элементовъ кривой или діаграммы. Изобрѣтеніе это состоитъ изъ двухъ частей: діаграммографа и діаграммометра.

Діаграммографъ представляетъ собою расположенную на вертикальной плоскости таблицу, на которой начерчены горизонтальныя равноотстоящія другъ отъ друга линіи. Передъ таблицей находятся свободно двигающіяся вертикально шнуры съ кольцами, въ которыхъ ходятъ цвѣтные шнуры (Можно употреблять вмѣсто шнуровъ металлическіе кулисы или скользящія застежки). Подымая и опуская кольца, можно изобразить на таблицѣ любую кривую,—соотвѣтственно системѣ координатъ аналитической геометріи Декарта.

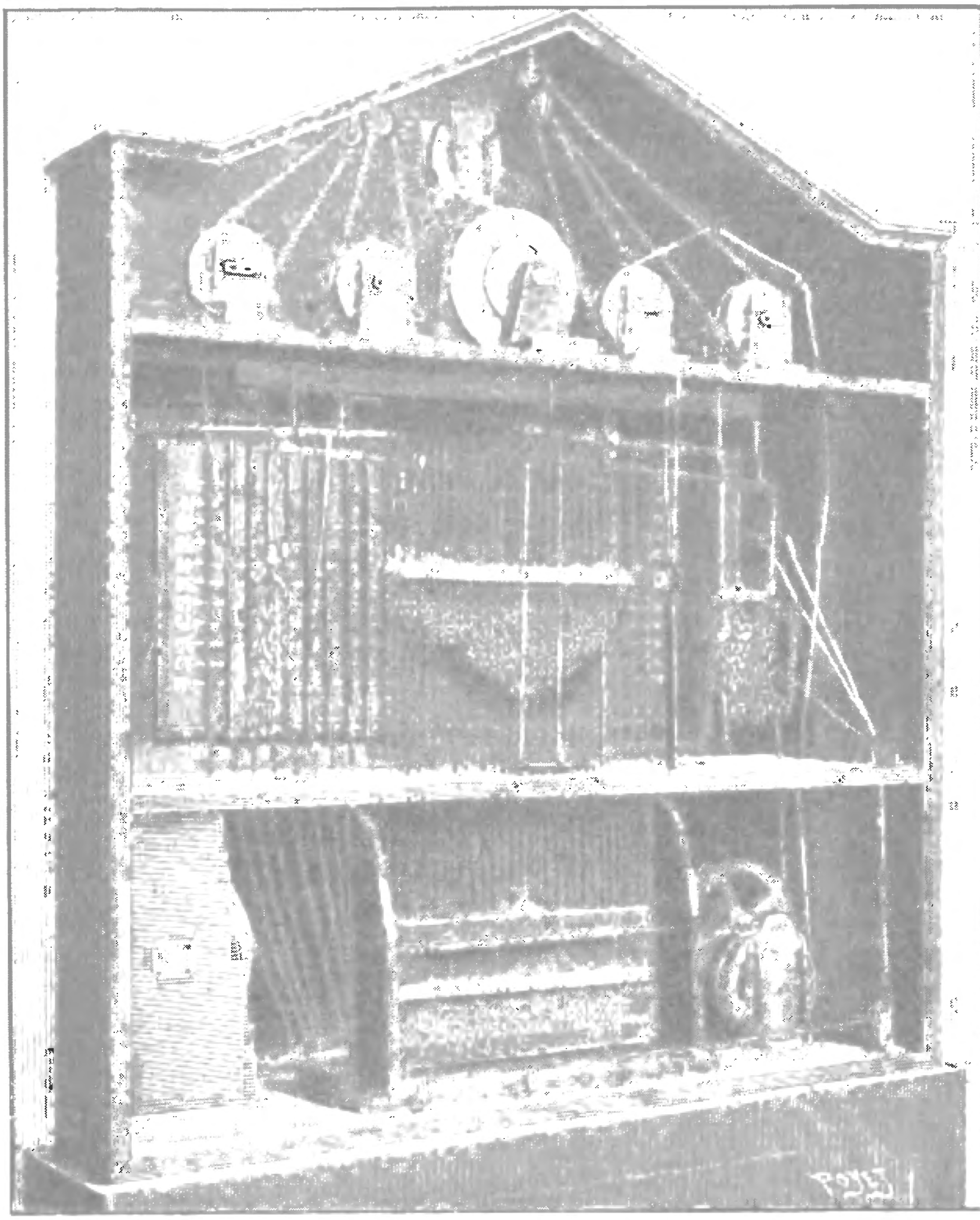
Нити, занумерованныя слѣва направо, представляютъ абсциссы 1, 2, 3... *n*, а различныя высоты колецъ, по отношенію ихъ къ любой горизонтальной линіи на таблицѣ, представляютъ ординаты, которыя мы обозначимъ $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$. Шнурокъ, предварительно проведенный во всѣ кольца, позво-



Фиг. 94. — Видъ цифраря-діаграммометра В. С. Козлова спереди.

ляетъ изображать мгновенно діаграмму, соотвѣтствующую даннымъ наблюденіямъ.

Такимъ образомъ, можно по желанію воспроизводить чертежи и діаграммы всякаго рода. Если мы примемъ за абсциссы время, измѣряемое минутами и секундами, то ординаты могутъ изобразить траекторію метательнаго снаряда, движенія свѣтилъ,



Фиг. 95. — Видъ механизма цифраря-діаграммометра.

расширенія и температуры тѣлъ и вообще всѣ явленія, зависящія отъ времени. Принимая же для выраженія абсциссами часы дня, мы можемъ изобразить ординатами температуру, барометрическое давленіе, гигрометрическое состояніе, быстроту вѣтра и его направленіе, пульсъ и температуру больныхъ и пр. Если же принять за абсциссы дни мѣсяца, мѣсяцы года, годы столѣтія, то мы можемъ ординатами изобразить курсы биржи и финансовыхъ цѣнностей, приходы и расходы негоціантовъ, ежедневныя температуры и среднія давленія, урожай, цѣны на хлѣбъ и различныя статистическія свѣдѣнія о рождаемости, смертности и т. д. Словомъ, діаграммографъ даетъ возможность быстро изображать графически различныя цифровыя наблюденія, относящіяся къ изученію явленій въ области физическихъ наукъ или въ статистикѣ.

Это собственно *феноменографъ*, т. е. настоящій наглядный выразитель явленій.

Діаграммометръ есть измѣрительный аппаратъ, дающій возможность при помощи *взвѣшиванія* быстро вычислять различные элементы діаграммы или кривой, отвѣчающей какимъ-либо цифровымъ наблюденіямъ.

Описываемый аппаратъ представляетъ собою лишь попытку совмѣстить разнообразныя пособія, которыя могутъ быть выдѣлены и приспособлены къ спеціальнымъ требованіямъ. Тѣмъ не менѣе, этотъ аппаратъ, при его весьма остроумномъ основномъ принципѣ, даетъ возможность исчислить быстро и одновременно очень значительное количество интеграловъ. Аппаратъ этотъ является *всеобщимъ счетнымъ инструментомъ* для инженера, физика, химика, статистика, банкира и промышленника [1]).

Общее заключеніе, которое Э. Люка высказалъ объ аппаратѣ г. Козлова, таково:

«Теперешняя модель діаграммометра, или точнѣе феноменографа, не вошла еще въ область обыденной практики, но мы думаемъ, что этотъ аппаратъ можетъ быть утилизированъ и имъ будутъ пользоваться въ разныхъ формахъ, приспособленныхъ къ тѣмъ или другимъ требованіямъ экспериментаторовъ.

---

[1]) До сихъ поръ извѣстны были только два счетныхъ аппарата, дѣйствующіе при помощи взвѣшиванія. Одинъ изъ нихъ: ариѳметическіе вѣсы Balance Arithmétique) Кассини (Cassini), описанные въ «Собраніи машинъ академіи (парижской) наукъ» (до 1699), и другой—подъемный мостъ, построенный по системѣ генерала Понселе, который можно видѣть въ укрѣпленіи Mont Valérien, близъ Парижа.

Стоимость изготовленія діаграммометра, съ его цѣпями и вѣсами, можетъ быть доступна всѣмъ. Настоящая модель діаграммометра есть только *временная оболочка* (enveloppe temporaire) геніальной идеи г. Козлова. Я полагаю также, что удобнѣе было бы замѣнить рычажные вѣсы пружинными (des dynamomètres). Наконецъ, слѣдовало бы измѣнить способы расположенія циферблатовъ-измѣрителей такъ, чтобы получать одновременно измѣренія разныхъ кривыхъ для одной и той же діаграммы. Необходимо, чтобы стрѣлки циферблатовъ могли показывать въ каждый моментъ не только различныя среднія, соотвѣтствующія всей серіи ординатъ, но также и различныя среднія, или ихъ суммы, для любого числа начальныхъ ординатъ. При этомъ способѣ можно было бы изображать на нижнемъ діаграммографѣ результаты по мѣрѣ ихъ полученія (или записывать ихъ на бумагѣ), образуя потомъ изъ нихъ новыя діаграммы, получать новыя опредѣленія и послѣдовательные интегралы,—двойные, тройные и кратные.

«Мы не можемъ опредѣлить заранѣе степени приближенія вычисленій, которыя даетъ діаграммометръ; но при примѣненіи его можно достигнуть послѣдовательныхъ приближеній.

«На этомъ аппаратѣ можно получать формулы Симпсона (Simpson), Понселе (Poncelet) и генерала Пармантье (Parmentier) и вообще всѣ формулы квадратуры. О значеніи аппарата можно легко судить изъ того, что даетъ намъ каждый изъ пяти измѣрителей относительно точности вычисленія. Чтобы провѣрить вычисленія, достаточно повторить тотъ же примѣръ въ противоположномъ направленіи, т. е. поставивъ ряды ординатъ справа налѣво послѣ того, какъ они были поставлены слѣва направо. Тогда, при точномъ дѣйствіи аппарата, первые четыре измѣрителя должны будутъ показать тѣ же результаты, что и ранѣе, а пятый—результаты дополнительные.

«По совѣту г. Марея (Marey), г. Козловъ полагаетъ примѣнить свой аппаратъ еще для измѣренія кривыхъ въ пространствѣ».

Пожелаемъ нашимъ соотечественникамъ-изобрѣтателямъ полнаго успѣха въ дѣлѣ, начатомъ столь блистательно.

Приближенныя вычисленія.

Пособіями для приближенныхъ вычисленій служатъ, съ одной стороны, логариѳмическія таблицы, а съ другой, графическіе методы. Линейка для вычисленій, изобрѣтенная Гюнтеромъ въ 1624 году, была съ теченіемъ времени значительно усовершенствована. Въ настоящее время она употребляется при занятіяхъ почти постоянно. Наибольшаго вниманія изъ такихъ линеекъ заслуживаютъ линейки Лаланна (Lalanne) и Маннгейма (Mannheim), изготовляемыя Тавернье-Граве (Tavernié-Gravet). Пользуются также для вычисленій кругами, подобными кругамъ Буше (Bouché), Рено-Таше (Renaud-Tachet) и Кинемана (Quinemant) и др.

Существуютъ также абаки, треугольники, прямоугольники и лекалы для вычисленій. Изъ русскихъ изданій подобнаго рода назовемъ хотя бы Д. Левитуса: «Счетный масштабъ»— графическая таблица для умноженія, дѣленія, возведенія въ степень, извлеченія корней и для тригонометрическихъ вычисленій.

Комбинаторика.

Ниже приведено нѣсколько простыхъ задачъ, на рѣшеніе которыхъ мы совѣтовали бы читателю обратить особое вниманіе. Несмотря на свою простоту, эти задачи могутъ служить полезнымъ введеніемъ въ новыя весьма обширныя и чрезвычайно интересныя области необъятнаго «Царства Смекалки». Мы говоримъ о такъ называемой *Теоріи Соединеній*, или *Анализъ Соединеній* (Analyse Combinatoir). Болѣе коротко и, пожалуй, удачно эту область математики называютъ однимъ словомъ: *Комбинаторика*. Надъ разработкой вопросовъ, связанныхъ съ этими областями математическихъ знаній, трудились еще древніе индусы. Но только послѣ безсмертныхъ изслѣдованій европейцевъ Галилея, Паскаля, Ферма и ихъ продолжателей выяснилось, какое тонкое, остроумное и вмѣстѣ могущественное оружіе для ума даетъ Комбинаторика. Прежде всего очевидно, что всякаго рода комбинаціи — соединенія и сочетанія — постоянно встрѣчаются въ различныхъ играхъ. И дѣйствительно, о Теоріи Соединеній, какъ и о *Теоріи Вѣроятностей*, не безъ основанія говорятъ, что онѣ родились и выросли за игорнымъ столомъ. Мы убѣдимся потомъ, однако, что. удовлетворивъ малоцѣнное любопытство игроковъ, теоріи эти обогатили человѣчество уже не «игрецкими», а совсѣмъ серьезными и полезными для всѣхъ знаніями и методами.

Задача 36-я.

Размѣщеніе пассажировъ.

Четверо пассажировъ входятъ въ вагонъ, въ которомъ 6 свободныхъ мѣстъ. Сколькими способами они могутъ размѣститься.

Рѣшеніе.

Первый пассажиръ можетъ занять любое изъ 6-ти мѣстъ. Значитъ, второй — любое изъ 5-ти мѣстъ; третій — любое изъ 4-хъ мѣстъ и четвертый — любое изъ трехъ. Каждое изъ такихъ размѣщеній можно сочетать съ каждымъ изъ остальныхъ, и искомое число, слѣдовательно, будетъ:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Задача 37-я.

Разнообразіе костюмовъ.

Господинъ имѣетъ 5 брюкъ, 8 жилетовъ и 7 сюртуковъ. Въ сколькихъ различныхъ костюмахъ можетъ онъ появляться?

Рѣшеніе.

Каждая изъ частей костюма можетъ всѣми способами сочетаться съ каждыми изъ остальныхъ. Всего же получится $5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$ различныхъ комбинацій.

Задача 38-я.

Выборъ предметовъ.

Сколькими способами можно сдѣлать выборъ, если брать по нѣсколько или всѣ изъ n данныхъ предметовъ?

Рѣшеніе.

Съ каждымъ предметомъ можно поступить двояко: или брать его, или не брать. Каждый подобный способъ обращенія съ однимъ предметомъ можно сочетать съ каждымъ способомъ обращенія съ каждымъ изъ остальныхъ предметовъ. Значитъ, искомое число было бы $2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2$ (n множителей) $= 2^n$. Но отсюда надо исключить случай, когда *не берутъ ни одного предмета*. Итакъ, искомое число есть $2^n - 1$.

Задача 39-я.

Имѣя 6 пріятелей, сколькими способами можно пригласить ихъ на обѣдъ, приглашая или всѣхъ, или нѣкоторыхъ?

Рѣшеніе.

Задача, очевидно, есть частный случай предыдущей, искомое число есть $2^6 - 1 = 63$.

Задача 40-я.

Сколькими способами n предметовъ могутъ быть розданы p лицамъ, если относительно числа вещей которое можетъ получить каждый, нѣтъ никакихъ ограниченій.

Рѣшеніе.

Каждая вещь имѣетъ p назначеній. Слѣдовательно, искомое число есть p^n.

Задача 41-я.

Сколькими способами 5 вещей могутъ быть распредѣлены между 2-мя лицами?

Рѣшеніе.

Первая вещь можетъ быть дана либо одному, либо другому лицу, вторая также и т. д. Значитъ, получается 2^5 способовъ. Но изъ этого числа надо исключить 2 случая, когда только то или другое лицо получаетъ всѣ 5 вещей. Исключая эти 2 случая, находимъ, что число способовъ есть $2^5 - 2 = 30$.

Задача 42-я.

Имѣется 3 орѣха, 4 яблока и 2 апельсина. Сколько будетъ комбинацій для выбора, если предлагаютъ взять, по меньшей мѣрѣ, по одной штукѣ каждаго лакомства?

Рѣшеніе.

Предлагается взять одинъ или болѣе орѣховъ, одно или болѣе яблокъ, одинъ или болѣе апельсиновъ. Изъ предыдущихъ задачъ мы уже знаемъ, что выборъ каждаго рода соотвѣтственно будетъ $2^3 - 1 = 7$, $2^4 - 1 = 15$, $2^2 - 1 = 3$. Каждый выборъ одного рода комбинируется съ каждымъ выборомъ другихъ родовъ. Искомое число, значитъ, равно $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$.

Задача 43-я.

Сколько словъ о четырехъ буквахъ можно составить изъ 17-ти согласныхъ и 5-ти гласныхъ, если въ серединѣ должны находиться двѣ различныя гласныя, а по краямъ по одной согласной, которыя могутъ быть или одинаковы, или различны?

Рѣшеніе.

Ясно, что первое мѣсто въ требуемыхъ словахъ замѣщается 17-ю различными способами. Столькими же способами замѣщается и послѣднее мѣсто, ибо согласныя, по условію задачи, могутъ повторяться. Съ другой стороны, можно разсчитать, что изъ 5-ти гласныхъ, беря ихъ по двѣ различныхъ, можно получить $5 \cdot 4 = 20$ различныхъ комбинацій. Такимъ образомъ, искомое число требуемыхъ словъ $= 17 \cdot 17 \cdot 20 = 5\,780$.

Задача 44-я.

На улицахъ города.

Улицы города расположены на подобіе линій шахматной доски, при этомъ m улицъ идетъ съ сѣвера на югъ, а n съ востока на западъ. Сколькими путями можно пройти отъ сѣверо-западнаго угла на юго-восточный, идя возможно кратчайшимъ путемъ.

Рѣшеніе.

Нужно пройти $m+n-2$ участка,— именно: $m-1$ участокъ съ запада на востокъ и $n-1$ участокъ съ сѣвера на югъ. Различныхъ путей получится столько, сколькими способами можно $m-1$ предметъ выбрать изъ числа $m+n-2$ предметовъ. Значитъ искомое число равно

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (m+n-2)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (m-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3 \ldots (n-1)}.$$

Теорія соединеній.

Перестановки, размѣщенія и сочетанія.

Анаграммы.

Напишемъ какое-нибудь слово и станемъ всячески переставлять составляющія его буквы. Если при такихъ перестановкахъ получится новое слово (состоящее, конечно, изъ тѣхъ же буквъ, что и первоначальное, только въ другомъ порядкѣ), то, значитъ, мы получимъ *анаграмму*. Такъ, напр., возьмемъ слово **жар**, состоящее изъ трехъ буквъ, если не считать твердаго знака. Переставляя всѣми возможными способами составляющія это слово буквы, мы получимъ 6 слѣдующихъ комбинацій:

жар	*раж*
ржа	*жра*
арж	*ажр*

Разсматривая 6 полученныхъ перестановокъ изъ 3-хъ буквъ, мы видимъ, что изъ слова *жар* получается анаграмма *ржа*. Можно, пожалуй, прибавить сюда и *раж*, такъ какъ это слово въ выраженіи «вошелъ въ ражъ» получило большое распространеніе въ нашемъ обиходномъ языкѣ. Остальныя же три перестановки (ажр, жра, арж) буквъ надо отбросить, какъ ничего не говорящія нашему слуху и сознанію.

Точно также, напр., изъ слова *лиса* путемъ перестановки буквъ можно получить слово *сила*. Изъ слова *кипа* составляются анаграммы *пика* и *паки;* изъ слова *Москва* получается *смоква*. Весьма употребительныя въ математикѣ слова *логариѳмъ* и *алгориѳмъ* тоже анаграмматичны, т. е. состоятъ изъ тѣхъ же буквъ, только переставленныхъ въ иномъ порядкѣ, и т. д. Примѣровъ можно подобрать сколько угодно. Развлеченія съ анаграммами принадлежатъ къ самымъ общеизвѣстнымъ и распространеннымъ, и врядъ ли любой изъ нашихъ читателей такъ или иначе не встрѣчался съ ними, хотя, быть можетъ, не каждый давалъ себѣ отчетъ въ томъ, что въ этомъ случаѣ онъ приходилъ въ соприкосновеніе съ обширной математической областью, имѣющей огромное теоретическое и практическое значеніе.

Само собой разумѣется, что вмѣсто отдѣльныхъ словъ можно брать цѣлыя фразы и получать изъ нихъ анаграммы, т. е. новыя слова и выраженія, состоящія изъ тѣхъ же буквъ, только переставленныхъ въ другомъ порядкѣ. Величайшіе математическіе умы, особенно въ прежнее время, охотно составляли различнаго рода анаграммы.

Таковы, напр., Паскаль, Ферма, Гюйгенсъ, Валлисъ, Бернулли и многіе другіе. Съ одной стороны эти анаграммы служили интересными примѣрами развиваемаго этими учеными анализа соединеній и сочетаній, а съ другой, чтобы сохранить за собой первенство открытія, не сообщая его раньше во всеобщее свѣдѣніе, ученые часто выражали свое открытіе въ видѣ анаграммы, т. е. въ видѣ фразы или просто собранія буквъ, которыя при иной надлежащей перестановкѣ буквъ открывали секретъ изобрѣтателя. Такимъ образомъ анаграммы обращались въ родъ скрытаго письма, въ тайнопись или *криптограммы*, о которыхъ въ настоящей книгѣ читатель имѣетъ отдѣльную главу.

Точно также многія анаграммы обязаны своимъ происхожденіемъ тѣмъ послѣдователямъ мистики и каббалы, которые въ именахъ иныхъ людей или названіяхъ событій искали особаго скрытаго значенія.

Есть анаграммы, которыя пріобрѣли даже историческую извѣстность.

Нѣкоторыя извѣстныя анаграммы.

Великій математикъ и философъ Паскаль (1623—1662) задалъ было своимъ читателямъ и истолкователямъ довольно тяжелую работу. Въ его знаменитыхъ «*Pensés*» («Мысли») находится, между прочимъ, такое мѣсто:

«La manière d'écrire d'Épictète de Montaigne et de Salomon de Tultie est la plus d'usage» etc... т. е.: слогъ Эпиктета, Монтеня и Саломона де-Тюльти наиболѣе употребителенъ и т. д.

Имена Эпиктета и Монтеня извѣстны всѣмъ, но кто такой *Саломонъ де-Тюльти?* Это, очевидно, какой-то псевдонимъ, изобрѣтенный Паскалемъ, —догадывается коментаторъ. Но кто же скрывается подъ этимъ псевдонимомъ?

Отвѣтъ на этотъ вопросъ даетъ анаграмма. Если въ имени *Salomon de Tultie* (Саломонъ де-Тюльти) сдѣлать перестановку буквъ, то получится *Louis de Montalte* (Луи де-Монтальтъ), т. е. тотъ псевдонимъ, которымъ Паскаль подписывалъ свои знаменитыя *Lettres Provinciales* («Письма Провинціала»).

Христіанъ Гюйгенсъ (1629—1695) былъ первымъ, который открылъ, что планета Сатурнъ окружена плоскимъ кольцомъ, свободно висящимъ на уровнѣ экватора планеты. Открытіе это имъ сдѣлано въ 1655 году, а сочиненіе о «Системѣ Сатурна» онъ издалъ только въ 1659 году. Но, чтобы удержать за собой первенство открытія, Гюйгенсъ тотчасъ же записалъ его анаграммой изъ слѣдующихъ буквъ:

aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiiii, lll, mm, nnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, ttttt, uuuuu.

Если изъ этихъ буквъ сдѣлать соотвѣтственныя перестановки, то получится такая латинская фраза:

Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato, т. е. онъ окруженъ кольцомъ тонкимъ, плоскимъ, нигдѣ не подвѣшеннымъ, наклоненнымъ къ эклиптикѣ.

Въ томъ же 1655 году Гюйгенсъ открылъ перваго спутника Сатурна (Титана) и нашелъ время его обращенія около планеты равнымъ 15-ти днямъ. Открытіе это онъ тоже облекъ въ форму анаграммы, копію которой послалъ, между прочимъ, знаменитому своему современнику, англійскому математику Валлису (Wallis). Но здѣсь получилась довольно забавная шутка. Валлисъ былъ мастеръ въ дѣлѣ истолкованія (дешифрированія) анаграммъ. Получивъ анаграмму Гюйгенса, онъ быстро истолковалъ ее и составилъ по этому поводу свою анаграмму, нѣсколько длиннѣе Гюйгенсовой. Но въ своемъ отвѣтѣ послѣднему Валлисъ ничего не говоритъ о своей дешифровкѣ, а просто благодаритъ Гюйгенса за вниманіе и пишетъ, что имѣетъ тоже нѣчто передать ему въ своей прилагаемой анаграммѣ. Гюйгенсъ послалъ Валлису истолкованіе своей анаграммы. Каково же было его изумленіе, когда въ отвѣтъ онъ получилъ рѣшеніе анаграммы Валлиса, изъ котораго вытекало, что послѣдній чуть не раньше будто бы сдѣлалъ то же самое открытіе, что и Гюйгенсъ!

Скоро выяснилось, что Валлисъ хотѣлъ пошутить и кстати показать безполезность анаграммы въ дѣлѣ скрытаго письма. Гюйгенсъ, однако, не оцѣнилъ этой шутки и разсердился... Великіе люди также имѣютъ свои маленькія слабости.

Изъ другихъ анаграммъ отмѣтимъ еще слѣдующія:

Въ словахъ *Révolution française* (французская революція) можно переставить буквы такъ, что получится:

Un veto corse la finira,

т. е. «ее закончитъ вето (запрещеніе) корсиканца» (Указаніе на Наполеона Бонапарте).

Изъ имени монаха, убійцы короля Генриха III,—*frère Jacques Clément* (братъ Жакъ Клеманъ) можно перестановкой буквъ получить:

C'est l'enfer qui m'a créé,

т. е. «меня создалъ адъ».

Изъ именъ короля Генриха III Валуа—*Henri de Valois* (Анри де Валуа) современники сдѣлали *Vilain Herode's*, т. е. «Иродова Мерзость».

Польскій писатель Яблонскій взялъ латинское названіе дома вельможъ Лещинскихъ—*Domus Lescinia* и составилъ изъ этихъ словъ такія анаграммы:

Ades incolumis,	т. е.	гряди невредимый.
Omnis es lucida,	» »	весь свѣтозарный.
Mane sidus loci,	» »	пребывай свѣтиломъ края.
Sis columna dei	» »	да будешь опорой Бога.
I, scande solium	» »	шествуй, гряди на престолъ.

Послѣдняя анаграмма оказалась даже «пророческой»: Лещинскій Станиславъ сдѣлался дѣйствительно польскимъ королемъ. Надо признать во всякомъ случаѣ, что сочетаніе буквъ въ словахъ *Domus Lescinia* даетъ, дѣйствительно, богатый матерьялъ для составленія льстивыхъ и угодливыхъ анаграммъ. О томъ, сколько тѣ же слова при перестановкѣ буквъ могутъ дать матеріала для шутки и сатиры, Яблонскій, видимо, затратившій большой запасъ времени для перестановки 13 буквъ, совершенно умалчиваетъ.

И въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что всѣ вышеприведенныя анаграммы Яблонскій нашелъ, благодаря не счастливой случайности или особымъ какимъ-либо пріемамъ, а путемъ дѣйствительныхъ перестановокъ,—т. е., написавъ 13 буквъ, составляющихъ слова

DOMUS LESCINIA,

онъ методически переставлялъ всѣми возможными способами эти 13 буквъ и прочитывалъ каждую перестановку, чтобы убѣдиться, получилась ли фраза, имѣющая смыслъ, или нѣтъ. Сколько всего въ такомъ случаѣ Яблонскій получилъ бы перестановокъ и сколько приблизительно времени онъ затратилъ бы на эту работу?

Поставимъ вопросъ нѣсколько шире и спросимъ такъ: сколькими способами можно переставить 13 буквъ, стоящихъ въ рядъ? При чемъ для простоты допустимъ сначала, что всѣ буквы различны.

Само собой разумѣется, что вмѣсто буквъ можно взять всякіе иные предметы. Можно, напримѣръ, задать себѣ вопросъ, сколькими способами можно разложить въ рядъ извѣстное число различныхъ картъ, разноцвѣтныхъ камешковъ, картинокъ или книгъ, и вообще какихъ угодно предметовъ, или, какъ говорятъ въ данномъ случаѣ *элементовъ.*

Вопросъ сводится, слѣдовательно, къ опредѣленію *числа линейныхъ перестановокъ (или перемѣщеній) изъ даннаго количества элементовъ.*

Далѣе мы дадимъ общее рѣшеніе этого интереснаго вопроса а пока разсмотримъ слѣдующія двѣ задачи.

Задача 45-я.

Церемонный обѣдъ семи.

Во второмъ изданіи *Récréations mathématiques et physiques* par M. Ozanam («Математическія и физическія развлеченія» М. Озанама), вышедшемъ въ Парижѣ въ 1788 году, находится слѣдующая интересная задача:

Семь лицъ должны были обѣдать, но между ними зашелъ церемонный споръ относительно мѣстъ, гдѣ кому сѣсть (это было, безъ сомнѣнія, въ какомъ-либо отдаленномъ отъ столицы провинціальномъ городѣ — замѣчаетъ здѣсь Озанамъ). Наконецъ, кто-то, чтобы прекратить пререканія, предложилъ всѣмъ сѣсть за столъ какъ попало, но съ тѣмъ, чтобы опять собраться завтра и въ слѣдующіе дни обѣдать вмѣстѣ и каждый разъ садиться по иному, до тѣхъ поръ, пока не будутъ исчерпаны всѣ возможныя перемѣщенія. Спрашивается, сколько разъ для этого придется имъ вмѣстѣ обѣдать?

Рѣшеніе.

Рѣшеніе задачи сводится, очевидно, къ отысканію *числа перестановокъ изъ семи элементовъ.* Въ главѣ «о числѣ перестановокъ» нѣсколько дальше мы покажемъ, какъ это дѣлается, а пока скажемъ просто, и попросимъ читателя на минуту повѣрить, что число такихъ перестановокъ изъ 7 элементовъ равно 5 040. Такимъ образомъ выходитъ, что упомянутымъ въ задачѣ семи лицамъ придется обѣдать 5 040 разъ, или 5 040 дней, вмѣстѣ. Переводя на годы, получимъ изрядный промежутокъ времени въ 14 лѣтъ! Принять на себя обязательство четырнадцать лѣтъ изо дня въ день обѣдать въ одной и той же компаніи... Вотъ къ чему иногда могутъ привести церемонныя препирательства.

Если вмѣсто семи лицъ церемоннымъ споромъ займется большее общество, то дѣло грозитъ еще большими осложненіями. Въ своихъ «Initiations mathématiques» Ш. Лэзанъ разбираетъ задачу, совершенно подобную предыдущей, но на обѣдъ собралось не 7, а 12 особъ.

Задача 46-я.

Церемонный обѣдъ 12-ти.

Въ одинъ прекрасный вечеръ сошлось двѣнадцать человѣкъ, чтобы пообѣдать вмѣстѣ. Но такъ какъ мѣста за столомъ не были назначены заранѣе, между ними возникъ церемонный споръ въ то время, когда нужно было садиться за столъ,—споръ, не приведшій, впрочемъ, ни къ какому результату. Кто-то, чтобы выйти изъ затрудненія, предложилъ испробовать послѣдовательно всѣ возможные способы размѣщенія. Чтобы разрѣшить вопросъ, оставалось только выбрать перемѣщеніе, кажущееся наиболѣе удачнымъ. Попробовали было пересаживаться въ теченіе нѣсколькихъ минутъ, но смѣшались, и дѣло, казалось, никакъ не могло благополучно разрѣшиться само собою. Къ счастью, между приглашенными находился учитель городского колледжа, имѣвшій кой-какія познанія въ математикѣ.

— Друзья мои,—сказалъ онъ,—супъ простынетъ. Давайте тянуть жребій, скорѣе дѣло будетъ.

Послѣдовали благоразумному совѣту, обѣдъ закончился самымъ радушнымъ образомъ.

Является вопросъ, почему учитель не нашелъ возможнымъ испробовать всѣ возможныя перемѣщенія на самомъ дѣлѣ?

Рѣшеніе.

Разъясненіе и рѣшеніе задачи послѣдовало уже за дессертомъ, когда, получивъ слово, учитель сказалъ:

— Знаете ли вы, сколько времени понадобилось бы намъ, чтобы испробовать всѣ возможныя перемѣщенія, которыя мы могли сдѣлать за этимъ столомъ, *полагая только по секундѣ для перехода отъ одного перемѣщенія къ другому?*

И такъ какъ всѣ молчали, онъ добавилъ:

— Продолжая такую маленькую игру день и ночь, мы должны были бы употребить на это болѣе 15 лѣтъ и 2-хъ мѣсяцевъ, не считая при этомъ, сколько бы намъ встрѣтилось високосныхъ годовъ. Вы видите, если жаркому угрожало высохнуть, то мы могли бы быть увѣрены, что погибнемъ всѣ отъ голода и лишенія сна. Будемте церемонны, если сердце намъ подсказываетъ, но не слишкомъ...

И это правда. Точное число различныхъ способовъ перемѣщеній, которое 12 человѣкъ могли бы занять за столомъ, накрытымъ на 12 приборовъ, равняется, какъ ниже увидимъ, 479 001 600: болѣе 479 милліоновъ, а 15 лѣтъ и 2 мѣсяца содержатъ приблизительно такое число секундъ.

Можно было бы еще замѣтить, что каждое перемѣщеніе 12-ти человѣкъ требуетъ гораздо болѣе времени, чѣмъ одна секунда, и что, слѣдовательно, на отысканіе удачнаго для всѣхъ положенія за столомъ понадобилось бы гораздо болѣе 15-ти лѣтъ. Это, впрочемъ, не мѣняетъ существа вопроса. Но что было бы, если бы собравшіеся обѣдать господа поступили по примѣру обѣдавшихъ въ предыдущей (45-й) задачѣ? Чтобы испробовать всѣ возможныя перемѣщенія, имъ пришлось бы обѣдать вмѣстѣ болѣе, чѣмъ 479 милліоновъ дней! Переведя на годы, получимъ милліоны лѣтъ...

О числѣ перестановокъ.

Изъ двухъ предыдущихъ задачъ мы узнали и приняли пока на вѣру, что если произвести всѣ перестановки изъ 7-ми элементовъ, то такихъ перестановокъ получается 5 040, а изъ 12-ти элементовъ такихъ перестанокъ получается уже 479 001 600. Число элементовъ возросло всего на 5, а въ какой огромной пропорціи возросло число перестановокъ!

Впрочемъ, вышеуказанныя числа были приняты нами пока на вѣру. Здѣсь мы попробуемъ получить ихъ на самомъ дѣлѣ и показать, какъ вообще найти число перестановокъ изъ любого числа элементовъ.

Возьмемъ сначала два различныхъ элемента a и b. Ясно, что здѣсь единственно возможны только *двѣ* перестановки.

$$ab \text{ и } ba$$

Значитъ число перестановокъ изъ 2-хъ элементовъ равно

$$1 \times 2 = 2.$$

Возьмемъ три элемента: a, b и c. Чтобы получить изъ нихъ, всѣ возможныя перестановки безъ повтореній и пропусковъ, поступаемъ такъ:

Беремъ сначала перестановки изъ двухъ элементовъ, т. е. ab и ba, и приставляемъ къ каждой изъ нихъ третій элементъ: въ концѣ, въ серединѣ и въ началѣ. Значитъ, изъ каждой двухъ-элементной перестановки получимъ по три перестановки,— именно:

$$\begin{array}{cc} abc & bac \\ acb & bca \\ cab & cba \end{array}$$

Всего 6 перестановокъ. Итакъ, число всѣхъ перестановокъ изъ 3-хъ элементовъ получится отъ перемноженія чиселъ $1 \times 2 \times 3 = 6$, или, принимая за знакъ умноженія точку, напишемъ, что число всѣхъ перестановокъ изъ трехъ элементовъ будетъ

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Беремъ затѣмъ 4 элемента a, b, c и d. Сколько всѣхъ возможныхъ перестановокъ дадутъ эти буквы? Чтобы получить всѣ эти перестановки безъ пропусковъ и повтореній, самъ собой напрашивается слѣдующій способъ. Беремъ сначала всѣ 6 найденныхъ выше перестановокъ изъ 3-хъ буквъ:

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba.$$

Въ каждую изъ этихъ перестановокъ вводимъ четвертый элементъ d, приставляя его послѣдовательно: къ концу, между 2-й и 3-й буквой, между 1-й и 2-й буквой и въ началѣ. Такъ что *каждая* изъ этихъ 6 перестановокъ изъ 3-хъ элементовъ дастъ 4 перестановки изъ четырехъ элементовъ. А именно:

Перестановка	*abc*	даетъ	*abcd*	*abdc*	*adbc*	*dabc*
»	*acb*	»	*acbd*	*acdb*	*adcb*	*dacb*
»	*cab*	»	*cabd*	*cadb*	*cdab*	*dcab*
»	*bac*	»	*bacd*	*badc*	*bdac*	*dbac*
»	*bca*	»	*bcad*	*bcda*	*bdca*	*dbca*
»	*cba*	»	*cbad*	*cbda*	*cdba*	*dcba*

Всего изъ 5-хъ различныхъ элементовъ получаемъ $4 \cdot 6 = 24$ перестановки, или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Итакъ, чтобы получить число всѣхъ линейныхъ перестановокъ изъ 4-хъ различныхъ элементовъ, надо перемножить между собой четыре первыхъ послѣдовательныхъ числа.

Прибавимъ еще пятый элементъ e и посмотримъ, сколько всего получится перестановокъ изъ пяти элементовъ a, b, c, d, e. Получить всѣ эти перестановки безъ пропусковъ и повтореній можно, опять таки поступая совершенно подобно предыдущему. Т. е., возьмемъ каждую изъ 24-хъ вышенаписанныхъ перестановокъ изъ 4-хъ буквъ и будемъ приставлять къ нимъ пятую букву *e* въ концѣ, между буквами и въ началѣ, тогда первая, напр., перестановка *abcd* дастъ пять перестановокъ:

$$abcde,\ abced,\ abecd,\ aebcd,\ eabcd.$$

Точно также получимъ по пять перестановокъ въ 5 буквъ изъ каждой изъ остальныхъ 23-хъ перестановокъ 4-хъ буквъ. Слѣдовательно, всего перестановокъ изъ 5 элементовъ можно сдѣлать $24 \cdot 5 = 120$, или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Значитъ, число всѣхъ перестановокъ изъ пяти элементовъ равно произведенію первыхъ пяти послѣдовательныхъ чиселъ.

Введемъ шестой элементъ *f*. Разсуждая по предыдущему, мы найдемъ, что каждая изъ 120 перестановокъ въ 5-ть буквъ дастъ шесть перестановокъ изъ 6-ти буквъ. Всего, значитъ, такихъ перестановокъ изъ 6-ти элементовъ будетъ $120 \cdot 6 = 720$, или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720,$$

т. е. число всѣхъ перестановокъ изъ 6 элементовъ равно произведенію шести первыхъ послѣдовательныхъ чиселъ.

Разсуждая точно такъ же, какъ выше, найдемъ, что число перестановокъ изъ семи элементовъ будетъ $720 \cdot 7 = 5\,040$, или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5\,040.$$

Это число и есть какъ разъ то, которое мы привели въ задачѣ о церемонномъ обѣдѣ семи особъ. Читатель теперь, думаемъ, убѣдился, что оно нисколько не преувеличено.

Идя указаннымъ выше путемъ еще дальше, мы найдемъ, что число перестановокъ изъ восьми различныхъ элементовъ будетъ равно произведенію восьми послѣдовательныхъ чиселъ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$. Число перестановокъ изъ 9 элементовъ будетъ равно произведенію 9-ти чиселъ:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362\,880 \text{ и т. д.}$$

Попробуемъ указаннымъ путемъ составить таблицу числа перестановокъ отъ 1 до 25 элементовъ. Получается

Число перестановокъ.	Число элементовъ.
1	1
2	2
6	3
24	4
120	5
720	6
5 040	7
40 320	8
362 880	9
3 628 800	10
39 916 800	11
479 001 600	12
6 227 020 800	13
87 178 291 200	14
1 307 674 368 000	15
20 922 789 888 000	16
355 687 428 096 000	17
6 402 373 705 728 000	18
121 645 100 408 832 000	19
2 432 902 008 176 640 000	20
51 090 942 171 709 440 000	21
1 124 000 727 777 607 680 000	22
25 852 016 738 884 976 640 000	23
620 448 401 733 239 439 360 000	24
15 511 210 043 330 985 984 000 000	25

Въ этой таблицѣ мы находимъ, между прочимъ, число перестановокъ изъ 12-ти элементовъ, равное 479 001 600, о которомъ намъ приходилось говорить въ задачѣ о церемонномъ обѣдѣ 12-ти особъ.

Бѣглый взглядъ на эту таблицу показываетъ намъ, съ какой огромной быстротой возрастаетъ число перестановокъ при послѣдовательномъ возростаніи перемѣщаемыхъ предметовъ. Уже при 25 элементахъ получается число изъ 26 цифръ,—головокружительное число, о которомъ мы не можемъ составить себѣ никакого реальнаго представленія, если не прибѣгнемъ къ какому либо описательному сравненію.

Возвратимся къ главѣ объ историческихъ анаграммахъ и пересчитаемъ, сколько перестановокъ изъ 13-ти буквъ пришлось бы сдѣлать Яблонскому въ словахъ *domus lescinia* для полученія своихъ анаграммъ, если бы онъ дѣйствительно дѣлалъ *всѣ* перестановки. Таблица показываетъ, что число перестановокъ изъ 13 элементовъ равно 6 227 020 800.

Если бы допустить даже такую невѣроятную скорость, что для полученія каждой перестановки и ея прочтенія Яблонскій употреблялъ всего одну секунду, то и тогда, безостановочно работая по 12 часовъ въ сутки, понадобилось бы на выполненіе всѣхъ этихъ перестановокъ около 395 лѣтъ! Ясно, что, отыскивая свои анаграммы, Яблонскій, прожившій обыкновенную человѣческую жизнь, шелъ не этимъ путемъ.

Обозначенія и выводъ общей формулы.

Условимся въ обозначеніяхъ. Обыкновенно число перестановокъ изъ n элементовъ обозначаютъ символомъ P_n, т. е. ставятъ латинскую букву P (по-французски перестановка: Permutation) и внизу справа отъ нея маленькое n. Слѣдовательно символъ P_2 означаетъ число перестановокъ изъ 2-хъ элементовъ, P_3—число перестановокъ изъ трехъ элементовъ, P_4—число перестановокъ изъ 4-хъ элементовъ и т. д. И мы нашли уже, что

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 1 \\
P_2 &= 1\cdot 2 \\
P_3 &= 1\cdot 2\cdot 3 \\
P_4 &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \\
P_5 &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$\text{Вообще } P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \;\ldots\; \cdot n.$$

Эту послѣднюю *общую формулу* мы сейчасъ выведемъ со всей строгостью, а не просто путемъ того послѣдовательнаго наведенія, котораго держались до сихъ поръ. Итакъ, докажемъ теорему:

Число перестановокъ изъ n элементовъ равно произведенію послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n, т. е.

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ \ldots \ (n-1) \cdot n.$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть составлены перестановки изъ $n-1$ буквъ $a, b, c, d, \ldots, h, i, k$, и пусть число перестановокъ будетъ P_{n-1}. Чтобы составить перестановки изъ n буквъ, беремъ каждую перестановку изъ $n-1$ буквъ и вводимъ въ нее n-ую букву l, помѣщая послѣдовательно слѣва и справа этой перестановки и во всѣ промежутки между ея буквами. Такимъ образомъ мы составимъ всѣ перестановки изъ n буквъ, безъ повтореній и безъ пропусковъ. Безъ повтореній — потому, что одна перестановка будетъ отличаться отъ другой или порядкомъ $n-1$ первоначально взятыхъ буквъ, или мѣстомъ, которое занимаетъ новая буква l. Безъ пропусковъ, ибо, взявъ перестановку $ablc \ldots k$, напр., замѣчаемъ, что она произошла изъ перестановки $abc \ldots k$, составленной изъ $n-1$ первоначальныхъ элементовъ, въ которую буква l введена на 3-е мѣсто; слѣд., такая перестановка была получена.

Итакъ: указаннымъ способомъ получимъ всѣ перестановки изъ n буквъ. Опредѣлимъ ихъ число. Каждая перестановка изъ $n-1$ буквъ даетъ n перестановокъ изъ n буквъ, ибо буква l можетъ занять въ первой n различныхъ мѣстъ; слѣд.,

$$P_n = nP_{n-1}.$$

Такова связь между P_{n-1} и P_n. Формула эта справедлива для всякаго n, будучи совершенно общею: давая въ ней n послѣдовательно всѣ значенія отъ 2 до n, находимъ:

$$P_2 = P_1 \cdot 2; \quad P_3 = P_2 \cdot 3; \quad P_4 = P_3 \cdot 4; \ \ldots \ ; \quad P_n = P_{n-1} \cdot n.$$

Перемноживъ эти равенства, уничтоживъ общіе множители въ обѣихъ частяхъ и замѣчая, что $P_1 = 1$, находимъ:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ \ldots \ (n-1) \cdot n.$$

Произведеніе n послѣдовательныхъ чиселъ, т. е. $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, встрѣчается въ многочисленныхъ формулахъ математическаго анализа и носитъ спеціальное названіе *факторіала n*. Весьма часто для факторіала n употребляютъ болѣе короткое и, пожалуй, даже болѣе изящное обозначеніе, а именно: вмѣсто длиннаго иногда ряда цифръ послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ ставятъ послѣднее число и послѣ него восклицательный знакъ, такъ что

$$1 \cdot 2 = 2!$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1) \cdot n = n!$$

Слѣдовательно, общая формула числа перестановокъ изъ n элементовъ можетъ быть написана и въ такомъ краткомъ и изящномъ видѣ:

$$P_n = n!$$

Задача 47-я.

Споръ кучера съ пассажиромъ.

На станціи дилижансовъ нетерпѣливый проѣзжій, увидя кучера, спросилъ:

— Не пора ли запрягать?

— Что вы!—отвѣтилъ кучеръ,—еще полчаса до отхода дилижанса. За это время я успѣю двадцать разъ и запречь, и отпречь, и опять запречь. Намъ не впервой...

— А сколько въ дилижансъ впрягается лошадей?

— Пять.

— Сколько времени полагается на запряжку лошадей?

— Да при аккуратности минуты двѣ—не больше!

— Ой-ли?—усумнился пассажиръ. Пять лошадей запречь въ 2 минуты!.. Что-то очень скоро...

— И очень просто, господинъ,—отвѣчалъ кучеръ.— Выведутъ лошадей въ сбруѣ, постромкахъ съ вальками, въ возжахъ, какъ есть. Остается только накинуть кольца вальковъ на крюки, приструнить «въ секундъ» двухъ среднихъ лошадей къ дышлу, взялъ возжи въ руки, сѣлъ на козлы и готово... Поѣзжай! Дѣло знакомое...

— Ну, хорошо! замѣтилъ пассажиръ. Допустимъ, что такимъ образомъ ты можешь запречь и отпречь лошадей хотя двадцать разъ въ часъ, какъ говоришь. Но если ихъ придется перепрягать одну на мѣсто другой да еще всѣхъ, то ужъ этого ты никогда не сдѣлаешь не только въ часъ, но и въ два.

— Тоже пустячное дѣло, господинъ!—расхвастался кучеръ. — Развѣ намъ не приходится перепрягать! Да какими угодно вамъ манерами я ихъ всѣхъ вамъ перепрягу въ часъ, а то и меньше. Одну лошадь поставилъ на мѣсто другой, и готово! Минутное дѣло!

— Нѣтъ, ты перепряги ихъ не тѣми «манерами», которыя мнѣ угодны,—сказалъ господинъ, — а **всѣми** способами, какими только можно перепрягать 5 лошадей, считая на перепряжку уже одну минуту, какъ ты хвастаешь.

Самолюбіе кучера было нѣсколько задѣто.

— Конечно, всѣхъ лошадей и всѣми способами перепрягу не больше, какъ въ часъ.

— Я далъ бы сто рублей, чтобы посмотрѣть, какъ ты сдѣлаешь это въ часъ!—сказалъ пассажиръ.

— А я при своей бѣдности заплатилъ бы за вашъ проѣздъ въ дилижансѣ, если бы этого не сдѣлалъ,— отвѣчалъ кучеръ.

Такъ и условились: Кучеръ обязался въ часъ перепрячь 5 лошадей дилижанса всѣми способами, какіе только возможны. Если онъ это сдѣлаетъ, то получаетъ съ пассажира 100 руб., если же нѣтъ, то пассажиръ ѣдетъ дальше на счетъ кучера. Каковъ былъ результатъ спора?

Рѣшеніе.

Пострадалъ кучеръ, который, очевидно, не отличался сильной сообразительностью. Число запряжекъ, которыя онъ долженъ былъ по условію сдѣлать, равно числу всѣхъ перестановокъ изъ 5-ти элементовъ. Но изъ предыдущаго мы уже знаемъ, что

$$P_5 = 5! = 120.$$

Слѣдовательно, кучеру пришлось сдѣлать 120 перепряжекъ. Считая на такую перепряжку только минуту времени, выходитъ, что на всѣ надо затратить 2 часа. Остановившись на 60-й перепряжкѣ, кучеръ долженъ былъ уже ѣхать, заплативъ за проѣздъ пассажира.

Задача 48-я.

Сколькими способами могутъ размѣститься въ классѣ 30 учениковъ?

Рѣшеніе.

Приходится вычислять число перестановокъ изъ 30 элементовъ, т. е. P_{30}. Его нѣтъ въ нашей таблицѣ на стр. 195, доведенной только до $n = 25$. Совѣтовать кому-либо тратить время на безцѣльный рядъ умноженій не рѣшаемся, а потому просто приводимъ это огромное число.

$$P_{30} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \; . \; . \; . \; 30 = 30! =$$
$$= 265\,252\,859\,812\,191\,058\,636\,308\,480\,000\,000.$$

Желающій поупражняться въ умноженіи можетъ, впрочемъ, насъ провѣрить. Но сумѣете ли вы сказать словами это написанное число?

Задача 49-я.

Сколько различныхъ чиселъ можно составить изъ цифръ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, такъ, чтобы каждая цифра находилась въ каждомъ числѣ только по одному разу, а числа, начинающіяся нулемъ, не считать?

Рѣшеніе.

Искомыя числа, очевидно, будутъ всѣ десятизначныя. Беремъ сначала 9 значащихъ цифръ. Число перестановокъ изъ нихъ будетъ $P_9 = 9!$ (оно есть въ таблицѣ на стр. 195). Если теперь въ каждую полученную перестановку будемъ приставлять нуль къ концу и во всѣ промежутки между цифрами, но къ началу не будемъ его приставлять, то каждая перестановка изъ 9 цифръ дастъ еще 9 перестановокъ изъ 10-ти цифръ. Итакъ, искомое число есть

$$9P_9 = 9 \cdot 9! = 3\,265\,920.$$

Задача 50-я.

Сколько чиселъ большихъ 23 000 получится, если всѣми возможными способами переставлять цифру 1, 2, 3, 4, 5?

Рѣшеніе.

Всѣхъ перестановокъ изъ данныхъ пяти цифръ можно сдѣлать $P_5 = 120$. Но изъ полученныхъ такимъ образомъ чиселъ надо отбросить, очевидно, всѣ начинающіяся единицей, а такихъ чиселъ 24 (ибо $P_4 = 24$); кромѣ того необходимо еще отбросить всѣ числа, начинающія цифрами 21, а такихъ чиселъ 6. Итакъ, требуемыхъ чиселъ получается $120 - 30 = 90$.

Задача 51-я.

Сколько группъ можно составить изъ буквъ слова «склеить» такъ, чтобы гласныя не были разъединены?

Рѣшеніе.

Гласныя не разъединяются, поэтому считаемъ ихъ за одну букву и находимъ число перестановокъ изъ шести буквъ. Число ихъ P_6. Но гласныя можно переставить одну на мѣсто другой. Значитъ для числа искомыхъ группъ имѣемъ $2P_6 = 1\,440$.

Фигурныя или наглядныя перестановки.

Перестановки нѣсколькихъ предметовъ можно представить *рисункомъ* (графически). Эта остроумная идея, сдѣлавшаяся достояніемъ послѣдняго времени, благодаря французскому математику Эдуарду Люка (1842—1891), нужно думать, поведетъ еще къ весьма многимъ интереснымъ и важнымъ открытіямъ, или усовершенствованіямъ математическихъ методовъ.

Покажемъ здѣсь, какъ графически изобразить P_4, т. е. всѣ перестановки изъ 4-хъ элементовъ. Такихъ перестановокъ можно сдѣлать, какъ знаемъ, 24. Такъ напр., выпишемъ всѣ перестановки изъ 4-хъ цифръ 1, 2, 3, 4.

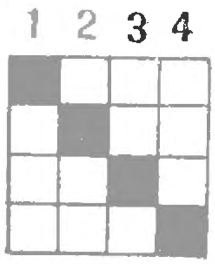
1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Чтобы графически изобразить, напр., первую перестановку (1 2 3 4), беремъ квадратъ, состоящій изъ 16 равныхъ клѣтокъ ($4 \times 4 = 16$) и условимся, что каждый вертикальный столбецъ клѣтокъ, считая слѣва направо и сверху внизъ, будетъ соотвѣтствовать *мѣсту* элемента въ перестановкѣ; а каждая горизонтальная строка *числу*, означающему элементъ. Въ такомъ случаѣ, беря перестановку 1 2 3 4, находимъ, что числу 1 соотвѣтствуетъ первая клѣточка (сверху) первой строки и перваго столбца: зачернимъ ее; числу 2 соотвѣтствуетъ вторая клѣточка второго столбца и второй строки: зачернимъ ее; числу 3 соотвѣтствуетъ третья клѣточка 3-го столбца и третьей строки: зачернимъ ее, и, наконецъ, числу 4 соотвѣтствуетъ 4-я клѣточка четвертаго столбца и четвертой строки: зачернимъ ее. Въ такомъ случаѣ перестановка 1 2 3 4 графически изобразится фиг. 96-й.

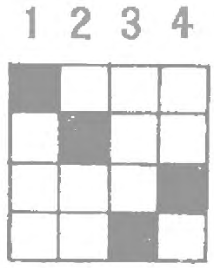
Подобно же слѣдующая перестановка 1 2 4 3 изобразится фигурой 97-ой.

Перестановка, напр., 4 3 2 1 изобразится фиг. 98-ой.

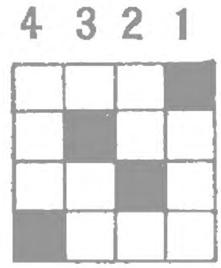
На фиг. 99-ой въ послѣдовательномъ порядкѣ представлены графически всѣ 24 перестановки изъ четырехъ элементовъ.



Фиг. 96.



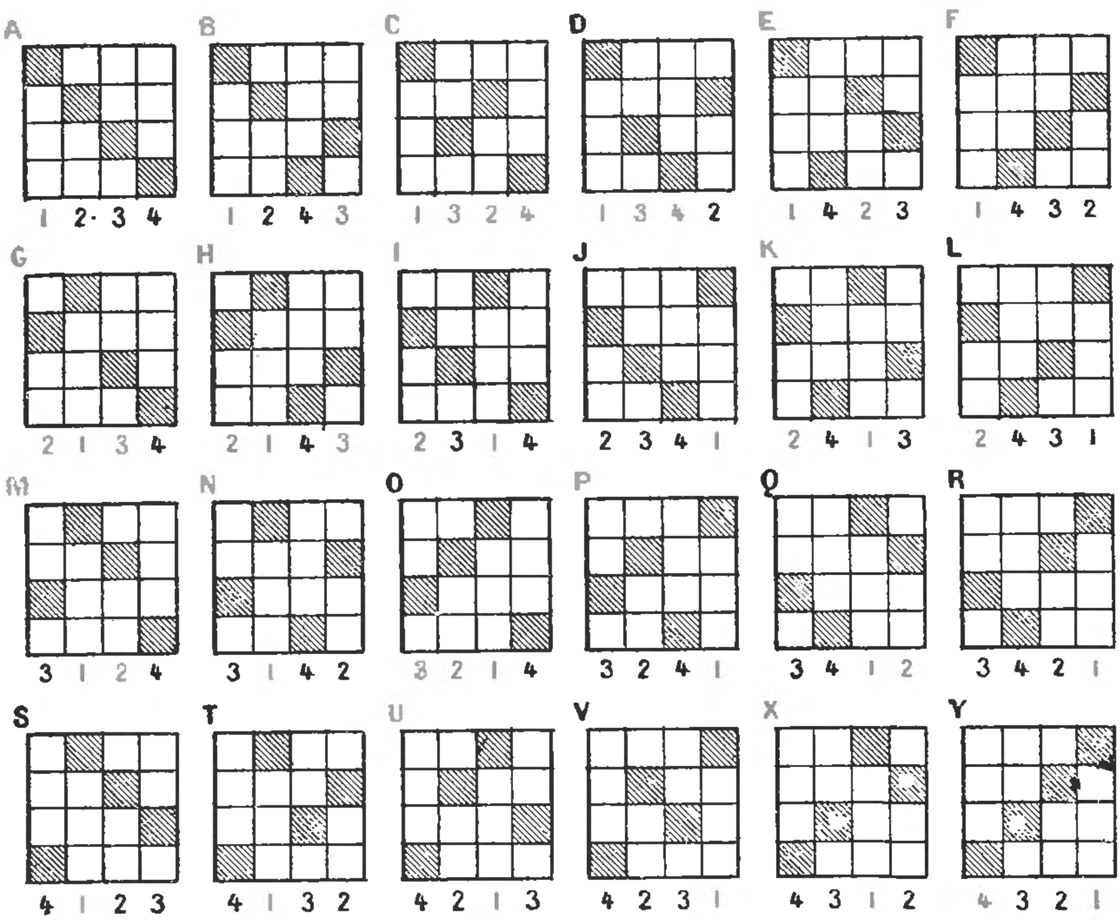
Фиг. 97.



Фиг. 98.

Если бы вмѣсто цифръ элементами перестановки служили, напр., буквы, жетоны, шапки и вообще любые предметы, то, обозначивъ каждый предметъ соотвѣтствующимъ числомъ, мы опять таки графически изобразимъ всѣ перестановки изъ этихъ предметовъ, какъ указано выше.

Чтобы получить фигурныя перестановки изъ 5 элементовъ, надо взять квадратъ, состоящій изъ $5 \times 5 = 25$ клѣтокъ. Способомъ, совершенно подобнымъ предыдущему, на этой 25-тиклѣточной квадратной доскѣ мы можемъ графически представить всѣ 120 ($P_5 = 5! = 120$) перестановокъ изъ 5 элементовъ.



Фиг. 99.

Для полученія фигурныхъ перестановокъ изъ 6 элементовъ ($P_6 = 6! = 720$) надо взять квадратъ въ $6 \times 6 = 36$ клѣтокъ и т. д. Вообще, для полученія всѣхъ фигурныхъ перестановокъ нуженъ квадратъ, состоящій изъ $n \cdot n = n^2$ клѣтокъ.

Наша общераспространенная шахматная (или шашечная) доска можетъ, слѣдовательно, служить для практическаго полученія фигурныхъ перестановокъ изъ 8-ми элементовъ, т. е. для $P_8 = 8! = 40\,320$. И само собой разумѣется, что, прикрывая полосками бумаги ненужныя намъ клѣтки, мы на этой же шахматной доскѣ можемъ получить квадраты въ $7 \cdot 7 = 49$, въ $6 \cdot 6 = 36$, въ $5 \cdot 5 = 25$, въ $4 \cdot 4 = 16$ и въ $3 \cdot 3 = 9$ клѣтокъ, на которыхъ можемъ практически осуществлять фигурныя перестановки P_7, P_6, P_5, P_4 и P_3.

Задача 52-я.

Шахматный вопросъ.

Шахматная фигура *тура* (или ладья), какъ извѣстно, можетъ «брать» всякую фигуру, стоящую съ ней на одномъ столбцѣ клѣтокъ или на одной горизонтальной полосѣ.

Всмотритесь въ квадраты на фиг. 99: каждый изъ нихъ представляетъ тоже шахматную доску, но только изъ 16-ти клѣтокъ. И каждая фигурная перестановка на этой доскѣ представляетъ такое положеніе 4-хъ туръ, при которомъ ни одна не можетъ взять другой. Значитъ, на доскѣ въ 16 клѣтокъ 4 туры можно разставить 24-мя способами такъ, что ни одна не можетъ взять другой. На доскѣ изъ $5^2 = 25$ клѣтокъ можно, какъ уже указано, получить 120 фигурныхъ перестановокъ, другими словами это значитъ, что на такой доскѣ можно разставить 120-ю способами 5 туръ такъ, что ни одна не будетъ брать другой, и т. д. Итакъ, мы приходимъ къ заключенію, что каждая фигурная перестановка изъ любого числа элементовъ на соотвѣтствующей доскѣ даетъ такое расположеніе шахматныхъ туръ, при которомъ онѣ не могутъ брать одна другой. Теперь будетъ нетрудно рѣшить вопросъ относящійся къ нашей обыкновенной шахматной доскѣ:

Сколькими способами на шахматной доскѣ можно разставить 8 туръ такъ, чтобы ни одна изъ нихъ не могла брать другой?

Рѣшеніе ясно изъ предыдущаго: число такихъ способовъ равно числу перестановокъ изъ 8 элементовъ.

$$P_8 = 8! = 40\,320.$$

Врядъ ли у кого хватитъ терпѣнія и времени 40 320 разъ переставлять 8 туръ на шахматной доскѣ, чтобы разрѣшить поставленный вопросъ практическимъ путемъ. Между тѣмъ съ помощью теоріи графическаго изображенія перестановокъ, данной Э. Люка, вопросъ рѣшается чуть не «въ двухъ словахъ». Вообще, теорія соединеній имѣетъ большое приложеніе къ разнаго рода играмъ. Она, какъ и теорія вѣроятностей, по остроумному выраженію иныхъ, родилась и выросла за игорнымъ столомъ.

Перестановки съ повтореніями.

Мы умѣемъ пока опредѣлять число перестановокъ въ томъ случаѣ, когда всѣ взятые для перестановки элементы *различны*. Но весьма обыкновенны случаи, когда предлагается поставить въ рядъ всѣми возможными способами n элементовъ, при чемъ не всѣ элементы различны между собою. Такъ, напр., возьмемъ слова *Сила* и *Анна*. То и другое слово состоитъ изъ 4-хъ буквъ, и относительно перваго мы уже знаемъ, что, переставляя въ немъ буквы всѣми возможными способами, мы получимъ 24 *различныхъ* перестановки ($P_4 = 4! = 24$). Не то будетъ въ словѣ *Анна*. Здѣсь буква *а* повторяется два раза, буква *н* тоже повторяется 2 раза, и если въ этомъ словѣ вы попробуете перемѣщать буквы всѣми возможными способами, то различныхъ перестановокъ вы получите только 6, а именно:

анна, анан, аанн, нана, ннаа, наан.

Въ самомъ дѣлѣ, припишите одинаковымъ буквамъ въ словѣ *анна* различные значки; тогда получите 4 различныхъ элемента. Выпишите всѣ 24 перестановки изъ этихъ элементовъ и затѣмъ уничтожьте значки. Вы убѣдитесь, что въ сущности получается только 6 написанныхъ выше различныхъ перестановокъ.

Слѣдовательно, необходимо различать линейныя перестановки безъ повтореній, и перестановки съ **повтореніями.** Число перестановокъ изъ n различныхъ элементовъ мы умѣемъ найти, но *какъ опредѣлить число перестановокъ изъ n элементовъ съ повтореніями?*

Задача эта не представляетъ особыхъ трудностей, и мы разрѣшимъ ее сразу для общаго случая.

Пусть дано n элементовъ, или предметовъ

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \quad .\ \ .\ m.$$

изъ которыхъ не всѣ различны, но нѣкоторые повторяются, и пусть

a	повторяется	p	разъ
b	»	q	»
c	»	r	»
. .	. . .	. . .	. . .
m	»	s	»

Само собой разумѣется, что нѣкоторые изъ элементовъ могутъ не повторяться, т. е. они входятъ только по одному разу. Въ такомъ случаѣ въ ряду чиселъ p, q, r, . . s нѣкоторыя будутъ равны 1. Всѣ же эти числа связаны, очевидно, условіемъ

$$p+q+r+\ .\ .\ .\ .\ +s=n.$$

Мы не знаемъ пока числа перестановокъ изъ n элементовъ съ повтореніями, поэтому просто означимъ его буквой x. Если, теперь, мы найдемъ, въ какомъ отношеніи находится это число x къ извѣстному нами числу перестановокъ изъ n элементовъ безъ повтореній, P_n, то и рѣшимъ вопросъ.

Итакъ представимъ, что *перестановки съ повтореніями* изъ n элементовъ у насъ всѣ выписаны, и что ихъ x. Возьмемъ теперь первый повторяющійся p разъ элементъ a и приставимъ къ нимъ внизу значки 1, 2, 3, 4 . . . p. Такимъ пріемомъ мы p одинаковыхъ элементовъ какъ бы обратимъ въ различные и затѣмъ переставимъ эти p элементовъ всѣми возможными способамм. Такъ какъ изъ p элементовъ получается P_p перестановокъ, и мы дѣлаемъ эти перестановки во всѣхъ x перестановкахъ, то теперь мы получимъ, очевидно, вмѣсто x перестановокъ съ повтореніями большее число ихъ, а именно: всего $x \cdot P_p$ различныхъ (что не трудно доказать) перестановокъ, гдѣ теперь буква b повторяется q разъ, буква c повторяется r разъ, . . . буква m повторяется s разъ.

Подобно предыдущему, приставимъ значки 1, 2, 3, ... q къ одинаковымъ элементамъ b, сдѣлаемъ ихъ такимъ образомъ различными и, переставивъ всѣми способами, найдемъ, что изъ каждой перестановки (число которыхъ теперь $x \cdot P_p$) получимъ P_q новыхъ различныхъ перестановокъ; и число всѣхъ такимъ образомъ полученныхъ перестановокъ будетъ, очевидно,

$$x \cdot P_p \cdot P_q.$$

Поступая совершенно подобно предыдущему съ элементомъ c, мы увеличимъ еще число различныхъ перестановокъ, которыхъ теперь станетъ уже

$$x \cdot P_p \cdot P_q \cdot P_r$$

и т. д. Когда, наконецъ, мы придемъ къ послѣднему элементу m, повторяющемуся s разъ, и поступимъ съ нимъ точно такъ же, какъ съ предыдущими, то получимъ, $x \cdot P_p \cdot P_q \cdot P_r \ . \ . \ . \ . \ P_s$ перестановокъ. Но какихъ и сколько именно?

Ясное дѣло, что путемъ введенія значковъ мы n элементовъ съ повтореніями обратили въ n различныхъ элементовъ и описаннымъ выше процессомъ получили, слѣдовательно, *всѣ* возможныя перемѣщенія изъ n элементовъ безъ повтореній, т. е. P_n. Другими словами, мы нашли, что

$$x \cdot P_p \cdot P_q \cdot P_r \ . \ . \ . \ P_s = P_n.$$

Чтобы опредѣлить x, надо обѣ части этого равенства раздѣлить на $P_p \cdot P_q \cdot P_r \ . \ . \ . \ . \ P_s$. Слѣдовательно,

$$x = \frac{P_n}{P_p \cdot P_q \cdot P_r \ . \ . \ . \ P_s}$$

Такова общая формула для нахожденія числа перестановокъ съ повтореніями изъ n элементовъ, если различные элементы повторяются p, q, r, . . . s разъ. Такъ какъ

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ \ldots \ldots \ n = n!;$$
$$P_p = 1 \cdot 2 \ \ldots \ldots \ p = p!;$$
$$P_q = 1 \cdot 2 \ \ldots \ldots \ q = q! \text{ и т. д.,}$$

то формулу эту можно написать такъ:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ \ldots \ldots \ n}{1 \cdot 2 \ldots \ldots P \cdot 1 \cdot 2 \ldots \ldots q \cdot 1 \cdot 2 \ldots \ldots r \ldots \ldots 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots s}$$

или въ еще болѣе изящномъ и краткомъ видѣ

$$\frac{n!}{P! \cdot q! \cdot r! \ \ldots \ldots \ s!}$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что на практикѣ опредѣленіе числа перестановокъ съ повтореніями не представляетъ никакихъ затрудненій.

Возьмемъ, напримѣръ, названіе извѣстной горы *Араратъ*. Сколько различныхъ перестановокъ можно получить изъ составляющихъ это слово буквъ, если отбросить твердый знакъ? Рѣшеніе сводится къ опредѣленію числа перестановокъ съ повтореніями.

Если отбросить *ъ*, остается 6 буквъ, изъ которыхъ *а* повторяется 3 раза, *р* повторяется 2 раза. Слѣдовательно, всего различныхъ перестановокъ съ повтореніями получается

$$\frac{P_6}{P_3 \cdot P_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 60.$$

Задача 53-я.

Залъ украшается 14-ю флагами, изъ которыхъ 2 синихъ, 3 красныхъ, 2 бѣлыхъ, 3 зеленыхъ, 2 желтыхъ и 2 фіолетовыхъ. Сколькими способами можно ихъ расположить?

Рѣшеніе.

Отвѣтъ находимъ прямо по выведенной выше формулѣ для перестановокъ съ повтореніями. Онъ есть

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ . \ . \ . \ . \ 14}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot (1 \cdot 2)^4} = 151\,351\,200.$$

За круглымъ столомъ.

Возвратимся къ задачѣ 45-й о церемонномъ обѣдѣ 7 лицъ. Задача эта, какъ упомянуто, рѣшена еще въ 17 вѣкѣ Озанамомъ, и онъ нашелъ, что церемонные гости должны были бы сдѣлать 5 040 пересадокъ, чтобы найти одну, наиболѣе удовлетворяющую всѣхъ. При болѣе внимательномъ разсмотрѣніи оказывается однако, что задача эта нуждается въ существенныхъ замѣчаніяхъ.

Если всѣ мѣста за столомъ принять, какъ совершенно различныя, то рѣшеніе Озанама вѣрно. Но если принимать въ расчетъ не сосѣдство того или иного стула съ окномъ, печкой, дверью и т. д., а только взаимное расположеніе собесѣдниковъ, то дѣло мѣняется.

Положимъ, что 7 лицъ обѣдаютъ за *круглымъ столомъ.* Ясно, что относительное положеніе всѣхъ обѣдающихъ не измѣнится, если по данному знаку всѣ они встанутъ, и затѣмъ каждый сядетъ на мѣсто своего сосѣда справа, и такъ повторятъ 7 разъ, пока каждый не возвратится на свое первоначальное мѣсто. При такомъ положеніи дѣла выходитъ, что Озанамъ принимаетъ за различныя такія семь прямолинейныхъ перестановокъ, которыя въ сущности равны одной такъ называемой **круговой перестановкѣ.** Слѣдовательно, найденное Озанамомъ число совмѣстныхъ обѣдовъ семи лицъ 5 040 надо въ данномъ случаѣ уменьшить въ 7 разъ. Получится 720.

Съ другой стороны, надо обратить вниманіе и на то, что взаимное расположеніе гостей не измѣнится, если они сядутъ такъ, что каждый сосѣдъ справа окажется сосѣдомъ слѣва. Значитъ, найденное число 720 нужно еще уменьшить въ 2 раза, т. е. получается всего 360 обѣдовъ, которыми собесѣдники могутъ расчесться другъ съ другомъ въ теченіе одного лишь года.

Къ тому же результату мы пришли бы, если бы одинъ изъ обѣдающихъ сидѣлъ на одномъ и томъ же мѣстѣ, а остальные шесть перемѣщались всѣми возможными способами.

Сдѣланныя здѣсь замѣчанія относятся и къ задачѣ 46-й.

Такимъ образомъ, къ понятіямъ о простыхъ или линейныхъ перестановкахъ и о перестановкахъ съ повтореніями мы должны присоединить еще понятіе о *круговыхъ перестановкахъ*. Предлагаемъ читателю ознакомиться съ ними по другимъ руководствамъ.

Задача 54-я.

Письма и адреса.

Имѣется n писемъ, и для нихъ заготовлено n конвертовъ съ адресами. Сколькими способами можно размѣстить письма такъ, чтобы ни одно изъ нихъ не находилось въ назначенномъ для него конвертѣ?

Рѣшеніе.

Задача сводится къ опредѣленію числа такихъ перестановокъ изъ n буквъ съ различными значками, какъ a_1, b_2, c_3,... n_n, въ которыхъ ни одна буква не находилась бы на томъ мѣстѣ, которое указано ея значкомъ-номеромъ. Извѣстно нѣсколько рѣшеній этой задачи. Вотъ одно изъ простѣйшихъ:

Обозначимъ письма буквами a. b, c, . . . ; конверты буквами a', b', c', . . . Пусть требуемое число будетъ $F(n)$.

a можно положить въ любой изъ $n-1$ конвертовъ b', c',... Пусть a положено въ k'; k можно положить въ a', и тогда всѣ остальныя письма можно размѣстить не въ надлежащіе конверты $F(n-2)$ способами. Также, если a положить въ k', то остальныя письма можно размѣстить такъ, чтобы k не попало въ a', b не попало въ b', и т. д. $F(n-1)$ способами.

Итакъ, если a положено въ k', то можно удовлетворить задачѣ $F(n-1)+F(n-2)$ способами. То же самое будетъ, если a будетъ помѣщено въ какой угодно изъ пакетовъ b', c',.. Слѣдовательно,

$$F(n)=(n-1)[F(n-1)+F(n-2)],$$

или

$$F(n)-nF(n-1)=-[F(n-1)-(n-1)F(n-2)].$$

Подобнымъ образомъ

$$F(n-1)-(n-1)F(n-2)=-[F(n-2)-(n-2)F(n-3)],$$

. . . .

$$F(3)-3F(2)=-[F(2)-2F(1)].$$

Но, очевидно,

$$F(2)=1 \text{ и } F(1)=0;$$

поэтому

$$F(n)-nF(n-1)=(-1)^n.$$

Откуда

$$\frac{F(n)}{1\cdot 2\ldots n}-\frac{F(n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}=(1)^n\cdot\frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-1)}.$$

Подобно этому

$$\frac{F(n-1)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}-\frac{F(n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-2)}=\frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-1)}(-1)^{n-1}.$$

. . . .

$$\frac{F(2)}{1\cdot 2}-\frac{F(1)}{1\cdot 1}=(-1^2)\cdot\frac{1}{1\cdot 2}.$$

Отсюда, складывая, находимъ:

$$F(n)=1\cdot 2\cdot 3\ldots n\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n}\right).$$

Размѣщенія.

Задача 55-я.

Зададимъ себѣ такой простой вопросъ:

Сколько различныхъ двухзначныхъ чиселъ можно составить изъ трехъ цифръ 1, 3, 5?

Рѣшеніе.

Вопросъ можно выразить другими словами такъ: изъ трехъ различныхъ цифръ составить всѣ возможныя группы по двѣ цифры такъ, чтобы всѣ эти группы отличались или самими цифрами или только порядкомъ ихъ.

Чтобы получить всѣ нужныя намъ группы безъ пропусковъ и повтореній, поступаемъ такъ: беремъ поочередно каждую изъ данныхъ цифръ 1, 3, 5 и приставляемъ къ нимъ справа каждую изъ остальныхъ двухъ цифръ. Получаемъ

13	31	51
15	35	53

т. е. всего $3 \cdot 2 = 6$ группъ.

Мы условились выше приставлять къ каждой цифрѣ остальныя цифры справа. Само собой разумѣется, что дѣло не измѣнилось бы, если бы мы приставляли къ каждой цифрѣ остальныя не справа, а слѣва. Слѣдуетъ только, во избѣжаніе путаницы, помнить разъ поставленное условіе и приставлять элементы или только справа, или только слѣва.

Замѣтимъ также, что если бы въ данной задачѣ мы задались вопросомъ получить изъ 3-хъ цифръ всѣ возможныя группы по 3, то пришли бы къ извѣстнымъ уже намъ линейнымъ *перестановкамъ* изъ трехъ элементовъ.

Прибавимъ еще одинъ элементъ, т. е. возьмемъ четыре нечетныхъ цифры 1, 3, 5, 7 и спросимъ себя, сколько можно получить изъ этихъ четырехъ различныхъ группъ по двѣ цифры, отличающихся или самими цифрами, или порядкомъ ихъ. Другими словами: изъ четырехъ различныхъ цифръ сколько можно составить различныхъ двухзначныхъ чиселъ?

Чтобы получить всѣ искомыя нами группы по двѣ цифры безъ пропусковъ и повтореній, опять, подобно предыдущему, беремъ каждую цифру по очереди и приставляемъ къ ней справа всѣ остальныя цифры. Получаемъ

1 3	3 1	5 1	7 1
1 5	3 5	5 3	7 3
1 7	3 7	5 7	7 5

Всего $4 \times 3 = 12$ различныхъ двухзначныхъ чиселъ.

Сколько изъ тѣхъ же элементовъ 1, 3, 5, 7 можно составить различныхъ группъ по 3 цифры въ каждой группѣ?

Чтобы получить ихъ всѣ безъ пропусковъ и повтореній, мы, очевидно, должны взять всѣ вышенаписанныя двухзначныя группы и къ *каждой* изъ нихъ приписать недостающіе элементы справа.

Такимъ образомъ получаемъ:

1 3 5	3 1 5	5 1 3	7 1 3
1 3 7	3 1 7	5 1 7	7 1 5
1 5 3	3 5 1	5 3 1	7 3 1
1 5 7	3 5 7	5 3 7	7 3 5
1 7 3	3 7 1	5 7 1	7 5 1
1 7 5	3 7 5	5 7 3	7 5 3

Всего $4 \times 3 \times 2 = 24$ группы.

Если задаться цѣлью найти всѣ подобныя группы изъ всѣхъ четырехъ данныхъ элементовъ, то придемъ опять къ извѣстнымъ намъ линейнымъ перестановкамъ.

Соединенія, о которыхъ мы сейчасъ говорили, носятъ названіе простыхъ **размѣщеній.**

Слѣдовательно, выше мы находили: 1) число простыхъ размѣщеній изъ 3-хъ элементовъ по 2; 2) изъ 4-хъ элементовъ по 2 и 3) изъ 4-хъ элементовъ по 3. Обозначаютъ число размѣщеній обыкновенно буквой A (по-французски *размѣщеніе*— Arrangement) съ двумя указателями справа—внизу и вверху. Нижній указатель показываетъ число *всѣхъ* элементовъ, взятыхъ для размѣщеній, а верхній, по сколько такихъ элементовъ берется для каждой группы. Значитъ, выше мы нашли, что

$$A_3^2 = 3\cdot 2 = 6;\quad A_4^2 = 4\cdot 3 = 12;\quad A_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24.$$

Вообще:

Если взято n элементовъ a, b, c, d, e, ... m, и изъ этихъ элементовъ составлены всевозможныя группы по k элементовъ, отличающіяся или самими элементами или только порядкомъ ихъ, то такія соединенія называются размѣщеніями.

Число размѣщеній изъ n элементовъ по k обозначается, согласно предыдущему, символомъ A_n^k. Каждое же подобное размѣщеніе носитъ также названіе *размѣщенія k-го порядка.* Размѣщенія во многихъ вопросахъ математики имѣютъ важное значеніе. Покажемъ общій пріемъ, какъ найти число размѣщеній изъ n элементовъ по k; другими словами, чему равно A_n^k.

Число размѣщеній.

Пусть дано n элементовъ: a, b, c, d, e, ... m. Сколько можно изъ этихъ элементовъ составить размѣщеній k-го порядка (или размѣщеній изъ n элементовъ по k)?

Прежде всего замѣтимъ, что число размѣщеній изъ n элементовъ a, b, c, d, ... m *по одному* (или 1-го порядка) равно, очевидно, самому числу элементовъ, т. е.

$$A_n^1 = n.$$

Составимъ, теперь, всѣ размѣщенія 2-го порядка. Для этого, по предыдущему, чтобы получить ихъ всѣ безъ пропусковъ и повтореній, беремъ каждый элементъ поочередно и приставляемъ къ нему послѣдовательно по одному справа всѣ остальные $n-1$ элементовъ. Получимъ таблицу

$$\begin{array}{llll}
ab & ba & ca\ldots\ldots & ma \\
ac & bc & cb\ldots\ldots & mb \\
ad & bd & cd\ldots\ldots & mc \\
ae & be & ce\ldots\ldots & md \\
. & . & . & . \\
. & . & & \\
. & . & . & . \\
. & . & . & \\
. & . & & \\
. & & & . \\
. & . & & . \\
al & bl & cl\ldots\ldots & mi \\
am & bm & cm\ldots\ldots & ml
\end{array}$$

Разсматривая эту таблицу, легко показать, что въ ней находятся, дѣйствительно, *всѣ* размѣщенія 2-го порядка, ни одно не опущено и не повторено. Въ самомъ дѣлѣ, для полученія столбцовъ таблицы брались поочередно *всѣ* n элементовъ $a, b, c, \ldots m$ и къ *каждому* прибавлялись справа по одному остальные $n-1$ элементовъ. Значитъ, ни одно размѣщеніе не могло быть опущено. Но ни одно и не повторено, потому что сравнивая любыя два размѣщенія таблицы, мы находимъ, по закону ея составленія, что если эти размѣщенія находятся въ одномъ и томъ же столбцѣ, то они должны различаться послѣдними буквами, а если въ разныхъ столбцахъ, то они различаются первыми буквами. Итакъ, въ таблицѣ нѣтъ ни пропусковъ, ни повтореній. Для подсчета же содержащихся въ ней размѣщеній 2-го порядка достаточно замѣтить, что въ таблицѣ n столбцовъ, а каждый столбецъ содержитъ $n-1$ членовъ (т. е. въ таблицѣ $n-1$ строкъ).

Слѣдовательно,

$$A_n^2 = n(n-1).$$

Составимъ, далѣе, таблицу всѣхъ возможныхъ размѣщеній изъ n элементовъ по 3, или размѣщенія 3-го порядка. Для этого беремъ нашу таблицу размѣщеній 2-го порядка и къ каждому изъ размѣщеній этой таблицы приставляемъ справа поочередно по одному всѣ остальные $n - 2$ элемента. Получается новая таблица:

abc	acb......	bca......	mla
abd	acd......	bcd......	mlb
abe	ace......	bce......	mlc
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	
.	.	.	.
.	.		.
.	.	.	.
.	.	.	.
abl	acl......	bcl......	
abm	acm.....	bcm......	mli

Разсужденіями, подобными приведеннымъ относительно таблицы размѣщеній второго порядка, можно показать, что въ этой таблицѣ дѣйствительно содержатся всѣ размѣщенія изъ n элементовъ 3-го порядка безъ пропусковъ и повтореній. А такъ какъ изъ $n(n-1)$ двойныхъ размѣщеній каждое дало $n-2$ размѣщенія третьяго порядка, то число всѣхъ размѣщеній 3-го порядка изъ n элементовъ будетъ:

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2).$$

Для числа размѣщеній изъ n элементовъ по 4 разсужденіями, подобными предыдущимъ, получимъ

$$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Точно также

$$A_n^5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$

И т. д. Какъ видимъ, числа, выражающія число размѣщеній изъ n элементовъ по 1, по 2, по 3, по 4 и т. д., составляются всѣ по одному закону: Каждое такое число состоитъ изъ множителей, первый изъ которыхъ есть n, а каждый слѣдующій на единицу меньше. Число множителей равно числу порядка размѣщеній, т. е. для размѣщеній изъ n элементовъ 2-го порядка имѣемъ, какъ видѣли, два множителя $n(n-1)$; для размѣщеній 3-го порядка 3 множителя: $n(n-1)(n-2)$ и т. д. Можно сказать и такъ, что первый множитель будетъ n, а послѣдній (для размѣщенія порядка k) будетъ $n-k+1$.

Остальные множители составятъ рядъ промежуточныхъ послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ между

$$n \text{ и } n-k+1.$$

Такимъ образомъ, для числа размѣщеній изъ n элементовъ по k будемъ имѣть общую формулу

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1),$$

т. е. *число размѣщеній изъ n элементовъ по k равно произведенію k множителей, изъ которыхъ первый равенъ n, а остальные уменьшаются послѣдовательно на 1.*

Общность приведенной формулы необходимо, впрочемъ, доказать болѣе строго, что желающій можетъ сдѣлать самъ, руководствуясь предыдущимъ или обратясь къ любому хорошему учебнику.

Полныя размѣщенія или размѣщенія съ повтореніями.

Возьмемъ n элементовъ

$$a,\ b,\ c,\ d\ldots\ldots i,\ l,\ m.$$

Читатель помнитъ, что при составленіи *простыхъ* размѣщеній 2-го, 3-го, 4-го и т. д. порядка мы руководились слѣдующимъ правиломъ: для полученія таблицы размѣщеній 2-го порядка брали каждую изъ буквъ и приставляли къ ней справа всѣ *остальныя*. Для полученія таблицы размѣщеній 3-го порядка мы брали таблицу размѣщеній изъ n элементовъ по 2, и къ каждому такому размѣщенію приставляли справа по одной остальныя $n-2$ буквы (элемента) и т. д. Такимъ образомъ мы получали группы изъ n буквъ по 2, по 3 и т. д., которыя разнились или *порядкомъ* расположенія, или *выборомъ* элементовъ, но *повтореній* одного и того элемента въ такихъ группахъ не было.

Возьмемъ, теперь, тѣ же n буквъ a, b, c, ... l, m и будемъ составлять изъ нихъ таблицы размѣщеній 2-го, 3-го, 4-го и т. д. порядка по болѣе общему закону, а именно: къ каждой буквѣ для полученія по 2 будемъ приписывать не остальныя $n-1$ буквъ, а *всѣ* буквы *безъ исключенія.*

Такимъ образомъ мы получимъ таблицу двойныхъ *полныхъ размѣщеній*, или *размѣщеній съ повтореніями*, ибо буквы въ размѣщеніяхъ могутъ повторяться.

$$
\begin{array}{cccccc}
aa & ab & ac \ldots & \ldots ai & al & am \\
ba & bb & bc \ldots & \ldots bi & bl & bm \\
ca & cb & cc \ldots & \ldots ci & cl & cm \\
\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & & \cdot \\
ma & mb & mc \ldots & \ldots mi & ml & mm
\end{array}
$$

Число этихъ полныхъ размѣщеній изъ n элементовъ по 2 найти легко. Ясно, что каждая изъ n буквъ даетъ также и n размѣщеній, а потому всѣхъ размѣщеній съ повтореніями изъ n элементовъ по два будетъ $n \cdot n = n^2$. Или, обозначая число размѣщеній съ повтореніями изъ n элементовъ по 2 символомъ B_n^2, напишемъ, что

$$B_n^2 = n^2.$$

Составляемъ, далѣе, таблицу размѣщеній съ повтореніями изъ n элементовъ по 3. Для этого беремъ предыдущую таблицу полныхъ размѣщеній по 2 и къ каждому размѣщенію этой таблицы приписываемъ по одному справа *всѣ безъ исключенія* элементы. Такъ что двойное размѣщеніе aa дастъ n тройныхъ

$$aaa \quad aab \quad aac \ldots\ldots aai \quad aal \quad aam$$

Двойное размѣщеніе ab дастъ опять n тройныхъ:

$$aba \quad abb \quad abc \ldots\ldots abi \quad abl \quad abm$$

и т. д. Путемъ разсужденій, знакомыхъ намъ изъ предыдущей главы, легко доказать, что въ полученныхъ нами таблицахъ сочетаній нѣтъ ни пропусковъ, ни повтореній однихъ и тѣхъ же размѣщеній.

Каждое двойное размѣщеніе даетъ, какъ видимъ, n тройныхъ, но всѣхъ двойныхъ размѣщеній n^2, слѣдовательно, получается всего $n^2 \times n = {}^3$ тройныхъ полныхъ размѣщеній, или:

$$\overset{3}{\underset{n}{B}} = n^3.$$

Точно также легко вывести, что

$$\overset{4}{\underset{n}{B}} = n^4,\ \underset{n}{B} = n^5,\ \overset{6}{\underset{n}{B}} = n^6 \text{ и т. д.}$$

Вообще

$$\overset{k}{\underset{n}{B}} = n^k.$$

Задача 56-я.

Бросаютъ три игральныхъ кости. Сколькими способами онѣ могутъ вскрыться?

Рѣшеніе.

Игральная кость представляетъ собой костяной кубикъ, на каждой сторонѣ (грани) котораго обозначено извѣстное число «очковъ» (цифрой или точками). Такъ какъ въ кубикѣ шесть граней, то и числа очковъ будутъ на граняхъ кубика 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Зная это, легко рѣшить вопросъ. Каждая кость можетъ, упавъ, показать любую изъ 6-ти граней. Берется три такихъ кости. Число соединеній каждой съ каждой находятъ, очевидно, какъ число размѣщеній съ повтореніями изъ 6-ти элементовъ по 3. Т. е., подбросивъ 4 кости, мы можемъ получить одну изъ $6^3 = 216$ комбинацій.

Задача

Сколько можно написать трехзначныхъ чиселъ изъ десяти цифръ 1, 2, 3, ... ,9?

Рѣшеніе.

Очевидно, столько, сколько можно сдѣлать полныхъ (съ повтореніями) размѣщеній изъ 9 элементовъ по три, то есть

$$B_9^3 = 9^3 = 729.$$

Сочетанія.

Разсмотримъ еще виды соединеній, имѣющихъ постоянное приложеніе въ различныхъ отдѣлахъ математики:

Изъ n элементовъ a, b, c, d, ... m требуется составить, сколько возможно, такихъ группъ по k элементовъ, чтобы каждая отличалась отъ остальныхъ *по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ*.

Соединенія подобнаго рода носятъ въ математикѣ названіе простыхъ *сочетаній*. Какъ видимъ, здѣсь группы отличаются одна отъ другой не *порядкомъ*, а выборомъ элементовъ.

Число сочетаній изъ n элементовъ по k обозначается обыкновенно буквой C со значками справа n и k (вверху и внизу) слѣдующимъ образомъ C_n^k.

Раньше чѣмъ идти далѣе и показывать, какъ составлять таблицы сочетаній и находить число ихъ, сдѣлаемъ краткое замѣчаніе о всѣхъ видахъ соединеній, съ которыми мы познакомились.

Итакъ, мы знаемъ *перестановки, размѣщенія* и *сочетанія* и должны всегда помнить, что

перестановки P_n отличаются только *порядкомъ* элементовъ,
сочетанія C_n^k » » *выборомъ* »
размѣщенія A_n^k отличны или *порядкомъ* или *выборомъ* »

Составленіе сочетаній.

Берется n элементовъ: $a, b, c, d, \ldots\ldots i, l, m$. Это и будутъ, очевидно, сочетанія изъ n элементовъ по одному. Чтобы получить таблицу парныхъ сочетаній изъ тѣхъ же элементовъ, мы должны помнить, что каждое сочетаніе должно отличаться отъ другого хоть одной буквой. Для полученія подобныхъ группъ беремъ каждую данную намъ букву по порядку, *кромѣ послѣдней*, и къ каждой такой взятой буквѣ приписываемъ только по одной всѣ *слѣдующія* за ней. Получается таблица

$$\begin{array}{lllllll}
ab & ac & ad & ae \ldots\ldots ai & al & am \\
 & bc & bd & be \ldots\ldots bi & bl & bm \\
 & & cd & ce \ldots\ldots ci & cl & cm \\
 & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
 & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
 & & & & il & im \\
 & & & & & lm
\end{array}$$

Легко разобраться, что эту же таблицу мы получили бы, еслибъ взяли таблицу парныхъ размѣщеній изъ n элементовъ и выбросили бы изъ нея всѣ размѣщенія, отличающіяся только порядкомъ буквъ.

Для полученія тройныхъ сочетаній изъ n элементовъ беремъ каждое изъ вышенаписанныхъ двойныхъ сочетаній, кромѣ послѣдняго столбца, содержащаго послѣднюю букву (am, bm, $cm \ldots\ldots lm$), и приписываемъ къ каждому такому сочетанію послѣдовательно по одной *каждую изъ слѣдующихъ* буквъ. Получается таблица

$$\begin{array}{lllll}
abc & abd & abc \ldots\ldots abl & abm \\
 & acd & ace \ldots\ldots acl & acm \\
 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \text{и т. д.}
\end{array}$$

Словомъ, способъ послѣдовательнаго полученія таблицъ сочетаній изъ n элементовъ 2-го, 3-го, 4-го и т. д. порядковъ уяснить и усвоить не трудно. Но какъ подсчитать число полученныхъ при этомъ группъ?

Число сочетаній.

Если взять n элементовъ, то между числомъ сочетаній изъ этихъ n элементовъ по k, (C_n^k), числомъ размѣщеній изъ тѣхъ же n элементовъ по k, (A_n^k), и числомъ простыхъ перестановокъ изъ k элементовъ, (P_k), можно установить слѣдующее соотношеніе:

$$A_n^k = C_n^k . P^k,$$

т. е.:

Число размѣщеній изъ n элементовъ по k равно числу сочетаній изъ n элементовъ по k, умноженному на число перестановокъ изъ k элементовъ.

Чтобы установить это весьма важное соотношеніе, разсуждаемъ такъ:

Представимъ, что способомъ, описаннымъ только что выше, у насъ составлена таблица всѣхъ сочетаній изъ n элементовъ по k. Число ихъ означаемъ символомъ C_n^k. Вспомнимъ затѣмъ, что всѣ эти сочетанія отличаются другъ отъ друга не порядкомъ разстановки элементовъ, но самими элеменами (хоть однимъ изъ нихъ). Между тѣмъ размѣщенія изъ n элементовъ по k могутъ отличаться одно отъ другого и порядкомъ размѣщенія и самими элементами. Зная это, мы изъ таблицы всѣхъ *сочетаній* изъ n элементовъ по k можемъ получить таблицу всѣхъ *размѣщеній* изъ n элементовъ по k.

Для этого изъ нашей воображаемой таблицы сочетаній беремъ каждое сочетаніе (содержащее по k буквъ) и дѣлаемъ въ немъ всевозможныя *перестановки*. Число такихъ перестановокъ, полученныхъ изъ каждаго сочетанія, будетъ, какъ знаемъ, P_k, а такъ какъ всѣхъ сочетаній C_n^k, то, значитъ, мы получимъ всего $C_n^k . P_k$ группъ соединеній.

Покажемъ теперь, что такимъ путемъ мы получили именно таблицу всѣхъ размѣщеній изъ n элементовъ по k безъ пропусковъ и повтореній (Число такихъ размѣщеній, какъ знаемъ, обозначается A_n^k).

Въ самомъ дѣлѣ, если взять изъ составленной таблицы два члена, то: или они происходятъ отъ двухъ разныхъ сочетаній, и въ такомъ случаѣ различаются буквами; или же происходятъ изъ одного и того же сочетанія,— и въ такъ случаѣ разнятся порядкомъ буквъ. Слѣдовательно, и таблица не содержитъ повтореній. Въ ней нѣтъ и пропусковъ. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ нѣкоторой членъ группы A_n^k, не обращая вниманія на порядокъ буквъ въ немъ. Этотъ членъ представляетъ нѣкоторое сочетаніе изъ n буквъ по k, и, слѣдевательно, если не обращать вниманія на порядокъ его буквъ, онъ находится въ группѣ C_n^k. Такъ какъ буквы этого сочетанія были перемѣщены всѣми возможными способами, то любой разсматриваемый членъ необходимо содержится въ числѣ полученныхъ размѣщеній.

Изъ всего вышесказаннаго ясно, что мы въ правѣ написать соотношеніе

$$A_n^k = C_n^k . P_k,$$

которое для числа сочетаній изъ n элементовъ по k даетъ выраженіе

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k},$$

или

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\cdot k},$$

что словами можно выразить такъ: *число сочетаній изъ n элементовъ по k равно произведенію k цѣлыхъ чиселъ, послѣдовательно убывающихъ на 1 и первое изъ которыхъ есть n, дѣленному на произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до k.*

Задача 57-я.

Выборы въ комиссію.

Изъ 7 русскихъ и 4-хъ нѣмцевъ нужно составить комиссію въ 6 лицъ. Сколькими способами можно это сдѣлать, если въ составъ комиссіи должно войти не болѣе и не менѣе, какъ 2 нѣмца?

Рѣшеніе.

Выборъ русскихъ можетъ быть сдѣланъ C_7^4 способами, а выборъ нѣмцевъ C_4^2 способами. Каждую группу первыхъ можно сочетать съ каждой группой вторыхъ. Для искомаго числа, значитъ, имѣемъ:

$$C_7^4 \cdot C_4^2 = 210.$$

Задача 58-я.

Изъ 4-хъ духовныхъ и 8-ми свѣтскихъ лицъ должна быть составлена комиссія въ 6 человѣкъ. Сколькими способами можетъ быть сдѣланъ выборъ, если: 1) въ составъ комиссіи должно вхоидть только одно духовное лицо; 2) если въ нее должно войти по меньшей мѣрѣ одно духовное лицо?

Рѣшеніе.

Отвѣтъ на первый вопросъ есть, очевидно (см. предыдущую задачу),

$$4 \cdot C_8^5 = 224.$$

Во второмъ случаѣ дѣло нѣсколько сложнѣе: необходимо принять во вниманіе всѣ возможныя комбинаціи, такъ какъ комиссія можетъ состоять: изъ 1-го духовнаго и 5 свѣтскихъ, или изъ двухъ духовныхъ и 4-хъ свѣтскихъ, или изъ 3-хъ духовныхъ и 3-хъ свѣтскихъ, либо, наконецъ, изъ 4-хъ духовныхъ и 2-хъ свѣтскихъ. Совокупность всѣхъ возможныхъ при этомъ сочетаній дасть

$$4 \cdot C_8^5 + C_8^4 \cdot C_4^2 + C_8^3 \cdot C_4^3 + C_8^2 = 896.$$

Задача 59-я.

Сколькими способами 7 русскихъ и 7 французовъ могутъ размѣститься за столомъ такъ, чтобы не оказывалось двухъ французовъ рядомъ?

Рѣшеніе.

Если одинъ изъ русскихъ, напр., будетъ постоянно сидѣть на одномъ и томъ же мѣстѣ, то остальные русскіе могутъ перемѣщаться столькими способами, сколько можно сдѣлать перестановокъ изъ 6-ти элементовъ, т. е. P_6 способами. Каждой такой ихъ разсадкѣ будетъ соотвѣтствовать 7 мѣстъ, которыя могутъ быть заняты французами P_7 способами. Значитъ, искомое нами число будетъ

$$P_6 \cdot P_7 = 3\,628\,800.$$

Задача 60-я.

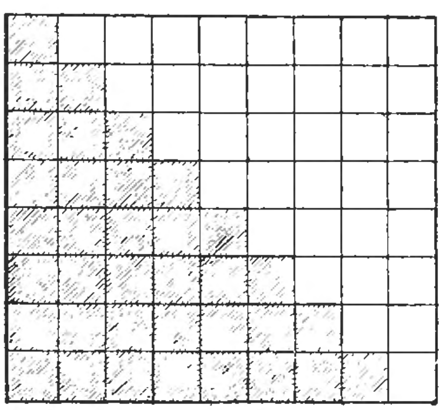
Замокъ съ секретомъ состоитъ изъ трехъ колецъ съ 15-ю различными буквами каждое. Сколько безуспѣшныхъ попытокъ возможно сдѣлать раньше, чѣмъ отпереть замокъ?

Рѣшеніе.

Первому кольцу можно дать 15 различныхъ положеній, столько же второму и столько же третьему. Всѣ эти положенія соединяются каждое съ каждымъ. Слѣдовательно, число различныхъ возможныхъ попытокъ открыть замокъ есть $15 \cdot 15 \cdot 15 = 3\,375$. Но изъ нихъ удачной можетъ быть только одна. Значитъ, число неудачныхъ равно 3 374.

Способъ шахматной доски.

Съ шахматной доской на протяженіи трехъ книгъ «Въ Царствѣ Смекалки» мы встрѣчались уже не разъ. Очень многіе, съ виду сложные, вопросы ариѳметики и алгебры рѣшаются весьма просто употребленіемъ шахматной доски. Слѣдуетъ только помнить, что подъ шахматной доской мы понимаемъ не одну обыкновенную шашечницу изъ 64-хъ клѣтокъ, но каждую квадратную или прямолинейную фигуру, раздѣленную на квадратныя клѣтки. Пользуясь такой доской, можно, напр., быстро рѣшить слѣдующія интересныя задачи.



Фиг. 100.

Задача 61-я.

Найти сумму n первыхъ цѣлыхъ натуральныхъ чиселъ по способу шахматной доски.

Рѣшеніе.

Для рѣшенія вопроса беремъ доску въ видѣ прямоугольника: высоту его дѣлимъ на n равныхъ частей, а основаніе на $n+1$ частей, т. е. наша фигура состоитъ изъ n горизонталей (линій) и $n+1$ вертикалей (колоннъ). На нашей фиг. 100-й имѣемъ 9 клѣтокъ по линіи и 8 въ колоннѣ (Всего $8 \cdot 9 = 72$ клѣтки).

Заштрихуемъ первую слѣва клѣтку 1-ой линіи, 2 первыхъ второй, 3 первыхъ третьей и т. д. Тогда все число заштрихованныхъ клѣтокъ выразится суммой

$$1+2+3+4+\ldots+n.$$

Но и число бѣлыхъ клѣтокъ, если его считать снизу вверхъ, тоже будетъ $1+2+3+4+\ldots+n$. Все же число клѣтокъ нашей доски равно $n(n+1)$. Слѣдовательно,

$$2\,(1+2+3+4\ldots+n)=n(n+1).$$

Отсюда для суммы n первыхъ натуральныхъ чиселъ имѣемъ

$$1+2+3+4+\ldots n=\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

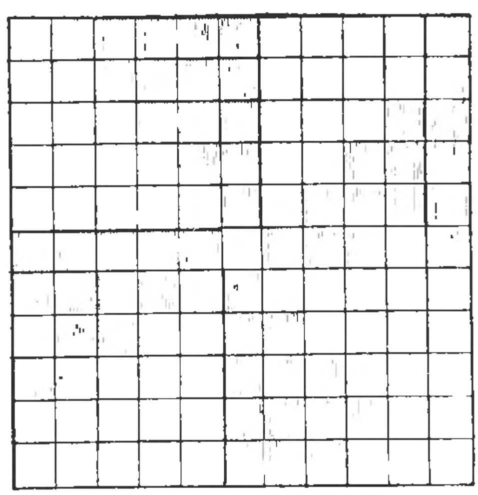
Задача 62-я.

Способомъ шахматной доски показать, что

$$8\,(1+2+3+4+\ldots+n)+1=(2n+1)^2.$$

Рѣшеніе.

Беремъ квадратную доску, на которой каждая линія и каждая колонна состояла бы изъ $2n+1$ клѣтокъ. Оставивъ центральную клѣтку бѣлой, затемнимъ нѣкоторыя изъ остальныхъ такъ, какъ показано на фигурѣ 101. Каждая затемненная часть содержитъ, очевидно, $1+2+\ldots+n$ клѣтокъ. Внѣ центральной клѣтки имѣемъ 4 одинаковыхъ бѣлыхъ части. Слѣд., все число клѣтокъ фигуры, равное $(2n+1)^2$, слагается изъ четырехъ заштрихованныхъ частей, четырехъ такихъ же бѣлыхъ и изъ центральной клѣтки, т.-е.



Фиг. 101.

$$8\,(1+2+3+\ldots+n)+1=(2n+1)^2.$$

Отрывки изъ теоріи вѣроятностей.

...«Теорія вѣроятностей есть въ сущности не что иное, какъ здравый смыслъ, сведенный къ исчисленію: она заставляетъ оцѣнивать съ точностью то, что здраво развитые умы чувствуютъ какъ бы инстинктомъ, часто не умѣя дать себѣ въ этомъ отчетъ. Если принять во вниманіе аналитическіе методы, которые возникли изъ этой теоріи, истинность принциповъ, служащихъ ей основаніемъ, утонченную и изящную логику, которой требуетъ примѣненіе ихъ къ рѣшенію задачъ, учрежденія общественной пользы, опирающіяся на нее, и распространеніе, которое она получила и можетъ еще получить при примѣненіи ея къ важнѣйшимъ вопросамъ натуральной философіи и нравственныхъ наукъ; если, затѣмъ, замѣтить, что даже въ такихъ областяхъ, которыя не могутъ быть подчинены исчисленію, она даетъ самые вѣрные взгляды, которые могутъ нами руководить въ нашихъ сужденіяхъ, и что она насъ учитъ предохранять себя отъ иллюзій, которыя насъ часто сбиваютъ съ вѣрнаго пути,—мы увидимъ, что нѣтъ науки, болѣе достойной нашихъ размышленій, и что было бы очень полезно ввести ее въ систему народнаго просвѣщенія».

Такими словами великій Лапласъ заканчиваетъ свою знаменитую книгу «Опытъ философіи теоріи вѣроятностей», которую рекомендуемъ вниманію каждаго (есть въ русскомъ переводѣ). Никто, за исключеніемъ развѣ Якова Бернулли, для теоріи вѣроятностей не сдѣлалъ до сихъ поръ столько, сколько Лапласъ, и никто съ бо̀льшимъ правомъ, чѣмъ онъ, не можетъ настаивать на необходимости самаго широкаго распространенія этой области математическихъ знаній. Впрочемъ, все болѣе и болѣе развивающаяся культурная жизнь народовъ лучше всего доказываетъ справедливость заключеній и требованій Лапласа. Развитіе всякаго рода систематической статистики, вычисленія, связанныя съ самыми тщательными измѣреніями, біометрія, различнаго рода страхованія, сдѣлавшіяся важнымъ факторомъ экономической и соціальной жизни широкихъ народныхъ массъ,— все это основано на математической теоріи вѣроятностей и лучше всего свидѣтельствуетъ о томъ значеніи, которое можетъ имѣть эта наука даже въ повседневномъ обиходѣ каждаго образованнаго человѣка. Мы не сомнѣваемся, что не такъ далеко время, когда теорія вѣроятностей изъ стѣнъ нѣкоторыхъ высшихъ и спеціальныхъ школъ перейдетъ во всѣ наши среднія школы. Сдѣлать это тѣмъ болѣе легко, что изложеніе элементовъ ученія о теоріи вѣроятностей не требуетъ введенія такъ называемой «высшей» математики. Подтвержденіемъ этого служитъ попытка (къ сожалѣнію, не вполнѣ законченная) проф. В. П. Ермакова. Въ 1884—85 году въ издававшемся имъ тогда «Журналѣ элементарной математики» уважаемый профессоръ помѣстилъ двѣ статьи изъ теоріи вѣроятностей въ элементарномъ изложеніи. Ниже мы даемъ вторую изъ нихъ, не сомнѣваясь, что подобное чтеніе доставитъ любителямъ математики помимо пользы и живѣйшее удовольствіе.

Русскимъ популяризаторомъ математическихъ знаній давно уже пора бы пойти по пути, указанному въ этомъ отношеніи нашимъ талантливымъ ученымъ, а педагогамъ заняться составленіемъ элементарнаго курса теоріи вѣроятностей, приноровленнаго къ школьнымъ требованіямъ. Сдѣлать это слѣдовало бы тѣмъ болѣе, что русская наука въ правѣ гордиться если не количествомъ, то качествомъ своихъ трудовъ въ области исчисленія вѣроятностей. Имена нашихъ академиковъ Буняковскаго, Чебышева и Маркова извѣстны всему ученому міру не одной только Россіи. А нынѣ во славу науки здравствующій А. А. Марковъ создалъ, между прочимъ, курсъ «Исчисленіе Вѣроятностей», равнаго которому не найдется теперь во всей математической литературѣ (мы исключаемъ, конечно, изъ сравненія такіе классическіе труды по теоріи вѣроятностей, какъ Лапласа). Сжатый и мѣткій, но слишкомъ спеціальный, языкъ хотя бы того же А. А. Маркова остается только во многихъ случаяхъ опростить (не въ ущербъ, конечно, смыслу), а таинственные (съ виду) символы и формулы переложить на обыкновенный ариѳметическій языкъ, чтобы получить требуемое.

Въ нашемъ дальнѣйшемъ изложеніи мы не преслѣдуемъ, впрочемъ, систематически ни одной изъ изложенныхъ выше задачъ. Сущность и цѣль настоящей книги—не въ этомъ. Если рядомъ легкихъ и интересныхъ задачъ, историческими справками и отрывками изъ цѣнныхъ сочиненій по предмету мы дадимъ читателю истинное понятіе о предметѣ и подвигнемъ его къ чтенію и изученію предмета по оригинальнымъ сочиненіямъ, то наша цѣль будетъ вполнѣ и совершенно достигнута. Хорошо будетъ даже то, если многіе изъ читателей дадутъ себѣ ясный отчетъ въ томъ, что же это за столь употребительное слово... «**Вѣроятность**»...

Задача 63-я (Кавалера де-Мере).

Недоконченная игра.

Два игрока, поставивши поровну, начали игру, условившись, что тотъ, кто раньше выиграетъ извѣстное число партій, получитъ всю ставку. По нѣкоторымъ обстоятельствамъ игра не могла быть окончена и прекратилась въ тотъ моментъ, когда первому игроку не хватало до конца одной, а второму двухъ партій. Спрашивается, какъ игроки должны подѣлить ставку между собою?

Рѣшеніе.

Знаменитый Паскаль, о которомъ мы не разъ уже упоминали, рѣшилъ эту задачу слѣдующимъ разсужденіемъ:

Первый игрокъ говоритъ второму: «Половина ставки принадлежитъ мнѣ безспорно, такъ какъ даже въ томъ случаѣ, если бы ты выигралъ слѣдующую партію, наши шансы на полученіе цѣлой ставки были бы одинаковы. Что касается второй половины, то шансы наши на ея полученіе одинаковы, а потому раздѣлимъ ее пополамъ».

Значитъ, первый игрокъ получаетъ *три четверти*, а второй *одну* четверть всей ставки.

Само собой разумѣется, что оба игрока считаются совершенно равносильными другъ другу, что въ костяхъ или картахъ, или въ чемъ бы и чѣмъ бы они ни играли, нѣтъ никакой фальши,—словомъ, окончательный результатъ игры зависитъ отъ **случая**, равновозможнаго для того и другого игрока,—и на этомъ-то зиждется все рѣшеніе задачи.

Что же такое *случай* и какъ понимать это слово?.. Впрочемъ объ этомъ придется говорить особо.

Игра въ кости и зачатки математической Теоріи Вѣроятностей.

Только что рѣшенная 63-я задача весьма знаменита въ лѣтописяхъ науки. Задачу эту въ 1654 году кавалеръ де-Мерè предложилъ для разрѣшенія своему другу, знаменитому Паскалю. Послѣдній рѣшилъ ее и для болѣе общаго случая, когда до конца первому игроку не хватаетъ, вообще говоря, m, а второму n партій. Рѣшивъ задачу самъ, Паскаль предложилъ рѣшить ее и своему не менѣе знаменитому современнику Ферма. Этотъ также не замедлилъ найти рѣшеніе задачи, но способомъ, отличнымъ отъ способа Паскаля (при помощи теоріи сочетаній) и притомъ уже не для двухъ только, а для любого числа игроковъ. По поводу каждаго изъ рѣшеній между великими математиками завязалась переписка и...

Такимъ образомъ были положены основанія математической теоріи вѣроятностей, которая съ этого времени дѣлаетъ весьма быстрые успѣхи.

Страстный игрокъ въ кости, кавалеръ де-Мере, какъ видимъ, поэтому также долженъ быть отнесенъ къ числу «основателей» теоріи вѣроятностей. Заслуга его состоитъ въ томъ, что онъ настойчиво заставлялъ математиковъ рѣшать различныя задачи, на которыя наталкивался самъ во время своей практики игры. Ниже мы приведемъ еще одну изъ задачъ де-Мере, предложенную тому же Паскалю и относящуюся тоже къ игрѣ въ кости, а потому необходимо нѣсколько ознакомиться съ понятіемъ объ этой игрѣ.

«Кость» въ данномъ случаѣ есть не что иное, какъ костяной кубикъ, на граняхъ котораго отмѣчены кружочки-очки: на одной грани—одно очко, на другой—два, на третьей—три и т. д. до шести (въ кубѣ 6 граней). Игра обыкновенно состоитъ въ выбрасываніи одной или нѣсколькихъ костей и затѣмъ въ подсчетѣ суммы выпавшаго числа очковъ. Самый простой способъ игры тотъ, что выбросившій наибольшее число очковъ получаетъ всю ставку, но ясно, что игру можно всячески разнообразить. При каждомъ новомъ условіи, вводимомъ въ игру, является вопросъ: для кого теперь изъ игроковъ существуетъ наиболѣе шансовъ выиграть. Такимъ образомъ возникали и создавались задачи, дѣлавшіяся достояніемъ математиковъ, причемъ обыкновенно практика игроковъ сплошь и рядомъ обгоняла теоретическіе выводы математиковъ.

Страстному игроку, но плохому математику, кавалеру де-Мере посчастливилось имѣть такого друга, какъ Паскаль. Интересно отмѣтить здѣсь же, что за 50 лѣтъ до описаннаго нѣчто подобное имѣло мѣсто съ Галилеемъ: одинъ изъ его пріятелей также задавалъ ему задачи изъ практики игры въ кости, и геніальный ученый разрѣшалъ ихъ совершенно вѣрно. Вообще слѣдуетъ замѣтить, что всеобщее увлеченіе игрой въ кости въ Западной Европѣ въ 16-мъ и 17-мъ столѣтіяхъ привело задолго до Паскаля и Ферма къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ, имѣющихъ связь съ теоріей игръ, но только генію этихъ ученыхъ удалось установить общіе методы и принципы для подчиненія этого предмета исчисленію.

О законности и случайности.

Обратимся еще разъ къ задачѣ кавалера де-Мере (зад. 63) и припомнимъ, что уже тамъ намъ пришлось остановиться на словѣ *«случай»*. Слово это вообще играетъ большую роль какъ въ практикѣ, такъ и въ теоріи всякой игры, а потому надъ его выясненіемъ основатели математической теоріи вѣроятностей остановились прежде всего. Чтобы показать, къ чему привели изслѣдованія въ этомъ направленіи, лучше всего привести слѣдующія страницы изъ «Опыта философіи теоріи вѣроятностей» Лапласа:

«Всѣ явленія, даже тѣ, которыя по своей незначительности какъ будто не зависятъ отъ великихъ законовъ природы, суть слѣдствія столь же неизбѣжныя этихъ законовъ, какъ обращеніе солнца. Не зная узъ, соединяющихъ ихъ съ системой міра въ ея цѣломъ, ихъ приписываютъ конечнымъ причинамъ или случаю, въ зависимости отъ того, происходили ли и слѣдовали ли они одно за другимъ съ извѣстною правильностью, или же безъ видимаго порядка; но эти мнимыя причины отбрасывались, по мѣрѣ того какъ расширялись границы нашего знанія, и совершенно исчезли передъ здравой философіей, которая видитъ въ нихъ лишь проявленіе невѣдѣнія, истинная причина котораго—мы сами.

«Всякое имѣющее мѣсто явленіе связано съ предшествующимъ на основаніи того очевиднаго принципа, что какое-либо явленіе не можетъ возникнуть безъ производящей его причины. Эта аксіома, извѣстная подъ именемъ *«принципа достаточнаго основанія»*, распространяется даже на дѣйствія, считаемыя безразличными. Воля, самая свободная, не можетъ породить эти дѣйствія безъ побуждающей причины, потому что, если бы она дѣйствовала въ одномъ случаѣ и воздерживалась отъ дѣйствія въ другомъ, при полномъ подобіи всѣхъ обстоятельствъ обоихъ положеній, то выборъ ея былъ бы дѣйствіемъ безъ причины: она была бы, какъ сказалъ Лейбницъ, слѣпымъ случаемъ эпикурейцевъ. Противоположное мнѣніе есть иллюзія ума, который, теряя изъ виду мелкія причины того или друго выбора воли въ безразличныхъ, поступкахъ, убѣждается, что она опредѣляется самою собою и безпричинна.

«Такимъ образомъ мы должны разсматривать настоящее состояніе вселенной какъ слѣдствіе ея предыдущаго состоянія и какъ причину послѣдующаго.

«Умъ, которому были бы извѣстны для какого-либо даннаго момента всѣ силы, одушевляющія природу, и относительное положеніе всѣхъ ея составныхъ частей, если бы вдобавокъ онъ оказался достаточно обширнымъ, чтобы подчинить эти данныя анализу, обнялъ бы въ одной формулѣ движенія величайшихъ тѣлъ вселенной наравнѣ съ движеніемъ легчайшихъ атомовъ: не осталось бы ничего, что было бы для него недостовѣрно, и будущее, такъ же какъ и прошедшее, предстало бы передъ его взоромъ. Умъ человѣческій въ совершенствѣ, которое онъ сумѣлъ придать астрономіи, даетъ намъ представленіе о слабомъ наброскѣ подобнаго разума. Его открытія въ механикѣ и геометріи въ соединеніи съ открытіемъ всемірнаго тяготѣнія сдѣлали его способнымъ понимать подъ одними и тѣми же аналитическими выраженіями прошедшія и будущія состоянія мировой системы. Примѣняя тотъ же методъ къ нѣкоторымъ другимъ объектамъ знанія, нашему разуму удалось подвести наблюдаемыя явленія подъ общіе законы и предвидѣть явленія, которыя будутъ вызваны данными условіями. Всѣ усилія духа въ поискахъ истины постоянно стремятся приблизить его къ Разуму, о которомъ мы только что упоминали, но отъ котораго онъ останется всегда безконечно далекимъ. Это стремленіе, свойственное роду человѣческому, возвышаетъ его надъ животными; и успѣхи его въ этомъ направленіи различаютъ націи и вѣка и составляютъ ихъ истинную славу.

«Припомнимъ, что въ былое время, въ эпоху не очень отъ насъ отдаленную, на дождь или на чрезвычайную засуху, на комету съ сильно растянутымъ хвостомъ, на солнечное затменіе, на сѣверное сіяніе и вообще на необычайныя явленія смотрѣли какъ на знакъ небеснаго гнѣва. Взывали къ небу, чтобы отвратить ихъ пагубное вліяніе. Небо не молили остановить движеніе планетъ или солнца: наблюденіе скоро дало бы почувствовать всю безполезность такихъ моленій. Но, такъ какъ тѣ явленія, наступающія и исчезающія черезъ длинные промежутки времени, казалось, противорѣчили порядку, установившемуся въ природѣ, то люди предположили, что небо порождало и измѣняло ихъ по своему усмотрѣнію въ наказаніе земныхъ грѣховъ. Такъ длинный хвостъ кометы 1456-го года произвелъ панику въ Европѣ, уже приведенной въ ужасъ быстрыми побѣдами турокъ, отъ которыхъ только что пала Византійская имперія. Послѣ того какъ это небесное свѣтило совершило четыре своихъ обращенія, оно возбудило среди насъ очень различный интересъ. Знакомство съ законами системы міра, пріобрѣтенное за этотъ промежутокъ времени, разсѣяло страхъ, порожденный незнаніемъ истинныхъ отношеній человѣка ко вселенной; и Галей (Halley), признавъ тождество этой кометы съ кометою 1531-го, 1607-го и 1682-го годовъ, предсказалъ слѣдующее ея возвращеніе въ концѣ 1758-го или въ началѣ 1759-го года. Ученый міръ ждалъ съ нетерпѣніемъ этого возвращенія, долженствовавшаго подтвердить одно изъ самыхъ великихъ открытій, сдѣланныхъ въ наукѣ, и исполнить предсказаніе Сенеки, сказавшаго объ обращеніи небесныхъ свѣтилъ, которыя спускаются изъ громадныхъ разстояній: «Наступитъ день, когда, благодаря длившемуся нѣсколько столѣтій изученію, вещи, нынѣ скрытыя, явятся со всею своею очевидностью; и потомки наши изумятся, что столь очевидныя истины ускользали отъ насъ». Тогда Клэро (Clairaut) взялся подвергнуть анализу тѣ возмущенія, которыя комета испытала подъ вліяніемъ двухъ самыхъ большихъ планетъ—Юпитера и Сатурна: послѣ громадныхъ вычисленій онъ назначилъ ея ближайшее прохожденіе черезъ перигелій на начало апрѣля 1759-го года, и наблюденіе не замедлило подтвердить это. Правильность, которую обнаруживаетъ намъ астрономія, безъ всякаго сомнѣнія имѣетъ мѣсто во всѣхъ явленіяхъ. Кривая, описанная простою молекулою воздуха или пара, опредѣлена такъ же точно, какъ и орбиты планетъ: разницу межъ ними дѣлаетъ только наше незнаніе».

Итакъ «случая» и случайныхъ явленій, въ сущности говоря, нѣтъ. Все зависитъ только отъ мѣры и степени нашего знанія. И нѣкоторыя совершающіяся на нашихъ глазахъ явленія мы называемъ *случайными* только потому, что всѣхъ причинъ и законовъ, вызывающихъ непрѣменное появленіе именно этого, а не другого, событія, мы не въ состояніи изучить и учесть. Другими словами:

Явленія, которыхъ мы съ точностью предусмотрѣть или предсказать не можемъ,— потому ли, что еще не знаемъ ихъ причинъ, или потому, что эти причины слишкомъ сложны и разнообразны,—мы называемъ явленіями случайными.

Положимъ, напримѣръ, что мы бросаемъ монету. Можетъ выпасть орелъ, можетъ выпасть и решетка. То и другое изъ этихъ двухъ явленій произойдетъ на основаніи общихъ физическихъ законовъ, и будетъ зависѣть отъ толчка, который мы дадимъ монетѣ при бросаніи, вѣса и формы монеты, сопротивленія воздуха и прочихъ условій. Всѣ эти условія, однако, столь разнообразны, многочисленны и сложны, что нѣтъ возможности обращаться къ ихъ изслѣдованію для того, чтобы предсказать, чѣмъ закончится процессъ бросанія монетъ: орломъ или решеткой. Мы и говоримъ, что вскрытіе орла или вскрытіе решетки суть явленія случайныя.

Опредѣленіе математической вѣроятности событія.

Мы не въ состояніи ничего точно предсказать напередъ о появленіи того или иного случайнаго событія. Однако появленіе многихъ изъ такихъ событій (напр.: рожденіе, смерть, болѣзни, увѣчья, преступленія, пожары, градъ, засуха, дождь и т. д., и т. д.) часто сопровождается для насъ такими матерьяльными или моральными выгодами или ущербомъ, что знать о томъ, случится ли нѣкоторое событіе или нѣтъ, для насъ весьма важно.

Не имѣя возможности судить о появленіи ожидаемаго событія *достовѣрно*, мы стараемся, все же, найти какія-либо (въ большинствѣ случаевъ опытныя) данныя, которыя позволили бы намъ съ нѣкоторыми безспорными основаніями утверждать, что одни изъ этихъ событій болѣе, а другія менѣе **вѣроятны**. Изъ области гаданій, выражающихся въ насмѣшливой, всѣмъ извѣстной, поговоркѣ «либо дождикъ, либо снѣгъ,— либо будетъ, либо нѣтъ»,—мы переходимъ въ область вѣроятности, составляющей нѣчто среднее между абсолютнымъ случаемъ и полной достовѣрностью. Знать степень вѣроятности случайнаго событія уже много значитъ. Извѣстно, напр., что для предотвращенія случайныхъ матеріальныхъ убытковъ устраиваются разнаго рода страховыя общества, какъ-то: общества страхованія отъ пожара, отъ кораблекрушенія, отъ градобитія, страхованія пожизненныхъ капиталовъ и доходовъ. Эти общества за незначительную ежегодную плату обязуются возмѣщать убытки, происшедшіе отъ несчастныхъ случаевъ. Всѣ страховыя общества основываютъ свои расчеты также на вѣроятности тѣхъ или другихъ событій и сообразно съ вѣроятностью ихъ берутъ страховую премію. Данныя, на основаніи которыхъ опредѣляются вѣроятности случайныхъ событій, берутся изъ наблюденій надъ появленіемъ этихъ событій въ дѣйствительной жизни, для чего обыкновенно собираются статистическія свѣдѣнія за болѣе или менѣе продолжительное время.

Теперь самъ собою напрашивается вопросъ: какъ же *математически* учесть вѣроятность, какъ условиться въ томъ, какими *числами* мы будемъ выражать вѣроятности событій или явленій?

Условимся прежде всего въ словахъ и терминахъ.

Два слова въ первоначальной теоріи вѣроятности встрѣчаются наиболѣе часто, а именно: **событіе** и **случай**. Всякое отдѣльное явленіе при какомъ либо опытѣ или наблюденіи мы будемъ называть *случаемъ*, но замѣтимъ при этомъ, что во многихъ сочиненіяхъ по теоріи вѣроятностей вмѣсто этого слова употребляютъ также термины **статочность** или **шансъ**.

Въ представляющемся намъ цѣломъ рядѣ случаевъ (статочностей, шансовъ) могутъ быть случаи однородные и разнородные,—это надо всегда имѣть въ виду.

Появленіе каждаго изъ однородныхъ случаевъ будемъ называть **событіемъ**.

Напр., возьмемъ урну, въ которой заключаются десять бѣлыхъ, пять черныхъ и три красныхъ шара. Вынимаемъ на удачу одинъ шаръ изъ этой урны. При этомъ мы ожидаемъ 18 *случаевъ* (статочностей)—это появленіе каждаго шара въ отдѣльности—и только одного изъ трехъ *событій*: появленія бѣлаго, чернаго или краснаго шара.

Для большей простоты дѣлаемъ ограниченія: во-первыхъ, мы будемъ разсматривать только равновозможные **случаи.** Мы называемъ случаи равновозможными, когда нѣтъ никакой причины отдать предпочтеніе появленію одного случая передъ другимъ. Во-вторыхъ, будемъ полагать, что въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ не можетъ появиться болѣе одного событія. Кромѣ того предполагаемъ, что случаи (статочности) **несовмѣстимы**, т. е.—если имѣетъ мѣсто одинъ случай, то одновременно не можетъ быть другого.

Теперь не трудно придти къ заключенію, что вѣроятность событія зависитъ какъ отъ числа случаевъ, благопріятныхъ появленію ожидаемаго событія, такъ и отъ числа случаевъ, неблагопріятныхъ этому событію; съ возрастаніемъ перваго числа вѣроятность событія увеличивается, съ возрастаніемъ второго она уменшается. Опредѣленіе вѣроятности сводится, значитъ, къ точному подсчету всѣхъ случаевъ, при которыхъ событіе можетъ наступить.

Пусть m означаетъ полное число равновозможныхъ случаевъ при данномъ наблюденіи, а n—число тѣхъ изъ нихъ, которые благопріятны появленію ожидаемаго событія. Легко видѣть, что вѣроятность событія увеличивается и уменьшается при тѣхъ же самыхъ обстоятельствахъ, какъ и дробь $\frac{n}{m}$. Отсюда вытекаетъ слѣдующее наиболѣе простое опредѣленіе математической вѣроятности:

Вѣроятность событія измѣряется дробью, числитель которой равенъ числу случаевъ, благопріятныхъ появленію событія, а знаменатель—числу всѣхъ случаевъ, могущихъ появиться при данномъ наблюденіи.

Нѣкоторыя слѣдствія, вытекающія изъ опредѣленія математической вѣроятности. — Вѣроятность и достовѣрность.

Изъ даннаго только что выше опредѣленія математической вѣроятности появленія какого-либо событія слѣдуетъ, что вѣроятность эта увеличивается и уменьшается одновременно съ увеличеніемъ и уменьшеніемъ дроби $\frac{n}{m}$, гдѣ m означаетъ число *всѣхъ* равновозможныхъ случаевъ, а n—число случаевъ, благопріятныхъ появленію ожидаемаго событія. Но при этомъ необходимо всегда помнить, что, если двѣ величины одновременно увеличиваются и уменьшаются, то отсюда еще *не слѣдуетъ,* чтобы эти величины были равны или даже пропорціональны. Итакъ, данное выше опредѣленіе вѣроятности *есть совершенно произвольное.* Можно было бы дать много другихъ опредѣленій: напр., вѣроятность можно опредѣлить какъ отношеніе числа благопріятныхъ къ числу неблагопріятныхъ случаевъ. Нужно однако же замѣтить, что *данное опредѣленіе есть простѣйшее изъ всѣхъ возможныхъ.* Само собою разумѣется, что при другомъ опредѣленіи вѣроятности всѣ формулы теоріи вѣроятности были бы иныя.

Дробь $\frac{n}{m}$, которую мы приняли, какъ мѣру математической вѣроятности, можетъ принимать всѣ значенія между нулемъ и единицей.

Вѣроятность равна единицѣ, когда $n = m$, т. е. когда всѣ случаи благопріятны появленію ожидаемаго событія, и тогда событіе достовѣрно, т. е. оно должно непремѣнно случиться. Отсюда слѣдуетъ, что *за единицу мѣры вѣроятностей мы принимаемъ вѣроятность достовѣрнаго событія.*

Вѣроятность обращается въ нуль, когда $n = 0$, т. е. когда совсѣмъ нѣтъ случаевъ, благопріятныхъ для появленія событія. Въ такомъ случаѣ событіе не появится вовсе. Слѣдовательно, *если вѣроятность равна нулю, то событіе вовсе не появится.*

Пусть n означаетъ число благопріятныхъ появленію ожидаемаго событія, а m число всѣхъ возможныхъ случаевъ. Вѣроятность появленія ожидаемаго событія выразится, какъ мы знаемъ, дробью $\frac{n}{m}$. Вѣроятность появленія того же событія выразиться дробью $\frac{m-n}{m}$. Означимъ первую вѣроятность черезъ p, тогда вторая будетъ $1-p$. Отсюда заключаемъ слѣдующее:

Если вѣроятность появленія событія есть p, то вѣроятность непоявленія того же событія есть $1-p$.

Для надлежащаго усвоенія теоріи вѣроятностей необходимо прежде всего умѣнье вычислять вѣроятность различныхъ событій. При этомъ учетъ шансовъ (случаевъ, статочностей) долженъ дѣлаться со всей возможной осторожностью и внимательностью: 1) Слѣдуетъ сосчитать всѣ *возможные* случаи, ни одинъ случай не долженъ быть пропущенъ; 2) случаи должны быть *равновозможны*; 3) они должны быть *несовмѣстимы*. Надо замѣтить, однако, что вычисленіе вѣроятности различныхъ событій не такъ легко и просто, какъ можетъ показаться иному на первый взглядъ. Теорія соединеній и сочетаній часто оказываетъ здѣсь могущественную помощь. Но сложность условій, при которыхъ можетъ появиться ожидаемое событіе, а иногда просто невозможность опредѣлить число благопріятныхъ или даже всѣхъ случаевъ часто создаютъ для точнаго рѣшенія задачи неодолимыя трудности. Но самыя эти трудности, сложность и тонкость вопросовъ всегда привлекали къ теоріи вѣроятностей всѣ выдающіеся умы. И, быть можетъ, ни одна область въ математикѣ не вызывала такихъ оживленныхъ споровъ и глубоко интересныхъ разсужденій среди ученыхъ всѣхъ народовъ, начиная съ Галилея, Паскаля и Ферма, какъ именно эта Теорія Вѣроятностей.

Теперь мы можемъ приступить къ рѣшенію нѣкоторыхъ простыхъ задачъ, относящихся къ исчисленію случаевъ и опредѣленію вѣроятности нѣкоторыхъ событій. Остановимся также на нѣкоторыхъ такихъ вопросахъ, гдѣ скрытая малѣйшая неточность въ заданіи влечетъ за собой двусмысленныя рѣшенія,— получается родъ софизмовъ изъ теоріи вѣроятностей.

Задача 64-я.

Орлянка.

Подбрасывается монета одинъ разъ. Какова вѣроятность, что выпадаетъ орелъ?

Рѣшеніе.

Въ этой задачѣ, какъ и во всѣхъ дальнѣйшихъ, предполагается, что монета совершенно однородна, стороны ея совершенно подобны, и что вообще въ ней самой нѣтъ никакихъ физическихъ причинъ, заставляющихъ ее падать на одну сторону предпочтительнѣе, чѣмъ на другую. Тогда мы имѣемъ здѣсь всего два равновозможныхъ случая: либо орелъ, либо решетка; а за выпаденіе орла имѣется, значитъ одинъ благопріятный шансъ. Итакъ, по опредѣленію математической вѣроятности, вѣроятность появленія орла есть $\frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$.

Напомнимъ еще разъ, что математическую вѣроятность наступленія ожидаемаго событія мы опредѣлили, какъ дробь, въ знаменателѣ которой стоитъ число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, а въ числителѣ—число случаевъ благопріятныхъ появленію событія.

Задача 65-я.

Двукратное бросаніе монеты.

Монета подбрасывается вверхъ 2 раза. Какова вѣроятность, что при этомъ двукратномъ подбрасываніи хотя одинъ разъ появится орелъ?

Рѣшеніе.

Подсчитываемъ всѣ возможные случаи. Можетъ случиться, что: 1) орелъ появится при 1-мъ и 2-мъ бросаніи; 2) орелъ при первомъ и решетка при второмъ бросаніи; 3) решетка при первомъ и орелъ при второмъ бросаніи; 4) решетка при 1-мъ и 2-мъ бросаніи. Всего 4 случая и случая равновозможныхъ.

Въ трехъ изъ нихъ можетъ появляться орелъ. Значитъ благопріятныхъ появленію орла случаевъ 3, а потому, по опредѣленію для искомой вѣроятности, имѣемъ $\frac{3}{4}$.

Отыскать число всѣхъ случаевъ можно было бы, исходя и изъ такого соображенія. При первомъ бросаніи монеты имѣемъ 2 равновозможныхъ случая, при второмъ также 2. И каждый изъ этихъ двухъ случаевъ всячески сочетается съ 2-мя другими. Значитъ число всѣхъ случаевъ есть $2 \times 2 = 4$. Находимъ, затѣмъ, число случаевъ, благопріятныхъ появленію орла, и приходимъ опять къ найденному уже рѣшенію задачи.

Задача 66-я.

N-кратное бросаніе монеты.

Монету подбрасываютъ послѣдовательно n разъ. Какова вѣроятность, что орелъ и решетка будутъ появляться въ извѣстномъ, напередъ заданномъ, порядкѣ?

Рѣшеніе.

Появленіе орла или решетки равновозможно при каждомъ бросаніи, т. е. при каждомъ бросаніи имѣемъ 2 равновозможныхъ случая. Но всѣхъ бросаній n, — значитъ, при каждомъ новомъ бросаніи каждые новые два случая будутъ сочетаться со всѣми предыдущими.

Такъ: при 1-мъ бросаніи имѣемъ 2 случая.
» 2-мъ » » $2 \cdot 2 = 2^2$
» 3-мъ » » $2^2 \cdot 2 = 2^3$
. . . .
» n-мъ » » $2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$

Итакъ, всѣхъ случаевъ 2^n.

Сколько же случаевъ, благопріятствующихъ наступленію спрашиваемаго *событія*? Одинъ.

Итакъ, искомая вѣроятность есть $\frac{1}{2^n}$.

Приложеніе къ рулеткѣ.

Совершенно такая же, какъ въ предыдущей задачѣ, вѣроятность получается для появленія въ извѣстномъ порядкѣ краснаго и чернаго на рулеткѣ (rouge-et-noire).

Напримѣръ: *какова вѣроятность, что, показавъ въ 1-й разъ красные, рулетка вслѣдъ затѣмъ слѣдующіе 29 ударовъ будетъ каждый разъ послѣдовательно мѣнять цвѣтъ?*

По предыдущему, для такой вѣроятности, находимъ:

$$\frac{1}{2^{30}} = 0{,}0000000009313З.$$

Если принять, что послѣдовательный рядъ появленія краснаго и чернаго можетъ начаться все равно съ какого, краснаго или чернаго, цвѣта, то данное число для вѣроятности надо помножить на 2.

Задача 67-я.

Бросаніе одной кости.

Бросается игральная кость. Опредѣлить величину вѣроятности, что выпадетъ 4 очка.

Рѣшеніе.

Въ игральной кости (кубикѣ) шесть граней, и на нихъ отмѣчены очки отъ 1 до 6.

Подброшенная кость можетъ лечь вверхъ любой изъ этихъ шести граней и показать любое число очковъ отъ 1 до 6. Итакъ имѣемъ всего 6 равновозможныхъ случаевъ. Появленію же 4-хъ очковъ благопріятствуетъ только 1. Слѣдовательно, вѣроятность того, что выпадетъ именно 4 очка, равна $\frac{1}{6}$.

Въ случаѣ метанія одной кости та же вѣроятность, $\frac{1}{6}$, будетъ и для выпаденія всѣхъ остальныхъ очковъ кости.

Если же мы станемъ одновременно подбрасывать 2 кости, то вопросъ, какъ сейчасъ увидимъ, получаетъ нѣсколько болѣе сложный характеръ.

Задача 68-я.

2 кости.

Какъ велика вѣроятность получить 8 очковъ, бросивъ двѣ кости одинъ разъ?

Рѣшеніе.

Подсчитать число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, могущихъ получиться при бросаніи 2-хъ костей не трудно, исходя изъ такихъ соображеній: каждая изъ костей при бросаніи даетъ одинъ изъ 6 равновозможныхъ для нея случаевъ. Шесть такихъ случаевъ для одной кости сочетаются всѣми способами съ 6-ю же случаями для другой кости, и такимъ образомъ получается всего для 2-хъ костей $6 \times 6 = 6^2 = 36$ равновозможныхъ случаевъ. Остается подсчитать число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, благопріятствующихъ появленію суммы 8. Здѣсь дѣло уже нѣсколько осложняется.

Мы должны сообразить, что при 2 костяхъ сумма 8 можетъ выброситься только слѣдующими способами:

1)	первая	кость	4	очк.,	вторая	кость	4	очка.
2)	»	»	6	»	»	»	2	»
3)	»	»	2	»	»		6	»
4)	»	»	5	»	»	»	3	»
5)	»		3	»	»		5	»

Итого случаевъ, благопріятныхъ ожидаемому событію, имѣемъ 5. Слѣдовательно, искомая вѣроятность, что кости выбросятъ въ суммѣ 8 очковъ, равна $\frac{5}{36}$.

Замѣчаніе. — Для полнаго уясненія дѣла полезно составить табличку всѣхъ 36 комбинацій, которыя могутъ получиться при бросаніи 2-хъ костей, и разобраться въ ней. Для ясности изобразимъ очки первой кости римскими цифрами, а очки второй — арабскими. Иогда всѣ 36 случаввъ, которые могутъ представиться при бросаніи двухъ костей, могутъ быть представлены слѣдующей квадратной табличкой (фиг. 102).

I, 1	I, 2	I, 3	I, 4	I, 5	I, 6
II, 1	II, 2	II, 3	II, 4	II, 5	II, 6
III, 1	III, 2	III, 3	III, 4	III, 5	III, 6
IV, 1	IV, 2	IV, 3	IV, 4	IV, 5	IV, 6
V, 1	V, 2	V, 3	V, 4	V, 5	V, 6
VI, 1	VI, 2	VI, 3	VI, 4	VI, 5	VI, 6

Фиг. 102.

Сумма чиселъ каждой клѣтки этой фигуры даетъ сумму очковъ двухъ костей при каждомъ изъ 36 равновозможныхъ случаевъ, какъ они могутъ выпасть.

Разсматривая эти суммы по всѣмъ діагоналямъ справа налѣво и сверху внизъ, мы тотчасъ убѣждаемся, насколько разнятся числа случаевъ благопріятныхъ для выпаденія той или другой суммы очковъ. Главная діагональ справа налѣво тотчасъ показываетъ намъ, что наиболѣе шансовъ для выпада при двухъ костяхъ имѣетъ число 7, а именно число это можетъ составиться 6-ю различными комбинаціями двухъ костей:

$$\mathrm{I}+6,\ \mathrm{II}+5,\ \mathrm{III}+4,\ \mathrm{IV}+3,\ \mathrm{V}+2,\ \mathrm{VI}+1.$$

Слѣдовательно, вѣроятность выпада этого числа очковъ при бросаніи 2-хъ костей равна $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Изъ таблицы тотчасъ видно, что для выпада

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12 очковъ

соотвѣтственныя вѣроятности будутъ:

$$\frac{1}{36},\ \frac{1}{18},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{9},\ \frac{5}{36},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{36},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{18}\ \text{и}\ \frac{1}{36}.$$

По главной діагонали слѣва направо въ табличкѣ идутъ *дублеты*, т. е. случаи, когда обѣ кости одновременно показываютъ одно и то же число очковъ. Ясно, что вѣрность полученія любого изъ дублетовъ равна $\frac{1}{36}$.

Задача 69-я.

Какова вѣроятность, что, бросая n разъ одну шестигранную кость, мы получимъ n разъ подрядъ очко 3?

Рѣшеніе.

6 случаевъ равновозможныхъ при каждомъ бросаніи. Слѣдовательно, при

1-мъ бросаніи имѣемъ 6 случаевъ
2-мъ » » $6 \cdot 6 = 6^2$ случаевъ
3-мъ » » $6^2 \cdot 6 = 6^3$ »
. . . .
n-мъ » » $6^{n-1} \cdot 6 = 6^n$ »

Итакъ, всего при n послѣдовательныхъ бросаніяхъ получается 6^n случаевъ.

Спрашивается же наступленіе такого событія, появленію котораго каждый разъ благопріятствуетъ только одинъ случай.

Искомая вѣроятность есть $\frac{1}{6^n}$.

Задача 70-я.

Бросаютъ 2 кости три раза. Какова вѣроятность, что хотя одинъ разъ выпадетъ дублетъ (т. е. на обѣихъ костяхъ будетъ одинаковое количество очковъ).

Рѣшеніе.

Всѣхъ равновозможныхъ случаевъ будетъ $36^3 = 46\ 656$. Дублетовъ при 2 костяхъ шесть: 1 и 1, 2 и 2, 3 и 3, 4 и 4, 5 и 5, 6 и 6, и при каждомъ ударѣ возможно появленіе какого либо изъ нихъ. Итакъ, изъ 36 случаевъ при каждомъ ударѣ 30 ни въ коемъ случаѣ не даютъ дублета. При трехъ же бросаніяхъ получается $30^3 = 27\ 000$ недублетныхъ случая. Случаевъ же, благопріятствующихъ появленію дублета, будетъ, значитъ,

$$36^3 - 30^3 = 19\ 656.$$

Искомая вѣроятность есть

$$\frac{19\ 656}{46\ 656} = 0{,}421\ 296.$$

Задача 71-я.

Бросаютъ n разъ 2 кости. Какова вѣроятность, что получится n разъ сумма по 7 очковъ?

Рѣшеніе.

При n бросаніяхъ равновозможны 36^n случаевъ. При каждомъ бросаніи появленію требуемаго событія благопріятствуетъ 6 случаевъ. Всего при n бросаніяхъ благопріятствующихъ случаевъ будетъ, слѣдовательно, 6^n.

Вѣроятность искомаго событія:

$$\frac{6^n}{36^n} = \frac{1}{6^n}.$$

Замѣчаніе. Полученная вѣроятность одинакова съ вѣроятностью выбрасыванья одной и той же грани при n бросаніяхъ одной кости.

Задача 72-я.

Карты.

Изъ колоды картъ вынимается одна карта. Опредѣлить вѣроятность появленія: 1) пиковой дамы, 2) какого либо туза, 3) карты червонной масти, 4) какой-либо фигуры.

Рѣшеніе.

Замѣтивъ, что въ колодѣ 52 карты, и что среди этихъ картъ находится: 1 пиковая дама, 4 туза, 13 картъ червонной масти и 12 фигуръ, находимъ для искомыхъ вѣроятностей соотвѣтственно:

$$1)\ \frac{1}{52};\quad 2)\ \frac{4}{52}=\frac{1}{13};\quad 3)\ \frac{13}{52}=\frac{1}{4};\quad 4)\ \frac{12}{52}=\frac{3}{13}.$$

Задача 73-я.

Еще одна задача кавалера де-Мере.

Опредѣлить вѣроятность, при которой, бросивъ n разъ подъ-рядъ 2 кости, получимъ хотя разъ 12 очковъ («Sonnez»).

Рѣшеніе.

При каждомъ бросаніи двухъ костей возможно 36 расположеній ихъ, но 35 изъ нихъ дадутъ непремѣнно иное число очковъ, чѣмъ 12.

Число всѣхъ возможныхъ сочетаній при n бросаніяхъ костей есть 36^n, число же такихъ, изъ которыхъ сумму очковъ 12 необходимо исключить, будетъ, очевидно, 35^n. Слѣдовательно, число такихъ сочетаній, въ которыхъ 12 (Sonnez) можетъ заключаться одинъ или нѣсколько разъ, равно $36^n - 35^n$. Поэтому для искомой вѣроятности находимъ:

$$\frac{36^n - 35^n}{36^n} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n.$$

Если пожелать, чтобы эта вѣроятность была равна $\frac{1}{2}$, то необходимо опредѣлить n изъ уравненія:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2}$$

Это есть такъ называемое показательное уравненіе и рѣшеніе его съ помощью логариѳмовъ даетъ

$$n = \frac{\lg 2}{\lg 36 - \lg 35} = 24{,}605.$$

Отсюда видимъ, что если кто берется выбросить 12 очковъ въ 24 удара, то онъ имѣетъ болѣе шансовъ проиграть, чѣмъ выиграть. При 25 ударахъ получается обратное.

Изъ переписки Паскаля съ Ферма.

Вышеприведенная задача, какъ и задача 68-я этой книги, была предложена Паскалю также кавалеромъ де-Мере и также послужила толчкомъ для разработки первыхъ основъ теоріи вѣроятностей.

«У меня нѣтъ времени, писалъ по этому поводу Паскаль къ Ферма,— чтобы переслать вамъ разъясненіе одного затрудненія, которое очень удивляло г. де-Мере, потому что хотя онъ обладаетъ очень здравымъ умомъ, но онъ не геометръ. А это, какъ знаете, большой недостатокъ. Такъ, онъ сообщилъ мнѣ, что нашелъ противорѣчіе въ числахъ по слѣдующему поводу: Если браться выбросить 6 очковъ одной костью, то онъ имѣетъ шансы сдѣлать это въ 4 удара, но если взяться выкинуть 12 («Sonnez») съ помощью 2-хъ костей, то онъ не имѣетъ полныхъ шансовъ сдѣлать это въ 24 удара, а между тѣмъ отношеніе 24 къ 36, которое есть число всѣхъ граней, получаемыхъ изъ двухъ костей, равно отношенію 4 къ 6, числу граней одной кости.

«Такова приключившаяся съ нимъ большая непріятность, которая заставляетъ его презрительно утверждать, что математическія теоремы неустойчивы, и что ариѳметика противорѣчитъ сама себѣ»...

Отвѣтъ на сомнѣнія де-Мере не могъ затруднить ни Паскаля, ни Ферма.

Пока дѣло идетъ объ одной кости,—въ области небольшихъ чиселъ, разсужденія де-Мере правильны: при 4-хъ ударахъ онъ дѣйствительно имѣетъ шансы выкинуть одной костью напередъ заданное число очковъ (6). Но, какъ мы уже знаемъ, если увеличивается число костей и число ихъ выбрасываній, то число всевозможныхъ случаевъ, равно какъ и случаевъ, благопріятныхъ появленію событія, увеличивается, вообще, совсѣмъ не пропорціонально ни числу получаемыхъ сочетаній изъ граней костей, ни числу ихъ выбрасываній. Убѣдиться въ этомъ можно либо путемъ непосредственнаго опыта надъ простѣйшими случаями, либо путемъ вывода общей формулы. Кавалеръ де-Мере постигъ только первый путь. Паскаль хотѣлъ вывести его на второй, но тотчасъ увидѣлъ большой недостатокъ своего пріятеля: онъ не былъ, при всемъ своемъ умѣ, математикомъ...

Задача 74-я.

Въ чемъ дѣло?

Имѣются три шкатулки, совершенно одинаковыхъ по внѣшнему виду, въ каждой изъ нихъ по два ящичка, а въ каждомъ ящичкѣ по монетѣ. Въ одной шкатулкѣ только золотыя монеты, въ другой только серебряныя, а въ третьей—въ одномъ ящичкѣ золотая, а въ другомъ серебряная монета. Берутъ одну изъ шкатулокъ (все равно какую). Какова вѣроятность найти въ ней въ одномъ изъ ящиковъ золотую, а въ другомъ серебряную монету?

Можно подходить къ рѣшенію задачи двояко:

1. - Шкатулки тождественны. Значитъ равновозможны 3 случая. Благопріятствуетъ появленію событія одинъ. Слѣдовательно, искомая вѣроятность равна $\frac{1}{3}$.

2. Взята наугадъ какая либо изъ шкатулокъ, и въ ней выдвинули одинъ ящикъ. Какова бы ни была найденная тамъ монета, но теперь оказываются возможными только два шанса (случая): во второмъ закрытомъ ящичкѣ шкатулки находится монета такого же металла, что и въ открытомъ, или другого. Изъ этихъ двухъ случаевъ одинъ благопріятный ожидаемому

нами событію, т. е., что у насъ въ рукахъ шкатулка съ разными монетами. Такимъ образомъ вѣроятность взять сразу въ руки требуемую шкатулку оказывается равной $\frac{1}{2}$.

Какъ же это такъ? Выходитъ, что достаточно въ одной изъ шкатулокъ только открыть ящикъ, чтобы вѣроятность изъ $\frac{1}{3}$ обратилась въ $\frac{1}{2}$.

Въ нашихъ разсужденіяхъ, очевидно, должна быть ошибка; и она дѣйствительно въ нихъ есть.

Когда мы открываемъ первый ящикъ въ шкатулкѣ, то остаются возможными два случая, и одинъ только благопріятствуетъ появленію ожидаемаго событія, —это вѣрно; но дѣло въ томъ, что два получающихся случая **неравновозможны.** Допустимъ, что, открывъ первый ящикъ, мы нашли тамъ золотую монету; въ другомъ, конечно, можетъ быть серебряная, но есть больше основаній утверждать, что въ этомъ закрытомъ ящикѣ находится тоже золотая монета.

Чтобы сдѣлать наше разсужденіе болѣе яснымъ, предположимъ, что у насъ не три, а триста совершенно одинаковыхъ съ двумя ящичками шкатулокъ. Сто изъ нихъ въ обоихъ ящичкахъ содержатъ по золотой монетѣ, сто—по серебряной, а въ третьей сотнѣ шкатулокъ—въ одномъ ящичкѣ находится одна золотая, а въ другомъ одна серебряная монета. Откроемъ по одному ящичку въ каждой изъ шкатулокъ, и мы увидимъ 300 медалей. Сто изъ нихъ должно быть золотыхъ и сто серебряныхъ, - это мы можемъ утверждать впередъ навѣрняка. Но относительно ста остальныхъ ничего напередъ сказать нельзя: онѣ находятся въ шкатулкахъ съ разными монетами, а какія и въ какомъ числѣ при выдвиганіи ящичковъ откроются монеты, зависитъ только отъ случая.

Открывъ триста ящичковъ, слѣдуетъ ожидать во всякомъ случаѣ, что увидимъ менѣе двухсотъ золотыхъ монетъ. Слѣдовательно, вѣроятность, что въ первой взятой наудачу шкатулкѣ другая монета (въ закрытомъ ящичкѣ), золотая, перевышаетъ $\frac{1}{2}$.

Настоящая задача можетъ служить примѣромъ того, какую осторожность и точность въ сужденіяхъ нужно соблюдать при опредѣленіи равновозможности случаевъ.

Необходимое замѣчаніе.

Во избѣжаніе неточностей и ошибокъ слѣдуетъ постоянно помнить, что *безконечность* не есть число. Поэтому нельзя вводить это понятіе въ разсужденія безъ соотвѣтствующихъ поясненій. Кажущаяся только точность иныхъ словъ можетъ также вести къ противорѣчіямъ. Выраженіе: «выбрать *наудачу* изъ безконечнаго числа возможныхъ случаевъ — не можетъ, напр., считаться достаточнымъ указаніемъ.

Вотъ еще примѣръ наудачнаго заданія, ведущаго къ противорѣчію:

Требуется опредѣлить вѣроятность того, что нѣкоторое число, цѣлое или дробное, соизмѣримое или несоизмѣримое, взятое *наудачу* между 0 и 100, будетъ болѣе 50-ти.

Отвѣтъ, повидимому, ясенъ: число случаевъ (статочностей), благопріятствующихъ появленію событія, равно половинѣ числа всѣхъ возможныхъ случаевъ. Искомая вѣроятность равна, слѣдовательно, $\frac{1}{2}$.

Но вмѣсто самаго числа, нисколько не мѣняя условій вопроса, можно взять его квадратъ. Если число заключается между 50 и 100, то его квадратъ заключается между 2 500 и 10 000. Вѣроятность, чтобы взятое *наудачу* между 0 и 10 000 число превышало 2 500, тоже представляется очевидной: число случаевъ, благопріятствующихъ появленію событія, равно тремъ четвертямъ всѣхъ равновозможныхъ случаевъ. Искомая вѣроятность, значитъ, равна $\frac{3}{4}$.

Обѣ задачи тождественны. Почему же получается такая разница въ отвѣтахъ? Потому, что въ самомъ заданіи нѣтъ надлежащей точности. Противорѣчій подобнаго рода можно подобрать сколько угодно и получать такимъ образомъ новые виды математическихъ софизмовъ.

Еще слѣдствіе изъ опредѣленія математической вѣроятности.

Припомнимъ опять принятое нами опредѣленіе математической вѣроятности и выведемъ изъ этого опредѣленія одно важное слѣдствіе. Положимъ, что при какомъ-нибудь опытѣ могутъ появиться нѣсколько событій. Пусть n, n', n'', ... будутъ числа случаевъ, благопріятныхъ соотвѣтственно каждому изъ нихъ, а m число всѣхъ возможныхъ случаевъ. Такъ какъ, по сдѣланному нами ограниченію, въ каждомъ случаѣ не могутъ появиться два или болѣе событія, то $m = n + n' + n'' + \ldots$ Вѣроятности каждаго событія выразятся дробями:

$$\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}, \frac{n''}{m}, \ldots$$

Но легко видѣть, что сумма этихъ дробей равна единицѣ. Отсюда слѣдуетъ, что **сумма вѣроятностей всѣхъ событій, могущихъ появиться при данномъ опытѣ, равна единицѣ.**

Задача 75-я.

Въ урнѣ заключается m бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ. Изъ этой урны вынимаемъ наудачу два шара. При этомъ опытѣ могутъ появиться три событія: 1) два бѣлыхъ, 2) бѣлый и черный, 3) два черныхъ шара. Какъ велика вѣроятность каждаго изъ этихъ событій?

Рѣшеніе.

Число возможныхъ случаевъ при нашемъ опытѣ равно числу сочетаній изъ $m + n$ шаровъ по два: $\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}$. Число случаевъ, благопріятныхъ появленію перваго событія, равно числу сочетаній изъ m бѣлыхъ шаровъ по два: $\frac{m(m-1)}{2}$. Случаи, благопріятные появленію второго событія, получаются комбинированіемъ каждаго бѣлаго съ каждымъ чернымъ шаромъ; число этихъ случаевъ равно mn. Число случаевъ, благопріятныхъ появленію третьяго событія, равно числу сочетаній изъ n черныхъ шаровъ по два: $\frac{n(n-1)}{2}$. Раздѣливъ числа, благопріятныя появленію каждаго событія, на число всѣхъ возможныхъ случаевъ, получимъ искомыя вѣроятности:

$$\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}, \quad \frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}, \quad \frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}.$$

Сумма этихъ вѣроятностей, какъ и должно быть по нашей теоріи, равна единицѣ [1]).

[1]) Мы могли бы при нашемъ опытѣ разсматривать только два событія: появленіе бѣлаго или чернаго шара. При этомъ только нѣкоторые случаи благопріятны появленію обоихъ событій. Легко найти, что вѣроятности выхода бѣлаго и чернаго шара выражаются дробями:

$$\frac{m(m-1)+2mn}{(m+n)(m+n-1)}, \quad \frac{n(n-1)+2mn}{(m+n)(m+n-1)}.$$

Сумма этихъ вѣроятностей уже не равна единицѣ.

Вѣроятности сложныхъ событій.

Статья проф. В. П. Ермакова. «Журналъ элементарной математики» за 1884—85 г.

Появленіе нѣсколькихъ событій будемъ называть *сложнымъ событіемъ.*

Каждое изъ составныхъ событій въ свою очередь можетъ быть сложнымъ, т. е. можетъ состоять изъ нѣсколькихъ *простыхъ* событій.

Нѣсколько событій будемъ называть *независимыми*, если вѣроятность каждаго изъ нихъ не зависитъ отъ того, случились ли другія событія или нѣтъ.

Событія будемъ называть *зависимыми*, если появленіе или непоявленіе нѣкоторыхъ изъ нихъ оказываетъ вліяніе на вѣроятности появленія другихъ событій.

Покажемъ, прежде всего, какъ вычисляется вѣроятность сложнаго событія, состоящаго изъ нѣсколькихъ независимыхъ событій.

Положимъ, мы производимъ нѣсколько опытовъ, изъ которыхъ при первомъ можетъ появиться событіе A, при второмъ A', при третьемъ A'' и т. д. Означимъ чрезъ m число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, могущихъ появиться при первомъ опытѣ, и чрезъ n число тѣхъ изъ этихъ случаевъ, которые благопріятны появленію событія A; соотвѣтственныя числа при второмъ, третьемъ и т. д. опытахъ означимъ чрезъ m' и n', m'' и n'' и т. д. Какъ велика вѣроятность, что появятся событія: A, A', A'' и т. д.?

Если мы производимъ опыты одновременно или одинъ за другимъ, то каждый случай при первомъ опытѣ можетъ комбинироваться съ каждымъ случаемъ при второмъ опытѣ, съ каждымъ случаемъ при третьемъ опытѣ и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что число всѣхъ возможныхъ случаевъ при нѣсколькихъ опытахъ равно произведенію нѣсколькихъ множителей, изъ которыхъ каждый выражаетъ число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ при каждомъ опытѣ въ отдѣльности. Итакъ, число всѣхъ случаевъ (какъ легко видѣть, равновозможныхъ) при нашихъ опытахъ равно $mm'm''...$

Профессоръ Василій Петровичъ Ермаковъ.

Такъ какъ каждый случай, благопріятный появленію событія A, можетъ комбинироваться съ каждымъ случаемъ, благопріятнымъ событію A', съ каждымъ случаемъ, благопріятнымъ A', и т. д., то число всѣхъ случаевъ, благопріятныхъ сложному событію $AA'A''...$, равно произведенію $nn'n''$, нѣсколькихъ множителей, изъ которыхъ каждый выражаетъ число случаевъ, благопріятныхъ каждому событію въ отдѣльности.

Согласно опредѣленію вѣроятности (см. стр. 238 настоящей книги), вѣроятность сложнаго событія $AA'A''...$ выразится дробью:

$$\frac{nn'n''\ldots}{mm'm''\ldots}$$

Но эта дробь можетъ быть разложена на произведеніе нѣсколькихъ дробей:

$$\frac{nn'n'' \ldots}{mm'm'' \ldots} = \frac{n}{m} \times \frac{n'}{m'} \times \frac{n'}{m'} \ldots$$

Легко видѣть, что дробные множители во второй части выражаютъ вѣроятности появленія каждаго изъ событій A, A', A'',... въ отдѣльности.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило:

Вѣроятность появленія нѣсколькихъ независимыхъ событій равна произведенію вѣроятностей этихъ событій.

Задача 76-я.

Имѣется нѣсколько урнъ съ шарами: въ первой m бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ, во второй m' бѣлыхъ и n' черныхъ, въ третьей m'' и n'' и т. д. Какъ велика вѣроятность, что, если вынуть по одному шару изъ каждо урны, всѣ появившіеся шары будутъ бѣлые?

Рѣшеніе.

Для рѣшенія этой задачи, согласно приведенному выше правилу, нужно вычислить вѣроятность выхода бѣлаго шара изъ каждой урны и полученныя вѣроятности перемножить. Такимъ образомъ, искомая вѣроятность получится равною произведенію:

$$\frac{m}{m+n} \times \frac{m}{m'+n'} \times \frac{m''}{m''+n''} \ldots$$

Покажемъ теперь, какъ вычисляется вѣроятность появленія нѣсколькихъ зависимыхъ событій. Начнемъ съ рѣшенія частной задачи.

Задача 77-я.

Изъ урны, содержащей m бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ, вынимаемъ по одному шару и каждый разъ вынутый шаръ откладываемъ въ сторону. Какъ велика вѣроятность выхода подъ-рядъ двухъ бѣлыхъ шаровъ?

Рѣшеніе.

Задача эта, какъ и вообще многія задачи на вычисленіе вѣроятностей, можетъ быть рѣшена непосредственнымъ вычисленіемъ какъ числа всѣхъ возможныхъ случаевъ, такъ и числа случаевъ, благопріятныхъ ожидаемому событію. Но такое непосредственное опредѣленіе для многихъ задачъ бываетъ въ высшей степени затруднительно. Число всѣхъ возможныхъ случаевъ при выниманіи двухъ шаровъ изъ урны равно числу размѣщеній (если обращаемъ вниманіе на порядокъ, въ которомъ появляются шары) изъ всѣхъ $m+n$ шаровъ по два, т. е. равно $(m+n)\ (m+n-1)$. Число случаевъ, благопріятныхъ выходу два раза подъ-рядъ двухъ бѣлыхъ шаровъ, равно числу размѣщеній изъ m бѣлыхъ шаровъ по два, т. е. равно $(m-1)$. Слѣдовательно, вѣроятность выхода два раза подъ-рядъ двухъ бѣлыхъ шаровъ равна

$$\frac{m\ (m-1)}{(m+n)\ (m+n-1)}.$$

Эта задача рѣшается также другимъ пріемомъ, который можетъ быть примѣненъ къ рѣшенію многихъ болѣе сложныхъ задачъ. *Просимъ читателей сосредоточить все вниманіе на этомъ способѣ рѣшенія.*

Когда мы вынемъ одинъ шаръ (бѣлый или черный) изъ урны, то второй шаръ придется вынимать изъ урны, содержащей $m-1$ бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ, или изъ урны, содержащей m бѣлыхъ и $n-1$ черныхъ шаровъ. Въ первомъ случаѣ вѣроятность выхода бѣлаго шара за вторымъ разомъ равна $\frac{m-1}{m+n-1}$; во второмъ случаѣ вѣроятность того же событія равна $\frac{m}{m+n-1}$. Такимъ образомъ, условія, при которыхъ совершается второй опытъ (выходъ второго шара), измѣняются въ зависимости отъ появленія бѣлаго или чернаго шара при первомъ опытѣ; поэтому измѣняется также и вѣроятность второго событія (выходъ бѣлаго шара за вторымъ разомъ).

Изъ приведенныхъ разсужденій легко заключить, что наша задача тождественна слѣдующей.

Задача. Даны три урны съ шарами; въ первой m бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ, во второй $m - 1$ бѣлыхъ и n черныхъ, въ третьей m бѣлыхъ и $n - 1$ черныхъ шаровъ. Вынимаемъ одинъ шаръ изъ первой урны и одинъ шаръ или изъ второй, или изъ третьей урны. При этомъ второй шаръ вынимаемъ изъ второй урны только въ томъ случаѣ, если изъ первой урны появится бѣлый шаръ; въ случаѣ же выхода чернаго шара изъ первой урны, второй шаръ вынимаемъ изъ третьей урны. Какъ велика вѣроятность, что при соблюденіи сказанныхъ условій появятся два бѣлыхъ шара?

Если мы желаемъ вычислить появленіе двухъ бѣлыхъ шаровъ, то на третью урну мы можемъ не обращать вниманія (ее отбросить), такъ какъ, сообразно условіямъ задачи, съ этой урной мы имѣемъ дѣло только тогда, когда изъ первой урны появляется черный шаръ. Отсюда заключаемъ, что послѣдняя задача равносильна слѣдующей.

Задача 78-я.

Изъ двухъ урнъ, содержащихъ первая m бѣлыхъ и n черныхъ, вторая $m - 1$ бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ, вынимаемъ по одному шару. Какъ велика вѣроятность появленія двухъ бѣлыхъ шаровъ?

Рѣшеніе.

При рѣшеніи этой послѣдней задачи мы имѣемъ дѣло съ независимыми событіями; поэтому искомая вѣроятность сложнаго событія равна произведенію вѣроятностей простыхъ событій:

$$\frac{m}{m+n} \times \frac{m-1}{m+n-1}.$$

Разсмотрѣнная нами задача можетъ быть обобщена слѣдующимъ образомъ.

Задача 79-я.

Предстоитъ произвесть одинъ за другимъ два опыта,—назовемъ ихъ чрезъ P и Q; при первомъ опытѣ можетъ появиться событіе A, при второмъ B. При первомъ опытѣ число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ m, изъ которыхъ n благопріятны появленію событія A. Условія второго опыта мѣняются въ зависимости отъ появленія или непоявленія событія A: если событіе A появилось, то при второмъ опытѣ число всѣхъ возможныхъ случаевъ равно m', а число случаевъ, благопріятныхъ событію B, равно n'; если же событіе A не появилось, то при второмъ опытѣ всѣхъ возможныхъ случаевъ будетъ m'', изъ которыхъ n'' благопріятны событію B. Какъ велика вѣроятность появленія двухъ событій A и B?

Рѣшеніе.

Вѣроятность перваго событія A равна $\frac{n}{m}$. Что касается вѣроятности второго событія B, то она равна $\frac{n'}{m'}$, если первое событіе появилось, или $\frac{n''}{m''}$, если событіе A не появилось.

Подобно тому какъ и въ прежней задачѣ, мы можемъ опытъ Q замѣнить двумя самостоятельными опытами R и S, при каждомъ изъ которыхъ можетъ появиться событіе B. При опытѣ R число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ равно m', а число случаевъ, благопріятныхъ событію B, равно n'; при опытѣ S соотвѣтственныя числа равны m'' и n''.

Опытъ P мы производимъ обязательно. Что касается остальныхъ двухъ опытовъ R и S, то изъ нихъ мы производимъ только одинъ, а именно—опытъ R, если событіе A появилось, въ противномъ случаѣ—опытъ S.

Но если мы желаемъ опредѣлить вѣроятность появленія двухъ событій, то на опытъ S мы можемъ не обращать вниманія, какъ бы его и вовсе не было, такъ какъ, по условію задачи, съ этимъ опытомъ мы только тогда имѣемъ дѣло, когда событіе A не появляется.

Итакъ, задача наша приводится къ опредѣленію вѣроятности появленія двухъ событій A и B при двухъ независимыхъ опытахъ P и R. Но въ такомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ двумя несависимыми событіями, и вѣроятность появленія такихъ событій, согласно данному раньше правилу, равна произведенію:

$$\frac{n}{m} \times \frac{n'}{m'}.$$

Это и будетъ отвѣтъ на нашу 79-ю задачу. Разсматривая полученный результатъ, мы замѣтимъ, что первый множитель $\frac{n}{m}$ есть вѣроятность перваго событія; второй множитель $\frac{n'}{m'}$ есть вѣроятность второго событія, вычисленнаго въ томъ предположеніи, что первое событіе A уже случилось. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему правилу:

Вѣроятность появленія двухъ зависимыхъ событій равна произведенію вѣроятности перваго событія на вѣроятность второго событія, вычисленную въ томъ предположеніи, что первое событіе уже случилось.

Пояснимъ это правило примѣромъ

Задача 80-я.

Даны двѣ урны съ шарами; въ одной n бѣлыхъ и $m-n$ черныхъ, въ другой n' бѣлыхъ и $m-n'$ черныхъ шаровъ. Вынимаемъ одинъ шаръ изъ первой урны, остальные же шары пересыпаемъ во вторую урну; послѣ этого, перемѣшавши шары, вынимаемъ одинъ шаръ изъ второй урны. Какъ велика вѣроятность появленія два раза подъ-рядъ двухъ бѣлыхъ шаровъ?

Вѣроятность перваго событія, выхода бѣлаго шара изъ первой урны, равна $\frac{n}{m}$. Предполагая, что первое событіе случилось и, какъ сказано въ задачѣ, остальные шары всыпаны во вторую урну, въ этой послѣдней будемъ имѣть всѣхъ $m + m' - 1$ шаровъ, въ томъ числѣ $n + n' - 1$ бѣлыхъ; вѣроятность выхода бѣлаго шара изъ такой урны равна $\frac{n + n' - 1}{m + m' - 1}$. Искомая вѣроятность сложнаго событія равна произведенію:

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{n + n' - 1}{m + m' - 1}.$$

Наше послѣднее правило можетъ быть обобщено на нѣсколько событій. Положимъ, намъ нужно вычислить вѣроятность появленія трехъ зависимыхъ событій: A, B и C. Если мы появленіе двухъ первыхъ событій A и B примемъ за одно (сложное) событіе и назовемъ его чрезъ D, то вопросъ приводится къ опредѣленію вѣроятности появленія двухъ зависимыхъ событій D и C. Эта вѣроятность равна произведенію двухъ множителей: $s \times r$, изъ которыхъ первый есть вѣроятность перваго событія D, а второй — вѣроятность второго событія C, вычисленная въ томъ предположеніи, что событіе D уже случилось. Въ свою очередь вѣроятность событія D, какъ вѣроятность сложнаго событія, состоящаго изъ двухъ зависимыхъ событій A и B, разлагается на произведеніе двухъ множителей, $s = p \times q$; первый изъ этихъ множителей есть вѣроятность событія A, второй—вѣроятность событія B, вычисленная въ томъ предположеніи, что событіе A уже появилось. Итакъ, вѣроятность появленія трехъ зависимыхъ событій равна

$$s \times r = p \times q \times r.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее общее правило:

Вѣроятность появленія нѣсколькихъ зависимыхъ событій равна произведенію нѣсколькихъ множителей, изъ которыхъ первый есть вѣроятность перваго событія, а каждый слѣдующій множитель выражаетъ вѣроятность слѣдующаго событія, вычисленную въ томъ предположеніи, что предъидущія событія уже появились.

Приложимъ это правило къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ.

Задача 81-я.

Изъ полной колоды картъ вынимаемъ три карты. Какъ велика вѣроятность, что всѣ вынутыя карты будутъ фигуры?

Рѣшеніе.

Въ полной колодѣ 40 простыхъ картъ и 12 фигуръ. Результатъ будетъ одинъ и тотъ же, вынимаемъ ли мы три карты разомъ, или одну за другою. Предположимъ, что мы вынимаемъ одну карту за другою и каждый разъ вынутую карту откладываемъ въ сторону; въ такомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ тремя зависимыми событіями. Вѣроятность выхода фигуры за первымъ разомъ равна $^{12}/_{52}$. Предположимъ, что одна фигура уже вынута: вѣроятность выхода второй фигуры равна $^{11}/_{51}$. Если мы предположимъ, что вынуты двѣ фигуры, то вѣроятность выхода третьей фигуры равна $^{10}/_{50}$. Искомая вѣроятность появленія трехъ фигуръ получится перемноженіемъ найденныхъ вѣроятностей:

$$\frac{12}{52} \times \frac{11}{51} \times \frac{10}{50} = \frac{11}{1105}.$$

Задача 82-я.

Изъ урны, содержащей a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ, вынимаемъ по одному шару (каждый разъ вынутый шаръ откладываемъ въ сторону) до тѣхъ поръ, пока появится бѣлый шаръ. Какъ велика вѣроятность, что бѣлый шаръ появится за n-ымъ разомъ?

Рѣшеніе.

Мы ищемъ вѣроятность выхода $n-1$ черныхъ шаровъ и одного бѣлаго шара. Здѣсь мы имѣемъ дѣло съ n зависимыми событіями. Вѣроятность выхода чернаго шара за первымъ разомъ равна $\frac{b}{a+b}$. Предположимъ, что черный шаръ появился за первымъ разомъ: вѣроятность выхода чернаго шара за вторымъ разомъ равна $\frac{b-1}{a+b-1}$. Точно также вѣроятность выхода чернаго шара за третьимъ разомъ равна $\frac{b-2}{a+b-2}$ и т. д. Вѣроятность выхода чернаго шара за n—1 разомъ, предполагая, что прежде появившіеся шары—черные, равна $\frac{b-n+2}{a+b-n+2}$. Если предположить, что вынуты n—1 черныхъ шаровъ, вѣроятность выхода бѣлаго шара за n-мъ разомъ равна $\frac{a}{a+b-n+1}$. Искомая вѣроятность сложнаго событія получится перемноженіемъ найденныхъ вѣроятностей:

$$\frac{b\ (b-1)\ (b-2)\ .\ .\ .\ (b-n+2)\ a}{(a+b)\ (a+b-1)\ (a+b-2)\ .\ .\ .\ (a+b-n+1)}\,.$$

Подъ эту общую формулу не подходитъ только вѣроятность выхода бѣлаго шара за первымъ разомъ (такъ какъ здѣсь идетъ рѣчь о простомъ событіи), которая равна $\frac{a}{a+b}$. Въ частномъ случаѣ вѣроятности выхода бѣлаго шара за вторымъ, за третьимъ и т. д. разомъ выражаются дробями:

$$\frac{ba}{(a+b)(a+b-1)},\ \frac{b\ (b-1)\ a}{(a+b)\ (a+b-1)(a+b-2)},\ .\ .$$

Изъ послѣдней задачи можно вывести одно интересное слѣдствіе. При нашемъ опытѣ бѣлый шаръ можетъ появиться или за первымъ, или за вторымъ, или за третьимъ разомъ и т. д.; другихъ событій не можетъ быть, такъ какъ бѣлый шаръ долженъ непремѣнно появиться. На страницѣ 253 настоящей книги было показано, что сумма вѣроятностей всѣхъ событій, могущихъ появиться при какомъ-нибудь опытѣ, равна единицѣ. Примѣнимъ это правило къ нашему опыту. Сложивъ вѣроятности выхода бѣлаго шара за первымъ, вторымъ, третьимъ и т. д. разомъ, мы должны получить въ суммѣ единицу:

$$1=\frac{a}{a+b}+\frac{ba}{(a+b)\ (a+b-1)}+$$
$$+\frac{b(b-1)a}{(a+b)\ (a+b-1)\ (a+b-2)}+\ .\ .\ .$$

Раздѣливъ обѣ части на a, получимъ слѣдующее тождество:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+b}+\frac{b}{(a+b)(a+b-1)}+$$
$$+\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}+\ldots$$

Легко повѣрить это тождество на частныхъ примѣрахъ; можно дать также независимое доказательство (и обобщить на тотъ случай, когда a и b не суть цѣлыя числа), что мы предоставляемъ самимъ читателямъ.

Примѣчаніе. Легко видѣть, что послѣднее общее правило одинаково приложимо къ вычисленію вѣроятности появленія какъ зависимыхъ, такъ и независимыхъ событій; поэтому имъ можно пользоваться во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда имѣемъ дѣло съ вычисленіемъ вѣроятности сложнаго событія.

Математическое ожиданіе

Вопросъ объ *участи*, ожидающей игроковъ при тѣхъ или иныхъ условіяхъ игры, и связанные съ этимъ вопросы о такъ называемой *безобидности* игры были первыми, которыми занимались творцы теоріи вѣроятностей. При разработкѣ этихъ вопросовъ пришлось тотчасъ внести новое понятіе, опредѣляемое словами *математическое ожиданіе*.

Математическое ожиданіе того, кто имѣетъ вѣроятность p получить сумму s, измѣряется произведеніемъ $p \cdot s$.

Если эта ожидаемая сумма заранѣе извѣстна, то опредѣленіе математическаго ожиданія сводится, въ сущности, къ отысканію вѣроятности. Не то бываетъ, когда условія игры, или предпріятія, допускаютъ возможность какъ выигрыша, такъ и проигрыша нѣсколькихъ различныхъ суммъ, смотря по тѣмъ или инымъ случайнымъ обстоятельствомъ. Если же событія, вѣроятности которыхъ соотвѣтственно суть $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, даютъ право на осуществленіе различныхъ суммъ соотвѣтственныхъ прибылей или убытковъ s_1, s_2, s_3, ... s_n, то математическое ожиданіе опредѣляется, какъ сумма произведеній

$$p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 + \ldots + p_n s_n.$$

Отсюда видно, что математическое ожиданіе дѣлается извѣстнымъ, если вычислить всѣ различные возможные случаи. Но иногда удобнѣе искать его непосредственно, не вычисляя всѣхъ составляющихъ его членовъ.

Для примѣра рѣшимъ задачу о математическомъ ожиданіи выигрыша для владѣльца одного билета благотворительной (въ пользу голодающихъ) правительственной лотереи, устроенной въ 1891 году.

Задача 83-я.

Математическое ожиданіе выигрыша въ лотерею.

Выпущено 1 200 000 билетовъ съ 2 928 выигрышами, размѣры которыхъ опредѣлены слѣдующимъ образомъ:

1	выигрышъ	въ	100 000	руб.;
1	»	»	50 000	»
1	»	»	25 000	»
10	выигрышей	»	10 000	»
15	»	»	5 000	»
100	»	»	1 000	»
200	»	»	500	»
2600	»	»	250	»

Опредѣлить математическое ожиданіе выигрыша для владѣльца одного билета.

Рѣшеніе.

Величина выигрыша владѣльца одного билета разсматриваемой лотереи могла имѣть значенія 100 000 р., 50 000 р., 25 000 р., 10 000 р., 5 000 р., 1 000 р., 500 р., 250 р. и 0, а вѣроятность событій, при коихъ величина выигрыша получала указанныя значенія, на основаніи приведеннаго выше распредѣленія выигрышныхъ суммъ, опредѣлится слѣдующими дробями:

$$\frac{1}{1\,200\,000}, \quad \frac{1}{1\,200\,000}, \quad \frac{1}{1\,200\,000}, \quad \frac{10}{1\,200\,000},$$

$$\frac{15}{1\,200\,000}, \frac{100}{1\,200\,000}, \frac{200}{1\,200\,000}, \frac{2\,600}{1\,200\,000},$$

$$\frac{1\,200\,000-2\,928}{1\,200\,000}=\frac{1\,197\,072}{1\,200\,000}.$$

Умножая каждую вѣроятность на сотвѣтствующую сумму и складывая все, найдемъ, что математическое ожиданіе выигрыша было, слѣдовательно, равно

$$\frac{100\,000}{1\,200\,000}+\frac{50\,000}{1\,200\,000}+\frac{25\,000}{1\,200\,000}+\frac{10\cdot 10\,000}{1\,200\,000}+$$
$$+\frac{15\cdot 5\,000}{1\,200\,000}+\frac{100\cdot 1\,000}{1\,200\,000}+\frac{200\cdot 500}{1\,200\,000}+\frac{250\cdot 2\,600}{1\,200\,000}+$$
$$+0.\ \frac{1\,197\,072}{1\,200\,000}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{12}+$$
$$+\frac{1}{12}+\frac{13}{24}=1.$$

Условіе безобидности игръ.

Возьмемъ какую-либо игру, состоящую изъ ряда партій, изъ которыхъ каждая кончается выигрышемъ или проигрышемъ одного изъ двухъ игроковъ.

Предположимъ, для общности разсужденія, что математическое ожиданіе выигрыша или проигрыша для игрока измѣняется отъ одной партіи къ другой. Допустимъ также при этомъ, что математическое ожиданіе выигрыша (или проигрыша) не можетъ быть величиной безконечно малой, т.-е. оно остается все время не меньше нѣкоторой конечной величины, отличной отъ нуля. Съ другой стороны, допустимъ, что математическое ожиданіе квадрата выигрыша не можетъ быть безконечно большимъ. При этихъ условіяхъ можно доказать, что

Если математическое ожиданіе выигрыша для одного изъ игроковъ есть величина положительная, то съ вѣроятностью, сколько угодно близкой къ достовѣрности, можно разсчитывать, что при достаточно большомъ числѣ партій выигрышъ его превзойдетъ всякую напередъ заданную величину.

На этой теоремѣ, доказательство которой читатель можетъ найти въ соотвѣтствующихъ курсахъ (см., напр., С. К. Савичъ «Элементарная теорія страхованія» и др.), основывается понятіе о безобидности игръ. Пусть два лица A и B предприняли нѣкоторую игру, состоящую изъ ряда отдѣльныхъ партій, изъ которыхъ каждая кончается выигрышемъ или проигрышемъ одного изъ нихъ. Составимъ математическое ожиданіе выигрыша игрока A. Если эта величина окажется положительной, то на основаніи предшествующей теоремы можно съ вѣроятностью, какъ угодно близкой къ достовѣрности (къ единицѣ), разсчитывать, что при достаточно большомъ числѣ партій выигрышъ A превзойдетъ всякую величину, напередъ заданную.

Если, наоборотъ, математическое ожиданіе выигрыша для игрока A окажется отрицательнымъ, то математическое ожиданіе выигрыша для игрока B будетъ положительно, и при достаточно большомъ числѣ партій можно съ достовѣрностью разсчитывать, что выигрышъ B будетъ столь великъ, сколь угодно. На этомъ основаніи *безобидными играми называются такія игры, въ которыхъ математическое ожиданіе выигрыша для каждаго игрока есть нуль.*

Понятіе о безобидности примѣняется не только къ собственно азартнымъ играмъ, но и вообще ко всякаго рода операціямъ, гдѣ уплата различныхъ суммъ или полученіе ихъ обусловлены наступленіемъ нѣкоторыхъ событій случайнаго характера; такъ, напр., понятіе о безобидности игръ примѣняется къ страховымъ операціямъ, гдѣ уплаты обѣихъ сторонъ—страховщика и страхователя—обусловлены наступленіемъ различныхъ событій, связанныхъ съ жизнью человѣка.

Задача 84-я.

Въ мѣшкѣ находится 10 бѣлыхъ и 15 черныхъ шаровъ. Опредѣлить вѣроятность, что, взявъ заразъ оттуда 5 шаровъ, мы вытащимъ 2 бѣлыхъ и 3 черныхъ.

Рѣшеніе.

Всего въ мѣшкѣ 25 шаровъ. Если берется сразу 5 шаровъ, то число *всѣхъ* равновозможныхъ и несомнѣнныхъ случаевъ равно, очевидно, числу сочетаній изъ 25 элементовъ по 5, т. е.

$$C_{25}^{5}=\frac{25.24.23.22.21}{1.2.3.4.5}.$$

Число всѣхъ равновозможныхъ и несовмѣстимыхъ случаевъ, благопріятствующихъ появленію 2-хъ бѣлыхъ шаровъ, есть

$$C_{10}^{2}=\frac{10.9}{1.2},$$

а число такихъ же случаевъ, благопріятныхъ появленію 3-хъ черныхъ, есть

$$C_{15}^{3}=\frac{15.14.13}{1.2.3}.$$

Эти послѣдніе могутъ комбинироваться каждое съ каждымъ, т. е. числителемъ дроби, выражающей искомую вѣроятность ожидаемаго событія, надо взять произведеніе $C_{10}^{2}\cdot C_{15}^{3}$. Знаменателемъ же искомой дроби будетъ C_{25}^{5}. Итакъ, для искомой вѣроятности имѣемъ

$$\frac{C_{10}^{2}\cdot C_{15}^{3}}{C_{25}^{5}}=\frac{\dfrac{10.9.15.14.13}{1.2.1.2.3}}{\dfrac{25.24.23.22.21}{1.2.3.4.5}}$$

$$=\frac{10.9.15.14.13.1.2.3.4.5}{1.2.1.2.3.25.24.23.22.21}=\frac{195}{506}.$$

Общій случай. *Вообще, если въ мѣшкѣ находится* p *бѣлыхъ и* q *черныхъ шаровъ, то вѣроятность вытянуть за одинъ разъ* a *бѣлыхъ и* b *черныхъ шаровъ равна дроби*

$$\frac{C_{p}^{a}\,C_{q}^{b}}{C_{p+q}^{a+b}}.$$

Задача 85-я.

Генуэзская лотерея.

Эта лотерея, до сихъ поръ процвѣтающая въ Италіи, въ прежнее время имѣла также обширное распространеніе во Франціи и во многихъ областяхъ Германіи. Она состоитъ изъ 90 нумеровъ, и при каждомъ ея розыгрышѣ выходитъ по 5 нумеровъ. По условію лотереи. можно ставить ту или иную сумму на любой изъ 90 нумеровъ, или на любую совокупность двухъ, трехъ, четырехъ и наконецъ 5-ти нумеровъ, что соотвѣтственно называется: *простая одиночка*, *амбо*, *тернъ*, *кватернъ* и *квинъ*.

Если въ числѣ вышедшихъ нумеровъ находится совокупность тѣхъ, на которые игрокъ ставилъ сумму, то администрація лотереи выдавала этому игроку условленную сумму, находящуюся въ опредѣленномъ отношеніи къ величинѣ ставки. Это отношеніе равно:

для	простой одиночки	15
»	амбо	270
»	терна	5 500
»	кватерна	75 000
»	квина	1 000 000

Послѣ этихъ предварительныхъ поясненій задачу о Генуэзской лотереѣ мы можемъ формулировать такъ:

Въ сосудѣ содержится 90 билетовъ съ нумерами 1, 2, 3, 4,……, 89, 90. Вынимаютъ сразу или послѣдовательно 5 билетовъ, при чемъ, въ случаѣ послѣдовательнаго изъятія, ни одинъ изъ вынутыхъ билетовъ не возвращаютъ обратно въ сосудъ и новыхъ туда также не подкладываютъ. Опредѣлить вѣроятность выигрыша на заранѣе выбранныя: простую одиночку, на амбо, тернъ, кватернъ и, наконецъ, на квинъ.

Рѣшеніе.

Читатель, рѣшившій общій случай предыдущей задачи, тотчасъ сообразитъ, что настоящая задача есть частный случай ея.

Число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ въ задачѣ равно, очевидно, числу сочетаній изъ 90 элементовъ по пяти, т. е.

$$C_{90}^{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Теперь остается только опредѣлить число случаевъ, благопріятныхъ соотвѣтственно появленію напередъ указанныхъ простыхъ одиночекъ или амбо, или терна, или квартерна, или квина.

1) Для случая простой напередъ взятой одиночки задача сводится къ такой: въ сосудѣ находится 1 бѣлый и 89 черныхъ шаровъ. Вытаскивается сразу 5 шаровъ. Какова вѣроятность, что при этомъ окажется одинъ бѣлый и 4 черныхъ шара? Число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, какъ знаемъ, равно C_{90}^{5}. Число такихъ же случаевъ, благопріятныхъ появленію 1 бѣлаго и 4 черныхъ шаровъ, будетъ, по предыдущей задачѣ, $C_{89}^{4} \cdot C_{1}^{1}$, или просто C_{89}^{4}, такъ какъ $C_{1}^{1} = 1$.

2) Для амбо наша задача обращается въ такую: въ сосудѣ 2 бѣлыхъ и 88 черныхъ шаровъ; опредѣлить вѣроятность, что, взявъ сразу 5 шаровъ, мы вытянемъ эти 2 бѣлыхъ шара и 3 черныхъ.

Число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ есть C_{90}^{5}. Число же благопріятныхъ появленію событія равновозможныхъ случаевъ есть, по предыдущему, $C_{88}^{3} \cdot C_{2}^{2}$, или просто C_{88}^{3}, такъ какъ $C_{2}^{2} = 1$. Итакъ, вѣроятность полученія напередъ взятаго амбо выражается дробью

$$\frac{C_{88}^{3}}{C_{90}^{5}}.$$

Подобнымъ же образомъ для математической вѣроятности тернъ, кватернъ и квинъ найдемъ соотвѣтственно дроби:

$$\frac{C_{87}^{2}}{C_{90}^{5}}, \quad \frac{C_{86}^{1}}{C_{90}^{5}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{C_{90}^{5}}.$$

Вычисляя на самомъ дѣлѣ, получаемъ, что вѣроятность появленія напередъ взятой простой одиночки ровна:

$$\frac{C_{89}^{4}}{C_{90}^{5}}=\frac{89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{1}{18};$$

амбо:

$$\frac{C_{88}^{3}}{C_{90}^{5}}=\frac{88\cdot 87\cdot 86\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{2}{801};$$

тернъ:

$$\frac{C_{87}^{2}}{C_{90}^{5}}=\frac{87\cdot 86\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{1}{11\,748};$$

кватернъ:

$$\frac{C_{86}^{1}}{C_{90}^{5}}=\frac{86\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{1}{511\,038};$$

квинъ:

$$\frac{1}{C_{90}^{5}}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{1}{43\,949\,268}.$$

Допустимъ далѣе, что ставка игрока въ эту лотерею равна M; тогда математическое ожиданіе его прибыли отъ участія въ лотереѣ соотвѣтственно выражается числами (см. выше: условія лотереи и выдача администраціи):

въ случаѣ простой одиночки . . . . $\left(\frac{15}{18}-1\right)M=-\frac{1}{6}M$

» » амбо . . . . $\left(\frac{270\cdot 2}{801}-1\right)M=-\frac{29}{89}M$

» » терна . . . . $\left(\frac{5\,500}{11\,748}-1\right)M=-\frac{1\,562}{2\,937}M$

и т. д.

Математическое ожиданіе выражается отрицательнымъ числомъ. Значитъ, эта лотерея представляетъ не безобидную для публики игру. Она приноситъ пользу только ея устроителямъ.

Рулетка въ Монте-Карло [1]).

Хорошій примѣръ, поясняющій изложенныя выше соображенія о математической безобидности игръ, даетъ анализъ азартной игры, называемой *рулеткой*.

Запрещенная для производства въ общественныхъ мѣстахъ почти во всѣхъ государствахъ, эта азартная игра пріютилась въ маленькомъ государствѣ, княжествѣ Монако, расположенномъ въ красивой мѣстности на югѣ Франціи, на берегу Средиземнаго моря.

На высокой горѣ Monte Carlo (Монтекарло), спускающейся обрывомъ къ морю, среди садовъ субтропической растительности находится дворецъ, такъ называемое «казино», въ которомъ происходитъ азартная игра.

Этотъ роскошный игорный притонъ принадлежитъ акціонерной компаніи, платящей громадную милліонную аренду князю Монако.

Въ громадныхъ, богатоукрашенныхъ залахъ казино на большихъ столахъ, расположенныхъ на значительномъ разстояніи другъ отъ друга, производятся съ утра до ночи, цѣлый годъ безъ перерыва, двѣ азартныя игры: *рулетка* и *trente-et-quarante* (тридцать и сорокъ). Болѣе 20 столовъ предназначено для рулетки и столько же для trente-et-quarante.

Около каждаго стола толпится большое число играющихъ. Рулетка игра болѣе дешевая, такъ какъ наименьшую ставку составляетъ большая серебряная пятифранковая монета. Позволяется ставить только суммы, кратныя пяти франкамъ. Наименьшей ставкой игры trente-et-quarante является уже золотая монета въ 20 франковъ.

Мы ограничимся лишь анализомъ игры рулетки. На срединѣ стола (фиг. 103) находится такъ называемая рулетка (*C*). Эта рулетка представляетъ собою большую круглую неглубокую деревянную чашку, на днѣ которой вращается горизонтальный кругъ C, раздѣленный радіусами на 37 секто-

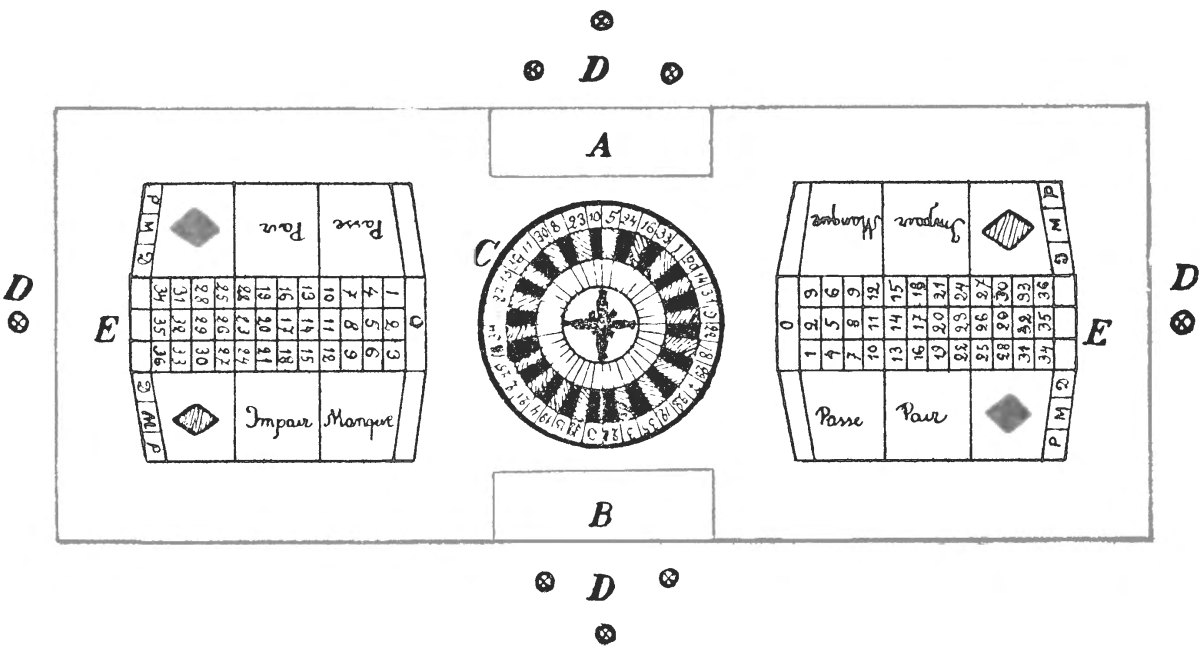
---

[1]) Изъ книги проф. Д. Граве «*Энциклопедія Математики*». Кіевъ. 1912 г.

ровъ; секторы окрашены попеременно въ черный и красный (на нашемъ чертежѣ заштриховано) цвѣта. По краямъ круга размѣщены въ нѣкоторомъ, весьма тонко обдуманномъ, безпорядкѣ всѣ числа отъ 0 до 36, такъ что каждому сектору соотвѣтствуетъ одно число.

Около каждаго стола находится восемь служащихъ при рулеткѣ, такъ называемыхъ *croupier*; мѣста, которыя они занимаютъ около стола, обозначены буквой *D* на чертежѣ.

По обѣимъ сторонамъ стола открываются ящики *A* и *B*, представляющіе кассу банка. Каждый день утромъ въ каждый столъ вкладывается 200 000 франковъ.



Фиг. 103.

Для ставокъ играющихъ на зеленомъ сукнѣ, покрывающемъ столъ, нарисованы желтой краской фигуры E вида, указаннаго на чертежѣ.

Въ началѣ каждой игры одинъ изъ крупье, выкрикнувъ: «Messieus, faites vos jeux» (господа, дѣлайте ваши ставки) приводитъ горизонтальный кругъ съ секторами во вращеніе и въ тотъ же моментъ въ противоположномъ направленіи бросаетъ въ чашку маленькій шарикъ слоновой кости. Скоро кругъ и шарикъ останавливаются въ своемъ движеніи, при чемъ шарикъ оказывается попавшимъ на одно изъ чиселъ, расположенныхъ по краю круга. Это число считается выигравшимъ, т. е. тотъ, кто поставилъ свою монету на это число, выигрываетъ. Ставки, поставленныя на остальныя числа, банкъ беретъ себѣ, какъ проигранныя.

Если не считать нуля (zero), то половина всѣхъ 36 нумеровъ соотвѣтствуетъ «*чернымъ*» (noir) секторамъ, половина же «*краснымъ*» (rouge); половина нумеровъ состоитъ изъ «*четныхъ*» (pair) чиселъ, половина изъ «*нечетныхъ*» (impair); половина изъ «*нижнихъ*» (manque) нумеровъ, т. е. отъ 1 до 18, половина изъ «*верхнихъ*» (passe), т. е. отъ 19 до 36.

Поэтому, если выигрываетъ, напримѣръ, нумеръ 34, то крупье выкрикиваетъ такъ: «34, rouge, paire et passe».

Можно ставить монету на одинъ только нумеръ; можно ставить на нѣсколько сосѣднихъ нумеровъ: на два, три, четыре и шесть.

Ставка на группу нумеровъ обозначаетъ, что ставящій получаетъ выигрышъ при паденіи шарика на *одно* изъ чиселъ этой группы.

Очевидно, что чѣмъ на большее число нумеровъ монета поставлена, тѣмъ вѣроятность выигрыша больше.

Такъ, напримѣръ, на краю фигуры существуютъ клѣтки, обозначенныя

$$P_{12}, M_{12}, D_{12};$$

P_{12} обозначаетъ *première douzaine*» (первая дюжина), т. е. числа отъ 1 до 12; M_{12} обозначаетъ «*douze milieu*» (средняя дюжина), отъ 13 до 24; D_{12} обозначаетъ «*dernière douzaine*» (послѣдняя дюжина), отъ 25 до 36.

Подъ каждой изъ вертикальныхъ колоннъ нумеровъ находятся пустыя клѣтки, соотвѣтствующія числамъ этой колонны.

Самая большая вѣроятность выигрыша соотвѣтствуетъ такъ называемымъ «*chances simples*» (простымъ шансамъ), когда монета ставится на 18 нумеровъ. Тутъ возможны шесть комбинацій: 1) черный, 2) красный, 3) четъ, 4) нечетъ, 5) passe, 6) manque.

Для этихъ комбинацій имѣются по бокамъ большія клѣтки, ибо публика болѣе охотно ставитъ на эти комбинаціи вслѣдствіе наибольшей вѣроятности выигрыша.

Правила игры таковы, что въ случаѣ выигрыша кромѣ ставки, поставленной игрокомъ на извѣстную комбинацію, банкъ приплачиваетъ этому игроку отъ себя, какъ выигрышъ, нѣкоторую кратность ставки по слѣдующей таблицѣ.

Число нумеровъ, на которые поставлена ставка a:	Выигрышъ:
1	$35\,a$
2	$17\,a$
3	$11\,a$
4	$8\,a$
6	$5\,a$
12	$2\,a$
18	a

Легко убѣдиться, что такой расчетъ выигрышей дѣлаетъ рулетку игрой *обидной въ пользу банка и противъ всѣхъ остальныхъ игроковъ.*

Если бы не было нумера «*нуль*», то игра при вышеприведенномъ расчетѣ выигрышей была бы безобидна.

Примемъ ставку за единицу и вычислимъ математическое ожиданіе выгоды банка на каждой ставкѣ игрока. Пусть ставка поставлена на одинъ нумеръ, напримѣръ 31; очевидно, что банкъ выигрываетъ 1, когда выходитъ одинъ изъ 36 нумеровъ, 0, 1, 2, ... 30, 32, ... 36, вѣроятность чего будетъ $\frac{36}{37}$. Значитъ, математическое ожиданіе выигрыша банка будетъ $1\cdot\frac{36}{37}=\frac{36}{37}$. Банкъ проигрываетъ 35 при выходѣ нумера 31, вѣроятность чего есть $\frac{1}{37}$; значитъ математическое ожиданіе проигрыша будетъ $\frac{35}{37}$. Получится въ общемъ $\frac{36}{37}-\frac{35}{37}=\frac{1}{37}$, т. е. *положительное* математическое ожиданіе.

Ясно, что математическое ожиданіе игрока, поставившаго на одинъ нумеръ, будетъ *отрицательнымъ* числомъ $-\frac{1}{37}$, такъ какъ выигрышъ банка есть проигрышъ игрока и обратно.

При ставкѣ на два нумера математическое ожиданіе выигрыша банка будетъ $\frac{35}{37}$, а проигрыша $17 \cdot \frac{2}{37}$, и математическое ожиданіе банка опять выразится тѣмъ же числомъ $\frac{35}{37} - 17 \cdot \frac{2}{37} = \frac{1}{37}$

Вообще, получается математическое ожиданіе $\frac{1}{37}$ при всѣхъ комбинаціяхъ, за исключеніемъ простыхъ шансовъ, такъ какъ при простыхъ шансахъ существуетъ одно добавочное правило игры, уменьшающее на половину математическое ожиданіе банка.

Указанное добавочное правило состоитъ въ слѣдующемъ. Пусть ставка a поставлена на красный цвѣтъ. Если выходитъ «*нуль*», то ставка остается подъ арестомъ (en prison) до слѣдующаго удара, при чемъ при выходѣ краснаго цвѣта ставка возвращается игроку и забирается банкомъ при выходѣ чернаго цвѣта. При вторичномъ выходѣ *нуля* ставка остается подъ арестомъ до слѣдующаго удара и т. д.

Итакъ, пусть ставка 1 поставлена на красный цвѣтъ, тогда банкъ проигрываетъ 1 при выходѣ краснаго цвѣта, что даетъ математическое ожиданіе $-\frac{18}{37}$.

Банкъ выигрываетъ или на первомъ ударѣ, если выйдетъ черный цвѣтъ, вѣроятность чего равна $\frac{18}{37}$, или на второмъ ударѣ, вѣроятность чего $\left(\frac{1}{37} \cdot \frac{18}{37}\right)$ равна произведенію вѣроятности $\frac{1}{37}$ выхода нуля на первомъ ударѣ на вѣроятность $\frac{18}{37}$ выхода чернаго цвѣта на второмъ ударѣ.

Если банкъ выигрываетъ на третьемъ ударѣ послѣ друкратнаго появленія нуля, то вѣроятность этого выигрыша будетъ $\frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{18}{37}$.

Вообще говоря, вѣроятность банку выиграть ставку на нѣкоторомъ ударѣ выразится рядомъ

$$\frac{18}{37} + \frac{18}{37^2} + \frac{18}{37^3} + \frac{18}{37^4} + \cdots = \frac{18}{37} \frac{1}{1 - \frac{1}{37}} = \frac{1}{2}.$$

Итакъ, общее математическое ожиданіе выгоды банка на простомъ шансѣ будетъ

$$\frac{1}{2}-\frac{18}{37}=\frac{1}{2\cdot 37}.$$

На этомъ обстоятельствѣ основано новое правило игры, позволяющее игроку, поставившему на простой шансъ, взять при выходѣ *нуля* назадъ половину ставки, не дожидаясь слѣдующаго удара.

Существуетъ еще одно весьма важное правило игры, состоящее въ установленіи предѣла для ставокъ (mise maximum). Это правило характеризуется тѣмъ, что банкъ не выдаетъ болѣе 6000 франковъ отдѣльному игроку на его ставку. Отсюда вытекаетъ, что нельзя ставить болѣе 6000 на простой шансъ, нельзя ставить болѣе $3000=\frac{6000}{2}$ на дюжину, болѣе $1200=$ $=\frac{6000}{5}$ на шесть нумеровъ и т. д.

Этимъ правиломъ банкъ обезпечиваетъ себя отъ такъ называемой *системной* игры.

Представимъ себѣ очень богатаго человѣка, который будетъ играть такъ: поставитъ монету 5 франковъ на простой шансъ, если проиграетъ, то поставитъ *удвоенную* ставку 10 фр. на этотъ же шансъ, если проиграетъ, то поставитъ *учетверенную* ставку 20 фр. на тотъ же шансъ и далѣе будетъ удваивать ставку на тотъ же шансъ; тогда, какъ легко замѣтить, при первомъ выигрышѣ онъ возвращаетъ назадъ всѣ раньше проигранныя ставки и кромѣ того остается въ *выигрышѣ одной монеты 5 фр.* Откладываетъ выигранную монету въ карманъ, и начинаетъ снова игру съ удвоеніемъ ставокъ. Такъ какъ очевидно, что простой шансъ, напримѣръ красный цвѣтъ, долженъ когда нибудь появиться, то такимъ образомъ получается какъ бы вѣрный способъ остаться въ выигрышѣ.

Существованіе предѣла для ставокъ дѣлаетъ такую системную игру очень рискованной.

Въ самомъ дѣлѣ, игрокъ не можетъ поставить заразъ болѣе 1 200 монетъ, слѣдовательно, если онъ начинаетъ удваивать ставки, то его ставки будутъ

$$(1) \qquad 1_м,\ 2_м,\ 4_м,\ 8_м,\ 16_м,\ 32_м,\ 64_м,\ 128_м,\ 256_м,\ 512_м,\ 1024_м,$$

и больше удваивать онъ не имѣетъ права, такъ что если всѣ 11 его ставокъ биты, то въ погонѣ за выигрышемъ *одной* монеты онъ проигрываетъ 2047 монетъ [сумма чиселъ (1)].

Наблюденіе показываетъ (ведутся подробные журналы выходящихъ нумеровъ, охотно покупаемые игроками), что очень часто случается, что какой нибудь простой шансъ не выходитъ подъ-рядъ 15—20 разъ, а потому вѣроятность неудачи системной игры значительна.

Несмотря на рискъ подобной системной игры, часто отдѣльные игроки съ успѣхомъ ее примѣняютъ. По словамъ одного изъ крупье, пришлось бы закрыть рулетку, если бы вся публика играла по указанной системѣ.

Указанная нами игра съ удвоеніемъ ставокъ на одинъ и тотъ же шансъ носитъ названіе *poursuivre la chance* (преслѣдованіе шанса).

Подъ названіемъ *poursuivre le gagnant* (преслѣдованіе выигравшаго шанса) разумѣется та же игра съ удвоеніемъ ставокъ, когда игрокъ ставитъ на цвѣтъ, только что передъ тѣмъ выигравшій. Тутъ игрокъ ожидаетъ повторенія одного цвѣта два раза подъ-рядъ.

Весь вышеприведенный анализъ показываетъ, что рулетка есть игра обидная въ пользу банка. Милліоны, выручаемые рулеткой, являются фактическимъ подтвержденіемъ нашей теоріи, что игрокъ съ положительнымъ математическимъ ожиданіемъ можетъ выиграть при большомъ числѣ игръ сколь угодно много.

Итакъ, колоссальные доходы отъ рулетки основаны на математической организаціи самой игры. Во всемъ остальномъ дѣло поставлено вполнѣ корректно, и всѣ служащіе рулетки проявляютъ полную предупредительность къ публикѣ.

При организаціи игры, очевидно, участвовали серьезные математики, которые обезпечили банку всѣ выгоды и въ полной мѣрѣ обезопасили его отъ риска, а потому представляются возмутительнымъ шарлатанствомъ всѣ совѣты относительно способовъ вѣрнаго выигрыша.

Изъ всего вышеизложеннаго вытекаетъ совѣтъ каждому отдѣльному лицу *не играть въ рулетку.*

Если человѣкъ желаетъ все-таки играть, то *не слѣдуетъ играть долго*, такъ какъ, чѣмъ дольше человѣкъ играетъ, тѣмъ больше проявляется выгода банка.

Безнравственная сторона дѣла состоитъ во вліяніи рулетки на неуравновѣшенную психическую сторону игрока.

Груды золота и блестящая обстановка, въ которой совершается игра, пробуждаютъ корыстолюбіе, и очень часто люди, желая выиграть очень много, не могутъ во-время остановиться и проигрываютъ послѣднія деньги.

Въ заключеніе замѣтимъ, что журналы, печатающіе выходящіе въ рулеткѣ на разныхъ столахъ нумера, конечно, не приносятъ никакой пользы охотно изучающимъ ихъ игрокамъ, но для лица, знакомаго съ теоріей вѣроятностей, эти журналы интересны съ чисто теоретической стороны. Такъ, напримѣръ, подтверждается законъ большихъ чиселъ (См. далѣе). Красный и черный цвѣта появляются при большомъ числѣ наблюденій приблизительно въ одинаковомъ количествѣ. Но за все время существованія рулетки былъ одинъ случай, когда на одномъ столѣ въ продолженіе двухъ мѣсяцевъ одинъ цвѣтъ выходилъ въ количествѣ вдвое большемъ, чѣмъ другой. Такое явленіе ничего невозможнаго не представляетъ. Его малая вѣроятность имѣла слѣдствіемъ то, что оно случилось только одинъ разъ за всю практику рулетки. Было бы ошибочнымъ думать, что дальнѣйшее продолженіе игры должно сопровождаться компенсирующимъ болѣе частымъ появленіемъ другого цвѣта. Такое предположеніе противорѣчило бы случайности и независимости выхода того или другого нумера.

JACOBI BERNOULLI,

Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruſſ. Sodal.

MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS

DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè ſcripta

DE LUDO PILÆ RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

Теорема Якова Бернулли.

Въ 1713 году въ Базелѣ появилось посмертное сочиненіе знаменитаго математика Якова Бернулли подъ заглавіемъ «*Ars Conjectandi*» («Искусство предположеній»), снимокъ съ заглавнаго листа котораго данъ на предыдущей страницѣ. Сочиненіе это можно считать краеугольнымъ камнемъ, на которомъ мало-по-малу было воздвигнуто все современное зданіе Теоріи Вѣроятностей. Въ четвертой части этой книги формулирована и доказана знаменитая теорема Я. Бернулли, положившая начало такъ называемому *закону большихъ чиселъ*, играющему въ современномъ естествознаніи огромную роль. Теорема излагается (элементарно) въ IV и V главахъ 4-ой части книги Я. Бернулли. Мы приводимъ эти главы въ переводѣ приватъ-доцента Я. В. Успенскаго, сдѣланномъ подъ редакціей академика А. А. Маркова и изданномъ нашей Академіей Наукъ въ ознаменованіе 200-лѣтія (въ 1913 г.) со времени появленія «*Ars Conjectandi*» въ свѣтъ. Я. В. Успенскимъ переведена вся четвертая часть книги, и она имѣется въ отдѣльной продажѣ подъ заглавіемъ «Часть четвертая сочиненія Якова Бернулли «*Ars Conjectandi*» (цѣна 45 коп.).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

О двоякомъ способѣ опредѣленія числа случаевъ. Что слѣдуетъ думать о томъ способѣ, который опирается на опытъ. Особенная задача, представляющаяся по этому поводу. И проч.

... По числу случаевъ, въ которыхъ доводы для какихъ-либо вещей могутъ существовать или не существовать, доказывать или не доказывать или даже доказывать противное, могутъ быть подвергнуты вычисленію и измѣрены доказательныя силы ихъ и соотвѣтствующія вѣроятности. Все дѣло сводится къ тому, чтобы для правильнаго составленія предположеній о какой-либо вещи были точно исчислены какъ числа тѣхъ случаевъ, такъ равно было бы опредѣлено, насколько одни могутъ легче встрѣтиться, чѣмъ другіе. Но здѣсь мы, повидимому, встрѣчаемъ препятствіе, такъ какъ только крайне рѣдко это возможно сдѣлать и почти нигдѣ не удается, кромѣ игръ, зависящихъ отъ случая, которыя первые изобрѣтатели, постаравшись сдѣлать безобидными, устроили такъ, чтобы были совершенно извѣстны числа случаевъ, влекущихъ выигрышъ или проигрышъ, а сами случаи могли бы встрѣтиться одинаково легко. Въ большинствѣ же другихъ явленій, зависящихъ или отъ дѣйствій силъ естественныхъ, или отъ свободной воли людей, не имѣетъ мѣста ни то, ни другое. Такъ, напр., извѣстно число случаевъ при игрѣ въ кости. Для каждой кости ихъ, очевидно, столько, сколько граней, и всѣ они равновозможны, такъ какъ вслѣдствіе подобія граней и равномѣрной плотности кости нѣтъ никакого основанія, почему одна грань могла бы легче открыться, чѣмъ другая. Такъ было бы, если бы грани были различной формы или кость въ одной части состояла изъ болѣе тяжелаго матеріала, чѣмъ въ другой. Такъ, равнымъ образомъ, извѣстно число случаевъ при извлеченіи изъ урны билетика бѣлаго или чернаго, и извѣстно, что всѣ они одинаково возможны; именно потому, что опредѣлено и извѣстно число билетовъ обѣихъ категорій и не видно никакого основанія выйти одному изъ нихъ легче, чѣмъ всякому другому. Но, спрашивается, кто изъ смертныхъ когда-либо опредѣлитъ, какъ такое же число случаевъ, число, напр., болѣзней, которыя во всякомъ возрастѣ поражаютъ безчисленное множество частей человѣческаго тѣла и могутъ намъ причинить смерть; и насколько одна болѣзнь легче погубитъ человѣка, чѣмъ другая: напр., чума, чѣмъ водобоязнь, водобоязнь, чѣмъ лихорадка, чтобы отсюда можно было составить предположеніе о жизни или смерти въ будущемъ? Кто также сочтетъ безчисленные случаи перемѣнъ, которымъ ежедневно подвергается воздухъ, чтобы отсюда можно было сдѣлать предположеніе, каково будетъ его состояніе черезъ мѣсяцъ или, тѣмъ паче, черезъ годъ? Опять, кто достаточно знаетъ природу человѣческаго ума или удивительное устройство нашего тѣла, чтобы въ играхъ, зависящихъ вполнѣ или отчасти отъ остроты ума или ловкости тѣла, дерзнуть опредѣлить случаи, когда тотъ или другой изъ участниковъ игры можетъ одержать побѣду или потерпѣть пораженіе? Такъ какъ это и подобное зависитъ отъ причинъ совершенно скрытыхъ и, сверхъ того, вслѣдствіе безконечнаго разнообразія ихъ сочетаній,

Яковъ Бернулли (1654—1705).

всегда ускользающихъ отъ нашего познанія, то было бы совершенно безумно желать что-либо узнать такимъ путемъ. Но здѣсь намъ открывается другая дорога для достиженія искомаго. И что не дано вывести a priori, то, по крайней мѣрѣ, можно получить a posteriori, т. е. изъ многократнаго наблюденія результатовъ въ подобныхъ примѣрахъ.

Потому что должно предполагать, что нѣкоторое явленіе впослѣдствіи въ столькихъ же случаяхъ можетъ случиться или не случиться, въ скольких при подобномъ же положеніи вещей раньше оно было отмѣчено случившимся или не случившимся. Ибо, если, напр., при наблюденіяхъ, сдѣланныхъ надъ тремя стами людей того же возраста и сложенія, какъ теперь

Титъ, было замѣчено, что изъ нихъ двѣсти до истеченія десяти лѣтъ умерли, а остальные остались въ живыхъ и дольше, то можно заключить съ достаточнымъ основаніемъ, что вдвое больше случаевъ и Титу умереть въ теченіе ближайшаго десятилѣтія, чѣмъ остаться въ живыхъ по истеченіи этого срока. Также, если кто-либо будетъ разсматривать состояніе погоды за очень большое число истекшихъ годовъ и будетъ отмѣчать, сколько разъ она была ясной или дождливой, или кто-либо очень часто будетъ присутствовать при игрѣ двоихъ и наблюдать, сколько разъ тотъ или другой оказывается въ игрѣ побѣдителемъ, то тѣмъ самымъ откроетъ отношеніе, въ которомъ, вѣроятно, находятся числа случаевъ, когда то же событіе при обстоятельствахъ, подобныхъ прежнимъ, и въ будущемъ можетъ случиться или не случиться. Этотъ опытный способъ опредѣленія числа случаевъ по наблюденіямъ не новъ и не необыченъ. Ибо и знаменитый авторъ «L'art de penser», мужъ большого ума и проницательности, въ гл. 12 и слѣд. послѣдней части предписываетъ подобное же, и то же всѣ постоянно соблюдаютъ въ повседневной практикѣ. Далѣе, всякому ясно и то, что для такого разсужденія о какомъ-либо явленіи не достаточно взять одно или другое наблюденіе, но требуется большой запасъ наблюденій. Потому-то даже самый ограниченный человѣкъ по какому-то природному инстинкту самъ собой и безъ всякаго предварительнаго обученія (что очень удивительно) знаетъ, что чѣмъ больше принято во вниманіе такихъ наблюденій, тѣмъ менѣе опасность не достичь цѣли. Хотя это естественнымъ образомъ всѣмъ извѣстно, однако доказательство, извлекаемое изъ научныхъ основаній, вовсе не такъ обычно, и потому намъ предстоитъ его здѣсь изложить. При чемъ я счелъ бы для себя малой заслугой, если бы остановился на доказательствѣ только того, что всѣ знаютъ. Здѣсь для разсмотрѣнія остается нѣчто, о чемъ до сихъ поръ, можетъ быть, никто и не подумалъ. Именно, остается изслѣдовать, будетъ ли при такомъ увеличеніи числа наблюденій вѣроятность достичь дѣйствительнаго отношенія между числами случаевъ, при которыхъ какое-либо событіе можетъ случиться или не случиться, постоянно возрастать такъ, чтобы, наконецъ, превзойти всякую степень достовѣрности, или же задача, такъ сказать, имѣетъ свою асимптоту, т. е. имѣется такая степень достовѣрности, которую никогда нельзя превзойти, какъ бы ни умножались наблюденія; такъ что, напр., никогда нельзя имѣть увѣренность болѣе половины или $\frac{2}{3}$, или $\frac{3}{4}$ достовѣрности въ томъ, что мы нашли истинное отношеніе случаевъ. Чтобы на примѣрѣ было ясно, чего я хочу, я предполагаю, что въ нѣкоторой урнѣ, безъ твоего вѣдома, скрыты три тысячи бѣлыхъ и двѣ тысячи черныхъ камешковъ и что ты, для опредѣленія числа ихъ опытомъ, извлекаешь одинъ камешекъ за другимъ (однако, каждый разъ кладя обратно извлеченный до вынутія слѣдующаго, дабы не уменьшалось число камешковъ въ урнѣ) и замѣчаешь, сколько разъ выходитъ бѣлый и сколько разъ—черный. Требуется узнать, можешь ли ты это продѣлать столько разъ, чтобы въ десять, въ сто, въ тысячу разъ и т. д. было вѣроятнѣе (т. е. оказалось бы, наконецъ, нравственно достовѣрнымъ), что числа появленій бѣлыхъ и черныхъ будутъ находиться въ томъ же отношеніи 3 къ 2, въ какомъ находятся самыя числа камешковъ, чѣмъ въ какомъ-либо другомъ отношеніи, отъ этого отличномъ? Если бы этого не случилось, то, признаюсь, слѣдовало бы усомниться въ нашей попыткѣ опредѣлять числа случаевъ изъ опытовъ. Но если это достигается и такимъ путемъ, наконецъ, получается нравственная достовѣрность (а что это на самомъ дѣлѣ такъ, — я покажу въ слѣдующей главѣ), то находимъ числа случаевъ a posteriori почти съ тою же точностью, какъ если бы они были намъ извѣстны a priori; что въ общественной жизни, гдѣ нравственно достовѣрное принимается за вполнѣ достовѣрное, безъ сомнѣнія, вполнѣ достаточно, дабы направить наши предположенія въ какомъ угодно предметѣ случайномъ не менѣе научно, чѣмъ въ играхъ. Ибо если мы урну замѣнимъ воздухомъ, напр., или человѣческимъ тѣломъ, которые содержатъ въ себѣ источники разныхъ перемѣнъ или болѣзней, подобно тому какъ урна—камешки, то мы будемъ въ состояніи совершенно также наблюденіями опредѣлить, насколько легче въ этихъ вещахъ можетъ получиться то или другое явленіе. Чтобы не понимать этого превратно, слѣдуетъ замѣтить, что отношеніе между числами случаевъ, которые мы желаемъ опредѣлить опытомъ, понимается не въ смыслѣ точнаго отношенія (ибо при такомъ воззрѣніи случилось бы какъ разъ обратное, и вѣроятность найти истинное отношеніе была бы тѣмъ меньше, чѣмъ болѣе было взято наблюденій), но до извѣстной степени приближеннаго, т. е. заключеннаго въ двухъ границахъ, которыя можно взять сколь угодно тѣсными. Именно, если въ только что приведенномъ примѣрѣ камешковъ возьмемъ два отношенія $\frac{301}{200}$ и $\frac{299}{200}$ или $\frac{3001}{2000}$ и $\frac{2999}{2000}$ и т. д., изъ которыхъ одно весьма близко, но больше, а другое весьма близко, но меньше отношенія $\frac{3}{2}$, то будетъ показано, что, задавъ какую угодно вѣроятность, можно сдѣлать болѣе вѣроятнымъ, что найденное изъ многихъ наблюденій отношеніе будетъ заключено въ этихъ предѣлахъ полуторнаго отношенія, а не внѣ ихъ.

Вотъ, слѣдовательно, какова задача, которую я здѣсь рѣшилъ обнародовать послѣ того, какъ уже въ теченіе двадцати лѣтъ владѣлъ ея рѣшеніемъ. Новизна этой задачи и величайшая польза, сопряженная съ такою же трудностью, можетъ придать вѣсъ и цѣну всѣмъ другимъ главамъ этого ученія. Но прежде изложенія ея рѣшенія я въ краткихъ словахъ защищусь отъ возраженій, которыя выставили нѣкоторые ученые мужи противъ этихъ положеній.

1) Во-первыхъ, возражаютъ, что одно—отношеніе камешковъ, а другое—отношеніе болѣзней или перемѣнъ воздуха. Именно, число первыхъ опредѣленное, а вторыхъ—неопредѣленное. На это я возражаю, что и то, и другое въ отношеніи къ нашему познанію одинаково можетъ считаться неопредѣленнымъ и неяснымъ. Но все, что само по себѣ и по своей природѣ таково, мы можемъ представить себѣ не лучше, чѣмъ вещь, одновременно созданную Творцомъ природы и не созданную; ибо все сотворенное Богомъ опредѣляется уже при самомъ твореніи.

2) Во-вторыхъ, возражаютъ, что число камешковъ конечно, а болѣзней и проч. безконечно. **Отв.** Скорѣе невообразимо большое, чѣмъ безконечное. Но допустимъ, что на самомъ дѣлѣ безконечно большое. Извѣстно, что даже между двумя безконечностями можетъ существовать опредѣленное отношеніе, выразимое конечными числами или точно, или, по крайней мѣрѣ, съ какимъ угодно приближеніемъ. Такъ, отношеніе каждой окружности къ діаметру опредѣленное, которое, правда, точно не выражается иначе, какъ круговымъ числомъ Лудольфа, безконечно продолженнымъ [1]; однако, Архимедомъ, Меціемъ и самимъ Лудольфомъ заключено въ предѣлы, весьма удовлетворительно близкіе для практики. Поэтому, ничто не препятствуетъ, чтобы отношеніе двухъ безконечностей, приближенно выраженное конечными числами, также могло быть опредѣлено конечнымъ числомъ опытовъ.

3) Говорятъ, въ-третьихъ, что число болѣзней не остается постояннымъ, но каждый день возникаютъ новыя. **Отв.** Что съ теченіемъ времени болѣзни могутъ умножаться,—этого мы не можемъ отвергать и несомнѣнно, что тотъ, кто пожелаетъ изъ теперешнихъ наблюденій сдѣлать заключенія о временахъ до-дилювіанскихъ предковъ, весьма сильно отклонится отъ истины. Но отсюда ничего не слѣдуетъ, кромѣ того, что иногда нужно возобновлять наблюденія, подобно тому, какъ слѣдовало бы возобновлять наблюденія и съ камешками, если бы предполагать число ихъ въ урнѣ измѣняющимся.

---

[1]) Число π.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Рѣшеніе предыдущей задачи.

Чтобы изложить длинное доказательство съ возможною краткостью и ясностью, я попытаюсь свести все къ чистой математикѣ, извлекая изъ нея слѣдующія леммы, послѣ доказательства которыхъ все остальное сведется только къ ихъ примѣненію.

Лемма 1. Пусть данъ рядъ сколькихъ угодно чиселъ 0, 1, 2, 3, 4 и т. д., слѣдующихъ, начиная отъ нуля, въ естественномъ порядкѣ, изъ которыхъ крайнее и наибольшее пусть будетъ $r+s$, какое либо среднее r и два ближайшихъ къ нему числа съ обѣихъ сторонъ $r+1$ и $r-1$. Пусть, далѣе, этотъ рядъ будетъ продолженъ до тѣхъ поръ, пока крайній членъ не сдѣлается равнымъ какому-нибудь кратному числа $r+s$, т. е. пока не сдѣлается равнымъ $nr+ns$. Въ томъ же отношеніи увеличатся среднее число r и рядомъ съ нимъ стоящія $r+1$ и $r-1$, такъ что вмѣсто нихъ получается nr, $nr+n$, $nr+n$, и первоначальный рядъ

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ r-1,\ r,\ r+1, \ldots\ r+s$$

обратится въ такой:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ nr-n, \ldots\ nr, \ldots\ nr+n, \ldots\ nr+ns.$$

Съ возрастаніемъ n такимъ образомъ будетъ увеличиваться какъ число членовъ, которые лежатъ между среднимъ nr и однимъ изъ предѣльныхъ $nr+n$ или $nr-n$, такъ и число тѣхъ, которые идутъ отъ этихъ предѣловъ до крайнихъ членовъ $nr+ns$ или 0. Но, однако, никогда (какъ бы велико ни было взято n) число членовъ за большимъ предѣломъ $nr+n$ не будетъ болѣе, чѣмъ въ $s-1$ разъ, и число членовъ передъ меньшимъ предѣломъ $nr-n$ не будетъ болѣе, чѣмъ въ $r-1$ разъ, превышать число заключенныхъ между среднимъ nr и однимъ изъ предѣловъ $nr+n$ или $nr-n$. Ибо послѣ вычитанія ясно, что между большимъ предѣломъ и крайнимъ членомъ $nr+ns$ имѣется $ns-n$ промежуточныхъ членовъ, и между меньшимъ предѣломъ и крайнимъ 0 имѣется $nr-n$ промежуточныхъ членовъ, между среднимъ и каждымъ изъ предѣловъ n промежуточныхъ членовъ. Но всегда $(ns-n):n=s-1:1$ и $(nr-n):n=r-1:1$. Откуда слѣдуетъ и т. д.

Лемма 2. Всякая цѣлая степень какого-либо двучлена $r+s$ выражается числомъ членовъ, на единицу большимъ числа единицъ въ показателѣ степени. Ибо квадратъ содержитъ 3 члена, кубъ 4, биквадратъ 5 и т. д., какъ извѣстно.

Лемма 3. Въ любой степени этого двучлена (по крайней мѣрѣ, такой, которой показатель равенъ двучлену $r+s=t$ или его кратному,—напр., $nr+ns=nt$—нѣкоторый членъ M будетъ наибольшимъ, если числа предшествующихъ ему и слѣдующихъ за нимъ членовъ находятся въ отношеніи s къ r или, что то же, если въ этомъ членѣ показатели буквъ r и s находятся въ отношеніи самихъ количествъ r и s; болѣе близкій къ нему членъ съ той и съ другой стороны больше болѣе удаленнаго съ той же стороны; но тотъ же членъ M имѣетъ къ болѣе близкому меньшее отношеніе, чѣмъ болѣе близкій къ болѣе удаленному при равномъ числѣ промежуточныхъ членовъ.

Док. 1. Геометрамъ хорошо извѣстно, что степень nt двучлена $r+s$, т. е. $(r+s)^{nt}$, выражается такимъ рядомъ

$$r^{nt}+\frac{nt}{1}r^{nt-1}s+\frac{nt(nt-1)}{1.2}r^{nt-2}s^2+\frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1.2.3}r^{nt-3}s^3+\ldots.$$

Въ этомъ ряду степени r постепенно уменьшаются, а степени s увеличиваются, при чемъ коэффиціенты второго и предпослѣдняго члена $\frac{nt}{1}$, 3-го съ начала и 3-го съ конца $\frac{nt(nt-1)}{1.2}$, 4-го съ начала и 4-го съ конца $\frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1.2.3}$ и т. д. Такъ какъ число всѣхъ членовъ кромѣ M, по леммѣ 2, есть $nt=nr+ns$, а по предположенію, числа членовъ, предшествующихъ этому и за нимъ слѣдующихъ, относятся какъ s къ r, то число тѣхъ членовъ, которые предшествуютъ M, будетъ ns, а тѣхъ, которые за нимъ слѣдуютъ,—nr. Откуда, по закону образованія ряда, членъ M будетъ

$$\frac{nt(nt-1)\ldots(nr+1)}{1.2\ldots ns}r^{nr}s^{ns}$$

или

$$\frac{nt(nt-1)\ldots(ns+1)}{1.2\ldots nr}r^{nr}s^{ns}.$$

и подобнымъ же образомъ ближайшій къ нему членъ

слѣва	справа
$\frac{nt(nt-1)\ldots(nr+2)}{1.2\ldots(ns-1)}r^{nr+1}s^{ns-1}$	$\frac{nt(nt-1)\ldots(ns+2)}{1.2\ldots(nr-1)}r^{nr-1}s^{ns+1}$

и равнымъ образомъ слѣдующій

слѣва	справа
$\frac{nt(nt-1)\ldots(nr+3)}{1.2\ldots(ns-2)}r^{nr+2}s^{ns-2}$	$\frac{nt(nt-1)\ldots(ns+3)}{1.2\ldots(nr-2)}r^{nr-2}s^{ns+2}$

Откуда, послѣ предварительнаго сокращенія общихъ множителей, станетъ яснымъ, что членъ M относится къ ближайшему слѣва, какъ $(nr+1)$ s къ $ns \cdot r$, этотъ къ слѣдующему, какъ $(nr+2)\,s$ къ $(ns-1)\,r$ и проч. и также, что членъ M относится къ ближайшему справа, какъ $(ns+1)\,r$ къ $nr \cdot s$, а этотъ къ слѣдующему, какъ $(ns+2)\,r$ къ $(nr-1)\,s$ и проч.

Но

$$(nr+1)\,s > nrs$$

и

$$(nr+2)\,s > nsr - r \text{ и проч.}$$

Также

$$(ns+1)\,r > nsr$$

и

$$(ns+2)\,r > nrs \text{ и проч.} - s$$

Слѣдовательно, членъ M больше ближайшаго съ обѣихъ сторонъ, а этотъ—больше болѣе удаленнаго съ той же стороны и проч. Ч. т. д.

2) Отношеніе $\frac{nr+1}{ns}$ меньше отношенія $\frac{nr+2}{ns-1}$, что ясно; поэтому, послѣ умноженія на одно и то же отношеніе $\frac{s}{r}$ будетъ

$$\frac{(nr+1)\,s}{nsr} < \frac{(nr+2)\,s}{(ns-1)\,r}.$$

Подобно этому отношеніе $\frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1}$; слѣдовательно, по умноживши на отношеніе $\frac{r}{s}$ также

$$\frac{(ns+1\,r}{nrs} < \frac{(ns+2)\,r}{(nr-1)\,s}.$$

Но отношеніе

$$\frac{(nr+1)\,s}{nsr}$$

равно отношенію члена M къ ближайшему слѣва, и отношеніе

$$\frac{(nr+2)\,s}{(ns-1)\,r}$$

равно отношенію этого члена къ слѣдующему. Также отношеніе

$$\frac{(ns+1)\,r}{nrs}$$

равно отношенію члена M къ ближайшему справа, и

$$\frac{(ns+2)\,r}{(nr-1)\,s}$$

равно отношенію этого члена къ слѣдующему. То, что только что показано, можно равнымъ образомъ примѣнить и ко всѣмъ прочимъ членамъ.

Вслѣдствіе этого наибольшій членъ M имѣетъ меньшее отношеніе къ болѣе близкимъ членамъ съ обѣихъ сторонъ, чѣмъ (при равномъ числѣ промежуточныхъ членовъ) болѣе близкій къ болѣе удаленному съ той же стороны. Ч. т. д.

Лемма 4. Въ степени двучлена съ показателемъ nt число n можетъ быть взято столь большимъ, чтобы отношеніе наибольшаго члена M къ двумъ другимъ L и Λ, отстоящимъ отъ него налѣво и направо на n членовъ, превзошло всякое данное отношеніе.

Док. Такъ какъ въ предыдущей леммѣ наибольшій членъ M былъ найденъ равнымъ

$$\frac{nt(nt-1)\ldots.(nr+1)}{1\cdot 2\ldots.ns}\,r^{nr}s^{ns}$$

или

$$\frac{nt(nt-1)\ldots.(ns+1)}{1\cdot 2\ldots.nr}\,r^{nr}s^{ns},$$

то по закону образованія ряда члены L и Λ будутъ

L слѣва	Λ справа
$\dfrac{nt(nt-1)\ldots(nr+n+1)}{1\cdot 2\ldots(ns-n)}\,r^{nr+n}s^{ns-n}$	$\dfrac{nt(nt-1)\ldots(ns+n+1)}{1\cdot 2\ldots(nr-n)}\,r^{nr-n}s^{ns+n}$,

откуда получается послѣ приличныхъ сокращеній на общіе множители

$$\frac{M}{L}=\frac{(nr+n)(nr+n-1)\ldots.(nr+1)\cdot s^n}{(ns-n+1)(ns-n+2)\ldots.ns\cdot r^n}$$

$$\frac{M}{\Lambda}=\frac{(ns+n)(ns+n-1)\ldots.(ns+1)\cdot r^n}{(nr-n+1)(nr-n+2)\ldots..nr\cdot s^n}$$

или

$$\frac{M}{L}=\frac{(nrs+ns)(nrs+ns-s)\ldots.(nrs+s)}{(nrs-nr+r)(nrs-nr+2r)\ldots.nrs}$$

$$\frac{M}{\Lambda}=\frac{(nrs+nr)(nrs+nr-r)\ldots.(nrs+r)}{(nrs-ns+s)(nrs-ns+2s)\ldots.nrs}.$$

Но эти отношенія будутъ безконечно большими, когда n полагается безконечнымъ: ибо тогда исчезаютъ числа 1, 2, 3 и проч. по сравненію съ n, и сами числа $nr\pm n\mp 1$, $nr\pm n\mp 2$, $nr\pm n\mp 3$ и проч., и $ns\pm n\mp 1$, $ns\pm n\mp 2$, $ns\pm n\mp 3$ и проч. будутъ имѣть то же значеніе, какъ $nr\pm n$ и $ns\pm n$, такъ что по раздѣленіи на n получится

$$\frac{M}{L}=\frac{(rs+s)(rs+s)\ldots.rs}{(rs-r)(rs-r)\ldots.rs},\qquad \frac{M}{\Lambda}=\frac{(rs+r)(rs+r)\ldots..rs}{(rs-s)(rs-s)\ldots.rs}.$$

Эти отношенія составляются, какъ ясно, изъ столькихъ отношеній $\frac{rs+s}{rs-r}$ или $\frac{rs+r}{rs-s}$, сколько есть множителей; а ихъ число n, т. е. безконечное, такъ какъ между первыми множителями $nr+n$ или $ns+n$ и послѣдними $nr+1$ и $ns+1$ разность есть $n-1$. Вслѣдствіе чего эти отношенія будутъ безконечными степенями $\frac{rs+s}{rs-r}$ и $\frac{rs+r}{rs-c}$ и потому безконечно большими. Если ты сомнѣваешься въ этомъ заключеніи, то представь себѣ безконечное число чиселъ въ непрерывной пропорціи съ отношеніемъ $rs+s$ къ $rs-r$ или $rs+r$ къ $rs-s$. Отношеніе перваго числа къ третьему будетъ квадратомъ, перваго къ 4-му—кубомъ, перваго къ 5-му—четвертой степенью, и т. д.; наконецъ, перваго къ послѣднему—безконечной степенью отношенія $\frac{rs+s}{rs-r}$ или $\frac{rs+r}{rs-s}$; но извѣстно, что отношеніе перваго члена къ послѣднему безконечно большое, такъ какъ послѣдній членъ $=0$. Поэтому, ясно, что безконечныя степени отношенія $\frac{rs+s}{rs-r}$ или $\frac{rs+r}{rs-s}$ безконечно велики. Такимъ образомъ, показано, что въ безконечно высокой степени двучлена отношеніе наибольшаго члена къ двумъ другимъ L и Λ превосходитъ всякое заданное отношеніе. Ч. т. д.

Лемма 5. Предположивъ то же, что выше, можно представить такое большое число n, чтобы сумма всѣхъ членовъ отъ средняго и наибольшаго M до обоихъ членовъ L и Λ включительно имѣла къ суммѣ всѣхъ другихъ внѣ предѣловъ L и Λ, взятыхъ въ какомъ-угодно числѣ, отношеніе, большее всякаго заданнаго.

Док. Члены между наибольшимъ M и предѣльнымъ слѣва L пусть обозначаются: второй отъ наибольшаго — F, третій — G, четвертый — H и т. д., и за предѣломъ L: второй отъ него P, третій — Q, четвертый—R и т. д. Такъ какъ по второй части леммы 3 отношенія

$$\frac{M}{F}<\frac{L}{P},\quad \frac{F}{G}<\frac{P}{Q},\quad \frac{G}{H}<\frac{Q}{R}\ \text{и т. д.},$$

то также будетъ

$$\frac{M}{L}<\frac{F}{P}<\frac{G}{Q}<\frac{H}{R}\ \text{и т. д.}$$

Такъ какъ по леммѣ 4, при n безконечно большомъ отношеніе $\frac{M}{L}$ безконечно, то тѣмъ болѣе будутъ безконечными отношенія $\frac{F}{P}, \frac{G}{Q}, \frac{H}{R}, \ldots,$ и потому отношеніе

$$\frac{F+G+H+\ldots}{P+Q+R+\ldots}$$

также безконечно, т. е. сумма членовъ между наибольшимъ M и предѣломъ L безконечно больше суммы такого же числа членовъ за предѣломъ L и наиболѣе къ нему близкихъ. И такъ какъ число всѣхъ членовъ за предѣломъ L превышаетъ, по леммѣ 1, не болѣе чѣмъ въ $s-1$ разъ (т. е. конечное число разъ) число членовъ между этимъ предѣломъ и наибольшимъ членомъ M, а сами члены дѣлаются тѣмъ меньше, чѣмъ дальше они отстоятъ отъ предѣла, по 1-ой части 3-ей леммы, то сумма всѣхъ членовъ между M и L (даже не считая M) будетъ безконечно больше суммы всѣхъ членовъ за предѣломъ L. Съ другой стороны, подобнымъ же образомъ доказывается, что сумма всѣхъ членовъ между M и Λ безконечно больше суммы всѣхъ членовъ за предѣломъ Λ (число которыхъ превышаетъ число первыхъ не болѣе, чѣмъ въ $r-1$ разъ по леммѣ 1). Поэтому, наконецъ, сумма всѣхъ членовъ, заключенныхъ между предѣлами L и Λ (за исключеніемъ наибольшаго), будетъ безконечно больше суммы всѣхъ членовъ, расположенныхъ за этими предѣлами; и тѣмъ паче, слѣдовательно, вмѣстѣ съ наибольшимъ. Ч. т. д.

Поясненіе. Тѣми, кто не привыкъ къ разсужденіямъ съ безконечнымъ, можетъ быть сдѣлано противъ 4-ой и 5-ой леммъ возраженіе, что хотя въ случаѣ безконечнаго n множители количествъ, выражающихъ отношенія $\frac{M}{L}$ и $\frac{M}{\Lambda}$, т. е. $nr \pm n \mp 1$, $nr \pm n \mp 2, \ldots$ и $ns \pm n \mp 1$, $ns \pm n \mp 2, \ldots$ имѣютъ то же значеніе, какъ $nr \pm n$ и $ns \pm n$, такъ какъ числа $1, 2, 3 \ldots$ исчезаютъ по сравненіи съ каждымъ изъ множителей; однако, возможно, что, собранныя вмѣстѣ и перемноженныя между собою (вслѣдствіе безконечнаго числа ихъ), эти числа безконечно уменьшатъ, т. е. сдѣлаютъ конечными, безконечныя степени отношеній $\frac{rs+s}{rs-r}$ или $\frac{rs+r}{rs-s}$. Этому сомнѣнію я не могу лучше удовлетворить, какъ показавъ теперь способъ на самомъ дѣлѣ найти конечное число n или конечную степень двучлена, въ которой сумма членовъ между предѣлами L и Λ имѣетъ къ суммѣ членовъ внѣ ихъ отношеніе, большее какого угодно большого даннаго отношенія, которое обозначу буквою c. Когда это будетъ показано, возраженіе необходимо падетъ.

Для этого я беру какое-либо отношеніе, большее единицы, но однако меньшее отношенія $\frac{rs+s}{rs-r}$ (для членовъ слѣва), напр., отношеніе $\frac{rs+s}{rs}$ или $\frac{r+1}{r}$, и умножаю его на самого себя столько разъ (m разъ), пока произведеніе не будетъ равно или не превзойдетъ отношенія $c(s-1)$ къ 1; т. е. пока не будетъ

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^m \overline{>} c(s-1).$$

Когда это должно случиться, можно быстро высчитать по логариѳмамъ; ибо, взявъ логариѳмы, получимъ

$$m \operatorname{Log}(r+1) - m \operatorname{Log} r \overline{>} \operatorname{Log}[c(s-1)]$$

и по раздѣленіи сразу найдемъ

$$m \overline{>} \frac{\operatorname{Log}[c(s-1)]}{\operatorname{Log}(r+1) - \operatorname{Log} r}.$$

Найдя это, я продолжаю такъ. Относительно ряда дробей или множителей

$$\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r}, \quad \frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r}, \quad \frac{nrs+ns-2s}{nrs-nr+3r}, \ldots \quad \frac{nrs+s}{nrs},$$

черезъ умноженіе которыхъ, по леммѣ 4, получается отношеніе $\frac{M}{L}$, слѣдуетъ замѣтить, что отдѣльныя дроби меньше дроби $\frac{rs+s}{rs-r}$, однако, тѣмъ болѣе къ ней приближаются, чѣмъ большее берется n. Поэтому, какая-либо изъ нихъ когда-нибудь станетъ равной самому отношенію $\frac{rs+s}{rs} = \frac{r+1}{r}$. Въ виду этого слѣдуетъ посмотрѣть, какое надлежитъ взять n, чтобы дробь, порядокъ которой есть m, стала равной $\frac{r+1}{r}$. Но (что явствуетъ изъ закона составленія ряда) дробь порядка m такая

$$\frac{nrs+ns-ms+s}{nrs-ns+mr};$$

приравнивая ее $\frac{r+1}{r}$ получаемъ,

$$n = m + \frac{ms-s}{r+1}$$

и отсюда

$$nt = mt + \frac{mst-st}{r+1}.$$

Я утверждаю, что при такомъ показателѣ степени двучлена $r+s$ наибольшій членъ будетъ болѣе, чѣмъ въ $c(s-1)$ разъ превосходить предѣлъ L. Ибо такъ какъ дробь порядка m при такомъ значеніи n будетъ равна $\frac{r+1}{r}$, а дробь $\frac{r+1}{r}$, умноженная на себя m разъ, т. е. $\frac{(r+1)^m}{r^m}$, равна или больше $c\,(s-1)$ (по положенію), то эта дробь (порядка m), умноженная на всѣ предыдущія, тѣмъ болѣе превзойдетъ $c\,(s-1)$, въ силу того, что всѣ предыдущія дроби больше $\frac{r+1}{r}$. Слѣдовательно, произведеніе послѣ умноженія на всѣ послѣдующія еще болѣе превзойдетъ $c\,(s-1)$, ибо всѣ послѣдующія дроби по крайней мѣрѣ больше единицы. Но произведеніе всѣхъ дробей выражаетъ отношеніе члена M къ L; поэтому совершенно достовѣрно, что членъ M превосходитъ L болѣе, чѣмъ въ $c\,(s-1)$ разъ. Но

$$\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R} \text{ и проч.},$$

какъ показано; отсюда слѣдуетъ, что второй членъ за M превзойдетъ второй членъ за L болѣе, чѣмъ въ $c\,(s-1)$ разъ, и т. д.—Поэтому, наконецъ, сумма всѣхъ членовъ между наибольшимъ M и предѣломъ L превзойдетъ болѣе, чѣмъ въ $c\,(s-1)$ разъ, сумму такого же числа наибольшихъ членовъ за этимъ предѣломъ, и болѣе, чѣмъ въ c разъ, эту сумму, взятую $s-1$ разъ. Слѣдовательно, тѣмъ очевиднѣе она превзойдетъ болѣе, чѣмъ въ c разъ сумму всѣхъ членовъ за предѣломъ L, число коихъ превосходитъ не болѣе, чѣмъ въ $s-1$ разъ число членовъ между M и L.— Относительно членовъ справа поступаю подобнымъ же образомъ. Беру отношеніе $\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs-s}$, полагаю $\frac{(s+1)^m}{s^m} \geqq c\,(r-1)$ и нахожу

$$m \geqq \frac{\operatorname{Log}[c\,(r-1)]}{\operatorname{Log}(s+1)-\operatorname{Log} s}.$$

Затѣмъ въ ряду дробей

$$\frac{nrs+nr}{nrs-ns+s},\quad \frac{nrs+nr-r}{nrs-ns+2s},\quad \frac{nrs+nr-2r}{nrs-ns+3s}, \ldots \quad \frac{nrs+r}{nrs},$$

входящихъ въ отношеніе $\frac{M}{\Lambda}$, полагаю дробь порядка m, именно

$$\frac{nrs+nr-mr+r}{nrs-ns+ms},$$

равной

$$\frac{s+1}{s};$$

отсюда извлекаю

$$n = m + \frac{mr - r}{s + 1}$$

и потому

$$nt = mt + \frac{mrt - rt}{s + 1}.$$

Послѣ чего подобнымъ же образомъ, какъ раньше, будетъ доказано, что въ двучленѣ $r + s$, возвышенномъ въ эту степень, наибольшій членъ M превзойдетъ предѣлъ Λ болѣе, чѣмъ въ $c\,(r - 1)$ разъ, и, слѣдовательно, также, что сумма членовъ между наибольшимъ M и предѣломъ L превзойдетъ сумму всѣхъ членовъ внѣ этого предѣла (число которыхъ превосходитъ число членовъ между M и Λ не болѣе чѣмъ въ $r - 1$ разъ) болѣе, чѣмъ въ c разъ. Итакъ, наконецъ, заключаемъ, что по возведеніи двучлена $r + s$ въ степень, показатель которой равенъ большему изъ двухъ чиселъ

$$mt + \frac{mst - st}{r + 1} \quad \text{и} \quad mt + \frac{mrt - rt}{s + 1}$$

сумма членовъ, заключенныхъ между предѣлами L и Λ болѣе, чѣмъ въ c разъ, превзойдетъ сумму всѣхъ остальныхъ, расположенныхъ по обѣ стороны отъ этихъ предѣловъ. Найдена, слѣдовательно, конечная степень, имѣющая желаемое свойство. Ч. т. д.

Главное предложеніе. Наконецъ слѣдуетъ само предложеніе, ради котораго сказано все предыдущее и котораго доказательство вытекаетъ изъ одного лишь примѣненія предварительныхъ леммъ къ настоящей цѣли. Чтобы избѣжать утомительнаго многословія, я назову случаи, когда какое-либо событіе появляется **плодовитыми** (благопріятными); а **безплодными** (неблагопріятными) тѣ, когда то же событіе не появляется. Равнымъ образомъ назову тѣ опыты **благопріятными**, когда обнаруживается одинъ изъ благопріятныхъ случаевъ, и **неблагопріятными** — тѣ, когда наблюдается одинъ изъ неблагопріятныхъ случаевъ. **Пусть число благопріятныхъ случаевъ относится къ числу неблагопріятныхъ точно или приближенно, какъ r къ s или къ числу всѣхъ случаевъ — какъ r къ $r + s$ или r къ t, каковое отношеніе заключается въ предѣлахъ $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$. Требуется доказать, что можно взять столько опытовъ, чтобы въ какое угодно данное число разъ (c разъ) было вѣроятнѣе, что число благопріятныхъ наблюденій попадетъ въ эти предѣлы, а не внѣ ихъ, т. е. что отношеніе числа благопріятныхъ наблюденій къ числу всѣхъ будетъ не болѣе, чѣмъ $\frac{r+1}{t}$, и не менѣе, чѣмъ $\frac{r-1}{t}$.**

Доказат. Положимъ число необходимыхъ наблюденій равнымъ nt; требуется опредѣлить, каково будетъ ожиданіе или вѣроятность, что всѣ они будутъ благопріятными, безъ исключенія, затѣмъ за исключеніемъ 1, 2, 3, 4 и т. д. неблагопріятныхъ. Такъ какъ при каждомъ наблюденіи имѣется, по положенію, t случаевъ, изъ нихъ r благопріятныхъ, и отдѣльные случаи одного наблюденія могутъ сочетаться съ отдѣльными случаями другого, послѣ чего опять сочетаться съ отдѣльными случаями 3-го, 4-го и т. д., то легко видѣть, что для этого годится правило, присоединенное къ примѣчаніямъ предлож. XIII первой части [1]) и его второе слѣдствіе, содержащее общую формулу, съ помощью коей находится вѣроятность отсутствія неблагопріятныхъ наблюденій

$$r^{nt} : t^{nt},$$

вѣроятность одного неблагопріятнаго наблюденія

$$\frac{nt}{1} r^{nt-1} s : t^{nt},$$

двухъ

$$\frac{nt(nt-1)}{1\cdot 2} r^{nt-2} s^2 : t^{nt},$$

трехъ

$$\frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1\cdot 2\cdot 3} r^{nt-3} s^3 : t^{nt}, \text{— и т. д.}$$

Поэтому (по отбрасываніи общаго дѣлителя t^{nt}) ясно, что степени вѣроятностей или числа случаевъ, при которыхъ можетъ статься, что всѣ опыты благопріятны или всѣ, за исключеніемъ одного, двухъ, трехъ, четырехъ и т. д. неблагопріятныхъ, по порядку, выражаются черезъ

$$r^{nt}, \quad \frac{nt}{1} r^{nt-1} s, \quad \frac{nt(nt-1)}{1.2} r^{nt-2} s^2, \quad \frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1.2.3} r^{nt-3} s^3 \text{ и т. д.},$$

т. е. какъ разъ тѣми самыми членами степени nt двучлена, которые только что изслѣдованы въ нашихъ леммахъ; откуда уже все остальное ясно. Именно, изъ природы ряда явствуетъ, что число случаевъ, которые съ ns неблагопріятными наблюденіями даютъ nr благопріятныхъ, есть самъ наибольшій членъ M, такъ какъ ему предшествуетъ ns членовъ, а за нимъ слѣдуетъ nr, по леммѣ 3. Равнымъ образомъ, ясно, что числа случаевъ, при которыхъ оказалось или $nr+n$ или $nr-n$ благопріятныхъ наблю-

---

[1]) Ссылка на первую часть «Ars Conjectandi», содержащую мемуаръ Гюйгенса объ азартныхъ играхъ съ дополненіями и примѣчаніями Я. Бернулли.

деній, при чемъ остальныя неблагопріятны, выражаются членами L и Λ, отстоящими на n членовъ по обѣ стороны отъ наибольшаго. Слѣдовательно, также ясно, что общее число случаевъ, при которыхъ оказывается не болѣе $nr+n$ и не менѣе $nr-n$ благопріятныхъ наблюденій, выражается суммою членовъ, заключенныхъ между предѣлами L и Λ; общее число остальныхъ случаевъ, при которыхъ оказывается или больше или меньше благопріятныхъ наблюденій, выражается суммой остальныхъ членовъ внѣ предѣловъ L и Λ. Такъ какъ степень двучлена можетъ быть взята столь большою, чтобы сумма членовъ, заключенныхъ между обоими предѣлами L и Λ, превосходила болѣе, чѣмъ въ c разъ, сумму всѣхъ остальныхъ, изъ этихъ предѣловъ выходящихъ, по леммамъ 4-й и 5-й, то, слѣдовательно, можно взять столь большое число наблюденій, чтобы число случаевъ, при которыхъ отношеніе числа благопріятныхъ наблюденій къ числу всѣхъ оказывается не выходящимъ изъ предѣловъ $\frac{nr+n}{nt}$ и $\frac{nr-n}{nt}$ или $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$, превышало болѣе, чѣмъ въ c разъ, число остальныхъ случаевъ, т. е. сдѣлалось болѣе, чѣмъ въ c разъ, вѣроятнѣе, что отношеніе числа благопріятныхъ наблюденій къ числу всѣхъ заключается въ предѣлахъ $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$, а не внѣ этихъ предѣловъ. Что нужно было доказать.

Въ примѣненіи этого къ отдѣльнымъ численнымъ примѣрамъ достаточно ясно само собою, что чѣмъ большія берутся въ одномъ и томъ же отношеніи числа r, s и t, тѣмъ уже могутъ быть сдѣланы границы $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$ отношенія $\frac{r}{t}$.

На этомъ основаніи, если отношеніе числа случаевъ $\frac{r}{s}$, которое должно опредѣлить изъ наблюденій, есть, напр., полуторное, т. е. $\frac{3}{2}$, то за r и s я не беру 3 и 2, но 30 и 20 или 300 и 200 и проч. Достаточно положить $r=30$, $s=20$ и $t=50$, чтобы предѣлы оказались $\frac{r+1}{t}=\frac{31}{50}$ и $\frac{r-1}{t}=\frac{29}{50}$. Пусть, сверхъ того, положено $c=1000$. Тогда, по предписанному въ *разъясненіи* будетъ для членовъ

слѣва

$$m>\frac{\operatorname{Log}[c(s-1)]}{\operatorname{Log}(r+1)-\operatorname{Log}r}=\frac{42787536}{142405}<301$$

$$nt=mt+\frac{mst-st}{r+1}<24728$$

справа

$$m > \frac{\operatorname{Log}\,[c(r-1)]}{\operatorname{Log}\,(s+1) - \operatorname{Log}\,(s)} = \frac{44623980}{211893} < 211$$

$$nt = mt + \frac{mrt - rt}{s+1} = 25550.$$

Откуда, по доказанному тамъ, выходится заключеніе, что при 25550 опытахъ будетъ болѣе, чѣмъ въ тысячу разъ вѣроятнѣе, что отношеніе числа благопріятныхъ наблюденій къ числу всѣхъ будетъ заключено въ предѣлахъ $\frac{31}{51}$ и $\frac{29}{50}$, а не внѣ ихъ. И такимъ же образомъ, положивъ $c = 10000$ или $c = 100000$ и т. д., найдемъ, что то же будетъ болѣе, чѣмъ въ 10000 разъ, вѣроятнѣе, если будетъ сдѣлано 31258 опытовъ, и болѣе, чѣмъ въ 100000 разъ вѣроятнѣе, если будетъ взято 36966 опытовъ; и такъ далѣе до безконечности, прибавляя именно постоянно къ 25550 опытамъ 5708 другихъ. Откуда, наконецъ, вытекаетъ то удивительное, повидимому, слѣдствіе, что, если бы наблюденія надъ всѣми событіями продолжать всю вѣчность (при чемъ вѣроятность, наконецъ, перешла бы въ полную достовѣрность), то было бы замѣчено, что все въ мірѣ управляется точными отношеніями и постояннымъ закономъ измѣненій, такъ что даже въ вещахъ, въ высшей степени случайныхъ, мы принуждены были бы признать какъ бы нѣкоторую необходимость и, скажу я, рокъ. Не знаю, не это ли имѣлъ въ виду уже самъ Платонъ въ своемъ ученіи о возстановленіи всѣхъ вещей, согласно которому все по истеченіи несмѣтнаго числа вѣковъ возвратится въ прежнее состояніе.

Законы случайнаго и Математическая статистика

Подъ такимъ заголовкомъ въ журналѣ «Вѣстникъ Европы» (1892 годъ, Октябрь) напечаталъ статью профессоръ Казанскаго университета А. В. Васильевъ, нынѣ, по выборамъ, членъ Государственнаго Совѣта. Въ общедоступной и живой формѣ высокоученый профессоръ настолько наглядно рисуетъ всю важность изученія математической вѣроятности и перспективы ея будущаго въ приложеніяхъ къ различнымъ областямъ общественно-политическихъ наукъ, что считаемъ необходимымъ и сообразнымъ съ цѣлями нашихъ отрывковъ изъ теоріи вѣроятностей привести въ заключеніе обширное извлеченіе изъ этой статьи.

Можетъ показаться, что подобныя вычисленія (т. е. вычисленія математическихъ вѣроятностей) имѣютъ очень мало значенія. Какая польза знать, что вѣроятность паденія кости на грань, обозначенную цифрою 1, равна $^1/_6$, если мы знаемъ, что непремѣнно случится одно изъ двухъ событій: или она падетъ на эту грань, или нѣтъ. Какое отношеніе имѣютъ всѣ эти вычисленія—иногда съ большою затратою времени—вѣроятности къ дѣйствительности? Не замѣшана ли тутъ только дурная привычка математиковъ—всюду требовать чиселъ и всюду вводить ихъ?

Я постараюсь показать теперь, что вычисленія математической вѣроятности имѣютъ очень большое значеніе, и что математическая вѣроятность можетъ и должна проявиться въ дѣйствительности. Въ самомъ дѣлѣ, при вычисленіи математической вѣроятности, напр., паденія кости, мы принимаемъ во вниманіе главную и постоянную причину, дѣйствующую при каждомъ паденіи кости — ея форму, но не принимаемъ во вниманіе всѣ остальныя причины, дѣйствующія при паденіи, причины, измѣняющіяся отъ одного паденія до другого. Мы должны, поэтому, a priori предвидѣть, что математическая вѣроятность должна проявиться при весьма большомъ числѣ испытаній, какъ выраженіе причины неизмѣнной среди множества перемѣнныхъ, дѣйствующихъ то въ ту, то въ другую сторону и потому взаимно уравновѣшивающихся. Но какъ именно проявится математическая вѣроятность при большемъ числѣ испытаній — вотъ задача, которая въ теченіе двадцати лѣтъ подъ-рядъ была предметомъ неустанной работы мысли знаменитаго Якова Бернулли. Настойчивость великаго ума привела къ доказательству знаменитой теоремы, составляющей важнѣйшій результатъ теоріи вѣроятностей и носящей названіе *теоремы Якова Бернулли или закона большихъ чиселъ*.

На основаніи этой теоремы мы можемъ указать съ вѣроятностью, которую можемъ сдѣлать сколь угодно близкою къ единицѣ, тѣ предѣлы, между которыми должно заключаться число повтореній извѣстнаго случайнаго событія при большемъ числѣ испытаній. Теорема говоритъ, что число повтореній событія не можетъ значительно отклониться отъ произведенія числа всѣхъ испытаній на вѣроятность событія, и указываетъ предѣлы отклоненія.

Для выясненія теоремы Бернулли необходимо привести по крайней мѣрѣ одинъ численный примѣръ. Мы возьмемъ самый простой примѣръ случайнаго событія: паденіе монеты на орелъ или на плату. Бросаемъ монету 100 разъ; по теоремѣ Бернулли весьма вѣроятно, что число паденій на орелъ, напр., будетъ заключаться между числами 33 и 67; отклоненіе дѣйствительнаго числа паденій отъ половины 100 не превышаетъ 17. Вѣроятность такого предсказанія такъ же велика, какъ вѣроятность предсказанія, что лицо, имѣющее одинъ билетъ выигрышнаго займа, не выиграетъ ничего въ предстоящій тиражъ. Предсказаніе можетъ не осуществиться: лицо можетъ выиграть, число паденій монеты на орелъ можетъ быть больше 67 и меньше 33. Но какъ ни одинъ здравомыслящій человѣкъ не станетъ измѣнять своей жизни или дѣлать какія-нибудь распоряженія и лишнія траты въ предвидѣніи выигрыша, такъ и мы можемъ считать почти несомнѣннымъ и основывать наши расчеты на убѣжденіи, что число паденій монеты на орелъ будетъ заключаться въ предѣлахъ 67 и 33.

Если мы увеличимъ число бросаній монеты въ 100 разъ, т. е. будемъ бросать ее 10 000 разъ, то опять съ тою же самою вѣроятностью—не выиграть, имѣя одинъ билетъ, мы можемъ утверждать, что число паденій на орелъ будетъ заключаться между предѣлами 5 175 и 4 825, т. е. отклоняться отъ половины 10 000 на 175.

Увеличимъ число бросаній еще въ 100 разъ, т. е. сдѣлаемъ милліонъ бросаній, и теорема говоритъ намъ, что при той же вѣроятности число будетъ заключаться между предѣлами 501 750 и 498 250, т. е. будетъ отклоняться отъ половины 10 000 не болѣе чѣмъ на 1 750. Наконецъ, при ста милліонахъ бросаній отклоненіе отъ половины будетъ не больше 17 500.

Проф. Александръ Васильевичъ Васильевъ

Сопоставимъ теперь два ряда полученныхъ нами чиселъ. Числа бросаній монеты у насъ были: 100, 10 000, 1 000 000, 100 000 000, т. е. увеличивались послѣдовательно въ 100 разъ. Наибольшія же отклоненія, допустимыя съ вѣроятностью не выиграть въ тиражъ, были 17, 175, 1 750, 17 500, т. е. хотя и возростали, но возростали гораздо медленнѣе, увеличиваясь послѣдовательно въ 10 разъ. Это обстоятельство имѣетъ громадное значеніе. Ясно, что если мы будемъ разсматривать не абсолютныя цифры отклоненій, а отношенія къ общему числу испытаній, то мы будемъ получать все меньшія и меньшія дроби. Наибольшее отклоненіе при 100 испытаніяхъ не превышаетъ 17% общаго числа испытаній; при 10 000 оно уже не превышетъ 1,7%; при 1 000 000 — 0,17%, и, наконецъ, при 100 000 000 — 0,017%.

По мѣрѣ увеличенія числа бросаній монеты отношеніе числа паденій монеты на орелъ къ общему числу паденій стремится къ дроби $^1/_2$, т. е. къ вѣроятности паденія на орелъ, а отношенія отклоненія числа паденій на орелъ отъ точной половины числа паденій къ общему числу паденій дѣлается все меньше и меньше и можетъ быть сдѣлано менѣе сколь угодно малой дроби.

Отсюда вытекаетъ такое замѣчательное слѣдствіе.

Если мы будемъ производить послѣдовательно два ряда бросаній монеты, заключающихъ каждый весьма большое число такихъ бросаній, то мы можемъ ожидать поразительной правильности. Отношенія числа паденій на орелъ къ общему числу паденій будутъ почти равны, и чѣмъ больше будутъ числа испытаній, тѣмъ ближе къ равенству будутъ эти отношенія.

Во всѣхъ случайныхъ явленіяхъ, происходящихъ отъ совокупности многихъ причинъ, какъ постоянныхъ, такъ и перемѣнныхъ, мы замѣчаемъ именно эту правильность, которая и составляетъ *законъ случайныхъ явленій*, a priori посредствомъ математическаго анализа доказываемый въ математической теоріи вѣроятностей.

Большія числа поправляютъ случай и наблюденія надъ большимъ числомъ явленій; массовыя наблюденія, какъ часто говорятъ, открываютъ намъ правильность тамъ, гдѣ съ перваго взгляда ея быть не можетъ.

Законъ большихъ чиселъ иногда иллюстрируютъ слѣдующимъ прекраснымъ сравненіемъ. Дождь, падая на горизонтальную полированную поверхность, смочитъ всѣ плиты равномѣрно. Каждая капля падаетъ самостоятельно отъ другихъ и случайно. Могло бы, казалось, случиться, что на ту или на другую изъ плитъ не попадаетъ ни одной капли, или очень мало; однако, этого никогда не случится. Такова сила большихъ чиселъ.

Экспериментальная провѣрка закона большихъ чиселъ занимала, между прочимъ, знаменитаго натуралиста Бюффона. Взявши монету, онъ бросалъ ее 4 040 разъ, и получилъ 2 048 разъ орелъ и 1992—плату. Бюффону же принадлежитъ осуществленіе квадратурнаго круга посредствомъ бросанія иголки на рядъ параллельныхъ линій. Въ выраженіе математической вѣроятности пересѣченія при паденіи иглою одной изъ параллельныхъ линій входитъ Архимедово число π (отношеніе окружности къ діаметру). При большомъ числѣ испытаній отношеніе числа повтореній случайнаго событія къ общему числу испытаній стремится къ вѣроятности. Слѣдовательно, стоитъ съ терпѣніемъ бросать большое число разъ иголку, отмѣчая сколько разъ она пересѣчется съ одною изъ параллельныхъ линій, и можно будетъ найти приближенное значеніе числа π.

Значеніе теоремы Бернулли не ограничивается тѣмъ, что она доказываетъ a priori необходимость правильности въ повтореніи случайныхъ событій. Она даетъ, кромѣ того, возможность провѣрять вѣрность нашихъ предположеній относительно вѣроятности случайнаго событія. Понятіе о математической вѣроятности всякаго случайнаго событія заключаетъ въ себѣ субъективный элементъ. Говоря, напр., объ опредѣленіи математической вѣроятности паденія кости на ту или другую грань, мы выразились: «мы вѣримъ, что при работѣ надъ костью были употреблены всѣ усилія, чтобы сдѣлать ее симметричною и однородною». Но какъ бы ни былъ искусенъ мастеръ, никогда нельзя утверждать, что кость сдѣлана дѣйствительно изъ абсолютно-однороднаго матеріала, и что ея центръ тяжести совпадаетъ съ геометрическимъ центромъ. Поэтому, считая вѣроятность паденія кости на ту или другую грань равною $1/6$, мы несомнѣнно дѣлаемъ ошибку и вычисляемъ только первое приближеніе. На дѣлѣ кость всегда нѣсколько не-симметрична и не-однородна, и вслѣдствіе этого имѣетъ большую наклонность падать на одну грань, чѣмъ на другую, что и проявляется на опытѣ, такъ какъ дѣйствительныя паденія кости, конечно, не могутъ зависѣть отъ нашей вѣры въ ея симметричность и однородность. Поэтому, если при 60 000 бросаніяхъ кости отклоненіе отъ одной шестой для извѣстной грани будетъ больше, чѣмъ то, которое допускается теоремою Бернулли, то мы имѣемъ право съ извѣстною вѣроятностью заключить, что наша математическая вѣроятность неточна, и замѣнить ее другою—*объективною вѣроятностью* или возможностью.

Въ случаѣ паденія кубической кости можно a priori вычислить хотя бы приближенную величину математической вѣроятности. Въ гораздо большемъ числѣ случаевъ такая вѣроятность не можетъ быть вычислена, но, производя опыты или наблюденія, мы по числу повтореній случайнаго событія можемъ вычислить его объективную вѣроятность. Вѣроятность для 18-ти-лѣтней дѣвушки выйти замужъ въ теченіе двухъ лѣтъ за 25-ти-лѣтняго не можетъ быть, конечно, вычислена a priori. Но если мы припомнимъ, что по теоремѣ Бернулли: «при весьма большомъ числѣ испытаній отношеніе числа повтореній къ числу испытаній стремится къ вѣроятности событія»,—то для опредѣленія искомой вѣроятности должны получить списокъ весьма большого числа 18-ти-лѣтнихъ дѣвушекъ и число тѣхъ изъ нихъ, которыя въ теченіе двухъ лѣтъ вышли замужъ за 25-ти-лѣтнихъ. Частное отъ раздѣленія этого послѣдняго числа на число всѣхъ 18-ти-лѣтнихъ дѣвушекъ и будетъ искомая вѣроятность. Данныя хорошо разработанной итальянской статистики отвѣчаютъ намъ на этотъ вопросъ, какъ и на многіе другіе. Онѣ говорятъ, что искомая вѣроятность равна 0,0099. Какую бы комбинацію возраста жениха и невѣсты ни взяли, по даннымъ статистики можно опредѣлять соотвѣтствующую вѣроятность. Подобнымъ же образомъ могутъ быть опредѣляемы объективныя вѣроятности и другихъ событій.

Возьмемъ, напримѣръ, нѣсколько страницъ какого-нибудь писателя, сосчитаемъ число всѣхъ буквъ и число встрѣтившихся *а*. Отношеніе между числомъ встрѣтившихся буквъ *а* и общимъ числомъ всѣхъ будетъ объективная вѣроятность того, что первая попавшаяся случайно на страницѣ буква будетъ именно *а*. Возьмемъ другія страницы того же или другого русскаго писателя, и на основаніи закона большихъ чиселъ мы найдемъ почти тѣ же дроби для объективной вѣроятности появленія той же буквы. И литературное произведеніе, и газетная статья, и научный трактатъ, если они написаны на одномъ и томъ же языкѣ, дадутъ при большомъ отрывкѣ одинъ и тотъ же результатъ. Фонетическіе законы языка остаются одинаковыми для различныхъ авторовъ, и потому объективныя вѣроятности звуковъ въ одномъ и томъ же языкѣ будутъ имѣть одинаковыя значенія, изъ какого отрывка онѣ бы ни выводились. Но для другого языка объективныя вѣроятности тѣхъ же звуковъ получатъ иное значеніе. Разработанная на этихъ началахъ фонетическая статистика, примѣненная строго-научно, можетъ, охарактеризовавъ каждый данный языкъ системою чиселъ, дать прекрасный методъ для сравненія его съ другими языками. Первыя попытки въ этомъ направленіи были произведены въ сороковыхъ годахъ Ферстиманномъ надъ языками греческимъ, латинскимъ, готскимъ и санскритскимъ, но съ тѣхъ поръ на этотъ предметъ филологи мало обращали вниманія.

Теорія вѣроятностей родилась у игорнаго стола, и въ теченіе довольно значительнаго времени ея предметомъ продолжали быть азартныя игры: орлянка, игра въ кости, различные виды игры въ карты. Но великіе ученые XVII и XVIII вѣковъ, разрабатывавшіе эти приложенія теоріи вѣроятностей, видѣли въ комбинаціяхъ, представляемыхъ азартными играми, лишь предлоги для усовершенствованія методовъ науки. Еще Паскаль понималъ, что вѣтвь знанія, которой онъ и Ферма полагали начало, имѣетъ многоразличныя примѣненія къ всевозможнымъ случайнымъ явленіямъ, и въ теоріи вѣроятностей—геометрію случая. Скоро, дѣйствительно, передъ теоріею вѣроятностей открылось обширное поле самыхъ важныхъ приложеній какъ въ общественныхъ, такъ и въ научныхъ вопросахъ.

Однимъ изъ первыхъ приложеній явилось приложеніе теоріи вѣроятностей къ рѣшенію вопроса, который въ XVIII вѣкѣ, столь богатомъ войнами, могъ интересовать не одну жену офицера или солдата, не отличавшуюся вѣрностью классической Пенелопы. Это вопросъ объ опредѣленіи срока, послѣ котораго безъ вѣсти пропавшій мужъ могъ считаться мертвымъ, а слѣдовательно его жена могла, не подвергая себя извѣстному Гамлетовскому упреку, наложить на себя новыя брачныя узы.

За этимъ первымъ приложенiемъ послѣдовали многiя другiя приложенiя: къ страхованiю жизни, отъ огня и т. п. Явились, какъ всегда, и увлеченiя: теорiя вѣроятностей прилагалась, напр., къ опредѣленiю вѣроятностей судейскихъ приговоровъ, рѣшенiй законодательныхъ собранiй и т. п.

Въ настоящее время все болѣе и болѣе выясняется то громадное значенiе, которое въ области научныхъ вопросовъ принадлежитъ основанному на теорiи вѣроятностей статистическому методу — а въ практической жизни — основанному на теорiи вѣроятностей страхованiю отъ бѣдствiй, происходящихъ отъ случайныхъ событiй.

На теорiи вѣроятностей основывается статистическiй методъ. Его техника, руководимая теорiей вѣроятностью, выработывается постепенно въ особую вѣтвь знанiя, въ особую науку — математическую статистику. Науку эту можно разсматривать какъ вѣтвь логики, изучающей всѣ методы, которыми человѣческiй умъ пользуется для прiобрѣтенiя новыхъ истинъ.

Такъ какъ всѣ выводы теорiи вѣроятностей основываются на законѣ большихъ чиселъ и не имѣютъ никакого значенiя, если будутъ относимы къ небольшому числу испытанiй, то и статистическiй методъ нуждается въ массовыхъ наблюденiяхъ для правильности своихъ выводовъ. Только большiя числа устанавливаютъ извѣстную правильность въ повторенiи случайныхъ событiй; только имѣя въ статистическихъ таблицахъ данныя относительно большого числа однородныхъ случайныхъ событiй, мы можемъ выводить объективныя вѣроятности ихъ и, пользуясь формулами теорiи вѣроятностей, при измѣненiи отношенiя между числомъ повторенiй событiя и общимъ числомъ испытанiй, — судить о томъ, измѣнились ли главныя причины, проявляющiяся въ событiи, или же замѣченное измѣненiе упомянутаго отношенiя не выходитъ изъ предѣловъ измѣненiя, допустимаго самимъ характеромъ случайнаго событiя, какъ зависящаго не только отъ главныхъ постоянныхъ причинъ, но и отъ постоянно мѣняющихся, случайныхъ. Можетъ ли, другими словами, разсматриваемое случайное событiе быть уподоблено типическому случайному событiю — выходу, напр., шаровъ бѣлаго цвѣта изъ урны, заключающей въ себѣ неизмѣняющееся въ теченiе всѣхъ испытанiй число шаровъ разнаго цвѣта?

Сравненiе статистическихъ рядовъ въ томъ видѣ, въ какомъ они даются наблюденiями, съ такимъ типическимъ случайнымъ событiемъ, съ постоянною объективною вѣроятностью, приводитъ къ интересной классификацiи статистическихъ рядовъ, идея которой пришла почти одновременно, въ семидесятыхъ годахъ, двумъ ученымъ — германскому политикоэкономому

Лексису и французскому математику Дормуа. Примѣняя математическій критерій, вытекающій изъ формулъ теоріи вѣроятностей, къ различнымъ статистическимъ рядамъ, они нашли, что всѣ статистическіе ряды могутъ быть отнесены къ тремъ различнымъ категоріямъ.

Въ первую категорію входятъ всѣ тѣ ряды, въ которыхъ отклоненія слѣдуютъ тому же закону, которому они слѣдуютъ въ типическихъ случайныхъ явленіяхъ съ постоянною объективною вѣроятностью. Такіе статистическіе ряды Лексисъ называлъ обладающими нормальною дисперсіею (разсѣяніемъ). По Дормуа, для нихъ извѣстное отношеніе, которое онъ называетъ коэффиціентомъ расходимости, равно 1.

Въ рядахъ второй категоріи, напротивъ, отклоненія значительно больше, какъ будто бы въ этихъ явленіяхъ дѣйствовала какая-то возмущающая сила, постоянно измѣняющая объективную вѣроятность явленія; такія числа получались бы при выходѣ шаровъ изъ урны, если бы въ урну время отъ времени подсыпались то бѣлые, то черные шары. Такіе ряды называются рядами съ сверхнормальною дисперсіею; коэффиціентъ расходимости для нихъ больше единицы, и тѣмъ онъ больше, тѣмъ сильнѣе вліяніе пертурбирующихъ причинъ, т. е. измѣняющихъ объективную вѣроятность явленія.

Наконецъ, въ массовыхъ явленіяхъ третьей категоріи дѣйствуетъ регулирующая сила, направляющая ихъ къ большему постоянству, сглаживающая и уменьшающая ихъ отклоненія. Такіе ряды называются рядами съ дисперсіею ниже нормальной, и коэффиціентъ расходимости для нихъ меньше единицы.

Особенно интересный примѣръ рядовъ съ нормальною дисперсіею представляетъ рядъ, составленный изъ отношеній между числомъ рожденій младенцевъ мужского пола и числомъ рожденій младенцевъ женскаго пола.

Отношеніе это отличается замѣчательнымъ постоянствомъ по годамъ, по временамъ года, по странамъ, и можетъ быть приблизительно выражено отношеніемъ между числами 1063 : 1000.

Поразительное постоянство этого отношенія опровергаетъ различныя теоріи, объяснявшія полъ рождающагося младенца то тою или другою разностью въ годахъ отца и матери (теорія Hofacker—Sadler'a), то различіемъ питанія организма матери во время беременности. Дѣйствительно, разность между годами брачущихся варіируетъ по странамъ довольно рѣзко и представляетъ рядъ съ сверхнормальною дисперсіею; питаніе женщинъ варіируетъ въ одной и той же странѣ по годамъ. Отношеніе же между числами рожденій младенцевъ мужского пола и женскаго остается поразительно постояннымъ.

Интересно, что такое же постоянство обнаруживается, какъ показали изслѣдованія ботаника Гейера надъ коноплею и надъ Mercurialis annua, также и у двудомныхъ растеній. Гейеръ, независимо отъ Лексиса, пришелъ къ выводу, что это постоянство всего лучше объясняется тѣмъ, что уже сѣмянныя клѣтки различаются по ихъ поламъ; замѣчательно, что у Mercurialis annua тѣ клѣтки изъ которыхъ произойдутъ мужскіе организмы, находятся почти въ томъ же отношеніи къ клѣткамъ, изъ которыхъ произойдутъ женскіе, какъ и у людей, въ отношеніи 1059 : 1000. У конопли это отношеніе обратное: число сѣмянныхъ женскихъ клѣтокъ превышаетъ число мужскихъ въ отношеніи 1150 : 1000.

Рядами съ нормальною дисперсіею является также большинство рядовъ криминальной статистики. Отношеніе числа осужденныхъ французскими Cours d'assises къ населенію отличается весьма большимъ постоянствомъ: коэффиціентъ расходимости равенъ только 6. Такъ же малы коэффиціенты расходимости для отношенія числа приговоренныхъ женщинъ къ общему числу приговоренныхъ (2,3), для отношенія холостыхъ преступниковъ къ общему числу преступниконъ (3), для отношенія преступниковъ въ возрастѣ отъ 21 до 30 лѣтъ къ общему числу преступниковъ (1,75), для отношенія числа безграмотныхъ преступниковъ къ общему числу ихъ (5).

Нѣсколько больше уже коэффиціентъ расходимости для отношенія числа самоубійствъ къ населенію, такъ какъ и абсолютное, и относительное число самоубійствъ увеличивается.

Большое число примѣровъ рядовъ съ сверхнормальною дисперсіею представляетъ намъ демографія, или статистика народонаселенія. Для отношенія числа рожденій къ населенію коэффиціентъ расходимости равенъ 32; для отношенія числа браковъ къ населенію 25; для отношенія числа смертей къ народонаселенію 86. Большая величина послѣдняго коэффиціента объясняется эпидеміями, войнами, неурожаями.

Сверхнормальную дисперсію представляетъ также отношеніе числа выздоравливающихъ отъ эпидемій къ общему числу заболѣвшихъ. Обстоятельство это находится, очевидно, въ связи съ большею или меньшею силою эпидеміи. Напротивъ, въ случаѣ тѣхъ болѣзней, гдѣ выздоровленіе зависитъ преимущественно отъ ухода, мы должны получить ряды съ нормальною дисперсіею, и Физмеръ дѣйствительно получилъ для процента выздоравливающихъ отъ пневмоніи рядъ съ нормальною дисперсіею.

Если эпидеміи, войны, неурожаи—играютъ роль причины, возмущающей правильное дѣйствіе закона большихъ чиселъ, какъ бы подбрасывающей черные шары въ урну, то законодательство, напротивъ, играетъ часто роль причины регулирующей, и потому примѣры рядовъ съ ниже-нормальною дисперсіею мы встрѣчаемъ преимущественно въ тѣхъ статистическихъ рядахъ, на которые оказываетъ вліяніе законодательство.

Статистическій методъ, какъ видно изъ предыдущихъ примѣровъ, можетъ быть прилагаемъ къ различнымъ отраслямъ знанія. Но какъ ни разнообразны могутъ быть приложенія статистическаго метода, есть одна область явленій, гдѣ статистическій методъ является незамѣнимымъ, единственнымъ методомъ, дающимъ точныя числовыя данныя. Это—область общественныхъ явленій.

Метеорологія можетъ еще мечтать объ апріорномъ математическомъ рѣшеніи задачи о направленіи вѣтровъ и океаническихъ теченій на земномъ шарѣ, сплошь покрытомъ водяною оболочкою и окруженномъ атмосферою. Но область запутанныхъ явленій общественной жизни настолько сложна, что здѣсь приложеніе математики представляется намъ трудно осуществимымъ. Увлеченіе математическимъ методомъ составляло характерную черту XVIII вѣка, пораженнаго созданіемъ небесной механики, и Кондорсе мечталъ «освѣтить политическія и нравственныя науки свѣточемъ алгебры». Но еще тогда это увлеченіе было осмѣяно аббатомъ Галіани въ одномъ изъ остроумнѣйшихъ сочиненій XVIII вѣка: «Бесѣды о торговлѣ зерномъ». Теперь это увлеченіе прошло. Только въ политической экономіи мы видимъ попытки приложить математическій методъ къ тѣмъ спеціальнымъ частямъ ея, которыя трактуютъ объ обмѣнѣ и о денежномъ обращеніи. Громадная сложность явленій общественной жизни дѣлаетъ трудно примѣнимымъ въ изученіи этихъ явленій дедуктивный математическій методъ; зато невозможность опыта дѣлаетъ особенно драгоцѣннымъ статистическій методъ, а вмѣстѣ съ статистическимъ методомъ дѣлается необходимою и отрасль математики — математическая статистика, какъ строгій стражъ точности полученныхъ результатовъ.

Совокупность результатовъ, полученныхъ для науки объ обществѣ съ помощью статистическаго метода или метода массовыхъ наблюденій, составляетъ особую вѣтвь знанія, которую обыкновенно называютъ статистикою, но было бы правильнѣе назвать ее соціальною статистикою, подобно тому, какъ уже существуетъ статистика медицинская и можетъ существовать статистика фонетическая.

Изъ сказаннаго выше о цѣли массовыхъ наблюденій всякаго рода видно, что конечная цѣль соціальной статистики должна заключаться въ томъ, чтобы изъ наблюденій надъ массами однородныхъ общественныхъ явленій, во-первыхъ, вывести числовыя данныя, характеризующія частоту появленія извѣстнаго соціальнаго явленія (брака въ томъ или другомъ возрастѣ, самоубійства, кражи со взломомъ); во-вторыхъ—изучить измѣняемость этихъ числовыхъ данныхъ. Послѣдняя и самая важная цѣль статистики состоитъ въ томъ, чтобы проникнуть насколько возможно въ причинную связь между различными явленіями общественной жизни. Статистика можетъ сдѣлать это, группируя извѣстнымъ образомъ свои данныя, изолируя, благодаря такой группировкѣ, одну изъ причинъ и выставляя ея значенiе для разсматриваемаго соцiальнаго явленiя. Такъ, для того, чтобы выяснить зависимость самоубiйствъ отъ возраста, она должна распредѣлить данныя относительно самоубiйствъ по возрастамъ.

Говоря языкомъ математической теорiи вѣроятностей, мы должны сказать, что цѣль соцiальной статистики должна состоять въ томъ, чтобы охарактеризовать общественный организмъ возможно большимъ числомъ объективныхъ вѣроятностей, и путемъ сравненiя различныхъ соцiальныхъ организмовъ вывести числовыя связи, существующiя между объективными вѣроятностями различныхъ явленiй. Такъ, въ физикѣ каждое простое или сложное тѣло характеризуется системою физическихъ постоянныхъ (атомный и удѣльный вѣсъ, показатель преломленiя и т. д.). Чѣмъ больше мы знаемъ такихъ физическихъ постоянныхъ для физическаго тѣла, тѣмъ ближе мы знаемъ самое тѣло; чѣмъ больше числовыхъ связей (функцiональныхъ зависимостей) нами найдено, тѣмъ больше мы знаемъ физическихъ законовъ.

Не съ одними постоянными отношенiями встрѣчается соцiальная статистика. На всякомъ шагу въ ней замѣчаются и такiе ряды, которые Лексисъ называетъ эволюторными; примѣръ такихъ рядовъ представитъ, напр., во всякой прогрессирующей странѣ рядъ, составленный изъ годовыхъ цифръ лицъ, получающихъ образованiе, и т. п. Во всѣхъ этихъ рядахъ замѣчается уже не постоянство, а тенденцiя измѣняться въ томъ или другомъ направленiи.

Но и тѣ ряды, которые представляютъ поразительное постоянство, заставившее Кетле говоритъ объ опредѣленномъ бюджетѣ преступниковъ, который платитъ всякое общество,—на дѣлѣ также подвергаются «вѣковымъ неравенствамъ». Фаталистическое воззрѣнiе Кетле и прочихъ послѣдователей «математической школы» въ статистикѣ уступаетъ мѣсто другому воззрѣнiю, которое разсматриваетъ всякую вычисляемую статистикою объективную вѣроятность, какъ продуктъ всего общественнаго строя, измѣняющiйся вмѣстѣ съ измѣненiемъ самаго строя.

Мѣсто соцiальной статистики въ ряду другихъ общественныхъ наукъ легко опредѣлится, если мы будемъ исходить изъ предложеннаго О. Контомъ раздѣленiя соцiологiи—науки объ обществѣ—на абстрактную и конкретную.

Абстрактная наука объ обществѣ, изучающая законы объ общественности вообще, законы, которые были бы получены путемъ отвлеченiя отъ конкретныхъ общественныхъ организмовъ — еще не существуетъ. Всѣ существующiя теперь общественныя науки (наука о хозяйственныхъ отношеніяхъ или политическая экономія, исторія прагматическая, исторія культуры, исторія права) суть части конкретной соціологіи потому, что всѣ изучаютъ существующія или существовавшія общества и государства. Соціальная статистика составляетъ часть той же конкретной соціологіи; но между тѣмъ какъ другія науки отличаются между собою по предметамъ изслѣдованія (право, хозяйство, литература), соціальная статистика отличается отъ нихъ по методу. По предмету изслѣдованій она такъ же обща, какъ сама наука въ обществѣ, такъ какъ въ кругъ ея изслѣдованій одинаково входятъ и важнѣйшія явленія физіологической жизни отдѣльнаго человѣка, и явленія хозяйственной жизни, и, наконецъ, тѣ явленія, которыя обусловливаются разумно-нравственною стороною человѣческой природы. Этимъ различнымъ сторонамъ человѣческой дѣятельности соотвѣтствуетъ раздѣленіе статистики на три главные отдѣла: 1) демографія, или статистика народонаселенія (наиболѣе разработанная и наиболѣе пользующаяся помощью математическаго анализа часть статистики); 2) экономическая статистика, и 3) статистика моральная или культурная, изучающая повторяемость преступленій, самоубійствъ, дѣятельность школы, благотворительности, поскольку она проявляется въ числовыхъ данныхъ.

Совпадая по своему предмету съ другими частями общественной науки, соціальная статистика отличается отъ нихъ по методу. Мы видѣли, что этотъ методъ заключается въ томъ, чтобы изъ наблюденій надъ массами явленій вывести извѣстныя числовыя постоянныя, характеризующія данный соціальный организмъ, и, пользуясь вспомогательными формулами теоріи вѣроятностей, отличить при измѣненіи этихъ числовыхъ постоянныхъ тѣ, которыя происходятъ отъ причинъ случайныхъ, отъ тѣхъ, которыя указываютъ на измѣненія въ строѣ самого организма. Въ этомъ числовомъ методѣ — преимущество и сила статистики сравнительно съ другими частями общественной науки, и поэтому она можетъ развиваться, только опираясь постоянно на указанія науки о числахъ — чистой математики. Только опираясь на указанія теоріи вѣроятностей и основанной на ней математической статистики, соціальная статистика можетъ не дѣлать тѣхъ ошибокъ, которыхъ не лишена ея исторія. Статистика и должны научиться у астрономовъ и физиковъ, какимъ образомъ, только постоянно прибѣгая къ помощи чистой математики, можно открывать вѣковыя неравенства въ отношеніяхъ, кажущихся постоянными, и отъ эмпирическихъ законовъ, соотвѣтствующихъ законамъ Кеплера, перейти къ истиннымъ законамъ природы, типомъ которыхъ является великій законъ всемірнаго тяготѣнія.

Но какъ ни велика, какъ ни важна роль статистики, какъ части общественной науки, она неизбѣжно нуждается въ дополненіи. Въ самомъ дѣлѣ, что даетъ намъ, напримѣръ, такъ называемая моральная статистика? Она указываетъ намъ, напримѣръ, число самоубійствъ, измѣненіе чиселъ по временамъ года, по родамъ самоубійства, наводитъ на интересныя и важныя мысли. Но для психологіи самоубійства, для выясненія той связи, которая существуетъ между жизнью общества и фатальнымъ поступкомъ самоубійцы, она не даетъ почти ничего. Она не вводитъ въ психологическій міръ самоубійцы, такъ какъ принуждена соединять всѣ самоубійства, независимо отъ психологическихъ мотивовъ, въ одну цифру ихъ и для нея по необходимости—цѣломудренный, одаренный нѣжною чувствительностью Вертеръ, лишающій себя жизни изъ любви къ Шарлоттѣ, и пресыщенный страстями и наслажденіями Ролла фигурируютъ въ статистической таблицѣ какъ однородныя единицы.

Вотъ почему статистика необходимо нуждается въ дополненіи: мы только тогда поймемъ извѣстное явленіе жизни человѣка, когда познакомимся не только съ его психологіею, но и съ психологіею и жизнью той среды, въ которой онъ жилъ и развивался. «Человѣческіе документы» въ родѣ дневника Башкирцевой—являются лишь въ видѣ исключенія. Ихъ можетъ замѣнять и дѣйствительно замѣняетъ психологическій и соціологическій романъ новѣйшаго времени. Эту мысль съ особеннымъ увлеченіемъ развивалъ одинъ изъ представителей современнаго реалистическаго романа—Эмиль Зола.

«Мы указываемъ,—пишетъ онъ въ своемъ: «Le roman expérimental», отъ лица всѣхъ реалистовъ, — механизмъ полезнаго и вреднаго; мы раскрываемъ детерминизмъ человѣческихъ и общественныхъ явленій, чтобы впослѣдствіи можно было овладѣть ими и направлять эти явленія». Романистъ сравнивается съ естествоиспытателемъ, производящимъ опыты.

Конечно, есть доля увлеченія въ этихъ мысляхъ автора «Жерминаля» и «Денегъ». Прекрасную критику этихъ мыслей даетъ Гюйо въ недавно переведенномъ на русскій языкъ сочиненіи: «Искусство съ соціологической точки зрѣнія». Онъ указываетъ совершенно справедливо на то, что опытъ романиста только съ большою натяжкою можно уподобить опыту естествоиспытателя; опытъ послѣняго производится въ природѣ, опытъ перваго—въ мозгу романиста. Но каковы бы ни были увлеченія Зола, нельзя не признать извѣстной доли правды въ его взглядахъ, а слѣдовательно высокаго общественнаго и въ извѣстной степени научнаго значенія современнаго романа.

Основной принципъ всякаго научнаго мышленія, по которому всякое явленіе должно вполнѣ опредѣляться его причинами, оказываетъ и на литературу все большее и большее вліяніе. Романъ во вкусѣ Дюма, романъ основанный на эффектахъ и случайностяхъ, въ которомъ развязки являются какъ Deus ex machina, уступитъ мѣсто роману, въ которомъ всякій поступокъ дѣйствующихъ въ романѣ лицъ является слѣдствіемъ опредѣляющихъ его причинъ: наслѣдственности, воспитанія, вліянія среды физической или соціальной.

Составляя необходимое дополненіе статистики, романъ не является въ то же время ея антитезою. Онъ имѣетъ со статистикою многія общія черты, которыя съ своей стороны обнаруживаютъ важное значеніе романа.

Подобно тому какъ статистика, классифицируя извѣстнымъ образомъ собранные ею факты, преслѣдуетъ цѣль исключить вліяніе нѣкоторыхъ изъ причинъ, производящихъ извѣстное явленіе соціальнаго міра, и изучить такимъ образомъ только вліяніе остальныхъ, и романъ всегда преслѣдуетъ цѣль изолированія одной изъ причинъ. Подобно тому какъ «сложные портреты» Гальтона (Statistics by incomparicon) доставляютъ общія типическія черты лица извѣстной расы или профессіи, романистъ всегда рисуетъ вамъ типъ. Черты Плюшкина или Павла Ивановича Чичикова, разсѣянныя въ разныхъ индивидуумахъ, сконденсированы великимъ основателемъ русскаго реальнаго романа въ типическіе, ярко возникающіе передъ нами образы. Притомъ романъ ставитъ типъ или характеръ въ обстановку, гдѣ его основныя черты могутъ развиться и обнаруживаться въ той степени, въ которой онѣ рѣдко развиваются въ дѣйствительной жизни, гдѣ случайности постоянно нарушаютъ логику событій. «Дѣйствительная жизнь и конкретная исторія, — говоритъ Гюйо, — наполнены недоконченными мыслями, разбитою волею, сломанными характерами, неполными и изувѣченными человѣческими существами. Въ романѣ сокращается до крайней необходимости доля случайныхъ происшествій, и въ чертахъ, рѣзко дѣйствующихъ на нашъ умъ, обнаруживается связь извѣстной причины съ дѣйствіемъ». Въ «Ученикѣ» П. Бурже читатель ясно понимаетъ, какъ темпераментъ, воспитаніе и плохо понятая философія могли привести героя къ постыдной мысли экспериментировать надъ живымъ существомъ; читая объ Іудушкѣ Головлевѣ у Салтыкова, — понимаешь, что такой типъ могъ вырости только на почвѣ крѣпостной Россіи.

«Романъ, — говоритъ Гюйо, — есть упрощенное и поразительное изложеніе соціологическихъ законовъ».

Въ какихъ бы дополненіяхъ ни нуждалась, однако, статистика, во всякомъ случаѣ развитіе ея представляетъ громадную важность для развитія соціальной науки вообще. Она открываетъ для общественной науки новый неисчерпаемый источникъ истинъ, позволяетъ ей замѣнить абстрактныя метафизическія понятія, такъ долго господствовавшія въ общественной наукѣ, живою водою точнаго математическаго знанія и даетъ возможность при свѣтѣ факела математическаго анализа разыскивать причинную связь между общественными явленіями.

Новѣйшіе успѣхи математической статистики косвеннымъ образомъ начинаютъ проявлять вліяніе на выработку новыхъ методовъ изслѣдованій въ политической экономіи. До сихъ поръ еще идетъ въ этой наукѣ оживленный споръ о томъ, какого метода она должна держаться, споръ о томъ, есть ли политическая экономія наука дедуктивная, какъ учитъ классическая школа, или индуктивная, какъ смотритъ школа историческая. Лексисъ, которому мы обязаны изслѣдованіями о дисперсіи статистическихъ рядовъ, вноситъ и въ споръ о методахъ политической экономіи новыя и важныя мысли, показывая въ своемъ классическомъ сочиненіи: «О французскихъ ввозныхъ и вывозныхъ преміяхъ»,—какъ можно соединять дедукцію съ индукціею, и постояннымъ пользованіемъ параллельно идущими статистическими рядами достигаетъ интересныхъ выводовъ въ изученіи явленій хозяйственной жизни.

Данныя, собираемыя и обрабатываемыя соціальною статистикою, имѣютъ не только важное теоретическое значеніе,—не менѣе важно и ихъ практическое значеніе.

Ни одно мѣропріятіе, касающееся той или другой изъ сторонъ общественной жизни, не можетъ считаться достаточно обоснованнымъ, если оно не опирается на хорошо собранныя и серьезно разработанныя статистическія данныя. Съ другой стороны, безъ статистическихъ данныхъ невозможно было бы и то широкое развитіе разнообразныхъ страховыхъ предпріятій, которое мы видимъ въ Западной Европѣ и Сѣверной Америкѣ, гдѣ образовался особый классъ техниковъ вычислителей (актуаріевъ), спеціальность которыхъ состоитъ въ обработкѣ статистическихъ данныхъ и въ вычисленіяхъ, необходимыхъ для правильнаго веденія страховыхъ операцій.

Критическія обстоятельства только-что пережитаго нами тяжелаго года [1]) должны, по нашему мнѣнію, обратить вниманіе всѣхъ интересующихся экономическими вопросами на одну изъ формъ страхованія—страхованіе посѣвовъ отъ неурожая. Несомнѣнно, что первенствующее значеніе въ дѣлѣ борьбы съ бѣдствіями, подобными постигшему Россію въ 1891 г., имѣютъ экономическія мѣры, поднятіе техники сельскаго хозяйства, изученіе климатическихъ и почвенныхъ условій и т. п. Но всѣ эти задачи требуютъ для своего разрѣшенія болѣе или менѣе продолжительное время. Неотложною представляется задача о лучшей организаціи продовольственнаго дѣла.

[1]) Рѣчь идетъ о голодѣ 1891 года.

Недостатки существующей у насъ организаціи этого дѣла давно уже указывались всѣми, кому приходилось по той или другой причинѣ всматриваться ближе въ его веденіе на мѣстахъ, въ провинціи. Въ настоящее время они сознаны уже всѣми, и здѣсь не мѣсто перечислять ихъ.

При предстоящей реорганизаціи этого дѣла нельзя будетъ, конечно, обойти и вопросъ о примѣненіи къ ней въ той или другой степени идеи страхованія, примѣненіе которой въ борьбѣ съ другими бѣдствіями принесло столько пользы. Поэтому, несмотря на всѣ трудности, исключительно принадлежащія этой формѣ страхованія (опредѣленіе нормы страхуемаго урожая въ размѣрѣ, не дѣлающемъ выгоднымъ пониженіе производительности труда; опредѣленіе величины страховой преміи въ размѣрѣ, который, обезпечивая достаточное количество пудовъ на десятину, въ то же время не обременялъ бы земледѣльца новыми тяжелыми платежами; устройство агентуры, вполнѣ подготовленной къ трудному дѣлу оцѣнки убытковъ отъ неурожая, и т. п.),—вопросъ о страхованіи посѣвовъ, несомнѣнно, заслуживаетъ серьезной научной разработки. Начало такой разработкѣ уже положено въ трудѣ, изданномъ въ Казани Л. Г. Грассомъ: «Страхованіе сельскохозяйственныхъ посѣвовъ отъ неурожая».

Идея о страхованіи посѣвовъ получила уже практическое примѣненіе въ Японіи; она разрабатывается во Франціи. Въ Россіи, странѣ земледѣльческой, на идею страхованія должно быть обращено такое же серьезное вниманіе, какое выпало въ странахъ промышленнаго типа на вопросъ объ обезпеченіи промышленнаго рабочаго путемъ страхованія отъ бѣдствій, сопряженныхъ съ болѣзнью, увѣчьемъ и т. п. Изданію всѣмъ извѣстныхъ германскихъ законовъ, устанавливающихъ обязательное государственное страхованіе промышленнаго рабочаго, предшествовали замѣчательныя изслѣдованія по математической статистикѣ Цейнера, Кнаппа, Циттельмера и др. Для насъ столь же необходимою является научная разработка вопросовъ, связанныхъ съ сельскимъ хозяйствомъ, и въ частности — какъ статистики урожаевъ, такъ и техники страхованія посѣвовъ.

Мы видѣли выше, какъ въ первыхъ фазисахъ развитія человѣческой мысли, еще въ туманной дали халдейской культуры, человѣкъ обращался къ числамъ— и въ ихъ таинственныхъ для него свойствахъ искалъ возможности проникнуть въ тайны будущаго для того, чтобы бороться съ слѣпымъ случаемъ. Фантастическія бредни халдейскихъ мудрецовъ и пиѳагорейцевъ не достигли, конечно, цѣли.

Прошли тысячелѣтія. И теперь съ каждымъ днемъ, съ каждымъ новымъ шагомъ въ развитіи наукъ о природѣ и объ обществѣ выясняется новая великая роль «числа». Числа, цифры, которыми испещрены статистическія и метеорологическія таблицы, могутъ казаться—для неумѣющихъ читать ихъ—сухимъ и ненужнымъ балластомъ, но для человѣка науки они—драгоцѣнный матеріалъ, основываясь на которомъ наука стремится расширить наше пониманіе явленій природы и общественной жизни, и къ числамъ же должны мы обращаться для того, чтобы на нихъ основать тѣ мѣры, которыя должны избавлять человѣчество въ будущемъ отъ различныхъ грядущихъ бѣдствій, каковы, напримѣръ, неурожаи и многое другоея тому подобное.

Приведенной выдержкой изъ статьи проф. Васильева мы и заканчиваемъ послѣднія страницы этой книги, заключающія отдѣлъ «Отрывковъ изъ теоріи вѣроятностей». Заинтересовавшіеся предметомъ могутъ начать спеціальное его изученіе по указаннымъ уже выше образцовымъ руководствамъ. Къ перечню ихъ необходимо еще добавить *Calcul des Probabilités*» par J. Bertrand («Исчисленіе вѣроятностей» Ж. Бертрана), сочиненіе давно уже нуждающееся въ переводѣ на русскій языкъ. Обширное предисловіе къ этому курсу подъ заглавіемъ «Законы случайнаго» можетъ быть прочтено съ особымъ интересомъ на ряду съ приведенной выше статьей проф. Васильева подъ тѣмъ же заголовкомъ. Кромѣ того рекомендуемъ вниманію читателей: «*Очерки по теоріи статистики*» А. А. Чупрова и «*Элементарную теорію страхованія жизни и трудоспособности*» С. Е. Савича, вышедшую въ 1909 году вторымъ изданіемъ. Между прочимъ, начало послѣдней книги посвящено попыткѣ элементарнаго (сравнительно съ другими курсами) изложенія теоріи вѣроятностей.

КОНЕЦЪ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.