РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

В. А. Коноплев

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ ГАЛИЛЕЯ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

В. А. Коноплев

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ ГАЛИЛЕЯ

Санкт-Петербург
"НАУКА"
1999

УДК 5.31/534

ББК 22.2
К 65

Коноплев В. А. Алгебраические методы в механике Галилея. — СПб.: Наука. 1999. — 288 с.

ISBN 5-02-024866-5

В монографии представлено алгебраическое построение оснований механики Галилея при условии полного отказа от дискретности «аналитической» механики, присутствия в реальной, в целом несвязной, локально непрерывной континуальной среде вращающихся и деформируемых «частиц». Основные первичные свойства Вселенной механики Галилея сформулированы в виде аксиом о балансе плотностей шестимерных векторных и скалярных мер, что привело к принципиально новой архитектуре механики Галилея как геометрии обобщенной группы Галилея.

Для математиков и механиков. Библиогр. 52 назв.

The Monograph contains algebraic description for fundamentals of Galilean mechanics, under conditions rejecting discreteness of «anallytic» mechanics rejecting presence of rotating and deformation particles in nonconnected locally continuous media. The main properties of Galilean mechanics Universe are formulated as axioms of solidity balance for 6-dimensional vector and scalar measures. This leads to the principally new architecture of Galilean mechanics, as geometry of generalized Galilean group.

For mathematicians and mechanicians.

Рецензенты:

Каф. теор. и прикл. механики СПбГУ,
проф. Г. Т. АЛДОШИН

ТП-98-II-№ 174

ISBN 5-02-024866-5

1. ВВЕДЕНИЕ

Жану Дьедонне и Исааку Яглому
посвящается...

Введением к монографии с таким названием могла бы быть отдельная работа с подробным анализом положения дел в обсуждаемом вопросе. Реальные попытки создания такого введения привели к нескольким вариантам обширного материала, основной недостаток которого состоял в том, что он мог бы быть понят специалистами с традиционным образованием в области механики не «до», а после прочтения монографии. Но это делало его в указанном качестве практически бессмысленным. Поэтому в окончательном варианте было принято решение сократить эту часть работы до минимума, поместив более подробные обсуждения частных вопросов в комментарии к основным положениям теории.

В первой главе продолжено совершенствование разработанной в [33] аксиоматики галилеевой механики, принципиально отличающейся от известных следующими положениями.

1. В качестве математической модели реальной среды постулируется измеримый по Лебегу точечный локально абсолютно непрерывный относительно меры Лебега (в дальнейшем — непрерывный) континуум с направляющим ориентированным евклидовым векторным пространством, связь с которым (как и положено) определяется тремя отдельными аксиомами (в целом 17 аксиом Г. Вейля) [11, 50, 52].

Показано, что часто отождествляемые понятия «непрерывность», «сплошность» и «континууальность» среды [7, 16, 17, 37, 38, 46] на самом деле принципиально различны. Среда — континууальна, если вышеуказанное точечное множество имеет мощность континуума (например, среда аналитической механики [37] таковой не является), но при этом не обязана быть ни в каком смысле ни непрерывной, ни сплошной (например, среда типа совершенного канторового множества [15]). Понятие «непрерывность» среды никак не связано с самой средой (точечным континуумом), а полностью определяется характером распределения на ней скалярных и векторных мер механики. Свойство «сплошность» среды эквивалентно требованию сохранения скалярных мер инерции и гравитации на сигма-алгебре механических систем и не имеет прямого отношения к свойству «непрерывность». Определенную ясность в вопрос вносит постулированное в монографии свойство несвязности Вселенной механики Галилея.

2. Для каждой точки непрерывного континуума строится окрестность, на которой реальный процесс движения среды в определенном смысле мало отличается от линейного преобразования соответствующего направляющего векторного пространства. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми линейными приближениями реальных преобразований среды в вышеуказанной окрестности и элементами некоторой подгруппы полной линейной группы, действующей на локальном комплекте векторного пространства. Эта четырехпараметрическая группа матриц является группой кинематических деформаторов (к-деформаторов) — математических моделей кинематики линейных приближений реального движения среды в окрестности любой точки, участвующей в движении параллельного переноса относительно базовой (инерциальной, если это нужно) системы координат.

Указанные матрицы — решения некоторого матричного дифференциального уравнения кинематики на группе к-деформаторов — являются единственными носителями информации о линейном приближении реального движения среды в окрестности любой точки. Построенная модель непрерывной среды является в целом несвязанным точечным локально непрерывным континуумом специального вида [3, 15, 41], в котором в соответствии с реальным положением дел нет ни изолированных точек [7, 37], ни подмножеств, которые можно было бы в каком-либо физически разумном смысле трактовать как вращающиеся и затем деформируемые «частицы», ни «материальных точек» как механических систем, «размерами которых можно пренебречь».

Механические системы, традиционно называемые абсолютно твердыми телами, вообще не существуют [33], а в условиях предположения об их существовании также являются непрерывной континуальной средой с дополнительными свойствами.

В механике континуума вообще и локально непрерывного, в частности, определены свои «правила игры», не имеющие аналогий с механикой конечного множества точек (аналитической механикой) или механикой деформируемых «частиц». Например, из обсуждения исключен вопрос о переносе теорем «об изменении количества движения и момента количества движения» (доказываемых для конечного множества точек с использованием второго закона Ньютона [7, 37]) на не существующие в реальной континуальной среде деформируемые «области» с нигде не дифференцируемыми или вообще несуществующими границами. Показано, что при определенных договоренностях о свойствах Вселенной механики Галилея нужда в таковых для непрерывной континуальной среды не возникает вообще. Это свидетельствует о том, что вышеуказанные теоремы являются не «законами реальной природы», а элементами неудачной аксиоматики механики, определяющей свойства этой природы. Например, отсюда следует, что утверждение о симметрии «тензора» напряжений, извлекаемое только из формы записи «интегральной формы теоремы о сохранении момента количества движения непрерывной среды», не имеет под собой ни математических, ни физических оснований.

3. В качестве основного в монографии действует следующее утверждение: любые «законы природы» для реальной локально непрерывной континуальной среды, как первичные свойства Вселенной механики Галилея, могут формулироваться только в виде аксиом, только в точке в виде утверждений о балансе плотностей соответствующих векторных и скалярных мер механики, определенных на сигма-алгебре подмножеств этой среды, и только в инерциальной системе координат.

При этом, естественно, исчезают из обращения такие «привычные», но объективно реально не существующие понятия, как «сила, приложенная в точке» (она всегда равна нулю), «точка со сосредоточенной массой» (масса которой всегда равна нулю), «угловая скорость точки» (принципиально не существующая, так как группа вращений определена только на векторных пространствах размерности не менее двух), количество движения (и тем более момент количества движения) такой точки и, следовательно, вся аксиоматика Ньютона, базирующаяся на указанных положениях, а также все, что из нее следует (уравнения Лагранжа первого рода, общее уравнение динамики, центральное уравнение Лагранжа, общее центральное уравнение [37] и т. п.).

Физически необоснованное, но традиционно используемое условие равновесия непрерывной среды в виде условия равновесия абсолютно твердого тела («вырезанных» из непрерывной среды параллелепипедов, тетраидов и т. п.) заменено на математически содержательное условие равновесия динамически непрерывного континуума (равенство нулю плотности динамической меры относительно меры Лебега).

4. В монографии отдельно вводятся понятия инерционной и гравитационной масс как скалярных мер на сигма-алгебре механических систем. Такое разделение иногда делалось и раньше, но затем постулировалось их равенство [12]. Здесь постулируется их пропорциональность с коэффициентом в виде корня квадратного из константы всемирного тяготения. Это утверждение приводит к возможности пересмотра многих привычных положений «классической» механики в части, касающейся понятий инерции и тяготения. Гравитационная масса (существенно меньшая инерционной) становится физически осязаемым понятием. Не вызывает, например, внутреннего сопротивления запись динамического винта земного тяготения в окрестности Земли в виде динамического винта инерции с ускорением земного тяготения и т. п.

5. Одно из центральных мест в развиваемой теории занимает принципиально новый объект механики — динамический винт (шестимерная кососимметрическая бимера Радона на сигма-алгебре механических систем) [33]. Осмысление этого понятия приводит к пониманию достаточно простого факта: в реальной природе не существует физических объектов, математическими моделями которых являются «моменты» любого происхождения (кинематические, кинетические, динамические и т. п.).

Появление момента как самостоятельного понятия обязано искусственному расчленению на две трехмерные части шестимерных скользящих векторов и винтов. И дело здесь не в форме записи: физические объекты, для которых динамические, кинематические и кинетические скользящие векторы и винты являются математическими моделями, принципиально шестимерны. «Моменты» на самом деле являются частями этих объектов, несущими в себе информацию для выполнения более глубокой факторизации векторного пространства свободных векторов (в частности, определения «линии действия» скользящего вектора, если речь идет о геометрических векторах — классах эквивалентности сонаправленных направленных отрезков прямой одинаковой длины). Здесь еще раз можно заметить, что любые математические объекты, появляющиеся в одних аксиоматиках и исчезающие — в других, им эквивалентных, не могут быть математическими моделями каких-либо реальных процессов любой природы.

Как результат, механика Галилея в монографии определена как геометрия (инвариант) обобщенной группы Галилея — группы шестимерных параллельных переносов на постоянные векторы, векторы-произведения постоянной скорости точек на время и постоянных поворотов в векторном пространстве винтов. При этом становится ясным, что объективно определены только две механики: вышеуказанная и геометрия группы Лоренца (геометрия Минковского) [50].

6. Показано, что в механике Галилея не существует динамических винтов, отличных от инерционных, гравитационных и деформационных. При этом достигнута идентичность определения указанных винтов: это шестимерные векторные меры воздействия на механические системы их дополнений в сигма-алгебре этих систем. Все прочие объявленные динамические винты (например, «кажущиеся», «дополнительные», «вибрационные», «поверхностные», «реактивные» и т. п.) либо не существуют, либо являются завуалированными вышеуказанными.

7. *В области кинематики непрерывных сред получены следующие результаты.*

7.1. Показано, что утверждение о разложении скорости движения произвольной точки «частицы» среды на поступательную, вращательную и деформационную составляющие (приписываемое Коши и Гельмгольцу) [16, 38, 46] ни физически, ни математически не состоятельно по следующим причинам:

— Если математической моделью среды является локально непрерывный континуум, то в нем нет точек со сосредоточенными массами и «частиц», которые можно было бы «замораживать», вращать, деформировать и т. д.

В этом смысле механика «непрерывной» среды ни в каком смысле не является обобщением понятия движения твердого тела — «замороженной частицы» с добавлением к ее параллельному переносу и вращению дилатационного деформирования. В монографии показано, что на самом деле все наоборот: абсолютно твердое тело (существование которого приходится допускать [33]) является частным случаем движения непрерывной континуальной среды с дополнительными свойствами (сужение на множество твердых тел группы к-деформаторов является группой вращения).

— «Формулы Коши—Гельмгольца» [16, 38, 46] на самом деле не являются функциями и, следовательно, не могут быть математическими моделями какого-либо физического процесса. Они представлены тождествами, в которых правые части являются другим обозначением левых, и поэтому (как и любые другие тождества) принципиально не могут быть источником информации о характере движения реальной среды вообще и о ее вращении и дилатации в частности.

— Существует бесконечно много тождественных разложений скорости произвольной точки среды в окрестности любой точки этой среды, и, следовательно, ни одно из них не является математической моделью какого-либо физического преобразования реальной среды (аналогично тому, как при разложении пути реального движения точки в ряды элементы этих рядов не являются математическими моделями этого реального движения).

— «Формулы Коши—Гельмгольца» связывают не сами преобразования среды, а скорости этих преобразований (по координатам и времени), по внешнему виду которых (как и любых других соотношений, связывающих скорости) принципиально нельзя получить никакой информации о самих преобразованиях среды. Такая информация может быть получена только путем интегрирования либо самих скоростей, либо неких дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от этих скоростей.

— Постулировав деформирование «частицы» в виде симметрической матрицы [16, 39, 46], тем самым из рассмотрения исключаются какие-либо «сдвиги» реальной среды, так как в составе такой матрицы сдвигов нет принципиально.

7.2. Разработан алгоритм построения группы к-деформаторов, не содержащей операторов, которые принципиально не могут быть линейными приближениями физических процессов деформирования реальной континуальной среды (симметрии, зеркальные отражения и т. д.). Группа к-деформаторов является четырехпараметрической группой (ее элементы зависят от времени и трех полевых координат) матриц, представимых в виде суммы единичной матрицы и матрицы, бесконечно малой в данной точке. При определенных условиях последняя матрица является матрицей деформаций среды в этой точке.

7.3. Разработаны основания кинематики локально непрерывной континуальной среды, ничего общего не имеющие с тем, что носит то же название в традиционных изданиях по механике «сплошной среды» [16, 38, 46]. Исследования свелись к изучению структуры группы к-деформаторов в произвольной точке указанной среды [9, 10, 11, 43, 44, 50].

На этом пути сделано и выяснено следующее:

— Построено дифференциальное уравнение кинематики на группе к-деформаторов — матричное дифференциальное уравнение, связывающее сами к-деформаторы с их скоростями и производными вектора скорости точки среды по полевым координатам. Имея последние из эксперимента или как результат решения динамической части задачи, находится к-деформатор среды, на самом деле являющийся линейным приближением математической модели реального движения среды в рассматриваемой окрестности. Действием этого оператора на векторы локального комплекта векторного пространства определяются траектории точек среды, для которых эти векторы являются радиусами-векторами, минуя стадию предварительного определения поля скоростей в окрестности выбранной точки.

— Как и в случае «формул Коши—Гельмгольца», не существует способа определить (понять, увидеть) характер линейного приближения процесса реального деформирования среды по внешнему виду к-деформатора.

— Получены и исследованы все образующие группы к-деформаторов. Показано, что существует бесконечно много тождественных разложений к-деформаторов на простейшие сомножители (трансвекции и дилатации [9, 10, 11, 33, 42, 43]).

— Существует бесконечно много «укрупненных» разложений к-деформаторов, в которых вышеуказанные простейшие составляющие, как «кирпичи», укладываются в «блоки». Такими блоками, например, являются группы Кавальери первого и второго типов, элементы разложений Брюа и т. п. [2, 10, 11].

— Особое внимание уделено разложениям к-деформаторов, содержащим вращения. Эти разложения (естественно, также тождественные) относятся к классу «укрупненных». Они называются полярными и представляют собой произведение вращения и дилататора — симметрической матрицы с положительным спектром [9, 11, 43, 44]. Таких разложений два: левостороннее и правостороннее. После подстановки этих разложений в уравнение кинематики на группе к-деформаторов получаются два разложения вектора скорости произвольной точки в окрестности ранее выбранной точки. Ни одно из них не совпадает с «формулами Коши—Гельмгольца», причем не совпадают и по форме записи, и по физическому смыслу: из этого следует, что скорость движения произвольной точки непрерывной континуальной среды, как и следовало ожидать, принципиально невозможно разложить на «чисто вращательную» и «чисто дилатационную» составляющие, так как каждое из двух слагаемых содержит обе составляющие (вращение и дилатацию). Иными словами, на самом деле не существует никаких реальных вращений и дилатаций континуальной среды: существует непрерывный «коктейль» из математических моделей этих движений, причем, во-первых, таких «коктейлей» два и, во-вторых, существует бесконечно много других «коктейлей» из других составляющих, в суперпозиции эквивалентных указанным.

— В обоих полярных разложениях трехмерные вращения в свою очередь разлагаются на простейшие вращения. Таких разложений также несколько (типа «самолетных», «корабельных», «эйлеровых» — в трехмерном пространстве или в пространствах другого типа [37] и т. п.). Естественно, они также все эквивалентны.

— Показано, что ни одно из перечисленных тождественных разложений не является математической моделью реального деформирования среды. Это также своеобразные «коктейли» из различных операторов, не имеющих физического смысла в отдельности, но приводящие в суперпозиции к одному и тому же линейному приближению реального преобразования среды.

— Рассмотрены вопросы кинематики локально непрерывной континуальной среды для частных случаев деформирования (бесциркуляционность, несжимаемость и т. п.). Например, показано, что среда несжимаема, если группа ее к-деформаторов является подгруппой специальной линейной группы (матриц с единичным определителем).

— Изучен вопрос о построении матрицы деформаций среды (несимметрической в общем случае) и ее скорости. Получена связь этих матриц с к-деформаторами, их скоростями, скоростями изменения скорости точки по полевым координатам, векторами перемещения и т. п.

В частности, показано, что деформациями непрерывной среды являются не суммы частных производных вектора перемещений по полевым координатам, как это принято считать [16, 38, 46, 47], а сами эти производные. Указанные понятия совпадают только при бесциркуляционном движении среды (течении, деформировании).

Вектор перемещения среды впервые определен аналитически, что позволило формализовать многие положения теории, в частности, получить аналитическое условие сплошности среды при деформировании, не имеющее никакого отношения к претендующим на ту же роль условиям Сен-Венана [38] и состоящее в постоянстве дивергенции вектора перемещения, в частности равенства ее нулю.

7.4. Разработан принципиально новый математический формализм кинематики, по предположению, абсолютно твердого тела. Сложное движение тела рассматривается как движение последнего элемента кинематической цепи в терминах кинематических винтов и шестимерных квазискоростей с учетом возможных конструктивных параллельных переносов и поворотов в кинематических парах этой цепи [18, 33]. В последнем случае получены простые в записи и непосредственной реализации на ЭВМ матричные формулы, имеющие компактную форму при любом количестве промежуточных движений [33].

7.5. Простое свободное движение и движение с простейшими голономными связями построено как частный случай сложного движения. Получены матричные уравнения кинематики на группе к-деформаторов среды при условии, что эта среда — твердое тело, а деформирование этой среды — вращение [33].

7.6. Разработаны основания теории представлений группы вращений твердого тела в группах Родрига—Гамильтона, Кейли—Клейна и теле кватернионов [34].

8. *В области динамики непрерывных сред получены следующие результаты.*

8.1. В уравнения движения непрерывной среды входят дивергенции строк матрицы напряжений или их скоростей, а не сами эти матрицы [16, 17, 38, 46, 47]. Поэтому для традиционного представления связи указанных напряжений с элементами матрицы деформаций (для гуково-упругих сред) и с элементами скорости этой матрицы (для вязких жидкостей) в виде матричных функций матричных аргументов нет никаких оснований (ни физических, ни математических). Кроме того, при использовании таких функций (называемых определяющими соотношениями) из поля зрения выпадают по сути дела центральные вопросы разрешимости этих соотношений относительно элементов матриц-аргументов (несимметрических в общем случае).

В данной монографии введено новое понятие: «уравнения механического состояния» непрерывной континуальной среды. В исходном варианте это — неявные функции элементов вышеуказанных матриц и реологических коэффициентов (вязкости и жесткости), отвечающие следующим требованиям:

— инвариантность формы записи функций относительно выбора инерциальной системы координат;

— инвариантность величин реологических коэффициентов относительно выбора инерциальной системы координат;

— однозначная разрешимость указанных неявных функций относительно любой группы переменных (напряжений, деформаций или их скоростей).

Первые два требования обеспечивают принадлежность уравнений к механике Галилея (как инварианта группы Галилея), третье требование обеспечивает корректность уравнений [45]. Если последнее требование не выполняется (решений нет или их больше одного), то уравнения механического состояния называются некорректными, если не выполняются два первых требования, то среда не может исследоваться методами галилеевой механики.

Иными словами, некорректные уравнения динамики непрерывной среды — это результат совместного решения уравнений движения и некорректных уравнений механического состояния. Вопрос о том, к каким результатам может привести интегрирование некорректных уравнений динамики непрерывной среды, требует отдельных исследований [36, 45], особенно в случаях, когда в условиях некоторых предположений уравнения динамики корректных и некорректных сред совпадают.

8.2. Частные производные от напряжений по полевым координатам (входящие в дивергенции строк матрицы напряжений) вычисляются по правилам дифференцирования неявных функций, где вышеуказанная корректность уравнений механического состояния играет принципиальную роль.

8.3. Каждый вид уравнений механического состояния порождает класс эквивалентных непрерывных сред. Каждому классу непрерывных сред соответствуют свои уравнения динамики (результат совместного решения уравнений механического состояния и уравнений движения) и свои уравнения термодинамики. Большая часть классов корректных сред не имеет определяющих соотношений. Иными словами, множество непрерывных сред на самом деле представляет собой двумерный массив элементов, зависящих от класса среды и от величин реологических коэффициентов (вязкости, жесткости).

Указанный подход к синтезу уравнений механического состояния и, следовательно, к синтезу новых классов корректных непрерывных сред имеет практически неограниченные возможности.

8.4. Подробнее исследованы уравнения, содержащие среди прочих слагаемых квазилинейные комбинации элементов матриц деформаций или их скоростей с реологическими коэффициентами, зависящими от инвариантов этих матриц, полевых координат и температуры. В этом случае требование корректности уравнений сводится к требованию принадлежности матрицы реологических коэффициентов (вязкости, жесткости) некоторой группе.

Оказалось, что в этом случае аналогично тому, как каждая геометрия порождается некоторой группой («Эрланенская программа» Ф. Клейна [11, 50]), каждый класс квазилинейных непрерывных сред также порождается некоторой группой матриц указанных коэффициентов (вязкости, жесткости). Таким образом, располагая структурой полной линейной группы матриц, мы тем самым располагаем структурой множества возможных классов квазилинейных непрерывных сред.

8.5. На настоящем этапе исследований выяснено, что:

— Отдельное место занимает класс идеальных жидкостей.

— Существует шесть классов квазилинейных непрерывных вязких жидкостей и столько же классов квазилинейных упругих материалов;

— Существуют классы квазилинейных двумерных вязких жидкостей и упругих материалов, не имеющие трехмерных аналогов, что важно понимать при исследовании «плоских» задач [35]. Существование таких сред объясняется тем, что требования инвариантности их реологических коэффициентов относительно групп двумерных вращений гораздо «слабее», чем относительно групп трехмерных вращений.

— Существует класс квазилинейных некорректных сред Навье—Стокса—Лямэ [16, 17, 38, 46, 47] (матрицы реологических коэффициентов либо особенны, либо прямоугольны). Эти среды не порождаются какими-либо группами, откуда может следовать, что либо они занимают особое место среди непрерывных сред, либо вообще не существуют в реальном мире, являясь некорректными приближениями корректных сред.

— Исследованы подклассы основных классов сред при допущении о несжимаемости, бесциркуляционности (потенциальности) движения и т. п.

— Наиболее изящные результаты получены для подклассов непрерывных сред, для которых реологические коэффициенты первого типа пропорциональны дивергенции вектора перемещения или его скорости. В этом случае, используя свойство корректности уравнений механического состояния и групповую структуру множества матриц реологических коэффициентов, для всех корректных сред удалось в явном виде (как элементы обратных матриц) получить модули вязкости жидкости (определив это понятие впервые) и для всех квазилинейных упругих сред — модули упругости и далее — модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона. Тем самым показано, что среды Навье—Стокса—Ламэ в общем случае не имеют вышеуказанных модулей, которые определены только для бесциркуляционного деформирования среды.

— Показано, что реологические коэффициенты среды (вязкости и жесткости) не зависят от размерности среды и, следовательно, в этом смысле являются ее корректными характеристиками. Соответствующие модули (элементы обратных матриц реологических коэффициентов) таким свойством не обладают и *поэтому, в том же смысле, являются некорректными* характеристиками среды. Понимание последнего факта особенно важно при решении «плоских» и «одномерных» задач прочности, в которых традиционно без каких-либо на то оснований используются модули Юнга, сдвига и коэффициент Пуассона, полученные для трехмерных сред.

— Введено новое понятие эквивалентности классов сред: два класса сред динамически эквивалентны, если совпадают их уравнения динамики, два класса сред эквивалентны энергетически, если совпадают их уравнения термодинамики.

— *Все классы сред* исходно динамически и энергетически не эквивалентны.

— В условиях частных предположений о свойствах сред и характере их движения некоторые классы сред оказываются динамически эквивалентными.

— В случае бесциркуляционного движения несжимаемой жидкости при условии непрерывности смешанных вторых частных производных от вектора скорости точки по полевым координатам все вязкие жидкости динамически (но не энергетически) эквивалентны идеальной жидкости. Отсюда, во-первых, в частности, следует, что вязкие жидкости не могут иметь потенциальных течений, и, во-вторых, это может объяснить удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных результатов при исследовании потенциальных течений не слишком реально вязких жидкостей при почти постоянной температуре (например, воды) с использованием уравнений динамики идеальной жидкости.

— Из предыдущих пунктов следует, что среды, имеющие принципиально разные уравнения механического состояния, при определенных условиях могут иметь одинаковые уравнения динамики, и наоборот. Указанный факт может служить простым объяснением наличия разногласий теории и эксперимента для одних реальных сред и отсутствия для других при использовании одних и тех же уравнений динамики [36]. Отсюда также следует невозможность исследования процесса деформирования непрерывной среды с использованием только уравнений механического состояния или определяющих соотношений среды.

Не исключено, что одна и та же среда в разных условиях может принадлежать разным классам и, следовательно, вести себя принципиально по-разному. Особого внимания и исследования заслуживают случаи, при которых корректные и некорректные среды динамически эквивалентны.

8.6. Получены и исследованы матричные уравнения движения твердого тела в пространстве квазискоростей и обобщенных скоростей при наличии и отсутствии конструктивных параметров и простейших голономных связей в виде, готовом для непосредственного использования на ЭВМ [19, 24, 33]. Последнее означает, что из решения практических задач полностью исключен трудоемкий этап «составления уравнений движения тела», часто являющийся источником ошибок и иллюзий по поводу «научного подхода» к вопросу.

8.7. Впервые разработаны матричные алгоритмы вывода уравнений Лагранжа второго рода при наличии и отсутствии голономных связей для континуальных твердых тел (без использования аппарата аналитической механики и ньютонова формализма). Сформулированы и доказаны шестимерные континуальные аналоги основных свойств Вселенной механики в части, касающейся по предположению абсолютно твердых тел.

8.8. В качестве справочного материала для решения прикладных задач приведены основные результаты, полученные в механике систем твердых тел (в полном объеме опубликованные в [18—33]).

В заключение отметим следующее. В последние десятилетия появились монографии, в которых авторы стандартную идеологию построения механики [7] облекают в формы современной математики, например [1, 47], считая, что механика при этом становится в каком-то смысле «современнее». Конечно, трудно не согласиться с тем, что нельзя на пороге XXI века излагать научную литературу (в том числе «механическую») на языке прикладной математики XIX века. Но при этом необходимо учитывать два важных обстоятельства, с которыми приходится считаться. Во-первых, это — инерция системы прикладного математического (во втузах) и механического (в целом) образования. И это — проблема не «учеников», а «учителей». Во-вторых, представляется, что «язык» не должен быть самоцелью, главным является идейная сторона вопроса.

Хотелось, чтобы читатель, независимо от отношения к этим вопросам, с самого начала подготовил себя психологически к пониманию того, что данная монография не имеет ничего общего с вышеуказанными и им подобными. Она полностью посвящена обсуждению вновь предложенной аксиоматики и следующей из нее новой архитектуры галилеевой механики. Язык соответствует проблематике, но мог бы быть другим без особого ущерба для содержания (например, аппарат групп и алгебр Ли [42, 43], дифференциальной геометрии [6, 40, 48] и т. п.).

В работе нет практически ничего из того, что есть в стандартных отечественных курсах и их зарубежных аналогах по обсуждаемому предмету [7, 16, 17, 37, 38, 46], и вместе с тем есть многое из того, что нужно для понимания проблематики классической механики и решения прикладных задач на пороге XXI века. Естественно, нет в ней также никаких фантазий по поводу «удивительных» явлений, «чудес», парадоксов и связанных с ними попыток изобретения «новых» механик. Активный, математически интеллигентный читатель, конечно, должен все это проверить и несколько раз перепроверить. Сделать это не слишком трудно: все утверждения точно сформулированы и с большим стремлением к строгости доказаны. Но если при этом принципиальных возражений не найдется, то этот же читатель должен согласиться с тем, что многое из известного ему по [7, 16, 17, 37, 38, 46] требует глубокого и всестороннего переосмысления.

Что касается работ зарубежных специалистов в области непрерывной среды, то, наверное, был бы взаимно полезным симбиоз сделанного в данной монографии с некоторыми идейными результатами деятельности группы Нолла (W. Noll), Колемана (B. D. Coleman), в частности К. Трусдела [47].

Как и в [33], все утверждения в монографии распределены по трем непересекающимся множествам:

— аксиомы — утверждения, верные по договоренности;

— предложения — утверждения, верные по доказательству в определенных условиях;

— гипотезы — утверждения, возможно верные по договоренности;

— предположения — неверные утверждения, принимаемые по договоренности.

2. ВСЕЛЕННАЯ МЕХАНИКИ ГАЛИЛЕЯ И ЕЕ ПЕРВИЧНЫЕ СВОЙСТВА

Первичные свойства Вселенной механики Галилея, как и само это понятие, постулируются с использованием аксиом и следующих из них определений и утверждений [33].

2.1. АКСИОМЫ КИНЕМАТИКИ

Исходными, неопределяемыми понятиями теории являются *точки, свободные векторы и отношения между ними.* Первые пять аксиом определяют их свойства и постулируют существование в реальном мире физических объектов и их преобразований, для которых они являются математическими моделями [42, 47, 49, 50, 51].

Аксиома К.1. Существует точечный континуум D_3.

Комментарии: 1. Точка может трактоваться, например, как геометрическая точка (для иллюстраций) или как тройка вещественных чисел (для вычислений) [11].

2. Континуум D_3, при желании, можно считать математической моделью «физического пространства». Все, что происходит в реальном мире на уровне механики Галилея (без электромагнетизма), математически может быть представлено преобразованиями указанного континуума.

3. Не следует путать свойство континууальности множества D_3, определяемого только его мощностью (кардинальным числом), со свойствами типа «сплошности», «непрерывности» и т. п., ни в каком смысле не следующими из первого.

Аксиома К.2. Континуум D_3 измерим по Лебегу, $D_3^{\mu} \equiv \{D_3, \mathfrak{A}_3, \mu_3\}$.

Аксиома К.3. Над полем вещественных чисел определено трехмерное векторное пространство геометрических свободных векторов V_3 (8 аксиом, определяющих V_3, и 2 аксиомы размерности), направляющее для множества D_3 (3 аксиомы связи с V_3).

Комментарии: 1. V_3 — универсальный инструмент для фиксации положения точек континуума D_3 в некоторой (а в нужных случаях — специальной) системе координат.

2. Элемент V_3 (геометрический свободный вектор) при необходимости (например, для иллюстраций) может трактоваться как класс эквивалентности, содержащий все сонаправленные направленные отрезки одинаковой длины.

3. В числовом комплекте V_3 (в R_3) в каноническом базисе $[e^o] = (e_1^o, e_2^o, e_3^o)$, $e_1^o = \text{col}\{1, 0, 0\}$, $e_2^o = \text{col}\{0, 1, 0\}$, $e_1^o = \text{col}\{0,$ $0, 1\}$ любой представитель свободного вектора $x \in R_3$ совпадает со своим координатным столбцом $x = [e^o]x^o = x^o$, что позволяет в этом случае не различать координатную и инвариантную (бескоординатную) формулировки основных положений теории. В дальнейшем в основном используется числовой комплект векторного пространства свободных векторов R_3 и его декартовы произведения.

Аксиома К.4. Векторное пространство свободных векторов является евклидовым.

Комментарий. Аксиома **К.4** превращает аффинно-векторное пространство $A_3^\mu = V_3 \cup D_3^\mu$ в метрическое.

Аксиома К.5. Векторное пространство свободных векторов ориентировано.

Комментарии: 1. Аксиомы **К.3—К.5** постулируют существование ориентированного евклидова и, следовательно, нормированного и метрического аффинно-векторного пространства $A_3^\mu = V_3 \cup D_3^\mu$ (17 аксиом Германа Вейля [11, 50, 51]), где индекс μ напоминает, что континуум D_3 измерим по Лебегу.

2. Все, что происходит в реальном мире с вышеуказанным континуумом в условиях определенных договоренностей (см. ак-

сиому **К.8**), математически может быть представлено преобразованиями вышеуказанного векторного пространства (в геометрическом или числовом вариантах).

3. Элементы σ-алгебры $\mathfrak{B}_3^\mu$ ни в каком математически или физически содержательном смысле не являются «частицами» континуума D_3^μ, но могут быть *использованы для* «*измерения*» в смысле Д. Витали [15, 41] любого ограниченного (в евклидовой метрике) подмножества D_3^μ.

4. Ориентация числового комплекта векторного пространства R_3 определяется заданием трилинейной формы [11]

$$(x, y, z) = x \cdot \langle y \rangle z = x^T \langle y \rangle z, \tag{2.1}$$

где $\langle y \rangle$ — кососимметрическая матрица, порожденная вектором $y \in R_3$ (**К.3**) [11, 33]. (Тройка векторов x, y, z — правая, если $(x, y, z) > 0$, — левая, если $(x, y, z) < 0$, — линейно зависима, если $(x, y, z) = 0$).

Аксиома К.6. Существует подмножество (луч $T_+ = V_{t+} \cup D_t^\mu$) одномерного аффинно-векторного пространства $T = V_t \cup D_t^\mu$ — ось времени, $D_t^\mu \equiv \{D_t, B_t, \mu_t\}$ — континууальное множество моментов времени, измеримое по Лебегу.

Определение 2.1. Пусть: 1. Время T_+ не зависит от точки $y \in D_3^\mu$, $t(y) = t$;

2. На оси времени определено отношение эквивалентности: два момента времени t, t' эквивалентны, если они связаны равенством

$$t = kt' + t_o, \tag{2.2}$$

где $k > 0$ и $dt \,/\, dt' > 0$.

Тогда: 1. Время T_+ называется *абсолютным, однородным и изотропным*.

2. Произвольные константы t_o и k называются *началом отсчета и масштабом времени* [12, 51, 52].

Аксиома К.7. Время $T_+ = V_{t+} \cup \{D_t, \mathfrak{B}_t, \mu_t\}$ — абсолютно, однородно и изотропно.

Определение 2.2. Пусть: 1. P_q — n-параметрическое тело квадратных матриц, Q_n — n-мерное многообразие, $q \in Q_n$;

2. P_{q+}, $P_{q\times} = P_{q+} \backslash \{0\}$ — аддитивная и мультипликативная группы тела P_q;

3. 0_+, $1_\times$ — нейтральные элементы алгебраических операций сложения и умножения на указанных группах.

Тогда: 1. Матрица $A(q) \in P_q$ называется *бесконечно малой в точке* q_0 многообразия Q_n, если

$$\lim A(q) = 0_+, \; q \to q_0. \tag{2.3}$$

2. Элементы $A(q)$ и $B(q)$ называются *эквивалентными в точке* q_0, если

$$\lim A(q)B^{-1}(q) = \lim B^{-1}(q)A(q) = 1_\times, \; q \to q_0. \tag{2.4}$$

3. Множество $Q_n^0 \subset Q_n$, $q_0 \in Q_n^0$ называется *множеством бесконечной малости* функции $A(q)$ и *множеством эквивалентности* функций $A(q)$ и $B(q)$ соответственно.

Предложение 2.1. Пусть: 1. $E_0 = (o_0, [e^0])$ — фиксированная ортонормированная система координат в A_3^μ, $o_0 \in D_3^\mu$, $[e^0] \in V_3$, $[e^0] = (e_1^0, e_2^0, e_3^0)$, где e_i^0 — свободный вектор единичной нормы;

2. V_{3y} — векторное пространство

$$V_{3y} = \{h_y : h_y = x^0 - y^0, \; x \in D_3^\mu\} \tag{2.5}$$

представителей свободных векторов из V_3 с общим «началом» в произвольной точке $y \in D_3^\mu$;

3. x^{00}, $y^{00} \in R_3$ — координатные столбцы радиус-векторов $x^0, y^0 \in V_3$ точек x и $y \in D_3^\mu$ в E_0 (верхний внутренний индекс) в базисе $[e^0]$ (верхний внешний индекс), h_y^0 — координатный столбец вектора $h_y = x^0 - y^0$ в базисе $[e^0]$

$$h_y^0 = x^{00} - y^{00}; \tag{2.6}$$

4. $\mathbf{GL}_{yt}(\mathbf{R}, 3)$ — полная четырехпараметрическая линейная группа автоморфизмов (матриц) числового комплекта $V_{3y} \cong R_3$,

$t \in T_+$ (линейная группа автоморфизмов (матриц) числового комплекта $V_{3y} \cong R_3$, в момент времени $t \in T_+$, в точке $y \in D_3^{\mu}$) [10, 11, 43, 44];

5. $\mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, \mathbf{3})$ — множество матриц $D_d^{00} = D_d^{00}(q(t, y)) \in$ $\in \mathbf{GL}_{yt}(\mathbf{R}, \mathbf{3})$ перехода от базиса $[e^0]$ (верхний внутренний индекс) к произвольному неортонормированному базису $[e^d]$ (нижний индекс), вычисленных в базисе $[e^0]$ (верхний внешний индекс)

$$[e^d] = [e^0]D_d^{00}, \tag{2.7}$$

для которых существует хотя бы одна точка $q_0(t, y) \in Q_n^0$, в которой матрица

$$\Delta D_d^{00} = D_d^{00} - E \tag{2.8}$$

была бесконечно малой (2.3).

Тогда множество

$$\begin{aligned} \mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, \mathbf{3}) = \{D_d^{00} : D_d^{00} = D_d^{00}(q(t, y)) \in \mathbf{GL}_{yt}(\mathbf{R}, \mathbf{3}), \\ D_d^{00} = E + \Delta D_d^{00},\ \Delta D_d^{00} \to 0,\ q \to q_0\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

является группой.

Доказательство. 1. Пусть $A(q)$, $B(q) \in \mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, \mathbf{3})$, тогда $A(q) = E + \Delta A(q)$, $B(q) = E + \Delta B(q)$, $\Delta A(q) \to 0$, $\Delta B(q) \to 0$, $q \to q_0$, $\Rightarrow A(q)B(q) = E + \Delta A(q)E + E\Delta B(q) + \Delta A(q)\Delta B(q) =$ $= E + \Delta(A(q)B(q)) \Rightarrow A(q)B(q) \in \mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, \mathbf{3})$;

2. $A^{-1}(q) = (E + \Delta A)^{-1} = E + \Sigma_{k=1}^{\infty}(-\Delta A)^k$, $\|\Delta A\| < 1$, $\Sigma_{k=1}^{\infty}(-\Delta A)^k \to 0$ при $q \to q_0$ $\to A^{-1}(q) \in \mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, \mathbf{3})$.

Комментарии: 1. По определению группа $\mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, \mathbf{3})$ не содержит «несобственных» автоморфизмов R_3 типа зеркальных отражений, переворачиваний, осевых симметрий и т. п., которые принципиально не могут быть математическими моделями реальных (физических) преобразований среды.

2. Бесконечно малая матрица $\Delta D_d^{00} = D_d^{00} - E$ (2.3) играет важную роль в дальнейших построениях: будет показано (3.27), что при определенных условиях (3.22) она приближенно совпа-

дает с матрицей деформаций среды в окрестности точки $y \in D_3^{\mu}$ (3.23), а равенство (2.8)

$$D_d^{00} = E + \Delta D_d^{00} \tag{2.10}$$

определяет связь матрицы деформаций с матрицей D_d^{00}.

Определение 2.3. Гипотеза: Существует произвольное множество U произвольных (нелинейных) преобразований $u \in U$ аффинно-векторного пространства A_3^{μ}, таких что для любой точки $x \in A_3^{\mu}$ существует точка $y \in A_3^{\mu}$, такая что $y = ux$ (множество математических моделей реального преобразования физической среды).

Тогда среда D_3^{μ} называется *локально изменяемой.*

Определение 2.4. Пусть: 1. Среда D_3^{μ} локально изменяема;

2. $\mathbf{GTD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3) = \mathbf{T}_{yt}(\mathbf{R}, 3)\mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$ — четырехпараметрическая подгруппа полной аффинной группы $\mathbf{GA}_{yt}(\mathbf{R}, 3) = \mathbf{T}_{yt}(\mathbf{R}, 3)\mathbf{GL}_{yt}(\mathbf{R}, 3)$ на A_3^{μ}, где $\mathbf{T}_{yt}(\mathbf{R}, 3)$ и $\mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$ — соответствующие группы параллельных переносов в A_3^{μ}, и (2.9) на V_{3y};

3. Гипотеза: для любых $u_1 \in U$, $\varepsilon \in R_1$, $\varepsilon > 0$ и точки $y \in D_3^{\mu}$ существуют окрестность $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3$ этой точки, аффинное преобразование $v \in \mathbf{GA}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$ и преобразование $u_2 \in U$, такие что

$$u_1 y = vy + u_2 y,\ \|u_2 y\| \, \|vy\|^{-1} < \varepsilon,\ \|y\| = \max|\,y_i\,|,\ i = 1, 2, 3. \tag{2.11}$$

Тогда: 1. Измеримый по Лебегу континуум $D_3^{\mu} \equiv \{D_3, \mathfrak{B}_3, \mu_3\}$ называется *локально линейно изменяемой средой* (в дальнейшем — *средой*).

2. Четырехпараметрическая группа $\mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3) \subset \mathbf{GTD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$ называется группой линейных кинематических деформаторов (в дальнейшем — *к-деформаторов*) *среды*, матрицы $D_d^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$ — *к-деформаторами* среды в окрестности $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3$ точки $y \in D_3^{\mu}$ (в дальнейшем — среды ε_y).

3. Тройка объектов (A_3^{μ} с измеримым по Лебегу континуумом D_3^{μ} и группа $\mathbf{GTD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$ на A_3^{μ}):

$$\mathfrak{B} = \{A_3^{\mu}, \mathbf{GTD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)\} \tag{2.12}$$

называется *геометрической Вселенной механики Галилея* (в дальнейшем — *геометрической Вселенной механики*).

4. Множества из σ-алгебры $\mathfrak{B}_3$ называются *геометрическими системами.*

5. Геометрическая Вселенная механики $\mathfrak{B} = \{A_3^{\mu}, \mathbf{GTD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)\}$ называется *локально линейно изменяемой.*

6. Аффинное преобразование $v \in \mathbf{GA}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$ называется *ε-аффинным для системы* $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3$.

7. Базисы $[e^d] = [e^0]D_d^{00}$ называются базисами, *сопутствующими линейной деформации среды* $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3$.

Комментарии: 1. Определение из п. 4 указывает на то, что на этапе построения кинематики у элементов сигма-алгебры $\mathfrak{B}_3$ отсутствуют какие-либо «динамические» характеристики, а у используемых систем координат особые свойства типа инерциальности. Множества из $\mathfrak{B}_3$ являются геометрическими объектами, состоящими из точек, которые можно преобразовывать с использованием элементов множества U и также геометрических объектов — аффинных линейных преобразований из группы $\mathbf{GTD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$. Иными словами, в геометрической Вселенной механики Галилея нет ничего, кроме μ-измеримого точечного континуума и его геометрических преобразований (нелинейных и линейных).

2. Понятие «базис $[e^d]$, сопутствующий деформации», является одним из центральных в рассматриваемой теории: координатный столбец a^d радиус-вектора a любой точки линейно деформируемой среды в системе координат $E_d = (o_d, [e^d])$ остается постоянным и равным тому же координатному столбцу в начальный момент времени и, следовательно, координатному столбцу того же радиус-вектора в исходной системе координат $E_0 = (o_0, [e^0])$, если $E_d = E_0$ в момент времени $t = 0$:

$$a^d(t) = a^d(0) = a^0(0). \qquad (2.13)$$

Это позволяет в терминах координатных столбцов векторов заменить исследование изменения этих векторов на исследование групп матриц $u_d^0(t)$, приводящих к их изменению:

$$a^0(t) = u_d^0(t)a^d(t) = u_d^0(t)a^d(0) = u_d^0(t)a^0(0), \qquad (2.14)$$

т. е. сформулировать все задачи «линейной» кинематики среды в терминах линейной алгебры. Это дает возможность использовать для изучения преобразования среды накопленный «багаж» современной алгебры [9, 43, 44, 49] и получить формулировки рабочего аппарата теории в алгебраической форме, удобной для непосредственной компьютерной реализации.

3. Равенство (2.10) указывает на то, что к-деформатор D_d^{00} не следует путать с матрицей деформаций этой среды. Первая — линейная модель преобразования среды (действие), вторая — результат этого преобразования (действия), представленный в матричной форме.

Аксиома К.8. Геометрическая Вселенная механики локально линейно изменяема.

Комментарии: 1. Аксиома **К.8** утверждает, что произвольные преобразования аффинно-векторного пространства A_3^{μ} геометрической Вселенной механики таковы, что у каждой точки $y \in A_3^{\mu}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует μ_3-измеримая окрестность $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3$, на которой в фиксированный момент времени $t \in T_+$ результат действия этого преобразования отличается от результата действия аффинного (названного ε-аффинным) преобразования v из комплекта $\mathbf{GTD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$ на вектор $u_2 y$, относительная норма (в равномерной метрике V_3) которого не превышает ε.

2. Из сказанного не следует, что на соответствующей окрестности $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3^{\mu}$ точки y произвольное преобразование $u \in U$ мало отличается от аффинного преобразования $v \in \mathbf{GTD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$, так как вышеуказанное понятие «мало» в данном случае не определено (нелинейное u и линейное v преобразования на ε_y не сравнимы, сравнимы лишь результаты их действий).

3. Из аксиомы **К.8** не следует, что во Вселенной механики не могут изучаться физические явления, математические модели которых нелинейны. Из нее следует лишь, что у каждой точки $y \in D_3^{\mu}$ существует окрестность ε_y, на которой у этих моделей гарантировано существование линейного ε-приближения в смысле (2.11).

4. Точечное множество $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3$ является топологической окрестностью (открытой) точки $y \in D_3^{\mu}$ (но не открытым ε-ша-

ром), элементы которого в каждый фиксированный момент времени $t \in T$ отбираются по правилу (2.11). Указанное множество принципиально не может быть представлено графически (в виде рисунка), исключая частные случаи.

5. Окрестности $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3$ точек $y \in D_3^\mu$, как и любые другие элементы σ-алгебры $\mathfrak{B}_3$, *ни в каком смысле не являются* «частицами» среды. Действие ε-аффинного преобразования среды $\nu \in \mathbf{GTD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ на ε_y приводит к параллельному переносу не самого множества ε_y, а точки y внутри этого множества ε_y и одновременному преобразованию числовых комплектов векторных пространств V_{3y} радиус-векторов точек из меняющихся по составу множеств ε_y (по требованию (2.11)) с общими «началами» в меняющихся точках y посредством переменного по y и t (нижние индексы) к-деформатора $D_d^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$.

6. Понятие «к-деформатор» не совпадает с традиционно известным понятием «тензор деформаций» [16, 38, 46], но при определенных условиях связано с ним определенным соотношением (2.10).

7. Принятое здесь *понятие линейного «деформирования»* среды шире аналогичного традиционного понятия (линейного преобразования среды с изменением расстояний между точками): это любое линейное преобразование D_d^{00} среды ε_y из группы $\mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ (2.9), включая вращение в случае, если ε_y — абсолютно твердое тело (§ 5.1). Это позволяет строить теорию деформирования среды изначально с единой точки зрения на основе единого математического аппарата.

8. Никаких свойств среды типа традиционных «сплошности», «непрерывности» на данном этапе построения теории не предполагается.

2.2. АКСИОМЫ ДИНАМИКИ

Определение 2.5. Пусть: 1. σ_3^μ — борелевская σ-алгебра, порожденная μ-измеримыми открытыми подмножествами множества D_3^μ, $\sigma_3^\mu \subset \mathfrak{B}_3$;

2. $\phi(\cdot)$ — функция на σ_3^μ, значениями которой являются n-ки мер Радона [49] (знакопеременных скалярных мер, зарядов [15]).

Тогда: 1. Функция $\phi(\cdot)$ называется *векторной мерой Радона* на σ_3^μ.

2. Функция $\pi(\cdot,\cdot)$, заданная на $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$ и являющаяся векторной мерой Радона по каждому аргументу, называется *векторной бимерой Радона.*

3. Векторная бимера Радона $\pi(\cdot,\cdot)$ называется *кососимметрической*, если для любых A, $B \in \sigma_3^\mu$

$$\pi(A, B) = -\pi(B, A). \qquad (2.15)$$

Комментарий. Функция $\phi(\cdot)$ не является вектором ($\phi(\cdot) \notin R_6$). Это, практически всегда, элемент n-мерного многообразия Q_n.

Определение 2.6. 1. Винт $F_o^o(A, B)$ (7.3) в E_o со свойствами шестимерной векторной кососимметрической бимеры Радона на $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$ называется *динамической бимерой* (*силой*) на $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$ Вселенной механики:

$$F_o^o(A, B) = -F_o^o(B, A). \qquad (2.16)$$

2. Геометрическая Вселенная механики, на которой определена динамическая бимера (сила), называется *динамической.*

Аксиома D.1. Геометрическая Вселенная механики является динамической.

Комментарии: 1. Динамическая бимера (сила) $F_o^o(A, B)$ является принципиально шестимерным вектором (винтом, динамическим винтом). Утверждение о существовании «момента вектора», в частности «главного момента силы» (второй тройки координат винта $F_o^o(A, B)$), как математической модели самостоятельного физического объекта, не имеет под собой ни физических, ни математических оснований. Вторая тройка функций $\langle r_a^0 \rangle^0 x^0$ в определении скользящего вектора (7.1) содержит информацию, вместе с тройкой функций x^0 определяющую этот вектор. При этом необходимо понимать, что сумма этих троек функций не является тройкой функций того же вида

$\langle r_a^0\rangle^0 x^0 + \langle r_b^0\rangle^0 y^0 = \langle ? \rangle$?, если $x^0 \neq \lambda y^0$, а операция умножения на число не определена $(\lambda\langle r_a^0\rangle^0 x^0 = \langle \lambda r_a^0\rangle^0 x^0 = \langle r_a^0\rangle^0(\lambda x^0)$? (**П. 7.2**).

3. Следующие три аксиомы постулируют фундаментальные свойства динамической бимеры на $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$.

Определение 2.7. Пусть динамическая бимера $F_o^o(A, B)$ на $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$ в E_0 абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ_3 по обоим аргументам, то есть для любых точек x и y из любых механических систем A и B из σ_3^μ существуют μ_3-интегрируемые по обоим аргументам скользящие векторы (7.1) $\rho_o^{f(x,dy),o}$, $\rho_o^{f(dx,y),o}$, такие что

$$F_o^o(dx, dy) = \rho_o^{f(x,dy),o}\mu_3(dx) = \rho_o^{f(dx,y),o}\mu_3(dy). \qquad (2.17)$$

Тогда: 1. Среда D_3^μ называется *динамически непрерывной средой.*

2. μ_3-интегрируемые скользящие векторы $\rho_o^{f(x,dy),o}$ и $\rho_o^{f(dx,y),o}$ в E_o называются *плотностями динамической бимеры* $F_o^o(dx, dy)$ на $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$ в E_o в точках x и y относительно меры Лебега $\mu_3(d(\cdot))$ соответственно.

Аксиома D.2. Геометрическая Вселенная механики динамически непрерывна.

Комментарии: 1. Аксиома **D.2** постулирует отсутствие в геометрической Вселенной механики Галилея одноточечных геометрических систем со сосредоточенными в них (по любому из аргументов) ненулевыми динамическими мерами. Отличными от нуля в этих системах могут быть только плотности указанных мер относительно лебеговой меры.

2. Вследствие предыдущего утверждения теряет смысл понятие трехмерной ньютоновой силы, сосредоточенной в (приложенной к...) изолированной безобъемной одноточечной геометрической системе. Величина указанной силы в любой точке динамически непрерывной среды равна нулю (по определению).

3. Определение динамической непрерывности среды принципиально отличается от традиционного понятия непрерывной среды,

часто отождествляемого с интуитивным понятием «сплошной» среды. Здесь указанное свойство среды определено посредством соответствующего свойства динамической меры: среда динамически непрерывна, если динамическая мера, существование которой на $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$ постулируется (**D.1**), абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\mu_3(d(\cdot))$ на σ_3^μ по обоим аргументам (**D.2**).

Определение 2.8. Пусть для σ_3^μ существует такое разбиение, что:

$$1.\ \sigma_3^\mu = \sigma_+^\mu \cup \sigma_-^\mu,\ \sigma_+^\mu \cap \sigma_-^\mu = \varnothing; \tag{2.18}$$

2. σ_+^μ — является динамически непрерывной средой и множеством сосредоточенности динамической бимеры $F_o^o(dx, dy)$, т. е. для любых $x,\ y \in \sigma_+^\mu$

$$\rho_o^{f(dx,y),o} \neq 0,\quad \rho_o^{f(x,dy),o} \neq 0; \tag{2.19}$$

3. σ_-^μ — является динамически непрерывной средой и $\sigma_-^\mu = \sigma_3^\mu \setminus \sigma_+^\mu$, но для любой геометрической системы $B \in \sigma_-^\mu$ и любых точек $x \in D_3^\mu$, $y \in B$

$$\mu_3(B) \neq 0,\quad \rho_o^{f(x,dy),o} = 0,\ \rho_o^{f(y,dx),o} = 0; \tag{2.20}$$

4. В σ_+^μ существует бесконечно много геометрических систем $B \in \sigma_+^\mu$, таких что для каждой из них существует геометрическая система

$$A \in \sigma_3^\mu \text{ и } B \subset A,\ A \setminus B \subset \sigma_-^\mu;$$

5. Существуют геометрические открытые системы $B \in \sigma_3^\mu$ и система $A \in \sigma_-^\mu$, такие что $A \subset B$, $B \setminus A \subset \sigma_+^\mu$.

Тогда геометрическая Вселенная механики называется *динамически несвязной*.

Аксиома D.3. Геометрическая Вселенная механики динамически несвязна.

Комментарии: 1. Аксиомы **D.2** и **D.3** постулируют следующие факты: борелевская σ-алгебра геометрических систем геометрической Вселенной механики состоит только из систем, являющихся динамически непрерывной средой, часть которых σ_{-}^{μ} не взаимодействует, не действует на системы с ненулевыми плотностями динамических мер из σ_{+}^{μ}, не испытывает действий с их стороны (2.20) и несвязна (**D.3**).

2. Множество σ_{+}^{μ} сосредоточенности динамической бимеры $F_{o}^{o}(dx, dy)$ несвязно: содержит бесконечно много изолированных геометрических систем, «отделенных» друг от друга системами из множества σ_{-}^{μ}, часть которых содержит «внутри себя» системы из σ_{-}^{μ}. Мера Лебега множества σ_{+}^{μ} Вселенной механики *Галилея, на уровне сегодняшнего представления о вопросе,* ничтожно мала по сравнению с мерой Лебега множества $\sigma_{-}^{\mu} : \mu_{3}(\sigma_{+}^{\mu}) / \mu_{3}(\sigma_{-}^{\mu}) \approx 10^{-30}$ [12].

Определение 2.9. Пусть $A \in \sigma_{+}^{\mu}$ — фиксированная геометрическая система.

Тогда динамический винт (винт (7.3)) по первому аргументу и скользящий вектор (7.1) по второму аргументу (лебегов интеграл динамической бимеры $F_{o}^{o}(dx, dy)$ по первому аргументу по системе A) вида

$$F_{o}^{o}(A, dy) = \int \chi_{A} \rho_{o}^{f(x, dy), o} \mu_{3}(dx) = \\ = \rho_{o}^{f(A, y), o} \mu_{3}(dy) \qquad (2.21)$$

называется *динамической мерой (динамическим винтом, силой) воздействия системы $A \in \sigma_{3}^{\mu}$ на системы из σ_{+}^{μ} с плотностью* $\rho_{o}^{f(A, y), o}$ *в точке $y \in D_{3}^{\mu}$.*

Определение 2.10. Пусть: 1. $\rho_{o}^{f(\neg y, y), o}$ плотность динамического винта воздействия дополнения $\neg A \in \sigma_{3}^{\mu}$ любой геометрической системы $A \in \sigma_{3}^{\mu}$ на эту систему:

$$F_{o}^{o}(\neg A, A) = \int_{\chi_{A}} \rho_{o}^{f(\neg y, y), o} \mu_{3}(dy),$$

$$\rho_{o}^{f(\neg y, y), o} = \int_{\chi_{\neg y}} \rho_{o}^{f(x, y), o} \mu_{3}(dx); \qquad (2.22)$$

2. Плотность $\rho_o^{f(\neg y, y), o}$ равна нулю в любой точке $y \in D_3^{\mu}$:

$$\rho_o^{f(\neg y, y), o} = 0. \tag{2.23}$$

Тогда геометрическая Вселенная (2.12) называется *динамически сбалансированной.*

Аксиома D.4. Геометрическая Вселенная механики Галилея динамически сбалансирована.

Комментарии: 1. Определение сбалансированности (2.23) принципиально отличается от определения $F_o^o(\neg A, A) = 0$, которое возможно и при $\rho_o^{f(\neg y, y), o} \neq 0$ [47].

2. Следующие три аксиомы постулируют существование на сигма-алгебре систем геометрической Вселенной механики Галилея трех принципиально различных динамических мер (сил) воздействия на эти системы их дополнений в σ_3^{μ} (имеющих принципиально различные плотности $\rho_o^{f(\neg y, y), o}$).

Определение 2.11. Пусть: 1. В A_3^{μ} существует декартова система координат $E_0 = (o_0, [e^0])$;

2. На σ_3^{μ} определена борелевская мера $m_i(dy)$, такая что:

2.1. $m_i(dy)$ — абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\mu_3(dy)$ на σ_3^{μ} с плотностью ρ_y^i:

$$m_i(dy) = \rho_y^i \mu_3(dy); \tag{2.24}$$

2.2. Для любой системы $B \in \sigma^{\underline{\mu}}$

$$m_i(B) = 0; \tag{2.25}$$

3. v_y^{00} — координатный столбец вектора v_y^0 скорости точки $y \in D_3^{\mu}$ относительно E_0 в базисе $[e^0]$, $v_y^{00\cdot}$ — его производная в E_0 (ускорение точки $y \in D_3^{\mu}$ относительно E_0 в базисе $[e^0]$), $\rho_0^{v\cdot(y), 0}$ — скользящий вектор, порожденный вектором $v_y^{00\cdot}$ (7.1) в E_0 [23, 33]:

$$\rho_0^{v\cdot(y), 0} = G_0^0 \mathrm{col}\{v_y^{00\cdot}, v_y^{00\cdot}\}; \tag{2.26}$$

4. Гипотеза: На $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$ определена такая динамическая бимера $F_0^0(dx, dy) \equiv I_0^0(dx, dy)$, что динамический винт воздействия

$$F_0^0(\neg y, dy) \equiv I_0^0(\neg y, dy) \qquad (2.27)$$

на системы из σ_3^μ их дополнений с плотностью $\rho_0^{i(\neg y, y), 0}$ относительно меры $m_i(dy)$ (2.24) имеет вид (с учетом (2.25))

$$I_0^0(\neg y, dy) = \rho_0^{i(\neg y, y), 0} m_i(dy), \qquad (2.28)$$

$$\rho_0^{i(y, y), 0} = -\rho_0^{v \cdot (y), 0}. \qquad (2.29)$$

Тогда: 1. Система координат E_0, в которой выполнено равенство (2.28), называется *инерциальной системой координат.*

2. Борелевская мера $m_i(dy)$ на σ_3^μ, для которой выполнено равенство (2.28), называется *скалярной мерой инерции* на σ_3^μ (для простоты речи и письма — *инерционной массой).*

3. Динамический винт $I_0^0(\neg y, dy)$, определяемый равенством (2.28), называется *векторной динамической мерой инерции (динамическим винтом инерции, векторным полем инерции)* на σ_3^μ.

4. Скользящий вектор

$$\rho_0^{i(\neg y, y), 0} = -\rho_0^{v \cdot (y), 0}, \qquad (2.30)$$

порожденный отрицательным вектором ускорения $v_y^{00 \cdot}$ точки относительно инерциальной системы координат E_0, называется *плотностью динамической меры (динамического винта, векторного поля) инерции на σ_3^μ относительно меры $m_i(dy)$.*

5. Геометрическая Вселенная механики, на которой определены инерциальная система координат $E_0 = (o_0, [e^0])$, скалярная мера инерции $m_i(dy)$ и векторная динамическая мера инерции $I_0^0(\neg y, dy)$, называется *инерционной.*

Аксиома D.5. Геометрическая Вселенная механики инерционна.

Комментарии: 1. Аксиома **D.5** одновременно постулирует существование инерциальной системы координат и двух мер инерции (скалярной — инерционной массы и векторной — динамического винта инерции). Исключение из определения любого из этих понятий делает остальные утверждения неверными.

2. Утверждение (2.24) постулирует отсутствие во Вселенной механики Галилея «инерционных» одноточечных (безобъемных) геометрических систем. Для указанных систем отличной от нуля может быть только плотность инерционной массы относительно меры Лебега.

3. Утверждение (2.25) постулирует безынерционность систем из σ_{-}^{μ}.

4. Предложенный механизм введения в теорию понятий инерциальной системы координат и инерции логически эквивалентен первому и второму «законам Ньютона», но выгодно отличается от них тем, что:

4.1. Не использует понятия не существующих в реальном мире безобъемных точек с ненулевой инерционной массой;

4.2. Не использует понятия сил, действующих на не существующие в природе безобъемные «инерционные» точки (которые всегда равны нулю);

4.3. Корректно вводит вышеуказанные понятия для непрерывной среды без математически и физически несостоятельного «формирования» непрерывного континуума из конечного множества реально не существующих точек со «сосредоточенными инерционными массами» и «частиц»;

4.4. Обеспечивает возможность построения корректной теории механики абсолютно твердых тел как непрерывной среды с дополнительными свойствами, не прибегая к замене их конечными множествами физически не существующих точек со сосредоточенными массами;

4.5. Не использует традиционно искусственно вводимых для локально изменяемой непрерывной среды понятий количества и момента количества движения.

5. Динамическая мера инерции (2.28) введена с использованием изящной гипотезы Э. Маха, в соответствии с которой появление инерции во Вселенной механики Галилея обязано не «врожденной силе материи, заключенной в ней самой», а ускорению механических систем из σ_{+}^{μ} (обладающих инерционной массой — инерционных) относительно других инерционных систем [12].

Определение 2.12. Пусть: 1. На σ_3^μ определена скалярная мера $m_g(dy)$, такая что:

1.1. Мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\mu_3(dy)$ на σ_3^μ с плотностью ρ_y^g:

$$m_g(dy) = \rho_y^g \mu_3(dy), \qquad (2.31)$$

1.2. Для любой геометрической системы $A \in \sigma^{\underline{\mu}}$

$$m_g\ (A) = 0; \qquad (2.32)$$

2. Гипотеза: на $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$ определена динамическая бимера (2.15), (2.16) в $E_0 = (o_0, [e^0])$

$$F_0^0(dx, dy) \equiv G_0^0(dx, dy) \equiv l_0^{g\,(dx,\,dy),\,0}, \qquad (2.33)$$

порожденная трехмерной векторной функцией двух трехмерных векторных аргументов $g(.,.)$: $R_3 \times R_3 \in R_3$ вида

$$g^0(dx, dy) = \frac{(y^{00} - x^{00})}{\|y^{00} - x^{00}\|^3} m_g(dx)\, m_g\ (dy), \qquad .(2.34)$$

y^{00} и x^{00} — координатные столбцы в базисе $[e^0]$ радиус-векторов y^0 и x^0 точек y, $x \in D_3^\mu$ в E_0 (2.33).

Тогда: 1. Динамическая бимера называется *гравитационной динамической бимерой (силой) на* $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$.

2. Мера $m_g\ (dy)$ называется *скалярной мерой гравитации* (для сокращения речи и письма — *гравитационной массой*) на σ_3^μ.

3. Векторная динамическая мера на σ_3^μ (динамический винт (2.21)) воздействия на системы $B \in \sigma_3^\mu$ их дополнений $\neg B$ в σ_3^μ:

$$G_0^0\ (\neg\, dy, dy) = \rho_0^{g\,(\neg y,\, y),\,0} \rho_y^g \mu_3\ (dy), \qquad (2.35)$$

$$g^0\ (\neg\, y, y) = \int \chi_{\neg y} \frac{(y^{00} - x^{00})}{\|y^{00} - x^{00}\|^3} \rho_x^g \mu_3\ (dx) \qquad (2.36)$$

называется *векторной динамической мерой (динамическим винтом, силой, векторным полем) гравитации на* σ_3^μ.

4. Геометрическая Вселенная механики, на $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$ и σ_3^μ которой определены гравитационная динамическая бимера (сила) и скалярная мера гравитации, называется *гравитационной*.

Аксиома D.6. Геометрическая Вселенная механики гравитационна.

Комментарии: 1. Скалярная мера гравитации, определяемая равенствами (2.31), (2.32) и (2.34), на данном этапе построений не имеет отношения к скалярной мере инерции (инерционной массе), определяемой равенствами (2.24), (2.25) и (2.28).

2. Равенства (2.33) и (2.34) не являются законом тяготения Ньютона непосредственно (здесь в понятие гравитационной меры вложен другой смысл, постоянная всемирного тяготения равна единице).

3. Из (2.32) следует, что гравитационная масса (как и инерционная масса) сосредоточена на σ_+^μ.

4. На данном этапе обсуждения вопроса инерционная и гравитационная массы на σ_3^μ являются самостоятельными понятиями. Об их связи требуется отдельная договоренность.

Аксиома D.7. Инерционная и гравитационная массы во Вселенной механики Галилея пропорциональны.

Определение 2.13. Пусть инерционная и гравитационная массы во Вселенной механики Галилея пропорциональны:

$$m_g\,(dy) = km_i\,(dy). \tag{2.37}$$

Тогда: 1. Положительная константа $\gamma = k^2$ называется гравитационной постоянной Вселенной механики Галилея.

2. Инерционная масса для простоты письма и речи называется массой и записывается так:

$$m_i\,(dy) \equiv m\,(dy). \tag{2.38}$$

Предложение 2.2. Векторная динамическая мера гравитации на сигма-алгебре σ_3^μ систем геометрической Вселенной механики с учетом (2.35) и (2.37) вычисляется по формуле (Ньютон)

$$G_0^0 (\neg\, dy, dy) = \rho_0^{g(\neg y, y), 0} \rho_y \mu_3 (dy), \qquad (2.39)$$

$$g^0 (\neg\, y, y) = \gamma \int \chi_{\neg y} \frac{(y^{00} - x^{00})}{\|y^{00} - x^{00}\|^3} \rho_x \mu_3 (dx), \qquad (2.40)$$

где индекс g у плотности ρ_x^g снят в силу аксиомы **D.6** (2.37).

Доказательство достигается подстановкой равенства (2.37) в определения (2.33) и (2.34).□

Комментарий. Полученные результаты не тривиальны. Построения привели к следующим выводам:

1. В традиционных формах законов тяготения Ньютона, если утверждение (2.37) верно, присутствует инерционная масса (скалярная мера инерции).

2. Если утверждение (2.37) верно, то никаких других скалярных мер на σ_3^μ, непосредственно связанных с понятиями гравитации и инерции, кроме пропорциональных масс $m_g\ (dy)$ и $m_i\ (dy)$, не существует. Это означает, что оба понятия (аксиомы **D.4** и **D.5**) могут быть сформулированы в терминах одной меры ($m_g\ (dy)$ и $m_i\ (dy)$), вопрос лишь в привычке к форме записи, названию и обозначению.

3. Если утверждение (2.37) верно, то в реальной природе не существует понятия «количества вещества». Можно условно переобозначить меру инерции $m_i\ (dy) \equiv m\ (dy)$ и назвать ее мерой количества вещества, но при этом потребуется ответ на вопрос: что такое «вещество»? В рамках сформулированной аксиоматики ответа на этот вопрос нет. Представляется, что его нет и в других аксиоматиках и все, что связано с понятием массы как меры количества вещества, на самом деле связано с понятием инерционной массы как меры. Обе вышеуказанные массы, не будучи связанными с понятием какой-либо субстанции («вещества», «материи», «количества среды» и т. п.), являются свойствами Вселенной механики Галилея, зависящими (по Эйнштейну) от скорости перемещения механической системы.

Определение 2.14. Пусть: 1. На $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$ определена динамическая бимера $D_0^0\ (dx, dy)$, такая что соответствующая динамическая мера (винт, векторное поле) D_0^0 $(\neg\, dy, dy)$ на σ_3^μ в E_0 воздействия на системы $B \in \sigma_3^\mu$ их дополнений $\neg B$ в σ_3^μ с плотностью $\rho_0^{\Delta(\neg y, y), 0}$ относительно меры μ_3 (dy) в точке $y \in D_3^\mu$ имеет вид

$$D_0^0(\neg y, dy) = \rho_0^{\Delta(\neg y, y), 0}\mu_3(dy) = \rho_0^{\Delta(\neg y, y), 0}\rho_y^{-1}\rho_y\mu_3(dy) =$$

$$= \rho_0^{\Delta(\neg y, y), 0}\rho_y^{-1}m_i(dy); \qquad (2.41)$$

2. На точечном множестве D_2^μ, являющемся сечением точечного множества D_3^μ произвольной аффинно-векторной плоскостью P_2, в точке $y \in P_2$ определена плотность $\rho_0^{\delta(\neg y, y), 0}$ в E_0 динамической меры D_0^0 $(\neg\, dy, dy)$ (2.41) на σ_3^μ в E_0 из п.1 относительно двумерной меры Лебега μ_2 (dy) на борелевской σ-алгебре σ_2^μ подмножеств точечного множества D_2^μ:

$$D_0^0\ (\neg\, y, dy) = \rho_0^{\delta(\neg y, y), 0}\mu_2\ (dy); \qquad (2.42)$$

3. Гипотеза: в точке y в базисе $[e^0]$ определена зависящая только от точки y дифференцируемая по y^{00} нужное число раз (3×3)-матричная функция точки $y \in D_3^\mu$ и времени $t \in T$. T_y^0: $R_3 \times T \to R_9$ такая, что свободный вектор δ^0 $(\neg\, y, y)$, порождающий скользящий вектор плотности $\rho_0^{\delta(\neg y, y), 0}$ (7.1), является результатом линейного преобразования нормали n_y к плоскости P_2 в точке y в базисе $[e^0]$:

$$\delta^0\ (\neg y, y) = T_y^0 n_y^0; \qquad (2.43)$$

4. Гипотеза: свободный трехмерный вектор Δ^0 $(\neg\, y, y)$, порождающий скользящий вектор трехмерной плотности из (2.41), связан со строками $T_{yj}^0 = (T_{1j}^0, T_{2j}^0, T_{3j}^0)$, $j = 1, 2, 3$ матрицы T_y^0 из (2.43) равенством

$$\Delta^0(\neg y, y) = \mathrm{col}\{\mathrm{div}_0 T_{y1}^0, \mathrm{div}_0 T_{y2}^0, \mathrm{div}_0 T_{y3}^0\} \equiv \mathrm{Div}_0 T_y^0. \qquad (2.44)$$

Тогда: 1. Динамическая мера $D_0^0(\neg\, y, y)$ на σ_3^μ в E_0 с плотностью $\rho_0^{\Delta(\neg y, y), 0}$ в точке $y \in D_3^\mu$ называется *динамической мерой (винтом, векторным полем) деформирования непрерывной среды.*

2. Матрица T_y^0 в (2.34) называется *динамическим деформатором (д-деформатором) среды в точке* $y \in D_3^\mu$.

3. Элементы T_{ij}^0 матрицы T_y^0 называются *напряжениями деформирования среды в точке* $y \in D_3^\mu$.

4. Вселенная механики, на σ_3^μ которой определена динамическая мера деформирования среды, называется *деформируемой.*

Аксиома D.8. Вселенная механики деформируема.

Комментарии: 1. В вышеуказанных определениях не фигурируют не существующие в реальном физическом мире поверхности геометрических систем и, следовательно, традиционная трактовка i-столбцов $T_{iy}^0 = (T_{i1}^0, T_{i2}^0, T_{i3}^0)^T$ вычисленной в $[e^0]$ матрицы T_y^0 как векторов напряжений на координатных плоскостях системы координат, сопутствующей деформированию среды, не имеет под собой физических оснований. Условны также понятия «касательных» и «нормальных» напряжений к реально не существующим (в случае открытых систем), а также воображаемым нигде не дифференцируемым поверхностям замкнутых геометрических систем.

2. В определениях не используются также физически не существующие «поверхностные» силы на физически не существующих поверхностях механических систем (исключая конечное множество естественных), введенных в теорию непрерывной среды по аналогии с поверхностными силами трения для абсолютно твердых тел.

3. При переходе к любому другому инерциальному базису $[e^f]$

$$\Delta^0(\neg y, y) = T_y^0 n_y^0 \to c_f^0 \Delta^f(\neg y, y) = T_y^0 c_f^0 n_y^f,$$

$$T_y^f = c_f^{0,T} T_y^0 c_f^0. \tag{2.45}$$

4. Термин «динамический деформатор» (причинная характеристика деформации среды) использован в связи с введением понятия «кинематический деформатор» (2.9) (геометрическая характеристика деформации среды, выполняющая роль следствия действия динамического деформатора), каковым является

оператор $D_d^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q$ (**R3**), связанный с динамическим деформатором уравнениями механического состояния (§ 4.1).

Определение 2.15. Пусть скалярная мера инерции (инерционная масса) m_i $(dy) \equiv m$ (dy) (2.24) и, следовательно (в силу аксиомы **D.7**), скалярная мера гравитации (гравитационная масса m_g (dy) (2.37)) инвариантны относительно изменения времени в любой точке $y \in D_3^\mu$:

$$d / dt\ m_i\ (dy) = 0 \Leftrightarrow d / dt\ m_g\ (dy) = 0. \qquad (2.46)$$

Тогда Вселенная механики Галилея называется *инерционно* (*гравитационно*) *сбалансированной.*

Предложение 2.3. Пусть: 1. $\rho_0^{i\,(\neg y,\, y),\, 0}\rho_y^i$ — плотность динамического винта инерции на σ_3^μ относительно лебеговой меры μ_3 (dy);

2. $\rho_0^{g\,(\neg y,\, y),\, 0}\rho_y^i$ — плотность динамического винта гравитации на σ_3^μ относительно лебеговой меры μ_3 (dy);

3. $\rho_0^{\Delta\,(\neg y,\, y),\, 0}$ — плотность динамического винта деформации относительно меры Лебега μ_3 (dy).

Тогда сумма вышеуказанных плотностей динамических мер в любой точке $y \in D_3^\mu$ равна нулю:

$$\rho_y^i\rho_0^{i\,(\neg y,\, y),\, 0} + \rho_y^i\rho_0^{g\,(\neg y,\, y),\, 0} + \rho_0^{\Delta\,(\neg y,\, y),\, 0} = 0. \qquad (2.47)$$

Доказательство следует из аддитивности динамической меры на σ_3^μ и аксиомы **D.4**.□

Определение 2.16. Пусть: 1. $T_y^0 = \{T_{ij}^0, i, j = 1, 2, 3\}$ — д-деформатор среды в точке $y \in D_3^\mu$; T_{iy}^0, T_{yj}^0 — i-столбцы и j-строки д-деформатора T_y^0 соответственно (2.43); (T_y^0) — (9 × 1)-столбец, составленный из (3 × 1)-столбцов T_{iy}^0:

$$(T_y^0) = \mathrm{col}\{T_{11}^0, T_{12}^0, T_{13}^0, \ldots, T_{33}^0\}; \qquad (2.48)$$

2. $dv_y^{00} / dy^{00} = \{dv_l^0 / dy_k^0 \equiv v_k^l,\ l, k = 1, 2, 3\}$ — производная вектора скорости v_y^{00} точки $y \in D_3^\mu$ по радиус-вектору

y^{00} этой точки в E_0 и базисе $[e^0]$; (V_y^0) — (9×1)-столбец, составленный из (3×1)-столбцов матрицы dv_y^{00} / dy_{00};

3. $\Phi_y : R_3 \times R_3 \to R_1$ — скалярная функция вида

$$\Phi_y = (T_y^0) \cdot (V_y^0) = \mathrm{Sp}\, T_y^0 \, (dv_y^{00} / dy^{00})^T =$$
$$= \Sigma_{ij} T_{ij}^0 dv_j^0 / dy_i^0 = \Sigma_j T_{yj}^0 \cdot \mathrm{grad}_0 v_j^{00} = \Sigma_i T_{iy}^0 \cdot dv_y^{00} / dy_i^0, \quad (2.49)$$

где вектор $dv_y^{00} / dy_i^0 = \mathrm{col}\, \{dv_1^0 / dy_i^0,\ dv_2^0 / dy_i^0,\ dv_3^0 / dy_i^0\}$;

4. Гипотеза: 4.1. На сигма-алгебре σ_3^μ определена скалярная, инвариантная относительно обобщенной группы Галилея мера $U(dy)$, абсолютно непрерывная относительно скалярной меры инерции $m(dy)$ и меры Лебега $\mu_3(dy)$ с плотностями u_y и $u_y \rho_y$, и ее скорость при условии $d / dt\, m\, (dy) = 0$ (2.46) соответственно

$$U\,(dy) = u_y m\,(dy) = u_y \rho_y \mu_3\,(dy), \qquad (2.50)$$

$$U^{\cdot}\,(dy) = u_y^{\cdot} m\,(dy) = u_y^{\cdot} \rho_y \mu_3\,(dy); \qquad (2.51)$$

4.2. В любой точке $y \in D_3^\mu$ локально изменяемой непрерывной среды определены вектор q_y с координатным столбцом q_y^0 в базисе $[e^0]$ и скалярная функция φ_y, такие что

$$-\rho_y u_y^{\cdot} + \Phi_y + \mathrm{div}_0 q_y^0 + \rho_y \varphi_y = 0. \qquad (2.52)$$

Тогда: 1. Вселенная механики Галилея называется *термодинамически сбалансированной.*

2. Мера $U(dy)$ называется *внутренней* (тепловой) *энергией* среды.

3. Вектор q_y называется *вектором потока тепла в точке* $y \in D_3^\mu$, *проходящего через единицу площади нормальной к нему плоскости в единицу времени.*

4. Скалярная функция φ_y называется *количеством тепла, выделяемого (поглощаемого) в точке* $y \in D_3^\mu$ *среды единицей массы среды в единицу времени.*

5. Скалярная функция Φ_y называется *плотностью мощности напряжений д-деформатора* T_y^0 *относительно меры* $m(dy)$.

6. Матрица dv_y^{00} / dy^{00} (столбец (V_y^0)) называется матрицей (столбцом) скоростей деформаций непрерывной среды в точке $y \in D_3^\mu$.

Комментарии: 1. Функция Φ_y является работой, производимой напряжениями из д-деформатора T_y^0 на соответствующих им деформациях среды в единицу времени.

2. Д-деформатор непрерывной среды зависит от давлений Паскаля (4.6) и напряжений вязкого (4.2) или упругого (4.1) происхождения.

3. Матрицей скоростей деформаций линейно изменяемой непрерывной среды является вся матрица dv_y^{00} / dy^{00}, а не ее симметрическая часть $[dv_y^{00} / dy^{00}]$ из тождества Коши—Гельмгольца (3.6), как это принято считать [16, 38, 46].

4. Любые способы определения скоростей деформаций среды без использования понятия мощности напряжений (2.49) не имеют под собой ни математических, ни физических оснований (например, как элементов симметрической матрицы $[dv_y^{00} / dy^{00}]$ в тождествах Коши—Гельмгольца (3.6), (3.79) [16, 17]).

5. При отсутствии теплопереноса и тепловыделения или теплопоглощения ($q_y^0 = 0, \Phi_y = 0$) получаем

$$\rho_y u_y^{\cdot} = \Phi_y,$$

т. е. скорость изменения плотности внутренней энергии среды $u_y^{\cdot}$ относительно меры $m(dy)$ в точке определяется только мощностью напряжений из д-деформатора и плотностью массы ρ_y в этой точке относительно меры Лебега $\mu_3\ (dy)$.

Определение 2.17. Пусть: 1. Геометрическая Вселенная механики Галилея динамически сбалансирована (2.23);

2. Геометрическая Вселенная механики Галилея инерционно (гравитационно) сбалансирована (2.46);

3. Геометрическая Вселенная механики Галилея термодинамически сбалансирована (2.52);

Тогда Вселенная механики Галилея называется *сбалансированной.*

Аксиома D.9. Вселенная механики сбалансирована.

Комментарий. Введенное понятие сбалансированности принципиально отличается от аналогичного понятия из [47], где первое требование определено для трехмерной «силы», а не для плотности шестимерной динамической меры, а два вторых требования вообще не определены.

Определение 2.18. Пусть: 1. На декартовом квадрате $\sigma_3^\mu \times \sigma_3^\mu$ сигма-алгебр σ_3^μ систем геометрической Вселенной механики Галилея определена динамическая бимера $F_0^0\,(dx, dy)$ со свойствами (2.16) и (2.17);

2. На сигма-алгебре σ_3^μ систем геометрической Вселенной механики Галилея определена мера $U(dy)$ *внутренней энергии* среды;

3. На сигма-алгебре σ_3^μ систем геометрической Вселенной механики Галилея определена инерционная (или гравитационная) масса;

4. Геометрическая Вселенная механики Галилея сбалансирована (**D.9**).

Тогда: 1. Геометрическая Вселенная механики Галилея

$$\mathfrak{M} = \{A_3\,, \mathbf{TGD}_{yt}\,(\mathbf{R}, \mathbf{6}), F_0^0\,(dx, dy), U\,(dy), m\,(dy)\} \quad (2.53)$$

называется *Вселенной механики Галилея.*

2. Элементы сигма-алгебры σ_3^μ Вселенной механики Галилея называются *механическими системами.*

Комментарии: 1. В соответствии с развиваемой в монографии идеологией во Вселенной механики Галилея не существует безобъемных точек со сосредоточенными скалярными и векторными мерами (масса, динамический винт, внутренняя энергия и т. п.): в любой точке Вселенной отличными от нуля могут быть только плотности этих (и любых других) мер. Поэтому фундаментальные свойства Вселенной в терминах этих мер могут формулироваться только для плотностей этих мер либо относительно меры Лебега, либо относительно других мер, например массы (инерционной или гравитационной).

2. Введенные в штатных курсах механики понятия ненулевой ньютоновой силы, «приложенной» к несуществующей безобъемной массивной точке, количества движения и моментов количества движения реально не существующего конечного множества вышеука-

занных точек, а также доказываемые для этих конечных множеств теоремы об изменении указанных величин здесь вообще не возникают. Этот факт указывает на то, что эти величины и эти теоремы, а также другие связанные с ними понятия относятся не к фундаментальным свойствам «природы», а к общепринятому (ньютонову) варианту аксиоматики механики Галилея.

3. Не возникает здесь также «интегральных форм законов сохранения энергии и массы» для непрерывной среды потому, что:

3.1. В природе не существует образований непрерывной среды, ограниченных какими-либо реальными поверхностями, кроме конечного числа естественных (газ в сосуде с поршнем, жидкость со свободной границей и т. п.);

3.2. Если за такие образования принять элементы определенной выше борелевской σ-алгебры, то, во-первых, в ней существует континуальное подмножество открытых механических систем, вообще не имеющих границ, во-вторых, в ней существует континуальное подмножество систем, имеющих недифференцируемые границы. И для тех и для других систем формально сформулировать «интегральные законы сохранения энергии и массы» можно, но использовать теорему Остроградского—Гаусса для перехода к локальным формулировкам указанных законов (типа (2.47) и (2.52)) нельзя. Положения теории, сформулированные только для части механических систем Вселенной, «удобных» для использования каких-либо математических средств, принципиально не могут считаться «законами природы» Вселенной механики Галилея.

4. Не возникает здесь «интегральной формы теоремы о сохранении количества и моментов количества движения» непрерывной среды потому, что:

4.1. Как и в предыдущем пункте, только часть механических систем имеет кусочно-дифференцируемые границы;

4.2. Реальные механические системы (исключая конечное множество естественно ограниченных) не имеют физических границ и, следовательно, в реальной физической локально изменяемой среде не существует «поверхностных сил»;

4.3. Указанные «интегральные теоремы» не могут быть ни доказаны как самостоятельные утверждения, ни получены какими-либо математически обоснованными преобразованиями тех же теорем, действительно доказанных для конечного множества физически не существующих безобъемных точек с ненулевыми массами.

4.4. Утверждение о сохранении момента количества движения в произвольной механической системе непрерывной среды, вообще говоря, неверно, так как требует *симметричности д-деформатора*, что имеет место только для частного случая движения среды (см. гл. 3). Само утверждение о симметричности д-деформатора T_y^0 является следствием использования теоремы Остроградского—Гаусса при переходе от «интегральной формы уравнения сохранения момента количества движения» к локальной и, следовательно, не может быть обосновано для континуальных множеств механических систем без границ и с всюду недифференцируемыми границами. Кроме того, никакие свойства реальной среды не могут быть обнаружены только на основании анализа формы записи математической модели движения этой среды.

5. Определение векторной меры инерции аналогично векторным мерам гравитации и деформации исключает из обсуждения вопросы о физической содержательности таких понятий, как «принцип Даламбера», «реальность» или «нереальность» сил инерции, «материя», «количество вещества» и т. п.

6. В природе не существует динамических винтов, отличных от рассмотренных в аксиомах **D.5—D.9** («поверхностных», «дополнительных», «вибрационных», реакций и т. п.).

7. Механическая система — это геометрическая система, для которой определены понятия инерции, гравитации, деформации и внутренней энергии.

8. Приведенная выше система 17 аксиом (8 — кинематики и 9 — динамики) полна, непротиворечива и полностью определяет первичные свойства Вселенной механики Галилея, представленной *только* непрерывной континуальной локально и линейно локально изменяемой μ-измеримой средой, на сигма-алгебре механических систем которой определены динамическая бимера, мера внутренней энергии и скалярная мера инерции или гравитации (масса).

2.3. ОБОБЩЕННАЯ ГРУППА ГАЛИЛЕЯ НА ВСЕЛЕННОЙ МЕХАНИКИ

Для завершения формулировки первичных свойств Вселенной механики Галилея необходимо доказать инвариантность полученных аксиом относительно обобщенной группы Галилея.

Определение 2.19. Пусть: 1. E_l и E_k — декартовы системы координат в A_3 Вселенной механики Галилея $\mathfrak{M}$ (2.53);

2. v_k^{ll} — координатный столбец вектора скорости v_k^l параллельного переноса начала o_k системы координат E_k относительно системы координат E_l в базисе $[e^l]$, $v_k^{ll} = o_k^{ll}$;

3. Вектор скорости v_k^l — постоянен;

4. p_k^{ll} — координатный столбец постоянного вектора p_k^l параллельного переноса начала o_k системы координат E_k в системе координат E_l в ее базисе $[e^l]$;

5. $\mathbf{T}_t$ $(\mathbf{R}, 3)$ — однопараметрическая группа параллельных переносов в A_3^{μ} Вселенной механики на векторы вида ($t \in T$);

$$o_k^{ll} = p_k^{ll} + v_k^{ll} t; \tag{2.54}$$

6. $\mathbf{SO}\,(\mathbf{R}, 3)$ — группа постоянных поворотов направляющего векторного пространства V_3 аффинно-векторного пространства A_3^{μ} Вселенной механики Галилея;

7. $\mathbf{ML}\,(\mathbf{R}, 6) \subset \mathbf{L}\,(\mathbf{R}, 6)$ — подгруппа группы движений векторного пространства винтов (**П. 7.4**), индуцированная группами из п. 5 и п. 6:

$$\mathbf{ML}\,(\mathbf{R}, 6) = \mathbf{T}_t\ (\mathbf{R}, 6)\mathbf{SO}\,(\mathbf{R}, 6), \tag{2.55}$$

где 1. $\mathbf{T}_t$ $(\mathbf{R}, 6)$ — мультипликативная (в отличие от группы $\mathbf{T}_t$ $(\mathbf{R}, 3)$) группа, порожденная параллельными переносами на векторы (2.54); буква **M** в аббревиатуре (2.55) означает move;

2. $\mathbf{SO}\,(\mathbf{R}, 6)$ — группа постоянных поворотов R_6 вида (7.8).

Тогда группа $\mathbf{ML}\,(\mathbf{R}, 6)$ называется *обобщенной группой Галилея* на векторном пространстве кинематических и динамических винтов всех происхождений (инерционных, гравитационных и деформационных).

Определение 2.20. Инвариант обобщенной группы Галилея (геометрия обобщенной группы Галилея) называется *механикой Галилея.*

Комментарии: 1. В соответствии с определением механику Галилея составляют объекты различной природы (исходные неопределяемые понятия, аксиомы, определения, утверждения, экспериментальные факты и т. п.), физическое содержание и математическая формализация которых не меняются при преобразованиях из обобщенной группы Галилея.

2. Фундамент оснований механики Галилея представлен аксиомами. Если они являются элементами механики Галилея, то есть инвариантны относительно обобщенной группы Галилея, то и все результаты, полученные на их основе математически «законными» действиями, также являются элементами механики Галилея.

Предложение 2.4. Аксиомы динамики (D.1—D.9) инвариантны относительно обобщенной группы Галилея.

Доказательство. Пусть $L_k^0 : E_0 \to E_k$, $L_k^0 \in \mathbf{ML}\,(\mathbf{R}, \mathbf{6})$, необходимо показать, что математические формулировки всех аксиом динамики в системах координат E_0 и E_k записываются одинаково.

1. Так как плотность $\rho\,(y)$ массы относительно лебеговой меры $\mu_3\,(dy)$ на σ_3^μ является скаляром и от выбора системы координат не зависит, доказательство инвариантности плотности $\rho_0^{i\,(\neg y,\, y),\,0}$ в E_0 динамической меры инерции $I_o^o\,(\neg y,\, dy)$ в E_0 (2.29) относительно обобщенного преобразования Галилея $L_k^0 \in \mathbf{ML}\,(\mathbf{R}, \mathbf{6})$ сводится к доказательству инвариантности относительно L_k^0 ее плотности относительно меры $m(dy)$ — скользящего вектора $l_0^{v\cdot\,(y),\,0}$. Иными словами, в соответствии с определением (2.29), необходимо показать, что в E_k имеет место аналогичное равенство

$$\rho_k^{i\,(\neg y,\, y),\,k} = -\,l_k^{v\cdot\,(y),\,k},\; v\cdot\,(y) \equiv v_y^{kk\cdot}\,. \qquad (2.56)$$

Для левой части равенства (2.29) в соответствии с (7.7) имеем

$$\rho_0^{i\,(\neg y,\, y),\,0} = L_k^0\,\rho_k^{i\,(\neg y,\, y),\,k}\,.$$

Покажем, что $l_0^{v\cdot\,(y),\,0} = L_k^0 l_k^{v\cdot\,(y),\,0}$. Действительно,

$$y^{00} = o_k^{00} + y^{k0} \rightarrow y^{00} = o_k^{00} + c_k^0 y^{kk} \rightarrow v_y^{00} = v_k^{00} + c_k^0 v_y^{kk},$$

$$c_k^0 \text{ — const.}, \; v_k^{00} = o_k^{00\cdot} \Leftrightarrow (o_k^{00} = p_k^{00} + v_k^{00}\,(t))\cdot,\; p_k^{00} \text{ — const.},$$

$$v_y^{00\cdot} = v_k^{00\cdot} + c_k^0 v_y^{kk\cdot} \rightarrow v_y^{00\cdot} = c_k^0 v_y^{kk\cdot},\; v_k^{00} \text{ — const.},$$

$$l_0^{v\cdot\,(y),\,0} = G_{y0}^0 \operatorname{col}\,\{v_y^{00\cdot}, v_y^{00\cdot}\} = G_{y0}^0 \operatorname{col}\,\{c_k^0 v_y^{kk\cdot}, c_k^0 v_y^{kk\cdot}\} =$$

$$= G_{y0}^0\,[c_k^0] \operatorname{col}\,\{v_y^{kk\cdot}, v_y^{kk\cdot}\} = T_k^0 G_{yk}^0\,[c_k^0] \operatorname{col}\,\{v_y^{kk\cdot}, v_y^{kk\cdot}\} =$$

$$= T_k^0\,[c_k^0]\,[c_k^0]^T\, G_{yk}^0\,[c_k^0] \operatorname{col}\,\{v_y^{kk\cdot}, v_y^{kk\cdot}\} =$$

$$= T_k^0\,[c_k^0]\, G_{yk}^k \operatorname{col}\,\{v_y^{kk\cdot}, v_y^{kk\cdot}\} = L_k^0 G_{yk}^k \operatorname{col}\,\{v_y^{kk\cdot}, v_y^{kk\cdot}\} =$$

$$= L_k^0 l_k^{v\cdot\,(y),\,k}.$$

Подставляя полученные результаты в определение (2.29), после сокращения на L_k^0, $\det L_k^0 \neq 0$, получаем доказываемый результат (2.56).

2. Для плотности динамической бимеры гравитации (2.33) получаем

$$l_0^{g\,(dx,\,dy),\,0} = G_{y0}^0 \operatorname{col}\,\{g^0\,(dx, dy), g^0\,(dx, dy)\} =$$

$$= G_{y0}^0 \operatorname{col}\,\{c_k^0 g^k, c_k^0 g^k\} = G_{y0}^0\,[c_k^0] \operatorname{col}\,\{g^k, g^k\} =$$

$$= T_k^0 G_{yk}^0 [c_k^0] \operatorname{col}\{g^k, g^k\} = T_k^0 [c_k^0]\,[c_k^0]^T\, G_{yk}^0\,[c_k^0] \operatorname{col}\{g^k, g^k\} =$$

$$= T_k^0\,[c_k^0]\, G_{yk}^k \operatorname{col}\,\{g^k, g^k\} = L_k^0 G_{yk}^k \operatorname{col}\,\{g^k, g^k\} =$$

$$= L_k^0 l_k^{g\,(dx,\,dy),\,k}.$$

3. Для плотности динамической меры деформирования среды в точке y с учетом (7.7) имеем

3.1.

$$\rho_k^{\Delta\,(\neg y,\,y),\,k} = L_0^k \rho_0^{\Delta\,(\neg y,\,y),\,0} = L_0^k G_0^0 \operatorname{col}\,\{T_y^0 n_y^0, T_y^0 n_y^0\} =$$

$$= T_0^{kk}\,[c_0^k]\, G_0^0\,[c_k^0]\,[c_0^k] \operatorname{col}\,\{T_y^0 c_k^0 c_0^k n_y^0, T_y^0 c_k^0 c_0^k n_y^0\} =$$

$$= T_0^{kk} G_0^k \operatorname{col}\,\{T_y^k n_y^k, T_y^k n_y^k\} = G_k^k \operatorname{col}\,\{T_y^k n_y^k, T_y^k n_y^k\},$$

где G_0^0, G_k^k — матрицы из определения скользящего вектора в E_0 и E_k (7.1).

3.2. Для вектора $\Delta^k\ (\neg y, y)$ с учетом (2.44) получаем

$$\begin{aligned}&\Delta^k\ (\neg y, y) = \Delta^k\ (\neg y^k, y^k) = \\ &= c_0^k \Delta^0\ (\neg y^0, y^0) \rightarrow c_0^k\ \mathrm{Div}_0 T_y^0 = \mathrm{Div}_k T_y^k;\end{aligned} \qquad (2.57)$$

$$\mathrm{Div}_0 T_y^0 = \mathrm{col}\ \{\ldots, \mathrm{div}_0 T_{yi}^0, \ldots\};$$

$$\mathrm{Div}_k T_y^k = \mathrm{col}\ \{\ldots, \mathrm{div}_k T_{yi}^k, \ldots\}.$$

Действительно, пусть: 1. E_0, E_k — две инерциальные системы координат, $L_k^0 : E_0 \rightarrow E_k$, $L_k^0 \in \mathbf{ML}\ (\mathbf{R}, \mathbf{6}) = \mathbf{T}_t\ (\mathbf{R}, \mathbf{6})\, \mathbf{SO}\ (\mathbf{R}, \mathbf{6})$;

2. T_y^0, T_y^k — динамический деформатор среды (2.43) в базисах $[e^0]$, $[e^k]$ инерциальных систем координат E_0, E_k (2.45):

$$T_y^0 = c_k^0 T_y^k c_k^{0,T},\ T_y^k = c_k^{0,T} T_y^0 c_k^0; \qquad (2.58)$$

3. $\mathrm{Div}_0 T_y^0, \mathrm{Div}_k T_y^k$ — (2×1)-столбцы дивергенций строк динамических деформаторов T_y^0, T_y^k в E_0 и E_k:

$$\begin{aligned}\mathrm{Div}_0 T_y^0 &= \mathrm{col}\ \{\mathrm{div}_0 T_{y1}^0, \mathrm{div}_0 T_{y2}^0\}, \\ \mathrm{Div}_k T_y^k &= \mathrm{col}\ \{\mathrm{div}_k T_{y1}^k, \mathrm{div}_k T_{y2}^k\}, \\ \mathrm{div}_0 T_{y1}^0 &= \partial T_{y11}^0 / \partial y_1^0 + \partial T_{y21}^0 / \partial y_2^0, \\ \mathrm{div}_0 T_{y2}^0 &= \partial T_{y12}^0 / \partial y_1^0 + \partial T_{y22}^0 / \partial y_2^0, \\ \mathrm{div}_k T_{y1}^k &= \partial T_{y11}^k / \partial y_1^k + \partial T_{y21}^k / \partial y_2^k, \\ \mathrm{div}_k T_{y2}^k &= \partial T_{y12}^k / \partial y_1^k + \partial T_{y22}^k / \partial y_2^k,\end{aligned} \qquad (2.59)$$

$$\partial T_{ij}^k / \partial y_p^0 \equiv \partial T_{ij}^k / \partial y_1^k \cdot \partial y_1^k / \partial y_p^0 + \partial T_{ij}^k / \partial y_2^k \cdot \partial y_2^k / \partial y_p^0,$$

$$y^k = c_k^{0,T} y^0. \qquad (2.60)$$

Тогда имеет место следующее утверждение:

$$\mathrm{Div}_0 T_y^0 = c_k^0\ \mathrm{Div}_k T_y^k. \qquad (2.61)$$

Доказательство равенства (2.61) достигается простыми вычислениями с учетом соотношения (2.44). Например, в двумерном случае для первой координаты $\mathrm{div}_0 T_{y1}^0$ столбца $\mathrm{Div}_0 T_y^0$ получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_0 T^0_{y1} &= \partial T^0_{y11} / \partial y^0_1 + \partial T^0_{y21} / \partial y^0_2 = \\ &= \partial / \partial y^0_1 (T^k_{11} c^2\theta - T^k_{12} c\theta s\theta - T^k_{21} c\theta s\theta + T^k_{22} s^2\theta) + \\ &+ \partial / \partial y^0_2 (T^k_{11} c\theta s\theta - T^k_{12} s^2\theta + T^k_{21} c^2\theta - T^k_{22} c\theta s\theta).\end{aligned}$$

Используя равенство (2.45) с учетом (4.50), получаем

$$\mathrm{div}_0 T^0_{y1} = \mathrm{div}_k T^k_{y1} c\theta - \mathrm{div}_k T^k_{y2} s\theta.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\mathrm{div}_0 T^0_{y2} = \mathrm{div}_k T^k_{y1} s\theta + \mathrm{div}_k T^k_{y2} c\theta.$$

Матричная запись полученных равенств является доказываемым результатом (2.61). В трехмерном случае доказательство аналогично, но более громоздко.

Перейдем к доказательству инвариантности относительно обобщенной группы Галилея утверждения (2.49) с учетом равенства $v^{00}_y = v^{00}_k + c^0_k v^{kk}_y = v^{00}_k + v^{k0}_y, v^{00}_k$ — const.:

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij} T^0_{ij} \partial v^{00}_{yj} / \partial y^{00}_i &= \Sigma_{ij} T^0_{ij} \partial (v^{00}_{kj} + v^{k0}_{yj}) / \partial y^{00}_i = \\ &= \Sigma_{ij} T^0_{ij} \partial v^{k0}_{yj} / \partial y^{00}_i.\end{aligned}$$

Осталось в скалярных равенствах $T^0_{yj} \cdot \mathrm{grad}_0 v^{k0}_{yj}$ (2.49) перейти к базису $[e^k]$: $T^0_{yj} \cdot \mathrm{grad}_0 v^{k0}_{yj} = T^k_{yj} \cdot \mathrm{grad}_k v^{kk}_{yj}$.□

Следствием доказанного предложения является следующее утверждение.

Предложение 2.5. Пусть: 1. E_0 — инерциальная система координат;

2. $L^0_k : E_k \to E_0, L^0_k \in \mathbf{ML}\,(\mathbf{R}, 6)$ (7.7) (2.55).

Тогда система координат E_k является инерциальной.

Комментарии: 1. Сопоставляя доказанный результат с определением инерциальной системы координат (**0.2.11.-1**) и предложением (**П. 2.4**), можно сформулировать следующее утверждение: множество инерциальных систем координат является классом эквивалентности относительно обобщенной группы Галилея, то есть $E_1 \approx E_k$, если $L^l_k : E_k \to E_1, L^l_k \in \mathbf{ML}\,(\mathbf{R}, 6) =$

$= \mathbf{T}_t \ (\mathbf{R}, 6) \, \mathbf{SO} \, (\mathbf{R}, 6)$. Фактор-структура, определяемая на множестве всех систем координат в A_3^{μ} по указанному отношению эквивалентности, состоит из двух элементов: множество инерциальных и множество неинерциальных систем координат.

2. Математически состоятельная формализация всех объектов механики Галилея (если таковая существует) не зависит от выбора инерциальной системы координат.

2.4. ВТОРИЧНЫЕ СВОЙСТВА ВСЕЛЕННОЙ МЕХАНИКИ ГАЛИЛЕЯ I

Вторичные свойства Вселенной механики Галилея являются следствиями первичных свойств, сформулированных в виде аксиом.

2.4.1. ДИНАМИЧЕСКАЯ ОДНОРОДНОСТЬ И ИЗОТРОПНОСТЬ ВСЕЛЕННОЙ МЕХАНИКИ ГАЛИЛЕЯ

Определение 2.21. Пусть: 1. $\mathbf{L}(\mathbf{H}.6) = \mathbf{T}(\mathbf{H}.6)\mathbf{SO}(\mathbf{H}.6)$ — группа движений на векторном пространстве винтов (7.3) [23, 33].

2. Аксиомы динамики (**D.1—D.9**) инвариантны относительно группы $\mathbf{L}(\mathbf{H}.6)$.

Тогда Вселенная механики называется *динамически однородной и динамически изотропной* соответственно.

Предложение 2.6. Вселенная механики динамически однородна и изотропна (шестимерное обобщение теоремы Э. Нётter [12, 51]).

Доказательство утверждения дословно совпадает с доказательством предыдущего утверждения, так как является его частным случаем при $v_k^{00} \equiv 0$.

2.4.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕНЯЕМОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СРЕДЫ

Предложение 2.7. Пусть: 1. D_3^{μ} — локально изменяемая непрерывная среда (**K.8**);

2. $\rho_y^i \rho_0^{i(\neg y, y), 0} \equiv - \rho_y \rho_0^{v \cdot (y), 0}$ — скользящий вектор плотности динамической меры (винта) инерции относительно $\mu_3 \, (dy)$ в точке $y \in D_3^{\mu}$ (2.28);

3. $\rho_y \rho_0^{g\,(\neg y,\, y),\, 0}$ — скользящий вектор плотности динамической меры (винта) гравитации относительно $\mu_3\,(dy)$ в точке $y \in D_3^{\mu}$ (2.35);

4. $\rho_0^{\Delta\,(\neg y,\, y),\, 0}$ — скользящий вектор плотности динамической меры (винта) деформации непрерывной среды относительно $\mu_3\,(dy)$ в точке $y \in D_3^{\mu}$ (2.41).

Тогда в любой точке $y \in D_3^{\mu}$ изменяемой непрерывной среды имеет место равенство

$$- \rho_y \rho_0^{v\cdot\,(y),\, 0} + \rho_y \rho_0^{g\,(\neg y,\, y),\, 0} + \rho_0^{\Delta\,(\neg y,\, y),\, 0} = 0. \qquad (2.62)$$

Доказательство следует из аксиомы **D.4** с учетом (2.47).□

Предложение 2.8. Пусть: 1. $-\rho_y v_y^{00\cdot}$ — главный вектор скользящего вектора плотности динамической меры (винта) инерции (2.30), (7.4)

$$-\rho_y v_y^{00\cdot} = mv\,(-\rho_y \rho_0^{v\cdot\,(y),\, 0}); \qquad (2.63)$$

2. $\rho_y g_t^0\,(\neg y,\, y)$ — главный вектор скользящего вектора плотности динамической меры (винта) гравитации (2.35), (7.4)

$$\rho_y g_t^0\,(\neg y,\, y) = mv\,(\rho_y \rho_0^{g\,(\neg y,\, y),\, 0}); \qquad (2.64)$$

3. $\mathrm{Div}_0 T_y^0 \equiv \mathrm{col}\,\{\ldots, \mathrm{div}_0 T_{yi}^0, \ldots\}$ — главный вектор скользящего вектора плотности динамической меры (винта) деформации (2.44), (7.4).

Тогда уравнения движения локально изменяемой непрерывной среды в точке $y \in D_3^{\mu}$ имеют вид

$$-\rho_y v_y^{00\cdot} + \rho_y g_t^0\,(\neg y,\, y) + \mathrm{Div}_0 T_y^0 = 0. \qquad (2.65)$$

Доказательство. Сумма скользящих векторов, линии действия которых пересекаются в одной точке, является скользящим вектором, порожденным суммой свободных векторов, порождающих слагаемые с линией действия, проходящей через ту же точку: для любых свободных векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из V_3 (7.2) [23, 33]

$$\sum_{k=1}^{n} l_{0k}^{x0} = l_0^{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),0}. \qquad (2.66)$$

Но в этом случае утверждения $\sum_{k=1}^{n} l_{0k}^{x0} = l_0^{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),0} = 0$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ эквивалентны (7.2), что и доказывает предложение (2.65).□

Комментарии: 1. Из (**П. 2.8**) следует, что движение локально изменяемой непрерывной среды определяется распределением по σ_3^{μ} не динамических мер (т. е. не главных векторов и главных моментов сил, как это принято считать на основании переноса на непрерывную среду свойств конечного множества «массивных» точек), а трехмерных свободных векторов $f^0(.,.)$, порождающих этих меры. При этом если сами векторы $f^0(.,.)$ являются свободными, то их μ_3-плотности зависят от точки $y \in A_3$ и, следовательно, являются векторами из V_{3y} (2.5), а не из V_3.

2. Переход от уравнения (2.47) к уравнению (2.62) возможен только для локально изменяемой среды, свойства которой и характеристики их изменения локальны.

3. Из локальной изменяемости среды не следует локальной линейной изменяемости этой среды, поэтому уравнения движения среды (2.65) носят общий характер. Свойство линейной локальной изменяемости среды, постулированное аксиомой **К.8**, позволяет при определенных условиях изучать движение среды с использованием линейных математических моделей.

4. Как и следовало ожидать, ни сами уравнения движения (2.65), ни их доказательство не позволяют сделать каких-либо предварительных заключений о свойствах д-деформатора среды (матрицы напряжений деформации T_y^0) непрерывной среды, например о ее симметрии.

2.4.3. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ИНЕРЦИОННОЙ МАССЫ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕНЯЕМОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СРЕДЫ

Предложение 2.9. Пусть Вселенная механики Галилея, согласно аксиоме **D.9**, инерционно (гравитационно) сбалансирована (2.46):

$$d/dt\, md\,(y) = 0. \qquad (2.67)$$

Тогда: 1. Верно уравнение в двух эквивалентных формах записи:

$$\dot{\rho}_y + \rho_y \mathrm{div}_0 v_y^{00} = 0, \tag{2.68}$$

$$\partial\rho_y / \partial t + \mathrm{div}_0 \rho_y v_y^{00} = 0. \tag{2.69}$$

2. Уравнения (2.68), (2.69) называются *дифференциальными уравнениями баланса инерционной (гравитационной) массы локально изменяемой непрерывной среды* в точке $y \in D_3^\mu$.

Доказательство. $dm(dy) / dt = d(\rho_y \mu_3(dy)) / dt = \dot{\rho}_y \mu_3(dy) + {}$ $+ \rho_y \dot{\mu}_3(dy) = 0 \rightarrow \dot{\rho}_y + \rho_y \dot{\mu}_3(dy) / \mu_3(dy) = 0$, откуда и следует равенство (2.68) с учетом того, что $\dot{\mu}_3(dy) / \mu_3(dy) =$ $= \mathrm{div}_0 v_y^{00}$. Уравнение (2.69) получается из равенства (2.68) с учетом соотношения $\dot{\rho}_y = \partial\rho_y / \partial t + v_y^{00} \cdot \mathrm{grad}_0 \rho_y$.□

Комментарии: 1. Равенства (2.68) и (2.69) не зависят от вида массы (инерционной или гравитационной) по причине независимости от времени гравитационной постоянной.

2. Название уравнений соответствует физической сути вопроса: скорость изменения плотности массы в точке совпадает с характеристикой скорости подвода (отвода) массы в точке (от точки).

2.4.4. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕНЯЕМОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СРЕДЫ

Определение 2.22. Пусть: 1. $v_y^{00} \in R_3$ — координатный столбец в $[e^0]$ вектора скорости движения $v_y^0 \in V_3$ точки $y \in D_3^\mu$ относительно инерциальной системы координат $E_0 \in A_3$;

2. $(v_y^{00} \cdot v_y^{00}) = v_y^{00,T} v_y^{00} = v_y^{00,2}$ — скалярный квадрат вектора v_y^{00};

3. $m(dy)$ — скалярная мера инерции среды (масса) на σ_3^μ (2.24).

Тогда: 1. Скалярная мера $K(dy)$ на σ_3^μ, абсолютно непрерывная относительно скалярной меры $m(dy)$ с неотрицательной плотностью $\rho_v = 0.5 v_y^{00,2} \geqslant 0$:

$$K(dy) = 0.5 v_y^{00,2} m(dy) = 0.5 v_y^{00,2} \rho_y \mu_3(dy) \tag{2.70}$$

называется *кинетической энергией* локально изменяемой непрерывной среды.

2. Плотность ρ_k меры $K(dy)$ относительно меры Лебега $\mu_3\ (dy)$ в точке $y \in D_3^{\mu}$

$$\rho_k = 0.5\rho_y v_y^{00,2} \qquad (2.71)$$

называется *скоростным напором среды* в точке $y \in D_3^{\mu}$.

Определение 2.23. Пусть: 1. $\rho_g = \rho_y g_y^0\ (\neg y, y) \in R_3$ — плотность главного вектора динамической меры гравитации относительно меры Лебега $\mu_3\ (dy)$ в точке $y \in D_3^{\mu}$ (2.33), (2.35);

2. $\Delta^0\ (\neg y, y) = \mathrm{Div}_0 T_y^{00} \in R_3$ — плотность главного вектора динамической меры деформации среды относительно меры Лебега $\mu_3\ (dy)$ в точке $y \in D_3^{\mu}$ (2.41), (2.44);

3. $v_y^{00} \in R_3$ — координатный столбец в $[e^0]$ вектора скорости $v_y^0 \in V_3$ движения точки $y \in D_3^{\mu}$ относительно инерциальной системы координат $E_0 \in A_3$.

Тогда скалярные произведения

$$\rho_{gv} = (\rho_g \cdot v_y^{00}) = \rho_y\ (g_y^0(\neg y, y) \cdot v_y^{00}), \qquad (2.72)$$

$$\rho_{\Delta v} = (\Delta^0(\neg y, y) \cdot v_y^{00}) \qquad (2.73)$$

называются *мощностями плотностей* $\rho_g = \rho_y g_y^0\ (\neg y, y)$ и $\Delta^0\ (\neg y, y)$ главных векторов (2.34) и (2.44) винтов (2.39), (2.41) относительно меры Лебега $\mu_3\ (dy)$ в точке $y \in D_3^{\mu}$.

Предложение 2.10. Пусть: 1. $\rho_{gv} = \rho_y g_y^0(\neg y, y) \cdot v_y^{00}, \rho_{\Delta v} = \Delta^0(\neg y, y) \cdot v_y^{00}$ — мощности векторов $\rho_y g_y^0(\neg y, y)$, $\Delta^0(\neg y, y)$ из (2.72), (2.73);

2. $0.5\rho_y v_y^{00,2\cdot}$ — плотность скорости изменения кинетической энергии среды относительно меры Лебега $\mu_3\ (dy)$ в точке $y \in D_3^{\mu}$ (скоростной напор среды (2.71)).

Тогда: 1. Справедливо следующее равенство:

$$0.5\rho_y v_y^{00,2\cdot} = \rho_y g_y^0\ (\neg y, y) \cdot v_y^{00} + \Delta^0\ (\neg y, y) \cdot v_y^{00}. \quad (2.74)$$

2. Равенство (2.74) называется *дифференциальным уравнением баланса механической энергии* среды в точке $y \in D_3^{\mu}$.

Доказательство достигается скалярным умножением уравнения движения среды (2.65) на вектор v_y^{00} с учетом равенства $\rho_y v_y^{00\cdot} \cdot v_y^{00} = 0.5\rho_y v_y^{00,2\cdot}$.□

Комментарии: 1. Из (2.74) следует, что плотность скорости изменения кинетической энергии среды относительно меры Лебега $\mu_3\ (dy)$ в точке $y \in D_3^{\mu}$ определяется суммой мощностей главных векторов (mv) скользящих векторов плотностей $\rho_y g_y^0\ (\neg y, y)$ и $\Delta^0\ (\neg y, y)$ (2.72), (2.73) динамических мер гравитации и деформации среды относительно той же меры в той же точке.

2. Уравнение баланса механической энергии среды в точке $y \in D_3^{\mu}$ эквивалентно уравнению движения среды (2.65) в той же точке.

Предложение 2.11. Пусть: 1. $\delta^0\ (\neg y, y) = T_y^0 n_y^0$ — трехмерный свободный вектор из (2.43):

$$\delta^0\ (\neg y, y) = mv\rho_0^{\delta\,(\neg y,\, y),\, 0} = T_y^0 n_y^0; \tag{2.75}$$

2. $\rho_{\delta v}$ — мощность вектора $\delta^0\ (\neg y, y)$ в точке $y \in D_3^{\mu}$:

$$\rho_{\delta v} = (\delta^0\ (\neg y, y) \cdot v_y^{00}) = (T_y^0 n_y^0 \cdot v_y^{00}). \tag{2.76}$$

Тогда для мощности $\rho_{\delta v}$ имеет место представление

$$\rho_{\delta v} = (T_y^{0,T} v_y^{00} \cdot n_y^0), \tag{2.77}$$

где $T_y^{0,T} v_y^{00}$ — вектор мощностей $(T_{iy}^0 \cdot v_y^{00})$ i-столбцов $T_{iy}^0 = (T_{i1}^0, T_{i2}^0, T_{i3}^0)^T$ д-деформатора T_y^0, $i = 1, 2, 3$.

Предложение 2.12. Пусть: 1. Скорость изменения кинетической энергии среды (2.70) в точке $y \in D_3^{\mu}$ имеет вид

$$K^{\cdot}\ (dy) = 0.5 v_y^{00,2\cdot}\, m\,(dy) = 0.5 v_y^{00,2\cdot} \rho_y \mu_3\ (dy); \tag{2.78}$$

2. Скорость изменения внутренней энергии среды (2.51) в точке $y \in D_3^{\mu}$ имеет вид

$$U^{\cdot}\ (dy) = u_y^{\cdot} m\,(dy) = u_y^{\cdot} \rho_y \mu_3\ (dy). \tag{2.79}$$

Тогда: 1. Имеет место следующее равенство:

$$\rho_y\ (0.5v_y^{00,2} + u_y)^{\cdot} = \rho_{gv} + \rho_{\Delta v} + \Phi_y + \mathrm{div}_0 q_y^0 + \varphi_y \tag{2.80}$$

или в развернутой форме с учетом (2.72) и (2.73), (2.49)

$$\rho_y (0.5v_y^{00,2} + u_y)^{\cdot} = \rho_y (g_y^0(\neg y, y) \cdot v_y^{00}) + (\Delta^0(\neg y, y) \cdot v_y^{00}) + \\ + \Sigma_{ij} T_{ij}^0 \partial v_j^0 / \partial y_i^{00} + \mathrm{div}_0 q_y^0 + \varphi_y. \tag{2.81}$$

2. Равенство (2.81) называется *дифференциальным уравнением баланса энергии* среды в точке $y \in D_3^{\mu}$.

Доказательство. Складывая уравнения механической энергии (2.74) с термодинамическим уравнением энергии (2.52), получаем доказываемый результат.□

Комментарии: 1. Из (2.81) следует, что сумма плотностей скоростей изменения механической и тепловой энергии системы относительно меры $\mu_3\ (dy)$ в точке совпадает с суммой мощностей главных векторов плотностей динамических мер, мощности напряжений д-деформатора, расхождением вектора потока тепла и секундного объемного выделения или поглощения тепла в той же точке.

2. Уравнению (2.81) можно придать другую форму.

Предложение 2.13. Пусть: 1. Для дивергенции вектора мощностей $T_y^{0,T} v_y^{00}$ столбцов д-деформатора T_y^0 справедливо следующее представление:

$$\mathrm{div}_0 T_y^{0,T} v_y^{00} = \rho_{\Delta v} + \Phi_y \tag{2.82}$$

или в развернутом виде

$$\mathrm{div}_0\ T_y^{0,T} v_y^{00} = (\Delta^0(\neg y, y) \cdot v_y^{00}) + \Sigma_{ij} T_{ij}^0 \partial v_j^0 / \partial y_i^{00}. \tag{2.83}$$

Доказательство. Действительно $\mathrm{div}_0 T_y^{0,T} \cdot v_y^{00} = \mathrm{div}_0 (T_{1y}^0 \cdot v_y^{00}, T_{2y}^0 \cdot v_y^{00}, T_{3y}^0 \cdot v_y^{00})^T = (\partial T_{1y}^0 / \partial y_1^{00} + \partial T_{2y}^0 / \partial y_1^{00} + \partial T_{3y}^0 / \partial y_1^{00}) \times \times v_y^{00} + \Sigma_{ij} T_{ij}^0 \partial v_{yj}^{00} / \partial y_i^{00} = [(\partial T_{11}^0 / \partial y_1^{00}, \ \partial T_{12}^0 / \partial y_1^{00}, \partial T_{13}^0 / \partial y_1^{00})^T + (\partial T_{21}^0 / \partial y_2^{00}, \partial T_{22}^{00} / \partial y_2^{00}, \partial T_{23}^0 / \partial y_2^{00})^T + + (\partial T_{31}^0 / \partial y_3^{00}, \partial T_{32}^0 / \partial y_3^{00}, \partial T_{33}^0 / \partial y_3^{00})^T] \cdot v_y^{00} + + \Sigma_{ij} T_{ij}^0 \partial v_{yj}^{00} / \partial y_i^{00} = [(\partial T_{11}^0 / \partial y_1^{00} + \partial T_{21}^0 / \partial y_2^{00} + + \partial T_{31}^0 / \partial y_3^{00})^T, (\partial T_{12}^0 / \partial y_1^{00} + \partial T_{22}^0 / \partial y_2^{00} + \partial T_{32}^0 / \partial y_3^{00})^T, (\partial T_{13}^0 / \partial y_1^{00} + \partial T_{23}^0 / \partial y_2^{00} + \partial T_{33}^0 / \partial y_3^{00})^T] \cdot v_y^{00} + + \Sigma_{ij} T_{ij}^0 \partial v_{yj}^{00} / \partial y_i^{00} = (\mathrm{div}_0 T_{i1}^0, \ \mathrm{div}_0 T_{12}^0, \mathrm{div}_0 T_{13}^0)^T \cdot v_y^{00} + + \Sigma_{ij} T_{ij}^0 \partial v_{yj}^{00} / \partial y_i^{00} = \rho_{\Delta v} + \Phi_y$.□

Предложение 2.14. Уравнение баланса энергии среды в точке y (2.79) может быть представлено в виде

$$\rho_y \ (0.5 v_y^{00,2} + u_y)^{\cdot} = \rho_y \ (g_y^0 \ (\neg y, y) \cdot v_y^{00}) + \mathrm{div}_0 T_y^{0,T} v_y^{00} + + \mathrm{div}_0 q_y^0 + \rho_y \varphi_y . \qquad (2.84)$$

Комментарий. В механике Галилея уравнение баланса энергии (2.84) эквивалентно условиям динамической и термодинамической (2.23), (2.52) сбалансированности Вселенной.

3. КИНЕМАТИКА ЛОКАЛЬНО ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЕМОЙ СРЕДЫ

3.1. УРАВНЕНИЕ КИНЕМАТИКИ НА ГРУППЕ К-ДЕФОРМАТОРОВ СРЕДЫ

Предложение 3.1. Пусть: 1. $E_0 = (o_0, [e^0])$ — фиксированная ортонормированная система координат в A_3^μ, $o_0 \in D_3^\mu$, $[e^0] \in V_3$;

2. $v_y^{00} = y^{00\cdot}$ — координатный столбец вектора скорости $v_y^0 \in V_3$ точки $y \in \varepsilon_y$ (нижний индекс) относительно E_0 (верхний внутренний индекс) в базисе $[e^0]$ (верхний внешний индекс);

3. dv_y^{00} / dy^{00} — производная вектора $v_y^{00} \in R_3$ по радиус-вектору $y^{00} \in R_3$ точки $y \in \varepsilon_y$, вычисленная в точке y в базисе $[e^0]$ (2.49), — матрица скоростей деформаций (3.17), **О. 2.16-6**).

Тогда к-деформатор $D_d^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ (2.9) среды ε_y является решением матричного дифференциального уравнения

$$D_d^{00\cdot} = dv_y^{00} / dy^{00} D_d^{00}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Разложим вектор $h_y = x^0 - y^0 \in V_{3y}$ по базисам $[e^0]$ и сопутствующему деформации $[e^d]$ (**О. 2.4-7**)

$$h_y = [e^0] h_y^0 = [e^d] h_y^d. \tag{3.2}$$

Подставляя в полученное равенство соотношение (2.7) с учетом единственности разложения вектора по базису, получаем

$$h_y^0(t) = D_d^{00}(t) h_y^d. \tag{3.3}$$

Дифференцируя равенство (3.3) по времени с учетом того, что вектор h_y «деформируется» вместе со средой (т. е. с базисом

$[e^d] = [e^0]D_d^{00}(t)$, сопутствующим деформированию среды) и, следовательно, h_y^d — const., и используя (3.3) в форме $h_y^d = (D_d^{00}(t))^{-1} h_y^0(t)$, приходим к выражению для распределения скоростей континуума в ε_y относительно базовой системы координат E_0 в ее базисе $[e^0]$:

$$v_x^{00} = v_y^{00} + D_d^{00\cdot}(t)(D_d^{00}(t))^{-1} h_y^0. \tag{3.4}$$

Сравнивая линейную часть разложения вектора скорости v_x^{00} в ε_y

$$v_x^{00} = v_y^{00} + dv_y^{00} / dy^{00} h_y^0$$

с равенством (3.4), получаем доказываемый результат. □

Определение 3.1. Уравнение вида (3.1)

$$D_y^{00\cdot}(t) = dv_y^{00} / dy^{00} D_y^{00}(t) \tag{3.5}$$

называется *уравнением кинематики на группе к-деформаторов среды* ε_y.

Комментарии: 1. Из равенства (3.5) не следует вывода о возможности представления физического преобразования вектора $h_y^0(t)$ при деформировании среды, математической моделью которого является к-деформатор $D_y^{00}(t)$, в виде суперпозиции каких-либо преобразований частного вида, например в виде суперпозиции физического вращения и физического преобразования среды симметрическим оператором, как это принято считать [16, 38, 46].

2. Из равенства (3.4) не следует возможности какого-либо представления вектора скорости $v_x^{00}(t)$ произвольной точки $x \in \varepsilon_y$ в ε_y-окрестности точки y среды при деформировании, например в виде суммы скоростей, вызванных реальным вращением среды и деформированием посредством симметрического деформатора.

3. Равенство (3.5) в отличие от ничего не определяющего тождества Коши—Гельмгольца [16, 38, 46]

$$\begin{aligned} v_x^{00}(t) &= v_y^{00}(t) + dv_y^{00} / dy^{00} h_y^0 \equiv \\ &\equiv v_y^{00}(t) + 0.5(dv_y^{00} / dy^{00} - dv_y^{00} / dy^{00}) h_y^{00} + \\ &+ 0.5(dv_y^{00} / dy^{00} + dv_y^{00} / dy^{00}) h_y^0, \end{aligned} \qquad (3.6)$$

в котором левая часть есть другое обозначение правой части, является кинематическим дифференциальным уравнением для определения неизвестного к-деформатора $D_y^{00}(t)$, представляющего собой на самом деле единственную «законную» математическую модель линейного приближения реального физического процесса деформирования среды.

4. В силу предыдущего пункта к-деформатор D_y^{00} принципиально не может быть apriory (до интегрирования уравнений (3.5)) представлен матрицей какого-либо определенного вида (например, сдвигом, кручением, изгибом и т. п.).

5. Система равенств

$$D_y^{00\cdot}(t) = dv_y^{00} / dy^{00} D_y^{00}(t), \qquad (3.7)$$

$$x^{00}(t) = y^{00}(t) + D_y^{00}(t) h_y^d, \; h_y^d = h_y^0(t_0) \qquad (3.8)$$

при известных матрицах скоростей деформаций dv_y^{00} / dy^{00} (3.10) (полученных в процессе решения уравнений динамики) и условий Коши $D_y^{00}(t_0)$, $h_y^0(t_0)$ является решением кинематической задачи линейного деформирования среды в точке $y \in \varepsilon_y$.

3.2. МАТРИЦА ДЕФОРМАЦИЙ СРЕДЫ И ЕЕ СВЯЗЬ С ВЕКТОРОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СРЕДЫ И К-ДЕФОРМАТОРОМ

Предложение 3.2. Пусть: 1. Уравнение термодинамики деформируемой среды имеет вид (2.52)

$$\begin{aligned} (T_y^0) \cdot (V_y^0) &= \mathrm{Sp}[T_y^0 (dv_y^{00} / dy^{00})^T] = \\ &= \rho_y u_{yt}^{\cdot} - \mathrm{div}_0 q_{yt}^0 - \rho_y \varphi_{yt}; \end{aligned} \qquad (3.9)$$

2. δ^0, $i, j = 1, 2, 3$ — (9×1)-столбец функций точки $y \in \varepsilon_y$ и времени $t \in T$, $\delta_{ij} = \delta_{ij}^0(t, y)$, $\Delta_y^0 = \{\delta_{ij}^0\}$, $i, j = 1, 2, 3$ — соответствующая (3×3)-матрица в базисе $[e^0]$;

3. Производная столбца (δ^0) (матрицы $\Delta_y^0 = \{\delta_{ij}^0\}$) по времени в точке $y \in \varepsilon_y$ в момент времени $t \in T$ совпадает со столбцом (V_y^0) (матрицей dv_y^{00} / dy^{00}):

$$(\delta^0)^{\cdot} = (V_y^0), \quad \Delta_y^{0\cdot} = dv_y^{00} / dy^{00}. \tag{3.10}$$

Тогда: 1. Элементы (9×1)-столбца (δ^0) (матрицы $\Delta_y^0 = \{\delta_{ij}^0\}$) называются *деформациями, а столбец* (δ^0) (матрица $\Delta_y^0 = \{\delta_{ij}^0\}$) — *столбцом (матрицей) деформаций среды в точке* $y \in \varepsilon_y$ *в момент времени* $t \in T$.

2. Столбец (V_y^0) и матрица $\Delta_y^{0\cdot} = dv_y^{00} / dy^{00}$ называются *столбцом и матрицей скоростей деформаций среды в точке* $y \in \varepsilon_y$ *в момент времени* $t \in T$ (см. **О.2.16-6**).

3. Скалярное произведение вида

$$\Phi_{yt} = dW_y / dt = (T_y^0) \cdot (V_y^0) = \\ = \mathrm{Sp}\,[T_y^0 (dv_y^{00} / dy^{00})^T] \tag{3.11}$$

называется *мощностью напряжений д-деформатора среды* T_y^0 *в точке* $y \in \varepsilon_y$ *в момент времени* $t \in T$ (2.43).

4. Скалярное произведение dW_y вида

$$dW_y = \Phi_{yt}\,\mu_1(dt) = (T_y^0) \cdot d(\delta^0) \equiv \mathrm{Sp}[T_y^0 (d\Delta_y^0)^T] \tag{3.12}$$

называется *элементарной работой напряжений* T_{ij}^0 *на соответствующих элементарных деформациях* $d\delta_{ji}^0$ *среды в точке* $y \in \varepsilon_y$ *в момент времени* $t \in T$.

5. При отсутствии теплопереноса $(\mathrm{div}_0\, q_{yt}^0 = 0)$ и тепловыделения (теплопоглощения), $\varphi_y = 0$ элементарная работа напряжений T_{ij}^0 на элементарных деформациях $d\delta_{ji}^0$ среды в точке $y \in \varepsilon_y$ в момент времени $t \in T$ равна произведению плотности массы среды и дифференциала плотности внутренней энергии среды относительно массы $m(dy)$ в той же точке в тот же момент времени (3.9)

$$dW_y = (T_y^0) \cdot d\,(\delta^0) \equiv \mathrm{Sp}\,[T_y^0 (d\Delta_y^0)^T] = \rho_y du_{yt}. \tag{3.13}$$

Доказательство достигается подстановкой определения (3.12) в уравнение с последующим умножением на дифференциал $\mu_1(dt)$. □

Комментарии: 1. Из (3.9) и (3.10) следует, что к-деформатор среды в точке $y \in \varepsilon_y$ в момент времени $t \in T$ является решением дифференциального уравнения (3.7), матричным коэффициентом которого является матрица скоростей деформаций среды в той же точке в тот же момент времени.

2. Любые способы определения деформаций среды без использования понятия работы напряжений (3.12) не имеют под собой ни математических, ни физических оснований, например, с использованием понятия расстояния между точками среды или как элементов симметрической составляющей матрицы dz_y^{00}/dy^{00} [38, 46].

3. Окончательным объектом исследования процесса деформирования среды является путь точки $y \in \varepsilon_y$, т. е. вектор-функция $y^{00}(t) \in R_3$ при известном ее значении $y^{00}(0)$ в момент времени $t = 0$. Указанная вектор-функция известна, если при известном векторе $y^{00}(0)$ известен вектор $z^{00}(t)$, такой что $y^{00}(t) = y^{00}(0) + z^{00}(t)$. Следовательно, при известном векторе $y^{00}(0)$ конечным объектом исследования процесса деформирования среды является вектор-функция $z^{00}(t)$ при условии $z^{00}(0) = 0$.

4. В определения «вектор деформаций» и «матрица деформаций» не следует вкладывать какой-либо «житейский» смысл. В частности, не следует искать реально не существующие «касательные» и «нормальные» деформации к реально не существующим поверхностям механических систем. С использованием результатов параграфа **3.2** можно придать величинам δ_{ji}^{0} некий «геометрический смысл», но он никакого отношения не имеет к тому смыслу, который вкладывается в эти величины традиционно. Деформации δ_{ji}^{0} локально линейно изменяемой непрерывной среды — это 9 функций, удовлетворяющих равенству (3.10) с учетом равенства (3.7), и не более того.

Определение 3.2. Пусть: 1. $v_y^{00}(t)$ — координатный столбец вектора скорости $v_y^{0}(t)$ точки $y(t)$ относительно системы координат E_0 в базисе $[e^0]$, $v_y^{00}(t) = dy^{00}(t)/\,dt$;

2. $z_y^{00}(t) \in R_3$ — координатный столбец в базисе $[e^0]$ вектора $z_y^{0}(t)$, такой что

$$z_y^{00\cdot}(t) = v_y^{00}(t),\ z_y^{00}(t) = 0. \qquad (3.14)$$

Тогда: 1. Вектор $z_y^0(t)$ называется *вектором перемещения точки* $y(t) \in \varepsilon_y$ *относительно системы координат* E_0 *в момент времени* $t \in T$.

2. Столбец $z_y^{00\cdot}(t) \in R_3$ называется *скоростью координатного столбца вектора перемещения точки* $y(t) \in \varepsilon_y$ *относительно системы координат* E_0 *в момент времени* $t \in T$.

Комментарий. Скорости изменения векторов $y^0(t)$ и $z_y^0(t)$ среды в точке $y \in \varepsilon_y$ в момент времени $t \in T$ совпадают (3.14), сами векторы принципиально различны: вектор $z_y^0(t) = 0$, вектор $z_y^0(t + \Delta t)$ является приращением вектора $y^0(t)$ в точке $y \in \varepsilon_y$ за время $\Delta t \in T$:

$$z_y^{00}(t + \Delta t) = \int \gamma_{[t + \Delta t]} v_y^{00}(t) \mu_1(dt) = y^{00}(t + \Delta t) - y^{00}(t). \quad (3.15)$$

Разделив обе части равенства (3.15) на $\Delta t \to 0$, вернемся к определению (3.14).

Предложение 3.3. Пусть: 1. Среда деформирована ($\Delta^0(t) \neq 0$) и деформируема ($\Delta^{0\cdot}(t) \neq 0$) в момент времени $t \neq 0$;

2. Координаты столбца v_y^{00} и элементы v_j^i, $i, j = 1, 2, 3$ матрицы dv_y^{00} / dy^{00} непрерывны по аргументу (y^{00}, t) на $D_3^\mu \times [t + \Delta t]$, что эквивалентно

$$v_y^{00} \in C^1_{D \times [t, t + \Delta t]}. \quad (3.16)$$

Тогда: 1. Скорость производной dz_y^{00} / dy^{00} вектора параллельного переноса z_y^{00} точки $y \in \varepsilon_y$ в момент времени $t \in T$ (в терминах координатных столбцов) совпадает с матрицей скоростей деформаций среды и матрицей dv_y^{00} / dy^{00} в той же точке в тот же момент времени $t \in T$:

$$(dz_y^{00} / dy^{00})^\cdot = \Delta_y^{0\cdot} = dv_y^{00} / dy^{00}. \quad (3.17)$$

2. Матрицы $dz_y^{00} / dy^{00}(t)$ и $\Delta_y^0(t)$ отличаются на постоянную матрицу $(dz_y^{00} / dy^{00}(0) - \Delta_y^0(0))$:

$$dz_y^{00} / dy^{00}(t) = \Delta_y^0(t) + (dz_y^{00} / dy^{00}(0) - \Delta_y^0(0)). \quad (3.18)$$

Доказательство. Интегрируя определение вектора параллельного переноса среды (3.14) по интервалу времени $\Delta t \equiv [t + \Delta t, t]$, получаем

$$z_y^{00}(t + \Delta t) - z_y^{00}(t) = \int \chi_{\Delta t} v_y^{00} \mu_t(dt). \tag{3.19}$$

Дифференцируя полученное равенство по вектору y^{00} с учетом права перестановочности производной и интеграла (3.16) и (3.19), получаем

$$\begin{gathered} dz_y^{00}(t + \Delta t)/dy^{00} - dz_y^{00}(t)/dy^{00} = \int \chi_{\Delta t} dv_y^{00}/dy^{00} \mu_t(dt) = \\ = \int \chi_{\Delta t} \Delta_y^{0\cdot} \mu_t(dt) = \int \chi_{\Delta t} d\Delta_y^0 = \Delta_y^0(t + \Delta t) - \Delta_y^0(t). \end{gathered} \tag{3.20}$$

Разделив обе части полученного равенства на $\Delta t \to 0$, приходим к доказываемому равенству (3.17). □

Комментарии: 1. Требование (3.16) является центральным для всей излагаемой теории. Если оно не выполнено, то равенства (3.17) и (3.20) не имеют смысла и все остальное неверно. В частности, условие (3.16) не выполнено при наличии трещин, сколов, скачков уплотнения в сверхзвуковых течениях газа, инородных включений (и, следовательно, во всех задачах механики композитных материалов) и т. п.

2. Подставляя равенство (3.17) в дифференциальное уравнение (3.7), получаем связь скоростей к-деформатора и матрицы деформаций

$$D_y^{00\cdot}(t) = \Delta_y^{0\cdot} D_y^{00}(t). \tag{3.21}$$

Предложение 3.4. Пусть: 1. Упругая среда ε_y изначально недеформирована, но деформируема и деформируема в любой момент времени $t > 0$, т. е.

$$D_y^{00}(0) = E,\ \Delta_y^0(0) = 0,\ D_y^{00\cdot}(0) \neq 0\ D_y^{00\cdot}(t) \neq 0. \tag{3.22}$$

Тогда: 1. В окрестности точки $t = 0$ матрицы деформаций $\Delta_y^0(t)$ и производной $dz_y^{00}/dy^{00}(t)$ совпадают

$$dz_y^{00}/dy^{00}(t) = \Delta_y^0(t). \tag{3.23}$$

2. K-деформатор среды $D_y^{00}(t)$ и матрицы dz_y^{00} / dy^{00} и Δ_y^0, являющиеся в данном случае разными обозначениями матрицы деформаций, связаны равенством

$$\begin{aligned} D_y^{00} &= E + dz_y^{00} / dy^{00} + o(\|dz_y^{00} / dy^{00} \Delta D_y^{00}(t)\|) = \\ &= E + \Delta_y^0 + o(\|\Delta\Delta_y^0 \Delta D_y^{00}\|), \qquad (3.24) \end{aligned}$$

где $\Delta D_y^{00}(t)$ — б. м. матрица в точке $t = 0$ из определения (2.10).

Доказательство: 1. По причине отсутствия деформаций среды в момент времени $t = 0$ получаем $\Delta_y^0(0) = 0$ и $z_y^{00} \equiv 0 \to dz_y^{00} / dy^{00}(0) = 0, \to \Delta_y^0(t) = dz_y^{00}(t) / dy^{00}$ (3.18).

2. С использованием уравнения кинематики (3.7) в малой окрестности точки $t = 0$ получаем

$$\begin{aligned} D_y^{00\cdot}(t) &= dv_y^{00} / dy^{00}(t) D_y^{00}(t) = dv_y^{00} / dy^{00}(t)(E + \Delta D_y^{00}(t)) = \\ &= dv_y^{00} / dy^{00}(t) + dv_y^{00} / dy^{00}(t) \Delta D_y^{00}(t). \qquad (3.25) \end{aligned}$$

Интегрируя полученное равенство по интервалу времени $\Delta t = t - 0$ с учетом (3.18), получаем

$$\begin{aligned} D_y^{00}(t) - E &= \int \chi_{\Delta t} dv_y^{00} / dy^{00} \mu_t(dt) + \\ &+ \int \chi_{\Delta t} dv_y^{00} / dy^{00}(t) \Delta D_y^{00}(t) \mu_t(dt) = \\ &= \int \chi_{\Delta t} \Delta_y^{0\cdot}(t) \mu_t(dt) + \int \chi_{\Delta t} \Delta_y^{0\cdot}(t) \Delta D_y^{00}(t) \mu_t(dt) = \\ &= \int \chi_{\Delta t} d\Delta_y^0(t) + \int \chi_{\Delta t} d\Delta_y^0(t) \Delta D_y^{00}(t) = \\ &= \Delta_y^0(t) + \int \chi_{\Delta t} d\Delta_y^0(t) \Delta D_y^{00}(t) = \\ &= \Delta_y^0(t) + \Delta\Delta_y^0(t) \overline{\Delta D_y}^{00} = \Delta_y^0(t) + o(\|\Delta\Delta_y^0 \Delta D_y^{00}\|), \end{aligned}$$

где $\overline{\Delta D_y}^{00} = 0.5(\Delta D_y^{00} + 0) = 0.5 \Delta D_y^{00}$ — среднее значение матрицы ΔD_y^{00} на малом интервале времени $\Delta t = t - 0$, $\Delta\Delta_y^0 = \Delta_y^0 - 0 = \Delta_y^0$. □

Комментарии: 1. Во всех доказательствах определяющими являются условия $dv_y^{00} / dy^{00}(0) = dz_y^{00\cdot} / dy^{00}(0) = \Delta_y^{0\cdot}(0) \neq 0$, $dz_y^{00} / dy^{00}(0) = \Delta_y^0(0) = 0$, $D_y^{00}(0) = E$.

2. Из (3.24) в малой окрестности точки $t = 0$ для изначально недеформированной деформируемой в точке y среды (3.22) имеем

$$D_y^{00} \approx E + dz_y^{00} \;/\; dy^{00} = E + \Delta_y^0 \tag{3.26}$$

с точностью до слагаемых порядка $\|\Delta\Delta_y^0 \Delta D_y^{00}\|$.

3. Сравнение (2.10) и (3.26) приводит к выводу: в малой окрестности точки $t = 0$ для изначально недеформированной деформируемой в точке y среды (3.22) б. м. матрица ΔD_y^{00} из определения к-деформатора (2.10) примерно равна матрице деформаций среды в той же точке:

$$\Delta D_y^{00} \approx dz_y^{00} \;/\; dy^{00} = \Delta_y^0 \tag{3.27}$$

с точностью до слагаемых порядка $\|\Delta D_y^{002}\|$.

3.3. ОБРАЗУЮЩИЕ ГРУППЫ К-ДЕФОРМАТОРОВ СРЕДЫ

Определение 3.2. Множество элементов группы $\mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$, таких что каждый элемент $D_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$ представим в виде суперпозиции (в частности, произведения) этих элементов, называется *множеством образующих группы* $\mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, 3)$.

Комментарий. Образующие группы к-деформаторов ни в каком смысле (ни в математическом, ни физическом) не являются математическими моделями реальных (физических) преобразований непрерывных сред. Это в определенном смысле — аналоги элементов разложений в ряды функций, графики которых являются математическими моделями траекторий (путей) движения точек материальной системы. Такую функцию при наличии определенных свойств можно разложить в ряд Тейлора («по параболам»), в ряд Фурье («по синусам», «по косинусам») и т. д., по элементам любой другой полной системы функций [15, 41]. Но ни одна из этих парабол, ни один из этих синусов или косинусов (с соответствующими коэффициентами) и т. д. не являются математическими моделями каких-либо реальных движений. О том же говорит и тот факт, что этих разложений много, и, следовательно, каждый заинтересованный исследователь может увидеть желаемую «физику» происходящего. На самом деле во всех случаях «физика» одна: она состоит в том, что вся информация о движении механической системы содержится в к-деформаторе (или в вышеуказанной функции), и никакой информации о движении системы не содержится в вышеуказанных образующих или элементах вышеуказанных рядов. Каждое из таких разложений является в определенном (при сходимости в L_2) или прямом смысле (при равномерной сходимости) тождеством, в котором правая часть является другим обозначением левой части. К-деформатор является суперпозицией (своеобразным коктейлем) из указанных образующих, причем таких «коктейлей» бесконечно много и все они эквивалентны.

Поэтому материалы этой главы имеют чисто теоретический (возможно, вычислительный) интерес относительно свойств к-деформаторов, но не свойств реальных движений локально линейно изменяемых сред, для которых они являются линейными приближениями реальных движений.

Определение 3.3. Пусть: 1. $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3^{\mu}$ — окрестность точки $y \in D_3^{\mu}$;

2. $A_{2y}^{\mu} \equiv V_{2y} \cup D_2^{\mu}$ — аффинно-векторная плоскость, содержащая точку $y \in D_2^{\mu}$;

3. $H_{yt}^{0}(q_y^0)$ — гомотетия с коэффициентом $q_y^0 > 0$ — положительным скаляром, не зависящим от векторов $h_y^0 = x^{00} - y^{00}$ для любой точки $x \in \varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3^{\mu}$:

$$H_{yt}^{0}(q_y^0) = q_y^0 E; \qquad (3.28)$$

4. $w \in V_2$ — произвольный свободный вектор из V_2, w^0 — его координатный столбец в базисе $[e^0]$;

5. Матрица $u_y^{00} \in \mathbf{GD}_{ty}^{q}(\mathbf{R}, 3)$ в базисе $[e^0]$, определяемая двумя условиями:

$$u_y^{00} h_y^0 = H_{yt}^{0}(q_y^0) h_y^0 + w^0, \quad h_y \notin V_{2y}, \qquad (3.29)$$

$$u_y^{00} h_y^0 = h_y^0, \qquad h_y \in V_{2y}, \qquad (3.30)$$

где $q_y^0 \in Q_1$ (2.6); h_y^0 — координатный столбец вектора $h_y \in V_{3y}$ (2.5) в базисе $[e^0]$.

Тогда: 1. Матрица u_y^{00} называется растяжением, сжатием $(q_y^0 > 1, q_y^0 < 1)\, A_{3y}^{\mu}$ (от/к) гиперплоскости A_{2y}^{μ} в направлении его собственного подпространства с собственным числом q_y^0 (прямая, дополнительная к A_{2y}^{μ} в A_3^{μ}) [10, 11, 43, 44].

2. Гомотетия

$$H_y^{00}(q_y^0) = q_y^0 E \equiv d_y^{00}(q_y^0) \tag{3.31}$$

из (3.28) называется *центральным дилататором.*

Комментарии: 1. Центральный дилататор $d_y^{00}(q_y^0)$ (другое — «механическое» название гомотетии), если другие составляющие к-деформатора отсутствуют, является математической моделью реального движения среды. Он растягивает $(q_y^0 > 1)$, сжимает $(q_y^0 < 1)$ среду $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3^{\mu}$ (от/к) точки $y \in \varepsilon_y$.

2. Матрица u_y^{00} в случае $h_y \notin V_{2y}$ сдвигает результат действия дилатации (3.29) параллельно гиперплоскости A_{2y}^{μ} на вектор $w \in V_2$, а в случае $h_y \in V_{2y}$ оставляет его на месте.

3. Матрица u_y^{00} является к-деформатором среды (математической моделью преобразования реальной среды), если только она одна отлична от единичной.

4. К-деформатор u_y^{00} определен только на окрестности $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3^{\mu}$ точки $y \in \varepsilon_y$ (нижний индекс), но не на всей среде D_3^{μ}.

Предложение 3.5. Пусть: 1. $u_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, \mathbf{3})$ — растяжение (сжатие) $q_y^0 > 1$ $(q_y^0 < 1)$ среды $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3^{\mu}$ (от/к) гиперплоскости A_{2y}^{μ} в точке $y \in \varepsilon_y$;

2. $w = [e^0]w^0$, $w \in V_{2y}$, $w^0 = \mathrm{col}\{w_1^0, w_2^0, w_3^0\}$.

Тогда u_y^{00} имеет следующую матричную форму записи в базисе $[e^0]$ (в терминах пакета МАТЛАБ):

$$u_y^{00} = [q_y^0 + w_1^0\ w_2^0\ w_3^0;\ w_1^0\ q_y^0 + w_2^0\ w_3^0;\ w_1^0\ w_2^0\ q_y^0 + w_3^0]. \tag{3.32}$$

Доказательство. $u_y^{00}\, e_1^0 = q_y^0 e_1^0 + w_1^0 e_1^0 + w_2^0 e_2^0 + w_3^0 e_3^0$, $u_y^{00} e_2^0 = q_y^0 e_2^0 + w_1^0 e_1^0 + w_2^0 e_2^0 + w_3^0 e_3^0$, $u_y^{00} e_3^0 = q_y^0 e_3^0 + w_1^0 e_1^0 + {} + w_2^0 e_2^0 + w_3^0 e_3^0$. □

Предложение 3.6. Пусть: 1. $w = w_1^f f_1^0 + w_2^f f_2^0$ — разложение вектора $w \in V_2$ по базису $[f_1^0, f_2^0] \subset V_2$ в V_2, w_1^f, $w_2^f \in R_1$;

2. $[f^0] = (h_y^0, f_1^0, f_2^0)$ — неортонормированный неинерциальный базис числового комплекта $V_3 \supset V_2$.

Тогда к-деформатор u_y^{00} в базисе $[f^0]$ имеет вид

$$u_y^{0f} = E + \Delta u_y^{0f}; \qquad (3.33)$$

$$\Delta u_y^{0f} = [q_y - 1\ 0\ 0;\ w_1^f\ 0\ 0;\ w_2^f\ 0\ 0],$$

где Δu_y^{0f} — бесконечно малая матрица (2.3) в точке $(q_y^f, w^f) = (1, \mathbf{0}) \in Q_3$ (**O. 2.2**), $\mathbf{0} = \mathrm{col}\ \{0, 0, 0\}$.

Доказательство. $u_y^{00} h_y^0 = q_y^f h_y^0 + w_1^f f_1^0 + w_2^f f_2^0, u_y^{00} f_1^0 = = 0h_y^0 + 1f_1^0 + 0f_2^0, u_y^{00} f_2^0 = 0h_y^0 + 0f_1^0 + 1f_2^0$ (3.29). □

Комментарии: 1. Существует еще два неортонормированных базиса $[f^0]$, с сохранением ориентации V_2 (2.1), $[f^0] = (f_1^0, h_y^0, f_2^0)$, $[f^0] = (f_1^0,\ f_2^0,\ h_y^0)$, в которых к-деформатор u_d^{0f} имеет простой вид, соответственно

$$u_y^{0f} = [1\ \ w_1^f\ \ 0;\ \ 0\ \ q_y^f\ \ 0;\ \ 0\ \ w_2^f\ \ 1],$$

$$u_y^{0f} = [1\ \ 0\ \ w_1^f;\ \ 0\ \ 1\ \ w_2^f;\ \ 0\ \ 0\ \ q_y^f];$$

2. $\det u_y^{00} = q_y^0$.

Определение 3.4. Пусть: 1. $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3^\mu$ — окрестность точки $y \in D_3^\mu$;

2. $A_{2y}^\mu \equiv V_{2y} \cup D_2^\mu$ — аффинно-векторная плоскость, содержащая точку $y \in D_2^\mu$;

3. $w \in V_2$ — произвольный свободный вектор из V_2;

4. $\phi(w) = 0$ — уравнение гиперплоскости A_{2y}^μ в системе координат $E_y = (y^0, [e^0])$ — с началом в точке $y \in \varepsilon_y$ и базисом $[e^0] \in E_0$;

5. $\tau_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ — к-деформатор на $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3^\mu$, определяемый равенствами

$$\tau_y^{00} h_y^0 = h_y^0 + \phi(h_y^0) w^0,\ h_y \notin V_{2y}, \qquad (3.34)$$

$$\tau_y^{00} h_y^0 = h_y^0, \qquad h_y \in V_{2y}. \qquad (3.35)$$

Тогда матрица τ_y^{00} называется сдвигом A_{3y}^{μ} вдоль гиперплоскости A_{2y}^{μ} в направлении вектора $w \in V_2$ [10, 11].

Комментарии. 1. Сдвиг $\tau_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ (как и матрица $u_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$) (3.29), (3.30) оставляет на месте любой вектор из гиперплоскости A_{2y}^{μ}, а все остальные сдвигает вдоль этой *гиперплоскости путем* сложения с вектором $\phi(h_y^0)w^0$, где число $\phi(h_y^0)$ определяется самим сдвигаемым вектором $h_y^0 = x^{00} - y^{00}$, $x \in \varepsilon_y$.

2. Сдвиг $\tau_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ (как и матрица $u_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$) *является к-деформатором среды* (математической моделью преобразования реальной среды) только в том случае, если другие преобразования отсутствуют.

3. Сдвиг $\tau_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ (как и к-деформатор $u_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$) (3.29) *определен только на окрестности* $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3^{\mu}$ точки $y \in \varepsilon_y$, но не на всей среде D_3^{μ}.

4. Множество сдвигов $\tau_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ не является группой.

5. Система координат $E_y = (y^0, [e^0])$ с началом в точке $y \in \varepsilon_y$ не является инерциальной, таковым является лишь базис $[e^0] \subset E_0$.

Предложение 3.7. Пусть: 1. $\tau_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ — сдвиг среды $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}_3^{\mu}$ вдоль гиперплоскости A_{2y}^{μ} в направлении вектора $w \in V_2$;

2. $w = [e^0]w^0 = w_1^0 e_1^0 + w_2^0 e_2^0 + w_3^0 e_3^0$, $w^0 = \mathrm{col}\{w_1^0, w_2^0, w_3^0\}$.

Тогда сдвиг τ_y^{00} имеет вид

$$\tau_y^{00} = E + \Delta\tau_y^{00}; \tag{3.36}$$

$$\Delta\tau_y^{00} = [\phi(e_1^0)w_1^0 \ \phi(e_2^0)w_1^0 \ \phi(e_3^0)w_1^0; \ \ldots$$

$$\phi(e_1^0)w_2^0 \ \phi(e_2^0)w_2^0 \ \phi(e_3^0)w_3^0; \ \phi(e_1^0)w_3^0 \ \phi(e_2^0)w_3^0 \ \phi(e_3^0)w_3^0],$$

где $\Delta\tau_y^{00}$ — бесконечно малая матрица из определения к-деформатора в точке $w^0 = 0 \in Q_3$ (2.8).

Доказательство. $\tau_y^{00}e_1^0 = 1e_1^0 + \phi(e_1^0)w^0$, $\tau_y^{00}e_2^0 = 1e_2^0 + \phi(e_2^0)w^0$, $\tau_d^{00}e_3^0 = 1e_3^0 + \phi(e_3^0)w^0$. □

Предложение 3.8. Пусть: 1. $w = w_1^f f_1^0 + w_2^f f_2^0$ — разложение вектора $w \in V_2$ по базису $[f_1, f_2] \subset V_2$ в V_2, $w_1^f, w_2^f \in R_1$;

2. $[f] = (h_y^0, f_1^0, f_2^0)$ — неортонормированный, неинерциальный базис числового комплекта $V_3 \supset V_2$;

3. $\alpha^f = w_1^f \phi(h_y^0)$, $\beta^f = w_2^f \phi(h_y^0)$.

Тогда сдвиг τ_y^{00} в базисе $[f]$ является преобразованием Кавальери первого типа и имеет вид [2, 10, 11]

$$\tau_y^{0f} = E + \Delta\tau_y^{0f}, \tag{3.37}$$

$$\Delta\tau_y^{0f} = [0\ \ 0\ \ 0;\ \ \alpha^f\ \ 0\ \ 0;\ \ \beta^f\ \ 0\ \ 0].$$

Доказательство. $\tau_y^{00} h_y^0 = 1h_y^0 + w_1^f \phi(h_y^0) f_1^0 + w_2^f \phi(h_y^0) f_2^0$, $\tau_y^{00} f_1^0 = 0h_y^0 + 1f_1^0 + 0f_2^0$, $\tau_y^{00} f_2^0 = 0h_y^0 + 0f_1^0 + 1f_2^0$. □

Комментарии: 1. $\det \tau_y^{00} = 1$.

2. В двумерном случае все определения и утверждения остаются в силе с заменой трехмерных объектов на двумерные.

3. Из (2.10), (3.33) и (3.37) следует, что растяжения и сдвиги самостоятельно являются к-деформаторами среды.

Осталось показать, что множество растяжений (сжатий) u_y^{00} и сдвигов τ_y^{00} является множеством образующих группы деформаторов $\mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$.

Предложение 3.9. Пусть: 1. $D_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ — к-деформатор среды на $\varepsilon_y \in \mathfrak{R}_3^\mu$ в базисе $[e^0]$;

2. $\Delta D_y^{00} = D_y^{00} - E$ — бесконечно малая в некоторой точке $q \in Q_n$ матрица из (2.10);

3. К-деформатор D_y^{00}, такой что для его приращения ΔD_y^{00} относительно единицы $E \in \mathbf{GD}_{yt}^d(\mathbf{R}, 3)$ имеем:

$$\begin{aligned} &3.1\ \ \operatorname{rang}(D_y^{00} - E) = \operatorname{rang} \Delta D_y^{00} = 1, \\ &3.2\ \ \operatorname{rang}(D_y^{00} - E) = \operatorname{rang} \Delta D_y^{00} = 2, \\ &3.3\ \ \operatorname{rang}(D_y^{00} - E) = \operatorname{rang} \Delta D_y^{00} = 3; \end{aligned} \tag{3.38}$$

4. τ_{yi}^{00} $(i = 1, 2, 3)$, u_y^{00} — сдвиги и растяжение (сжатие) (3.29), (3.34).

Тогда: 1. В соответствии с п. 3.1—3.3 [11]:

$$\begin{aligned} &1.1.\ D_y^{00} \equiv \tau_y^{00} \text{ или } D_y^{00} \equiv u_y^{00}, \\ &1.2.\ D_y^{00} \equiv \tau_{y2}^{00}\tau_{y1}^{00} \text{ или } D_y^{00} \equiv \tau_y^{00}u_y^{00}, \\ &1.3.\ D_y^{00} \equiv \tau_{y3}^{00}\tau_{y2}^{00}\tau_{y1}^{00} \text{ или } D_y^{00} \equiv \tau_{y2}^{00}\tau_{y1}^{00}u_y^{00}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

2. В противном случае D_y^{00} — гомотетия $\equiv$ центральный дилататор (3.31)

$$D_y^{00} \equiv d_y^{00}(q_y^0). \tag{3.40}$$

Доказательство. Докажем первый случай (остальные см. [11]).

Пусть rang $(D_y^{00} - E) = 1 \Rightarrow \mathrm{Ker}(D_y^{00} - E) = A_{2y}^{\mu}$ $(\dim A_{2y}^{\mu} = 2) \Rightarrow$ для любого вектора $h_y = x^0 - y^0 \in V_2 \subset A_{2y}^{\mu}$, $x, y \in \varepsilon_y \in \mathfrak{A}_3^{\mu}$, $h_y \neq 0$ из равенства $(D_y^{00} - E)h_y^0 = 0$ получаем $D_y^{00}h_y^0 = h_y^0$. Следовательно, кинематический деформатор D_y^{00} оставляет поэлементно на месте A_{2y}^{μ} и, по определениям (3.30), (3.35), $D_y^{00} = \tau_y^{00}$ или $D_y^{00} = u_y^{00}$. □

Комментарии: 1. Для любого измерения аффинно-векторного пространства Вселенной механики представление к-деформатора в виде суперпозиции меньшего количества образующих (растяжений, сдвигов, дилататоров) невозможно.

2. К-деформаторы u_y^{00}, τ_y^{00} (3.29) (3.34) являются математическими моделями простейших преобразований среды, они же в суперпозиции (3.38) (3.39) таковыми не являются.

3. Если реальное (физическое) деформирование среды отлично от простейшего, то математической моделью линейной деформации среды является только к-деформатор $D_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R}, \mathbf{3})$. Разложения (3.39) являются тождествами, и их правые части не несут никакой дополнительной информации о деформировании реальной среды к той, которую содержит к-деформатор D_y^{00}.

4. Для изначально недеформированной среды в окрестности точки $t = 0$ (при малых ΔD_y^{00}) в равенствах (3.33) и (3.37) можно использовать матрицу деформаций среды в виде (3.23).

3.4. ТРАНСВЕКТИВНО-ДИЛАТАЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ К-ДЕФОРМАТОРОВ СРЕДЫ

3.4.1. ТРАНСВЕКЦИИ, ДИЛАТАЦИИ, ДИЛАТАТОРЫ И ГОМОТЕТИИ

Сложный вид матриц (3.29), (3.34) в произвольном базисе затрудняет использование к-деформаторов (2.10) в дальнейших построениях, а формирование базисов, обеспечивающих их упрощение (3.33), (3.36), требует дополнительных вычислений для каждого вектора $h_y \in V_3$. Выход из положения подсказывает вид матриц (3.33) и (3.36). Суть этой подсказки в следующих определениях и утверждениях.

Определение 3.5. Пусть: 1. E_{ij} — (3×3)-матрица с единицей на (ij)-месте и нулями на остальных, $i, j = 1, 2, 3$;

2. $q_{ij}^{y0} \in Q_1$, $i, j = 1, 2, 3$ — скалярный параметр, вычисленный в точке $y \in \varepsilon_y$ в базисе $[e^0]$.

Тогда: 1. К-деформатор

$$\tau_{ij}^{y0}(q_{ij}^{y0}) = E + \Delta\tau_{ij}^{y0}(q_{ij}^{y0}),\ \Delta\tau_{ij}^{y0}(q_{ij}^{y0}) = q_{ij}^{y0}E_{ij}, \quad (3.41)$$

где $\Delta\tau_{ij}^{y0}(q_{ij}^{y0})$ — б. м.-матрица (2.3) в точке $q_{ij}^{y0} = 0 \in Q_1$, называется *трансвекцией* [9—11, 14, 43, 44].

2. Число $q_{ij}^{y0} \in Q_1$ называется *аргументом (параметром) трансвекции.*

Комментарии: 1. Геометрическая и физическая интерпретация трансвекции очевидны. Любой вектор $h_y^0 = (h_1^0, h_2^0, h_3^0)^T$, заданный в базисе $[e^0]$ (2.5), к-деформатор $\tau_{ij}^{y0}(q_{ij}^{y0})$ сдвигает вдоль координатной оси с направлением e_i^0 на величину $q_{ij}^{y0}h_j^0$. Последнее обстоятельство (пропорциональность сдвига вектора h_y^0 по i-координате величине его j-координаты с коэффициентом пропорциональности q_{ij}^{y0}) указывает на важный физический факт: деформация среды трансвекцией $\tau_{ij}^{y0}(q_{ij}^{y0})$ (т. е. сдвиг) не сводится к независимому наращиванию i-координаты точек среды на константу.

2. Важен для понимания дальнейших построений и алгебраический смысл к-деформатора — сдвига (3.41). Трансвекции

$\tau_{ij}^{y0}(q_{ij}^{y0})$ независимо от размерности реализуют один из видов элементарных преобразований к-деформатора произвольного вида D_d^{00}: умножение слева $\tau_{ij}^{y0}(q_{ij}^{y0})D_d^{00}$ складывает i-строку матрицы D_d^{00} с j-строкой, умноженной на число q_{ij}^{y0}, умножение справа $D_d^{00}\tau_{ij}^{y0}(q_{ij}^{y0})$ складывает j-столбец матрицы D_d^{00} с i-столбцом, умноженным на число q_{ij}^{y0} [33].

3. При деформировании среды из недеформированного начального состояния, согласно (3.27), параметр трансвекции q_{ij}^{y0} приближенно равен (i, j)-элементу $z_j^i = \partial z_{yi}^0 / \partial y_j^0$ матрицы деформаций $\Delta_y^0 \equiv dz_y^{00} / dy^{00}$ (3.26) в точке $y \in \varepsilon_y$.

4. Множество трансвекций не является группой.

Определение 3.6. Пусть: 1. E_{ii} — (3×3)-матрица с единицей на (ii)-месте и нулями на остальных $(i = 1, 2, 3)$;

2. $q_i^{y0} \in Q_1$, $(i = 1, 2, 3)$ — скаляр, вычисленный в точке $y \in D_3^\mu$.

Тогда: 1. Матрица вида

$$\begin{gathered} d_i^{y0}(q_i^{y0}) = E + \Delta d_i^{y0}(q_i^{y0}), \\ \Delta d_i^{y0}(q_i^{y0}) = (q_i^{y0} - 1)E_{ii},\ q_i^{y0} > 0, \end{gathered} \tag{3.42}$$

где $\Delta d_i^{y0}(q_i^{y0})$ — б. м. матрица в точке $q_i^{y0} = 1$ называется *дилатацией (растяжением* $q^{y0} > 1$, *сжатием* $q^{y0} < 1$) A_{3y}^μ *в направлении* e_i^0*-координатной оси*;

2. Число q_i^{y0} называется *аргументом (параметром) дилатации*.

Комментарии. 1. Матрица $d_i^{y0}(q_i^{y0})$ является к-деформатором среды (математической моделью деформирования реальной среды) только в том случае, когда другие виды деформирования этой среды отсутствуют.

2. Как и в предыдущем случае, геометрическая и физическая интерпретация дилатации очевидны. Оператор $d_i^{y0}(q_i^{y0})$ изменяет (увеличивает $q_i^{y0} > 1$, уменьшает $q_i^{y0} < 1$) i-координату любого вектора $h_y^0 = \mathrm{col}\{h_1^0, h_2^0, h_3^0\}$, заданного в базисе $[e^0]$, в q_i^{y0} раз. В обоих случаях осуществляется перенос точек среды парал-

лельно одной из координатных осей, но в отличие от предыдущего случая действие дилатации на вектор сводится к независимому от других координат изменению его i-координаты и указанное изменение мультипликативно, а не аддитивно. К-деформатор $d_i^{y0}(q_i^{y0})$ растягивает (если $q_i^{y0} > 1$), (сжимает, если $q_i^{y0} < 1$) среду в направлении e_i^0-координатной оси.

3. Для понимания дальнейших построений важен и алгебраический смысл кинематического деформатора (3.42). Дилатация $d_i^{y0}(q_i^{y0})$ реализуют одно из элементарных преобразований к-деформатора произвольного вида D_y^{00} любой размерности: умножение слева $d_i^{y0}(q_i^{y0})D_y^{00}$ умножает i-строку матрицы D_d^{00} на число q_i^{y0}, умножение справа $D_y^{00}d_j^{y0}(q_j^{y0})$ умножает j-столбец матрицы D_y^{00} на число q_j^{y0} [31—33].

4. При деформировании среды из недеформированного начального состояния, согласно (3.27), число $q_i^{y0} - 1$ приближенно равно $(i,\ i)$-элементу $z_i^i = \partial z_{yi}^0 / \partial y_i^0$ матрицы деформаций $\Delta_y^0 \equiv dz_y^{00} / dy^{00}$ в точке $y \in \varepsilon_y$.

Следующее утверждение устанавливает связь между группами дилататоров $\mathbf{D}^q(\mathbf{R}, 3)$ и дилатаций $\mathbf{D}_i^q(\mathbf{R}, 3)$.

Предложение 3.10. Пусть: 1. $\mathbf{D}^q(\mathbf{R}, 3)$ — группа дилататоров;

2. $\mathbf{D}_i^q(\mathbf{R}, 3)$ $(i = 1, 2, 3)$ — группы дилатаций в направлении i-координатных осей;

3. $\mathbf{P}$ — оператор перестановок сомножителей в произведении.

Тогда справедливо следующее утверждение:

$$\mathbf{D}^q(\mathbf{R}, 3) = \mathbf{P}\Pi_i \mathbf{D}_i^q(\mathbf{R}, 3). \tag{3.43}$$

Определив понятия трансвекций (3.41), дилатаций (3.42) и изучив их основные свойства, перейдем к утверждениям, связывающим их с ранее определенными понятиями образующих (3.29), (3.34) группы к-деформаторов $\mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$.

Предложение 3.11. Пусть: 1. u_y^{0f} — растяжение (сжатие) от (к) соответствующей аффинной плоскости A_{2y} в направлении соответствующей прямой в базисе $[e^f]$ (3.29);

2. τ_y^{0f} — сдвиг вдоль соответствующей аффинной плоскости A_{2y} в направлении соответствующего вектора $w \in V_2$ (3.34) в базисе $[e^f]$;

3. $\tau_{ij}^{yf}(q_{ij}^{yf})$, $d_i^{yf}(q_i^{yf})$ — трансвекция и дилатация (3.41), (3.42) в базисе $[e^f]$.

Тогда: 1. К-деформатор u_y^{0f} (в базисе $[e^f]$) (3.33) является произведением (в любом порядке) двух трансвекций и одной дилатации вида (в зависимости от выбранного базиса $[e^f]$, например:

$$u_y^{0f} \equiv \tau_{21}^{yf}(q_{21}^{yf})\tau_{31}^{yf}(q_{31}^{yf})d_1^{yf}(q_1^{yf}) \equiv \tau_{12}^{yf}(q_{12}^{yf})\tau_{32}^{yf}(q_{32}^{yf})d_2^{yf}(q_2^{yf}) \equiv$$
$$\equiv \tau_{13}^{yf}(q_{13}^{yf})\tau_{23}^{yf}(q_{23}^{yf})d_3^{yf}(q_3^{yf}). \qquad (3.44)$$

2. К-деформатор τ_y^{0f} (в базисе $[e^f]$) является произведением (в любом порядке) двух трансвекций вида (в зависимости от выбранного базиса $[e^f]$, например:

$$\tau_y^f \equiv \tau_{21}^{yf}(q_{21}^{yf})\tau_{31}^{yf}(q_{31}^{yf}) \equiv$$
$$\equiv \tau_{12}^{yf}(q_{12}^{yf})\tau_{32}^{yf}(q_{32}^{yf}) \equiv \tau_{13}^{yf}(q_{13}^{yf})\tau_{23}^{yf}(q_{23}^{yf}). \qquad (3.45)$$

Комментарии: 1. Полученные результаты пока не упрощают решение проблемы тождественного разложения к-деформаторов среды на простейшие сомножители, так как трудности вычисления базиса $[e^f]$ (3.33) остаются прежними.

2. Вместе с тем полученные результаты являются ключевыми для решения проблемы замены небольшого (1—3) количества образующих сложного вида (3.39) в тождественных разложениях к-деформатора $D_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ на большее количество образующих простого вида (трансвекций (3.41) и дилатаций (3.42)). Идея решения указанной проблемы состоит в полном отказе от трудоемкого построения базиса $[f]$ (3.37) и отыскании алгоритма мультипликативного тождественного разложения к-деформатора $D_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ на простейшие сомножители в заранее выбранном и постоянном на период решения задачи ортонормированном базисе, например инерциальном $[e^0]$.

В следующих разделах данной главы представлено решение этой проблемы.

3.4.2. ТРАНСВЕКТИВНО-ДИЛАТАЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРУППЫ К-ДЕФОРМАТОРОВ СРЕДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРУПП КАВАЛЬЕРИ

Предложение 3.12. Пусть: 1. $E_0 = (o_0, [e^0])$ — произвольная (для определенности — инерциальная) система координат;

2. $\tau^{y0}_{21}(q^{y0}_{21})$, $\tau^{y0}_{31}(q^{y0}_{31})$, $\tau^{y0}_{23}(q^{y0}_{23})$, $\tau^{y0}_{13}(q^{y0}_{13})$ — трансвекции — простейшие сдвиги векторного пространства в направлении ортов базиса $[e^0]$ с номерами, соответствующими первым индексам, на величины, пропорциональные координатам сдвигаемого вектора, с номерами, соответствующими вторым индексам.

Тогда: 1. К-деформаторы, являющиеся произведением двух трансвекций вида

$$\tau^{y0}_{21}(q^{y0}_{21})\tau^{y0}_{31}(q^{y0}_{31}),\ \tau^{y0}_{13}(q^{y0}_{13})\tau^{y0}_{23}(q^{y0}_{23}), \qquad (3.46)$$

осуществляют одновременный сдвиг среды параллельно координатным плоскостям (e^0_2, o^0, e^0_3) и (e^0_1, o^0, e^0_2) соответственно.

2. Вышеуказанные координатные плоскости к-деформаторы (3.46) оставляют на месте поэлементно.

3. Матрицы-сомножители в (3.46) перестановочны. Визуальным признаком перестановочности трансвекций является совпадение первых или вторых индексов. Алгебраически это означает, что прибавление одной и той же строки (столбца) к разным строкам (столбцам) не зависит от порядка выполнения операции. Формальное доказательство выполняется простой проверкой, например: $\tau^{y0}_{21}(q^{y0}_{21})\tau^{y0}_{31}(q^{y0}_{31})h^0 = \tau^{y0}_{21}(q^{y0}_{21})\tau^{y0}_{31}(q^{y0}_{31})(h^0_1, h^0_2, h^0_3)^T = (h^0_1, h^0_2 + q^{y0}_{21}h^0_1, h^0_3 + q^{y0}_{31}h^0_1)^T$. □

Комментарии: 1. В интегральной геометрии матрицы вида (3.46) (без разложения их на сомножители-трансвекции) названы преобразованиями R_3 Кавальери первого типа [2, 11]. Этим же именем (второго типа) названы трансвекции $\tau^{y0}_{12}(q^{y0}_{12})$ и $\tau^{y0}_{32}(q^{y0}_{32})$.

2. Множества указанных кинематических деформаторов с учетом третьего предыдущего комментария

$$\mathbf{GK}^1_H(\mathbf{R},3) = \{\tau^{y0}_{21}(q^{y0}_{21})\tau^{y0}_{31}(q^{y0}_{31}) \equiv \tau^{y0}_{31}(q^{y0}_{31})\tau^{y0}_{21}(q^{y0}_{21})\}, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{GK}^1_B(\mathbf{R},3) = \{\tau^{y0}_{13}(q^{y0}_{13})\tau^{y0}_{23}(q^{y0}_{23}) \equiv \tau^{y0}_{23}(q^{y0}_{23})\tau^{y0}_{13}(q^{y0}_{13})\}, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{GK}^2_H(\mathbf{R},3) = \{\tau^{y0}_{32}(q^{y0}_{32})\}, \ \mathbf{GK}^2_B(\mathbf{R},3) = \{\tau^{y0}_{12}(q^{y0}_{12})\} \quad (3.49)$$

являются мультипликативными группами Кавальери первого и второго типа (верхний индекс), нижними и верхними (нижний индекс).

3. В случае воздействия на среду одиночной трансвекции (3.41) последняя является математической моделью реального (физического деформирования (сдвига) среды. Если к-деформатор $D^{00}_y \in \mathbf{GD}^q_{yt}(\mathbf{R},3)$ представим в виде тождественной ему суперпозиции (произведения) нескольких трансвекций, то последние, являясь одновременно действующими составляющими к-деформатора, сами математическими моделями реального деформирования среды не являются.

Предложение 3.13. Пусть: 1. $\mathbf{GD}^q_{yt}(\mathbf{R},3)$ — группа к-деформаторов среды ε_y;

2. $\mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3)$, $\mathbf{GK}^2_B(\mathbf{R},3)$, $\mathbf{GK}^1_H(\mathbf{R},3)$, $\mathbf{GK}^2_B(\mathbf{R},3)$ — нижние и верхние группы Кавальери первого и второго типа (3.47)—(3.49);

3. $\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)$ — группа дилататоров (3.43).

Тогда: 1. Существуют шесть различных трансвективно-дилатационных разложений группы к-деформаторов локально линейно непрерывной среды с использованием групп Кавальери:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{GD}^q_{yt}(\mathbf{R},3) = \\
&= \mathbf{GK}^1_H(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_H(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^1_B(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_B(\mathbf{R},3)\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3) = \\
&= \mathbf{GK}^1_H(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_H(\mathbf{R},3)\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^1_B(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_B(\mathbf{R},3) = \\
&= \mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^1_H(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_H(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^1_B(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_B(\mathbf{R},3) = \\
&= \mathbf{GK}^1_B(R,3)\mathbf{GK}^2_B(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^1_H(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_H(\mathbf{R},3)\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3) = \\
&= \mathbf{GK}^1_B(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_B(\mathbf{R},3)\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^1_H(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_H(\mathbf{R},3) = \\
&= \mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^1_B(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_B(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^1_H(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_H(\mathbf{R},3). \quad (3.50)
\end{aligned}$$

2. Существует 324 различных поэлементных *тождественных* трансвективно-дилатационных разложений любого к-деформатора $D_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ на простейшие сомножители-трансвекции и дилатации типа (3.42).

Доказательство. Доказательство утверждения одновременно является описанием алгоритма практического построения любого из 324 вышеуказанных тождественных поэлементных трансвективно-дилатационных разложений к-деформатора $D_y^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$.

1. Покажем, например, что

$$D_y^{00} \equiv \tau_{yH}^0 \tau_{yB}^0 d_y^0, \ D_y^{00} = \{D_{ij}^0, \ i, j = 1, 2, 3\}; \tag{3.51}$$

$$\tau_{yH}^0 = \tau_{21}^{y0}(q_{21}^{y0})\tau_{31}^{y0}(q_{31}^{y0})\tau_{32}^{y0}(q_{32}^{y0}),$$

$$\tau_{yB}^0 = \tau_{13}^{y0}(q_{13}^{y0})\tau_{23}^{y0}(q_{23}^{y0})\tau_{12}^{y0}(q_{12}^{y0});$$

$$d_y^0 = d_1^{y0}(q_1^{y0})d_2^{y0}(q_2^{y0})d_3^{y0}(q_3^{y0});$$

$$q_{21}^{y0} = D_{21}^0 / D_{11}^0, \ q_{31}^{y0} = D_{31}^0 / D_{11}^0, \ q_{32}^{y0} = \alpha_{32}^0 / \beta_{22}^0;$$

$$q_{13}^{y0} = D_{13}^0 / \gamma_{33}^0, \ q_{23}^{y0} = \beta_{23}^0 / \gamma_{33}^0, \ q_{12}^{y0} = D_{12}^0 / \beta_{22}^0;$$

$$q_1^{y0} = D_{11}^0, \ q_2^{y0} = \beta_{22}^0, \ q_3^{y0} = \gamma_{33}^0;$$

$$\alpha_{32}^0 = D_{32}^0 - D_{12}^0 D_{31}^0 / D_{11}^0, \quad \alpha_{33}^0 = D_{33}^0 - D_{13}^0 D_{31}^0 / D_{11}^0;$$

$$\beta_{22}^0 = D_{22}^0 - D_{12}^0 D_{21}^0 / D_{11}^0, \quad \beta_{23}^0 = D_{23}^0 - D_{13}^0 D_{21}^0 / D_{11}^0;$$

$$\gamma_{33}^0 = \alpha_{33}^0 - \beta_{23}^0 \alpha_{32}^0 / \beta_{22}^0,$$

причем здесь $D_{11}^0 \neq 0$.

Пусть в результате решения уравнений динамики (гл. 4) и кинематических уравнений (3.7) среды к-деформатор $D_y^{00} = \{D_{ij}^0, \ i, j = 1, 2, 3\}$ (2.10) вычислен. Выполним вручную последовательно следующие матричные операции (выполняемые компьютером), реализующие алгоритм Гаусса

$$\tau_{21}^{y0}(-q_{21}^{y0})D_y^{00} = [D_{11}^0 \ D_{12}^0 \ D_{13}^0; \ 0 \ \beta_{22}^0 \ \beta_{23}^0; \ D_{31}^0 \ D_{32}^0 \ D_{33}^0];$$

$$\tau_{31}^{y0}(-q_{31}^{y0})\tau_{21}^{y0}(-q_{21}^{y0})D_y^{00} = [D_{11}^0 \ D_{12}^0 \ D_{13}^0;$$

$$0\,\beta_{22}^0\;\beta_{23}^0;\;0\,\alpha_{32}^0\alpha_{33}^0];$$

$$\tau_{32}^{y0}(-q_{32}^{y0})\tau_{31}^{y0}(-q_{31}^{y0})\tau_{21}^{y0}(-q_{21}^{y0})D_y^{00} =$$
$$=[D_{11}^0\;D_{12}^0\;D_{13}^0;\;\;0\,\beta_{22}^0\;\beta_{23}^0;\;0\;0\;\gamma_{33}^0].$$

Продолжая гауссовский процесс, получаем доказываемый результат

$$\tau_{12}^{y0}(-q_{12}^{y0})\tau_{23}^{y0}(-q_{23}^{y0})\tau_{13}^{y0}(-q_{13}^{y0})\tau_{32}^{y0}(-q_{32}^{y0})\times$$
$$\times\tau_{31}^{y0}(-q_{31}^{y0})\tau_{21}^{y0}(-q_{21}^{y0})D_d^{00} = m_1^{y0}(q_1^{y0})m_2^{y0}(q_2^{y0})m_3^{y0}(q_3^{y0}),$$

и, следовательно, с учетом $\tau_{ij}^{-1}(q_{ij}) = \tau_{ij}(-q_{ij})$ (3.41)

$$D_y^{00} = \tau_{21}^{y0}(q_{21}^{y0})\tau_{31}^{y0}(q_{31}^{y0})\times$$
$$\times\tau_{32}^{y0}(q_{32}^{y0})\tau_{13}^{y0}(q_{13}^{y0})\tau_{23}^{y0}(q_{23}^{y0})\tau_{12}^{0}(q_{12}^{y0})m_y^{00}. \qquad (3.52)$$

В (3.52) m_y^{00} диагональная матрица с элементами q_i^{y0} на главной диагонали, о знаке которых пока ничего не известно. Но, по определению, D_y^{00} — к-деформатор и, следовательно, матрица

$$A^{-1}D_y^{00} = m_y^{00}, \qquad (3.53)$$

$$A = \tau_{21}^{y0}(q_{21}^{y0})\tau_{31}^{y0}(q_{31}^{y0})\tau_{32}^{y0}(q_{32}^{y0})\tau_{13}^{y0}(q_{13}^{y0})\tau_{23}^{y0}(q_{23}^{y0})\tau_{12}^{y0}(q_{12}^{y0})$$

также к-деформатор (как конечное произведение к-деформаторов).

Диагональная матрица является к-деформатором тогда и только тогда, когда все элементы главной диагонали положительны (3.42), т. е. $m_y^{00} = d_y^{00}$. □

Таким образом, в рассматриваемом случае к-деформатор D_y^{00} при действии на произвольный вектор $h_y^0 = x^{00} - y^{00}$ в ε_y-окрестности точки y среды растянет (сожмет) его координаты от (к) координатных плоскостей в направлении нормалей к ним и выполнит 6 сдвигов в направлении координатных осей с номерами 1, 2, 1, 3, 3, 2 на различные величины, зависящие от второго индекса и коэффициентов трансвекций, причем все действия произойдут одновременно, а не по очереди. Как указывалось выше, перечисленные операции в суперпозиции не являются математическими моделями каких-либо физических преобразований среды. Если бы указанное последовательное деформирование было бы физически осуществимо, то наблюдатель, связанный с системой координат, сопутствующей деформированию среды, имел возможность «видеть» поочередно происходящие перечисленные дилатации и сдвиги.

2. Подсчет количества тождественных трансвективно-дилатационных разложений к-деформатора D_y^{00} указанного вида очевиден: в каждом из 6 вариантов разложений (3.50) любой элемент групп $\mathbf{GK}_H^1(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_H^2(\mathbf{R},3)$ и $\mathbf{GK}_B^1(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_B^2(\mathbf{R},3)$ дает 3 варианта (за счет перестановочности сомножителей (3.46)) и группы $\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)$ — 3! = 6 вариантов. Итого: 6 × 3 × 3 × 6 = 324 варианта. □

Комментарии: 1. Аргументы всех трансвекций в (3.50) являются функциями безразмерных элементов к-деформатора D_y^{00} (отнесенных к одному элементу $D_{11}^0 \neq 0$), а все элементы дилатаций в (3.51) являются произведениями элемента D_{11}^0 на функции остальных безразмерных элементов деформатора D_y^{00}. Так для (3.51) имеем

$$q_1^{y0} = D_{11}^0,\ \ q_2^{y0} = D_{11}^0\bar{\beta}_{22}^0,\ \ q_3^{y0} = D_{11}^0\bar{\gamma}_{33}^0,\ \ \ q_{21}^{y0} = D_{21}^0,$$

$$q_{31}^{y0} = D_{31}^0,\ \ q_{32}^{y0} = \bar{\alpha}_{32}^0\,/\,\bar{\beta}_{22}^0,\ \ q_{13}^{y0} = \bar{D}_{13}^0\,/\,\bar{\gamma}_{33}^0,$$

$$q_{23}^{y0} = \bar{\beta}_{23}^0\,/\,\bar{\gamma}_{33}^0,\ \ q_{12}^{y0} = \bar{D}_{12}^0\,/\,\bar{\beta}_{22}^0,\ \ \bar{\alpha}_{32}^0 = \bar{D}_{32}^0 - \bar{D}_{12}^0\bar{D}_{31}^0,$$

$$\bar{\alpha}_{33}^0 = \bar{D}_{33}^0 - \bar{D}_{13}^0\bar{D}_{31}^0,\ \ \bar{\beta}_{22}^0 = \bar{D}_{22}^0 - \bar{D}_{12}^0\bar{\delta}_{21}^0,$$

$$\bar{\beta}_{23}^0 = \bar{D}_{23}^0 - \bar{D}_{13}^0\bar{D}_{21}^0,\ \ \bar{\gamma}_{33}^0 = \bar{\alpha}_{33}^0 - \bar{\beta}_{23}^0\bar{\alpha}_{32}^0.$$

Указанное положение сохраняется для всех 324 трансвективно-дилатационных разложений к-деформатора с заменой в соответствующих случаях элемента D_{11}^0 на элементы D_{22}^0 или D_{33}^0.

2. Каждое из 324 разложений к-деформатора D_d^{00} содержит 9 независимых аргументов. Все 324 комплекта указанных аргументов эквивалентны в том смысле, что вычисленные с их помощью произведения трансвекций и дилатаций являются одним и тем же к-деформатором D_d^{00}.

3. Очевидны следующие равенства:

$$\tau_{21}^{y0}(q_{21}^{y0})\tau_{31}^{y0}(q_{31}^{y0})\tau_{32}^{y0}(q_{32}^{y0}) = E + \Delta\tau_H^{y0},$$

$$\Delta\tau_H^{y0} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q_{21}^{y0} & 0 & 0 \\ q_{31}^{y0} & q_{32}^{y0} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\tau_{13}^{y0}(q_{13}^{y0})\tau_{23}^{y0}(q_{23}^{y0})\tau_{12}^{y0}(q_{12}^{y0}) = E + \Delta\tau_B^{y0},$$

$$\Delta\tau_B^{y0} = \begin{Vmatrix} 0 & q_{12}^{y0} & q_{13}^{y0} \\ 0 & 0 & q_{23}^{y0} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$d_y^0 = E + \Delta d_y^0,\ \Delta d_y^0 = \begin{Vmatrix} q_1^{y0} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2^{y0} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & q_2^{y0} - 1 \end{Vmatrix}.$$

Подставляя полученные представления обобщенных операторов Кавальери и дилататора (по определению (3.42)) в разложение (3.51), получаем представление для к-деформатора в виде

$$D_y^{00} \equiv \tau_{yH}^0 \tau_{yB}^0 d_y^0 = (E + \Delta\tau_H^{y0})(E + \Delta\tau_B^{y0})(E + \Delta d_y^0) = E + \Delta D_y^{00},$$

$$\Delta D_y^{00} = \Delta\tau_H^{y0} + \Delta\tau_B^{y0} + \Delta d_y^0 + \Delta\tau_H^{y0}\Delta d_y^0 + \Delta\tau_H^{y0}\Delta\tau_B^{y0} + \\ + \Delta\tau_B^{y0}\Delta d_y^0 + \Delta\tau_H^{y0}\Delta\tau_B^{y0}\Delta d_y^0. \qquad (3.54)$$

4. Если $\|\Delta\tau_H^{y0}\Delta\tau_B^{y0}\| = o(\|\Delta\tau_H^{y0}\Delta d_y^0\|)$ и $= o(\|\Delta\tau_B^{y0}\Delta d_y^0\|)$ и среда изначально недеформирована (3.22), то имеем

$$\Delta D_y^{00} \approx (\Delta\tau_H^{y0} + \Delta\tau_B^{y0})d_y^0 + \Delta d_y^0 \qquad (3.55)$$

или в явной форме записи

$$\Delta D_y^{00} \approx \left\| \begin{matrix} q_1^{y0} - 1 & q_{12}^{y0} q_2^{y0} & q_{13}^{y0} q_3^{y0} \\ q_{21}^{y0} q_1^{y0} & q_2^{y0} - 1 & q_{23}^{y0} q_3^{y0} \\ q_{31}^{y0} q_1^{y0} & q_{32}^{y0} q_2^{y0} & q_3^{y0} - 1 \end{matrix} \right\|. \qquad (3.56)$$

5. Из малости величин q_{ij}^{y0} не следует малости недиагональных элементов D_{ij}^0 к-деформатора D_y^{00}, но если и они малы, то из (3.51) получаем

$$\begin{gathered} q_{21}^{y0} = D_{21}^0 / D_{11}^0, \quad q_{31}^{y0} = D_{31}^0 / D_{11}^0, \quad q_{32}^{y0} = D_{32}^0 / D_{22}^0, \\ q_{13}^{y0} = D_{13}^0 / D_{33}^0, \quad q_{23}^{y0} = D_{23}^0 / D_{33}^0, \quad q_{12}^{y0} = D_{12}^0 / D_{22}^0, \qquad (3.57) \\ q_1^{y0} = D_{11}^0, \quad q_2^{y0} = D_{22}^0, \quad q_3^{y0} = D_{33}^0, \end{gathered}$$

откуда следуют соотношения

$$\begin{gathered} D_{11}^0 = q_1^{y0}, \quad D_{12}^0 = q_{12}^{y0} q_2^{y0}, \quad D_{13}^0 = q_{13}^{y0} q_3^{y0}, \\ D_{21}^0 = q_{21}^{y0} q_1^{y0}, \quad D_{22}^0 = q_2^{y0}, \quad D_{23} = q_{23}^{y0} q_3^{y0}, \qquad (3.58) \\ D_{31}^0 = q_{31}^{y0} q_1^{y0}, \quad D_{32}^0 = q_{32}^{y0} q_2^{y0}, \quad D_{33}^0 = q_3^{y0}, \end{gathered}$$

внешне похожие на 3.56.

В соответствии с равенством (3.27) в рассматриваемом случае (малое деформирование без начальных деформаций) получаем следующую приближенную связь между деформациями и аргументами сдвигов и дилатаций, учитывая соотношение $\Delta D_{ij}^0 = z_j^i = \Delta_{ij}$ (3.23):

$$\begin{gathered} z_1^1 = \Delta_{11} \approx q_1^{y0} - 1, \; z_2^1 = \Delta_{12} \approx q_{12}^{y0} q_2^{y0}, \; z_3^1 = \Delta_{13} \approx q_{13}^{y0} q_3^{y0}, \\ z_1^2 = \Delta_{21} \approx q_{21}^{y0} q_1^{y0}, \; z_2^2 = \Delta_{22} \approx q_2^{y0} - 1, \; z_3^2 = \Delta_{23} \approx q_{23}^{y0} q_3^{y0}, \\ z_1^3 = \Delta_{31} \approx q_{31}^{y0} q_1^{y0}, \; z_2^3 = \Delta_{32} \approx q_{32}^{y0} q_2^{y0}, \; z_3^3 = \Delta_{33} \approx q_3^{y0} - 1, \end{gathered}$$

где q_{ij}^{y0} и q_i^{y0} из (3.57).

Из (3.58) следует «геометрический смысл» недиагональных элементов малой матрицы деформаций: это произведения аргументов трансвекций (сдвигов вдоль направлении ортов базовой системы координат) и аргументов соответствующих дилатаций. Иными словами, указанные деформации, даже если они малы, зависят в равной степени от сдвигов и дилатаций. При очень малых дилатациях $\Delta_{ii} \approx 0$ деформации z_j^i практически от них не зависят и совпадают с аргументами (параметрами) сдвигов-трансвекций (3.41).

Полученные результаты относятся к одному из возможных конкретных разложений к-деформатора, при использовании других разложений того же к-деформатора «геометрический смысл» его недиагональных элементов будет другим. Если у какого-либо явления обнаруживается более одного «геометрического смысла», то это означает, что на самом деле геометрический смысл у этого явления отсутствует вообще.

Последний комментарий является основанием к следующему определению.

Определение 3.7. Пусть: 1. Аргументы q_{ij}^{y0} трансвекций-сдвигов в тождественном разложении к-деформатора малы;

2. Недиагональные элементы к-деформатора малы;

3. Среда изначально недеформирована ($D_y^{00}(0) = E$) (3.22).

Тогда: 1. Девять независимых функций D_{ij}^0 и $D_i^0 - 1$ (элементов матрицы ΔD_y^{00}, примерно равных элементам матрицы деформаций $dz_y^{00} / d^{00} = \Delta_y^{00}$ (3.23) называются *обобщенными координатами локально линейно деформируемой среды в точке $y \in \varepsilon_y$ в момент времени t*:

$$q_y = \mathrm{col}\{D_1^0 - 1,\ D_{21}^0,\ D_{31}^0,\ D_{12}^0,\ \ldots,\ D_3^0 - 1\}. \qquad (3.59)$$

2. Многообразие Q_9, элементами которого являются девятки обобщенных координат из п. 1, называется *конфигурационным многообразием (пространством конфигураций)* **K(9)** локально линейно изменяемой непрерывной среды в точке $y \in \varepsilon_y$.

3. Многообразие Q_{18}, элементами которого являются (1×18)-столбцы x вида

$$Q_{18} = \{x : x = (q_y,\ q_y^{\cdot})\}, \qquad (3.60)$$

где $q_y^{\cdot}$ — (1×9)-столбец, составленный из столбцов матриц $dv_y^{00} / dy^{00} = z_y^{00\cdot} = \Delta_y^{00\cdot}$, называется *фазовым пространством непрерывной среды в точке* $y \in \varepsilon_y$.

Комментарии: 1. Слова «в точке $y \in \varepsilon_y$» в предыдущем определении играют важную роль, так как положение самой точки y в E_0 определяется тройкой чисел $y^{00} = (y_1^0, y_2^0, y_3^0)^T$.

2. На самом деле условие (3.59) является достаточным для определения пространства конфигураций, так как условие (3.60) является его следствием.

3. Любой из 9 эквивалентных вышеуказанных 324 наборов обобщенных координат (3.59) полностью и однозначно определяет к-деформатор D_y^{00} и, следовательно, полностью и однозначно определяет положение радиус-вектора $h_y^0(t)$ любой точки среды в момент времени t при известном радиус-векторе $h_y^0(t_0)$ (3.8).

4. При тождественных трансвективно-дилатационных разложениях к-деформатора D_y^{00} понятие «вращение» среды не возникает.

5. Исследование траекторий фазовой точки $x(t)$ методами современной теории колебаний — возможный путь к пониманию процессов турбулентности.

Определение 3.8. Классы разложений группы к-деформаторов в (3.50) вида (с дилататором $\mathbf{D}^q(\mathbf{R}, 3)$ в середине разложения)

$$\mathbf{GK}_H^1(\mathbf{R}, 3)\mathbf{GK}_H^2(\mathbf{R}, 3)(\mathbf{D}^q(\mathbf{R}, 3))\mathbf{GK}_B^1(\mathbf{R}, 3)\mathbf{GK}_B^2(\mathbf{R}, 3),$$

$$\mathbf{GK}_B^1(\mathbf{R}, 3)\mathbf{GK}_B^2(\mathbf{R}, 3)(\mathbf{D}^q(\mathbf{R}, 3))\mathbf{GK}_H^1(\mathbf{R}, 3)\mathbf{GK}_H^2(\mathbf{R}, 3),$$

называются *разложениями Брюа* [11].

Комментарий. Вид рассмотренных трансвективно-дилатационных разложений к-деформатора D_y^{00} не единствен. Это только часть разложений, полученных с использованием групп Кавальери.

3.4.3. ТРАНСВЕКТИВНО-ДИЛАТАЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРУППЫ К-ДЕФОРМАТОРОВ СРЕДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБОБЩЕННОЙ ГРУППЫ КАВАЛЬЕРИ

Предложение 3.14. Множество матриц

$$\mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3) = \{\tau^0_{yH} : \tau^0_{yH} = \tau^{y0}_{21}(q^{y0}_{21})\tau^{y0}_{31}(q^{y0}_{31})\tau^{y0}_{32}(q^{y0}_{32}) =$$

$$= \tau^{y0}_{31}(q^{y0}_{31})\tau^{y0}_{21}(q^{y0}_{21})\tau^{y0}_{32}(q^{y0}_{32}) = \tau^{y0}_{21}(q^{y0}_{21})\tau^{y0}_{32}(q^{y0}_{32})\tau^{y0}_{31}(q^{y0}_{31})\},$$

$$\mathbf{GK}_B(\mathbf{R},3) = \{\tau^0_{yB} : \tau^0_{yB} = \tau^{y0}_{13}(q^{y0}_{13})\tau^{y0}_{23}(q^{y0}_{23})\tau^{y0}_{12}(q^{y0}_{12}) =$$

$$= \tau^{y0}_{23}(q^{y0}_{23})\tau^{y0}_{13}(q^{y0}_{13})\tau^{y0}_{12}(q^{y0}_{12}) = \tau^{y0}_{23}(q^{y0}_{23})\tau^{y0}_{12}(q^{y0}_{12})\tau^{y0}_{13}(q^{y0}_{13})\}$$

являются подгруппами групп треугольных (нижних и верхних) матриц с законами умножения

$$\tau_H(a_1, b_1, c_1)\tau_H(a_2, b_2, c_2) =$$

$$= \tau_{21}(a_1)\tau_{31}(b_1)\tau_{32}(c_1)\cdot\tau_{21}(a_2)\tau_{31}(b_2)\tau_{32}(c_2) =$$

$$= \tau_{21}(a_1 + a_2)\tau_{31}(b_1 + b_2 + c_1 a_2)\cdot\tau_{32}(c_1 + c_2),$$

$$\tau_B(a_1, b_1, c_1)\tau_B(a_2, b_2, c_2) =$$

$$= \tau_{13}(b_1 + b_2 + a_1 c_2)\cdot\tau_{23}(c_1 + c_2)\tau_{12}(a_1 + a_2)$$

и обращения

$$\tau_H^{-1}(a, b, c) = \tau_{21}(-a)\tau_{31}(ac - b)\tau_{32}(c),$$

$$\tau_B^{-1}(a, b, c) = \tau_{13}(ac - b)\tau_{23}(-c)\tau_{12}(-a).$$

Доказательство выполняется простой проверкой. □

Определение 3. 9. Группы $\mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3) = \mathbf{GK}^1_H(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_H(\mathbf{R},3)$ и $\mathbf{GK}_B(\mathbf{R},3) = \mathbf{GK}^1_B(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}^2_B(\mathbf{R},3)$ называются *обобщенными группами Кавальери (нижней и верхней).*

Предложение 3.15. Существуют шесть следующих представлений группы кинематических деформаторов среды $\mathbf{GD}^q_{yt}(\mathbf{R},3)$ на основе обобщенных групп Кавальери:

$$\mathbf{GD}^q_{yt}(\mathbf{R},3) = \mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_B(\mathbf{R},3)\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3) =$$

$$= \mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3)\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_B(\mathbf{R},3) =$$

$$= \mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_B(\mathbf{R},3) =$$

$$= \mathbf{GK}_B(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3)\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3) =$$
$$= \mathbf{GK}_B(\mathbf{R},3)\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3) =$$
$$= \mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_B(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3). \qquad (3.61)$$

Доказательство повторяет доказательство (**П. 3.13**) с учетом перестановочности трансвекций с одинаковыми первыми или вторыми индексами (3.46). □

Определение 3.10. Разложения группы к-деформаторов $\mathbf{GD}^q_{yt}(\mathbf{R},3)$ вида

$$\mathbf{GD}^q_{yt}(\mathbf{R},3) = \mathbf{GK}_B(\mathbf{R},3)\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3) =$$
$$= \mathbf{GK}_B(\mathbf{R},3)\mathbf{D}^q(\mathbf{R},3)\mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3) \qquad (3.62)$$

называются (аналогично (**О. 3.8**)) *разложениями Брюа* [11].

Комментарии: 1. К-деформаторы из $\mathbf{GK}_B(\mathbf{R},3)$, $\mathbf{GK}_H(\mathbf{R},3)$, действующие индивидуально, осуществляют сдвиги среды параллельно тем же координатным плоскостям (e_2^0, o^0, e_3^0) и (e_1^0, o^0, e_3^0), что и в предложении (**П. 3.12**) соответственно.

2. В отличие от случая (3.46) вышеуказанные координатные плоскости к-деформаторы (3.62) оставляют на месте в целом (не поэлементно).

3. В к-деформаторах (3.62) сомножители-трансвекции с одинаковыми первыми и вторыми индексами перестановочны, что и отражено в определении.

Предложение 3.16. Для того чтобы матрица A была к-деформатором ($A = D_y^{00}$) среды необходимо и достаточно, чтобы она имела трансвективно-дилатационные разложения.

Доказательство. Очевидно: если матрица A представлена в виде произведения трансвекций — к-деформаторов ($\tau = E + \Delta\tau$) и к-деформатора-дилататора ($d = E + \Delta d$), то матрица A обязательно имеет вид $A = E + \Delta A$ (где $\Delta\tau \to 0$, $\Delta d \to 0$, $\Delta A \to 0$ в соответствующих точках соответствующих многообразий (2.3)) и, следовательно, является к-деформатором. И обратно: если матрица A является к-деформатором, то она обязательно (в силу алгоритма (3.51)) имеет одно из трансвективно-дилатационных разложений. □

3.5. ПОЛЯРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРУППЫ К-ДЕФОРМАТОРОВ СРЕДЫ

Среди всевозможных мультипликативных трансвективно-дилатационных разложений к-деформатора (около 600 вариантов) среды нет ни одного, содержащего вращательные составляющие. Естественно, возникает вопрос о существовании таких разложений. Ответ на этот вопрос положителен и содержится в данном разделе монографии.

3.5.1. ПРАВОСТОРОННИЕ ПОЛЯРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРУППЫ К-ДЕФОРМАТОРОВ

Предложение 3.17. Пусть: 1. $\mathbf{GS}^{q}_{yt}(\mathbf{R},3) \subset \mathbf{GD}^{q}_{yt}(\mathbf{R},3)$ — подгруппа симметрических к-деформаторов:

$$\mathbf{GS}^{q}_{yt}(\mathbf{R},3) = \{s^{00}_{s} : s^{00}_{s} \in \mathbf{GD}^{q}_{yt}(\mathbf{R},3),\ s^{00}_{s} = s^{00,T}_{s}\}; \quad (3.63)$$

2. $[e^{s}]$ — неортонормированный, неинерциальный базис, сопутствующий деформированию среды (2.13), математической моделью которого является симметрическая матрица s^{00}_{s} — матрица перехода от исходного базиса (например, инерциального) $[e^{0}]$ (верхний внутренний индекс) к базису $[e^{s}]$ (нижний индекс), вычисленная в исходом базисе $[e^{0}]$ (верхний внешний индекс):

$$[e^{s}] = [e^{0}]s^{00}_{s}; \quad (3.64)$$

3. $\mathbf{SO}^{q}_{yt}(\mathbf{R},3) \subset \mathbf{GD}^{q}_{yt}(\mathbf{R},3)$ — подгруппа вращений группы к-деформаторов

$$\mathbf{SO}^{q}_{yt}(\mathbf{R},3) = \{c^{ss}_{d} : c^{ss}_{d} \in \mathbf{GD}^{q}_{ty}(\mathbf{R},3),$$
$$c^{ss}_{d}c^{ss,T}_{d} = E, \det c^{ss}_{d} = 1; \quad (3.65)$$

4. $[e^{d}]$ — неортонормированный базис, сопутствующий деформированию среды, математической моделью которого является матрица c^{ss}_{d} поворота исходного неортонормированного базиса $[e^{s}]$ (2.7) в базис $[e^{d}]$, вычисленная в исходном базисе $[e^{s}]$:

$$[e^{d}] = [e^{s}]c^{ss}_{d}, \quad (3.66)$$

5. $s_s^{00}c_d^{ss} \in \mathbf{GD}_{ty}^q(\mathbf{R},3)$ — к-деформатор среды, преобразующий исходный базис $[e^0]$ в базис $[e^d]$, сопутствующий общему деформированию среды (2.7):

$$[e^d]=[e^s]c_d^{ss}=[e^0]s_s^{00}c_d^{ss}. \qquad (3.67)$$

Тогда: 1. Имеет место следующее правостороннее полярное мультипликативное разложение группы к-деформаторов среды:

$$\mathbf{GD}_{yt}^q(\mathbf{R},3)=\mathbf{GS}_{yt}^q(\mathbf{R},3)\mathbf{SO}_{yt}^q(\mathbf{R},3). \qquad (3.68)$$

2. Поэлементная форма записи тождественного разложения (3.68) в базисе $[e^0]$ имеет вид

$$D_y^{00}\equiv D_d^{00}\equiv s_s^{00}c_d^{ss},\ s_s^{00}\in\mathbf{GS}_{yt}^q(\mathbf{R},3),\ c_d^{ss}\in\mathbf{SO}_{yt}^q(\mathbf{R},3). (3.69)$$

3. Сомножители правой части тождества (3.69) полностью и однозначно определяются самим к-деформатором $D_d^{00}\equiv D_y^{00}$ с использованием тождеств [5, 11, 15]:

$$s_s^{00}\equiv(D_d^{00}D_d^{00,T})^{0.5}, \qquad (3.70)$$

$$c_d^{ss}\equiv(s_s^{00})^{-1}D_d^{00}\equiv(D_d^{00}D_d^{00,T})^{-0.5}D_d^{00}.$$

Доказательство. Пусть $D_d^{00}\equiv AB$ и $A^2\equiv D_d^{00}D_d^{00,T}$, следовательно, $A\in\mathbf{GS}_{yt}(\mathbf{R},3)$, т. е. $A\equiv s_s^{00}$. Покажем, что в этом случае B является нужной нам матрицей:

1. $B\equiv A^{-1}D_d^{00}\rightarrow BB^T\equiv A^{-1}D_d^{00}(A^{-1}D_d^{00})^T=(s_s^{00})^{-1}D_d^{00}\times$ $\times D_d^{00,T}(s_s^{00,T})^{-1}=(s_s^{00})^{-1}A^2(s_s^{00,T})^{-1}=(s_s^{00})^{-1}s_s^{00}s_s^{00}\times$ $\times(s_s^{00,T})^{-1}=E;$

2. $\det(BB^T)=\det E\rightarrow\det^2 B=1\rightarrow\det B=\pm1.$ Так как D_d^{00} — к-деформатор, то $\det D_d^{00}>0$, а матрица s_s^{00} в разложении (3.69) может быть эквивалента только дилататору d_y^{00} (3.31) и, следовательно, $\det s_s^{00}>0$ и $\det B=1\rightarrow B\in\mathbf{SO}(\mathbf{R},3)\rightarrow B\equiv c_d^{ss}$. □

Пример: Пусть на плоскости действует к-деформатор D_y^{00} = [0.4 0.28; 0.12 0.584]. Трансвективно-дилатационное разложение к-деформатора имеет вид $D_y^{00}=\tau_{21}(0.3)\,d_1(1.4)$ $d_2(1.5)\times\tau_{12}(0.7)$, т. е. указанный к-деформатор является непрерывной суперпозицией сдвига радиус-вектора любой точки среды по первой координате, растяжением результата по обеим координатам и сдвига по второй координате. В результате получим $h_y^0 = D_y^{00} h_y^d = (0.68,\ 0.704)^T$ при $h_y^d = (1, 1)^T$. Несмотря на действие растягивающих дилатаций в вышеуказанном разложении, итоговая длина вектора уменьшилась $\|h_y^d\| = 1.4142$, $\|h_y^0\| = 0.9788$.

Полярное правостороннее разложение данного к-деформатора имеет вид $D_y^{00} \equiv s_s^{00} c_d^{ss}$, где $s_s^{00} = [0.4398\ \ 0.2122;\ \ 0.2122\ \ 0.5572]$, $c_d^{ss} = [0.987\ \ 0.1605;\ \ -0.1605\ \ 0.987]$. Первая матрица является сжимающим дилататором $[0.2783\ \ 0;\ \ 0\ \ 0.7186]$, записанным не в каноническом базисе, вторая — матрицей вращения на угол $\alpha = -9.23°$. Таким образом, один и тот же к-деформатор можно представить в виде суперпозиции сдвигов и растяжений среды или поворота и сжатий этой же среды.

Предложение 3.18. Пусть: 1. $s_s^{00} \in \mathbf{GS}_{yt}(\mathbf{R},3)$ — симметрическая составляющая к-деформатора среды $D_y^{00} \equiv D_d^{00}$ в правостороннем полярном разложении (3.69);

2. $[e_r^\lambda]$ — ортонормированный базис из нормированных собственных векторов матрицы s_s^{00} (индекс r отмечает факт использования правостороннего разложения — right);

3. $\lambda_i^{\lambda r}, i = 1, 2, 3$ — собственные числа матрицы s_s^{00};

4. $c_{\lambda r}^0 \in \mathbf{O}(\mathbf{R},3)$ — матрица ортогонального преобразования ($\det c_{\lambda r}^0 = \pm 1$) исходного базиса (например, инерциального $[e^0]$) к базису $[e_r^\lambda]$:

$$[e_r^\lambda] = [e^0] c_{\lambda r}^0. \tag{3.71}$$

Тогда: 1. Симметрическая составляющая s_s^{00} в (3.70) в базисе $[e_r^\lambda]$ является дилататором с аргументами дилатаций $d_{si}^{0\lambda}(\lambda_i^{\lambda r})$, $i = 1, 2, 3$ в виде собственных чисел $\lambda_i^{\lambda r}$ матрицы s_s^{00}:

$$s_s^{0\lambda} = c_{\lambda r}^{00,T} s_s^{00} c_{\lambda r}^{00} = d_s^{0\lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1^{\lambda r}, \lambda_2^{\lambda r}, \lambda_3^{\lambda r}\}. \tag{3.72}$$

2. Матрица $c_{\lambda r}^{00} \in \mathbf{O}(\mathbf{R},3)$ (3.72) состоит из координатных столбцов нормированных собственных векторов матрицы s_s^{00} в базисе $[e^0]$.

3. Симметрическая матрица $s_s^{00} \in \mathbf{GS}_{yt}(\mathbf{R},\mathbf{3})$ с учетом (3.72) имеет вид

$$s_s^{00} = c_{\lambda r}^{00} d_s^{0\lambda} c_{\lambda r}^{00,T}. \tag{3.73}$$

Доказательство предложения следует из общих теорем алгебры об ортогональной эквивалентности самосопряженных операторов [9].□

Определение 3.11. Базис $[e_r^\lambda]$ (3.71) называется *каноническим базисом правостороннего полярного разложения к-деформатора среды* D_d^{00}.

Комментарии: 1. Полярное разложение (3.69) с учетом (3.73) имеет вид

$$D_d^{00} = s_s^{00} c_d^{ss} = c_{\lambda r}^{00} d_s^{0\lambda} c_{\lambda r}^{00,T} c_d^{ss}, \tag{3.74}$$

$$h_y^o(t) = c_{\lambda r}^{00} d_s^{0\lambda} c_{\lambda r}^{00,T} c_d^{ss} h_y^0(0). \tag{3.75}$$

Пример: Для матрицы $s_s^{00} = [0.4398 \quad 0.2122; \quad 0.2122 \quad 0.5572]$, из первого предыдущего примера получаем $d_s^{0\lambda} = [0.2783 \ 0; \ 0 \ \ 0.7186]$.

Предложение 3.19. Пусть: 1. c_d^{ss} — матрица вращения (3.69);

2. $c_i(q_i^y)$, $i = 1, 2, 3$ — матрицы простейших вращений (5.6);

3. q_i — параметр простейшего вращения — угол этого вращения (5.16).

Тогда: 1. Имеют место несколько тождественных представлений матрицы c_d^{ss}, например:

$$c_d^{ss} = c_1(q_1^y) c_2(q_2^y) c_3(q_3^y),\ c_d^{ss} = c_2(q_2^y) c_1(q_1^y) c_3(q_3^y),$$

$$c_d^{ss} = c_3(q_3^y) c_1(q_1^y) c_2(q_2^y),\ \ c_d^{ss} = c_3(q_3^y) c_1(q_1^y) c_3(\bar{q}_3^y).$$

Комментарии: 1. Разложения (5.6) также справедливы для матриц вышеуказанных доворотов $c_{\lambda r}^{00}$ (3.75), если $\det c_{\lambda r}^{00} = 1$. Таким образом, если для к-деформатора D_y^{00} использовать тождественное правостороннее полярное разложение (3.69) в виде последовательно выполняемых простейших вращений (если det $c_{\lambda r}^{00} = 1$) и дилатаций, то их будет 9 (три основных вращения (**П.3.19**), три аналогичных вращения в матрице $c_{\lambda r}^{00}$ и три дилатации). Но и при этом полярное разложение будет оставаться «укрупненным», так как каждая матрица простейшего вращения может быть еще разложена в произведение трансвекций и дилатаций (см. раздел 3.4.).

2. Используя определение простейшего вращения (5.6) и одно из представлений трехмерного вращения (**П.3.19**), для к-деформатора получаем следующее провосторонее полярное разложение:

$$D_y^{00} = E + \Delta D_y^{00}, \tag{3.76}$$

$$\Delta D_y^{00} = \left\| \begin{matrix} d_1 - 1 & \Delta_{12}^s & \Delta_{13}^s \\ \Delta_{21}^s & d_2 - 1 & \Delta_{23}^s \\ \Delta_{31}^s & \Delta_{32}^s & d_3 - 1 \end{matrix} \right\| + o(\Delta^2),$$

где $o(\Delta^2)$ — слагаемые порядка $\Delta c_i \Delta c_j$, $\Delta c_i \Delta d_j$ и выше.

3. С учетом (3.76) для матрицы деформаций правостороннего полярного разложения приближенно получаем

$$\Delta_y^{00} = dz^{00} / dy^{00} = [d_1 - 1 \ \Delta_{12}^s \ \Delta_{13}^s; \ \ \Delta_{21}^s \ d_2 - 1 \ \Delta_{23}^s;$$
$$\Delta_{31}^s \ \Delta_{32}^s \ d_3 - 1].$$

4. Если $c_{\lambda r}^{00}$ — ортогональное преобразование (det $c_{\lambda r}^{00} = -1$), то для матрицы деформаций (учитывая, что матрица $\Delta c_{\lambda r}^{00} \Delta c_{\lambda r}^{00,T}$, вообще говоря, не обязана быть бесконечно малой (2.3) в точке $y \in \varepsilon_y$) получаем

$$\Delta_y^{00} = \Delta c_d^{ss} + c_{\lambda r}^{00} \Delta d_y^{0\lambda} c_{\lambda r}^{00,T} + c_{\lambda r}^{00} \Delta d_y^{0\lambda} c_{\lambda r}^{00,T} \Delta c_d^{ss}. \tag{3.77}$$

Если $c_{\lambda r}^{00}$ — вращение (det $c_{\lambda r}^{00} = 1$), то, например, для двумерного случая, пренебрегая слагаемыми порядка $\Delta c \Delta d \Delta c$ и $\Delta c \Delta c \Delta d \Delta c$ с разными индексами, получаем

$$\Delta_y^{00} = \Delta d_y^{0\lambda} + \Delta c_d^{ss} + \Delta c_{\lambda r}^{00} \Delta d_y^{0\lambda,T} + \Delta d_y^{0\lambda} (\Delta c_d^{ss} + \Delta c_{\lambda r}^{00,T}), \tag{3.78}$$

где все Δc (с соответствующими индексами) легко вычисляются с использованием формул (5.8)—(5.10).

Сравнение (3.56), (3.77) и (3.78) показывает, что матрицы деформаций при разных тождественных разложениях к-деформатора могут иметь разную геометрическую трактовку и, следовательно, никакого реального движения не моделируют.

5. Из (3.78) следует, что даже при малых углах всех вращений и аргументах дилатаций при правостороннем полярном разложении к-деформатора элементы матрицы деформаций зависят не только от деформаций-дилатаций в каноническом базисе, деформаций-вращений Δc_d^{ss} (3.65), но и от их перекрестных произведений.

6. На основании предыдущего пункта еще раз отмечаем, что при правостороннем полярном разложении к-деформатора:

6.1. Деформирование материала является не суммой независимых вращения и дилатации (как принято считать), а является их произведением, и, следовательно, элементы матрицы деформаций являются функциями элементов обеих вышеуказанных матриц.

6.2. Матрицы деформаций зависят не только от малых углов вращения Δc_d^{ss} и деформаций-дилатаций в каноническом базисе $\Delta d_y^{0\lambda}$, но и от перекрестного их влияния и влияния углов поворота до канонического базиса $\Delta c_{\lambda r}^{00}$ (в том числе несобственных ортогональных преобразований, вообще не являющихся к-деформаторами, по определению (**0.2.4.**)).

6.3. При полярном разложении к-деформатора в матрице деформаций сдвигов не существует.

7. Преобразование симметрической матрицы s_s^{00} в диагональную с использованием собственных чисел и векторов также не единственно. Существуют неортонормированные базисы, в которых эта матрица также диагональна [9].

3.5.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КИНЕМАТИКИ НА ГРУППАХ $\mathrm{GS}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)$ И $\mathrm{SO}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)$

В параграфе 3.1 было получено дифференциальное уравнение кинематики на группе к-деформаторов среды $\mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)$, располагая решением D_y^{00} которого, можно вычислить вращательную и симметрическую составляющие к-деформатора D_y^{00} с использованием тождеств (3.70). Решение задачи связано с необходимостью выполнения трудоемких вычислений матрицы $(D_y^{00} D_y^{00,T})^{0.5}$ (3.70). Правостороннее полярное разложение (3.69) к-деформатора среды D_y^{00} позволяет получить еще один алгоритм вычисления составляющих матрицы D_y^{00}. В данном параграфе получены матричные дифференциальные уравнения (аналогичные (3.1)), решениями которых являются указанные составляющие.

Предложение 3.20. Пусть: 1. $D_y^{00} \equiv D_d^{00} \equiv s_s^{00} c_d^{ss}$, $s_s^{00} \in \mathbf{GS}_{yt}^q$ $(\mathbf{R},\mathbf{3})$, $c_d^{ss} \in \mathbf{SO}_{yt}^q(\mathbf{R},\mathbf{3})$ — правостороннее полярное разложение к-деформатора среды (2.9);

2. Тождественное разложение матрицы dv_y^{00} / dy^{00} (3.1) на кососимметрическую и симметрическую составляющие имеет вид (см. 3.6)

$$dv_y^{00} / dy^{00} \equiv \langle dv_y^{00} / dy^{00} \rangle + [dv_y^{00} / dy^{00}],$$

$$\langle dv_y^{00} / dy^{00} \rangle \equiv 0.5\{dv_y^{00} / dy^{00} - (dv_y^{00} / dy^{00})^T\}, \qquad (3.79)$$

$$[dv_y^{00} / dy^{00}] \equiv 0.5\{dv_y^{00} / dy^{00} + (dv_y^{00} / dy^{00})^T\}.$$

Тогда составляющие s_s^{00} и c_d^{ss} к-деформатора D_d^{00} среды являются решениями системы следующих дифференциальных уравнений кинематики на группах $\mathbf{GS}_{yt}^q(\mathbf{R},\mathbf{3})$ и $\mathbf{SO}_{yt}^q(\mathbf{R},\mathbf{3})$:

$$s_s^{00\cdot} = [dv_y^{00} / dy^{00}] s_s^{00}, \qquad c_d^{ss\cdot} = \langle dv_y^{0s} / dy^{0s} \rangle c_d^{ss}, \qquad (3.80)$$

$$\langle dv_y^{0s} / dy^{0s} \rangle = (s_s^{00})^{-1} \langle dv_y^{00} / dy^{00} \rangle s_s^{00}. \qquad (3.81)$$

Доказательство. С использованием равенства (3.1) получаем

$$D_d^{00\cdot} (D_d^{00})^{-1} = (s_{ss}^{00} c_d^{ss})^{\cdot} (s_{ss}^{00} c_d^{ss})^{-1} =$$

$$= (s_{ss}^{00\cdot} c_d^{ss} + s_{ss}^{00} c_d^{ss\cdot})(c_d^{ss})^{-1} (s_s^{00})^{-1} =$$

$$= s_{ss}^{00\cdot} c_d^{ss} (c_d^{ss})^{-1} (s_{ss}^{00})^{-1} + s_{ss}^{00} c_d^{ss\cdot} (c_d^{ss})^{-1} (s_{ss}^{00})^{-1} =$$

$$= s_{ss}^{00\cdot} (s_{ss}^{00})^{-1} + s_{ss}^{00} c_d^{ss\cdot} (c_d^{ss})^{-1})^{-1} (s_{ss}^{00})^{-1}.$$

Учитывая равенства (3.79) и (3.1), приходим к уравнениям $s_{ss}^{00\cdot} (s_{ss}^{00})^{-1} = [dv_y^{00} / dy^{00}]$, $s_{ss}^{00} c_d^{ss\cdot} (c_d^{ss})^{-1} (s_{ss}^{00})^{-1} =$ $= \langle dv_y^{00} / dy^{00} \rangle$, откуда и следует доказываемый результат.□

Комментарий. Скорость изменения вращательной составляющей $c_d^{ss\cdot}$ к-деформатора D_d^{00} при правостороннем полярном разложении, как и следовало ожидать, определяется не только кососимметрической матрицей $\langle dv_y^{00} / dy^{00} \rangle$ (как считали Коши и Гельмгольц (3.6)), но и симметрической составляющей s_s^{00} к-деформатора D_d^{00} в силу равенства (3.81), что свидетельствует об отсутствии каких-либо аналогий между указанной вращающей составляющей к-деформатора D_d^{00} локально линейно изменяемой непрерывной среды (3.80) и вращением абсолютно твердого тела (5.31) и тем более не существующих в природе «частиц». Следовательно, тождество Коши—Гельмгольца не только не является математической моделью кинематики реальной среды (как тождество), но оно является основанием к неверному утверждению о разложении движения непрерывной среды в окрестности точки на независимые вращение и дилатацию.

3.5.4. ЛЕВОСТОРОННИЕ ПОЛЯРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРУППЫ К-ДЕФОРМАТОРОВ

Предложение 3.21. Пусть $\mathbf{GS}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)$ и $\mathbf{SO}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)$ — группы из (3.68), $c_s^{00} \in \mathbf{SO}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)$, $s_d^{ss} \in \mathbf{GS}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)$.

Тогда: 1. Имеет место следующее левосторонее полярное мультипликативное разложение группы к-деформаторов среды [9, 43, 44]:

$$\mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3) = \mathbf{SO}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)\mathbf{GS}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3). \qquad (3.82)$$

2. Поэлементная форма записи тождественного разложения (3.82) в базисе $[e^0]$ имеет вид

$$D_d^{00} \equiv c_s^{00} s_d^{ss},\ c_s^{00} \in \mathbf{SO}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3),\ s_d^{ss} \in \mathbf{GS}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3). \qquad (3.83)$$

3. Сомножители разложения (3.83) полностью и однозначно определяются самим кинематическим деформатором D_d^{00}:

$$s_d^{ss} \equiv (D_d^{00,T} D_d^{00})^{0.5},\quad c_s^{00} \equiv D_d^{00}(D_d^{00,T} D_d^{00})^{-0.5}. \qquad (3.84)$$

Доказательство. Пусть $D_d^{00} \equiv BA$ и $A^2 \equiv D_d^{00,T} D_d^{00}$ и, следовательно, $A \in \mathbf{GS}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)$, т. е. $A \equiv s_d^{ss}$. Покажем, что B является нужной нам матрицей: $B \equiv D_d^{00} A^{-1} \Rightarrow B^T B \equiv (D_d^{00} A^{-1})^T D_d^{00} A^{-1} \equiv$ $\equiv (s_d^{ss})^{-1} D_d^{00,T} D_d^{00} (s_d^{ss,T})^{-1} \equiv (s_d^{ss})^{-1} A^2 (s_d^{ss,T})^{-1} \equiv (s_d^{ss})^{-1} s_d^{ss} \times$ $\times s_d^{ss} (s_d^{ss})^{-1} \equiv E \Rightarrow B \in \mathbf{SO}_{yt}^q(\mathbf{R},3) \Rightarrow B \equiv c_s^{00}.\square$

Пример. Пусть на плоскости действует тот же к-деформатор, что и в примере предыдущего параграфа $D_y^{00} = [0.4\ 0.28;\ 0.12\ 0.584]$. Трансвективно-дилатационное разложение к-деформатора имеет вид $D_y^{00} = \tau_{21}(0.3) d_1 (1.4) d_2 (1.5) \tau_{12} (0.7)$. В результате получим $h_y^0 = D_y^{00} h_y^d = (0.68,\ 0.704)^T$, $h_y^d = (1,1)^T$.

Левостороннее полярное разложение данного к-деформатора имеет вид $D_y^{00} \equiv c_c^{00} s_d^{cc}$, где $s_d^{cc} = [0.3756\ \ 0.1826;\ \ 0.1826\ \ 0.6214]$, $c_d^{ss} = [0.987\ 0.1605;\ -0.1605\ 0.987]$. Первая матрица является сжимающим дилататором $[0.2783\ \ 0;\ \ 0.7186]$, записанным не в каноническом (повернутом матрицей c_c^{00}) базисе, вторая — матрицей вращения на угол $\alpha = -9.23°$. Таким образом, как и в предыдущем примере, над средой выполняется суперпозиция вращения и дилататора с теми же собственными числами, но в обратном порядке. Это принципиально разные действия над средой: сначала, например, вектор $h_y^d = (1,1)^T$ сжимается, а затем поворачивается. Иными словами, операторы дилататор и вращение у обоих полярных разложений к-деформатора одинаковы, но действуют на разные векторы так, что результат совпадает.

Предложение 3.22. Пусть: 1. $s_d^{ss} \in \mathbf{GS}_{yt}^q(\mathbf{R},3)$ — симметрическая составляющая к-деформатора среды D_d^{00} (3.83);

2. $[e_l^\lambda]$ — ортонормированный базис из нормированных собственных векторов матрицы s_d^{ss} (*l* — *left*);

3. $\lambda_i^{\lambda l}$, $i = 1, 2, 3$ — собственные числа матрицы s_d^{ss}.

Тогда: 1. Симметрическая составляющая s_d^{ss} к-деформатора среды D_d^{00} в базисе $[e_l^d]$ является дилататором с аргументами дилатаций $d_{di}^{sl}(\lambda_i^{\lambda l})$, $i = 1, 2, 3$ в виде собственных чисел $\lambda_i^{\lambda l}$ матрицы s_d^{ss}:

$$s_d^{\lambda l} = c_{\lambda l}^{ss,T} s_{yl}^{ss} c_{\lambda l}^{ss} = d_y^{\lambda l} = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1^{\lambda l}, \lambda_2^{\lambda l}, \lambda_3^{\lambda l}\}. \qquad (3.85)$$

2. Ортогональная матрица $c_{\lambda l}^{ss}$ перехода от исходного базиса $[e^s]$ к базису $[e_l^\lambda]$ состоит из координатных столбцов нормированных собственных векторов матрицы s_d^{ss} в базисе $[e^s]$:

$$[e_l^\lambda] = [e^s] c_{\lambda l}^{ss}. \qquad (3.86)$$

Доказательство предложения следует из общих теорем алгебры об ортогональной эквивалентности самосопряженных операторов.□

Определение 3.12. Базис $[e_l^\lambda]$ (3.86) называется каноническим базисом левостороннего полярного разложения к-деформатора среды.

Комментарии: 1. Левостороннее полярное разложение к-деформатора с учетом (3.86) имеет вид

$$D_d^{00} \equiv c_s^{00} s_d^{ss} \equiv c_s^{00} c_{\lambda l}^{ss} d_y^{\lambda l} c_{\lambda l}^{ss,T} . \qquad (3.87)$$

2. Канонические базисы $[e_r^\lambda]$ и $[e_l^\lambda]$ (3.71), (3.86), в которых симметрическая составляющая к-деформатора среды D_d^{00} имеет вид дилататора, совпадают и традиционно называются главными.

Предложение 3.23. Пусть: 1. $D_d^{00} \equiv c_s^{00} s_d^{ss}$, $c_s^{00} \in \mathbf{SO}_{yt}^q(\mathbf{R},3)$, $c_d^{ss} \in \mathbf{GS}_{yt}^q(\mathbf{R},3)$ — левостороннее разложение к-деформатора среды (3.83);

2. Тождественное разложение матрицы dv_y^{00} / dy^{00} (3.6) на кососимметрическую и симметрическую составляющие имеет вид

$$dv_y^{00} / dy^{00} \equiv \langle dv_y^{00} / dy^{00} \rangle + [dv_y^{00} / dy^{00}],$$

$$\langle dv_y^{00} / dy^{00} \rangle \equiv 0.5\{dv_y^{00} / dy^{00} - (dv_y^{00} / dy^{00})^T\}, \qquad (3.88)$$

$$[dv_y^{00} / dy^{00}] \equiv 0.5\{dv_y^{00} / dy^{00} + (dv_y^{00} / dy^{00})^T\}.$$

Тогда составляющие c_s^{00} и s_d^{ss} к-деформатора D_d^{00} среды являются решениями системы следующих дифференциальных уравнений кинематики на группах $\mathbf{GS}_{ty}^q(\mathbf{R},3)$ и $\mathbf{SO}_{ty}^q(\mathbf{R},3)$:

$$c_s^{00\cdot} = \langle dv_y^{00} / dy^{00} \rangle c_s^{00}, \; s_d^{ss\cdot} = [dv_y^{0s} / dy^{0s}]\, s_d^{ss},$$

$$[dv_y^{0s} / dy^{0s}] = c_s^{00,T} [dv_y^{00} / dy^{00}] c_s^{00}. \qquad (3.89)$$

Доказательство. С использованием уравнения (3.1) получаем

$$D_d^{00\cdot}(D_d^{00})^{-1} = (c_s^{00}s_d^{ss})\cdot(c_s^{00}s_d^{ss})^{-1} =$$

$$= (c_s^{00\cdot}s_d^{ss} + c_s^{00}s_d^{ss\cdot})(s_d^{ss})^{-1}(c_s^{00})^{-1} =$$

$$= c_s^{00\cdot}s_d^{ss}(s_d^{ss})^{-1}(c_s^{00})^{-1} + c_s^{00}s_d^{ss\cdot}(s_d^{ss})^{-1}(c_s^{00})^{-1} =$$

$$= c_s^{00\cdot}c_s^{00,T} + c_s^{00}s_d^{ss\cdot}(s_d^{ss})^{-1}(c_s^{00})^{-1}.$$

С учетом (3.6) и (3.89) получаем

$$c_s^{00\cdot}c_s^{00,T} = \langle dv_y^{00} / dy^{00}\rangle,\ c_s^{00}s_d^{ss\cdot}(s_d^{ss})^{-1}(c_s^{00})^{-1} = [dv_y^{00} / dy^{00}],$$

откуда и следует доказываемый результат. □

Комментарий. Скорость изменения симметричной составляющей $s_d^{ss\cdot}$ к-деформатора D_d^{00} при левостороннем полярном разложении, как и следовало ожидать, определяется не только матрицей $[dv_y^{00} / dy^{00}]$ (как считали Коши и Гельмгольц (3.6)), но и вращательной составляющей к-деформатора D_d^{00} в силу равенства (3.89), что, как и в случае правостороннего разложения (3.80), свидетельствует об отсутствии каких-либо аналогий между указанной симметрической составляющей к-деформатора D_d^{00} и симметрическим деформатором «размороженной частицы» среды.

3.5.5. БЕСЦИРКУЛЯЦИОННАЯ (ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ) ДЕФОРМАЦИЯ СРЕДЫ

Определение 3.13. Пусть: 1. A_{2y} — аффинно-векторная плоскость, содержащая точку y;

2. γ: $[a, b] \to R_2$ — фиксированный в E_0 непрерывный, кусочно гладкий замкнутый $\gamma(a) = \gamma(b)$ путь с носителем (неподвижным в E_0) в ε_y;

3. $z^0(\gamma)$ — радиус-вектор произвольной точки z в E_0, принадлежащей носителю пути γ;

4. v_x^{00} — поле скоростей среды в ε_y (3.4) относительно E_0 в базисе $[e^0]$,

$$\omega = v_x^{00} \cdot dz^{00} \qquad (3.90)$$

— 1-форма, порождаемая векторами v_x^{00} и dz^{00} [14].

Тогда криволинейный интеграл от формы ω вдоль пути γ:

$$c^0_v = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} (v^{00}_z \cdot dz^{00}) \qquad (3.91)$$

называется *циркуляцией вектора* v^{00}_x *скорости вдоль носителя пути.*

Предложение 3.24. Пусть: 1. $\varepsilon_y \in \mathfrak{B}^{\mu}_3$, $y^0 \in E_0$, $y^{00} \in R_3$;

2. $\delta_r(y)$ — открытый шар радиуса r с началом в точке $y \in \varepsilon_y \in \mathfrak{B}^{\mu}_3$, $\overline{\delta}_r(y)$ — его замыкание в $D^{\mu}_3, \overline{\delta}_r(y) = \delta_r(y) \cup \partial\delta_r \subset \varepsilon_y$, $\partial\delta_r$ — граница шара $\delta_r(y)$ (сфера радиуса r), $r = \| z^{00} - y^{00} \|$, $z \in \partial\delta_r$;

3. $\overline{\delta}^i_r(y)$ — сечение замкнутого шара $\overline{\delta}_r(y)$ координатной плоскостью с направляющим ортом $e^0_i \in [e^0]$, $i = 1, 2, 3$ (замкнутый круг радиуса r) с границей $\partial\overline{\delta}^i_r$;

4. v^{00}_y — координатный столбец в базисе $[e^0]$ вектора скорости v^0_y точки $y \in D^{\mu}_3$ среды относительно система координат E_0.

Тогда: 1. Циркуляция c^0_{vi} вектора v^{00}_x скорости вдоль носителя $\partial\overline{\delta}^i_r$ пути γ: $[0, 2\pi] \in R_3$ пропорциональна площади замкнутого круга $\overline{\delta}_r(y)$:

$$c^0_{vi} = c^0_{vi}(y)\pi r^2. \qquad (3.92)$$

2. Коэффициенты пропорциональности c^0_{vi} в (3.92) имеют вид

$$c^0_{v1}(y) = \partial v^0_3 / \partial y^0_2 - \partial v^0_2 / \partial y^0_3,\ c^0_{v2}(y) = \partial v^0_1 / \partial y^0_3 - \partial v^0_3 / \partial y^0_1,$$

$$c^0_{v3} = \partial v^0_2 / \partial y^0_1 - \partial v^0_1 \ \ \partial y^0_2. \qquad (3.93)$$

Доказательство. Пусть $i = 3$, $z^{00} = \| rc\gamma,\ rs\gamma,\ 0 \|^T$, $dz^{00} = \| -rs\gamma,\ rc\gamma,\ 0 \|^T d\gamma$, $c = \cos$, $s = \sin$,

$$c^0_{v3}(y) = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} (v^{00}_z \cdot dz^{00}) = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} (dv^{00}_y / dy^{00} z^{00} \cdot dz^{00}) =$$

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} (\text{grad}\ v^0_{y1} \cdot z^{00}) dz^0_1 + \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} (\text{grad}\ v^0_{y2} \cdot z^{00})\, dz^0_2 =$$

$$= \pi r^2 (\partial v^0_2 / \partial y^0_1 - \partial v^0_1 / \partial y^0_2),$$

где учтено, что $\int s^2 x dx = -1/4 s 2x + 1/2x$, $\int c^2 x dx = 1/4 s 2x + 1/2x$, $\int sxcxdx = -1/4c2x$. □

Определение 3.14. Пусть 1-форма $\omega = v_x^{00} \cdot dz^{00}$ (3.90) точна в точке $y \in D_3^\mu$ [14], т. е. у точки y существует окрестность ε_y, в которой форма ω имеет первообразную $\varphi(y) \in C^1(\varepsilon_y)$, $d\varphi(y) = \omega$ [14]:

$$\omega = v_x^{00} \cdot dz^{00} = \text{grad } \varphi(y) \cdot dz^{00}. \qquad (3.94)$$

Тогда: 1. Первообразная $\varphi(y)$ формы ω называется *локальным потенциалом деформации среды* (в точке $y \in D_3^\mu$).

2. Деформация среды D_3^μ называется *локально потенциальной* (в точке $y \in D_3^\mu$).

Определение 3.15. Пусть 1-форма $\omega = v_x^{00} \cdot dz^{00}$ (3.94) замкнута (локально точна) на D_3^μ, т. е. для любой точки $y \in D_3^\mu$ найдется ε-окрестность ε_y, в которой форма ω имеет первообразную $\varphi(y) \in C^1(\varepsilon)$:

$$\omega(y) = v_x^{00} \cdot dz^{00} = \text{grad } \varphi(y) \cdot dz^{00}. \qquad (3.95)$$

Тогда: 1. Первообразная $\varphi(y)$ формы ω называется *потенциалом* деформации среды.

2. Деформация среды называется *потенциальной.*

Комментарий. Если деформация среды потенциала, то она и локально потенциальна. Обратное — неверно.

Предложение 3.25. Для того чтобы деформирование среды было потенциальным (локально потенциальным), необходимо и достаточно, чтобы оно было бесциркуляционным (локально бесциркуляционным):

$$\begin{aligned} c_{v1}^0(y) &= \partial v_3^{00} / \partial y_2^{00} - \partial v_2^{00} / \partial y_3^{00} = 0, \\ c_{v2}^0(y) &= \partial v_1^{00} / \partial y_3^{00} - \partial v_3^{00} / \partial y_1^{00} = 0, \\ c_{v3}^0(y) &= \partial v_2^{00} / \partial y_1^{00} - \partial v_1^{00} / \partial y_2^{00} = 0. \end{aligned} \qquad (3.96)$$

Доказательство. Необходимость: Действительно, пусть деформация среды потенциальна $\omega = v_x^{00} \cdot dz^{00} = \text{grad } \varphi(y) \cdot dz^{00}$ (3.95). Тогда для циркуляции $c_v^0 = \int_\gamma \omega$ (3.91) получаем

$$c_v^0 = \int_\gamma \omega = \int_\gamma (\text{grad } \varphi(y) \cdot dz^{00}) = 0, \qquad (3.97)$$

откуда и следует доказываемый результат.

Достаточность: Условия (3.96) являются достаточными для замкнутости формы $\omega = v_x^{00} \cdot dz^{00}$ и, следовательно, для существования потенциала скорости среды в окрестности любой точки).□

Предложение 3.26. Для того чтобы деформация среды была бесциркуляционна (потенциальна), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1. В полярных разложениях к-деформатора среды D_d^{00} (левостороннем (3.83) и правостороннем (3.69)) отсутствуют вращательные составляющие c_s^0 и c_s^d:

$$c_s^0 \equiv c_d^s \equiv E. \qquad (3.98)$$

2. К-деформатор среды D_d^{00} является симметрической матрицей

$$D_d^{00} \equiv s_c^{00} \equiv s_d^{ss} \equiv s_d^{00} \to D_d^{00} \in \mathbf{GS}_{yt}^q(\mathbf{R},\mathbf{3}). \qquad (3.99)$$

Доказательство. Необходимость: Пусть деформация среды бесциркуляционна (потенциальна) (3.94), (3.95). Тогда форма (3.94), (3.95) замкнута, т. е. является полным дифференциалом потенциала. В этом случае интеграл формы (3.97), т. е. циркуляция c_v^0, по любому замкнутому носителю пути с нужными свойствами равен нулю. Это означает равенство нулю коэффициентов циркуляции (3.96) и, следовательно, равенство нулю кососимметрических матриц (3.79) в уравнения (3.80) и (3.89), порожденных этими коэффициентами. Откуда и следует доказываемый результат с точностью до выбора постоянного инерциального базиса.

Достаточностью доказывается аналогичными рассуждениями в обратном порядке.□

Предложение 3.27. Пусть деформация среды бесциркуляционна (потенциальна) (3.96), (3.97).

Тогда: 1. Матрица скоростей деформации среды симметрична:

$$\Delta_y^{0\cdot} = \Delta_y^{0\cdot,T} \to dv_y^{00} / dy^{00} = (dv_y^{00} / dy^{00})^T. \qquad (3.100)$$

2. Матрица деформаций среды симметрична:

$$\Delta_y^0 = \Delta_y^{0,T} = [dz_y^{00} / dy^{00}]. \tag{3.101}$$

3. Для матрицы деформаций имеет место представление:

$$dz_y^{00} / dy^{00} \equiv [dz_y^{00} / dy^{00}] \equiv$$
$$\equiv 1/2[dz_y^{00} / dy^{00} + (dz_y^{00} / dy^{00})^T], \tag{3.102}$$

или в координатной форме записи

$$z_i^i \equiv \varepsilon_{ii}, \quad z_j^i \equiv z_i^j \equiv 0.5\gamma_{ij}, \tag{3.103}$$
$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = z_j^i + z_i^j.$$

Доказательство. С использованием тождества (3.88) получаем

$$\Delta_y^{0\cdot} = dv_y^{00} / dy^{00} \equiv \langle dv_y^{00} / dy^{00} \rangle + [dv_y^{00} / dy^{00}] \equiv [dv_y^{00} / dy^{00}],$$
$$\Delta_y^0 = \int \chi_{[0,t]} dv_y^{00} / dy^{00} \mu_1(dt) = \int \chi_{[0,t]} [dv_y^{00} / dy^{00}] \mu_1(dt) =$$
$$= [dz_y^{00} / dy^{00}]. \ \square$$

Комментарии: 1. В слова «отсутствие вращательных составляющих в полярных разложениях...» не следует вкладывать дополнительного смысла к тому, что в них заложено изначально, т. е. не следует путать вращательные составляющие в одном из многих возможных разложений к-деформатора с реальными вращениями локально линейно изменяемой непрерывной среды, которые отсутствуют во всех случаях, если среда не абсолютно твердое тело.

2. Левостороннее (3.83) и провостороннее (3.69) разложения к-деформатора при бесциркуляционном (потенциальном) деформировании среды $D_d^{00} \equiv s_c^{00} \equiv s_d^{ss} \equiv s_d^{00}$ совпадают.

3. Дифференциальное уравнение кинематики бесциркуляционного (потенциального) деформирования среды имеет вид (3.1), (3.80), (3.89)

$$D_y^{00\cdot} = [dv_y^{00} / dy^0] D_y^{00}. \tag{3.104}$$

3.6. АДДИТИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК СРЕДЫ

3.6.1. ТРАНСВЕКТИВНО-ДИЛАТАЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Предложение 3.28. 1. Существует около 600 аддитивных трансвективно-дилатационных разложений вектора приращения скорости $\Delta v_x^{00} = v_x^{00} - v_y^{00}$ произвольной точки среды $x \in \varepsilon_y$ за счет ее деформации на простейшие слагаемые с использованием тождественных мультипликативных разложений к-деформатора $D_d^{00} \in \mathbf{GD}_{yt}^{\mu}(\mathbf{R},3)$ (3.50);

2. Указанное разложение является линейной комбинацией скоростей $q_{ij}^{y0\cdot}$ и $q_i^{y0\cdot}$ параметров трансвекций и дилатаций с коэффициентами в виде векторов v_{ij}^{y0} и v_{yi}^{y0}, алгоритмы вычисления которых зависят от типа разложения к-деформатора среды D_d^{00}, и, например, для разложения (3.51)

$$D_d^{00} = \tau_{21}^{y0}(q_{21}^{y0})\tau_{31}^{y0}(q_{31}^{y0})\tau_{32}^{y0}(q_{32}^{y0})\tau_{13}^{y0}(q_{13}^{y0})\tau_{23}^{y0}(q_{23}^{y0})\tau_{12}^{y0}(q_{12}^{y0})d_y^{00}$$

имеют вид

$$v_{21}^{y0} = E_{21}\tau_{21}^{y0}(-q_{21}^{y0})h_y^0,$$

$$v_{31}^{y0} = \tau_{21}^{y0}(q_{21}^{y0})E_{31}\tau_{31}^{y0}(-q_{31}^{y0})\tau_{21}^{y0}(-q_{21}^{y0})h_y^0,$$

. . . .

$$v_{y1}^{y0} = \tau_y^0 E_{11}(\tau_y^0)^{-1} h_y^0 (1/q_1^{y0}), \ldots, v_{y3}^{y0} = \tau_y^0 E_{33}(\tau_y^0)^{-1} h_y^0 (1/q_3^{y0}).$$

Доказательство утверждения одновременно является описанием алгоритма практического построения любого из вышеуказанных разложений. Дифференцируя по времени разложение (3.51) и подставляя результат в (3.4), получаем

$$\Delta v_x^{00} = v_x^{00} - v_y^{00} = D_d^{00\cdot}(D_d^{00})^{-1} h_y^0 =$$

$$= v_{21}^{y0} q_{21}^{y0\cdot} + v_{31}^{y0} q_{31}^{y0\cdot} + \ldots + v_{12}^{y0} q_{12}^{y0\cdot} + v_{y1}^{y0} q_1^{y0\cdot} + \ldots + v_{y3}^{y0} q_3^{y0\cdot} =$$

$$= \sum\nolimits_{ij} v_{ij}^{y0} q_{ij}^{y0\cdot} + \sum\nolimits_i v_{yi}^{y0} q_i^{y0\cdot}, \qquad (3.105)$$

где суммирование в первой сумме ведется по (i, j)-индексам разложения (3.51), а во второй сумме — по $i = 1, 2,3$.□

Комментарий. При использовании трансвективно-дилатационных разложений Брюа к-деформатора D_d^{00} типа (3.62) формула (3.105) принимает вид

$$\Delta_x^{00} = v_x^{00} - v_y^{00} = D_d^{00\cdot} (D_d^{00})^{-1} h_y^0 = \sum_{ij} (v_{ij}^{y0} - v_{ij}^{x0}) q_{ij}^{y0\cdot} + $$
$$+ \sum_i v_i^{y0} q_i^{y0\cdot},$$

учитывая, что $q_{ij}^{y0\cdot} = q_{ji}^{y0\cdot}$, где в первой сумме имеется три слагаемых.

3.6.2. ПОЛЯРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Предложение 3.29. Пусть разложение левосторонней вращательной составляющей c_s^{00} к-деформатора $D_d^{00} \in \mathbf{GD}_{ty}^{\mu}(\mathbf{R3})$ на простейшие сомножители-вращения имеет вид (3.83)

$$c_s^{00} = c_1(\theta_1^{y0}) c_2(\theta_2^{y0}) c_3(\theta_3^{y0}), \qquad (3.106)$$

где θ_i^{y0} — углы простейших поворотов во вращательной составляющей c_s^{00} к-деформатора $D_d^{00} \in \mathbf{GM}_{yt}^{\mu}(\mathbf{R{,}3})$.

Тогда: 1. Разложение скорости деформирования среды $\Delta v_x^{00} = v_x^{00} - v_y^{00}$ в ε_y, окрестности точки $y \in D_3^{\mu}$, имеет вид

$$\Delta v_x^{00} = \Sigma_i w_i^{y0} \theta_i^{y0\cdot} + \Sigma_{ij} c_s^{00} (v_{ij}^{ys} - v_{ji}^{ys}) c_s^{00,T} q_{ij}^{ys\cdot} +$$
$$+ \Sigma_\iota c_s^{00} v_i^{ys} c_s^{00,T} q_i^{ys\cdot}. \qquad (3.107)$$

Коэффициенты w_i^{y0} в разложении (3.107) имеют вид

$$w_i^{y0} = \langle e_1^0 \rangle h_y^0, \; w_2^{y0} = c_1(\theta_1^{y0}) \langle e_2^0 \rangle c_1^T(\theta_1^{y0}) h_y^0,$$
$$w_2^{y0} = c_1(\theta_1^{y0}) c_2(\theta_2^{y0}) \langle e_2^0 \rangle c_2^T(\theta_2^{y0}) c_1^T(\theta_1^{y0}) h_y^0. \qquad (3.108)$$

Доказательство. $D_d^{00\cdot} (D_d^{00})^{-1} = (c_s^{00} s_d^{ss}) \cdot (c_s^{00} s_d^{ss})^{-1} = c_s^{00\cdot} c_s^{00,T} + c_s^{00} s_d^{ss\cdot} (s_d^{ss})^{-1} c_s^{00,T}$. Осталось воспользоваться результатами (5.7) и (5.31).□

3.6.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ НЕСЖИМАЕМОСТЬ СРЕДЫ

Определение 3.16. Локально линейно изменяемая среда называется *геометрически несжимаемой в точке* $y \in \mathrm{E}_y$, *если группа к-деформаторов* $\mathbf{GD}^d_{yt}(\mathbf{R},3)$ *на* E_y *совпадает со своей специальной подгруппой*

$$\mathbf{GD}^d_{yt}(\mathbf{R},3) \equiv \mathbf{SD}^d_{yt}(\mathbf{R},3) = \{D^{00}_y : \det D^{00}_y = 1\}. \qquad (3.109)$$

Предложение 3.30. Для того чтобы среда была геометрически несжимаемой, достаточно чтобы было выполнено одно из двух условий:

1. Параметры дилатаций (3.42) равны единице

$$q^{y0}_i = 1, i = 1, 2,3; \qquad (3.110)$$

2. Определитель дилататора (3.43) равен единице:

$$\det d^{00}_y = \Pi_i q^{y0}_i = 1. \qquad (3.111)$$

Доказательство. Пусть $\det D^{00}_y = 1$, откуда следует, что $\det d^{00}_y = 1$, так как при любом тождественном разложении к-деформатора (3.50), (3.61), (§3.5) определители остальных сомножителей (трансвекций, вращений и произведений ортогональных преобразований) равны единице. Но если $\det d^{00}_y = 1$, то $\det d^{00}_y = \Pi_i q^{y0}_i = 1$, в частности $q^{y0}_i = 1$, $i = 1, 2, 3.$□

Предложение 3.31. Пусть среда ε_y геометрически несжимаема.

Тогда: 1. Мера Лебега на σ-алгебре $\mathfrak{B}^{\mu}_3$ инвариантна относительно группы к-деформаторов $\mathbf{SD}^d_{yt}(\mathbf{R}, 3)$;

2. Дивергенция вектора скорости среды равна нулю:

$$\mathrm{div}_0 v^{00}_y = 0. \qquad (3.112)$$

4. ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕНЯЕМОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СРЕДЫ

4.1. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СРЕДЫ

Определение 4.1. Пусть: 1. $dz_y^{00} / dy^{00} \equiv \{\partial z_i^0 / \partial y_j^0\} \equiv \{z_j^i\}$, $i, j = 1, 2, 3$ — производная вектора перемещения z_y^0 локально изменяемой среды в точке $y \in \mathrm{E}_y$ по радиус-вектору y^0 этой точки в базисе $[e^0]$ инерциальной системы координат в момент времени $t \in T$ (3.14), (3.17) (матрица деформаций среды в точке $y \in \mathrm{E}_y$ при условии (3.23));

2. $(dz_y^{00} / dy^{00})^{\cdot} = \{z_j^i\}^{\cdot} = \Delta_y^{0\cdot}(t) = dv_y^{00} / dy^{00}$ — скорость изменения производной dz_y^{00} / dy^{00}, совпадающая с (3×3)-матрицей скоростей деформаций $\Delta_y^{0\cdot}$ и производной $dv_y^{00} / dy^{00} = \{v_j^i\}$ локально изменяемой среды в точке $y \in \mathrm{E}_y$ в базисе $[e^0]$ инерциальной системы координат в момент времени $t \in T$ (3.14), (3.17);

3. Z_y^0 — (9×1)-столбец, составленный из столбцов матрицы $dz_y^{00} / dy^{00} \equiv \{z_j^i\}$ (столбец деформаций среды при условии (3.16))

$$Z_y^0 = \mathrm{col}\{z_1^1, z_1^2, z_1^3, z_2^1, \dots, z_3^3\}; \tag{4.1}$$

4. V_y^0 — (9×1)-столбец, составленный из j-столбцов $v_{jy}^0 = \mathrm{col}\{v_j^1,\ v_j^2,\ v_j^3\}$ матрицы $dv_y^{00} / dy^{00} = \| v_{1y}^0 \mid v_{2y}^0 \mid v_{3y}^0 \|$, $Z_y^{0\cdot} = V_y^0$ (3.17):

$$V_y^0 = \mathrm{col}\{v_1^1, v_1^2, v_1^3, v_2^1, \dots, v_3^3\}; \tag{4.2}$$

5. (T_y^0) — (9×1)-столбец, составленный из i-столбцов $T_{iy}^0 = \mathrm{col}\{T_{i1}^0, T_{i2}^0, T_{i3}^0\}$ (2.43) д-деформатора $T_y^0 = \| T_{1y}^0 \mid T_{2y}^0 \mid T_{3y}^0 \|$ в

точке $y \in \varepsilon_y$ в базисе $[e^0]$ инерциальной системы координат E_0 в момент времени $t \in T$:

$$T_y^0 = \begin{Vmatrix} T_{11}^0 & T_{21}^0 & T_{31}^0 \\ T_{12}^0 & T_{22}^0 & T_{32}^0 \\ T_{13}^0 & T_{23}^0 & T_{33}^0 \end{Vmatrix}, \tag{4.3}$$

$$(T_y^0) = \mathrm{col}\,\{T_{11}^0, T_{12}^0, T_{13}^0, \dots, T_{33}^0\}; \tag{4.4}$$

6. $\chi_y^0(Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, p_{yt}, \theta_{yt}) = \mathrm{col}\{\nu_y^0(p_{yt}), \varphi_y^0(Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \theta_{yt})\}$ — столбец числовых функций, зависящих или только от давления Паскаля $p_y = p_{yt}$ (столбец $\nu_y^0(p_{yt})$) или от элементов столбца Z_y^0, их скоростей $Z_y^{0\cdot}$, координат точки $y \in \varepsilon_y$ в базисе $[e^0]$ инерциальной системы координат и температуры θ_{yt} (столбец $\varphi_y^0(Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \theta_{yt})$);

7. $F_y^0((T_y^0), Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \chi_y^0)$ — (9×1)-столбец скалярных функций элементов столбцов $(T_y^0), Z_y^0, Z_y^{0\cdot}$, элементов столбца $\chi_y^0(Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \theta_{yt})$ и координат точки $y \in \varepsilon_y$ в базисе $[e^0]$ инерциальной системы координат, отвечающая следующим требованиям:

7.1. Вид функций из F_y^0 не меняется при переходе к новой инерциальной системе координат $E_f = (o_f, [e^f])$:

$$F_y^f((T_y^f), Z_y^f, Z_y^{f\cdot}, \chi_y^f); \tag{4.5}$$

7.2. Входящие в функции F_y^0 числовые коэффициенты (элементы столбца $\chi_y^0(Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, p_{yt}, \theta_{yt})$) не меняются при переходе к новой инерциальной системе координат $E_f = (o_f, [e^f])$:

$$\begin{aligned} \chi_y^0(Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, p_{yt}, \theta_{yt}) &= \chi_y^f(Z_y^f, Z_y^{f\cdot}, p_{yt}, \theta_{yt}) = \\ &= \chi_y(Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, p_{yt}, \theta_{yt}); \end{aligned} \tag{4.6}$$

7.3. Все функции из F_y^0 дифференцируемы по всем аргументам;

7.4. Система скалярных уравнений $F_y^0 = 0$ *однозначно разрешима* относительно элементов каждого из столбцов (T_y^0), Z_y^0, $Z_y^{0\cdot}$ в любой точке $y \in \varepsilon_y$, в любой момент времени $t \in T$.

Тогда: 1. Уравнения вида

$$F_y^0((T_y^0), Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \chi_y^0) = 0, \qquad (4.7)$$

а также эквивалентные им (при условии п. 7.4) явные функции вида

$$(T_y^0) = F_1^0(Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \chi_y^0), Z_y^0 = F_2^0((T_y^0), Z_y^{0\cdot}, \chi_y^0), \qquad (4.8)$$

$$Z_y^{0\cdot} = F_3^0((T_y^0), Z_y^0, \chi_y^0) \qquad (4.9)$$

при условии существования и единственности решения дифференциального уравнения (4.9), называются *корректными уравнениями механического состояния локально изменяемой непрерывной среды.*

2. Множество сред, имеющих одинаковые уравнения механического состояния, называются *классом сред, порожденным этими уравнениями.*

3. Множество сред, имеющих одинаковые уравнения механического состояния частного вида (в отношении указанных в п. 2), называются *подклассом сред, порожденных этими уравнениями.*

Комментарии: 1. Физически требование (7.4) означает возможность практического создания одной группы параметров реальной среды (например, напряжений), обеспечивающих однозначную физическую реализацию другой группы параметров (например, деформаций или их скоростей).

2. Уравнения механического состояния среды (4.7) никак не связаны с формой записи (скалярная, матричная и т. п.) и, следовательно, свободны от каких-либо связываемых с этой формой записи субъективных понятий типа «касательные», «нормальные», «тензор напряжений», «тензор деформаций», симметричность и т. п. [16, 38, 46]. Уравнения состояния здесь (4.7) — связь напряжений, деформаций и их скоростей с температурой, давлением Паскаля и реологическими характеристиками среды, отвечающая требованиям (7.1)—(7.4).

3. Традиционно обсуждаемое понятие изотропности среды [16, 38, 46] здесь в качестве самостоятельного свойства не возни-

кает, так как это свойство не среды, а свойство Вселенной механики Галилея (§ 2.4.1), которое в свою очередь является следствием определения механика Галилея как инварианта обобщенной группы Галилея (**О.2.20**). Средствами механики Галилея могут изучаться только изотропные локально деформируемые среды. Поэтому в дальнейшем термин «изотропная» использоваться не будет, но по вышеуказанным причинам наличие этого свойства у среды будет всегда предполагаться (по умолчанию).

Определение 4.2. Пусть в предыдущем определении не выполнено хотя бы одно из условий (4.8), (4.9), т. е. уравнения (4.7) не имеют или имеют бесконечно много решений относительно какой-либо группы переменных.

Тогда: 1. Уравнения (4.7) называются *некорректными уравнениями механического состояния среды.*

2. Среда, имеющая некорректные уравнения механического состояния, называется *некорректной средой.*

Определение 4.3. Пусть вид функции (4.5) и величина входящих в нее числовых коэффициентов φ_y^0 не зависят от точки $y \in \varepsilon_y$:

$$F_y^0((T_y^0), Z_y^0), Z_y^{0\cdot}, \nu_y^0, \varphi_y^0) = F^0((T_y^0), Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \nu_y^0, \varphi^0). \quad (4.10)$$

Тогда: 1. Уравнения механического состояния (4.7) называются *однородными.*

2. Среда, имеющая однородные уравнения механического состояния, называется *однородной.*

Комментарии: 1. Пока не понятно, имеют ли право на существование некорректные уравнения механического состояния [45]. В дальнейшем, например, будет показано, что уравнения механического состояния Навье—Стокса и Лямэ некорректны.

2. Понятие однородности среды (независимость числовых коэффициентов $\varphi_y^0(Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \theta_{yt})$ от точки $y \in \varepsilon_y$ (**О.4.1**)) не следует путать со свойством однородности Вселенной механики Галилея (**О.2.21**), (**П.2.6**).

Определение 4.4. Уравнения механического состояния, связывающие не элементы столбцов, а соответствующие матрицы при наличии остальных свойств:

$$F_y^0(T_y^0, dz_y^{00} / dy^{00}, (dz_y^{00} / dy^{00})^{\cdot}, \chi_y^0) = 0 \qquad (4.11)$$

или эквивалентные им явные матричные функции матричных и скалярных аргументов:

$$T_y^0 = F_1^0(dz_y^{00} / dy^{00}, (dz_y^{00} / dy^{00})^{\cdot}, \chi_y^0), \qquad (4.12)$$

$$dz_y^{00} / dy^{00} = F_2^0(T_y^0, (dz_y^{00} / dy^{00})^{\cdot}, \chi_y^0), \qquad (4.13)$$

$$(dz_y^{00} / dy^{00})^{\cdot} = F_3^0(T_y^0, dz_y^{00} / dy^{00}, \chi_y^0) \qquad (4.14)$$

при существовании и единственности решения матричного дифференциального уравнения (4.14), называются *определяющими соотношениями среды*.

Комментарии: 1. Требования инвариантности формы записи уравнений и входящих в них числовых коэффициентов относительно перехода к другой инерциальной системе координат диктуются общим определением механики Галилея как инварианта обобщенной группы Галилея (**О.2.20**).

2. Определяющие соотношения, по определению матричной функции матричного аргумента [9], всегда имеют вид полинома. Например, при одном матричном аргументе в трехмерном случае для (4.12) имеем

$$T_y^0 = F_1^0(du_y^{00} / dy^{00}, \chi_y^0) =$$
$$= \chi_0^0(I)E + \chi_1^0(I)\, du_y^{00} / dy^{00} + \chi_2^0(I)(du_y^{00} / dy^{00})^2, \qquad (4.15)$$

где $\chi_0^0(I)$, $\chi_1^0(I)$ и $\chi_2^0(I)$ — скалярные функции инвариантов $I = (I_1, I_2, I_3)$ матрицы du_y^{00} / dy^{00}, $u_y^{00} \equiv v_y^{00}$ или $u_y^{00} = z_y^{00}$. Понятие «уравнения механического состояния» среды шире понятия «определяющие соотношения»: если существуют последние, то существуют и первые, но не наоборот.

3. В уравнения движения локально изменяемой среды (2.65) входит не д-деформатор T_y^0, а его элементы, т. е. элементы столбца (T_y^0). Поэтому представление связи элементов д-деформатора T_y^0 с элементами матриц dz_y^{00} / dy^{00}, $(dz_y^{00} / dy^{00})^{\cdot}$ в виде определяющих соотношений, имеющих только одну форму представления (4.15), существенно сужает множество возможных математических моделей деформации среды и, следовательно, возможных классов деформируемых сред.

4. В целях сокращения письма слова «в момент времени $t \in T$ в точке $y \in \varepsilon_y$» в дальнейшем опускаются, но всегда имеются в виду, если не оговорено обратное.

5. Таким образом, движение локально изменяемой непрерывной среды может корректно исследоваться средствами галилеевой механики, если:

5.1. Форма уравнения движения (2.65) среды инварианта относительно выбора инерциальной системы координат;

5.2. Форма уравнения механического состояния (4.7) среды инварианта относительно выбора инерциальной системы координат;

5.3. Числовые значения коэффициентов χ^0, входящих в уравнения механического состояния (4.6) среды, инварианты относительно выбора инерциальной системы координат;

5.4. Выполнены условия разрешимости уравнений механического состояния (4.8), (4.9) относительно любой группы переменных.

Определение 4.5. Пусть: 1. Уравнения движения локально изменяемой среды имеют вид (2.65)

$$- \rho_y v_y^{00\cdot} + \rho_y g_t^0(\neg y, y) + \mathrm{Div}_0 T_y^0 = 0; \qquad (4.16)$$

2. Уравнения механического состояния локально изменяемой среды имеют вид

$$F_y^0((T_y^0), Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \chi_y^0) = 0. \qquad (4.17)$$

Тогда: 1. Система уравнений

$$-\rho_y v_y^{00\cdot} + \rho_y g_t^0(\neg y, y) + \mathrm{Div}_0 T_y^0 = 0,$$

$$F_y^0((T_y^0), Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \chi_y^0 = 0 \qquad (4.18)$$

называется *динамическими уравнениями механического состояния среды.*

2. Результат совместного решения системы уравнений (4.18) относительно одной из групп переменных называемых *уравнениями динамики среды.*

3. Система уравнений (при $v_y^{00} \equiv 0$, $g_{yt}^0(\neg y, y) = g_y^0(\neg y, y)$, $p_{yt} = p_y$, $\theta_{yt} = \theta_y$)

$$\rho_y g_y^0(\neg y, y) + \mathrm{Div}_0 T_y^0 = 0, \tag{4.19}$$

$$F_y^0((T_y^0), Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \chi_y^0) = 0 \tag{4.20}$$

называется *статическими уравнениями механического состояния среды.*

4. Результат совместного решения системы уравнений (4.19) и (4.20) относительно одной из групп переменных называется *уравнениями статики среды.*

5. Решения статических уравнений механического состояния (4.20) относительно столбца Z_y^0:

$$Z_y^0 = F_2^0((T_y^0), \chi_y^0) \tag{4.21}$$

называются *уравнениями напряженного состояния среды.*

Комментарии: 1. Необходимо осознавать, что уравнения движения среды (4.16) являются прямым следствием (с учетом (2.26)) первичного свойства Вселенной механики Галилея (2.23), (2.62) и в этом смысле в условиях принятой аксиоматики являются «законом природы». Уравнения механического состояния (4.7) являются математическими формулировками, во-первых, всего лишь наших гипотез о свойствах среды и, во-вторых, только о свойствах среды, а не о свойствах Вселенной. Поэтому ни уравнения механического состояния, ни получаемые с их использованием уравнения динамики среды (как результат совместного решения с уравнениями движения) ни в каком смысле не являются «законами природы» и, следовательно, не обязаны быть эквивалентными для различных вышеуказанных гипотез.

2. Формулировка задач динамики (4.18) и статики среды в виде двух уравнений (4.19) и их совместное численное интегри-

рование без предварительного преобразования к одному уравнению динамики или статики имеют гораздо большие возможности, так как вышеуказанная операция состоятельна лишь в случае разрешимости уравнений механического состояния относительно одной из групп переменных (например, столбца напряжений (T_y^0) или столбца U_y^0).

Определение 4.6. Множества (классы, подклассы) сред, имеющих одинаковые уравнения динамики (статики), называются *динамически (статически) эквивалентными.*

4.2. КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СРЕД

Определение 4.7. Пусть: 1. Функции $F_i^0 = F_i^0(T_y^0, Z_y^0, Z_y^{0\cdot}, \chi_y^0)$ являются линейными комбинациями (но не линейными функциями !) вида

$$
\begin{aligned}
F_1^0 &= T_{11}^0 - \nu_1^{0y} - \lambda_1^{0y}(Y_1, \theta_{yt}) - \mu_{1111}^{0y}(I, \theta_{yt})u_1^1 - \ldots \\
&\qquad \ldots - \mu_{1133}^{0y}(I, \theta_{yt})u_3^3, \\
F_2^0 &= T_{12}^0 - \nu_2^{0y} - \lambda_2^{0y}(I_1, \theta_{yt}) - \mu_{1211}^{0y}(I, \theta_{yt})u_1^1 - \ldots \\
&\qquad \ldots - \mu_{1233}^{0y}(I, \theta_{yt})u_3^3, \qquad (4.22) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_9^0 &= T_{33}^0 - \nu_9^{0y} - \lambda_9^{0y}(I_1, \theta_{yt}) - \mu_{3311}^{0y}(I, \theta_{yt})u_1^1 - \ldots \\
&\qquad \ldots - \mu_{3333}^{0y}(I, \theta_{yt})u_3^3
\end{aligned}
$$

или в векторной записи

$$F^0 = (T_y^0) - \nu_y^0 - \Lambda_y^0(I_1, \theta_{yt}) - M_y^0(I, \theta_{yt})U_y^0, \qquad (4.23)$$

где $\lambda_i^{0y}(I, \theta_{yt})$, $i = 1, 9$ — скалярные линейные функции первого инварианта

$$I_1 = \mathrm{div}_0 u_y^{00}$$

матрицы du_y^{00} / dy^{00} и температуры θ_{yt}, зависящей в свою очередь от точки и времени;

2. (9×1)-столбцы ν_y^0, $\Lambda_y^0(I_1, \theta_{yt})$ имеют вид

$$\nu_y^0 = -(w) = -w\,\mathrm{col}\{1, 0, 0\ , 0\ , 1, 0, 0, 0, 1\}, \qquad (4.24)$$

$$\Lambda_y^0(I_1, \theta_{yt}) = \lambda_y \mathrm{col}\{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1\}; \qquad (4.25)$$

3. $M_y^0(I, \theta_{yt})$ — (9×9)-матрица с независимыми и зависящими от λ_y элементами $\mu_{lkij}^{0y}(I, \theta_{yt})$, $i, j, l, k = 1, 2, 3$, являющимися функциями точки $y \in \varepsilon_y$, инвариантов матрицы du_y^{00} / dy^{00}, температуры среды θ_{yt} и учитывающими вклад (ij)-элементов u_j^i этой матрицы (столбца U_y^0) в (lk)-элементы T_{lk}^0 д-деформатора T_y^0, такая что:

3.1. Существует группа $\mathbf{M}_{yt}$ $(\mathbf{R,9})$, элементом которой эта матрица является:

$$M_y^0(I, \theta_{yt}) \in \mathbf{M}_{yt}(\mathbf{R,9}), \qquad (4.26)$$

3.2. Группа вращений $\mathbf{SO}$ $(\mathbf{R,9})$ (4.46) является централизатором группы $\mathbf{M}_{yt}$ $(\mathbf{R,9})$ (сопряжение $C_f^{0,T}(\,\cdot\,)C_f^0$ оставляет группу $\mathbf{M}_{yt}$ $(\mathbf{R,9})$ на месте поэлементно):

$$C_f^{0,T} M_y^0(I, \theta_{yt}) C_f^0 = M_y^0(I, \theta_{yt}) \qquad (4.27)$$

для любых матриц $C_f^0 \in \mathbf{SO}$ $(\mathbf{R,9})$, $M_y^0(I, \theta_{yt}) \in \mathbf{M}_{yt}(\mathbf{R,9})$;

4. Уравнение

$$\Lambda_y^0(I_1, \theta_{yt}) + M_y^0(I, \theta_{yt}) U_y^0 = (T_y^0) + (w) \equiv (\tau_y^0), \qquad (4.28)$$

где (τ_y^0) — столбец напряжений, имеет единственное решение

$$U_y^0 = F_3^0(\tau_y^0). \qquad (4.29)$$

Тогда: 1. Уравнение

$$(T_y^0) = -(w) + \Lambda_y^0(I_1, \theta_{yt}) + M_y^0(I, \theta_{yt}) U_y^0 \qquad (4.30)$$

называется *квазилинейным уравнением механического состояния локально изменяемой среды, порожденным группой* $\mathbf{M}_{yt}$ $(\mathbf{R,9})$.

2. Класс сред, имеющих уравнения механического состояния вида (4.30), называется М-*классом эквивалентности (в дальнейшем* — М-*классом) корректных квазилинейных сред, порожденных группой* $\mathbf{M}_{yt}$ (**R,9**).

3. Если $w = p_{yt}$ — давление Паскаля, $U = V$, то среда называется *корректной квазилинейной вязкой жидкостью*, а числовые функции $\lambda_y^0(I_1, \theta_{yt})$ и элементы матрицы $M_y^0(I, \theta_{yt})$ — *коэффициентами вязкости* М-*жидкости первого и второго типов* соответственно.

4. Если $w = 0$, $U = Z$, то среда называется *корректным квазилинейным упругим материалом*, а числовые функции $\lambda_y^0(I_1, \theta_{yt})$ и элементы матрицы $M_y^0(I, \theta_{yt})$ — *коэффициентами жесткости* М-*материала первого и второго типов* соответственно.

5. Числовые функции $\lambda_y^0(I_1, \theta_{yt})$ и элементы матрицы $M_y^0(I, \theta_{yt})$ называются *реологическими коэффициентами* М-*среды первого и второго типов* соответственно.

Комментарии: 1. Вид столбцов (w), $\Lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ (4.24), (4.25) обеспечивает независимость формы записи равенства (4.30) и реологических коэффициентов $\lambda_y^0(I_1, \theta_{yt})$, $\mu_{lkij}^{0y}(I, \theta_{yt})$ уравнений от выбора инерциального базиса (4.5).

2. Требование (4.27) эквивалентно требованию независимости реологических коэффициентов второго типа от выбора инерциального базиса.

3. Требование (4.26) является необходимым для выполнения условия (4.29), при $\Lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \equiv (0)$ это условие является и достаточным.

4. Определяющим для термина «квазилинейные» в отношении рассматриваемых уравнений механического состояния среды является вид функций $F(.,.,.)$, включающих в себя в качестве второго слагаемого линейную функцию (по договоренности) линейного аргумента $\mathrm{div}_0 u_y^{00}$ и третьего слагаемого — только линейные комбинации элементов столбца U_y^0 с коэффициентами, зависящими от инвариантов матрицы du_y^{00} / dy^{00}, координат точки y, параметра w и температуры. По этой причине из факта использования линейных комбинаций элементов столбца U_y^0 не следует линейности функций $F(.,.,.)$.

5. Термин «линейные» в дальнейшем используется для уравнений механического состояния среды, реологические коэффициенты которой не зависят от инвариантов матрицы du_y^{00} / dy^{00}, что превращает функции $F(.,.,.)$ уравнений (4.23) в действительно линейные.

6. Попытки похожих представлений уравнений механического состояния уже делались, например в [46]. После использования ниоткуда не следующих требований симметрии «тензоров» напряжений и деформаций (или их скоростей) все преимущества равенств исчезают. Последующие ни физически, ни математически не обоснованные переобозначения независимых (по определению) элементов матрицы (типа $A^{iiii} = 2\mu + \lambda$, $A^{iikk} = \lambda$) [38, 46] превращают их в зависимые ($A^{iiii} = 2\lambda + A^{iikk}$) и как следствие саму матрицу — в особенную, а уравнения — в некорректные (см. раздел 4.7).

4.3. УСЛОВИЯ СПЛОШНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ СРЕД

Определение 4.8. Пусть: 1. Среда является жидкостью;

2. Условие инерционной сбалансированности среды в точке $y \in \varepsilon_y$ имеет вид (2.46), (2.68)

$$\rho^{\cdot}_y + \rho_y \mathrm{div}_0 v_y^{00} = 0. \qquad (4.31)$$

Тогда равенство (4.31) называется *условием сплошности (неразрывности) жидкости.*

Предложение 4.32. Пусть: 1. Непрерывная среда является упругим материалом (4.1);

2. Вектор скорости v_y^{00} упругого материала является непрерывной функцией точки $y \in \varepsilon_y$ (4.2).

Тогда: 1. Условие инерционной сбалансированности упругого материала в точке $y \in \varepsilon_y$ с учетом (3.14) имеет вид

$$\rho^{\cdot}_y + \rho_y \mathrm{div}_0 z_y^{00\cdot} = 0. \qquad (4.32)$$

2. Уравнение (4.32) называется *уравнением сплошности (неразрывности) упругого материала в точке $y \in \varepsilon_y$.*

Доказательство. Равенство $(dz_y^{00} / dy^{00})^{\cdot} = dv_y^{00} / dy^{00}$ с учетом (3.16) имеет вид $(dz_y^{00} / dy^{00})^{\cdot} = dz_y^{00\cdot} / dy^{00}$ или в поэлементной форме записи $z_j^{i\cdot} = z_j^{\cdot\, i}$. Следовательно, $\mathrm{div}_0 z_y^{00\cdot} = \partial z_{y1}^{0\cdot} / \partial y_1^0 + \partial z_{y2}^{0\cdot} / \partial y_2^0 + \partial z_{y3}^{0\cdot} / \partial y_3^0 = (\partial z_{y1}^0 / \partial y_1^0)^{\cdot} + (\partial z_{y2}^0 / \partial y_2^0)^{\cdot} + (\partial z_{y3}^0 / \partial y_3^0)^{\cdot} = (\mathrm{div}_0 s_y^{00})^{\cdot}$.□

Предложение 4.33. Пусть среда несжимаема

$$\rho_y = \mathrm{const}. \qquad (4.33)$$

Тогда: 1. Условие сплошности жидкости совпадает с условием геометрической несжимаемости среды (3.112) и имеет вид

$$\mathrm{div}_0 v_y^{00} = 0. \qquad (4.34)$$

2. Условие сплошности упругого материала имеет вид

$$\mathrm{div}_0 z_y^{00} = \mathrm{const}. \qquad (4.35)$$

3. В условиях (3.22) $z_y^{00}(0) = 0 \to \mathrm{div}_0 z_y^{00}(0) = 0 \to$ для любого t

$$\mathrm{div}_0 z_y^{00}(t) = 0. \qquad (4.36)$$

Комментарий: 1. Здесь, как и при формулировании оснований теории, определяющую роль играют предположения (3.16). В случае невыполнения этих условий (нарушение сплошности материала, армирование материала, наличие изолированных включений, трещин, сколов и т. п.) вопрос требует отдельного исследования.

2. В рассматриваемом варианте математического формализма механики Галилея понятия «непрерывность» и «сплошность» среды не эквивалентны: первое означает существование плотностей у всех скалярных и векторных мер механики относительно меры Лебега, второе — инвариантность скалярной меры инерции (инерционной массы) среды относительно времени (инерционная сбалансированность) при существовании ее плотности. Если среда в точке геометрически несжимаема, то она в этой точке является сплошной, но не наоборот. В данной монографии

непрерывность, инерционная сбалансированность среды и, следовательно, ее сплошность (неразрывность) (2.46) постулируются (аксиомы **D.2** и **D.9**).

3. Равенства (4.35) и (4.36) являются математически и физически содержательными условиями сплошности упругого материала, ничего общего не имеющими с равенствами Сен-Венана [38], претендующими на ту же роль. На самом деле эти равенства, как и условия Коши—Гельмгольца, являются тождествами, связывающими среднеарифметические $\gamma_{ij} = (z^i_j + z^j_i)/2$ симметричных элементов матрицы dz^{00}_y / dy^{00} с самими элементами при условии равенства вторых смешанных производных $z^i_{jk} = z^i_{kj}$.

4.4. ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

4.4.1. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ И ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Предложение 4.34. На трехмерном аффинно-векторном пространстве аффинная группа $\mathbf{AG}_{yt}(\mathbf{R},\ 3)$ (**0.2.4**) является произведением группы параллельных переносов плоскости $\mathbf{T}_{yt}(\mathbf{R},\ 3)$ и группы к-деформаторов $\mathbf{GD}^q_{yt}$ (**R**, **3**) (2.9).

Начнем с выяснения вопроса в общем случае о виде группы вращений **SO** (**R**, **9**) девятимерного векторного пространства столбцов (T^0_y) и V^0_y (4.2), индуцированной в этом пространстве вращением $c^0_f \in \mathbf{SO}$ (**R**, **3**) в пространстве движения жидкости V_3 при переходе к базису новой инерциальной системы координат.

Предложение 4.35. Пусть: 1. V^0_y — (9 × 1)-столбец, составленный из (3 × 1)-столбцов $v^0_{iy} = \mathrm{col}\ \{\ v^1_i,\ v^2_i,\ v^3_i\ \}$ матрицы скоростей деформаций среды dv^{00}_y / dy^{00} (4.2) в точке $y \in \varepsilon_y$, где, как и раньше, $v^i_j \equiv dv^0_{yi} / dy^0_j$:

$$V^0_y = \mathrm{col}\ \{\ v^1_1, v^2_1, v^3_1, v^1_2, v^2_2, v^3_2, v^1_3, v^2_3, v^3_3\ \}; \qquad (4.37)$$

2. $[e^f]$ — базис произвольной инерциальной системы координат E_f, $c^0_f \in \mathbf{SO}(\mathbf{R},\ 3)$ — простейшая матрица вращения R_3 (для определенности $c^0_f = c_3(\theta_6)$), такая что $[e^f] = [e^0]c^0_f$ [10, 11, 43], (5.6);

$$c_3(\theta_6) = E + s\theta_6 \langle e_3^0 \rangle + (1 - c\theta_6) \langle e_3^0 \rangle^2; \qquad (4.38)$$

3. C_{f3}^0 — (9×9)-матрица перехода к новому базису в R_9, индуцированная вращением $c_f^0 \in \mathbf{SO}$ $(\mathbf{R},\ 3)$, такая что

$$V_y^0 = C_{f3}^0 V_y^f. \qquad (4.39)$$

Тогда: 1. Матрица C_{f3}^0 имеет блочную структуру

$$C_{f3}^0 = \begin{Vmatrix} k_1 & -k_2 & 0 \\ k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_f^0 \end{Vmatrix}, \qquad (4.40)$$

где k_1, k_2 — трехмерные подобия $k_1^T k_1 = c^2\theta_6 E$, $k_2^T k_2 = s^2\theta_6 E$ [11]:

$$k_1 = c\theta_6 c_f^0,\ k_2 = s\theta_6 c_f^0. \qquad (4.41)$$

2. Матрица $C_{f3}^0 \in \mathbf{SO}^3$ $(\mathbf{R},\ 3 \times 3 \times 3)$, т. е. при блочной форме записи, является матрицей вращения $R_{3\times3\times3} = R_3 \times R_3 \times R_3$.

Доказательство. Доказываемый результат следует из стандартной формулы для преобразования матриц при переходе к новому базису $dv_y^{00} / dy^{00} = C_3(\theta_6) dv_y^{0f} / dy^{0f} C_3^T(\theta_6)$ с последующей проверкой равенств $C_{f3}^0 C_{f3}^{0,T} = E$, $\det C_{f3}^0 = 1$. □

Комментарий. Аналогично доказывается, что если простейшие матрицы вращения R_3 имеют вид (5.6)

$$c_2(\theta_5) = E + s\theta_5 \langle e_2^0 \rangle + (1 - c\theta_5) \langle e_2^0 \rangle^2, \qquad (4.42)$$

$$c_1(\theta_4) = E + s\theta_4 \langle e_1^0 \rangle + (1 - c\theta_4) \langle e_1^0 \rangle^2, \qquad (4.43)$$

то соответственно для $C_{f2}^0 \in \mathbf{SO}^2$ $(\mathbf{R},\ 3 \times 3 \times 3)$ и $C_{f1}^0 \in \mathbf{SO}^1$ $(\mathbf{R},\ 3 \times 3 \times 3)$ получается

$$C_{f2}^0 = \begin{Vmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & c_f^0 & 0 \\ -p_2 & 0 & p_1 \end{Vmatrix}, \quad C_{f1}^0 = \begin{Vmatrix} c_f^0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & -d_2 \\ 0 & d_2 & d_1 \end{Vmatrix}. \qquad (4.44)$$

Предложение 4.36. Пусть: 1. $(\nu_y^0) = \mathrm{col}\ \{\ \nu_1^{0y}, \nu_2^{0y}, \ldots, \nu_9^{0y}\}$ — (9×1)-столбец функций ν_i^{0y}, $i = 1, 2, \ldots, 9$, зависящих от точки $y \in \varepsilon_y$ и времени $t \in T$;

2. Гипотеза: уравнения механического состояния среды (4.7) имеют вид

$$F^0 = (T_y^0) - (\nu_y^0) = 0; \tag{4.45}$$

3. Матрица вращения $C_f^0 \in \mathbf{SO}\ (\mathbf{R},\ 3 \times 3 \times 3) = \mathbf{SO}^1\ (\mathbf{R},\ 3 \times 3 \times 3) \cdot \mathbf{SO}^2\ (\mathbf{R},\ 3 \times 3 \times 3)\mathbf{SO}^3\ (\mathbf{R},\ 3 \times 3 \times 3)$ имеет вид

$$C_f^0 = C_{f1}^0 C_{f2}^0 C_{f3}^0. \tag{4.46}$$

Тогда: 1. Столбец (ν_y^0) имеет вид

$$(\nu_y^0) \equiv -\, p_{yt}\mathrm{col}\ \{\ 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1\ \}, \tag{4.47}$$

где $p_{yt} \in R_1$.

2. Среда называется *идеальной жидкостью* (I класс).

3. Числовая функция координат и времени $p_{yt} \in R_1$ называется давлением Паскаля.

4. Уравнения движения идеальной жидкости имеют вид

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg\, y, y) - \mathrm{grad}_0\, p_{yt}. \tag{4.48}$$

Доказательство сводится к проверке правильности равенства

$$C_f^0(p_{yt}) = (p_{yt}). \square \tag{4.49}$$

Комментарии: 1. Для двумерной идеальной жидкости группа вращений **SO (R, 4)** четырехмерного векторного пространства столбцов (T_y^0) и U_y^0 (4.2), индуцированная в этом пространстве вращением $c_f^0 \in \mathbf{SO}\ (\mathbf{R},\ 2)$ пространства движения жидкости V_2 при переходе к базису новой инерциальной системы координат состоит из матриц вида

$$C_f^0 = \left\| \begin{matrix} k_1 & -k_2 \\ k_2 & k_1 \end{matrix} \right\|, \tag{4.50}$$

где k_1, k_2 — те же, что и в (4.41) для двумерного случая.

2. Уравнения механического состояния двумерной идеальной жидкости имеют тот же вид (4.48) при условии, что столбец (ν_y^0) имеет четыре координаты

$$(\nu_y^0) \equiv -(p_{yt}) = -p_{yt}\mathrm{col}\,\{1, 0, 0, 1\}, \qquad (4.51)$$

где $p_{yt} \in R_1$ — давление Паскаля.

4.4.2. УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Предложение 4.37. Дифференциальное уравнение термодинамики (2.52) I-класса жидкостей имеет вид

$$\rho_y(du_y(\theta_y) + p_y dw_y) = (\mathrm{div}_0 q_y^0 + \rho_y \varphi_y)dt, \qquad (4.52)$$

где $w_y = \rho_y^{-1}$ — удельный объем жидкости, индекс t здесь и далее опущен.

Доказательство. Согласно (2.25) с учетом (4.55) и (4.51) имеем

$$\rho_y u_y^{\cdot} = (T_y^0)\cdot V_y^0 + \mathrm{div}_0 q_y^0 + \rho_y\varphi_y =$$
$$= -(p_y)\cdot V_y^0 + \mathrm{div}_0 q_y^0 + \rho_y\varphi_y =$$
$$= -p_y \partial v_{y1}^0 / \partial y_1^0 - p_y \partial v_{y2}^0 / \partial y_2^0 - p_y \partial v_{y3}^0 / \partial y_3^0 - \mathrm{div}_0 q_y^0 + \rho_y\varphi_y =$$
$$= -p_y \mathrm{div}_0 v_y^{00} + \mathrm{div}_0 q_y^0 + \rho_y\varphi_y = p_y\rho_y^{-1}\rho_y^{\cdot} + \mathrm{div}_0 q_y^0 + \rho_y\varphi_y =$$
$$= -\rho_y p_y(\rho_y^{-1})^{\cdot} + \mathrm{div}_0 q_y^0 + \rho_y\varphi_y \to \rho_y(u_y^{\cdot} + p_y(\rho_y^{-1})^{\cdot}) =$$
$$= \mathrm{div}_0 q_y^0 + \rho_y\varphi_y. \ \square$$

Комментарии: 1. Дифференциал плотности внутренней энергии относительно меры $m(dy)$ идеальной адиабатической жидкости (при отсутствии теплопереноса $q_y^0 = 0$ и тепловыделения $\varphi_y = 0$) равен элементарной работе сжатия этой жидкости давлением Паскаля со знаком минус:

$$du_y = -p_y dw_y. \qquad (4.53)$$

2. Плотность внутренней энергии относительно меры $m(dy)$ несжимаемой идеальной жидкости ($dw_y = 0$) при тех же условиях постоянна:

$$u_y = \mathrm{const}. \qquad (4.54)$$

4.5. ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ *H*-КЛАССА НЕПРЕРЫВНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СРЕД

4.5.1. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ И УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ

Предложение 4.38. Пусть: 1. **H** (**R**, **9**) — группа гомотетий R_9, $h(\mu) \in$ **H** (**R**, **9**) — (9 × 9)-матрица гомотетия, $h(\mu_y(I, \theta_{yt})) = \mu_y(I, \theta_{yt})E$;

2. Гипотеза: уравнения механического состояния среды в точке $y \in \varepsilon_y$ имеют вид

$$(T_y^0) = -(w) + \Lambda_y(I_1, \theta_{yt}) + h(\mu_y(I, \theta_{yt}))U_y^0, \qquad (4.55)$$

где $(w) = w\,\mathrm{col}\,\{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1\}$, $\Lambda_y(I_1) = \lambda_y \mathrm{col}\,\{1, 0, 0, 0{,}1, 0, 0, 0, 1\}$, $w \in R_1$, $w > 0$, $\lambda_y = \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \in R_1$, $\lambda_y(I_1\theta_{yt}) > 0$, $\mu_y(I, \theta_{yt}) \in R_1$. $\mu_y(I, \theta_{yt}) > 0$, условия (4.5), (4.6), (4.27) выполнены, так как очевидно $C_f^{0,T} h(\mu_y(I, \theta_{yt})C_f^0 = h(\mu_y(I, \theta_{yt}))$.

Тогда: 1. Класс сред называется *H-классом*, а представители класса — *квазилинейными H-средами*.

2. Уравнения механического состояния квазилинейной *H*-среды (4.55) эквивалентны квазилинейной части определяющих соотношений (4.15):

$$T_y^0 = (-w + \lambda_y(I_1, \theta_{yt}))E + \mu_y(I, \theta_{yt})du_y^{00} / dy^{00}. \qquad (4.56)$$

Предложение 4.39. Пусть: 1. $\mathrm{grad}_0 w$ — градиент функции w в точке $y \in \varepsilon_0$ в E_0;

2. $\mathrm{grad}_0 \lambda_y(I_1, \theta_{yt})$, $\mathrm{grad}_0 \mu_y(I, \theta_{yt})$ — градиенты коэффициентов $\lambda_y(I, \theta_{yt})$ и $\mu_y(I, \theta_{yt})$ уравнения (4.55) в точке $y \in \varepsilon_y$ в E_0;

3. $\nabla^2 u_y^{00} = \mathrm{Div}_0\, du_y^{00}/dy^{00} = \mathrm{col}\,\{\mathrm{div}_0 u_{y1}^{00}, \mathrm{div}_0 u_{y2}^{00}, \mathrm{div}_0 u_{y3}^{00}\}$ – (1 × 3)-столбец лапласианов координат вектора u_y^{00} (или, что то же самое, (1 × 3)-столбец дивергенций в E_0 строк u_{y1}^{00}, u_{y2}^{00}, u_{y3}^{00} производной du_y^{00}/dy^{00} в точке $y \in \varepsilon_y$ в E_0).

Тогда уравнение динамики *H*-среды имеет вид

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0 w + \mathrm{grad}_0 \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) +$$
$$+ du_y^{00}/dy^{00} \mathrm{grad}_0\, \mu_y(I, \theta_{yt}) + \mu_y(I, \theta_{yt})\nabla^2 u_y^{00}. \qquad (4.57)$$

Доказательство достигается подстановкой уравнений механического состояния (4.55) в уравнения движения среды (2.65). Так, например, для первого скалярного уравнения в (4.57) получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_0(T^0_{11}, T^0_{21}, T^0_{31}) &= \partial T^0_{11}/\partial y^0_1 + \partial T^0_{21}/\partial y^0_2 + \partial T^0_{31}/\partial y^0_3 = \\ &= -\partial w/\partial y^0_1 + \partial \lambda_y(I_1)/\partial y^0_1 + \\ &+ (u^1_1, u^1_2, u^1_3)(\partial \mu_y(I)/\partial y^0_1, \partial \mu_y(I)/\partial y^0_2, \partial \mu_y(I)/\partial y^0_3)^T + \\ &+ \mu_y(I)(u^1_{11} + u^1_{22} + u^1_{33}). \ \square\end{aligned}$$

Предложение 4.40. Предположим, что реологический коэффициент первого типа $\lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ имеет простейшее представление ($I_1 = \operatorname{div}_0 u^{00}_y$):

$$\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) = \lambda_y(\theta_{yt})I_1 = \lambda_y(\theta_{yt})\operatorname{div}_0 u^{00}_y. \qquad (4.58)$$

Тогда: 1. Уравнение механического состояния H-среды имеет вид

$$(T^{0)}_y = -(w) + W_H(y, I, \theta_{yt})U^0_y. \qquad (4.59)$$

$$W_H(y, I, \theta_{yt}) = \left\| \begin{array}{ccccccccc} \mu+\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \mu+\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \mu+\lambda \end{array} \right\|,$$

$$\det W_H(y, I, \theta_{yt}) = \mu^2(\mu + 3\lambda) \neq 0. \qquad (4.60)$$

2. Множество $\mathbf{W}_H(\mathbf{R}, \mathbf{9})$ матриц $W_H(y, I, \theta_{yt})$ является группой с обратной матрицей вида (4.59), такой что $C^{0,T}_f W^{-1}_H(y, I, \theta_{yt})C^0_f = W^{-1}_H(y, I, \theta_{yt})$, где на местах коэффициентов λ и μ стоят модули α и β.

3. Если среда является вязкой жидкостью, то элементы $\alpha(y, I, \theta_{yt})$ и $\beta(y, I, \theta_{yt})$ матрицы $W_H^{-1}(y, I, \theta_{yt})$ называются *модулями вязкости первого и второго типов* соответственно.

4. Если среда является упругим материалом, то элементы $\alpha(y, I, \theta_{yt})$ и $\beta(y, I, \theta_{yt})$ матрицы $W_H^{-1}(y, I, \theta_{yt})$ называются *модулями упругости первого и второго типов* соответственно.

Функции $\alpha(y, I, \theta_{yt})$ и $\beta(y, I, \theta_{yt})$ называются реологическими модулями Н-среды первого и второго типов.

5. Модули $\alpha(y, I, \theta_{yt})$ и $\beta(y, I, \theta_{yt})$ через коэффициенты λ и μ вычисляются по формулам

$$\alpha(y, I, \theta_{yt}) = -\lambda / \mu(\mu + 3\lambda), \ \beta(y, I, \theta_{yt}) = 1/\mu; \quad (4.61)$$
$$(\alpha + \beta) = (\mu + 2\lambda) / \mu(\mu + 3\lambda).$$

6. Элементы $w_1(I, \theta_{yt}) = \alpha + \beta$, $w_2(I, \theta_{yt}) = \alpha$, $w_3(I, \theta_{yt}) = \beta$ обратной матрицы $W_H^{-1}(I, \theta_{yt})$ называются *коэффициентами влияния* напряжений (τ_y^0) на элементы столбца U_y^0

$$U_y^0 = W_H^{-1}(I, \theta_{yt})(\tau_y^0), \ (\tau_y^0) = (T_y^0) + (w). \qquad (4.62)$$

7. Аналоги модуля Юнга, модуля сдвига и коэффициента Пуассона для W_H-материала, связи их с коэффициентами жесткости и друг с другом имеют вид

$$\begin{gathered} E_{3H}(y, I, \theta_{yt}) = 1/w_1 = \mu(\mu + 3\lambda)/(\mu + 2\lambda), \\ G_{3H}(y, I, \theta_{yt}) = 1/w_3 = \mu, \\ \nu_{3H}(y, I, \theta_{yt}) = -w_2/w_1 = \lambda/(\mu + 2\lambda), \qquad (4.63) \\ E_{3H} = G_{3H}(1 + \nu_{3H}). \\ \lambda_y(\theta_{yt}) = \nu_{3H}G_{3H}/(1 - 2\nu_{3H}), \quad \mu_y(I, \theta_{yt}) = G_{3H}. \end{gathered}$$

8. Векторное уравнение динамики W_H-среды имеет вид

$$\begin{gathered} \rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0 w + \lambda_y(\theta_{yt})\,\mathrm{grad}_0 \mathrm{div}_0\, u_{yt}^{00} + \\ + \mathrm{div}_0 u_y^{00} \mathrm{grad}_0 \lambda_y(\theta_{yt}) + du_y^{00}/dy^{00} \mathrm{grad}_0\, \mu_y(I, \theta_{yt}) + \qquad (4.64) \\ + \mu(I, \theta_{yt}) \nabla^2 u_y^{00}. \end{gathered}$$

Пример. Пусть $\mu = 2$, $\lambda = 3$, тогда $\beta = 0.5$, $\alpha = -0.1364$, $\beta + \alpha = 0.3636$.

Предложение 4.41. Для того чтобы две разные среды принадлежали W_H-классу, необходимо и достаточно, чтобы при одинаковом распределении в ней напряжений

$$(T^0_{ya}) + (w) = (T^0_{yb}) + (w) \qquad (4.65)$$

столбцы U^0_{ya} и U^0_{yb} были линейно связаны матрицей из группы $\mathbf{W_H}$ (**R**, 4) так, что

$$U^0_{ya} = W_{Hab}(y, I, \theta_{yt})\, U^0_{yb},$$

$$W_{Hab} \in \mathbf{W_H}(\mathbf{R}, 4), \quad W_{Hab} = W^{-1}_{H1a} W_{H1b}. \qquad (4.66)$$

Доказательство. Из (4.62) при условии (4.65) получаем $W_{H1a} U^0_{ya} = W_{H1b} U^0_{yb}$, откуда и следует (4.66). □

Комментарии: 1. W_H-среда динамически неэквивалентна никаким средам.

2. Если коэффициенты μ, λ положительны (по определению), то модули α и β могут быть отрицательными.

3. Если H-среда двумерна, то соответствующие характеристики имеют вид

$$(T^0_y) = -(w) + W_H(I, \theta_{yt}) U^0_y. \qquad (4.67)$$

$$W_H(I, \theta_{yt}) = \begin{Vmatrix} \mu+\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \mu+\lambda \end{Vmatrix},$$

$$\det W_H(I, \theta_{yt}) = \mu(\mu + 2\lambda) \neq 0.$$

4. Множество $\mathbf{W_H}$ (**R**, 4) матриц W_H, имеющих структуру (4.67), является группой, причем

$$\beta = I / \mu(I, \theta_{yt}), \; \alpha(I, \theta_{yt}) = -\lambda / \mu(\mu + 2\lambda), \qquad (4.68)$$

$$\alpha + \beta = (\mu + \lambda) / (\mu + 2\lambda).$$

5. Двумерные аналоги модулей Юнга, сдвига и коэффициента Пуассона для W_H-подкласса сред из H-класса имеют вид

$$E_{2H}(y, I, \theta_{yt}) = 1 / w_1,\ G_{2H}(y, I, \theta_{yt}) = 1 / w_3,\ \nu_{2H} = -\alpha E_{2H},$$
$$E_{2H}(y, I, \theta_{yt}) = \mu(\mu + 2\lambda) / (\mu + \lambda),\ G_{2H}(y, I, \theta_{yt}) = \mu, \quad (4.69)$$
$$\nu_{2H}(y, I, \theta_{yt}) = \lambda / (\mu + \lambda).$$

Связь между указанными величинами имеет вид

$$E_{2H} = G_{2H}(1 + \nu_{2H}), \quad (4.70)$$

$$\lambda_y(\theta_{yt}) = G_{2H}\nu_{2H} / (1 - \nu_{2H}),\ \mu_y(I, \theta_{yt}) = G_{2H}.$$

6. Если коэффициенты μ и λ (вязкости или жесткости) не зависят от размерности H-среды (корректны), то модули α и β (вязкости или упругости) зависят от размерности H-среды и поэтому являются некорректными реологическими характеристиками этой среды. Этот факт необходимо учитывать при переходе от исследования двумерной среды к исследованию трехмерной среды и обратно.

7. Аналоги модуля Юнга $E_{3H}(I, \theta_{yt})$ и коэффициента Пуассона, а также их связь с аналогами коэффициентов Лямэ (4.63) не совпадают с аналогичными характеристиками двумерных H-сред (4.69). Следовательно, в случае формулировки задач в терминах аналогов модулей Юнга и коэффициента Пуассона для двумерных сред нельзя использовать усеченный по одной координате рабочий аппарат механики трехмерной среды. Все сказанное в полной мере относится к одномерным средам, которые в монографии не рассматриваются.

8. Аналог модуля сдвига (совпадающий с коэффициентом вязкости (жесткости) второго типа), а также равенство (4.70) являются корректными характеристиками H-среды.

Предложение 4.42. Пусть: 1. Реологические коэффициенты среды второго типа не зависят от точки и инвариантов I матрицы du_y^{00} / dy^{00};

2. Температура среды не зависит от точки.

Тогда среда является однородной, а уравнения механического состояния

$$(T_y^0) = -(w) + W_H(\theta_{yt})U_y^0 \quad (4.71)$$

и уравнения динамики — линейными:

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg\, y, y) - \mathrm{grad}_0\, w +$$
$$+ \lambda(\theta_t)\,\mathrm{grad}_0\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00} + \mu(\theta_t)\nabla^2 u_y^{00}. \qquad (4.72)$$

3. Гипотеза: Никаких специальных (дополнительных к имеющимся в уравнениях механического состояния) «температурных» напряжений и «температурных» деформаций упругого материала не существует. Существуют зависящие друг от друга деформации, скорости деформаций и напряжения, указанная зависимость которых (в частности, квазилинейная (4.22)) определяется зависимостью от температуры реологических коэффициентов материала. В условиях отсутствия деформаций (фиксированная форма, фиксированный объем: $V_y^0 = 0$) напряжения в нем изменяются по закону (4.59):

$$(T_y^0) = W_H(\theta_t)Z_y^0. \qquad (4.73)$$

Предложение 4.43. Предположим, что: 1. Движение W_H-среды потенциально (3.100):

$$du_y^{00} / dy^{00} = (du_y^{00} / dy^{00})^T = [du_y^{00} / dy^{00}]; \qquad (4.74)$$

2. Смешанные вторые производные координат вектора скорости u_y^{00} по координатам вектора y^{00} непрерывны и, следовательно, равны:

$$u_{12}^1 = u_{21}^1, \ldots, u_{23}^3 = u_{32}^3. \qquad (4.75)$$

Тогда уравнение динамики W_H-среды (4.72) с учетом (4.75) может быть представлено в двух эквивалентных формах:

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg\, y, y) - \mathrm{grad}_0\, w + \mathrm{div}_0 u_y^{00}\,\mathrm{grad}_0\, \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) +$$
$$+ (\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) + \mu_y(I, \theta_{yt}))\nabla^2 u_y^{00}, \qquad (4.76)$$

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg\, y, y) - \mathrm{grad}_0\, w + \mathrm{div}_0\, u_y^{00}\,\mathrm{grad}_0\, \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) +$$
$$+ (\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) + \mu_y(I, \theta_{yt}))\,\mathrm{grad}_0\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00}.$$

Доказательство. 1. Для первой строки д-деформатора получаем

$$T_{y1}^0 = ((-w + \lambda_y(I_1) + \mu\, u_1^1), (\mu/2)(u_2^1 + u_1^2), (\mu/2)(u_3^1 + u_1^3)).$$

Вычислим дивергенцию этой строки с учетом (4.75)

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_0\, T^0_{y1} &= (-w + \lambda_y (I_1))_1 + \mu\, u^1_{11} + (\mu / 2)u^1_{22} + (\mu / 2)u^2_{12} + \\ &+ (\mu / 2)u^1_{33} + (\mu / 2)u^3_{13} = (-w + \lambda_y (I_1))_1 + \\ &+ (\mu / 2)(u^1_{11} + u^1_{22} + u^1_{33}) + (\mu / 2)(u^1_{11} + u^2_{12} + u^3_{13}) = \\ &= (-w + \lambda_y (I_1))_1 + (\mu / 2)\nabla^2 u^0_{y1} + (\mu / 2)(u^1_{11} + u^2_{21} + u^3_{31}) = \\ &= (-w)_1 + (\lambda_y (I_{\ 1}))_1 + (\mu / 2)\nabla^2 u^0_{y1} + (\mu / 2)(\mathrm{div}_0\, u^{00}_y)_1 = \\ &= (-w)_1 + \lambda (\mathrm{div}_0\, u^{00}_y)_1 + (\mu / 2)\nabla^2 u^0_{y1} + (\mu / 2)(\mathrm{div}_0\, u^{00}_y)_1 = \\ &+ (-w)_1 + (\lambda + \mu / 2)(\mathrm{div}_0\, u^{00}_y)_1 + (\mu / 2)\nabla^2 u^0_{y1}.\end{aligned}$$

Проделав аналогичные выкладки с остальными строками д-деформатора и воспользовавшись (2.65), получаем доказываемый результат. □

Предложение 4.44. Предположим, что в условиях предыдущих допущений (4.76) W_H-среда несжимаемая (4.34), (4.36):

$$\mathrm{div}_0\, u^{00}_y = 0. \tag{4.77}$$

Тогда уравнение динамики потенциального движения (течения, деформирования) W_H-среды (4.76) линейны и совпадают с уравнениями движения идеальной жидкости (4.48) (W_H-класс несжимаемых сред в условиях бесциркуляционного (потенциального) движения динамически эквивалентен I-классу жидкостей):

$$\rho_y v^{00\cdot}_y = \rho_y g^0_{yt}(\neg\, y, y) - \mathrm{grad}_0\, w. \tag{4.78}$$

Предложение 4.45. Предположим, что

$$\frac{1}{3}(T^0_{11} + T^0_{22} + T^0_{33}) = -\, w. \tag{4.79}$$

Тогда: 1. Коэффициенты вязкости (жесткости) первого и второго типов в противоречии с требованиями определения (**0.47**) становятся зависимыми и имеющими разные знаки, так что

$$\lambda = -\frac{1}{3}\mu. \tag{4.80}$$

2. Уравнение механического состояния (4.59)

$$(T_y^0) = -(w) + W_H(y, I, \theta_{yt})U_y^0 \tag{4.81}$$

становится некорректным: $\det W_H = \mu^2(\mu + 3\lambda) = \mu^2(\mu - \mu) = 0$ (4.60) $\to W_H \not\in \mathbf{W}_H(\mathbf{R}, \mathbf{9})$.

3. Среда не имеет модуля вязкости (жесткости) первого типа (4.61)

$$\alpha(y, I, \theta_{yt}) = -\lambda\mu^{-1}(\mu + 3\lambda)^{-1}.$$

4. Уравнения динамики среды (4.64) становятся некорректными и принимают вид

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0 w - 1/3\mu_y(I, \theta_{yt})\,\mathrm{grad}_0\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00} + \\ + (du_y^{00}/dy^{00} - 1/3\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00}E)\,\mathrm{grad}_0\,\mu_y(I, \theta_{yt}) + \\ + \mu_y(I, \theta_{yt})\,\nabla^2 u_y^{00}. \tag{4.82}$$

Доказательство. Определяющие соотношения (4.56) при условии (4.58) имеют вид

$$T_y^0 = (-w + \lambda\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00})E + \mu\, du_y^{00}/dy^{00}. \tag{4.83}$$

Для следа равенства (4.83) получаем

$$T_{11}^0 + T_{22}^0 + T_{22}^0 = -3w + (3\lambda + \mu)\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00},$$

откуда, после деления на 3 с учетом предположения (4.79), приходим к (4.80) и (4.82). □

Комментарии: 1. Из (4.82) становится ясным уровень приближения (4.79): равенство справедливо только для невязких и неупругих сред либо в случае $\mathrm{div}_0\, u_y^{00} = 0$.

2. Для двумерной среды соответствующие равенства имеют вид

$$0.5(T_{11}^0 + T_{22}^0) = -w, \tag{4.84}$$

$$\lambda_y = -0.5\mu_y. \tag{4.85}$$

4.5.2. УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ

Определение 4.9. Пусть: 1. Среда — вязкая жидкость;

2. $\Lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ — столбец коэффициентов вязкости первого типа, $\mu_y(I, \theta_{yt})$ — коэффициент вязкости второго типа из уравнений механического состояния H-жидкости (4.55);

3. V_y^0 – (9×1)-столбец, составленный из (3×1)-столбцов матрицы dv_y^{00} / dy^{00} (4.2).

Тогда: 1. Скалярное произведение (аналогично (2.49))

$$\Phi_\lambda^y(I, \theta_{yt}) = (V_y^0) \cdot \Lambda_y(I_1, \theta_{yt}) = \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \operatorname{div}_0 v_y^{00} \quad (4.86)$$

называется *диссипативной функцией первого типа* вязкой H-жидкости в точке y.

2. Скалярный квадрат вектора V_y^0 с числовым коэффициентом $\mu_y(I, \theta_{yt})$

$$\Phi_\mu^y(I, \theta_{yt}) = \mu_y(I, \theta_{yt}) V_y^{02} \quad (4.87)$$

называется *диссипативной функцией второго типа* вязкой H-жидкости в точке y.

Предложение 4.46. Пусть: 1. $\Phi_\lambda^y(I_1, \theta_{yt})$, $\Phi_\mu^y(I, \theta_{yt})$ — диссипативные функции первого и второго типов (4.86), (4.87);

2. $p_{yt} w_y^{\boldsymbol{\cdot}}$ — скорость выполнения элементарной работы давлением Паскаля ($w_y = \rho_y^{-1}$ — удельный объем жидкости) в точке y;

3. $u_y^{\boldsymbol{\cdot}}(\theta_{yt})$ — плотность скорости изменения внутренней энергии жидкости в точке y относительно меры $m(dy)$.

Тогда уравнение термодинамики вязкой H-жидкости имеет вид

$$\rho_y(u_y^{\boldsymbol{\cdot}}(\theta_{yt}) + p_y w_y^{\boldsymbol{\cdot}}) = \Phi_\lambda^y(I_1, \theta_{yt}) + \Phi_\mu^y(I, \theta_{yt}) + \\ + \operatorname{div} v_0 q_y^0 + \varphi_y. \quad (4.88)$$

Доказательство сводится к подстановке уравнений механического состояния жидкости (4.55) в условие энергетической сбалансированности Вселенной механики Галилея с учетом определения (2.51) и доказательства равенства (2.52). □

Комментарии: 1. Для несжимаемой вязкой H-жидкости ($\mathrm{div}_0\, v_y^{00} = 0$) диссипация тепловой энергии первого типа (4.86) отсутствует, и уравнения термодинамики принимают вид

$$\rho_y u_y^{\cdot}(\theta_{yt}) = \Phi_\mu^y(I, \theta_{yt}) + \mathrm{div}_0\, q_y^0 + \varphi_y.$$

2. Если верно предположение (4.58), то диссипативная функция первого типа имеет вид

$$\Phi_\lambda^y(I_1, \theta_{yt}) = \lambda_y(\theta_{yt})\, \mathrm{div}_0^2\, v_y^{00}. \tag{4.89}$$

3. H-класс трехмерных вязких жидкостей термодинамически не эквивалентен ни одному из ранее рассмотренных классов жидкостей. Следовательно, для получения теоретических результатов, адекватных эксперименту, в систему решаемых уравнений необходимо включение уравнения термодинамики (4.88).

Определение 4.10. Пусть: 1. Среда — упругий H-материал ($u \equiv z$);

2. $\Lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ — столбец коэффициентов жесткости первого типа, $\mu_y(I, \theta_{yt})$ — коэффициент жесткости второго типа;

3. Z_y^{00} – (9×1)-столбец, составленный из (3×1)-столбцов матрицы dz_y^{00} / dy^{00} (3.18) (деформаций среды при условии (3.16)).

Тогда: 1. Скалярное произведение (аналогично (4.86))

$$\Phi_\lambda^y(I_1, \theta_{yt}) = \Lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \cdot Z_y^{00\cdot} = \lambda_y(I_1, \theta_{yt})\, \mathrm{div}_0\, z_y^{00\cdot} \tag{4.90}$$

называется *плотностью мощности напряжений первого типа на деформациях* $d(dz_y^{00} / dy^{00}) = d\Delta_y^{00}$ (3.23) упругого H-материала в точке y относительно меры $m(dy)$.

2. Скалярное произведение столбца $M_y^0(I, \theta_{yt}) Z_y^{00}$ на столбец скоростей деформаций (элементов матриц $(dz_y^{00} / dy^{00})^{\cdot} = \Delta_y^{00\cdot}$ (3.17))

$$\Phi_\mu^y(I, \theta_{yt}) = M_y^0(I, \theta_{yt}) Z_y^{00} \cdot Z_y^{00\cdot} \tag{4.91}$$

называется *плотностью мощности напряжений второго типа на деформациях* $d(dz_y^{00} / dy^{00}) = d\Delta_y^{00}$ (3.23) упругого H-материала в точке y относительно меры $m(dy)$.

Предложение 4.47. Пусть: 1. $\Phi_\lambda^y(I, \theta_{yt})$, $\Phi_\mu^y(I, \theta_{yt})$ — функции из предыдущего определения (4.90), (4.91);

2. $u_y^{\cdot}(\theta_{yt})$ — плотность скорости изменения внутренней энергии *H*-материала в точке y относительно меры $m(dy)$.

Тогда уравнение термодинамики упругого *H*-материала имеет вид

$$\rho_y u_y^{\cdot}(\theta_{yt}) = \Phi_\lambda^y(I, \theta_{yt}) + \Phi_\mu^y(I, \theta_{yt}) + \mathrm{div}_0\, q_y^0 + \varphi_y. \quad (4.92)$$

Доказательство сводится к подстановке уравнений механического состояния материала (4.55) в условие термодинамической сбалансированности Вселенной механики Галилея с учетом определений (4.90) (4.91) и доказательства равенства (2.52). □

Комментарии: 1. Для упругого материала напряжения деформирования не зависят от скоростей. Поэтому их мощности (работы на деформациях в единицу времени) не приводят к диссипации энергии. Работа таких напряжений и соответствующее изменение внутренней энергии материала обратимы.

2. Для несжимаемого *H*-материала $\mathrm{div}_0\, z_y^{00\cdot} = 0$ (4.32) изменение внутренней энергии первого типа (4.90) отсутствует и уравнения термодинамики принимают вид

$$\rho_y u_y^{\cdot}(\theta_{yt}) = \Phi_\mu^Y(i, \theta_{yt}) + \mathrm{div}_0\, q_y^O + \varphi_y. \quad (4.93)$$

3. *H*-класс упругих материалов термодинамически не эквивалентен ни одному из ранее рассмотренных классов материалов. Следовательно, для получения теоретических результатов, адекватных эксперименту, в систему решаемых уравнений необходимо включение уравнения термодинамики (4.92).

4.6. ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ *P*-КЛАССОВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СРЕД

4.6.1. ГРУППА МАТРИЦ РЕОЛОГИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ—*P*-СРЕДЫ ВТОРОГО ТИПА

Предложение 4.48. Пусть: 1. **P(R, 9)** — множество персимметрических неособенных (9 × 9)-матриц вида

$$P = \left\| \begin{matrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_2 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_1 \end{matrix} \right\|, \qquad (4.94)$$

$$\det P = p_3^6 \cdot (p_1^3 - 3p_1p_2 + 2p_2^3) \neq 0,\ p_3 \neq 0, \qquad (4.95)$$

где верхние индексы являются показателями степени ;

2. На элементы матриц наложены связи вида

$$p_1 - p_2 - p_3 = 0. \qquad (4.96)$$

Тогда: 1. **P(R, 9)** — группа, матрица, обратная к матрице *P*, имеет аналогичную структуру с соответствующими элементами вида

$$w_1 = (p_1^2 - p_2^2)(p_1^3 - 3p_1p_2^2 + 2p_2^3)^{-1}, \qquad (4.97)$$

$$w_2 = p_2(p_2 - p_1)(p_1^3 - 3p_1p_2^2 + 2p_2^3)^{-1}, \qquad (4.98)$$

$$w_3 = p_3^{-1}. \qquad (4.99)$$

2. Группа **P(R, 9)** центрируема группой **SO(R, 9)** вращений R_9 (4.46), т. е. для любых матриц $C_f^0 \in$ **SO(R, 9)** и $P \in$ **P(R, 9)**:

$$C_f^{0,T} P C_f^0 = P. \qquad (4.100)$$

3. Группа **P(R, 9)** является объединением трех подгрупп:

$$\mathbf{P}(\mathbf{R},\ 9) = \mathbf{P}_{12} \cup \mathbf{P}_{13} \cup \mathbf{P}_{23}, \tag{4.101}$$

$$\mathbf{P}_{12} = \{P_y^0\colon\ p_3 = p_1 - p_2\}, \tag{4.102}$$

$$\mathbf{P}_{13} = \{P_y^0\colon\ p_2 = p_1 - p_3\}, \tag{4.103}$$

$$\mathbf{P}_{23} = \{P_y^0\colon\ p_1 = p_2 + p_3\}. \tag{4.104}$$

Комментарий. Из предыдущего предложения следует, что матрицы каждой из указанных подгрупп могут выполнять роль матриц реологических коэффициентов второго типа квазилинейных непрерывных сред.

4.6.2. P$_{12}$-КЛАСС КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СРЕД

Предложение 4.49. Пусть: 1. P_{12} — группа вида (4.102);

2. Гипотеза: уравнения механического состояния среды имеют вид

$$(T_y^0) = -(w) + \Lambda_y(I_1, \theta_{yt}) + P_y^{12}(I, \theta_{yt})U_y^0, \tag{4.105}$$

где $\lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ из (4.55), $P_y^{12}(I, \theta_{yt}) \in P_{12}$.

Тогда: 1. Класс квазилинейных сред называется P_{12}-*классом*, а его элементы — P_{12}-*средами.*

2. Определяющие соотношения (4.15) для P_{12}-сред не существуют.

3. Матричное представление для д-деформатора T_y^0 среды не существует.

4. P-среды имеют три независимых реологических коэффициента.

5. Уравнения динамики P_{12}-среды имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_y v_{y1}^{0\cdot} &= -(w)_1 + \rho_y g_{t1}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) / \partial y_1^0 + \\ &+ (\partial p_1/\partial y_1^0, 0, 0, \partial p_3/\partial y_2^0, \partial p_2/\partial y_2^0, 0, \partial p_3/\partial y_3^0, 0, \partial p_2/\partial y_1^0)\, U_y^0 + \\ &+ p_2(y, I, \theta_{yt})(u_{21}^2 + u_{31}^3 - u_{22}^1 - u_{33}^1) + \\ &+ p_1(y, I, \theta_{yt})\nabla^2 u_{y1}^0;\end{aligned} \tag{4.106}$$

$$\rho_y v_{y2}^{0\cdot} = -(w)_2 + \rho_y g_{t2}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) / \partial y_2^0 +$$
$$+(\partial p_2/\partial y_2^0, \partial p_3/\partial y_1^0, 0, 0, \partial p_1/\partial y_2^0, 0, 0, \partial p_3/\partial y_3^0, \partial p_2/\partial y_2^0)U_y^0 +$$
$$p_2(y, I, \theta_{yt})(u_{12}^1 + u_{32}^3 - u_{11}^2 - u_{23}^2) + p_1(y, I, \theta_{yt})\nabla^2 u_{y2}^0; \quad (4.107)$$

$$\rho_y v_{y3}^{0\cdot} = -(w)_3 + \rho_y g_{t3}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) / \partial y_3^0 +$$
$$+(\partial p_2/\partial y_3^0, 0, \partial p_3/\partial y_1^0, 0, \partial p_2/\partial y_3^0, \partial p_3/\partial y_2^0, 0, 0, \partial p_1/\partial y_3^0)U_y^0 +$$
$$+ p_2(y, I, \theta_{yt})(u_{13}^1 + u_{23}^2 - u_{11}^3 - u_{22}^3) +$$
$$+ p_1(y, I, \theta_{yt})\nabla^2 u_{y3}^0; \quad (4.108)$$

$$p_3(I, \theta_{yt}) = p_1(I, \theta_{yt}) - p_2(I, \theta_{yt}). \quad (4.109)$$

Предложение 4.50. Предположим, что: 1. Смешанные вторые производные от координат вектора u_y^{00} P_{12}-среды по координатам вектора y^{00} непрерывны в точке y и, следовательно, равны (4.75);

2. c_1^y, c_2^y, c_3^y — коэффициенты циркуляции вектора u_y^{00} P_{12}-среды в точке y (3.93).

Тогда уравнения динамики P_{12}-среды имеют вид

$$\rho_y v_{y1}^{0\cdot} = -(w)_1 + \rho_y g_{t1}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) / \partial y_1^0 +$$
$$+(\partial p_1/\partial y_1^0, 0, 0, \partial p_3/\partial y_2^0, \partial p_2/\partial y_2^0, 0, \partial p_3/\partial y_3^0, 0, \partial p_2/\partial y_1^0)U_y^0 +$$
$$+ p_2(y, I, \theta_{yt})[\partial c_3^y / \partial y_2^0 - \partial c_2^y / \partial y_3^0] +$$
$$+ p_1(y, I, \theta_{yt})\nabla^2 u_{y1}^0; \quad (4.110)$$

$$\rho_y v_{y2}^{0\cdot} = -(w)_2 + \rho_y g_{t2}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) / \partial y_2^0 +$$
$$+(\partial p_2/\partial y_2^0, \partial p_3/\partial y_1^0, 0, 0, \partial p_1/\partial y_2^0, 0, 0, \partial p_3/\partial y_3^0, \partial p_2/\partial y_2^0)U_y^0 +$$
$$+ p_2(y, I, \theta_{yt})[\partial c_1^y / \partial y_3^0 - \partial c_3^y / \partial y_1^0] +$$
$$+ p_1(y, I, \theta_{yt})\nabla^2 u_{y2}^0; \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned}\rho_y v_{y3}^{0\cdot} &= -(w)_3 + \rho_y g_{t3}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) / \partial y_3^0 \partial y_3^0 + \\ &+(\partial p_2/\partial y_3^0, 0, \partial p_3/\partial y_1^0, 0, \partial p_2/\partial y_3^0, \partial p_3/\partial y_2^0, 0, 0, \partial p_1/\partial y_3^0) U_y^0 + \\ &+ p_2(y, I, \theta_{yt})[\partial c_2^y/\partial y_1^0 - \partial c_1^y/\partial y_2^0] + \\ &+ p_1(y, I, \theta_{yt}) \nabla^2 u_{y3}^0. \end{aligned} \qquad (4.112)$$

Доказательство. Для уравнения (4.106), например, получаем

$$\begin{aligned} &u_{21}^2 + u_{31}^3 - u_{22}^1 - u_{33}^1 = u_{21}^2 - u_{22}^1 + u_{31}^3 - u_{33}^1 = \\ &= u_{12}^2 - u_{22}^1 + u_{13}^3 - u_{33}^1 = \partial(u_1^2 - u_2^1) / \partial y_2^0 + \\ &+ \partial(u_1^3 - u_3^1) / \partial y_3^0 = \partial c_3^y / \partial y_2^0 - \partial c_2^y / \partial y_3^0. \ \Box \end{aligned} \qquad (4.113)$$

Комментарий. Условие (4.75) не выполнено при армировании материала, при наличии в материале изолированных инородных включений, разрывов сплошности, трещин, сколов и т. п.

Предложение 4.51. Предположим, что при условии (4.75) реологический коэффициент первого типа $\lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ имеет простейшее представление

$$\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) = \lambda_y(\theta_{yt}) I_1 = \lambda_y(\theta_{yt}) \mathrm{div}_0\, u_y^{00}. \qquad (4.114)$$

Тогда: 1. Уравнения механического состояния P_{12}-среды, оставаясь квазилинейными по причине зависимости реологических коэффициентов жесткости второго типа от I, имеют вид

$$(T_y^0) = -(w) + W_{12}(y, I, \theta_{yt}) U_y^0, \qquad (4.115)$$

где матрица $W_{12}(y, I, \theta_{yt}) \in \mathbf{W}_{12}(\mathbf{R}, \ \mathbf{9})$ имеет структуру, аналогичную (4.94) с элементами

$$v_1 = p_1 + \lambda, \ v_2 = p_2 + \lambda, \ v_3 = p_1 - p_2.$$

2. Обратная матрица $W_{12}^{-1}(y, I, \theta_{yt}) \in \mathbf{W}_{12}(\mathbf{R}, \ \mathbf{9})$ имеет аналогичную структуру с элементами (коэффициентами влияния)

$$w_1(y, I, \theta_{yt}) = \beta_1 + \alpha,\ w_2(y, I, \theta_{yt}) = \beta_2 + \alpha,$$
$$w_3(y, I, \theta_{yt}) = \beta_1 - \beta_2. \qquad (4.116)$$

3. Реологические модули среды первого типа α и второго типа β_1, β_2 имеют вид

$$\alpha_y(I, \theta_{yt}) = -2\lambda(p_2 - p_1)/h,$$
$$\beta_{yt}(I, \theta_{yt}) = (p_1^2 - p_2^2)/h,$$
$$\beta_{2y}(I, \theta_{yt}) = (p_2 - p_1)(p_2 + 3\lambda)/h,$$
$$h = 3\lambda(p_1 - p_2)^2 + (p_1^3 - 3p_1p_2^2 + 2p_2^3). \qquad (4.117)$$

4. Уравнения динамики W_{12}-среды имеют вид

$$\rho_y v_{y1}^{0\cdot} =$$
$$= \rho_y g_{t1}^0(\neg y, y) + \lambda_y(\theta_y)\partial\,\mathrm{div}_0 u_y^{00}/\partial y_1^0 + \partial\lambda_y(\theta_{yt})/\partial y_1^0\,\mathrm{div}_0 u_y^{00} +$$
$$+ (\partial p_1/\partial y_1^0, 0, 0, \partial p_3/\partial y_2^0, \partial p_2/\partial y_2^0, 0, \partial p_3/\partial y_3^0, 0, \partial p_2/\partial y_1^0)\,U_y^0 +$$
$$+ p_2(y, I, \theta)[\partial c_3^y/\partial y_2^0 - \partial c_2^y/\partial y_3^0] + p_1(y, I, \theta_{yt})\nabla^2 u_{y1}; \qquad (4.118)$$

$$\rho_y v_{y2}^{0\cdot} =$$
$$= \rho_y g_{t2}^0(\neg y, y) + \lambda_y(\theta_{yt})\partial\,\mathrm{div}_0 u_y^{00}/\partial y_2^0 + \partial\lambda_y(\theta_{yt})/\partial y_2^0\,\mathrm{div}_0 u_y^{00} +$$
$$+ (\partial p_2/\partial y_2^0, \partial p_3/\partial y_1^0, 0, 0, \partial p_1/\partial y_2^0, 0, 0, \partial p_3/\partial y_3^0, \partial p_2/\partial y_2^0)\,U_y^0 +$$
$$+ p_2(y, I, \theta_{yt})[\partial c_1^y/\partial y_3^0 - \partial c_3^y/\partial y_1^0] + p_1(y, I, \theta_{yt})\nabla^2 u_{y2}^0; \qquad (4.119)$$

$$\rho_y v_{y3}^{0\cdot} =$$
$$= \rho_y g_{t3}^0(\neg y, y) + \lambda_y(\theta_{y1})\partial\,\mathrm{div}_0 u_y^{00}/\partial y_3^0 + \partial\lambda_y(\theta_{y1})/\partial y_1^0\,\mathrm{div}_0 u_y^{00} +$$
$$+ (\partial p_2/\partial y_3^0, 0, \partial p_3/\partial y_1^0, 0, \partial p_2/\partial y_3^0, \partial p_3/\partial y_2^0, 0, 0, \partial p_1/\partial y_3^0)\,U_y^0 +$$
$$+ p_2(y, I, \theta_{y1})[\partial c_2^y/\partial y_1^0 - \partial c_1^y/\partial y_2^0] + p_1(y, I, \theta_{y1})\nabla^2 u_{y3}^0. \qquad (4.120)$$

Пример. Пусть $p_1 = I$, $p_2 = 2$, $\lambda = 4$, тогда $\beta_1 = -0.1765$, $\beta_2 = 0.8235$, $\beta_3 = \beta_1 - \beta_2 = -1$, $\alpha = -0.4706$. Элементы матрицы W_{12}^{-1} имеют вид: $w_1 = \beta_1 + \alpha = -0.6471$, $w_2 = \beta_2 + \alpha = 0.3529$, $w_3 = \beta_3 = -1$.

Комментарии: 1. Для двумерной среды соответствующие характеристики имеют вид

$$W_{12}(y, I, \theta_{yt}) = \left\| \begin{matrix} p_1 + \lambda & 0 & 0 & p_2 + \lambda \\ 0 & p_1 - p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 - p_2 & 0 \\ p_2 + \lambda & 0 & 0 & p_1 + \lambda \end{matrix} \right\|, \quad (4.121)$$

$$p_1 - p_2 \neq 0;$$

$$\alpha(y, I, \theta_{yt}) = 1/2(p_1 - p_2)/[(p_1 + \lambda)^2 - (p_2 + \lambda)^2],$$

$$\beta_1(y, I, \theta_{yt}) = 1/2(p_1 - p_2)^{-1},$$

$$\beta_2(y, I, \theta_{yt}) = -1/2(p_1 - p_2)^{-1}, \quad (4.122)$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 1/(p_1 - p_2);$$

$$w_1(y, I, \theta_{yt}) = \beta_1 + \alpha, \quad w_2(y, I, \theta_{yt}) = \beta_2 + \alpha,$$

$$w_3(y, I, \theta_{yt}) = \beta_1 - \beta_2. \quad (4.123)$$

Пример. $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $\lambda = 3$, $\to \alpha = 0.045$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = -0.5$.

Аналоги модулей Юнга, сдвига и коэффициента Пуассона для двумерных и трехмерных сред по форме записи совпадают и имеют вид

$$E_{12}(y, I, \theta_{yt}) = 1/w_1 = 1/(\beta_1 + \alpha), \quad (4.124)$$

$$G_{12}(y, I, \theta_{yt}) = 1/w_3 = 1/(\beta_1 - \beta_2) = (p_1 - p_2), \quad (4.125)$$

$$\nu_{12}(y, I, \theta_{yt}) = -w_2/w_1 = -(\beta_2 + \alpha)/(\beta_1 + \alpha). \quad (4.126)$$

2. Уравнения динамики двумерной W_{12}-среды в терминах реологических коэффициентов являются усеченными по третьей координате уравнения динамики трехмерной W_{12}-среды с теми же коэффициентами. Это свидетельствует о том, что эти коэффициенты не зависят от размерности среды и в этом смысле являются корректными характеристиками среды.

3. Реологические модули и коэффициенты влияния двумерной и трехмерной W_{12}-среды принципиально различны, из чего следует, что представление элементов матрицы du_y^{00}/dy^{00} (столбца U_y^0) в виде квазилинейных комбинаций напряжений T_y^0:

$$U_y^0 = +W_{12}^{-1}(y, I, \theta_{yt})((T_y^0) + (w)) \qquad (4.127)$$

для двумерных и трехмерных W_{12}-сред совпадают по форме, но принципиально различны по содержанию. Это указывает на то, что реологические модули и коэффициенты влияния в указанном смысле являются некорректными характеристиками W_{12}-сред.

4. Реологические модули среды (4.117) содержат разности реологических коэффициентов и их квадратов, что свидетельствует о том, что W_{12}-среда при p_1^2 ⟨ил⟩и p_2^2 ведет себя принципиально по-разному, т. е. точки $p_1 = \pm p_2$ (4.96) многообразия реологических коэффициентов являются своеобразными точками бифуркации W_{12}-среды.

5. Если реологические коэффициенты второго типа не зависят от I, то уравнения механического состояния (4.115), напряженного состояния

$$(T_y^0) = -(w) + W_{12}(y, \theta_{yt})U_y, \qquad (4.128)$$

$$U_y^0 = W_{12}^{-1}(y, \theta_{yt})(\tau_y^0), \qquad (4.129)$$

а также уравнения динамики и статики W_{12}-среды линейны.

Предложение 4.52. Предположим, что: 1. Смешанные вторые производные от координат вектора u_y^{00} по координатам вектора u^{00} непрерывны в точке y и, следовательно, равны (4.75);

2. Движение (деформирование) W_{12}-среды бесциркуляционно (потенциально) (3.96), (3.100):

$$du_y^{00} / dy^{00} = (du_y^{00} / dy^{00})^T, \qquad (4.130)$$

$$c_1^y = c_2^y = c_3^y = 0;$$

3. $L, (I, \theta_{yt})$ — матрица вида

$$L(I, \theta_{yt}) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \partial p_1 / \partial y_1^0, 0, 0, \partial p_3 / \partial y_2^0, \partial p_2 / \partial y_2^0, 0, \partial p_3 / \partial y_3^0, 0, \partial p_2 / \partial y_1^0 \\ \partial p_2 / \partial y_2^0, \partial p_3 / \partial y_1^0, 0, 0, \partial p_1 / \partial y_2^0, 0, 0, \partial p_3 / \partial y_3^0, \partial p_2 / \partial y_2^0 \\ \partial p_2 / \partial y_3^0, 0, \partial p_3 / \partial y_1^0, 0, \partial p_2 / \partial y_3^0, \partial p_3 / \partial y_2^0, 0, 0, \partial p_1 / \partial y_3^0 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда уравнения динамики (4.118), (4.119), (4.120) W_{12}-среды в точке $y \in \varepsilon_y$ имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_y v_y^{00\cdot} &= -\operatorname{grad}_0 w + \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) + L_y(I, \theta_{yt})U_y^0 + \\ &\quad + \operatorname{div}_0 u_y^{00} \operatorname{grad}_0 \lambda_y(\theta_{yt}) + (\lambda_y(\theta_{yt}) + \\ &\quad + p_1(y, I, \theta_{yt}))\operatorname{grad}_0 \operatorname{div}_0 u_y^{00}, \end{aligned} \tag{4.131}$$

$$\begin{aligned}\rho_y v_y^{00\cdot} &= -\operatorname{grad}_0 w + \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) + L_y(I, \theta_{yt})U_y^0 + \\ &\quad + \operatorname{div}_0 u_y^{00} \operatorname{grad}_0 \lambda_y(\theta_{yt}) + \\ &\quad + (\lambda_y(\theta_{yt}) + p_1(y, I, \theta_{yt}))\nabla^2 u_y^{00}. \end{aligned} \tag{4.132}$$

Доказательство основано на использовании равенства $\nabla^2 u_y^{00} = \operatorname{grad}_0 \operatorname{div}_0 u_y^{00}$ в условиях п. 1 и п. 2 предложения. □

Предложение 4.53. Пусть в условиях предыдущего предложения реологические коэффициенты и температура W_{12}-среды не зависят от точки и I.

Тогда линейные уравнения однородной потенциально деформируемой W_{12}-среды имеют вид (с учетом $\operatorname{grad}_0 \operatorname{div}_0 u_y^{00} = \nabla^2 u_y^{00}$)

$$\begin{aligned}\rho_y v_y^{00\cdot} &= -\operatorname{grad}_0 w + \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) + (\lambda(\theta_t) + \\ &\quad + p_1(\theta_t))\operatorname{grad}_0 \operatorname{div}_0 u_y^{00}, \\ \rho_y v_y^{00\cdot} &= -\operatorname{grad}_0 w + \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) + \\ &\quad + (\lambda(\theta_t) + p_1(\theta_t))\nabla^2 u_y^{00}. \end{aligned} \tag{4.133}$$

Предложение 4.54. Предположим, что в условиях предыдущего предложения W_{12}-среда несжимаема ($\operatorname{div}_0 u_y^{00} = 0$).

Тогда W_{12}-среда динамически эквивалентна H-среде (4.78) и идеальной жидкости (4.48):

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \operatorname{grad}_0 p_{yt}. \tag{4.134}$$

Комментарий. Указанный факт является одной из причин того, что при теоретическом изучении потенциального движения несжимаемых вязких жидкостей с использованием уравнения динамики идеальной жидкости, как правило, достигается приемлемое совпадение результатов моделирования с результатами экспериментов.

Предложение 4.55. Для того чтобы две разные среды принадлежали W_{12}-классу (аналогично (4.65)), необходимо и достаточно, чтобы при одинаковом распределении в них напряжений

$$\tau_{ya}^{0} = \tau_{yb}^{0} \tag{4.135}$$

столбцы U_{ya}^{0} и U_{yb}^{0} (деформаций в случае ($u = z$)) были линейно связаны матрицей из группы $\mathbf{W}_{12}$ ($\mathbf{R}$, **9**) так, что

$$U_{ya}^{0} = W_{12\,ab}(y, I, \theta_{yt})U_{yb}^{0}, \tag{4.136}$$

$$W_{12\,ab}(y, I, \theta_{yt}) \in \mathbf{W}_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{9}),\ W_{12\,ab}(y, I, \theta_{yt})W_{12\,a}^{-1}W_{12\,b}.$$

Доказательство. Из (4.128) при условии (4.135) получаем $W_{12\,a}U_{ya}^{0} = W_{12\,b}U_{yb}^{0}$, откуда и следует (4.136). □

Предложение 4.56. Уравнения термодинамики P_{12}-среды в векторной записи имеют вид ($w = p_{yt}$ или $w = 0$)

$$\rho_y(u_y^{\cdot}\ (\theta_{yt}) + w(\theta_y^{-1})^{\cdot}) = \Phi_{\lambda}^{y}(I, \theta_{yt}) + \Phi_{p}^{y}(I, \theta_{yt}) +$$

$$+ \operatorname{div}_0 q_y^0 + \rho_y\varphi_y, \tag{4.137}$$

$$\Phi_{\lambda}^{y}(I_1, \theta_{yt}) = \Lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \cdot V_y^0 = \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \operatorname{div}_0 v_y^{00}, \tag{4.138}$$

$$\Phi_{p}^{y}(I, \theta_{yt}) = P_y^{12}(I, \theta_{yt})U_y^0 \cdot V_y^0. \tag{4.139}$$

Комментарий. Из факта динамической эквивалентности P_{12}-сред другим классам материалов при определенных допущениях не следует совпадения движения этих сред. Причина в том, что P_{12}-класс сред термодинамически не эквивалентен ни одному из ранее рассмотренных классов сред. Решение задач динамики и статики P_{12}-сред без учета уравнений термодинамики может привести к физически неадекватным результатам.

4.6.3. P_{13}-КЛАСС КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СРЕД

Предложение 4.57. Пусть: 1. $\mathbf{P}_{13}(\mathbf{R}, 3)$ — группа вида (4.103);

2. Гипотеза: уравнения механического состояния среды имеют вид

$$(T_y^0) = -(w) + \Lambda_y(I_1, \theta_{yt}) + P_y^{13}(I, \theta_{yt})U_y^0, \qquad (4.140)$$

где $\lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ из (4.105), $P_y^{13}(I, \theta_y) \in \mathbf{P}_{13}$.

Тогда: 1. Класс квазилинейных сред называется P_{13}-*классом*, а его элементы — P_{13}-*средами.*

2. Определяющие соотношения для P-среды не существуют.

3. Матричное представление для д-деформатора T_y^0 среды не существует.

4. Уравнения динамики P_{13}-среды в точке $y \in \varepsilon_y \in \mathbf{R}_3^{\mu}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_y v_{y1}^{0\cdot} &= -(w)_1 + \rho_y g_{t1}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) / \partial y_1^0 + \\ &+(\partial p_1/\partial y_1^0, 0, 0, \partial p_3/\partial y_2^0, \partial p_2/\partial y_2^0, 0, \partial p_3/\partial y_3^0, 0, \\ &\partial p_2/\partial y_1^0)U_y^{00} + p_2(y, I, \theta_{yt})(u_{22}^1 + u_{33}^1 - u_{21}^2 - u_{31}^3) + \\ &+ p_1(y, I, \theta_{yt})\,\partial\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00} / \partial y_1^0; \qquad (4.141)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_y v_{y2}^{0\cdot} &= -(w)_2 + \rho_y g_{t2}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_y) / \partial y_2^0 + \\ &+\partial p_2/\partial y_2^0, \partial p_3/\partial y_1^0, 0, 0, \partial p_1/\partial y_2^0, 0, 0, \partial p_3/\partial p_3^0, \partial p_2/\partial y_2^0)U_y^{00} + \\ &+ p_2(y, I, \theta_{yt})(u_{11}^2 + u_{33}^2 - u_{12}^1 - u_{32}^3) + \\ &+ p_1(y, I, \theta_{yt})\partial\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00} / \partial y_2^0; \qquad (4.142)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_y v_{y3}^{0\cdot} &= -(w)_3 + \rho_y g_{t3}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) / \partial y_3^0 + \\ &+(\partial p_2/\partial y_3^0, 0, \partial p_3/\partial y_1^0, 0, \partial p_2/\partial p_3, \partial p_3/\partial y_2^0, 0, 0, \partial p_1/\partial y_3^0)U_y^{00} + \\ &+ p_2(y, I, \theta_{yt})(u_{11}^3 + u_{22}^3 - u_{13}^1 - u_{23}^2) + \\ &+ p_1(y, I, \theta_{yt})\partial\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00} / \partial y_3^0; \qquad (4.143)\end{aligned}$$

$$p_2(y, I, \theta_{yt}) = p_1(y, I, \theta_{yt}) - p_3(y, I, \theta_{yt}). \qquad (4.144)$$

Доказательство достигается подстановкой уравнений механического состояния (4.140) P_{13}-среды в уравнения движения (2.65). □

Предложение 4.58. Предположим, что: 1. Смешанные вторые производные координат вектора u_y^{00} среды по координатам вектора y^{00} непрерывны в точке y и, следовательно, равны (4.75);

2. c_1^y, c_2^y, c_3^y — коэффициенты циркуляции вектора u_y^{00} P_{13}-среды в точке y (3.93).

Тогда уравнения динамики P_{13}-среды имеют вид

$$\begin{gathered}\rho_y v_{y1}^{0\cdot} = -(w)_1 + \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_y)/\partial y_1^0 + \\ +(\partial p_1/\partial y_1^0, 0, 0, \partial p_3/\partial y_2^0, \partial p_2/\partial y_2^0, 0, \partial p_3/\partial y_3^0, \\ 0, \partial p_2/\partial y_1^0)U_y^{00} + p_2(y, I, \theta_{yt})[\partial c_2^y/\partial y_3^0 - \partial c_3^y/\partial y_2^0] + \\ + p_1(y, I, \theta_{yt})\partial\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00}/\partial y_1^0; \qquad (4.145)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\rho_y v_{y2}^{0\cdot} = -(w)_2 + \rho_y g_{t2}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt})/\partial y_2^0 + \\ +(\partial p_2/\partial y_2^0, \partial p_3/\partial y_1^0, 0,0, \partial p_1/\partial y_2^0, 0, 0, \partial p_3/\partial y_3^0, \partial p_2/\partial y_2^0)U_y^{00} + \\ + p_2(y, I, \theta_{yt})[\partial c_3^y/\partial y_1^0 - \partial c_1^y/\partial y_3^0] + \\ + p_1(y, I, \theta_{yt})\partial\mathrm{div}_0 u_y^0/\partial y_2^0; \qquad (4.146)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\rho_y v_{y3}^{0\cdot} = -(w)_3 + \rho_y g_{t3}^0(\neg y, y) + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt})/\partial y_3^0 + \\ +(\partial p_2/\partial y_3^0, 0, \partial p_3/\partial y_1^0, 0, \partial p_2/\partial y_3^0, \partial p_3/\partial y_2^0, 0, 0, \partial p_1/\partial y_3^0)U_y^{00} + \\ + p_2(y, I, \theta_{yt})[\partial c_1^y/\partial y_2^0 - \partial c_2^y/\partial y_1^0] + \\ + p_1(y, I, \theta_{yt})\partial\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00}/\partial y_3^0. \qquad (4.147)\end{gathered}$$

Доказательство аналогично доказательству (4.106)—(4.108). □

Предложение 4.59. Предположим, что в дополнение к условиям предыдущего предложения реологический коэффициент $\lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ имеет простейшее представление

$$\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) = \lambda_y(\theta_{yt}) I_1 = \lambda_y(\theta_{yt})\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00}. \tag{4.148}$$

Тогда: 1. Квазилинейные уравнения механического состояния P_{13}-среды имеют вид

$$(T_y^0) = -(w) + W_{13}(y, I, \theta_{yt}) U_y^0, \tag{4.149}$$

где матрица $W_{13}(y, I, \theta_{yt})$ имеет структуру (4.94) с элементами

$$v_1(y, I, \theta_{yt}) = p_1 + \lambda, \; v_2(y, I, \theta_{yt}) = p_1 - p_3 + \lambda;$$

$$v_3(y, I, \theta_{yt}) = p_3, \tag{4.150}$$

$$W_{13}(y, I, \theta_{yt}) \in \mathbf{W}_{13}\ (\mathbf{R}, \mathbf{9}).$$

2. Обратная матрица $W_{13}^{-1}(y, I, \theta_{yt}) \in \mathbf{W}_{13}\ (\mathbf{R}, \mathbf{9})$ имеет ту же структуру, соответствующими элементами которой являются коэффициенты влияния

$$w_1(y, I, \theta_{yt}) = \beta_1 + \alpha, \; w_2(y, I, \theta_{yt}) = \beta_1 - \beta_3 + \alpha,$$

$$w_3(y, I, \theta_{yt}) = \beta_3. \tag{4.151}$$

3. Реологические модули первого α и второго типов β_1, β_3, вычисляются по формулам

$$\beta_1(y, I, \theta_{yt}) = p_3(2p_1 - p_3)/h, \; \beta_3(y, I, \theta_{yt}) = 1/p_3,$$

$$\alpha(y, I, \theta_{yt}) = 2p_3\lambda/h, \tag{4.152}$$

$$h = (p_1 + \lambda)^3 - 3(p_1 + \lambda)(p_1 - p_3 + \lambda)^2 + 2(p_1 - p_3 + \lambda)^3.$$

4. Для двумерной P_{13}-среды соответствующие характеристики имеют вид

$$W_{13}(y, I, \theta_{yt}) = \begin{Vmatrix} p_1 + \lambda & 0 & 0 & p_1 - p_3 + \lambda \\ 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ p_1 - p_3 + \lambda & 0 & 0 & p_1 + \lambda \end{Vmatrix},$$

$$\alpha(y, I, \theta_{yt}) = \lambda / [(p_1 + \lambda)^2 - (p_1 - p_3 + \lambda)^2],$$

$$\beta(y, I, \theta_y) = p_1 / [(p_1 + \lambda)^2 - (p_1 - p_3 + \lambda)^2], \quad (4.153)$$

$$\beta_2(y, I, \theta_y) = I / p_3,$$

$$\beta_1 - \beta_2 = -(p_1 - p_3 + 2\lambda) / [(p_1 + \lambda)^2 - (p_1 - p_3 + \lambda)^2],$$

$$w_1(y, I, \theta_{yt}) = \beta_1 + \alpha, \quad w_2(y, I, \theta_{yt}) = \beta_1 - \beta_2 + \alpha,$$

$$w_3(y, I, \theta_{yt}) = \beta_2. \quad (4.154)$$

5. Аналоги модулей Юнга, сдвига и коэффициента Пуассона для двумерной и трехмерной среды имеют вид

$$E_{13}(y, I, \theta_{yt}) = 1 / w_1;$$

$$G_{13}(y, I, \theta_{yt}) = 1 / w_3 = 1 / \beta_2 = p_3, \quad (4.155)$$

$$\nu_{13}(y, I, \theta_{yt}) = -w_2 / w_1.$$

Предложение 4.60. Пусть: 1. Предположим, что в дополнение к условиям предыдущего предложения, деформирование W_{13}-среды потенциально (бесциркуляционно) (3.96), (3.100)

$$du_y^{00} / dy^{00} = (du_y^{00} / dy^{00})^T, \quad (4.156)$$

$$c_1^y = c_2^y = c_3^y = 0;$$

2. Матрица $L_y(I, \theta_{yt})$ имеет вид

$$L_y(I, \theta_y) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \partial p_1 / \partial y_1^0, 0, 0, \partial p_3 / \partial y_2^0, \partial p_2 / \partial y_2^0, 0, \partial p_3 / \partial y_3^0, 0, \partial p_2 / \partial y_1^0 \\ \partial p_2 / \partial y_2^0, \partial p_3 / \partial y_1^0, 0, 0, \partial p_1 / \partial y_2^0, 0, 0, \partial p_3 / \partial y_3^0, \partial p_2 / \partial y_2^0 \\ \partial p_2 / \partial y_3^0, 0, \partial p_3 / \partial y_1^0, 0, \partial p_2 / \partial y_3^0, \partial p_3 / \partial y_2^0, 0, 0, \partial p_1 / \partial y_3^0 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда уравнения динамики W_{13}-среды в точке $y \in \varepsilon_y \in \mathcal{E}_3^{\mu}$ имеют один из эквивалентных видов

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) + L_y(I, \theta_{yt})U_y^0 + \mathrm{div}_0 u_y^{00} \mathrm{grad}_0 \lambda_y(\theta_{yt}) -$$
$$- \mathrm{grad}_0 w + (\lambda_y(\theta_{yt}) + p_1(y, I, \theta_{yt}))\, \mathrm{grad}_0 \mathrm{div}_0 u_y^{00}; \qquad (4.157)$$

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y\ g_{yt}^0(\neg y, y) + L_y(I, \theta_{yt})\, U_y^0 +$$
$$+ \mathrm{div}_0\ u_y^{00}\ \mathrm{grad}_0 \lambda_y(\theta_{yt}) - \mathrm{grad}_0\ w +$$
$$+ (\lambda_y(\theta_{yt}) + p_1(y, I, \theta_{yt}))\, \nabla^2 u_y^{00}. \qquad (4.158)$$

Доказательство основано на использовании равенства $\nabla^2 u_y^{00} = \mathrm{grad}_0 \mathrm{div}_0\ u_y^{00}$ при условиях (4.75) и (4.156). □

Предложение 4.61. Пусть в условиях предыдущего предложения реологические коэффициенты и температура W_{13}-среды не зависят от точки и I.

Тогда W_{13}-среда однородна, а уравнения динамики среды линейны:

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0\ w +$$
$$+ (\lambda(\theta_t) + p_1(\theta_t))\, \mathrm{grad}_0\ \mathrm{div}_0\ u_y^{00},$$

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0\ w +$$
$$+ (\lambda(\theta_t) + p_1(\theta_t))\, \nabla^2\ u_y^{00}. \qquad (4.159)$$

Откуда следует, что однородные линейные потенциально деформируемые W_{12}- и W_{13}-среды динамически эквивалентны (4.133), (4.159).

Предложение 4.62. Предположим, что в условиях предыдущего предложения W_{13}-материал несжимаем ($\mathrm{div}_0 u_y^{00} = 0$).

Тогда W_{13}-среда динамически эквивалентна H-среде (4.78), W_{12}-среде (4.134) и I-среде (4.48):

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0\ w. \qquad (4.160)$$

Предложение 4.63. Для того чтобы две разные среды принадлежали W_{13}-классу (аналогично (4.135)), необходимо и достаточно, чтобы при одинаковом распределении в нем напряжений

$$\tau^0_{ya} = \tau^0_{yb} \tag{4.161}$$

столбцы U^0_{ya} и U^0_{yb} (столбцы деформаций при условии (4.161)) были линейно связаны матрицей из группы $\mathbf{W}_{13}$ $(\mathbf{R},\ \mathbf{9})$ так, что

$$U^0_{ya} = W_{13ab}(y, I, \theta_{yt})U^0_{yb}; \tag{4.162}$$

$$W_{13ab}(y, I, \theta_{yt}) \in \mathbf{W}_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{9}),\ W_{13ab}(y, I, \theta_{yt}) = W^{-1}_{13a}W_{13b}.$$

Доказательство. Из (4.149) при условии (4.161) получаем $W_{13a}U^0_{ya} = W_{13b}U^0_{yb}$, откуда и следует (4.162). □

Предложение 4.64. Уравнения термодинамики P_{13}-среды имеют вид ($w = p_{yt}$ или $w = 0$)

$$\rho_y(u^{\cdot}_y(\theta_{yt}) + w(\rho^{-1}_y)^{\cdot}) =$$

$$= \Phi^y_\lambda(I, \theta_{yt}) + \Phi^y_p(I, \theta_{yt}) + \mathrm{div}_0\, q^0_y + \rho_y\varphi_y. \tag{4.163}$$

4.6.4. P$_{23}$-КЛАСС КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СРЕД

Предложение 4.65. Пусть: 1. $\mathbf{P}_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{9})$ — группа вида (4.104);

2. Гипотеза: уравнения механического состояния среды имеют вид

$$(T^0_y) = -(w) + \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) + P^{23}_y(I, \theta_{yt})U^0_y, \tag{4.164}$$

где $\lambda_y(I_{11}, \theta_{yt})$ из (4.140), $P^{23}_y(I, \theta_{yt}) \in \mathbf{P}_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{9})$.

3. $L_y(I, \theta_{yt})$ — (3×9) — матрица вида

$$L_y =$$

$$= \begin{Vmatrix} \partial p_1/\partial y^0_1, 0, 0, \partial p_3/\partial y^0_2, \partial p_2/\partial y^0_2, 0, \partial p_3/\partial y^0_3, 0, \partial p_2/\partial y^0_2 \\ \partial p_2/\partial y^0_2, \partial p_3/\partial y^0_1, 0, 0, \partial p_1/\partial y^0_2, 0, 0, \partial p_3/\partial y^0_3, \partial p_2/\partial y^0_2 \\ \partial p_2/\partial y^0_3, 0, \partial p_3/\partial y^0_1, 0, \partial p_2/\partial y^0_3, \partial p_3/\partial y^0_2, 0, 0, \partial p_1/\partial y^0_3 \end{Vmatrix}.$$

Тогда: 1. Квазилинейная среда называется P_{23}-средой.

2. Определяющие соотношения (4.15) для P_{23}-среды не существуют.

3. Матричное представление для д-деформатора T_y^0 среды не существует.

4. Уравнения динамики P_{23}-среды $\varepsilon_y \in \mathfrak{E}_3^{\mu}$ имеют вид

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = -\operatorname{grad}_0 w + \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) + \operatorname{grad}_0 \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) +$$

$$+ L_y(I, \theta_{yt}) U_y^0 + p_2(y, I, \theta_{yt}) \operatorname{grad}_0 \operatorname{div}_0 u_y^{00} +$$

$$+ p_3(y, I, \theta_{yt}) \nabla^2 u_y^{00}. \qquad (4.165)$$

Доказательство достигается подстановкой уравнений механического состояния (4.164) P_{23}-среды в уравнения движения (2.65). □

Предложение 4.66. Предположим, что: 1. Реологический коэффициент $\lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ имеет простейшее представление:

$$\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) = \lambda_y(\theta_{yt}) I_1 = \lambda_y(\theta_{yt}) \operatorname{div}_0 u_y^{00}. \qquad (4.166)$$

Тогда: 1. Уравнения механического состояния P_{23}-среды имеют вид

$$(T_y^0) = -(w) + W_{23}(y, I, \theta_{yt}) U_y^0, \qquad (4.167)$$

где матрица $W_{23}(y, I, \theta_{yt})$ имеет структуру (4.94) с соответствующими элементами вида

$$v_1(y, I, \theta_{yt}) = v_2 + v_3 = p_2 + p_3 + \lambda,$$

$$v_2(y, I, \theta_{yt}) = p_2 + \lambda, \; v_3(y, I, \theta_{yt}) = p_3, \qquad (4.168)$$

$$W_{23}(y, I, \theta_{yt}) \in \mathbf{W}_{23}\ (\mathbf{R}, \mathbf{9}).$$

2. Обратная матрица $W_{23}^{-1}(y, I, \theta_{yt}) \in \mathbf{W}_{23}\ (\mathbf{R}, \mathbf{9})$ естественно имеет аналогичную структуру с элементами в виде коэффициентов восстановления

$$w_1(y, I, \theta_{yt}) = w_2 + w_3 = \beta_2 + \beta_3 + \alpha,$$

$$w_2(y, I, \theta_{yt}) = \beta_2 + \alpha,\ w_3(y, I, \theta_{yt}) = \beta_3. \qquad (4.169)$$

3. Реологические модули первого типа α, и второго типа β_2, β_3 вычисляются по формулам

$$\alpha(y, I, \theta_{yt}) = 2p_3\lambda h^{-1},$$

$$\beta_2(y, I, \theta_{yt}) = -\,p_3(p_2 + 3\lambda)h^{-1},\ \beta_3(y, I, \theta_{yt}) = p_3^{-1}, \qquad (4.170)$$

$$h = (p_2 + p_3 + \lambda)^3 - 3(p_2 + p_3 + \lambda)(p_2 + \lambda)^2 + 2(p_2 + \lambda)^3.$$

4. Уравнения динамики P_{23}-среды имеют вид

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) + \mathrm{div}_0\, u_y^{00}\, \mathrm{grad}_0\, \lambda_y(\theta_{yt}) +$$

$$+ L_y(I, \theta_{yt})U^0 + (p_2(y, I, \theta_{yt}) + \lambda_y(\theta_{yt}))\ \mathrm{grad}_0\, \mathrm{div}_0\, u_y^{00} +$$

$$+ p_3(y, I, \theta_{yt})\, \nabla^2\, u_y^{00}. \qquad (4.171)$$

Пример. Пусть $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $\lambda = 4$. Тогда $\beta_2 = -\,0.2222$, $\beta_3 = 0.3333$, $\alpha = 0.1270$, $w_1 = 0.2381$, $w_2 = -\,0.0952$, $w_3 = 0.3333$.

Предложение 4.67. Предположим, что: 1. Деформирование среды бесциркуляционно (потенциально)

$$du_y^{00} / dy^{00} = (du_y^{00} / dy^{00})^T; \qquad (4.172)$$

2. Смешанные вторые производные от координат вектора u_y^{00} по координатам вектора y^{00} непрерывны в точке y и, следовательно, равны (4.75).

Тогда уравнения динамики P_{23}-среды в точке $y \in \mathrm{E}_y \in \mathfrak{R}_3^{\mu}$ имеют две эквивалентных формы записи

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0\, w + \mathrm{div}_0\, u_y^{00}\, \mathrm{grad}_0\, \lambda_y(\theta_{yt}) +$$

$$+ L_y(I, \theta_{yt})U_y^0 + (\lambda_y(\theta_{yt}) + p_1(y, I, \theta_{yt}) +$$

$$+ p_3(y, I, \theta_{yt}))\, \mathrm{grad}_0\, \mathrm{div}_0\, u_y^{00}; \qquad (4.173)$$

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0\, w + \mathrm{div}_0\, u_y^{00}\, \mathrm{grad}_0\, \lambda_y(\theta_{yt}) +$$
$$+ L_y(I, \theta_{yt}) U_y^0 + (\lambda_y(\theta_{yt}) + p_1(y, I, \theta_{yt}) +$$
$$+ p_3(y, I, \theta_{yt}))\, \nabla^2\, u_y^{00}. \qquad (4.174)$$

Доказательство основано на использовании равенства $\nabla^2\, u_y^{00} = \mathrm{grad}_0\, \mathrm{div}_0\, u_y^{00}$ при условиях (4.75) и (4.172). □

Предложение 4.68. Пусть реологические коэффициенты среды зависят только от температуры, не зависящей от точки.

Тогда P_{23}-среда однородна, уравнения динамики (4.173), (4.174) линейны:

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0\, w + (\lambda(\theta_t) +$$
$$+ p(\theta_t))\, \mathrm{grad}_0\, \mathrm{div}_0\, u_y^{00},$$

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0\, w +$$
$$+ (\lambda(\theta_t) + p(\theta_t))\, \nabla^2\, u_y^{00}, \qquad (4.175)$$

$$p(\theta_t) = p_1(\theta_t) + p_3(\theta_t).$$

Предложение 4.69. Предположим, что в условиях предыдущего предложения W_{23}-среда несжимаема ($\mathrm{div}_0\, u_y^{00} = \mathrm{const.}$).

Тогда W_{23}-среда динамически эквивалентна I-среде (4.48), H-среде (4.78), W_{12}-среде (4.134) и W_{13}-среде (4.160):

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0\, w. \qquad (4.176)$$

Предложение 4.70. Для того чтобы две разные среды принадлежали W_{23}-классу (аналогично (4.161)), необходимо и достаточно, чтобы при одинаковом распределении в ней напряжений

$$\tau_{ya}^0 = \tau_{yb}^0 \qquad (4.177)$$

столбцы U^0_{ya} и U^0_{yb} были линейно связаны матрицей из группы $\mathbf{W}_{23}$ (**R**, *9*) так, что

$$U^0_{ya} = W_{23ab}(y, I, \theta_{yt})U^0_{ub}; \qquad (4.178)$$

$$W_{23ab}(y, I, \theta_{yt}) \in \mathbf{W}_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{9}),\ W_{23ab}(y, I, \theta_{yt}) = W^{-1}_{23a}W_{23b}.$$

Доказательство. Из (4.167) при условии (4.177) получаем $W_{23a}U^0_{ya} = W_{23b}U^0_{yb}$, откуда и следует (4.178). □

Предложение 4.71. Уравнения термодинамики P_{23}-среды имеют вид ($w = p_{yt}$ или $w = 0$)

$$\rho_y(u^{\cdot}_y(\theta_{yt}) + w(\rho_{y-1})^{\cdot}) =$$

$$= \Phi^y_\lambda(I, \theta_{yt}) + \Phi^y_p(I, \theta_{yt}) + \mathrm{div}_0\, q^0_y + \rho_y\varphi_y. \qquad (4.179)$$

4.7. ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ НАВЬЕ—СТОКСА—ЛЯМЭ-КЛАССОВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИЛ

4.7.1. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ И ДИНАМИКИ NSL-СРЕД

С точки зрения излагаемой в данной монографии теории Навье—Стокса—Лямэ-среды [16, 38, 46] являются «необычными», «неукладывающимися» в общую теорию.

Определение 4.11. Персимметрическая матрица вида

$$M_{\mathrm{NSL}} = \left\| \begin{array}{ccccccccc} 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{array} \right\| \qquad (4.180)$$

называется *матрицей Навье—Стокса—Лямэ* (*NSL*).

Предложение 4.72. MSL-матрица является особенной

$$\det M_{\mathrm{NSL}} = 0. \tag{4.181}$$

Доказательство. $\det M_{\mathrm{NSL}} = 8\mu_y^8(1-1) = 0.\square$

Комментарий. Из предыдущего утверждения следует, что множество матриц Навье—Стокса—Лямэ не является группой и поэтому они могут входить только в некорректные уравнения механического состояния непрерывных сред, если таковые существуют.

Предложение 4.73. Множество NSL-матриц центрируемо группой вращений **SO** (**R**, **9**) (4.46):

$$C_f^{0,T} M_{\mathrm{NSL}} C_f^0 = M_{\mathrm{NSL}}. \tag{4.182}$$

Доказательство достигается аналитической или численной (например, в среде МАТЛАБ) проверкой равенства $C_f^{0,T} M_{\mathrm{NSL}} C_f^0 = M_{\mathrm{NSL}}, C_f^0 \in \mathbf{SO}(\mathbf{R}, \mathbf{9})$ (4.46).$\square$

Комментарий. Из равенства (4.182) следует, что NSL-матрица может быть принята в качестве матрицы реологических коэффициентов второго типа в некорректных уравнениях механического состояния квазилинейной непрерывной среды (4.23).

Предложение 4.74. Пусть: 1. $M_{\mathrm{NSL}}^y(I, \theta_{yt})$ — матрица Навье—Стокса—Лямэ (4.180);

2. $[du_y^{00} / dy^{00}]$ — симметрическое слагаемое в тождестве (3.6):

$$[du_y^{00} / dy^{00}] = 0.5\{du_y^{00} / dy^{00} + (du_y^{00} / dy^{00})^T\}; \tag{4.183}$$

3. Гипотеза: Некорректные уравнения механического состояния квазилинейной среды (4.30) имеют вид

$$(T_y^0) = -(w) + \Lambda_y(I_1, \theta_{yt}) + M_{\mathrm{NSL}}^y(I, \theta_{yt})U_y^0, \tag{4.184}$$

где $\Lambda_y(I_1,\theta_{yt}) = \lambda_y(I_1,\theta_{yt})\mathrm{col}\{1,0,0,0,1,0,0,0,1\}$, $\lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ — реологический коэффициент среды первого типа,

$M^{y}_{\mathrm{NSL}}(I, \theta_{yt})$ — матрица реологических коэффициентов второго типа $w = p_{yt}$ (среда — жидкость) или $w = 0$ (среда — упругий материал).

Тогда: 1. Класс квазилинейных некорректных непрерывных сред, имеющих своим уравнением механического состояния равенство (4.184), называется *классом квазилинейных Навье—Стокса—Лямэ-сред* (*NSL-сред*) (*Навье—Стокса*-жидкостей и *Лямэ*-упругих материалов).

2. Функции $\lambda_y(I_1, \theta_{yt})$, $\mu_y(I_1, \theta_{yt})$ точки, инвариантов матрицы $du^{00}_y \,/\, dy^{00}$ и температуры θ_{yt} называются *реологическими коэффициентами NSL-среды первого и второго типов.*

3. Некорректные уравнения механического состояния NSL-среды (4.184) эквивалентны линейной части определяющих NSL-соотношений (4.15)

$$T^0_y = (-(w) + \lambda_y(I_1, \theta_{yt}))E + 2\mu_y(I, \theta_{yt})[du^{00}_y \,/\, dy^{00}]. \quad (4.185)$$

4. Некорректные уравнения динамики NSL-среды имеют вид

$$\rho_y v^{00\cdot}_{y1} = \rho_y g^0_{t1}(\neg y, y) - (w)_1 + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \,/\, \partial y^0_1 +$$
$$+(2\partial\mu_y/\partial y^0_1, \partial\mu_y/\partial y^0_2, \partial\mu_y/\partial y^0_3, \partial\mu_y/\partial y^0_2, 0, 0, \partial\mu_y/\partial y^0_3, 0, 0)U^0_y +$$
$$+\mu_y(I, \theta_{yt})(u^1_{11} + u^2_{12} + u^3_{13}) + \mu_y(I, \theta_{yt})\nabla^2 u^0_{y1}; \quad (4.186)$$

$$\rho_y v^{00\cdot}_{y2} = \rho_y g^0_{t2}(\neg y, y) - (w)_2 + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \,/\, \partial y^0_2 +$$
$$+(0, \partial\mu_y/\partial y^0_1, 0, \partial\mu_y/\partial y^0_1, 2\partial\mu_y/\partial y^0_2, \partial\mu_y/\partial y^0_3, 0, \partial\mu_y/\partial y^0_3, 0)U^0_y +$$
$$+\mu_y(I, \theta_{yt})(u^1_{21} + u^2_{22} + u^3_{23}) + \mu_y(I, \theta_{yt})\nabla^2 u^0_{y2}; \quad (4.187)$$

$$\rho_y v^{00\cdot}_{y3} = \rho_y g^0_{t3}(\neg y, y) - (w)_3 + \partial\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \,/\, \partial y^0_3 +$$
$$+(0, 0, \partial\mu_y/\partial y^0_1, 0, 0, \partial\mu_y/\partial y^0_2, \partial\mu_y/\partial y^0_1, \partial\mu_y/\partial y^0_2, 2\partial\mu_y/\partial y^0_3)U^0_y +$$
$$+\mu_y(I, \theta_{yt})(u^1_{31} + u^2_{32} + u^3_{33}) + \mu_y(I, \theta_{yt})\nabla^2 u^0_{y3}. \quad (4.188)$$

Комментарии: 1. Если матрица напряжений несимметрична (обратное ниоткуда не следует), то система уравнений (4.184) при $\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) = \lambda_y(\theta_{yt})$ неразрешима относительно элементов несимметричной матрицы $du^{00}_y \,/\, dy^{00}$. В условиях предположения о симметричности матрицы T_y^0 указанная система уравнений имеет бесконечно много решений. При дополнительном предположении о бесциркуляционности движения среды уравнения (4.184) разрешимы относительно неизвестных U_y^0, но обратная к (4.180) матрица имеет другую структуру, и, следовательно, уравнения (4.184) остаются некорректными.

2. Реологические коэффициенты в уравнениях двумерной и трехмерной NSL-сред одинаковы. Это означает, что указанные физические характеристики NSL-сред не зависят от размерности среды и в этом смысле являются корректными.

Предложение 4.75. Предположим, что: 1. В дополнение к условиям предыдущего предложения вторые смешанные производные координат вектора NSL-среды по полевым координатам непрерывны и, следовательно, равны (4.75):

$$u_{12}^1 = u_{21}^1, u_{13}^1 = u_{31}^1, u_{12}^2 = u_{21}^2,$$
$$u_{12}^2 = u_{21}^2, u_{13}^3 = u_{31}^3, u_{23}^3 = u_{32}^3; \qquad (4.189)$$

2. Матрица имеет вид

$$L_y =$$
$$= \begin{Vmatrix} 2\partial\mu_y/\partial y_1^0, \partial\mu_y/\partial y_2^0, \partial\mu_y/\partial y_3^0, \partial\mu_y/\partial y_2^0, 0, 0, \partial\mu_y/\partial y_3^0, 0, 0 \\ 0, \partial\mu_y/\partial y_1^0, 0, \partial\mu_y/\partial y_1^0, 2\partial\mu_y/\partial y_2^0, \partial\mu_y/\partial y_3^0, 0, \partial\mu_y/\partial y_3^0, 0 \\ 0, 0, \partial\mu_y/\partial y_1^0, 0, 0, \partial\mu_y/\partial y_2^0, \partial\mu_y/\partial y_1^0, \partial\mu_y/\partial y_2^0, 2\partial\mu_y/\partial y_3^0 \end{Vmatrix}.$$
$$(4.190)$$

Тогда уравнения динамики NSL-среды имеют вид

$$\rho_y v_y^{0\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \operatorname{grad}_0 w + \operatorname{grad}_0 \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) +$$
$$+ L_y(I, \theta_{yt}) U_y^0 + \mu_y(I, \theta_{yt}) \operatorname{grad}_0 \operatorname{div}_0 u_y^{00} +$$
$$+ \mu_y(I, \theta_{yt}) \nabla^2 u_y^{00}. \qquad (4.191)$$

Комментарии: 1. Не существует группы, порождающей NSL-среды. Это означает, что или эти среды занимают особое место среди квазилинейных непрерывных сред, или они вообще не существуют в реальном физическом мире, являясь некорректным приближением ранее рассмотренных сред. Их появление обязано представлению о матрице $[du_y^{00} / dy^{00}]$ как о матрице деформаций (для упругого материала при условии (3.22)) или скоростей деформаций. На самом деле эта матрица является симметрической частью тождественного разложения матрицы du_y^{00} / dy^{00}, элементы которой или скорости деформаций ($du_y^{00} / dy^{00} \equiv dv_y^{00} / dy^{00}$), или сами деформации (если речь идет об упругом материале при определенных условиях (3.22) ($du_y^{00} / dy^{00} \equiv dz_y^{00} / dy^{00}$)).

2. Условие (3.16) является определяющим для получения уравнений динамики (4.185)—(4.186) и всех нижеследующих уравнений динамики NSL-сред.

Эти условия нарушаются при армировании среды, наличии в среде изолированных инородных включений, разрывов сплошности, сколов, трещин и т. п., откуда следует, что ни уравнения (4.184), ни все нижеследующие уравнения динамики для изучения деформирования NSL-сред при наличии вышеуказанных явлений использоваться непосредственно (без каких-либо дополнительных предположений) не могут.

3. NSL-среда динамически эквивалентна (4.165) при $p_2 = p_3$.

4. Предыдущее утверждение, возможно, объясняет часто встречающиеся разногласия между результатами интегрирования NSL-уравнений и результатами эксперимента: интегрируются всегда одни и те же NSL-уравнения, а экспериментальные среды могут быть разные. Если реальная (физическая) среда является NSL-средой (4.184), то совпадения теоретических и экспериментальных результатов ожидать трудно по причине ее некорректности. Если реальная среда оказалась корректной средой, динамически эквивалентной NSL-среде, то совпадение теоретических и экспериментальных результатов может быть удовлетворительным.

Предложение 4.76. *Предположим*, что в дополнение к условиям предыдущих предложений реологический коэффициент первого типа $\lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ NSL-среды имеет простейшее линейное представление

$$\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) = \lambda_y(\theta_{yt}) I_1 = \lambda_y(\theta_{yt}) \mathrm{div}_0 u_y^{00}. \qquad (4.192)$$

Тогда: 1. Равенства

$$(T_y^0) = -(w) + W_{\mathrm{NSL}}(y, I, \theta_{yt})U_y^0, \qquad (4.193)$$

где матрица имеет структуру (4.180) с новыми коэффициентами

$$\nu_{11} = \nu_{55} = \nu_{99} = 2\mu + \lambda, \quad \nu_{15} = \nu_{19} = \nu_{51} = \nu_{15} = \nu_{91} = \nu_{99} = \lambda$$

и остальными прежними, являются некорректными квазилинейными уравнениями механического состояния W_{NSL}-класса NSL-сред ($\det W_{\mathrm{NSL}}(y, I, \theta_{yt}) = 0$).

2. W_{NSL}-среда не имеет матрицы, обратной к матрице $W_{\mathrm{NSL}}(y, I, \theta_{yt})$, и, следовательно, не имеет ни реологических модулей, ни коэффициентов влияния (элементов несуществующей обратной матрицы $W_{\mathrm{NSL}}^{-1}(y, I, \theta_{yt})$ и получаемых с их использованием модулей Юнга, сдвига и коэффициента Пуассона).

3. Равенства

$$T_y^0 = (-w + \lambda_y(I_1, \theta_{yt})\,\mathrm{div}_0 u_y^{00})E + $$
$$+ 2\mu_y(I, \theta_{yt})[du_y^{00} / dy^{00}] \qquad (4.194)$$

являются некорректными определяющими соотношениями квазилинейной W_{NSL}-среды.

4. Некорректные уравнения динамики W_{NSL}-класса сред имеют вид

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0 w + \mathrm{div}_0 u_y^{00}\,\mathrm{grad}_0 \lambda_y(\theta_{yt}) +$$
$$+ L_y(I, \theta_{yt})U_y^0 + (\lambda_y(\theta_{yt}) + \mu_y(I, \theta_{yt}))\,\mathrm{grad}_0 \mathrm{div}_0 u_y^{00} +$$
$$+ \mu_y(I, \theta_{yt})\nabla^2 u_y^{00}. \qquad (4.195)$$

Предложение 4.77. Предположим, что в условиях предыдущих предложений деформирование NSL-среды бесциркуляционно (потенциально) (3.96), (3.100):

$$du_y^{00} / dy^{00} = (du_y^{00} / dy^{00})^T = [du_y^{00} / dy^{00}]. \qquad (4.196)$$

Тогда: 1. Уравнения динамики W_{NSL}-среды имеют две эквивалентные формы записи (по причине $\mathrm{grad}_0 \mathrm{div}_0 u_y^{00} = \nabla^2 u_y^{00}$ при (4.75)):

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0 w + (2\mu_y(I, \theta_{yt}) + \lambda_y(\theta_{yt}))\nabla^2 u_y^{00},$$

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0 w + (2\mu_y(I, \theta_{yt}) +$$
$$+ \lambda_y(\theta_{yt}))\,\mathrm{grad}_0\,\mathrm{div}_0\, u_y^{00}. \qquad (4.197)$$

2. Элементы симметричной матрицы du_y^{00} / dy^{00}, а также равной ей в данном случае матрицы $[du_y^{00} / dy^{00}]$, могут быть представлены в трех эквивалентных формах записи, в том числе в виде (3.103):

$$du_y^{00} / dy^{00} = [du_y^{00} / dy^{00}], \qquad (4.198)$$

$$u_i^i = \varepsilon_{ii}.$$
$$u_j^i = u_i^j = I / 2(u_j^i + u_i^j) = \gamma_{ij} / 2 = \gamma_{ji} / 2. \qquad (4.199)$$

Следовательно, для этой формы записи имеем

$$\overline{U}_y^0 = \mathrm{col}\{\varepsilon_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{31}, \gamma_{12}, \varepsilon_{22}, \gamma_{32}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, \varepsilon_{33}\}. \quad (4.200)$$

3. Квазилинейные уравнения механического состояния NSL-среды принимают форму, совпадающую с (4.59):

$$(T_y^0) = -(w) + W_{\mathrm{NSL}}(y, I, \theta_{yt})\overline{U}_y^o, \qquad (4.201)$$

$$W_{\mathrm{NSL}}(y, I, \theta_{yt}) = \begin{Vmatrix} 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 2\mu+\lambda \end{Vmatrix},$$

$$\det W_{\mathrm{NSL}}(y, I, \theta_{yt}) = 4\mu^8(2\mu + 3\lambda) \neq 0. \qquad (4.202)$$

4. Множество неособенных матриц $W_{\mathrm{NSL}}(y, I, \theta_{yt})$ по-прежнему не является группой (произведение матриц вида (4.201) не яв-

ляется матрицей того же вида), но по причине (4.202) эти матрицы имеют обратные матрицы с соответствующими коэффициентами влияния $w_1(y, I, \theta_{yt})$, $w_2(y, I, \theta_{yt})$ и $w_3(y, I, \theta_{yt})$.

5. По причине существования обратной матрицы в случае бесциркуляционного (потенциального) деформирования NSL-среды имеют реологические модули первого и второго типов, совпадающие с коэффициентами влияния w_2 и w_3:

$$\alpha(y, I, \theta_{yt}) = w_2(y, I, \theta_{yt}) = -\lambda / 2\mu(2\mu + 3\lambda),$$

$$\beta(y, I, \theta_{yt}) = w_3(y, I, \theta_{yt}) = I / \mu, \tag{4.203}$$

а коэффициент влияния w_1 не совпадает с выражением $2\beta + \alpha$, как можно было бы ожидать (4.201), а вычисляется по формуле

$$w_1(y, I, \theta_{yt}) = (\mu + \lambda) / \mu(2\mu + 3\lambda). \tag{4.204}$$

6. По причине существования обратной матрицы в случае бесциркуляционного (потенциального) деформирования NSL-среды имеют модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона (индекс NSL опущен):

$$E_3(y, I, \theta_{yt}) = 1 / w_1 = \mu(2\mu + 3\lambda) / (\mu + \lambda), \tag{4.205}$$

$$G_3(y, I, \theta_{yt}) = 1 / w_3 = \mu, \tag{4.206}$$

$$\nu_3(y, I, \theta_{yt}) = -w_2 / w_1 = \lambda / 2(\mu + \lambda), \tag{4.207}$$

связанные друг с другом соотношениями

$$\lambda_y(\theta_{yt}) = 2\nu_3 G_3 / (1 - 2\nu_3), \ \mu_y(I, \theta_{yt}) = G_3, \tag{4.208}$$

$$E_3(I, \theta_{yt}) = 2G_3(1, \theta_{yt})(1 + \nu_3(I, \theta_{yt})). \tag{4.209}$$

Доказательство. Уравнения (4.197) и (4.201) получаются подстановкой условий (4.196) в (4.193). Справедливость остальных равенств проверяется простыми вычислениями. □

Комментарии: 1. При непотенциальном движении реологические модули первого и второго типов, а также модули Юнга, сдвига и коэффициент Пуассона NSL-среды отсутствуют. Использование указанных характеристик в данном случае приводит к ошибкам, порядок которых определяется величиной разности разноиндексных элементов матрицы и их полусумм (средних значений симметричных элементов), т. е. разности элементов матрицы $\frac{1}{2}(du_y^{00} / dy^{00} - (du_y^{00} / dy^{00})^T)$. Указанная разность равна нулю только в случае потенциального движения среды (4.196).

2. При потенциальном деформировании NSL-среда остается некорректной (не существует порождающей ее группы), но матрица реологических коэффициентов имеет обратную, что позволяет определить для нее реологические модули и, следовательно, модуль Юнга, сдвига и коэффициент Пуассона.

3. Необходимо понимать, что в общем случае $du_y^{00}/dy^{00} \neq$ $\neq (du_y^{00} / dy^{00})^T$, подстановка равенств (4.205)—(4.207) в уравнения (4.197) приводит к уравнениям динамики относительно «старых» переменных с коэффициентами, зависящими от величин $E_3(I, \theta_{yt})$, $G_3(I, \theta_{yt})$, $\nu_3(I, \theta_{yt})$, полученных с использованием уравнений механического состояния (4.201) относительно «новых» переменных $\overline{U}_y^0$ (4.200). В терминах «старых» переменных величины $E_3(I, \theta_{yt})$, $G_3(I, \theta_{yt})$, $\nu_3(I, \theta_{yt})$ вообще не существуют.

4. Для двумерных NSL-сред соответствующие характеристики имеют вид

$$M_{\mathrm{NSL}} = \begin{Vmatrix} 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \mu & 0 \\ 0 & \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{Vmatrix}, \qquad (4.210)$$

$$\det M_{\mathrm{NSL}} = 4\mu^2(\mu^2 - \mu^2) = 0;$$

$$W_{\mathrm{NSL}}(y, I, \theta_{yt}) = \begin{Vmatrix} 2\mu+\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & \mu & 0 \\ 0 & \mu & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 2\mu+\lambda \end{Vmatrix}, \qquad (4.211)$$

$$\det W_{\mathrm{NSL}} = 4\mu(\mu + \lambda)(\mu^2 - \mu^2) = 0;$$

$$W_{\mathrm{NSL}}(y, I, \theta_{yt}) = \begin{Vmatrix} 2\mu+\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 2\mu+\lambda \end{Vmatrix}, \qquad (4.212)$$

$$\det W_{\mathrm{NSL}}(y, I, \theta_{yt}) = 4\mu^3(\mu+\lambda) \neq 0.$$

Обратная матрица имеет аналогичную структуру с коэффициентами восстановления вида

$$w_1^y(I, \theta_{yt}) = (2\mu+\lambda)/4\mu(\mu+\lambda),\ w_2^y(I, \theta_{yt}) = -\lambda/4\mu(\mu+\lambda),$$

$$w_3^y(I, \theta_{yt}) = I/\mu; \qquad (4.213)$$

$$\alpha_y(I, \theta_{yt}) = w_2^y(I, \theta_{yt}) = -\lambda/4\mu(\mu+\lambda),$$

$$\beta_y(I, \theta_{yt}) = w_3^y(I, \theta_{yt}) = I/\mu. \qquad (4.214)$$

Модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона связаны с реологическими коэффициентами и друг с другом формулами

$$E_2^y(I, \theta_{yt}) = 4\mu(\mu+\lambda)/(2\mu+\lambda),\ G_2^y(I, \theta_{yt}) = \mu,$$

$$\nu_2^y(I, \theta_{yt}) = \lambda/(2\mu+\lambda), \qquad (4.215)$$

$$E_2^y = 2G_2^y(1+\nu_2^y).$$

Связь реологических коэффициентов с величинами E_2^y, G_2^y и ν_2^y имеет вид

$$\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) = 2G_2^y\ \nu_2^y/(1-\nu_2^y),\ \mu_y(I, \theta_{yt}) = G_2^y. \ (4.216)$$

5. Модуль Юнга $E_3^y(I, \theta_{yt})$, коэффициент Пуассона $\nu_3^y(I, \theta_{yt})$ и коэффициент Лямэ (λ_y), а также их связи не совпадают с аналогичными характеристиками двумерных NSL-материалов (4.215), (4.216).

Следовательно, в случае формулировки прикладных задач в терминах модулей Юнга и коэффициента Пуассона для двумерных NSL-сред нельзя использовать усеченный по одной координате рабочий аппарат механики трехмерных сред. Все сказанное в полной мере относится к одномерным материалам, которые в монографии не рассматриваются.

6. Аналог модуля сдвига (совпадающий с реологическим коэффициентом второго типа), а также равенство (4.209) являются корректными характеристиками NSL-среды.

7. Тот факт, что NSL-среды не порождаются какой-либо группой, может свидетельствовать либо о том, что эти среды занимают особое место среди квазилинейных непрерывных сред, либо о том, что они вообще в реальном мире не существуют, являясь некорректными приближениями вышерассмотренных сред.

Предложение 4.78. Предположим, что среднеарифметическое элементов главной диагонали д-деформатора равно нулю:

$$\frac{1}{3}(T_{11}^0 + T_{22}^0 + T_{33}^0) = 0. \tag{4.217}$$

Тогда: 1. Реологические коэффициенты NSL-среды первого и второго типов, в нарушение требования определения (**О.4.7**), становятся зависимыми, а один из них отрицательным, причем

$$\lambda_y(I, \theta_{yt}) = -\frac{2}{3}\mu_y(I, \theta_{yt}). \tag{4.218}$$

н2. Уравнения механического состояния (4.184) и эквивалентые им определяющие соотношения NSL-среды продолжают оставаться некорректными ($\det W_{\text{NSL}} = 0$).

3. Некорректные уравнения динамики NSL-среды (4.195) имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_y v_y^{00\cdot} = &-\operatorname{grad}_0(w) + \rho_y g_t^0(\neg y, y) + \operatorname{div}_0 u_y^{00} \operatorname{grad}_0 \lambda_y(\theta_{yt}) + \\ &+ L_y(I, \theta_{yt}) U_y^0 + 1/3\mu_y(I, \theta_{yt}) \operatorname{grad}_0 \operatorname{div}_0 u_y^{00} + \\ &+ \mu_y(I, \theta_{yt}) \nabla^2 u_y^{00}.\end{aligned} \tag{4.219}$$

Комментарии: 1. Предположение (4.218) противоречит требованию независимости реологических коэффициентов вязкости (по определению (**O.4.7**)) и может быть принято лишь как предположение. Оно эквивалентно допущению о пренебрежимой малости слагаемых вязкого или упругого происхождения в диагональных элементах д-деформатора T_y^0.

2. Математическая реализация вышеуказанного предположения приводит к отрицательному реологическому коэффициенту первого типа и как следствие к искусственному занижению влияния вязкости или упругости на деформирование среды $(I/3\mu < (\lambda + \mu))$.

Предложение 4.79. Предположим, что в дополнение к условиям предыдущих предложений (4.75), (4.192), (4.196) NSL-среда несжимаема ($\mathrm{div}_0 u_y^{00} = 0$).

Тогда NSL-среда динамически эквивалентна средам (4.78), (4.134), (4.160), (4.176):

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0\, w. \tag{4.220}$$

Предложение 4.80. Пусть реологический коэффициент второго типа W_{NSL}-среды не зависит от инварианта I матрицы du_y^{00} / dy^{00}.

Тогда: 1. Уравнения механического состояния и динамики W_{NSL}-среды линейны

$$(T_y^0) = -(w) + W_{\mathrm{NSL}}(y, \theta_{yt})U_y^0, \tag{4.221}$$

$$\begin{gathered}\rho_y v_y^{00\cdot} = -\,\mathrm{grad}_0 w + \rho_y g_t^0(\neg y, y) + \mathrm{div}_0 u_y^{00}\,\mathrm{grad}_0 \lambda_y(\theta_{yt}) + \\ + L_y(\theta_{yt})U_y^0 + (\lambda(\theta_{yt}) + \mu_y(\theta_{yt}))\,\mathrm{grad}_0 \mathrm{div}_0 u_y^{00} + \\ + \mu_y(\theta_{yt})\nabla^2 u_y^{00}.\end{gathered} \tag{4.222}$$

2. Если все реологические коэффициенты W_{NSL}-среды зависят только от независящей от точки температуры, то уравнения напряженного состояния и динамики линейны и однородны:

$$(T_y^0) = -(w) + W_{\mathrm{NSL}}(\theta_t)U_y^0, \tag{4.223}$$

$$\begin{gathered}\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0 w + (\lambda(\theta_t) + \\ + \mu(\theta_t))\,\mathrm{grad}_0 \mathrm{div}_0 u_y^{00} + \mu(\theta_t)\nabla^2 u_y^{00}.\end{gathered} \tag{4.224}$$

4.7.2. УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ

Определение 4.12. Пусть: 1. $\Lambda_y(I, \theta_{yt})$, $M^y_{\text{NSL}}(I, \theta_{yt})$ — столбец и матрица реологических коэффициентов первого и второго типов NSL-среды (4.184);

2. U^0_y – (9×1)-столбец, составленный из (3×1)-столбцов матрицы du^{00}_y / dy^{00}.

Тогда: 1. Скалярное произведение

$$\Phi^y_\lambda(I_1, \theta_{yt}) = \Lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \cdot V^0_y = \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \operatorname{div}_0 v^{00}_y \qquad (4.225)$$

аналогично (4.86) называется *плотностью мощности напряжений первого типа относительно меры* в точке y.

2. Скалярное произведение (билинейная форма с матрицей $M^y_{\text{NSL}}(I, \theta_{yt})$) вида

$$\Phi^y_\mu(I, \theta_{yt}) = M^y_{\text{NSL}}(I, \theta_{yt}) U^0_y \cdot V^0_y \qquad (4.226)$$

называется *плотностью мощности напряжений второго типа относительно меры* в точке y.

Предложение 4.81. Пусть: 1. $\Phi^y_\lambda(I, \theta_{yt})$, $\Phi^y_\mu(I, \theta_{yt})$ — функции из предыдущего определения (4.225), (4.226);

2. $u^{\cdot}_y(\theta_{yt})$ — плотность скорости изменения внутренней энергии NSL-среды в точке y относительно меры $m(dy)$.

Тогда уравнение термодинамики некорректной квазилинейной NSL-среды имеет вид ($w = p_{yt}$ или $w = 0$)

$$\rho_y(u^{\cdot}_y(\theta_{yt} + w(\rho^{-1}_y)\cdot) =$$
$$= \Phi^y_\lambda(I, \theta_{yt}) + \Phi^y_\mu(I, \theta_{yt}) + \operatorname{div}_0 q^0_y + \rho_y \varphi_y. \qquad (4.227)$$

Доказательство сводится к подстановке уравнений механического состояния NSL-среды (4.184) в условия термодинамической сбалансированности Вселенной механики Галилея с учетом определений (4.225), (4.226) и доказательства равенства (2.52). □

Комментарии: 1. Изменение внутренней энергии первого типа (2.225) происходит при дилатационном деформировании (3.42) и при движении несжимаемой NSL-среды отсутствует. Уравнение термодинамики NSL-среды, аналогично (4.88), принимает вид

$$\rho_y (u^{\cdot}_y (\theta_{yt}) + w(\rho_y^{-1})\cdot) = \Phi^y_\mu (I, \theta_{yt}) + \mathrm{div}_0 q^0_y + \rho_y \varphi_y . \quad (4.228)$$

2. Класс NSL-сред термодинамически не эквивалентен ни одному из вышерассмотренных классов сред. Решение задач динамики NSL-сред без учета уравнений термодинамики может привести к физически неадекватным результатам.

4.8. ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ *R*-КЛАССА ДВУМЕРНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СРЕД

4.8.1. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Предложение 4.82. Пусть: 1. $\mathbf{GO}_{yt}$ $(\mathbf{R}, \mathbf{2})$ — группа двумерных подобий [11];

2. $M^y_1, M^y_2 \in \mathbf{GO}_{yt}$ $(\mathbf{R}, \mathbf{2})$ — (2×2)-матрицы подобия вида

$$M^y_1 = \begin{Vmatrix} \mu^y_1 & -\mu^y_2 \\ \mu^y_2 & \mu^y_1 \end{Vmatrix}, \quad M^y_2 = \begin{Vmatrix} \mu^y_3 & -\mu^y_4 \\ \mu^y_4 & \mu^y_3 \end{Vmatrix}, \quad (4.229)$$

такие что

$$(M^y_1)^T M^y_1 = (\mu^{y2}_1 + \mu^{y2}_2)E, (M^y_2)^T M^y_2 = (\mu^{y2}_3 + \mu^{y2}_4)E; (4.230)$$

3. $\mathbf{GR}_{yt}$ $(\mathbf{R}, \mathbf{4})$ — группа на R_4, элементами которой являются блочные (4×4)-матрицы с (2×2)-матричными блоками в виде двумерных подобий из $\mathbf{GO}_{yt}$ $(\mathbf{R}, \mathbf{2})$ (4.229) вида

$$M_y(I) = \begin{Vmatrix} M^y_1 & -M^y_2 \\ M^y_2 & M^y_1 \end{Vmatrix}; \quad (4.231)$$

4. **SO** $(\mathbf{R}, \mathbf{4})$ — группа матриц (4.50) является подгруппой группы вращений векторного пространства R_4.

Тогда: 1. Группа $\mathbf{GR}_{yt}$ $(\mathbf{R}, \mathbf{4})$ является централизатором своей подгруппы вращений **SO** $(\mathbf{R}, \mathbf{4})$, т. е. для любых матриц $M_y(I) \in \mathbf{GR}_{yt}(\mathbf{R}, \mathbf{4})$ и $C^0_f \in \mathbf{SO}$ $(\mathbf{R}, \mathbf{4})$ (4.50)

$$M_y^{-1} C^0_f M_y = C^0_f . \quad (4.232)$$

2. Группа вращений $\mathbf{SO}\ (\mathbf{R},\ 4)$ является центром группы $\mathbf{GR}_{yt}$ $(\mathbf{R},\ 4)$, т. е. для любых матриц $M_y(I) \in \mathbf{GR}_{yt}(\mathbf{R}, 4)$ и $C_f^0 \in \mathbf{SO}(\mathbf{R}, 4)$

$$C_f^{0,T} M_y C_f^0 = M_y,\ \mathbf{SO}\,(\mathbf{R}, 4) \subset \mathbf{GR}_{yt}\,(\mathbf{R}, 4). \tag{4.233}$$

Доказательство следует из факта коммутативности групп (2×2)-подобий (4.229) на R_2 при условии $\mathbf{SO}(\mathbf{R}, 4) \subset \mathbf{GR}_{yt}(\mathbf{R}, 4)$.□

Комментарии: 1. Условия (4.232), (4.233) эквивалентны требованию равенства нулю коммутанта матриц C_f^0 и M_y:

$$[C_f^0, M_y] = M_y C_f^0 - C_f^0 M_y = 0. \tag{4.234}$$

2. Блочная (4×4)-матрица (4.231) с блоками (4.229) не является подобием (матрица $M_y^T M_y$ — не гомотетия).

Пример. Пусть в терминах MATLAB $M_y = [1 -2 -3\ 4;\ 2\ 1 -4 -3;\ 3 -4\ 1 -2;\ 4\ 3\ 2\ 1]$, тогда $M'_y M_y = [30\ 0\ 0 -4;\ 0\ 30\ 4\ 0;\ 0\ 4\ 30\ 0; -4\ 0\ 0\ 30]$, $\mathrm{inv}(M_y) = [0.052\ 0.0543\ 0.0928\ 0.1403; -0.0543\ 0.052\ -0.1403\ 0.0928; -0.0928\ -0.1403\ 0.052\ 0.0543;\ 0.1403\ -0.0928\ -0.0543\ 0.052]$, $\det(M_y) = 884$.

3. Из доказанных фактов следует, что матрицы группы $\mathbf{GR}_{yt}$ $(\mathbf{R},\ 4)$, представленные в поэлементной (4×4)-форме, будучи инвариантами выбора инерциального базиса (4.233), могут быть использованы для формирования третьего слагаемого в корректных уравнениях механического состояния двумерной квазилинейной непрерывной среды.

Определение 4.13. Пусть: 1. ν_y^0 и $\Lambda_y^0(I_1, \theta_{yt})$ — (4×1)-столбцы вида (4.51)

$$\nu_y^0 \equiv -(w) = -w \operatorname{col}\{1,\ 0,\ 0,\ 1\}, \tag{4.235}$$

$$\Lambda_y^0(I_1, \theta_{yt}) = \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) \operatorname{col}\{1,\ 0,\ 0,\ 1\}; \tag{4.236}$$

2. $M_y^0(I, \theta_{yt})$ — (4×4)-матрица из группы $\mathbf{GR}_{yt}$ $(\mathbf{R},\ 4)$ (4.231);

3. Нелинейные уравнения

$$M_y^0(I, \theta_{yt}) U_y^0 + \Lambda_y^0(I_1, \theta_{yt}) = (T_y^0) + (w) \equiv (\tau_y^0) \tag{4.237}$$

имеют единственное решение относительно неизвестного столбца U_y^0.

Тогда: 1. Равенства вида

$$(T_y^0) = -(w) + \Lambda_y^0(I_1, \theta_{yt}) + M_y^0(I, \theta_{yt}) U_y^0 \qquad (4.238)$$

называются *уравнениями механического состояния R-класса двумерных корректных квазилинейных непрерывных сред* (Resemblanse — подобие).

2. Элементы столбца $\Lambda_y^0(I_1, \theta_{yt})$ и матрицы $M_y^0(I, \theta_{yt})$ называются *реологическими коэффициентами R-среды первого и второго типов* соответственно.

Предложение 4.83. Пусть: 1. $|du_y^{00} / dy^{00}|$ — матрица вида

$$|du_y^{00} / dy^{00}| = \begin{Vmatrix} -u_2^1 & u_1^1 \\ -u_2^2 & u_1^2 \end{Vmatrix}; \qquad (4.239)$$

2. $M_1^y(I, \theta_{yt})$, $M_2^y(I, \theta_{yt})$ — матрицы из (4.229).

Тогда д-деформатор T_y^0 имеет следующую матричную запись:

$$T_y^0 = h(-w + \lambda_y(I_1, \theta_{yt})) + M_1^y(I, \theta_{yt})\, du_y^{00} / dy^{00} +$$

$$+ M_2^y(I, \theta_{yt}) |du_y^{00} / dy^{00}|. \qquad (4.240)$$

Комментарии: 1. Из предложения (4.240) следует, что R-класс двумерных сред имеет пять независимых реологических коэффициентов. Это объясняется тем, что требование инвариантности матрицы реологических коэффициентов среды второго типа относительно двумерной группы вращений (содержащей только матрицы простейших вращений (4.38), (4.42), (4.43)) гораздо слабее аналогичных требований для трехмерной группы вращений (состоящих из трех простейших сомножителей).

2. Определяющие соотношения (4.15) для R-класса сред не существуют по причине присутствия в правой части равенства (4.240) матричного (но не числового) сомножителя $M_1^y(I, \theta_{yt})$ при производной du_y^{00} / dy^{00} и слагаемого $M_2^y(I, \theta_{yt}) |du_y^{00} / dy^{00}|$. Равенство (4.240) является не матричной функцией матричного аргумента (4.15), а матричной записью зависимости элементов д-деформатора от элементов матрицы du_y^{00} / dy^{00}, т. е. матричной записью уравнений механического состояния (4.238).

3. Из равенства (4.240) следует, что производная du_y^{00} / dy^{00} и д-деформатор T_y^0 R-среды в общем случае не могут быть одновременно симметрическими матрицами. По причине кососимметричности матриц $M_1^y(I, \theta_{yt})$ и $M_2^y(I, \theta_{yt})$ д-деформатор T_y^0 принципиально не может быть симметрической матрицей.

Предложение 4.84. Пусть: 1. $\mathrm{grad}_0 w$ — градиент функции w в точке $y \in \varepsilon_y$ в E_0;

2. $\mathrm{grad}_0 \lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ — градиент реологического коэффициента $\lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ в точке $y \in \varepsilon_y$ в E_0;

3. $\mathrm{Div}_0 du_y^{00} / dy^{00} \equiv \mathrm{col}\{\mathrm{div}_0 u_{1y}^0, \mathrm{div}_0 u_{2y}^0\}$ — (1×2)-столбец дивергенций в E_0 строк u_{1y}^0, u_{2y}^0 производной du_y^{00} / dy^{00} в точке $y \in \varepsilon_y$ в E_0:

$$\mathrm{Div}_0 du_y^{00} / dy^{00} = \nabla^2 u_y^0; \tag{4.241}$$

4. Смешанные вторые производные координат вектора u_y^{00} по полевым координатам в точке $y \in \varepsilon_y$ $u_{12}^1 \equiv \partial^2 u_{1y}^0 / \partial y_1^0 \partial y_2^0, u_{21}^1 \equiv \equiv \partial^2 u_{1y}^0 / \partial y_2^0 \partial y_1^0$, $u_{12}^2 \equiv \partial^2 u_{2y}^0 / \partial y_1^0 \partial y_2^0$, $u_{21}^2 = \partial^2 u_{2y}^0 / \partial y_2^0 \partial y_1^0$ существуют и

$$N_y^0(I, \theta_{yt}) = \mathrm{col}\{u_{21}^1 - u_{21}^1, u_{12}^2 - u_{21}^2\}; \tag{4.242}$$

5. $\|\partial M_2^y / \partial y_2^0| - \partial M_2^y / \partial y_1^0\|$ — (2×4)-матрица вида

$$\|\partial M_2^y / \partial y_2^0| - \partial M_2^y / \partial y_1^0\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc|cc} \partial\mu_3^y/\partial y_2^0 & -\partial\mu_4^y/\partial y_2^0 & -\partial\mu_3^y/\partial y_1^0 & \partial\mu_4^y/\partial y_1^0 \\ \partial\mu_4^y/\partial y_2^0 & \partial\mu_3^y/\partial y_2^0 & -\partial\mu_4^y/\partial y_1^0 & -\partial\mu_3^y/\partial y_1^0 \end{array} \right\|; \tag{4.243}$$

6. $\|\partial M_1^y / \partial y_1^0| \partial M_1^y / \partial y_2^0\|$ — (2×4)-матрица вида

$$\|\partial M_1^y / \partial y_1^0| \partial M_1^y / \partial y_2^0\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc|cc} \partial\mu_1^y/\partial y_1^0 & -\partial\mu_2^y/\partial y_1^0 & \partial\mu_1^y/\partial y_2^0 & -\partial\mu_2^y/\partial y_2^0 \\ \partial\mu_2^y/\partial y_1^0 & \partial\mu_1^y/\partial y_1^0 & -\partial\mu_2^y/\partial y_2^0 & \partial\mu_1^y/\partial y_2^0 \end{array} \right\|; \tag{4.244}$$

7. $L_y(I, \theta_{yt})$ — (2×4)-матрица, являющаяся суммой матриц

$$L_y(I, \theta_{yt}) =$$

$$= \| \partial M_1^y / \partial y_1^0 + \partial M_2^y / \partial y_2^0 \mid \partial M_1^y / \partial y_2^0 - \partial M_2^y / \partial y_1^0 \|, \quad (4.245)$$

Тогда столбец из уравнений движения двумерной R-среды (2.65) имеет вид

$$\mathrm{Div}_0 T_y^0 = -\operatorname{grad}_0 w + \operatorname{grad}_0 \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) + M_1^y(I, \theta_{yt}) \nabla^2 u_y^0 +$$

$$+ M_2^y(I, \theta_{yt}) N_y^0(I, \theta_{yt}) + L_y(I, \theta_{yt}) U_y^0. \quad (4.246)$$

Доказательство достигается простыми преобразованиями столбца $\mathrm{Div}_0 T_y^0$ с учетом равенства (4.240). □

Комментарий. Из (4.240) и (4.246) следует, что реологические коэффициенты R-среды матрицы $M_1^y(I, \theta_{yt})$ определяют вклад в движение среды *лапласианов* ∇^2 координат вектора u_y^{00}, а реологические коэффициенты R-среды матрицы $M_2^y(I, \theta_{yt})$ определяют вклад в движение среды эффектов, связанных с отсутствием непрерывности и, следовательно, равенства вторых смешанных производных ($N_y^0(I) = 0$ в противном случае).

4.8.2. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ

Предложение 4.85. 1. Корректные динамические уравнения механического состояния R-класса двумерных сред (4.18) имеют вид

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_{yt}^0(\neg y, y) + \mathrm{Div}_0 T_y^0, \quad (4.247)$$

$$(T_y^0) = -(w) + \Lambda_y^0(I_1, \theta_{yt}) + M_y^0(I, \theta_{yt}) U_y^0; \quad (4.248)$$

2. Уравнения динамики R-класса двумерных квазилинейных непрерывных сред имеют вид

$$\rho_y v_y^{00\cdot} = \rho_y g_t^0(\neg y, y) - \operatorname{grad}_0 w + \operatorname{grad}_0 \lambda_y(I_1, \theta_{yt}) +$$

$$+ L_y(I, \theta_{yt}) U_y^0 + M_1^y(I, \theta_{yt}) \nabla^2 u_y^0 + M_2^y(I, \theta_{yt}) N_y^0. \quad (4.249)$$

Доказательство достигается подстановкой равенства (4.246) в уравнение (4.247).□

Комментарии: 1. В уравнениях все реологические коэффициенты R-среды являются функциями координат точки $y \in \varepsilon_y$, инвариантов $I = (I_1, I_2, I_3)$ матрицы du_y^{00} / dy^{00} и температуры.

2. Слагаемое $\|\partial M_1^y / \partial y_1^0 + \partial M_2^y / \partial y_2^0| \partial M_1^y / \partial y_2^0 - \partial M_2^y / \partial y_1^0 \| U_y^0$ учитывает зависимость реологических коэффициентов второго типа от координат точки $y \in \varepsilon_y$, инвариантов матрицы I матрицы du_y^{00} / dy^{00} и температуры.

3. Слагаемое $M_2^y(I, \theta_{yt}) N_y^0(I)$ учитывает возможное отсутствие непрерывности вторых производных $\partial^2 u_{y1}^0 / \partial y_1^0 \partial y_2^0 \equiv u_{12}^1$, $\partial^2 u_{y1}^0 / \partial y_2^0 \partial y_1^0 \equiv u_{21}^1$, $\partial^2 u_{y2}^0 / \partial y_1^0 \partial y_2^0 \equiv u_{12}^2$, $\partial^2 u_{y2}^0 / \partial y_2^0 \partial y_1^0 \equiv u_{21}^2$ (например, в задачах сверхзвуковой аэрогазодинамики, наличия неоднородных включений, армирования среды, разрывов сплошности, сколов, трещин и т. п.).

4. R-класс сред включает в себя H-класс сред в качестве частного случая ($\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$).

5. Уравнения (4.249) в рамках принятых гипотез и определений (4.238) являются точными. Все приведенные ниже уравнения получены из точных упрощениями, сформулированными в виде предположений (определенных во введении как неверные утверждения, принимаемые по договоренности). Каждая последующая форма уравнений получена упрощением предыдущей в порядке, который показался нам логичным.

Предложение 4.86. Предположим, что: 1. Реологические коэффициенты второго типа $\mu_i^y(I, \theta_{yt})$ не зависят от инвариантов I, точки y и температура — от точки y:

$$\mu_i^y(I, \theta_{yt}) = \mu_i(\theta_t), \tag{4.250}$$

$$\|\partial M_1 / \partial y_1^0 + \partial M_2 / \partial y_2^0| \partial M_1 / \partial y_2^0 - \partial M_2 / \partial y_1^0 \| U_y^0 = 0;$$

2. Реологический коэффициент первого типа $\lambda_y(I_1, \theta_{yt})$ (аналогично (4.58)) имеет простейшее представление вида

$$\lambda_y(I_1, \theta_{yt}) = \lambda(\theta_t) \operatorname{div}_0 u_y^{00}; \tag{4.251}$$

3. Смешанные вторые производные

$$u^1_{12}, u^1_{21}, u^2_{12}, u^2_{21} \tag{4.252}$$

координат u^0_{y1}, u^0_{y2} вектора u^{00}_y среды в точке $y \in \varepsilon_y$ непрерывны и, следовательно, равны (аналогично (4.75)):

$$u^1_{12} = u^1_{21},\ u^2_{12} = u^2_{21} \Leftrightarrow N^0_y(I) = 0. \tag{4.253}$$

Тогда: 1. Уравнения механического состояния, д-деформатор и линейные уравнения динамики W_R-класса однородных сред имеют вид

$$(T^0_y) = -(w) + W_R(\theta_t)U^0_y, \tag{4.254}$$

$$T^0_y = h(-w + \lambda(\theta_t)\,\mathrm{div}_0 u^{00}_y) + M_1(\theta_t)\, du^{00}_y / dy^{00} +$$

$$+ M_2(\theta_t)\left| du^{00}_y / dy^{00} \right|,$$

$$\rho_y v^{00\cdot}_y = \rho_y g^0_{yt}(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0 w + \lambda(\theta_t)\,\mathrm{grad}_0\,\mathrm{div}_0 u^{00}_y +$$

$$+ M_1(\theta_t)\nabla^2 u^{00}_y;$$

2. Матрица $W_R(\theta_t)$ является элементом группы $\mathbf{W}_R$ (**R**, **4**) и имеет вид

$$W_R(\theta_t) = \left\| \begin{matrix} \mu_1 + \lambda & \mu_2 & -\mu_3 & \mu_4 + \lambda \\ \mu_2 & \mu_1 & -\mu_4 & -\mu_3 \\ \mu_3 & -\mu_4 & \mu_1 & -\mu_2 \\ \mu_4 + \lambda & \mu_3 & \mu_2 & \mu_1 + \lambda \end{matrix} \right\|; \tag{4.255}$$

3. Матрица $W_R(\theta_t)$ содержит пять реологических коэффициентов (один — первого и четыре — второго типов), и поэтому W_R-среда в условиях принятых выше допущений имеет пять реологических модулей и пять коэффициентов влияния (**0.4.7**).

Комментарии: 1. В рассматриваемом случае уравнения механического состояния и выражение для д-деформатора содержат четыре реологических коэффициента второго типа (за счет слагаемых, содержащих матрицу M_2), а уравнения движения — только два (за счет $N^0_y = 0$).

2. Предположение (4.253) и связанные с ним упрощения уравнения динамики среды могут оказаться принципиально неприемлемыми при наличии в среде инородных включений, разрывов сплошности, скачков уплотнения при сверхзвуковых течениях, трещин, сколов и т. п.

3. Определяющие соотношения (4.15) для W_R-среды и в условиях предположений (4.251), (4.253) не существуют.

Предложение 4.87. Для того чтобы две разные линейные однородные среды (W_R-среды) принадлежали W_R-классу (аналогично (4.66)), необходимо и достаточно, чтобы при одинаковом распределении в ней напряжений столбцы U^0_{ya} и U^0_{yb} были линейно связаны матрицей из группы $\mathbf{W}_R$ ($\mathbf{R}$, **4**) так, что

$$U^0_{ya} = W_{Rab}(\theta_t)U^0_{yb},$$

$$W_{Rab}(\theta_t) \in \mathbf{W}_R(\mathbf{R}, \mathbf{4}),\ W_{Rab}(\theta_t) = W^{-1}_{Ra}W_{Rb}. \qquad (4.256)$$

Доказательство. Из (4.254) при условии (4.65) получаем $W_{Ra}U^0_{ya} = W_{Rb}U^0_{yb}$, откуда и следует (4.256).□

Предложение 4.88. Предположим, что перекрестное влияние лапласианов $\nabla^2 u^0_{y1}$, $\nabla^2 u^0_{y2}$ на движение W_R-среды по второй и первой координатам соответственно отсутствует:

$$\mu_2(\theta_t) = 0 \Rightarrow M_1(\theta_t) = h(\mu_1(\theta_t)) = \mu_1(\theta_t)E. \qquad (4.257)$$

Тогда: 1. Уравнения механического состояния, динамический деформатор и уравнения динамики W_R-класса сред имеют вид (подклассы H- и W_R-жидкостей динамически эквивалентны (4.72)):

$$(T^0_y) = -(w) + W_R(\theta_t)U^0_y, \qquad (4.258)$$

$$T^0_y = h(-w + \lambda(\theta_t)\operatorname{div}_0 u^{00}_y) + \mu_1(\theta_t)\,du^{00}_y / dy^{00} +$$
$$+ M_2(\theta_t)\left| du^{00}_y / dy^{00} \right|,$$

$$\rho_y v^{00\cdot}_y = \rho_y g^0_{yt}(\neg y, y) - \operatorname{grad}_0 w + \lambda(\theta_t)\operatorname{grad}_0 \operatorname{div}_0 u^{00}_y +$$
$$+ \mu_1(\theta_t)\nabla^2 u^{00}_y.$$

2. Матрица $W_R(\theta_t)$ имеет вид $W_R(\theta_t) = [\mu_1 + \lambda \;\; 0 - \mu_3 \;\; \mu_4 + \lambda; \; 0 \;\; \mu_1 \; -\mu_4 \; -\mu_3; \; \mu_3 \; -\mu_4 \;\; \mu_1 \;\; 0; \; \mu_4 + \lambda \;\; \mu_3 \;\; 0 \;\; \mu_1 + \lambda]$.

Комментарии: 1. В условиях принятых предположений уравнения динамики W_R-сред совпадают с уравнениями динамики W_H-сред (указанные среды динамически эквивалентны), хотя сами классы указанных сред остаются разными по причине разных определяющих их уравнений механического состояния (4.59), (4.254) и отсутствия термодинамической эквивалентности. Причина этого явления состоит в том, что уравнения механического состояния содержат напряжения в среде, а уравнения динамики — суммы частных производных от этих напряжений, уравнения термодинамики жидкостей содержат разные матрицы реологических коэффициентов. Указанный факт может служить основанием к формированию ложных представлений о движении реальной R-среды, если это движение изучается без учета указанных факторов.

2. При любых дальнейших предположениях слагаемое $M_2(\theta_t)\left| du_y^{00} / dy^{00} \right|$ в правой части равенства (4.240) останется без изменения. Этот факт указывает на два важных обстоятельства:

2.1. При любых предположениях относительно свойств реологических коэффициентов определяющие соотношения (4.15) для W_R-среды не существуют (по причине наличия слагаемого $M_2(\theta_t)\left| du_y^{00} / dy^{00} \right|$ в правой части равенства (4.240));

2.2. Ни уравнения механического состояния (4.238), ни матричное представление динамического деформатора (4.240), при любых предположениях, начиная с последних (4.251), (4.253), не определяют форму уравнений динамики W_R-среды: уравнения механического состояния (4.258) и матричное представление динамического деформатора (4.240) содержат слагаемые, зависящие от реологических коэффициентов μ_3 и μ_4 и определяющие вклад в уравнения движения нулевых слагаемых, содержащих столбцы и $N_y^0 = 0$ и $L_y U_y^0 = 0$. Иными словами, распределение напряжений в среде зависит от μ_3 и μ_4 всегда, а распределение дивергенций строк матрицы напряжений (4.246) при некоторых условиях от них не зависит.

Предложение 4.89. Предположим, что: 1. Движение W_R-среды бесциркуляционно (потенциально) (4.74);

2. Вторые смешанные производные от вектора u^{00}_y по полевым координатам непрерывны и равны (4.75);

3. Среда несжимаема (4.77):

$$\mathrm{div}_0 v^{00}_y = 0. \qquad (4.259)$$

Тогда линейные уравнения динамики (4.249) двумерной линейной однородной W_R-среды (аналогично (4.78)) совпадают с уравнениями идеальной жидкости (4.48):

$$\rho_y v^{00\cdot}_y = \rho_y g^0_{yt}(\neg y, y) - \mathrm{grad}_0 w. \qquad (4.260)$$

Доказательство равенств (4.260) следует из (4.246) и (4.249) или из (4.254) и (4.258) при условиях (4.74), (4.75).□

4.8.3. УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ

Определение 4.14. Пусть: 1. $\Lambda_y(I_1, \theta_{yt})$, $M_y(I, \theta_{yt})$ — столбец и матрица реологических коэффициентов первого и второго типов R-жидкости (4.238);

2. V^0_y — (4×1)-столбец, составленный из (2×1)-столбцов матрицы du^{00}_y / dy^{00} (4.238).

Тогда: 1. Скалярное произведение

$$\Phi^y_\lambda(I_1, \theta_{yt}) = V^0_y \cdot \Lambda_y(I, \theta_{yt}) = \lambda_y(I_1, \theta_{yt})\,\mathrm{div}_0 v^{00}_y \qquad (4.261)$$

аналогично (4.86) называется *диссипативной функцией первого типа* R-жидкости в точке y.

2. Скалярное произведение (билинейная форма с матрицей $M_y(I, \theta_{yt})$) вида (4.87)

$$\Phi^y_\mu(I, \theta_{yt}) = V^0_y \cdot M_y(I, \theta_{yt}) V^0_y \qquad (4.262)$$

называется *диссипативной функцией второго типа* R-жидкости в точке y.

Предложение 4.90. Пусть: 1. $\Phi_\lambda^y(I_1, \theta_{yt})$, $\Phi_\mu^y(I, \theta_{yt})$ — диссипативные функции первого и второго типов (4.261), (4.262);

2. $w_y^{\cdot}$ — скорость выполнения элементарной работы функции w ($w_y = \rho_y^{-1}$ — удельный объем жидкости) в точке y;

3. $u_y^{\cdot}(\theta_{yt})$ — плотность скорости изменения внутренней энергии жидкости в точке y относительно меры $m(dy)$.

Тогда уравнение термодинамики двумерной R-жидкости имеет вид

$$\rho_y(u_y^{\cdot}(\theta_{yt}) + p_y w_y^{\cdot}) = \Phi_\lambda^y(I_1, \theta_{yt}) + \Phi_\mu^y(I, \theta_{yt}) +$$

$$+ \operatorname{div}_0 q_y^0 + \rho_y \varphi_y. \qquad (4.263)$$

Доказательство сводится к подстановке уравнений механического состояния среды (4.238) в условие термодинамической сбалансированности Вселенной механики Галилея с учетом определений (4.261), (4.262) и доказательства равенства (2.52).□

Комментарии: 1. Диссипация внутренней энергии первого типа происходит при дилатационном деформировании (3.28) и при движении несжимаемой R-жидкости отсутствует. Уравнение термодинамики R-жидкости, аналогично (4.228), принимает вид

$$\rho_y u_y^{\cdot}(\theta_{yt}) = \Phi_\mu^y(I, \theta_{yt}) + \operatorname{div}_0 q_y^0 + \rho_y \varphi_y. \qquad (4.264)$$

2. Если верно уравнение механического состояния (4.254), то диссипативная функция R-жидкости первого типа принимает вид

$$\Phi_\lambda^y(I_1, \theta_{yt}) = \lambda_y(\theta_{yt}) \operatorname{div}_0^2 v_y^{00}. \qquad (4.265)$$

5. МЕХАНИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.1. АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО

Определение 5.1. Пусть: 1. $\mathbf{GM}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)=\mathbf{T}_{yt}(\mathbf{R},3)\mathbf{SO}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)\subset$ $\subset\mathbf{GA}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)$ — четырехпараметрическая группа движений на A_3^{μ} (**К.3**) (2.12), где символ M в аббревиатуре группы порожден термином «move», $\mathbf{SO}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)\subset\mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)$ — четырехпараметрическая группа вращений V_3 (2.9);

2. Гипотеза: Существует ограниченная, замкнутая механическая система $\varepsilon_y\equiv B$, такая что действующее на ней ε-аффинное преобразование (**О.2.4**) является движением.

Тогда механическая система $\varepsilon_y\equiv B$ называется *абсолютно твердым телом.*

Комментарии. 1. Иными словами, абсолютно твердое тело — это замкнутая механическая система (локально линейно изменяемая непрерывная среда) (2.11), группа деформаторов которой (2.9) в любой ее точке в любой момент времени совпадает с группой вращения:

$$\mathbf{GD}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)\equiv\mathbf{SO}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3). \tag{5.1}$$

2. Трехмерная группа вращений $\mathbf{SO}_{yt}^{q}(\mathbf{R},3)$ твердого тела некоммутативна [11].

3. Абсолютно твердое тело является элементом сигма-алгебры $\mathfrak{B}_3^{\mu}$, но множество твердых тел не является сигма-алгеброй (например, дополнение любого твердого тела не является твердым телом).

4. Из определения (**О.5.1**) не следует факта существования абсолютно твердых тел [33].

Предложение 5.1. Для того чтобы механическая система $B\in\mathfrak{B}_3^{\mu}$ была абсолютно твердым телом, необходимо и достаточно, чтобы в левостороннем (3.83) и правостороннем (3.69) полярных разложениях к-деформатора среды D_y^q симметрические сомножители (дилататоры в канонических базисах) были тождественными единицами группы деформаторов $\mathbf{GD}_{yt}^q\ (\mathbf{R}, 3)$ (единичными матрицами).

Доказательство утверждения практически очевидно: в обоих случаях условия $s_d^{cc} \equiv E$ и $s_c^{00} \equiv E$ приводят к равенству $D_d^{00} \equiv c_d^{00}$, которое и является определением абсолютно твердого тела. □

Комментарии: 1. Приведенная выше формализация вопроса не единственна. Любое из вышесформулированных положений может быть принято в качестве определения абсолютно твердого тела, тогда другое — в качестве необходимых и достаточных условий его существования.

2. В [33] показано, что абсолютно твердые тела в реальном физическом мире не существуют. Поэтому последующие предложения относительно абсолютно твердых тел будут начинаться с предположения о том, что рассматриваемая механическая система является таковой.

Предложение 5.2. Пусть: 1. Предположим, что $B \in \mathfrak{B}_3^{\mu}$ — абсолютно твердое тело (твердое тело или тело — в дальнейшем), E_b — связанная с ним система координат;

2. c_b^{00} — матрица вращения твердого тела, $[e^b] = [e^0]c_b^{00}$ (3.65);

3. $\langle w_b^0 \rangle^0$ — кососимметрическая матрица, порожденная вектором угловой скорости тела w_b^{00}.

Тогда матричное уравнение кинематики среды (3.1), т. е. абсолютно твердого тела, имеет вид [18, 19, 33]

$$c_b^{00\cdot} = \langle w_b^0 \rangle^0 c_b^{00}. \tag{5.2}$$

Доказательство следует из уравнений кинематики на группах (3.80) и (3.89) на основании предыдущего утверждения.□

Комментарий. Необходимо понимать, что локально линейно изменяемая среда (**О.2.4**) не является твердым телом, на котором действует не зависящий от вращения дилататор. Иными словами, локально линейно изменяемая среда не является обобщением абсолютно твердого тела, как это принято считать со времен Эйлера без каких-либо на то математических и физических оснований. На самом деле верно обратное: абсолютно твердое тело является частным случаем локально линейно изменяемой непрерывной среды, в составе к-деформаторов которой отсутствуют дилатации. Математической моделью движения локально линейно изменяемой среды является к-деформатор (**О.2.4**) — решение уравнения (3.1), никакого отношения не имеющий к вращению.

Указанный к-деформатор имеет, вообще говоря, бесконечно много тождественных эквивалентных мультипликативных разложений (гл. 3), в том числе два полярных, содержащих в качестве сомножителей матрицы вращения, не являющиеся к-деформаторами. Математической моделью вращения абсолютно твердого тела является матрица вращения — решение уравнения (5.2), являющегося частным случаем уравнения (3.1). Абсолютно твердое тело и локально линейно изменяемая среда имеют только одно общее свойство: все определенные на них скалярные и векторные меры механики абсолютно непрерывны относительно меры Лебега.

5.2. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.2.1. ПРОСТОЕ И СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Определение 5.2. Пусть: 1. $(s)_{-}$ — кинематическая цепь [33] элемента E_s с корневой системой координат E_0 (множество контрдостижимости элемента (s)) [22];

2. Кинематическая цепь $(s)_{-}$ содержит не менее двух кинематических пар.

Тогда движение твердого тела E_s относительно корневой системы координат E_0 называется *сложным*.

Определение 5.3. Пусть кинематическая цепь $(s)_{-}$ содержит две кинематические пары $(s-2;\ s-1)$ и $(s-1;\ s)$.

Тогда: 1. Движение твердого тела B_s относительно корневой системы координат E_{s-2} называется *простым сложным движением*.

2. Движение $(s-1)$-тела относительно корневой системы координат E_{s-2} называется *переносным*.

3. Движение (s)-тела относительно $(s-1)$-тела называется *относительным*.

4. Простое сложное движение твердого тела B_s относительно корневой системы координат E_{s-2} называется *абсолютным движением*.

Определение 5.4. Пусть кинематическая цепь $(s)_-$ содержит одну кинематическую пару.

Тогда движение твердого тела B_s относительно корневой системы координат E_0 называется *простым*.

5.2.2. КИНЕМАТИКА ПРОСТОГО СВОБОДНОГО И СВЯЗАННОГО ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Определение 5.5. Пусть: 1. o_s^{s-1} — радиус-вектор начала o_s, связанной с телом B_s системы координат E_s в системе координат E_{s-1}, связанной с телом B_{s-1} в $(s-1;\, s)$-кинематической паре;

2. $o_s^{s-1;\, s-1} \equiv o^s$ — координатный столбец радиуса-вектора o_s^{s-1} в базисе $[e^{s-1}]$ системы координат E_{s-1}:

$$o^s = \operatorname{col}\{o_1^s, o_2^s, o_3^s\}; \tag{5.3}$$

3. В момент начала движения выполнено условие

$$E_{s-1} = E_s. \tag{5.4}$$

Тогда тройка числовых функций (5.3) называется *вектором параллельного переноса тела B_s в простом свободном движении относительно корневой системы координат E_{s-1}*.

Предложение 5.3. Пусть: 1. $\mathrm{SO}_{yt}^{q}\,(\mathbf{R}, 3)$ — группа вращений твердого тела B_s в простом движении относительно корневой системы координат E_{s-1};

2. $c_s^{s-1} \equiv c^s \in \mathbf{SO}^q_{yt}(\mathbf{R},3)$ — матрица вращения базиса $[e^s]$ относительно базиса $[e^{s-1}]$, вычисленная в этом базисе:

$$[e^s] = [e^{s-1}]c_s^{s-1}. \tag{5.5}$$

Тогда существуют три матрицы *простейших вращений* $c_1(\theta_4^s)$, $c_2(\theta_5^s)$, $c_3(\theta_6^s) \in \mathbf{SO}^q_{yt}(\mathbf{R},3)$, $p = \overline{1-3}$:

$$c_p(\theta^s_{p+3}) = E + s\theta^s_{p+3}\langle e^s_p\rangle + (1 - c\theta^s_{p+3})\langle e^s_p\rangle^2, \tag{5.6}$$

где здесь и далее $s\theta^s_{p+3} \equiv \sin\theta^s_{p+3}$, $c\theta^s_{p+3} \equiv \cos\theta^s_{p+3}$, такие что [33]

$$c_k^{s-1} \equiv c^s = c_1(\theta_4^s)c_2(\theta_5^s)c_3(\theta_6^s). \tag{5.7}$$

Доказательство. На время доказательства в целях упрощения письма упростим обозначения. Пусть базис $[e^1]$ получается из базиса $[e^0]$ поворотом с матрицей c_1^0, т. е. $[e^1] = [e^0]c_1^0$. Далее, базисы $[e^2]$ из $[e^1]$ и $[e^3]$ из $[e^2]$ получаются поворотами c_2^1 и c_3^2 соответственно. В этом случае верна следующая цепочка равенств $[e^3] = [e^2]c_3^2 = [e^1]c_2^1c_3^2 = [e^0]c_1^0c_2^1c_3^2$. Так как все три поворота выполняются с ортонормированными базисами, то все три матрицы являются простейшими и $c_3^0 = c_1^0c_2^1c_3^2 = c_1(\alpha_1)c_2(\alpha_2)c_3(\alpha_3)$. □

Комментарии: 1. Количество простейших матриц вращения в разложениях типа (5.7) может быть как угодно большим, но в общем случае не менее трех.

2. Представление матрицы вращения c^s в виде произведения трех простейших матриц вращения вида (5.7) не единственно. Например, известны такие представления [37]:

$$c_s^{s-1} \equiv c^s = c_1(\theta_4^s)c_2(\theta_5^s)c_3(\theta_6^s), \tag{5.8}$$

$$c_k^{s-1} \equiv c^s = c_1(\theta_4^s)c_2(\theta_5^s)c_3(\theta_6^s), \tag{5.9}$$

$$c_s^{s-1} \equiv c^s = c_3(\theta_6^s)c_1(\theta_4^s)c_3(\theta_6^s), \tag{5.10}$$

которые называются «самолетными», «корабельными» и «эйлеровыми» соответственно. Существование указанных разложений обязано традициям в таких областях человеческих знаний, как авиация, ракетно-космическая техника, судостроение, гироскопия и т. п.

3. Формально каждое простейшее вращение (5.7) можно представить в виде произведения трансвекций (сдвигов) и дилатаций, например:

$$c_3(\theta_6^s) = \tau_{21}(\mathrm{tg}\,\theta_6^s)\,d\{c\theta_6^s, 1/c\theta_6^s, 1\}\tau_{12}^{-1}(\mathrm{tg}\,\theta_6^s). \qquad (5.11)$$

Но сдвиги и дилатации изменяют расстояния между точками механической системы, что «запрещено» предложением (**П.5.1**).

4. Условие может быть не выполненным, если в кинематической паре $(s-1;\ s)$ кроме переменных параллельных переносов и вращений существуют постоянные (конструктивные) параллельные переносы и повороты.

5. При исследовании вращения твердого тела на «малые» углы наименее удачным является «эйлерово» разложение (5.10). Причина состоит в том, что в этом случае, согласно определению к-деформатора (2.10), для матрицы вращения (5.7) имеем

$$c^s = E + \Delta c^s \approx E + \langle \theta_4^s, 0, \theta_6^s + \alpha_6^s \rangle, \qquad (5.12)$$

в отличие от

$$c^s = E + \Delta c^s \approx E + \langle \theta^s \rangle \qquad (5.13)$$

для разложений (5.8), (5.9). «Неприятности» использования представления (5.12) начинаются там, где сумму двух «малых» углов $\theta_6^s + \alpha_6^s$ приходится считать также малой, что не всегда верно.

6. Из (5.13) в соответствии с определением (3.27) следует, что матрица

$$\Delta_d^{00} = \langle \theta^s \rangle \qquad (5.14)$$

является матрицей деформаций среды при условии, что эта среда абсолютно твердое тело, т. е. деформации среды—твердого тела являются углами поворота этой среды при преобразовании ее из исходного положения в заданное.

Определение 5.6. Тройка числовых функций

$$\theta_s^{s-1} \equiv \theta^s = \mathrm{col}\{\theta_4^s, \theta_5^s, \theta_6^s\} \qquad (5.15)$$

называется *углами простейших вращений твердого тела B_s* в простом свободном движении относительно базиса $[e^{s-1}]$ корневой системы координат E_{s-1}.

Комментарии: 1. Тройка числовых функций (5.15) не является вектором

$$\theta^s = \mathrm{col}\{\theta_4^s, \theta_5^s, \theta_6^s\} \notin R_3, \qquad (5.16)$$

θ^s — элемент трехмерного числового многообразия (**О.2.2**) [48].

2. Если углы θ^s (5.15) настолько малы, что по условию задачи можно использовать разложение (5.13), то столбец (5.16) на том же уровне точности можно считать вектором

$$\theta^s = \mathrm{col}\{\theta_4^s, \theta_5^s, \theta_6^s\} \in R_3, \qquad (5.17)$$

так как в этом случае

$$c^s(\theta^s)c^s(\alpha^s) \approx E + \langle \theta^s + \alpha^s \rangle \approx c^s(\theta^s + \alpha^s). \qquad (5.18)$$

Определение 5.7. Пусть: 1. o^s и θ^s — вектор параллельного переноса и углы простейших вращений твердого тела B_s в простом движении относительно базиса $[e^0]$ корневой системы координат E_0;

2. $o^{s\cdot}$ и $\theta^{s\cdot}$ — производные вектора параллельного переноса и углов простейших вращений твердого тела B_s в простом движении относительно базиса $[e^0]$ корневой системы координат E_0:

$$o^{s\cdot} = \mathrm{col}\{o_1^{s\cdot}, o_2^{s\cdot}, o_3^{s\cdot}\}, \qquad (5.19)$$

$$\theta^{s\cdot} = \mathrm{col}\{\theta_4^{s\cdot}, \theta_5^{s\cdot}, \theta_6^{s\cdot}\}. \qquad (5.20)$$

Тогда: 1. Элементы o_p^s, θ_p^s столбцов o^s, θ^s (5.3), (5.15) и элементы $o_p^{s\cdot}$, $\theta_p^{s\cdot}$ столбцов $o^{s\cdot}$, $\theta^{s\cdot}$ (5.19), (5.20) называются *каноническими обобщенными координатами и скоростями твердого тела B_s в простом свободном движении относительно корневой системы координат E_0*

$$q^s = \mathrm{col}\{o^s, \theta^s\}, \; q^{s\cdot} = \mathrm{col}\{o^{s\cdot}, \theta^{s\cdot}\}.$$

2. Многообразие Q_q называется *фазовым пространством твердого тела B_s в простом свободном движении относительно корневой системы координат E_0*:

$$Q_q = \{x^s : x = \mathrm{col}\{q^s, q^{s\cdot}\}\}. \tag{5.21}$$

3. Шестимерное подмногообразие K_q многообразия Q_q называется *конфигурационным пространством твердого тела B_s в простом свободном движении относительно корневой системы координат E_0*.

Комментарии: 1. Канонические обобщения координаты твердого тела B_s не единственны, но удобны для дальнейших построений. Все полученные ниже результаты могут быть пересчитаны в любые другие обобщенные координаты твердого тела, если их связь с каноническими известна.

2. Высота каждого из столбцов (5.21) при простом свободном движении твердого тела всегда равна двенадцати, причем $o_p^s \not\equiv 0$, $\theta_p^s \not\equiv 0$ для любого $p = \overline{1-6}$.

Определение 5.8. Пусть движение твердого тела относительно корневой системы координат E_0 является простым свободным движением параллельного переноса (5.3).

Тогда: 1. Производная

$$v_s^{00} = o_s^{00\cdot} \equiv o^{s\cdot} \tag{5.22}$$

называется *вектором скоростей параллельного переноса твердого тела B_s в простом свободном движении* относительно корневой системы координат E_0.

2. Вектор

$$v_s^{0s} = c_s^{0,T} v_s^{00} \tag{5.23}$$

называется *вектором квазискоростей параллельного переноса твердого тела B_s в простом свободном движении тела B_s* относительно корневой системы координат E_0.

Комментарии: 1. Вектором квазискоростей параллельного переноса является результат пересчета в базис $[e^s]$ связанной с телом системы координат E_s вектора скоростей параллельного переноса. Указанный вектор зависит не только от скорости движения тела, но и от его ориентации в корневой системе координат. Не существует функций-координат, производные от которых равны вектору квазискоростей, т. е. квазискорости — это не скорости какого-либо движения (отсюда термин «квази...»).

2. Координаты вектора квазискоростей параллельного переноса являются линейными комбинациями обобщенных скоростей параллельного переноса (5.21)

$$v_s^{0s} = c_s^{0,T} o^{s\cdot} \tag{5.24}$$

с коэффициентами в виде элементов транспонированной матрицы $c_s^{0,T}$ вращения твердого тела.

3. Шестимерное подмногообразие движения параллельного переноса твердого тела

$$x^s \equiv \mathrm{col}\{o^s, o^{s\cdot}\} \in R_6 \tag{5.25}$$

является векторным пространством R_6.

Предложение 5.4. Пусть: 1. Движение твердого тела относительно корневой системы координат E_0 является простым свободным вращением;

2. $c_s^0 \equiv c^s$ — матрица вращения твердого тела относительно базиса $[e^0]$ корневой системы координат E_0 (5.2):

$$c_s^0 \equiv c^s = c_1(\theta_4^s)c_2(\theta_5^s)c_3(\theta_6^s); \tag{5.26}$$

3. $c_s^{0\cdot}$ — производная матрицы вращения твердого тела.

Тогда: 1. Матрица $\langle w_s^0 \rangle^0$, определяемая равенством

$$\langle w_s^0 \rangle^0 = c^{s\cdot} c^{s,T}, \tag{5.27}$$

является кососимметрической $(\langle w_s^0 \rangle^0 = -\langle w_s^0 \rangle^{0,T})$ [19].

2. Вектор w_s^0, координатный столбец которого w_s^{00} в базисе $[e^0]$ корневой системы координат E_0 порождает кососимметрическую матрицу (5.27), называется *вектором мгновенной (в данный момент времени) угловой скорости вращения твердого тела B_s*:

$$w_s^0 = [e^0] w_s^{00}. \tag{5.28}$$

3. Векторная прямая $D(w)$ с направляющим ортом $e_w^0 = w_s^0 \| w_s^0 \|^{-1}$ называется *мгновенной осью вращения твердого тела.*

Доказательство см. (5.2).□

Определение 5.9. Координатный столбец w_s^{0s} вектора угловой скорости тела w_s^0 в базисе $[e^s]$ связанной с ним системы координат E_s называется *вектором угловых квазискоростей твердого тела* [25, 26, 33].

Аналогично (5.23) имеем

$$w_s^{0s} = c_s^{0,T} w_s^{00}. \tag{5.29}$$

Предложение 5.5. Векторы угловых скоростей w_s^{00} и квазискоростей w_s^{0s} твердого тела являются координатными столбцами одного и того же вектора мгновенной угловой скорости w_s^0 твердого тела в разных базисах (корневом $[e^0]$ и связанном с телом $[e^s]$):

$$w_s^0 = [e^0] w_s^{00} = [e^s] w_s^{0s}. \tag{5.30}$$

Предложение 5.6. Пусть: 1. $\langle w_s^0 \rangle^0$ и $\langle w_s^0 \rangle^s$ — кососимметрические матрицы, порожденные векторами мгновенных угловых скоростей (5.28) и квазискоростей (5.29) твердого тела;

2. $c_s^0 \equiv c^s \in \mathbf{SO}_{yt}^q(\mathbf{R}, 3)$ — матрица вращения твердого тела.

Тогда матрица c^s является решением одного из двух матричных дифференциальных уравнений кинематики простого свободного вращения твердого тела [33]:

$$c^{s\cdot} = \langle w_s^0 \rangle^0 c^s, \tag{5.31}$$

$$c^{s\cdot} = c^s \langle w_s^0 \rangle^s. \tag{5.32}$$

Доказательство. Первое уравнение получается из (5.27), второе — переводом равенства (5.27) в базис $[e^s]$ операций сопряжения $c^{s,T}(\cdot)c^s$. □

Комментарии: 1. Каждое из матричных дифференциальных уравнений (5.31) и (5.32) эквивалентно трем скалярным дифференциальным уравнениям (по причине кососимметричности матричных коэффициентов $\langle w_s^0 \rangle^0$ и $\langle w_s^0 \rangle^s$).

2. Векторы мгновенных угловых скоростей и квазискоростей не являются математическими моделями («левосторонними» или «провостонними» по причине левостороннего и правостороннего расположения кососимметрических матриц в уравнениях (5.31), (5.32)) каких-либо самостоятельных вращений твердого тела. Это координатные столбцы одного и того же вектора мгновенной угловой скорости тела относительно базиса корневой системы координат в разных базисах — корневом и связанным с телом (5.30).

Предложение 5.7. Пусть: 1. $E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2$ — простое сложное движение тела относительно корневой системы координат E_0;

2. c_2^{00}, c_1^{00}, c_2^{11} — матрицы результирующего вращения $E_0 \rightarrow E_2$ и промежуточных (переносного и относительного) вращений $E_0 \rightarrow E_1, E_1 \rightarrow E_2$ соответственно, где верхний внешний индекс указывает на базис, в котором вычислена матрица;

3. w_2^{00}, w_1^{00}, w_2^{11}; w_2^{02}, w_1^{01}, w_2^{12} — векторы соответствующих угловых скоростей и квазискоростей;

4. w_1^{00}, w_2^{10} — векторы угловых скоростей переносного $E_0 \rightarrow E_1$ и относительного вращения тела, вычисленные в базисе $[e^0]$ корневой системы координат E_0.

Тогда верны следующие соотношения (традиционно называемые теоремой о сложении угловых скоростей):

$$w_2^{00} = w_1^{00} + w_2^{10},\ w_2^{02} = w_1^{02} + w_2^{12}, \tag{5.33}$$

$$w_2^{00} = w_1^{00} + c_1^{00} w_2^{11}. \tag{5.34}$$

Доказательство. Так как c_2^{00}, c_1^{00}, $c_2^{11} \in \mathbf{SO}\,(\mathbf{R}, \mathbf{3})$, имеем

$$c_2^{00} = c_1^{00} c_2^{11} \rightarrow c_2^{00\cdot} = c_1^{00\cdot} c_2^{11} + c_1^{00} c_2^{11\cdot}. \tag{5.35}$$

Использование матричных уравнений кинематики (5.31) дает

$$\langle w_2^0 \rangle^0 c_2^{00} = \langle w_1^0 \rangle^0 c_2^{00} + c_1^{00} \langle w_2^{11} \rangle c_2^{11}. \tag{5.36}$$

Умножая полученное равенство справа на матрицу $c_2^{00,T}$ с учетом того, что $c_1^{00} \langle w_2^1 \rangle^1 c_2^{11} c_2^{00,T} = c_1^{00} \langle w_2^1 \rangle^1 c_1^{00,T} = \langle w_2^1 \rangle^0$, получаем доказываемый результат (5.33). Переход в равенстве (5.33) к базису $[e^2]$ приводит ко второму доказываемому результату. Третье равенство (5.34) получается из первого (5.33) переходом во втором слагаемом к базису $[e^1]$, $w_2^{10} = c_1^{00} w_2^{11}$. □

Комментарии: 1. Так как равенства (5.33) в разных базисах по форме записи совпадают, то, сняв верхние внешние индексы, получим утверждение не для координатных столбцов, а для самих векторов угловых скоростей:

$$w_2^0 = w_1^0 + w_2^1. \tag{5.37}$$

2. Утверждения (5.33) и (5.34) естественным образом обобщаются на произвольное сложное вращение твердого тела $E_0 \to E_1 \to E_2 \ldots \to E_n$:

$$w_n^{00} = w_1^{00} + w_2^{10} + \ldots + w_n^{n-1.0}, \tag{5.38}$$

$$w_n^{00} = w_1^{00} + c_1^{00} w_2^{11} + \ldots + c_{n-1}^{00} w_n^{n-1.n-1}. \tag{5.39}$$

3. Во всех предыдущих равенствах матрицы вращения не являются простейшими (5.6).

Предложение 5.8. Пусть: 1. $c_p(\theta^s_{p+3})$ — матрица простейшего вращения (s)-тела (5.6), $p = \overline{1-3}$;

2. w_s^{00} — вектор угловых скоростей указанного вращения;

3. $\theta^s_{p+3}, \theta^{s\cdot}_{p+3}$ — обобщенная координата и обобщенная скорость указанного вращения.

Тогда верны следующие соотношения [33]:

$$\langle w_s^0 \rangle^0 = \langle e_p^0 \rangle \theta^{s\cdot}_{p+3} = \langle e_p^s \rangle \theta^{s\cdot}_{p+3}, \tag{5.40}$$

$$w_s^{00} = e_p^0 \theta^{s\cdot}_{p+3} = e_p^s \theta^{s\cdot}_{p+3}. \tag{5.41}$$

Доказательство. В соответствии с дифференциальным уравнением (5.27), (5.31) имеем $\langle w_s^0 \rangle^0 = c^{s\cdot} c^{s,T} = c_p^{\cdot}(\theta^s_{p+3}) c_p^T(\theta^s_{p+3}) = \langle e_p^0 \rangle \cdot \theta^{s\cdot}_{p+3} = \langle e_p^s \rangle \theta^{s\cdot}_{p+3}$, так как $e_p^0 = e_p^s$ при простейшем вращении. Равенство (5.41) получается из (5.40) переходом к векторам, порождающим кососимметрические матрицы. □

Предложение 5.9. Пусть: 1. $E_{s-1} \to E_s$ — простое свободное вращение (s)-тела относительно корневой системы координат E_{s-1} в кинематической паре ($s-1$; s);

2. ε_s^{s-1} — (3×3)-матрица вида

$$\varepsilon_s^{s-1} = \| c_3^T(\theta_6^s) c_2^T(\theta_5^s) e_1^s | c_3^T(\theta_6^s) e_s^s | e_3^s \| \tag{5.42}$$

со (3×1)-столбцами $c_3^T(\theta_6^s) c_2^T(\theta_5^s) e_1^s$, $c_3^T(\theta_6^s) e_2^s$ и e_3^s.

Тогда дифференциальные векторные уравнения кинематики простого свободного вращения тела имеют вид линейного преобразования столбца $\theta^{s\cdot}$ с матрицей ε_s^{s-1} [33]:

$$w_s^{0s} = \varepsilon_s^{s-1} \theta^{s\cdot}. \tag{5.43}$$

Доказательство. Для упрощения письма на время доказательства переобозначим вектор $w_s^{00} \equiv w_3^{00}$. Пусть в равенстве (5.39) все матрицы промежуточных вращений являются простейшими $c_s^{s-1;s-1} = c_p(\theta_{p+3}^s)$, $s = \overline{0-3}$, $p = \overline{1-3}$, тогда

$$w_s^{00} \equiv w_3^{00} = w_1^{00} + c_1^{00} w_2^{11} + c_2^{00} w_2^{22}. \tag{5.44}$$

Умножая равенство (5.44) слева на матрицу $c_2^{00,T}$ с учетом (5.29), получаем

$$w_s^{0s} = c_2^{00,T} w_1^{00} + c_3^{11,T} w_2^{11} + w_3^{22}. \tag{5.45}$$

Осталось учесть, что $c_2^{00,T} = c_3^T(\theta_6^s) c_2^T(\theta_5^s) c_1^T(\theta_4^s)$, $c_1^T(\theta_4^s) w_1^{00} = w_1^{01} = e_1^s \theta_4^{s\cdot}$, $c_3^{11,T} w_2^{11} = c_3^T(\theta_6^s) c_2^T(\theta_5^s) w_2^{11} = c_3^T(\theta_6^s) w_2^{12} = c_3^T(\theta_6^s) e_2^s \theta_5^{s\cdot}$, $w_3^{22} = e_3^s \theta_6^{s\cdot}$ (5.40), (5.41) и записать полученный результат в матричной форме. □

Определение 5.10. Пусть: 1. $E_{s-1} \to E_s$ — простое свободное движение (s)-тела относительно корневой системы координат E_{s-1} в кинематической паре ($s-1$; s);

2. $q^{s\cdot} = \operatorname{col}\{o^{s\cdot}, \theta^{s\cdot}\}$ — обобщенные скорости простого свободного движения тела;

3. M_s^{s-1} — (6×6)-матрица вида

$$M_s^{s-1} = \left\| \begin{matrix} c_s^{s-1,T} & 0 \\ 0 & \varepsilon_s^{s-1} \end{matrix} \right\|. \tag{5.46}$$

Тогда: 1. Шестимерный вектор

$$V_s^{s-1;s} = \mathrm{col}\{v_s^{s-1;s}, w_s^{s-1;s}\} \tag{5.47}$$

называется *вектором квазискоростей простого свободного движения* (s)*-твердого тела относительно корневой системы координат* E_{s-1}.

2. Равенство, получаемое объединением равенств (5.24) и (5.43):

$$V_s^{s-1;s} = M_s^{s-1} q^{s\cdot}, \tag{5.48}$$

называется *уравнением кинематики простого свободного движения* (s)*-твердого тела относительно корневой системы координат* E_{s-1} [33].

Комментарии: 1. В частности, при движении (s)-тела относительно корневой системы координат E_0 имеем

$$V_s^{0s} = M_s^0 q^{s\cdot}. \tag{5.49}$$

2. Уравнение легко записывается в форме

$$q^{s\cdot} = (M_s^{s-1})^{-1} V_s^{0s}. \tag{5.50}$$

3. Из (5.48) следует, что векторное пространство квазискоростей $V_s^{s-1;s}$ твердого тела в простом свободном движении (s)-тела распадается на два инвариантных подпространства матрицы M_s^{s-1} — подпространства квазискоростей параллельного переноса и вращения, откуда следует, что указанные простые движения тела *кинематически независимы*.

4. Из п. 3. не следует, что эти движения *независимы динамически* (в силу уравнений движения (см. § 5.4)).

5.2.3. КИНЕМАТИКА ПРОСТОГО СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ И ПОВОРОТОВ

Определение 5.11. Пусть: 1. В отличие от требования (5.10) в момент начала движения $E_{s-1} \to E_s$

$$E_{s-1} \neq E_s; \tag{5.51}$$

2. В кинематической паре $(s-1; s)$ кроме переменных параллельного переноса (5.3) и вращения (5.15) существуют постоянные параллельный перенос и поворот;

3. $E_{sk} = (o_{sk}, [e^{sk}])$ — дополнительная условная система координат, учитывающая наличие в $(s-1; s)$-кинематической паре постоянных параллельного переноса и поворота;

4. p_{sk}^{s-1} — вектор постоянного параллельного переноса E_{sk} относительно E_{s-1}:

$$p_{sk}^{s-1;s-1} = p^{sk} = \mathrm{col}\{p_1^{sk}, p_2^{sk}, p_3^{sk}\}, \tag{5.52}$$

причем среди координат вектора (5.52) могут быть нулевые $p_p^{sk} = 0$;

5. φ_{sk}^{s-1} — тройка постоянных углов поворота $[e^{sk}]$ относительно $[e^{s-1}]$

$$\varphi_{sk}^{s-1} = \varphi^{sk} = \mathrm{col}\{\varphi_1^{sk}, \varphi_2^{sk}, \varphi_3^{sk}\}, \tag{5.53}$$

причем среди элементов столбца (5.53) могут быть нулевые $\varphi_p^{sk} = 0$;

Тогда: 1. Система координат E_{sk} называется *конструктивной* [33].

2. Вектор p^{sk} называется *вектором конструктивного параллельного переноса в* $(s-1; s)$*-кинематической паре.*

3. Столбец φ^{sk} называется *столбцом конструктивных углов поворота в* $(s-1; s)$*-кинематической паре.*

4. Вектор o^s (5.3) называется *вектором функционального параллельного переноса в* $(s-1; s)$-кинематической паре при условии, что роль корневой системы координат выполнят конструктивная система координат E_{sk}.

5. Столбец θ^s (5.15) называется *столбцом функциональных узлов вращения в* $(s-1; s)$-кинематической паре при условии, что роль корневой системы координат выполняет конструктивная система координат E_{sk}.

Комментарии: 1. Согласно принятой схеме исследований в случае, когда простое свободное движение $E_{s-1} \to E_s$ начинается не при условии $E_{s-1} = E_s$, оно формируется в виде

$E_{s-1} \to E_{sk} \to E_s$, т. е. в виде простого сложного (**О.5.3**), в котором «первое» движение $E_{s-1} \to E_{sk}$ (конструктивное) выполняется на постоянный вектор параллельного переноса и постоянные углы поворота.

2. Функциональные вектор параллельного переноса $o_s^{sk} = o^s$ и углы вращения $\theta_s^{sk} = \theta^s$ совпадают с ранее определенными обобщенными координатами (5.21) при условии, что роль корневой системы координат выполняет конструктивная система координат E_{sk}.

Предложение 5.10. Уравнение кинематики простого свободного движения тела при наличии конструктивных параллельного переноса и поворота $E_{s-1} \to E_{sk} \to E$ по форме совпадает с уравнением кинематики простого свободного движения тела при отсутствии таковых (5.49) при условии замены матрицы M_s^{s-1} (5.46) на матрицу M_s^{sk}

$$V_s^{s-1;s} = M_s^{sk} q^{s\cdot}, \; q^s = \mathrm{col}\{o_s^{sk;sk}, \theta_s^{sk}\}. \tag{5.54}$$

Доказательство. Необходимо показать, что вектор квазискоростей $V_s^{s-1;s}$ совпадает с вектором $V_s^{sk;s}$ квазискоростей тела E_s относительно конструктивной системы координат E_{sk}. Для результирующего вектора параллельного переноса $o_s^{s-1;s-1}$ имеем

$$o_s^{s-1;s-1} = p_{sk}^{s-1;s-1} + c_{sk}^{s-1;s-1} o_s^{sk;sk}. \tag{5.55}$$

Дифференцируя равенство (5.55) с учетом постоянства матрицы конструктивных поворотов $c_{sk}^{s-1;s-1}$, получаем

$$v_s^{s-1;s-1} = 0 + c_{sk}^{s-1;s-1} v_s^{sk;sk} = v_s^{sk;s-1}. \tag{5.56}$$

Для матрицы результирующего вращения $c_s^{s-1;s-1}$ имеем

$$c_s^{s-1;s-1} = c_{sk}^{s-1;s-1} c_s^{sk;sk}. \tag{5.57}$$

Дифференцируя равенство (5.57), получаем

$$c_s^{s-1;s-1\cdot} = c_{sk}^{s-1;s-1} c_s^{sk;sk\cdot}. \tag{5.58}$$

Используя уравнение кинематики (5.32), приходим к равенству

$$c_s^{s-1;s-1}\langle w_s^{s-1}\rangle^s = c_{sk}^{s-1;s-1} c_s^{sk;sk}\langle w_s^{sk}\rangle^s,$$

откуда $\langle w_s^{s-1}\rangle^s = \langle w_s^{sk}\rangle^s$ с учетом (5.57) и, следовательно,

$$w_s^{s-1;s} = w_s^{sk;s}. \tag{5.59}$$

Таким образом, дословно повторив доказательство равенства (5.48), получаем (5.54)

$$V_s^{s-1;s} = V_s^{sk;s} = M_s^{sk} q^s. \square$$

5.2.4. КИНЕМАТИКА ПРОСТОГО СВЯЗАННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Комментарий. В [33] было показано, что в реальном физическом мире абсолютно твердые тела не существуют, что вынуждает все исследования таковых начинать со слова «предположим».

Абсолютно твердое тело при движении может вступать в механический контакт с другими твердыми телами, в результате чего в состав динамического винта $F_s^s(\neg B, B)$ войдут динамические винты деформации этих тел. Движение тела B при этом будет оставаться свободным (6 степеней свободы). Во многих практических задачах можно пренебречь упругостью внешних тел, опять же предположив, что они, как и основное тело B, являются абсолютно твердыми телами. Такое предположение влечет за собой введение принципиально новых понятий, не являющихся механическими в смысле определения (2.6), но полезных в прикладной механике: конфигурационного подмногообразия фазового пространства тела B **(О.5.7)** (связи), на котором находится фазовая точка тела в процессе движения, и динамического винта реакций связей $R_s^s(\neg B, B)$, удерживающего фазовую точку тела на вышеуказанном подмногообразии. Таким образом, необходимо понимать, что динамический винт реакций связей (по сути дела абстрактных новых неизвестных, которым при желании можно придать смысл координат динамического винта) принципиально не относится к классам инерционных, гравитационных и деформационных винтов, т. е. не отвечает первичным свойствам Вселенной механики Галилея (см. гл. 2), в реальном физическом мире отсутствует и принят к рассмотрению в целях упрощения решения практических задач под рубрикой «предположим».

Определение 5.12. Предположим движение тела B_s таково, что фазовая точка x^s движется по некоторому подмногообразию в фазовом пространстве Q_q (**О.5.7**), для некоторых индексов p определяемом уравнениями

$$o_p^s = \text{const.},\ p \in \overline{1-3},\ \theta_p^s = \text{const.},\ p \in \overline{4-6} \qquad (5.60)$$

при условии, что для остальных координат какие-либо равенства вида (5.60) отсутствуют.

Тогда: 1. Равенства (5.60) называются простейшими (каноническими) голономными связями, наложенными на движение твердого тела B_s.

2. Простое движение твердого тела B_s относительно корневой системы координат E_{s-1} называется *простым связанным движением или простым движением с простейшими голономными связями.*

3. Столбец независимых (не связанных равенствами (5.60)) переменных элементов столбцов o^s, θ^s называется *обобщенными координатами твердого тела B_s в простом связанном движении* относительно корневой системы координат E_{s-1}:

$$q^s = \text{col}\{\ldots, o_p^s, \ldots, \ldots, \theta_p^s, \ldots\}. \qquad (5.61)$$

4. Столбец переменных тождественно ненулевых элементов столбцов $o^{s\cdot}$, $\theta^{s\cdot}$ называется *обобщенными скоростями твердого тела B_s в простом связанном движении* относительно корневой системы координат E_{s-1}:

$$q^{s\cdot} = \text{col}\{\ldots, o_p^{s\cdot}, \ldots, \ldots, \theta_p^{s\cdot}, \ldots\}. \qquad (5.62)$$

5. Количество n обобщенных координат твердого тела в простом движении (высота столбца (5.62)) называется *количеством*

степеней свободы твердого тела в простом движении ($n = 6$ — для простого свободного движения, $n \in \overline{1-5}$ — для простого связанного движения).

6. Число $6 - n$ называется *классом кинематической пары* (μ. $k - 1; 1k$).

Предложение 5.11. Пусть: 1. Элементами кинематической цепи являются твердые тела со связанными с ними системами координат E_s, участвующие в нескольких конструктивных (от 0 до 6) и нескольких (от 1 до 6) простейших функциональных (определяемых обобщенными координатами q_i^s, $i \in \overline{1,6}$, где $q_i^s = o_i^s$, $i = 1, 2, 3$, или $q_i^s = \theta_i^s$, $i = 4, 5, 6$) движениях относительно E_{sk}.

Тогда относительное положение элементов $(s-1; s)$-кинематической пары определяется следующими (12×1)- и (6×1)-*столбцами-конфигурациями* [33]:

$$R_s^{s-1} = \mathrm{col}\{R_s^{s-1}, R_s^{sk}\},\ R_{sk}^{s-1} = \mathrm{col}\{p^{sk}, \varphi^{sk}\}, \tag{5.63}$$

$$R_s^{sk} = \mathrm{col}\{o^s, \theta^s\},$$

причем *в конструктивной конфигурации* R_{sk}^{s-1} могут быть отличными от нуля от 0 до 6 констант, а *в функциональной* R_s^{sk} — от 1 до 5 переменных [33] (в альтернативном случае — это либо отсутствие движения, либо свободное движение).

Определение 5.13. Пусть: 1. На движение $E_{sk} \to E_s$ тела E_s относительно конструктивной системы координат E_{sk} в $(s-1; s)$-кинематической паре наложены канонические голономные связи (5.60):

$$o_p^s = 0,\ p \in \overline{1-3},\ \theta_p^s = 0,\ p \in \overline{4-6}, \tag{5.64}$$

т. е. движение $E_{sk} \to E_s$ тела E_s по этим координатам «запрещено»;

2. f_i^s, $i \in \overline{1-6}$, $i \neq p$ — шестимерные орты с единицей на i-месте:

$$f_i^s = \mathrm{col}\{\underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \dots, \underset{i}{1}, \dots, \underset{6}{0}\}. \tag{5.65}$$

Тогда векторы f_i^s называются *шестимерными ортами осей подвижности* в $(s-1;\, s)$-кинематической паре (шестимерными ортами осей, по которым «разрешено» движение тела связями (5.64)) [29, 30, 33].

Предложение 5.12. Пусть: 1. $R_s^{sk} = \mathrm{col}\{o^s, \theta^s\}$ — функциональная конфигурация (s)-тела в простом связанном движении относительно корневой системы координат E_{s-1} в $(s-1;\, s)$-кинематической паре;

2. $\|f^s\|$ — матрица из 6-мерных ортов f_i^s (с единицей на i-м месте, $i \in \overline{1-6}$) осей подвижности $(s-1;\, s)$-кинематической пары (5.65);

3. q^s — столбец обобщенных координат $(s-1;\, s)$-кинематической пары (ненулевые элементы функциональной конфигурации R_s^{sk}).

Тогда верно соотношение [33]:

$$R^{sk\cdot} = \|f^s\| q^{s\cdot}. \qquad (5.66)$$

Предложение 5.13. Пусть: 1. Конфигурация $(s-1;\, s)$-кинематической пары задана в виде $R_s^{s-1} = \mathrm{col}\{R_{sk}^{s-1}, R_s^{sk}\}$, (5.63);

2. M_f^{sk} — (6×6)-матрица вида (5.54), где индекс f указывает на то, что эта матрица осуществляет переход от осей подвижности в указанной паре к конструктивной системе координат.

Тогда: 1. Уравнение кинематики (s)-тела в простом связанном движении относительно корневой системы координат E_{s-1} в $(s-1;\, s)$-кинематической паре имеет вид [18, 22, 25, 27, 33]

$$V_s^{s-1;s} = M_f^{sk} \|f^s\| q^{s\cdot}. \qquad (5.67)$$

2. Матрица M_f^{sk} является матрицей перехода от обобщенных $q_i^{s\cdot}$ скоростей (s)-тела к квазискоростям $V_s^{s-1;s}$ этого тела (точнее — от неортогонального базиса осей подвижности тела к ортогональному связанному базису $[e^{sk}]$.

Доказательство. Перепишем уравнение кинематики (5.54) в эквивалентной форме $V_s^{s-1;s} = V_s^{sk;s} = M_f^{sk} R_s^{sk\cdot}$. Осталось воспользоваться соотношением (5.66). □

5.2.5. КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Напомним, что сложным движением твердого (s)-тела относительно корневой системы координат E_0 называется движение этого тела в составе кинематической цепи $(s)_-$, т. е. в составе множества контрдостижимости (s)-тела [33] при количестве кинематических пар в нем не менее двух.

Предложение 5.14. Пусть: 1. В составе некоторой кинематической цепи имеется сложное движение элемента E_s относительно элемента E_p и сложное движение элемента E_p относительно элемента E_t, $E_t \to E_p \to E_s$, $t < p < s$, $s, p, t \in N$);

2. $W_{ss}^{ts} \equiv W_s^{ts}$, $W_{pp}^{tp} \equiv W_p^{tp}$, $W_{ss}^{ps} \equiv W_s^{ps}$ — кинематические винты сложных движений $E_t \to E_s$, $E_t \to E_p$ и $E_p \to E_s$;

3. V_s^{ts}, V_p^{tp}, V_s^{ps} — векторы квазискоростей тех же сложных движений $E_t \to E_s$, $E_t \to E_p$ и $E_p \to E_s$ (5.48);

4. L_j^i — (6×6)-матрица движений в векторном пространстве винтов, индуцированная движением $E_i \to E_j$ (7.7).

Тогда верны следующие кинематические равенства [25, 27, 33]:

$$W_s^{ts} = L_p^s W_p^{tp} + W_s^{ps}, \tag{5.68}$$

$$V_s^{ts} = L_s^{p,T} V_p^{tp} + V_s^{ps}. \tag{5.69}$$

Доказательство. Приводя все кинематические винты к «последней» системе координат E_s, получим $W_{ss}^{ts} = W_{ps}^{ts} + W_{ss}^{ps}$. Остается воспользоваться очевидным равенством $W_{ps}^{ts} = L_p^s W_{pp}^{tp}$. Введем блочно-диагональную (6×6)-матрицу ε с нулевыми блоками на главной диагонали и единичными (3×3)-матрицами E на второй диагонали и убедимся в справедливости равенств: $V_s^{ts} = \varepsilon W_{ps}^{ts}$, $V_p^{tp} = \varepsilon W_p^{tp}$, $V_s^{ps} = \varepsilon W_s^{ps}$, $\varepsilon\varepsilon = E$, $\varepsilon L_p^s \varepsilon = L_s^{p,T}$. С использованием доказанного равенства (5.68) получаем $\varepsilon W_{ps}^{ts} = \varepsilon L_p^s \varepsilon\varepsilon W_p^{tp} + \varepsilon W_s^{ps}$, что и дает (5.69). □

Комментарий. Кинематические равенства (5.68) и (5.69) позволяют вычислить кинематический винт (вектор квазискоростей) абсолютного движения $E_t \to E_s$ с использованием аналогичных характеристик любого «переносного» и соответствующего «относительного» движений $E_t \to E_p$, $E_p \to E_s$.

Предложение 5.15. Пусть: 1. $E_0 \to E_1 \to E_2 \cdots \to \cdots E_s$ сложное движение E_s элемента в кинематической цепи $(s)_-$;

2. $E_{i-1} \to E_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$ простые связанные движения в $(i-1; i)$-кинематических парах;

3. $R_i^{i-1} = \mathrm{col}\{R_{ik}^{i-1}, R_i^{ik}\}$ — конфигурации (конструктивная и функциональная) (5.63) $(i-1; i)$-кинематических пар;

4. $L_i^{i-1} = L_{ik}^{i-1} L_i^{ik}$ — (6×6)-матрицы движений в $(i-1; i)$-кинематических парах, соответствующие конфигурациям из п. 3, такие что (7.7)

$$L_s^p = L_{p+1}^p L_{p+2}^{p+1} \cdots L_s^{s-1}; \tag{5.70}$$

5. $V_i^{i-1,i} = \mathrm{col}\{v_i^{i-1,i}, w_i^{i-1,i}\} = M_i^{ik} \|f^i\| q^{i\cdot}$ — векторы квазискоростей простых связанных движений в $(i-1; i)$-кинематических парах (5.67);

6. $q^{i\cdot} = \mathrm{col}\{\ldots, q_\alpha^i, \ldots\}$, $\alpha \in \overline{1-6}$ — обобщенные скорости в $(i-1; i)$-кинематических парах (5.62);

7. $V_s^{0,s}$ — вектор квазискоростей сложного движения (s)-тела относительно корневой системы координат E_0.

Тогда уравнение кинематики сложного движения (s)-тела относительно корневой системы координат E_0 имеет вид [33]

$$V_s^{0,s} = \Sigma_{i=1}^s L_s^{i,T} M_f^{ik} \left\| f^i \right\| q^{i\cdot}. \tag{5.71}$$

Доказательство. Покажем сначала, что вектор квазискоростей сложного движения (s)-тела относительно базовой системы координат E_0 является линейной комбинацией квазискоростей всех кинематических пар $(i-1; i)$-кинематических пар с матричными коэффициентами $L_s^{i,T}$, т. е.

$$V_s^{0,s} = \Sigma_{i=1}^s L_s^{i,T} V_i^{i-1;i}. \tag{5.72}$$

Действительно, в соответствии с (5.69) получаем $V_s^{0,s} = L_s^{1,T} V_1^{0,1} + V_s^{1,s} = L_s^{1,T} V_1^{0,1} + L_s^{2,T} V_2^{1,2} + V_s^{2,s} = L_s^{1,T} V_1^{0,1} + L_s^{2,T} V_2^{1,2} + L_s^{3,T} V_3^{2,3} + \cdots + V_s^{s-1,s}$. Остается подставить в формулу (5.72) значения векторов квазискоростей кинематических пар $V_i^{i-1;i} = \mathrm{col}\{v_i^{i-1;i}, w_i^{i-1;i}\} = M_f^{ik}\|f^i\|q^{i\cdot}$. □

Комментарии. 1. Физический и геометрический смысл утверждения прост: вектор квазискоростей сложного движения (s)-тела является суммой квазискоростей простых связанных движений в кинематических парах кинематической цепи $(s)_-$, пересчитанных из связанных систем координат E_i в связанную с (s)-телом с использованием матриц $L_s^{i,T}$.

2. В частности, для простого сложного связанного движения тела (две кинематические пары с простейшими голономными связями) получаем

$$V_2^{0,2} = L_2^{1,T}V_1^{0,1} + V_2^{1,2} = L_2^{1,T}M_f^{1k}\|f^1\|q^{1\cdot} + M_f^{2k}\|f^2\|q^{2\cdot}. \quad (5.73)$$

Предложение 5.16. Пусть: 1. (s)-тело является элементом древовидного графа и участвует в сложном движении относительно корневой системы координат E_0;

2. s_s^t — (1×6)-строка вида

$$s_s^t = \|f^t\|^T M_f^{tk,T} L_s^t. \quad (5.74)$$

Тогда уравнение кинематики вышеуказанного сложного движения (s)-тела имеет вид

$$V_s^{0,s} = \Sigma_{(i)\in(s)_-}\ s_s^{i,T} q^{s\cdot}. \quad (5.75)$$

Доказательство достигается изменением обозначений в формуле (5.72). □

Комментарии: 1. Формулы (5.72) и (5.75) позволяют с использованием алгебраического матобеспечения ЭВМ (например, в среде МАТЛАБ) вычислить вектор квазискоростей сложного движения твердого тела, участвующего в как угодно большом количестве промежуточных простых связанных движениях, не обращаясь к традиционно используемым громоздким скалярным равенствам. Для этого достаточно вычислить коэффициенты $s_s^{i,T}$ с использованием простых стандартных формул (5.74). Большое количество подробных примеров рассмотрено в [33].

2. Те же формулы, разрешенные относительно обобщенных скоростей фиксированной кинематической пары, являются дифференциальными уравнениями для определения программных движений в данной кинематической паре, обеспечивающих движение (s)-тела с заданным вектором квазискоростей $V_s^{0,s}$ [33].

3. Если ввести (6×1)-строки вида

$$s_s^{t-\alpha} = f_\alpha^{t,T} M_f^{tk,T} U_s, \tag{5.76}$$

где $\alpha \in \overline{1 - 6}$ — номера осей подвижности в кинематической паре ($t-1$; t), то матрицу s_s^t в (5.74) можно представить в виде столбца из этих строк

$$s_s^t = \mathrm{col}\{\ldots, s_s^{t-\alpha}, \ldots\}. \tag{5.77}$$

В частности, если кинематическая пара относится к 5-му классу (одна степень свободы), то

$$s_s^t \equiv s_s^{t-\alpha}. \tag{5.78}$$

4. Для кинематических пар 5-го класса и 4-го класса — цилиндрических [33] (но не винтовых !) — имеем

$$\|f^t\|^T M_f^{tk,T} \equiv \|f^t\|^T. \tag{5.79}$$

5.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.3.1. ТОЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ ДВУМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ГРУППЕ ВРАЩЕНИЙ РОДРИГА—ГАМИЛЬТОНА

Предложение 5.17. Пусть: 1. Рассматривается проекция простого свободного движения твердого тела в подмногообразие вращательного движения с матрицей $c^0 \in \mathrm{SO}(\mathbf{R},3)$ (простое свободное вращение);

2. Q_4 — четырехмерное многообразие, элементами которого являются четверки чисел $x^0 = \mathrm{col}\{x_0, \xi^0\}$, последняя тройка из которых является вектором $\xi^0 = \mathrm{col}\{\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0\} \in R_3$ (координатным столбцом вектора $\xi \in V_3$ в базисе $[e^0]$, $\xi = [e^0]\xi^0$):

$$Q_4 = \{x^0 : x^0 = \mathrm{col}\{x_0, \xi^0\},\ \xi^0 = \mathrm{col}\{\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0\} \in R_3\}; \quad (5.80)$$

3. $H_{x0} = x_0 E$ — гомотетия с коэффициентом x_0, где E — (4×4)-единичная матрица;

4. $\langle\xi\rangle_4^0$ — кососимметрическая (4×4)-матрица, *порожденная вектором* $\xi^0 \neq 0$, вида

$$\langle\xi\rangle_4^0 = \begin{Vmatrix} 0 & -\xi_1^0 & -\xi_2^0 & -\xi_3^0 \\ \xi_1^0 & 0 & -\xi_3^0 & \xi_2^0 \\ \xi_2^0 & \xi_3^0 & 0 & -\xi_1^0 \\ \xi_3^0 & -\xi_2^0 & \xi_1^0 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (5.81)$$

Тогда множество (4×4)-матриц

$$\mathbf{G}(\mathbf{R},4) = \{u_x^0 : u_x^0 = H_{x0} + \langle\xi\rangle_4^0,\ x \neq 0\} \qquad (5.82)$$

является подгруппой группы подобий $\mathbf{GO}(\mathbf{R},4) = \{u_x^0 : u_x^{0,T} u_x^0 = \|x^0\|^2 E\}$, где верхний 0-индекс указывает на факт вычисления матрицы в базисе $[e^0]$ [34].

Доказательство достигается простой проверкой равенств

$$u_x^{0T} u_x^0 = \|x^0\|^2 E,\ (u_x^0)^{-1} = \|x^0\|^{-2} u_x^{0,T}, \qquad (5.83)$$

определяющих подобие [11].□

Комментарии: 1. Кососимметрическая матрица $\langle\xi\rangle_4^0$ в (5.81) также является подобием: $\langle\xi\rangle_4^{0,T}\langle\xi\rangle_4^0 = \|\xi^0\|^2 E$, но множество этих матриц не является подгруппой группы подобий (произведение кососимметрических матриц — не кососимметрическая матрица).

2. Матрица $\langle\xi\rangle_4^0$ может быть представлена в блочной форме записи с использованием уже известных понятий

$$\langle\xi\rangle_4^0 = \begin{Vmatrix} 0 & -\xi^{0,T} \\ \xi^0 & \langle\xi\rangle^0 \end{Vmatrix}. \qquad (5.84)$$

3. Кососимметрическая матрица $\langle\xi\rangle_4^0$ в отличие от кососимметрической (3×3)-матрицы $\langle\xi\rangle^0$ неособенна для $\xi^0 \neq 0$:

$$\det \langle\xi\rangle_4^0 = \pm \|\xi^0\|^4. \qquad (5.85)$$

Действительно: $\det \langle\xi\rangle_4^0 = \pm(\det \langle\xi\rangle_4^{0,T} \langle\xi\rangle_4^0)^{0.5} =$
$= \pm(\det \|\xi^0\|^2 E)^{0.5} = \pm(\|\xi^0\|^8)^{0.5} = \pm\|\xi^0\|^4$.

4. Аналогично, для матрицы u_x^0 получается [34]:

$$\det u_x^0 = \pm\|x^0\|^4. \tag{5.86}$$

Предложение 5.18. Пусть: 1. $\mathbf{G}(\mathbf{R},4)$ — группа матриц (5.82) с определителем (5.85);

2. $\mathbf{G}^+(\mathbf{R},4) \subset \mathbf{G}(\mathbf{R},4)$ — подгруппа группы $\mathbf{G}(\mathbf{R},4)$ матриц u_x^0 с положительными определителями:

$$\mathbf{G}^+(\mathbf{R},4) = \{u_x^0 : u_x^0 = H_{x0} + \langle\xi\rangle_4^0, \det u_x^0 = \|x^0\|^4\}. \tag{5.87}$$

Тогда: 1. Группа $\mathbf{G}^+(\mathbf{R},4)$ является подгруппой группы собственных подобий R_4:

$$\mathbf{G}^+(\mathbf{R},4) \subset \mathbf{GO}^+(\mathbf{R},4). \tag{5.88}$$

2. Группа $\mathbf{G}^+(\mathbf{R},4)$ называется *квартгруппой, порождаемой* элементами $x^0 = \mathrm{col}\{x_0, \xi^0\}$ многообразия Q_4 (5.80).

Комментарии: 1. Если к квартгруппе $\mathbf{G}^+(\mathbf{R},4)$ добавить 0-матрицу u_0^0 и на полученном множестве ввести естественные матричные операции сложения и умножения на числа, то получим векторное пространство

$$\mathbf{G}_{16}^+(\mathbf{R},4) = \mathbf{G}^+(\mathbf{R},4) \cup u_0^0, \tag{5.89}$$

изоморфное R_{16}.

2. $u_s^0 \in \mathbf{T}(\mathbf{R},4)$, $s = 1, 2, 3, 4$ — подобия из кварттела (5.89), порожденные четырехмерными ортами e_s^4 с единицей на s-месте, составляют базис $\mathbf{G}_{16}^+(\mathbf{R},4)$, так что для любого подобия u_x^0 имеем разложение по базису

$$u_x^0 = \Sigma_s x_s u_s^0. \tag{5.90}$$

3. Множества $\mathbf{G}^+(\mathbf{R},4)$, $\mathbf{G}_{16}^+(\mathbf{R},4)$ и $\mathbf{T}(\mathbf{R},4)$ состоят из одних и тех же элементов (за исключением 0-матрицы u_0^0), но являются принципиально разными структурами, на которых определены принципиально разные «правила игры»: элементы первого из

них можно только умножать и обращать, второго — только складывать и умножать на числа, третьего — складывать, умножать и обращать.

Предложение 5.19. Пусть: $\mathbf{Y}(\mathbf{R},4) \subset \mathbf{G}^+(\mathbf{R},4)$ — подгруппа группы (5.88), порождаемая нормированными элементами $\lambda^0 = x^0\|x^0\|^{-1}$ многообразия (5.80), т. е. элементами подмногообразия в Q_4, определяемого связью $\|\lambda^0\|_4 = 1$:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{R},4) = \{u_\lambda^0 : u_\lambda^{0,T} u_\lambda^0 = E, \ \|\lambda^0\|_4 = 1\}. \tag{5.91}$$

Тогда: 1. Группа $\mathbf{Y}(\mathbf{R},4)$ является подгруппой группы вращений $\mathbf{SO}(\mathbf{R},4)$.

2. Группа $\mathbf{Y}(\mathbf{R},4)$ называется *группой Родрига—Гамильтона.*

3. Нормированный элемент $\lambda^0 = \mathrm{col}\{\lambda_0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0\}$ многообразия (5.80) называется *параметром (параметрами) Родрига—Гамильтона.*

4. Подмногообразие

$$Y_\lambda = \{\lambda^0 : \lambda^0 \in Q_4, \|\lambda^0\|_4 = 1\} \tag{5.92}$$

нормированных элементов из многообразия Q_4 называется *сферой Родрига—Гамильтона* [34].

Доказательство следует из определения (5.83).□

Комментарий. Еще одна подгруппа группы четырехмерных вращений была обнаружена в разделе 4 (4.50).

Предложение 5.20. Пусть: 1. $\lambda^0 = \mathrm{col}\{\lambda_0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0\} = \mathrm{col}\{\lambda_0, \Lambda^0\}$ — параметр Родрига—Гамильтона (5.92), $\|\Lambda^0\|_3 = (\lambda_1^{0,2} + \lambda_2^{0,2} + \lambda_3^{0,2})^{0.5}$ — евклидова норма Λ^0 в R_3;

2. За время Δt вращение (k)-тела происходит с постоянным ортом $d_w^0 = \mathrm{col}\{d_{w1}^0, d_{w2}^0, d_{w3}^0\}$ оси вращения D_w твердого тела в V_3 (**П.5.4**), $\|d_w^0\| = 1$ в E_0 и угловой скоростью w_k^{00};

3. α — угол поворота твердого (k)-тела с осью D_w за время Δt:

$$\alpha = \int \chi_{\Delta t} w_k^{00} \mu_1(dt). \tag{5.93}$$

Тогда — гипотеза: среди прочих имеется представление вращения Родрига—Гамильтона в виде

$$u_\lambda^0 = H_0^{\cos\alpha} + \langle d_w \rangle_4^0 \sin\alpha. \tag{5.94}$$

Доказательство. $\lambda^0 = \mathrm{col}\{\lambda_0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0\} = \mathrm{col}\{\lambda_0, \|\lambda^0\|_3 (\bar{\lambda}_1^0, \bar{\lambda}_2^0, \bar{\lambda}_3^0)\}$, $\bar{\lambda}_i^0 = \lambda_i^0 \|\Lambda^0\|_3^{-1}$, $i = \overline{1, 3}$. Но $\|\lambda^0\|_4 = 1$ (5.92) и, следовательно, существует такой угол φ, что $\lambda_0 = \cos\varphi$, $\|\Lambda^0\|_3 = \sin\varphi$. Суть гипотезы состоит в утверждении $\bar{\lambda}_i^0 = d_{wi}^0$, $\varphi = \alpha$. □

Комментарии: 1. Указанная гипотеза является основной для построения алгебраической теории «конечных поворотов» твердого тела [34].

2. Суть гипотезы состоит в предположении, что в очевидном представлении параметра Родрига—Гамильтона $\lambda^0 = \mathrm{col}\{\cos\varphi, \sin\varphi(\bar{\lambda}_1^0, \bar{\lambda}_2^0, \bar{\lambda}_3^0)\}$ угол φ совпадает с углом поворота твердого тела α за время Δt с постоянным ортом оси вращения d_w^0, а орт $(\bar{\lambda}_1^0, \bar{\lambda}_2^0, \bar{\lambda}_3^0)$ — с самим ортом d_w^0 за то же время. Эта гипотеза позволяет получить содержательные теоретические и прикладные результаты.

Предложение 5.21. Пусть: 1. $P(w) \subset V_3$ — векторная плоскость в V_3 ($P(w) \ni o_0$ — «начало» системы координат E_0), ортогональная оси вращения твердого тела D_w, $D_w \perp P(w)$, $P(w) \cap D_w = o_0$;

2. $u_\lambda^0|_{P(w)}$ — сужение оператора Родрига—Гамильтона $u_\lambda^0 \in \mathbf{Y}(\mathbf{R},4)$ на плоскость $P(w)$;

3. Справедливо представление (5.94).

Тогда плоскость $P(w)$ является инвариантным пространством оператора $u_\lambda^0|_{P(w)}$:

$$u_\lambda^0|_{P(w)} P(w) = P(w). \tag{5.95}$$

Доказательство. Пусть для любого $x^0 \in P(w)$ имеем $y^0 = u_\lambda^0 x^0$, $x^0 = \mathrm{col}\{0, \xi^0\}$, $y^0 = \mathrm{col}\{0, \zeta^0\}$. Рассмотрим скалярное произведение $\zeta^0 \cdot d_w^0 = \langle d_w \rangle^0 \xi^0 \cdot d_w^0 = 0$ в силу свойств трилинейных форм и, следовательно, $\zeta^0 \perp d_w^0 \to y^0 \in P(w)$ для любого $x^0 \in P(w)$. □

Предложение 5.22. Пусть: 1. $\mathbf{SO}(\mathbf{R},2)$ группа двумерных (плоских) вращений твердого тела (вращений плоскости $P(w)$ (П.5.21)), $c^0 \in \mathbf{SO}(\mathbf{R},2)$;

2. Справедливо представление (5.94).

Тогда имеет место точное представление группы $\mathbf{SO}(\mathbf{R},2)$ в группе Родрига—Гамильтона $\mathbf{Y}(\mathbf{R},4)$:

$$u_\lambda^0|_{P(w)} = c^0, \tag{5.96}$$

где c^0 — матрица (в базисе $[e^0]$) вращения твердого тела с постоянной осью вращения D_w за время Δt на угол α.

Доказательство. Построим соответствующие параметры и вращение Родрига—Гамильтона: $\lambda^0 = \text{col}\ \{\cos\alpha, d_w^0 \sin\alpha\}$, $u_\lambda^0 = H_0^{\cos\alpha} + \langle d_w\rangle_4^0 \sin\alpha$. Пусть $x^0 \in P(w)$ и $y^0 = u_\lambda^0 x^0$, $x^0 = \text{col}\{0, \xi^0\}$, $y^0 = \text{col}\{0, \zeta^0\}$ — векторы из предыдущего предложения, ξ^0, ζ^0 — координатные столбцы радиус-векторов одной и той же точки из плоскости $P(w)$ (в силу предыдущего утверждения) до и после действия на нее оператора $u_\lambda^0|_{P(w)}$: $\zeta^0 = u_\lambda^0|_{P(w)}\xi^0$

$$\zeta^0 = u_\lambda^0|_{P(w)}\xi^0 = (H_0^{\cos\alpha} + \langle d_w\rangle_4^0 \sin\alpha)|_{P(w)}\xi^0. \tag{5.97}$$

Из (5.97) следует, что $\zeta^0 = \xi^0 \cos\alpha + \langle d_w\rangle^0 \xi^0 \sin\alpha = \xi^0 \cos\alpha + \eta \sin\alpha$, где $\eta^0 = \langle d_w\rangle^0 \xi^0$, $\eta^0 \perp \xi^0$, $\eta^0 \perp d_w^0$ и $\|\eta^0\| = \|d_w^0\|\,\|\xi^0\| \sin\pi/2 = 1\|\xi^0\|1 = \|\xi^0\|$, так как $d_w^0 \perp \xi^0$. Следовательно, $[d_w^0, \xi^0, \eta^0]$ — ортогональный базис V_0 при условиях $\|\xi^0\| = \|\eta^0\|$ и

$$\zeta^0 = \xi^0 \cos\alpha + \eta^0 \sin\alpha, \tag{5.98}$$

откуда и следует доказываемый результат $\zeta^0 = c^0 \xi^0$. □

5.3.2. НАКРЫТИЕ ГРУППЫ ТРЕХМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ГРУППОЙ РОДРИГА—ГАМИЛЬТОНА

В предыдущем параграфе рассматривались только «плоские» вращения твердого тела. Для приложений больший интерес представляют трехмерные вращения. Оказывается в этом случае также возможно сопоставление трехмерным вращениям $c^0 \in \mathbf{SO}(\mathbf{R},4)$ вращений Родрига—Гамильтона определенного вида, но уже не взаимно однозначное. Здесь каждому трехмерному вращению сопоставляется два соответствующих вращения Родрига—Гамильтона. Докажем несколько вспомогательных утверждений, имеющих самостоятельный интерес [34].

Предложение 5.23. Пусть: 1. $x^0 = \mathrm{col}\{0,\ d_w^0\}$ — четырехмерное представление в многообразии Q_4 трехмерного орта d_w^0 оси вращения твердого тела $D(w)$ (точнее: его координатного столбца в базисе $[e^0]$);

2. $y^0 = \mathrm{col}\{0, \xi^0\}$ — четырехмерное представление в многообразии Q_4 трехмерного вектора $\xi^0 \in R_3$;

3. $\xi \in P(w)$ — вектор ξ с координатным столбцом ξ^0 в базисе $[e^0]$ принадлежит плоскости $P(w) \perp d_w^0$;

4. $u_x^0 \equiv \langle d_w \rangle_4^0$, $u_y^0 \equiv \langle \xi \rangle_4^0$, $\in \mathbf{GO}(\mathbf{R},4)$ — (4×4)-подобия (5.82), порожденные элементами x^0 и y^0 многообразия Q_4;

5. $e_1^4 = \mathrm{col}\{1,\ 0,\ 0,\ 0\}$.

Тогда

$$u_x^0 u_y^0 e_1^4 = -\, u_y^0 u_x^0 e_1^4. \tag{5.99}$$

Доказательство. Рассмотрим образы операторов $u_x^0 u_y^0$ и $u_y^0 u_x^0$ на элементе $e_1^4 \in Q_4$:

$$u_x^0 u_y^0 e_1^4 = u_x^0 y^0 = -\,(d_w^0 \cdot \xi^0) + \langle d_w \rangle^0 \xi^0, \tag{5.100}$$

$$u_y^0 u_x^0 e_1^4 = u_y^0 x^0 = -\,(\xi^0 \cdot d_w^0) + \langle \xi \rangle^0 d_w^0. \tag{5.101}$$

Осталось учесть, что $d_w^0 \cdot \xi^0 = \xi^0 \cdot d_w^0 = 0$ (так как $\xi^0 \perp d_w^0$) и $\langle d_w \rangle^0 \xi^0 = -\,\langle \xi \rangle^0 d_w^0$.□

Комментарии: 1. Условие $\xi \in P(w)$ является определяющим, в противном случае $d_w^0 \cdot \xi^0 = \xi^0 \cdot d_w^0 \neq 0$ и утверждение (5.99) неверно.

2. Из (5.99) не следует $u_x^0 u_y^0 = -\, u_y^0 u_x^0$ по причине $\langle d_w \rangle^0 \langle \xi \rangle^0 \neq -\,\langle \xi \rangle^0 \langle d_w \rangle^0$.

Предложение 5.24. Пусть: 1. $P(w) \subset V_3$ — векторная плоскость в V_3, ортогональная оси вращения твердого тела $D(w)$;

2. $u_\lambda^0 \in \mathbf{Y}(\mathbf{R},4)$ — вращение Родрига—Гамильтона на угол $\alpha/2$:

$$u_\lambda^0 = H_0^{\cos\alpha/2} + \langle d_w^0 \rangle_4 \sin\alpha/2; \tag{5.102}$$

3. $\mathbf{SO}(\mathbf{R},\mathbf{2})$ группа двумерных вращений твердого тела (вращений плоскости $P(c)$);

4. $\Phi_\lambda^0(.)$ — оператор, действующий на V_3 по правилу:

$$\Phi_\lambda^0(.) = u_\lambda^0 \langle . \rangle_4 u_\lambda^{0,T} e_1^4, \tag{5.103}$$

и $\Phi_\lambda^0(.)|_{P(w)}$ — его сужение на плоскость $P(w)$.

Тогда (аналогично (5.96)) имеет место представление группы $\mathbf{SO}(\mathbf{R},\mathbf{2})$ в группе $\mathbf{Y}(\mathbf{R},\mathbf{4})$:

$$\Phi_\lambda^0(.)|_{P(w)} = c^0. \tag{5.104}$$

Доказательство. Пусть $y^0 = \mathrm{col}\{0,\ \zeta^0\}$, $x^0 = \mathrm{col}\{0,\ \xi^0\}$, ζ, $\xi \in P(w)$ и $y^0 = \Phi_\lambda^0(.)|_{P(w)} x^0 = (u_\lambda^0)^{-1} \langle x \rangle_4^0 u_\lambda^0 e_1^4$. Требуется показать, что в этом случае $\zeta^0 = c^0 \xi^0$. Рассмотрим

$$y^0 = \Phi_\lambda^0(.)|_{P(w)} x^0 = u_\lambda^0 \langle x \rangle_4^0 u_\lambda^{0,T} e_1^4 =$$

$$= (E\cos\alpha/2 + \langle d_w \rangle_4^0 \sin\alpha/2) \langle \xi \rangle_4^0 (E\cos\alpha/2 +$$

$$+ \langle d_w \rangle_4^{0,T} \sin\alpha/2)\, e_1^4 = (\langle \xi \rangle_4^0 \cos^2\alpha/2 + \langle d_w \rangle_4^0 \langle \xi \rangle_4^0 \cos\alpha/2 \sin\alpha/2) +$$

$$+ \langle \xi \rangle_4^0 \langle d_w \rangle_4^{0,T} \cos^2\alpha/2 \sin\alpha/2 + \langle d_w \rangle_4^0 \langle \xi \rangle_4^0 \langle d_w \rangle_4^{0,T} \sin^2\alpha/2)\, e_1^4 =$$

$$= \langle \xi \rangle_4^0 e_1^4 \cos^2\alpha/2 + \langle d_w \rangle_4^0 \langle \xi \rangle_4^0 e_1^4\, 2\cos\alpha/2 \sin\alpha/2 +$$

$$+ \langle d_w \rangle_4^{0,T} \langle \xi \rangle_4^0 \langle d_w \rangle_4^0 e_1^4 \sin^2\alpha/2 = \langle \xi \rangle_4^0 e_1^4 \cos^2\alpha/2 +$$

$$+ \langle d_w \rangle_4^0 \langle \xi \rangle_4^0 e_1^4\, 2\cos\alpha/2 \sin\alpha/2 - \langle d_w \rangle_4^{0,T} \langle d_w \rangle_4^0 \langle \xi \rangle_4^0 e_1^4 \sin^2\alpha/2 =$$

$$= \langle \xi \rangle_4^0 e_1^4 \cos^2\alpha/2 + \langle d_w \rangle_4^0 \langle \xi \rangle_4^0 e_1^4 \sin\alpha - \langle \xi \rangle_4^0 e_1^4 \sin^2\alpha/2 =$$

$$= \langle \xi \rangle_4^0 e_1^4 \cos\alpha + \langle d_w \rangle_4^0 \langle \xi \rangle_4^0 e_1^4 \sin\alpha = \mathrm{col}\{0, \xi^0\} \cos\alpha +$$

$$+ \langle d_w \rangle_4^0 \mathrm{col}\{0, \xi^0\} \sin\alpha = \mathrm{col}\{0, \xi^0\} \cos\alpha + \mathrm{col}\{0, \eta^0\} \sin\alpha \to \zeta^0 =$$

$$= \xi^0 \cos\alpha + \eta^0 \sin\alpha \to \zeta^0 = c^0 \xi^0.$$

В преобразованиях учтено, что $\langle\xi\rangle^0\langle d_w\rangle^0 e_1^4 = -\langle d_w\rangle^0 \times \langle\xi\rangle^0 e_1^4$ (5.99), $\langle d_w\rangle_4^{0,T}\langle d_w\rangle_4^0 = E$, $\langle d_w\rangle^0\xi^0 \equiv \eta^0$ и $\langle\xi\rangle_4^0 e_1^4 = \mathrm{col}\,\{0, \xi^0\}$. □

Комментарии: 1. Заметим, что

$$u_\lambda^{0,T} = (u_\lambda^0)^{-1}, \ \|\lambda^0\|_4 = 1. \qquad (5.105)$$

2. Операция $u_\lambda^0\langle.\rangle_4 u_\lambda^{0,T}$ является операцией сопряжения на множестве четырехмерных кососимметрических матриц $\langle.\rangle_4$. Подмножество четырехмерных кососимметрических матриц $u_\lambda^0\langle.\rangle_4 u_\lambda^{0,T}$ называется *сопряженным к множеству всех матриц вида* $\langle.\rangle_4$. Теперь можно сказать, что все кососимметрические матрицы из сопряженного множества порождены трехмерными векторами, являющимися результатами вращения тех трехмерных векторов, которые порождают множество всех кососимметрических матриц вида $\langle.\rangle_4$.

Предложение 5.25. Отображение (5.104) группы **Y(R,4)** в группу **SO(R,2)** сюръективно, причем каждому образу $c^0 \in \mathbf{SO(P(w),2)}$ соответствуют два праобраза u_λ^0 и $u_{-\lambda}^0$.

Доказательство. $\Phi_\lambda^0(.) = u_{-\lambda}^0\langle.\rangle_4 u_{-\lambda}^{0,T} e_1^4 = (-u_\lambda^0)\langle.\rangle_4(-u_\lambda^0)^T \times e_1^4 = u_\lambda^0\langle.\rangle_4 u_\lambda^{0,T} e_1^4$. □

Определение 5.14. Сюръективное отображение Φ_λ^0: $\mathbf{Y(R,4)} \to \mathbf{SO(P(w),2)}$ называется *накрытием группы «плоских» вращений твердого тела* **SO(R,2)** *группой Родрига—Гамильтона* **Y(R,4)** и обозначается

$$\mathbf{Y(R,4)} = \mathrm{Spin}\ \mathbf{SO(R,2)}. \qquad (5.106)$$

Предложение 5.26. Пусть: 1. $u_\lambda^0 \in \mathbf{Y(R,4)}$ — вращение Родрига—Гамильтона на угол $\alpha/2$:

$$u_\lambda^0 = H_0^{\cos\alpha 2} + \langle d_w\rangle_4^0 \sin\alpha/2; \qquad (5.107)$$

2. **SO(R,3)** — группа трехмерных вращений твердого тела (вращений V_3), $c^0 \in \mathbf{SO(R,3)}$;

3. $\Phi_\lambda^0(.)$ — оператор, действующий на V_3 (включая $P(w)$) по правилу

$$\Phi_\lambda^0(.) = u_\lambda^0\langle . \rangle_4 u_\lambda^{0,T} e_1^4. \tag{5.108}$$

Тогда имеет место представление группы **SO(R,3)** в группе **Y(R,4)**:

$$\Phi_\lambda^0(.) = c^0. \tag{5.109}$$

Доказательство. Идея доказательства проста.

1. Разложим любой трехмерный вектор на две составляющие, одна из которых принадлежит плоскости $P(w)$, а другая — ортогональна ей и принадлежит оси вращения $D(w)$.

2. Подействуем на сумму этих векторов оператором (5.108), что оставит на местах составляющие из $D(w)$ и повернет на угол α составляющие из $P(w)$.

Сложив полученные результаты для каждого вектора, придем к доказываемому результату.□

Определение 5.15. *Сюръекция* $\Phi_\lambda^0(.)$: $\mathbf{Y}(\mathbf{R},4) \to \mathbf{SO}(\mathbf{R},3)$ называется *накрытием группы трехмерных вращений твердого тела группой Родрига—Гамильтона*:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{R},4) = \text{Spin}\,\mathbf{SO}(\mathbf{R},3). \tag{5.110}$$

5.3.3. УРАВНЕНИЕ КИНЕМАТИКИ НА СФЕРЕ РОДРИГА—ГАМИЛЬТОНА

Определение 5.16. Пусть: 1. Y — сфера Родрига—Гамильтона (5.91), $\lambda^0 \in Y$ — параметр Родрига—Гамильтона (5.92), $\lambda^{0\cdot}$ — его производная по времени, $\lambda^k = \text{col}\{\lambda_0, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k\}$;

2. w_k^{00}, w_k^{0k} — векторы мгновенных угловых скоростей и квазискоростей (5.28), (5.29) (k)-тела.

Тогда равенства вида

$$\lambda^{0\cdot} = f(\lambda^0, w_k^{00}), \quad \lambda^{k\cdot} = f(\lambda^k, w_k^{0k}) \tag{5.111}$$

называются *уравнениями кинематики на сфере Родрига—Гамильтона.*

Предложение 5.27. Пусть: 1. ξ^0 — координатный столбец в базисе $[e^0]$ радиуса-вектора ξ в E_0 произвольной точки (k)-тела;

2. w_k^{00} — вектор угловых скоростей (k)-тела (5.28);

3. Уравнение кинематики простого свободного вращения (k)-тела (5.31):

$$c^{0\cdot} = \langle w_k^0\rangle^0 c^0; \qquad (5.112)$$

4. v_ξ^{00} — скорость точки (k)-тела:

$$v_\xi^{00} = \langle w_k^0\rangle^0 \xi^0.$$

Тогда верны следующие тождества:

$$\langle v_\xi^0\rangle^0 = \langle w_k^0\rangle^0\langle\xi\rangle^0 - \langle\xi\rangle^0\langle w_k^0\rangle^0, \qquad (5.113)$$

$$\langle v_\xi^0\rangle^0 = \langle w_k^0\rangle^0\langle\xi\rangle^0 + (w_k^0\cdot\xi^0)E - w_k^{00}\xi^{0,T}, \qquad (5.114)$$

$$\langle v_\xi^0\rangle_4^0 = \langle w_k^0\rangle_4^0\langle\xi\rangle_4^0 + (w_k^{00}\cdot\xi^0)E, \qquad (5.115)$$

$$\langle\xi^0\rangle_4^0\langle w_k^0\rangle_4^0 = -\langle w_k^0\rangle_4^0\langle\xi\rangle_4^0 - 2(w_k^{00}\cdot\xi^0)E, \qquad (5.116)$$

где $w_k^{00}\xi^{0,T}$ — диадное произведение ((3×3)-матрица); E — единичные матрицы соответствующих размерностей.

Доказательство достигается путем сравнения элементов матриц в обеих частях равенств после выполнения всех операций.□

Предложение 5.28. Пусть: 1. S_w^k — (4×4)-матрица вида

$$S_w^k = \begin{Vmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & 2\langle w_k^0\rangle^k \end{Vmatrix}; \qquad (5.117)$$

2. K — (4×4)-кососимметрическая матрица вида

$$K^k = \langle w_k^0\rangle_4^k - S_w^k. \qquad (5.118)$$

Тогда верны следующие дифференциальные уравнения на сфере Родрига—Гамильтона (в базисах $[e^0]$ и $[e^k]$) [34]:

$$\lambda^{0\cdot} = 0.5\langle w_k^0\rangle_4^0\lambda^0, \qquad \lambda^{k\cdot} = 0.5K^k\lambda^k. \qquad (5.119)$$

Доказательство. Пусть t_0, t, — начальный и произвольный моменты времени, $\xi^0(t) = c^0(t)\xi^0(t_0)$, тогда, согласно (5.104),

$$\langle \xi(t)\rangle_4^0 = u_\lambda^0(t)\langle \xi(t_0)\rangle_4^0 u_\lambda^{0,T}(t). \qquad (5.120)$$

Через время Δt вектор $\xi(t)$ займет положение $\xi(t+\Delta t) = \xi(t) + \Delta\xi(t)$, где по определению $\Delta\xi(t) = \xi(t+\Delta t) - \xi(t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Для момента времени $t + \Delta t$ аналогично (5.104) имеем

$$\langle \xi(t+\Delta t)\rangle_4^0 = u_\lambda^0(t+\Delta t)\langle \xi(t_0)\rangle_4^0 u_\lambda^{0,T}(t+\Delta t). \qquad (5.121)$$

Из равенств (5.120) и (5.121) для вращений Родрига—Гамильтона получим

$$u_\lambda^0(t) = \langle \xi(t)\rangle_4^0 u_\lambda^0(t)(\langle \xi(t_0)\rangle_4^0)^{-1},$$

$$u_\lambda^0(t+\Delta t) = \langle \xi(t+\Delta t)\rangle_4^0 u_\lambda^0(t+\Delta t)(\langle \xi(t_0)\rangle_4^0)^{-1}.$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем

$$u_\lambda^0(t+\Delta t) - u_\lambda^0(t) = [\langle \xi(t+\Delta t)\rangle_4^0\, u_\lambda^0(t+\Delta t) -$$
$$- \langle \xi(t)\rangle_4^0\, u_\lambda^0(t)]\,(\langle \xi(t_0)\rangle_4^0)^{-1}.$$

Но $\langle \xi(t_0)\rangle_4^0 = u_\lambda^{0,T}(t)\,\langle \xi(t)\rangle_4^0 u_\lambda^0(t)$ и $u_\lambda^0(t+\Delta t) - u_\lambda^0(t) = u_{\Delta\lambda}^0(t)$, $u_\lambda^0(t+\Delta t) = u_\lambda^0(\Delta t)u_\lambda^0(t)$, где $\Delta\lambda = \lambda(t+\Delta t) - \lambda(t)$, поэтому $u_{\Delta\lambda}^0(t) = [\langle \xi(t+\Delta t)\rangle_4^0 u_\lambda^0(\Delta t)(\langle \xi(t)\rangle_4^0)^{-1} - E]u_\lambda^0(t)$.

Используя далее равенство $\langle \xi(t+\Delta t)\rangle_4^0 = \langle \xi(t)\rangle_4^0 + \langle \xi(\Delta t)\rangle_4^0$, получаем

$$u_{\Delta\lambda}^0(t) = [\langle \xi(t)\rangle_4^0(u_\lambda^0(\Delta t) - E)(\langle \xi(t)\rangle_4^0)^{-1} +$$
$$+ \langle \xi(\Delta t)\rangle_4^0\, u_\lambda^0(\Delta t)(\langle \xi(t)\rangle_4^0)^{-1}]\,u_\lambda^0(t).$$

Умножим полученное равенство справа на орт e_0, разделим полученное равенство на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, воспользовавшись равенствами $\lim \Delta\lambda^0(t) / \Delta t = \lambda^{0\cdot}(t)$, $\lim (u_\lambda^0(\Delta t - E)/\Delta t = \lim\langle d_w(t)\rangle_4^0(\sin\Delta\alpha/2)\Delta t + E\lim(\cos\Delta\alpha/2 - I)/\Delta t) = 0.5\langle d_w(t)\rangle_4^0\, \|w_k^{00}\| + 0 = 0.5\langle w_k^0\rangle_4^0$, $\lim\, \langle \xi(\Delta t)\rangle_4^0/\Delta t = \langle v_\xi^0\rangle_4^0$, $\lim u_\lambda^0(\Delta t) = E$, $\lambda^{0\cdot} = [-0.5\langle \xi(t)\rangle_4^0\, \langle w_k^0\rangle^0(\langle \xi(t)\rangle_4^0)^{-1} + \langle v_\xi^0\rangle_4^0(\langle \xi(t)\rangle_4^0)^{-1}]\,\lambda^0$.

Осталось воспользоваться равенствами 4 и 3 предыдущего утверждения для матриц $\langle \xi(t)\rangle_4^0 \langle w_k^0\rangle_4^0$ и $\langle v_\xi^0\rangle_4^0$:

$$\lambda^{0\cdot} = [-\,0.5\,\langle w_k^0\rangle_4^0 \langle \xi(t)\rangle^0 \,(\langle \xi(t)\rangle_4^0\,)^{-1} - (w_k^{00} \cdot \xi^0(t))\,(\langle \xi(t)\rangle_4^0\,)^{-1} +$$

$$+\,\langle w_k^0\rangle_4^0 \langle \xi(t)\rangle_4^0\,(\langle \xi(t)\rangle_4^0\,)^{-1} + (w_k^{00} \cdot \xi^0(t))\,(\langle \xi(t)\rangle_4^0\,)^{-1}\,]\,\lambda^0 =$$

$$= 0.5\,\langle w_k^0\rangle_4^0\,\lambda^0.$$

Введем (4×4)-матрицу вида

$$\mathbf{C}_k^0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & c_k^0 \end{Vmatrix}, \tag{5.122}$$

где c_k^0 — (3×3)-матрица перехода от базиса $[e^0]$ корневой системы координат E_0 к базису $[e^k]$ системы координат E_k, связанной с (k)-телом, $[e^k] = [e^0]c_k^0$. Тогда $\lambda^0 = \mathbf{C}_k^0 \lambda^k$ и из первого уравнения (5.119) получаем $\lambda^{k\cdot} = 0.5\,\mathbf{C}_k^{0,T} \langle w_k^0\rangle_4^0\,\mathbf{C}_k^0 - \mathbf{C}_k^0 \mathbf{C}_k^{0\cdot}\,\lambda^k = 0.5\,[\langle w_k^0\rangle_4^k - 2S_w^k\,]\,\lambda^k = 0.5K^k\lambda^k.$ □

5.3.4. ГРУППА КЕЙЛИ—КЛЕЙНА И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ГРУППЕ РОДРИГА—ГАМИЛЬТОНА

Предложение 5.29. Пусть: 1. $\mathbf{C}_2 = \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ — декартов квадрат поля комплексных чисел;

2. $\mathbf{GO}^+(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$ — группа собственных подобий $\mathbf{C}_2$ с единицей 1

$$\mathbf{GO}^+(\mathbf{C}_2, \mathbf{2}) = \{v_{ab} : v_{ab}^* v_{ab} = \alpha^2 1,\ \alpha \in R_1,\ \det v_{ab} > 0\}; \tag{5.123}$$

3. $a = a_0 i_0 + a_1 i_1 \in \mathbf{C}$, $b = b_0 i_0 + b_1 i_1 \in \mathbf{C}$ — комплексные числа a_0, b_0, a_1, $b_1 \in R_1$,

$$i_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} (1,0)^T = (1,0)^T,\ \ i_0^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^2 (1,0)^T = (1,0)^T = i_0,$$

$$i_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} (1,0)^T = (0,1)^T,\ \ i_1^2 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^2 (1,0)^T = -i_0.$$

Тогда подобие v_{ab} имеет один из четырех возможных видов:

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \bar{a} & -\bar{b} \\ b & a \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \bar{a} & b \\ -\bar{b} & a \end{Vmatrix}. \qquad (5.124)$$

Доказательство. Пусть c_a, c_b, c_d, $c_e \in \mathbf{C}$ — комплексные числа. Рассмотрим матрицу $S = [c_a \; c_b \; ; c_d \; c_e]$ и выясним, какими должны быть ее элементы для того, чтобы она была матрицей подобия, т. е. удовлетворяла требованиям $S^* S = \alpha^2 E \rightarrow$ $\rightarrow [\bar{c}_a \; \bar{c}_d ; \bar{c}_b \; \bar{c}_e][c_a \; c_b ; c_d \; c_e] = \alpha^2 [1 \; 0; 0 \; 1]$, $\det S = \alpha^2$. Перемножив матрицы в определении и приравняв соответствующие элементы матриц из обеих частей равенства, получим 5 уравнений

$$c_a \bar{c}_a + \bar{c}_b c_b = \alpha^2, \quad \bar{c}_d c_d + \bar{c}_e c_e = \alpha^2,$$

$$\bar{c}_a c_d + \bar{c}_b c_e = 0, \quad \bar{c}_d c_a + \bar{c}_e c_b = 0,$$

$$c_a c_e + c_b c_d = \alpha^2.$$

Решение этой системы уравнений приводит к доказываемому результату. □

Определение 5.17. Подгруппа $\mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$ группы $\mathbf{GO}^+(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$, составленная из матриц v_{ab} первого типа, называется *группой Паули*:

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2}) = \left\{ v_{ab} : v_{ab} = \begin{Vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{Vmatrix} \right\}. \qquad (5.125)$$

Определение 5.18. Пусть: 1. $\mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$ — группа Паули (5.125); 2. P_0, P_1, P_2, $P_3 \in \mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$ — (2×2)-матрицы вида

$$P_0 = i_0 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad P_1 = i_1 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad P_2 = i_0 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$P_3 = i_1 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (5.126)$$

Тогда матрицы P_0, P_1, P_2, P_3 называются *матрицами Паули.*

Предложение 5.30. Пусть: P_0, P_1, P_2, P_3 — *матрицы Паули* (5.126).

Тогда верны следующие равенства:

1. $P_0P_0 = P_0$, $P_0P_1 = P_1$, $P_0P_2 = P_2$, $P_0P_3 = P_3$;
2. $P_1P_1 = -P_0$, $P_2P_2 = -P_0$, $P_3P_3 = -P_0$;
3. $P_1P_2 = -P_2P_1 = P_3$, $P_2P_3 = -P_3P_2 = P_1$,
   $P_3P_1 = -P_1P_3 = P_2$;
4. $P_0 \cdot P_1 = \mathrm{Sp}\,(P_0^T P_1) = 0, \ldots, P_1 \cdot P_2 = \mathrm{Sp}\,(P_1^T P_2) = 0$,
   $P_2 \cdot P_3 = \mathrm{Sp}\,(P_2^T P_3) = 0$.

Доказательство достигается простой проверкой. □

Предложение 5.31. Пусть: P_0, P_1, P_2, P_3 — *матрицы Паули* (5.126).

Тогда любое подобие $v_{ab} \in \mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$ может быть представлено в виде линейной комбинации матриц Паули:

$$v_{ab} = a_0P_0 + a_1P_1 + b_0P_2 + b_1P_3. \tag{5.127}$$

Доказательство достигается простой проверкой.□

Комментарии: 1. Если к мультипликативной группе Паули $\mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$ добавить 0-матрицу и ввести на новом множестве $\mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2}) \cup 0$ очевидные (матричные) операции сложения и умножения на числа, то множество

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{C}_2, \mathbf{2}) = \mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2}) \cup 0 \tag{5.128}$$

превратится в унитарное двумерное векторное пространство, в котором матрицы Паули являются базисом $[P] = (P_0, P_1, P_2, P_3)$.

2. Из п. 4 (**П.5.30**) следует, что базис $[P]$ — ортогонален.

3. Из п. 1 (**П.5.30**) следует, что матрица P_0 является единицей группы $\mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$, $P_0 = 1$.

4. Все сказанное можно перевести на язык векторного пространства $\mathbf{C}_2$. Введем новые обозначения $b_0 = a_2$, $b = a_3$, тогда (5.127) примет вид

$$v_a = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 = \left\| \begin{matrix} a_0i_0 + a_1i_1 & a_2i_0 + a_3i_1 \\ -a_2i_0 + a_3i_1 & a_0i_0 - a_1i_1 \end{matrix} \right\|,$$

где

$$z_a = (a_0 i_0 + a_1 i_1)\gamma_0 + (a_2 i_0 + a_3 i_1)\gamma_1 \in \mathbf{C}_2, \qquad (5.129)$$

$[\gamma] = \mathrm{col}\{\gamma_0, \gamma_1\}$, $\gamma = \mathrm{col}\{i_0, 0\}$, $\gamma_1 = \mathrm{col}\{0, i_1\}$. О подобии v_a в этом случае будем говорить, что оно *порождено вектором* $z_a \in \mathbf{C}_2$ или элементом $a = \mathrm{col}\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ многообразия Q_4. В некоторых случаях удобней перейти к новой индексации:

$$a = \mathrm{col}\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \qquad (5.130)$$

$$z_a = (a_1 i_1 + a_2 i_2)\gamma_1 + (a_3 i_1 + a_4 i_2)\gamma_2 \in \mathbf{C}_2. \qquad (5.131)$$

Предложение 5.32. Пусть: 1. $v_x^0 \in \mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$ — подобие Паули, порожденное вектором $z_x^0 \in \mathbf{C}_2$, (5.129), $x^0 = \mathrm{col}\{x_0, \xi^0\}$ (5.80);

2. $\langle\xi\rangle_2^0$ — кососимметрическая матрица, порожденная координатным столбцом $\xi^0 = \mathrm{col}\{\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0\}$ вектора $\xi \in V_3$ в базисе $[e^0]$ вида (аналог (5.81))

$$\langle\xi\rangle_2^0 = \left\| \begin{array}{c|c} \xi_1^0 i_1 & \xi_2^0 i_0 + \xi_3^0 i_1 \\ \hline -\xi_2^0 i_0 + \xi_3^0 i_1 & -\xi_1^0 i_1 \end{array} \right\|; \qquad (5.132)$$

3. $H_{x0} = i_0 E x_0$ — гомотетия на $\mathbf{C}_2$ с коэффициентом x_0.

Тогда имеет место следующее представление подобия $v_x^0 \in \mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$:

$$v_x^0 = H_{x0} + \langle\xi\rangle_2^0. \qquad (5.133)$$

Комментарий. Группа Паули $\mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$ является аналогом квартгруппы $\mathbf{G}^+(\mathbf{R}, \mathbf{4})$, а представление (5.133) — аналогом представления (5.87).

Предложение 5.33. Подгруппа $\mathbf{Y}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2}) \subset \mathbf{P}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$ группы Паули, порожденная параметром Родрига—Гамильтона $\lambda^0 = \mathrm{col}\{\lambda_0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0\}$, является подгруппой группы вращений $\mathbf{SO}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2})$ векторного пространства $\mathbf{C}_2$:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{C}_2, \mathbf{2}) = \{v_\lambda^0 : v_\lambda^0 = \left\| \begin{array}{c|c} \lambda_0 i_0 + \lambda_1^0 i_1 & \lambda_2^0 i_0 + \lambda_3^0 i_1 \\ \hline -\lambda_2^0 i_0 + \lambda_3^0 i_1 & \lambda_0 i_0 - \lambda_1^0 i_1 \end{array} \right\| \}. \qquad (5.134)$$

Комментарий. Группа $\mathbf{Y}(\mathbf{C}_2,\mathbf{2})$ является аналогом группы вращений Родрига—Гамильтона $\mathbf{Y}(\mathbf{R},4)$ (5.91).

Определение 5.19. 1. Двойка комплексных чисел, являющаяся координатным столбцом вектора z_λ в базисе $[\gamma]$ (5.129):

$$k = (k_1, k_2), \ k_1 = \lambda_0 i_0 + \lambda_1^0 i_1, \ \ k_2 = \lambda_2^0 i_0 + \lambda_3^0 i_1, \tag{5.135}$$

называется *параметром Кейли—Клейна*;

2. Группа $\mathbf{Y}(\mathbf{C}_2,\mathbf{2})$ называется *группой вращений Кейли—Клейна.*

Комментарий. Ближайшая задача состоит в том, чтобы найти изоморфизм квартгруппы и группы Кейли—Клейна, осуществляющий точное взаимное представление этих групп друг в друге. Указанный факт будет в дальнейшем использован для изложения теории «конечных» поворотов твердого тела с использованием группы Кейли—Клейна.

Предложение 5.34. Пусть: 1. $\mathbf{G}^+(\mathbf{R},4) = \{u_x^0 : \ u_x^0 = H_{x0} + \langle\xi\rangle_4^0\}$ — квартгруппа (5.87);

2. $\mathbf{P}(\mathbf{C}_2,\mathbf{2}) = \{v_x^0 : v_x^0 = H_{x0} + \langle\xi\rangle_2^0\}$ — группа Паули (5.125);

3. ν: $\mathbf{G}^+(\mathbf{R},4) \to \mathbf{P}(\mathbf{C}_2,\mathbf{2})$ — биекция, такая что

$$\nu: \ u_x^0 \to x \to v_x^0 \tag{5.136}$$

является изоморфизмом $\mathbf{G}^+(\mathbf{R},4) \cong \mathbf{P}(\mathbf{C}_2,\mathbf{2})$, осуществляющим точное представление

$$\mathbf{G}^+(\mathbf{R},4) \to \mathbf{P}(\mathbf{C}_2,\mathbf{2}) \tag{5.137}$$

с представляющим пространством $\mathbf{C}_2$ и характером $\chi_a(\nu) = \mathrm{Tr}\, v_x^0 = 2x_0 i_0$.

Доказательство выполняется простой проверкой равенств $\nu(u_x^0 u_y^0) = \nu(u_{f(x,y)}^0) = \nu(u_x^0)\nu(u_y^0) = v_x^0 v_y^0 = v_{f(x,y)}^0$, $\nu(u_x^0)^{-1} = (v_x^0)^{-1}$, x, y, $f(x,y) \in Q_4$. □

Комментарий. Полученный результат автоматически переносится на подгруппы вращений Родрига—Гамильтона (5.91) и Кейли—Клейна

$$\nu\colon \mathbf{Y}(\mathbf{R},4) \to \mathbf{Y}(\mathbf{C}_2,\mathbf{2}). \tag{5.138}$$

5.3.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ГРУППЕ ВРАЩЕНИЙ КЕЙЛИ—КЛЕЙНА

Предложение 5.35. Имеет место представление вращения Кейли—Клейна в виде [34]

$$v_\lambda^0 = H_0^{\cos\alpha} + \langle d_w\rangle_2^0 \sin\alpha, \tag{5.139}$$

где все обозначения совпадают с введенными в параграфе (5.3.1).

Доказательство достигается с использованием представления (5.138).□

Предложение 5.36. Пусть $v_\lambda^0 \in \mathbf{Y}(\mathbf{C}_2,\mathbf{2})$ — вращение Кейли—Клейна (5.134).

Тогда сужение оператора v_λ^0 на плоскость $P(w)$, ортогональную оси D_w двумерного вращения твердого тела, является двумерным вращением этого тела за время Δt на угол α (5.93):

$$v_\lambda^0|_{P(w)} = c^0. \tag{5.140}$$

Доказательство сводится к переводу результата (5.95) на язык группы вращений Кейли—Клейна с использованием представления (5.138).□

Предложение 5.37. Пусть: 1. Аналогично (5.102) имеем

$$v_\lambda^0 = H_0^{\cos\alpha/2} + \langle d_w\rangle_2^0 \sin\alpha/2; \tag{5.141}$$

2. $\Phi_\lambda^0(.)$ — оператор, действующий V_3 по правилу

$$\Phi_\lambda^0(.) = v_\lambda^0\langle .\rangle_2^0 v_\lambda^{0*}\gamma. \tag{5.142}$$

Тогда сужение $\Phi^0_\lambda(.)|_{P(w)}$ оператора (5.142) на плоскость $P(w)$, ортогональную оси D_w двумерного вращения твердого тела, является двумерным вращением этого тела за время Δt на угол α (5.93):

$$\Phi^0_\lambda(.)|_{P(w)} = c^0. \qquad (5.143)$$

Доказательство сводится к переводу результата (5.104) на язык группы вращений Кейли—Клейна с использованием представления (5.138).□

Предложение 5.38. Пусть: 1. Аналогично (5.102) имеем

$$v^0_\lambda = H_0^{\cos\alpha/2} + \langle d_w\rangle^0_2 \sin\alpha/2; \qquad (5.144)$$

2. $\Phi^0_\lambda(.)$ — оператор, действующий на V_3 по правилу

$$\Phi^0_\lambda(.) = v^0_\lambda\langle.\rangle^0_2 v^{0*}_\lambda\gamma. \qquad (5.145)$$

Тогда сужение оператора (5.145) на векторное пространство V_3 является вращением тела за время Δt на угол α (5.93):

$$\Phi^0_\lambda(.) = c^0. \qquad (5.146)$$

Доказательство сводится к переводу результата (5.108) на язык группы вращений Кейли—Клейна с использованием представления (5.138).□

Предложение 5.39. Представление (5.146) группы вращений Родрига—Гамильтона (5.106) в группе вращений твердого тела (П.5.17) является накрытием первой группой второй группы.

Доказательство. $\Phi^0_\lambda(.) = \Phi^0_{-\lambda}(.) = c^0$.□

Комментарий. При наличии изоморфизма (5.138) на группе вращений Кейли—Клейна отсутствует аналог уравнений кинематики (5.119). Такое уравнение существует, но в другой форме.

Предложение 5.40. Пусть: 1. $k^0 = \mathrm{col}\{k^0_0, k^0_1\}$ — параметр Кейли—Клейна (5.135), $z^0_\lambda = [\gamma] z^{0\gamma}_\lambda \equiv [\gamma] k^0$, где индекс «0» указывает на то, что при построении параметра k^0 использован параметр Родрига—Гамильтона в базисе $[e^0]$, $\lambda^0 = \mathrm{col}\{\lambda_0, \Lambda^0\}$ (5.92);

2. $\hat{k}^0 = \mathrm{col}\{k_0^0, -\hat{k}_1^0\}$ — координатный столбец некоторого вектора $\hat{z}_\lambda^0 \in \mathbf{C}_2$ в базисе $[\gamma]$, $\hat{z}_\lambda^0 = [\gamma]\hat{z}_\lambda^{0\gamma} \equiv [\gamma]\hat{k}^0$;

3. $\langle w_k^0\rangle_2^0$ — кососимметрическая (2×2)-матрица вида (5.132), порожденная вектором w_k^{00} угловой скорости (k)-тела.

Тогда верно уравнение кинематики вида

$$\hat{k}^{0\cdot} = 0.5\langle w_k^0\rangle_2^0 \hat{k}^0. \tag{5.147}$$

5.3.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В МУЛЬТИГРУППЕ ТЕЛА КВАТЕРНИОНОВ

Предложение 5.41. Пусть: 1. $\mathbf{G}(\mathbf{R},4)$ — квартгруппа (5.82);

2. $\mathbf{T}(\mathbf{R},4)$ — объединение квартгруппы с нуль-матрицей u_0^0:

$$\mathbf{T}(\mathbf{R},4) = \mathbf{G}(\mathbf{R},4) \cup u_0^0; \tag{5.148}$$

3. Множество $\mathbf{T}(\mathbf{R},4)$ замкнуто относительно естественных матричных операций сложения и умножения при наличии соответствующих свойств (аддитивная коммутативная группа по первой операции, некоммутативная группа по второй операции (без u_0^0), дистрибутивность).

Тогда: 1. Множество $\mathbf{T}(\mathbf{R},4)$ является телом.

2. Тело $\mathbf{T}(\mathbf{R},4)$ называется *кварттелом.*

Доказательство сводится к прямой проверке соответствующих свойств указанных операций: аддитивная коммутативная группа по первой операции, некоммутативная группа по второй операции (без u_0^0), дистрибутивность.□

Определение 5.20. Пусть: 1. $\mathbf{T}(\mathbf{R},4)$ — кварттело (5.148);

2. $e_1^4 = \mathrm{col}\{1, 0, 0, 0\}$ — орт из R_4;

3. $\mathbf{K}$ — тело, элементами которого являются образы элементов $u_x^0 \in \mathbf{T}(\mathbf{R},4)$ на орте e_1^4:

$$\mathbf{K} = \{z_x : z_x = u_x^0 e_1^4\}, \tag{5.149}$$

для которых

$$z_x z_y = u_x^0 u_y^0 e_1^4, \tag{5.150}$$

$$z_x^{-1} = (u_x^0)^{-1} e_1^4, \tag{5.151}$$

$$z_x + z_y = (u_x^0 + u_y^0) e_1^4, \tag{5.152}$$

$$- z_x = - u_x^0 e_1^4. \tag{5.153}$$

Тогда: 1. Тело **K** называется *телом кватернионов.*

2. Элементы тела **K** называются *кватернионами.*

Комментарии: 1. Если интересоваться только абелевой группой кварттела **T**(**R**,4), введя на ней естественную операцию умножения матриц на числа μu_x^0, $\mu \in R_1$, то равенство (5.149) с учетом

$$\mu z_x^0 = \mu u_x^0 e_1^4 \tag{5.154}$$

осуществляет изоморфизм четырехмерного векторного пространства R_4 и вышеуказанной абелевой группы кварттела **T**(**R**,4), т. е. для любого $x^0 \in R_4$

$$x^0 \Leftrightarrow u_x^0 \Leftrightarrow z_x^0, \tag{5.155}$$

$$R_4 \Leftrightarrow \mathbf{T}(\mathbf{R},4) \Leftrightarrow \mathbf{K}. \tag{5.156}$$

2. В указанном случае («работают» только операции (5.150) и (5.154)) будем говорить, что кватернион $z_x^0 \in \mathbf{K}$ порожден вектором $x^0 \in R_4$, при этом множество **K** можно называть *векторным пространством кватернионов.* Этот факт во избежание путаницы будем отмечать обозначением $\mathbf{K}_4$.

3. Если рассматривается мультипликативная группа **G**(**R**,4) кварттела **T**(**R**,4) (с внутренней операцией умножения (5.150)), то четверки чисел x^0 являются элементами многообразия Q_4 и можно говорить об изоморфизме

$$Q_4 \Leftrightarrow \mathbf{T}(\mathbf{R},4) \Leftrightarrow \mathbf{K}. \tag{5.157}$$

В этом случае множество **K** (без u_0^0), естественно, также является мультипликативной некоммутативной группой, что во избежание путаницы будет отмечаться обозначением

$$\mathbf{K}^o = \mathbf{K}_4 \backslash \{u_0^0\}. \tag{5.158}$$

Предложение 5.42. Пусть: 1. $\mathbf{K}_4$ — векторное пространство кватернионов;

2. $u_s^0 \in \mathbf{T}(\mathbf{R},4)$, $s = 1, 2, 3, 4$ — подобия из кварттела (5.148), порожденные четырехмерными ортами e_s^4 с единицей на s-месте (с учетом обозначений (5.90));

3. $[i] = (i_1, i_2, i_3, i_4) \in \mathbf{K}_4$ — множество векторов, таких что

$$i_s = u_s^0 e_1^4, \quad i_s \equiv e_s^4. \tag{5.159}$$

Тогда множество $[i]$ является базисом векторного пространства кватернионов $\mathbf{K}_4$.

Доказательство. Для любого $s = 1, 2, 3, 4$ имеем $i_s = e_s^4$ и для любого кватерниона z_x, $x^0 = \mathrm{col}\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, как вектора, с учетом (5.149) получаем разложение $z_x = u_x^0 e_1^4 = \Sigma_s x_s u_s^0 e_1^4 =$ $= \Sigma_s x_s i_s$.□

Комментарий. Базис $[i]$ векторного пространства кватернионов $\mathbf{K}_4$ порождается базисом векторного пространства подобий $\mathbf{G}_{16}^{+}(\mathbf{R},4)$ (5.90) с использованием изоморфизма (5.159).

Предложение 5.43. Пусть: 1. $\mathbf{K}^o$ — мультипликативная группа кватернионов (5.158);

2. $u_s^0 \in \mathbf{T}(\mathbf{R},4)$, $s = 1, 2, 3, 4$ — подобия из кварттела (5.148), порожденные четырехмерными ортами e_s^4 с единицей на s-месте;

3. $[i] = (i_1, i_2, i_3, i_4) \in \mathbf{K}_4$ — множество векторов, таких что

$$i_s = u_s e_1^4, \quad i_s \equiv e_s^4. \tag{5.160}$$

Тогда: 1. Множество $[i]$ в $\mathbf{K}^o$ (но не в $\mathbf{K}_4$!) имеет следующие свойства:

1.1. $i_1 i_1 = i_1^2 = u_{es}^2 e_1^4 = u_{es} e_1^4 = i_1$; $i_1 i_k = i_k i_1 = u_{e1} u_{ek} e_1^4 = i_k$, $k = 2, 3, 4$;

1.2. $i_k i_k = i_k^2 = u_{ek} u_{ek} e_1^4 = u_{ek}^2 e_1^4 = - i_1$, $k = 2, 3, 4$;

1.3. $i_1 i_2 = - i_2 i_1 = i_3$, $i_2 i_3 = - i_3 i_2 = i_1$; $i_3 i_1 = - i_1 i_3 = i_2$.

2. Элемент i_1 является единицей группы $\mathbf{K}^o$, так что $i_1 z_x = z_x$ для любого $z_x \in \mathbf{K}^o$.

Комментарии: 1. На основании п. 1.2 элементы i_k группы $\mathbf{K}^o$ называют «мнимыми» единицами. Каждый кватернион имеет три «мнимые» единицы, что служит основанием к использованию для кватернионов термина «гиперкомплексные числа».

2. Без какого-либо основания векторы $i_k \in \mathbf{K}_4$ называют также мнимыми единицами, в то время как в векторном пространстве объекты i_k являются обычными четырехмерными ортами с единицей на k-м месте, для которых операция возведения в квадрат вообще не определена.

3. Аналогичная путаница имеет место и при определении комплексных чисел: множество комплексных чисел, как векторное пространство, содержит орт $i_2 = (0, 1)^T$, для которого операция i_2^2 не имеет смысла; множество комплексных чисел, как тело, содержит тот же элемент i_2, для которого операция i_2^2 определена и $i_2^2 = -i_1$, где $i_1 = (1, 0)$ — единица поля, но не арифметическая единица «1», как это принято считать.

Определение 5.21. Кватернион

$$z_x^* = u_x^T e_1^4 \tag{5.161}$$

называется *сопряженным к кватерниону* z_x.

Предложение 5.44. Отображение φ: $z_x \rightarrow z_x^*$ инволютивно ($\varphi^2 = E$).

Доказательство. $(z_x^*)^* = (u_x^T)^T e_1^4 = u_x e_1^4 = z_x$. □

Предложение 5.45. Пусть: 1. $\mathbf{K}_4 = \mathbf{K}_0 \otimes \mathbf{K}_\xi$, где $\mathbf{K}_0$ — векторная прямая с направлением i_0; $\mathbf{K}_\xi$ — трехмерное векторное пространство, порожденное векторами $\xi \in R_3$;

2. z_x, $z_x^* \in \mathbf{K}_4$.

Тогда

$$z_x + z_x^* \in \mathbf{K}_0, \tag{5.162}$$

$$z_x z_x^* \in \mathbf{K}_0.$$

Доказательство. $z_x + z_x^* = (u_x + u_x^*) e_1^4 = 2x_0 E e_1^4 = 2x_0 i_0 \in \mathbf{K}_0$, $z_x z_x^* = u_x u_x^* e_1^4 = \|x^0\|_4^2 i_0 \in \mathbf{K}_0$. □

Определение 5.22. 1. Число $2x^0$ называется *приведенным следом кватерниона.*

2. Число $\|x^0\|_4^2 = \|z_\lambda^0\|_4^2$ — называется *приведенной нормой кватерниона.*

Определение 5.23. Образ сферы Родрига—Гамильтона $\mathbf{Y}_\lambda$ (5.92) в $\mathbf{K}_4$ (или в $\mathbf{K}^o$) называется *сферой Родрига—Гамильтона* в $\mathbf{K}_4$ (или $\mathbf{K}^o$) и обозначается $\mathbf{K}_\lambda$.

Комментарии: 1. Элементами сферы Родрига—Гамильтона $\mathbf{K}_\lambda$ являются кватернионы с единичной приведенной нормой $\|z_\lambda^0\|_4^2 = 1$.

2. Координатами кватерниона $z_\lambda^0 \in \mathbf{K}_\lambda$ в базисе (5.159) являются параметрами Родрига—Гамильтона λ^0 (5.92).

Предложение 5.46. Пусть: 1. $\mathbf{K}^o$ — мультипликативная группа кватернионов (5.158);

2. $z_\lambda \in \mathbf{K}_\lambda$ — кватернион, порожденный параметром Родрига—Гамильтона (5.92) (5.102):

$$z_\lambda^0 = \mathrm{col}\{\cos \alpha/2, d_{w1}^0 \sin \alpha/2, d_{w2}^0 \sin \alpha/2, c_{w3}^0 \sin \alpha/2\}. \quad (5.163)$$

Тогда сужение оператора $z_\lambda^0 z_{(.)}^0 z_\lambda^{0*}$ на V_3 является вращением твердого тела. Этот оператор осуществляет накрытие группы трехмерных вращений твердого тела группой кватернионов $\mathbf{K}^o$, в силу $z_\lambda^0 z_{(.)}^0 z_\lambda^{0*} = z_{-\lambda}^0 z_{(.)}^0 z_{-\lambda}^{0*}$

$$z_\lambda^0 z_{(.)}^0 z_\lambda^{0*}|_{V_3} = c^0. \quad (5.164)$$

Доказательство. Оператор $z_\lambda^0 z_{(.)}^0 z_\lambda^{0*}|_{V_3}$ совпадает с оператором $\Phi_\lambda^0(.) = u_\lambda^0 \langle . \rangle_4 u_\lambda^{0,T} e_1^4$ на V_3 в силу (5.109).□

5.4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.4.1. УРАВНЕНИЯ ПРОСТОГО СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Предложение 5.47. Пусть: 1. Предположим, что B_s — твердое тело и E_s — произвольная связанная с ним система координат;

2. E_0 — произвольная система координат в A_3;

3. $V_{ss}^{0s} = V_s^{0s} = \mathrm{col}(v_s^{0s}, w_s^{0s})$ — вектор квазискоростей E_s относительно E_0 в базисе $[e^s]$ (5.23), (5.47);

4. $l_s^{v(x),s}$ — скользящий вектор, порожденный вектором $v(x) \equiv v_x^{0s}$ квазискоростей параллельного переноса точки $x \in B$ относительно E_0;

5. x^s — радиус-вектор произвольной точки $x \in B_s$ в E_s, x^{ss} — его координатный столбец в базисе $[e^s]$;

6. Θ_x^s — (6×6)-матрица вида

$$\Theta_x^s = \begin{Vmatrix} E & \langle x^s\rangle^{s,T} \\ \langle x^s\rangle^s & -\langle x^s\rangle^s \langle x^s\rangle^s \end{Vmatrix}. \tag{5.165}$$

Тогда скользящий вектор $l_s^{v(x),s}$ представим в виде линейного преобразования векторного пространства квазискоростей твердого тела [19, 33]:

$$l_s^{v(x),s} = \Theta_x^s V_s^{0s}. \tag{5.166}$$

Доказательство. С учетом равенств $\langle w_s^0\rangle^s x^{ss} = -\langle x^s\rangle^s w_s^{0s} = \langle x^s\rangle^{s,T} w_s^{0s}$.

$$l_s^{v(x),s} = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & \langle x^s\rangle^s \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} v_x^{0s} \\ v_x^{0s} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & \langle x^s\rangle^s \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} v_s^{0s} + \langle w_s^0\rangle^s x^{ss} \\ v_s^{0s} + \langle w_s^0\rangle^s x^{ss} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} E & \langle x^s\rangle^{s,T} \\ \langle x^s\rangle^s & -\langle x^s\rangle^s \langle x^s\rangle^s \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} v_s^{0s} \\ w_s^{0s} \end{Vmatrix} = \Theta_x^s V_s^{0s} \square$$

Определение 5.24. Пусть: 1. Предположим, что B_s — твердое тело;

2. E_s — произвольная связанная с B_s-телом система координат.

Тогда: 1. Вектор r_c^s и его координатный столбец r_c^{ss} в базисе $[e^s]$, определяемые равенствами (m — масса)

$$r_c^s = m^{-1}(B)\int \chi_B x^s m(dx),\ r_c^{ss} = m^{-1}(B)\int \chi_B x^{ss} m(dx), \quad (5.167)$$

называются радиусом-вектором центра масс тела B_s в E_s и его координатным столбцом в базисе $[e^s]$.

2. Точка $c \in B_s$, зафиксированная в E_s радиусом-вектором (5.167), называется центром масс тела B.

3. (3×3)-матрица вида

$$\Theta_s^s = -\int \chi_B \langle x^s\rangle^s \langle x^s\rangle^s m(dx) \qquad (5.168)$$

называется (3×3)-матрицей инерции тела B в точке o_s (нижний индекс) в базисе $[e^s]$ (верхний индекс).

Определение 5.25. Пусть: 1. Предположим, что B_s — абсолютно твердое тело;

2. E_0 — инерциальная система координат;

3. $l_s^{\nu(x),s}$ — скользящий вектор, порожденный вектором $\nu(x) \equiv \nu_x^{0s}$ квазискоростей параллельного переноса точки $x \in B$ относительно E_0.

Тогда векторная мера Радона [49] на σ-алгебре механических систем σ_3^{μ} вида

$$Q_{ss}^{0s} = \int \chi_B l_s^{\nu(x),s} m_i(dx) \qquad (5.169)$$

называется кинетическим винтом абсолютно твердого тела при движении относительно инерциальной системы координат (внутренние индексы) в связанной системе координат (внешние индексы) [19, 23, 33].

Комментарии: 1. Необходимость в понятии «кинетический винт» возникла впервые при построении уравнений движения абсолютно твердого тела. Потребность в указанной векторной мере Радона при исследовании локально линейно изменяемой среды не возникала.

2. Плотность инерционной динамической меры (2.30) связана с плотностью меры (5.169) соотношением

$$\rho_0^{\nu\cdot(x),0} = d/dt(\rho_0^{\nu(x),0}). \qquad (5.170)$$

3. Кинетический винт в инерциальной системе координат, аналогично (5.169), определяется равенством

$$Q_{s0}^{00} = \int \chi_B \rho_0^{v(x),0} m_i (dx). \tag{5.171}$$

Предложение 5.48. Пусть: 1. E_0 и E_s — инерциальная и связанная с твердым телом системы координат;

2. Q_{s0}^{00}, Q_{ss}^{0s} — кинетические винты твердого тела G в движении относительно E_0 (внутренние индексы) в E_0 и E_s (внешние индексы) соответственно;

3. Θ_0^0, Θ_s^s — (6×6)-матрицы инерции твердого тела B_s (матрицы Мизаса [33]) в точках o_0 и o_s (нижний индекс) в базисах $[e^0]$ и $[e^s]$ (верхний индекс) вида

$$\Theta_k^k = \left\| \begin{matrix} m_i(B)E & \langle r_c^k \rangle^{k,T} m_i(B) \\ \langle r_c^k \rangle^k m_i(B) & \theta_k^k \end{matrix} \right\|, \; k = 0 \text{ или } k = s; \tag{5.172}$$

4. $L_s^0 \in \mathbf{L}(\mathbf{R},\mathbf{6})$ — преобразование координат винтов (7.7), индуцированное движением $E_0 \to E_s$.

Тогда: 1. Кинетический винт Q_{ss}^{0s} твердого тела B_s в движении относительно E_0 в E_s является линейным преобразованием пространства квазискоростей твердого тела B_s вида [19, 23, 27, 33]

$$Q_{ss}^{0s} = \Theta_s^s V_{ss}^{0s} \equiv \Theta_s^s V_s^{0s}. \tag{5.173}$$

2. Кинетические винты Q_{s0}^{00} и Q_{ss}^{0s} связаны выражением

$$Q_{s0}^{00} = L_s^0 Q_{ss}^{0s}. \tag{5.174}$$

3. Матрицы Мизаса Θ_0^0 и Θ_s^s твердого тела связаны выражением

$$\Theta_0^0 = L_s^0 \Theta_s^s L_s^{0,T}. \tag{5.175}$$

Доказательство: 1. С учетом (5.169), (5.166) получаем

$$Q_{ss}^{0s} = \int \chi_B \, l_s^{v(x),s} m_i (dx) = \int \chi_B \, \Theta_x^s \, V_{ss}^{0s} \, m_i (dx) =$$
$$= \int \chi_B \, \Theta_x^s \, m(dx) V_{ss}^{0s} = \Theta_s^s \, V_s^{0s}.$$

2. Равенство (5.174) выполняется в силу определения матрицы L^0_s (7.7).

3. Аналогично п. 1 доказывается равенство $Q^{00}_{s0} = \Theta^0_0 V^{00}_{s0}$. В силу (7.7) имеем $V^{00}_{s0} = L^{s,T}_0 V^{0s}_{ss}$ и, следовательно, $Q^{00}_{s0} = \Theta^0_0 L^{s,T}_0 V^{0s}_{ss}$. Но $Q^{00}_{s0} = L^0_s Q^{0s}_{ss} = L^0_s \Theta^s_s V^{0s}_s$ (5.174) и (5.173), и поэтому $\Theta^0_0 L^{s,T}_0 = L^0_s \Theta^s_s$, откуда и следует (5.175).□

Комментарий. Из (5.172) следует, что матрица Мизаса является матрицей некоторой квадратичной формы.

Предложение 5.49. Матрица Мизаса имеет два трехмерных инвариантных подпространства квазискоростей (параллельного переноса и вращения). При соответствующем выборе системы координат матрица Мизаса имеет вид

$$\Theta^s_{sc} = \left\| \begin{array}{cc} m(B)E & 0 \\ 0 & \Theta^s_{sc} \end{array} \right\|, \; E_{sc} = (o_{sc}, [e^s]). \qquad (5.176)$$

Доказательство достигается выбором в (5.172) в качестве начала связанной системы координат центра масс тела B_s, $r^{ss}_c = 0$.□

Определение 5.26. Система координат с началом в центре масс тела B_s называется центральной системой координат инерции.

Предложение 5.50. Матрица Мизаса имеет шесть одномерных инвариантных подпространств пространства квазискоростей. При соответствующем выборе базиса матрица принимает диагональный вид

$$\Theta^{sc}_s = \left\| \begin{array}{cccccc} m(B) & & & & & \\ & m(B) & & & & \\ & & m(B) & 0 & & \\ & & & I^{sc}_{44} & & \\ & 0 & & & I^{sc}_{55} & \\ & & & & & I^{sc}_{66} \end{array} \right\|. \qquad (5.177)$$

Доказательство следует из общих теорем алгебры о симметрических матрицах.

Определение 5.27. Система координат, в которой матрица Мизаса тела имеет диагональный вид, называется главной центральной системой координат инерции.

Определение 5.28. Пусть: 1. Матрица Мизаса Θ_s^s [53] тела вычислена в произвольной связанной системе координат E_s;

2. Начало связанной системы координат не совпадает с центром масс тела

$$o_s \neq c. \tag{5.178}$$

Тогда твердое тело B называется *динамически несбалансированным в* E_s.

Комментарий. Понятие «динамически несбалансированное тело» имеет два смысла: тело в физическом смысле динамически несбалансировано, если его центр масс не принадлежит физической (определяемой соответствующими шарнирами) оси вращения; тело в математическом смысле динамически несбалансировано в любой произвольной связанной системе координат при $r_s^{ss} \neq 0$, в частности в системе координат, начало которой «лежит» на физической оси вращения тела, не проходящей через его центр масс.

Определение 5.29. Пусть: 1. Матрица Мизаса Θ_c^c тела вычислена в главной центральной системе координат тела (5.177);

2. Главные моменты инерции попарно не совпадают

$$I_{44}^c \neq I_{55}^c \neq I_{66}^c. \tag{5.179}$$

Тогда твердое тело B называется *динамически асимметричным в* E_c [22, 24, 33].

Предложение 5.51. Пусть: 1. Предположим, что B — абсолютно твердое тело;

2. $I_0^0(\neg B, B)$ — динамический винт инерции твердого тела (2.28) в инерциальной системе координат E_0;

3. $Q_{B0}^{00} \equiv Q_{s0}^{00}$ — кинетический винт твердого тела в инерциальной системе координат E_0 (5.171).

Тогда динамический винт инерции твердого тела в инерциальной системе координат совпадает со скоростью изменения кинетического винта в той же системе координат с обратным знаком [33]:

$$I_0^0(\neg B, B) = -Q_{B0}^{00\cdot}\,. \tag{5.180}$$

Доказательство следует из определений (2.28), (5.171) и (5.170), (2.46).□

Комментарии: 1. Равенство (5.180) является континуальным аналогом «теорем о изменении количества движения и момента количества движения», доказываемых для конечного множества точек со сосредоточенными массами. Здесь оно доказывается только для абсолютно твердого тела (для которого определено понятие кинетического винта Q_{B0}^{00} (5.171)).

2. Равенство (5.180) не является «законом природы», как это принято считать. Строго говоря, оно не является и свойством Вселенной механики Галилея, так как ни точки со сосредоточенными массами, ни абсолютно твердые тела в реальном физическом мире не существуют, в механике локально изменяемой среды равенство (5.180) вообще не возникает. Иными словами, равенство (5.180) является элементом прикладной механики, справедливым настолько насколько при решении практических задач реальная механическая система может быть представлена конечным множеством точек со сосредоточенными массами или абсолютно твердым телом.

3. Из (5.180) следует, что все слагаемые, получаемые в правой части равенства после выполнения операции дифференцирования, имеют инерционную природу, т. е. являются составляющими динамического винта инерции. При записи равенства (5.180) в разных неинерциальных системах координат эти составляющие имеют разную форму. Для практики наибольший интерес представляют состав и форма записи правой части равенства (5.180) в системе координат, связанной с твердым телом.

Предложение 5.52. Пусть: 1. Предположим, что B_s — абсолютно твердое тело;

2. E_0, E_s — инерциальная и связанная с B_s системы координат;

3. Q_{B0}^{00} — кинетический винт твердого тела B_s при движении относительно инерциальной системы координат, записанный в этой же системе координат (5.171);

4. $F_0^0(\neg B, B)$ — динамический винт воздействия на тело B_s внешней среды $\neg B$ неинерционного происхождения (дополнения тела B в σ-алгебре механических систем σ_3^μ (5.28)) в инерциальной системе координат E_0:

$$F_0^0(\neg B, B) = G_0^0(\neg B, B) - D_0^0(B, \neg B), \qquad (5.181)$$

где $G_0^0(\neg B, B)$, $D_0^0(B, \neg B)$ — динамические винты гравитации тела B (2.35) и деформирования (2.41) внешней среды твердым телом B_s.

Тогда уравнения простого свободного движения твердого тела относительно инерциальной системы координат и в базисе инерциальной системы координат имеют вид [19, 33]

$$Q_{B0}^{00\cdot} = F_0^0(\neg B, B). \qquad (5.182)$$

Доказательство. В соответствии с аксиомой о динамической сбалансированности Вселенной механики Галилея (**D.4**) (2.47) и аддитивностью динамической меры на σ_3^μ имеем

$$-\rho_0^{v(x),0\cdot} + \rho_0^{g(\neg x,x),0} + \rho_0^{\Delta(\neg x,x),0}\rho_y^{-1} = 0, \qquad (5.183)$$

т. е. в динамически сбалансированной Вселенной механики Галилея в каждой точке абсолютно непрерывной среды сумма плотностей динамических винтов инерции, тяготения и деформации относительно скалярной меры инерции (инерционной массы) $m_i(dx)$ равна нулю.

Интегрируя равенство (5.183) по указанной скалярной мере инерции $m_i(dx)$ твердого тела B, получим

$$-\int \chi_B\, \rho_0^{v(x),0\cdot}\, m_i(dx) + \int \chi_B\, \rho_0^{g(\neg x,x),0} m_i(dx) +$$

$$+\int \chi_B\, \rho_0^{\Delta(\neg x,x),0} \rho_y^{-1}\, m_i(dx) = 0.$$

$$\text{Но} \int \chi_B\, \rho_0^{g(\neg x,x),0} m_i(dx) = \int \chi_B\, \rho_0^{g(B\setminus\{x\},x),0}\, m_i(dx) +$$

$$+ \int \chi_B \rho_0^{g(\neg B,x),0} m_i(dx) = 0 + \int \chi_B \rho_0^{g(\neg B,x),0} m_i(dx) =$$

$$= \int \chi_B \rho_0^{g(\neg B,x),0} m_i(dx) = G(\neg B, B);$$

$$\int \chi_B \rho_0^{\Delta(\neg x,x),0} \rho_y^{-1} m_i(dx) = \int \chi_B \rho_0^{\Delta(B\setminus\{x\},x),0} \rho_y^{-1} m_i(dx) +$$

$$+ \int \chi_B \rho_0^{\Delta(\neg B,x),0} \rho_y^{-1} m_i(dx) = 0 + \int \chi_B \rho_0^{\Delta(\neg B,x),0} \rho_y^{-1} m_i(dx) =$$

$$+ \int \chi_B \rho_0^{\Delta(\neg B,x),0} \rho_y^{-1} m_i(dx) = D(\neg B, B) = -\, D(B, \neg B)$$

и, следовательно,

$$\int \chi_B \rho_0^{\nu(x),0\cdot}\, m_i(dx) = F_0^0(\neg B, B) \to d/dt \int \chi_B \rho_0^{\nu(x),0} m_i(dx) =$$

$$= F_0^0(\neg B, B) \to d/dt Q_{B0}^{00} = F_0^0(\neg B, B). \square$$

Предложение 5.53. Пусть: 1. Предположим, что B_s — абсолютно твердое тело;

2. Q_{Bs}^{0s} — кинетический винт твердого тела при движении относительно инерциальной системы координат E_0, вычисленный в связанной с телом системе координат E_s (5.169);

3. $V_s^{0s} = \mathrm{col}\{v_s^{0s}, w_s^{0s}\}$ — вектор квазискоростей тела B_s относительно E_0;

4. Φ_s^{0s} — (6×6)-матрица, порожденная вектором квазискоростей V_s^{0s} тела по правилу [23]

$$\Phi_s^{0s} = \left\| \begin{matrix} \langle w_s^0 \rangle^s & 0 \\ \langle v_s^0 \rangle^s & \langle w_s^0 \rangle^s \end{matrix} \right\|; \tag{5.184}$$

5. (*) — символ производной в связанной с телом системе координат E_s.

Тогда уравнение простого свободного движения твердого тела относительно инерциальной системы координат E_0, но в базисе $[e^s]$ системы координат E_s, связанной с твердым телом B_s, имеет вид [19, 33]

$$Q_{Bs}^{0s*} + \Phi_s^{0s} Q_{Bs}^{0s} = F_s^s(\neg B, B). \tag{5.185}$$

Доказательство. Подставляя равенство (5.174) в уравнение (5.182), получаем $(L_s^0 Q_{Bs}^{0s})^{\cdot} = F_0^0(\neg B, B) \rightarrow L_s^{0\cdot} Q_{Bs}^{0s} + L_s^0 Q_{Bs}^{0s\cdot} = F_0^0(\neg B, B)$. Умножая полученное равенство слева на матрицу $(L_s^0)^{-1} = L_0^s$ с учетом (5.184) и (7.7), получаем доказываемый результат. □

Комментарий. При переходе в уравнениях движения твердого тела к базису связанной с ним неинерциальной системы координат E_s в уравнениях движения появляется второе слагаемое инерционного происхождения (вторая составляющая $\Phi_s^{0s} Q_{Bs}^{0s}$ инерционного динамического винта), зависящее от перекрестных произведений элементов матрицы Φ_s^{0s} и винта Q_{Bs}^{0s}, но не от скоростей их изменения.

Предложение 5.54. Пусть: 1. Предположим, что B_s — абсолютно твердое тело;

2. $V_s^{0s} = \mathrm{col}\{v_s^{0s}, w_s^{0s}\}$ — вектор квазискоростей тела относительно E_0;

3. Θ_s^s — матрица Мизаса тела B в E_s (постоянная матрица (5.172), вычисленная в начале o_s и базиса $[e^s]$ связанной с телом системы координат E_s).

Тогда уравнение простого свободного движения твердого тела B относительно инерциальной системы координат в квазискоростях имеет вид [19, 33]

$$\Theta_s^s V_s^{0s*} + \Phi_s^{0s} \Theta_s^s V_s^{0s} = F_s^s(\neg B, B). \tag{5.186}$$

Доказательство достигается подстановкой в уравнение (5.185) определения (5.173).□

Комментарии: 1. Слагаемые инерционного происхождения, содержащиеся в выражении $\Phi_s^{0s} \Theta_s^s V_s^{0s}$ (5.186), являются функциями второй степени координат квазискоростей тела и традиционно разделяются на три группы: кориолисовы, гироскопические и центробежные.

2. Уравнения (5.186), записанные в базисе связанной с телом системы координат E_s, удобны тем, что, во-первых, матрица Мизаса Θ_s^s постоянна и, во-вторых, векторы квазиускорений и ква-

зискоростей V^{0s*}_s, V^{0s}_s тела легко измеряются бортовыми приборами твердого тела (самолета, судна, спутника и т. п.).

3. В базисе $[e^0]$ инерциальной системы координат E_0, относительно которой рассматривается движение тела и в которой сформулировано уравнение (5.182), матрица Мизаса Θ^0_0 переменна, и поэтому имеем

$$Q^{00\cdot}_{B0} = F^0_0(\neg B; B) \to (\Theta^0_0 V^{00}_s)^\cdot = F^0_0(\neg B, B) \to$$

$$\to \Theta^0_0 V^{00\cdot}_s + \Theta^{0\cdot}_0 V^{00}_s = F^0_0(\neg B, B). \qquad (5.187)$$

Предложение 5.55. Пусть: 1. Предположим, что B_s — абсолютно твердое тело;

2. Уравнение кинематики простого свободного движения твердого тела имеет вид (5.49)

$$V^{0s}_s = M^0_s q^{s\cdot}. \qquad (5.188)$$

Тогда уравнения простого свободного движения твердого тела в обобщенных координатах q^s тела (5.21) имеют вид [19, 33]

$$A^s_s(q^s)q^{s\cdot\cdot} + B^s_s(q^s, q^{s\cdot})q^{s\cdot} = F^s_s(\neg B, B), \qquad (5.189)$$

$$A^s_s(q^s) = \Theta^s_s M^0_s, \quad B^s_s(q^s, q^{s\cdot}) = \Theta^s_s M^{0\cdot}_s + \Phi^{0s}_s \Theta^s_s M^0_s. \qquad (5.190)$$

Комментарии: 1. В уравнениях (5.189) «правая часть» представлена динамическим винтом в E_s (т. е. приведенным к декартовым координатам системы E_s, но не к обобщенным координатам). Поэтому матрица $A^s_s(q^s)$ не является матрицей какой-либо квадратичной формы.

2. Приведение динамического винта $F^s_s(\neg B, B)$ (5.189) к обобщенным координатам выполняется умножением слева на матрицу $M^{0,T}_s$. В этом случае уравнение (5.189) принимает вид [19]

$$A^s_s(q^s)q^{s\cdot\cdot} + B^s_s(q^s, q^{s\cdot})q^{s\cdot} = Q^s_s(\neg B, B); \qquad (5.191)$$

$$A^s_s(q^s) = M^{0,T}_s \Theta^s_s M^0_s,$$

$$B^s_s(q^s, q^{s\cdot}) = M^{0,T}_s (\Theta^s_s M^{0\cdot}_s + \Phi^{0s}_s \Theta^s_s M^0_s); \qquad (5.192)$$

$$Q_s^s(\neg B, B) = M_s^{0,T} F_s^s(\neg B, B), \qquad (5.193)$$

где матрица $A_s^s(q^s) = M_s^{0,T}\Theta_s^s M_s^0$ симметрична и поэтому является матрицей некоторой квадратичной формы.

3. Равенства (5.186), (5.189) и (5.191) являются матричными формами записи шести дифференциальных уравнений второго порядка простого свободного движения твердого тела. Каждое из этих уравнений содержит полный набор координат квазискоростей и квазиускорений (обобщенных скоростей и ускорений) движений параллельного переноса и вращения, что не дает основания разделять их на уравнения отдельных вышеуказанных движений. Иными словами, при записи уравнений простого свободного движения тела в произвольной связанной системе координат движения параллельного переноса и вращения не являются инерционно независимыми (в силу инерционных слагаемых в уравнениях движения, без учета возможной зависимости этих движений за счет динамических винтов).

4. Инерционную независимость движений параллельного переноса и вращения тела не следует путать с кинематической независимостью этих движений. Последнее понятие абсолютно: если фазовая точка тела движется по подмногообразию в фазовом пространстве Q_q (5.60), зависящем от координат обоих движений, то эти движения тела кинематически зависимы. Если таких подмногообразий нет, то эти движения тела кинематически независимы. Первое понятие условно: таким условием является выбор связанной с телом системы координат, в частности выбор начала этой системы координат. Ясно, что из кинематической зависимости (исключая частные случаи) следует динамическая зависимость (через динамические винты реакций), но не наоборот. При наличии только неголономных связей количество степеней свободы тела также уменьшается, но какие-либо подмногообразия фазового пространства, по которым движется фазовая точка тела, отсутствуют.

Определение 5.30. Квадратичная форма

$$T = 0.5V_s^{0s,T}\Theta_s^s V_s^{0s} = 0.5V_s^{00,T}\Theta_0^0 V_s^{00} =$$

$$= 0.5q^{s\cdot,T}A_s^s(q^s)\,q^{s\cdot} \qquad (5.194)$$

называется кинетической энергией твердого тела в квазискоростях, скоростях и обобщенных скоростях соответственно.

Комментарий. Из (5.194) следует, что матрица Мизаса Θ_s^s в определении (5.172) является матрицей кинетической энергии тела, записанной в квазискоростях.

Возникает вопрос: существуют ли системы координат, в которых движения параллельного переноса и вращения свободного твердого тела относительно инерциальной системы координат инерционно независимы? Ответ на него положителен и содержится в следующих утверждениях.

Предложение 5.56. Пусть: 1. Предположим, что B_s — абсолютно твердое тело;

2. Уравнение простого свободного движения твердого тела B относительно инерциальной системы координат в квазискоростях и в центральной системе координат инерции E_{cs} (5.176) имеет вид [19]

$$\Theta_c^s V_c^{0s*} + \Phi_c^{0s} \Theta_c^s V_c^{0s} = F_c^s(\neg B, B); \qquad (5.195)$$

3. $F^s(\neg B, B)$, $F_c(\neg B, B)$ — главный вектор и главный момент динамического винта $F_c^s(\neg B, B)$ (5.189), такие что

$$F_c^s(\neg B, B) = \operatorname{col}\{F^s(\neg B, B), F_c(\neg B, B)\}. \qquad (5.196)$$

Тогда (6×6)-матричные уравнения (5.195) в квазискоростях распадаются на два (3×3)-матричных уравнения движения, первое из которых зависит от квазискоростей параллельного переноса и вращения, а второе является независимым уравнением простого свободного вращения тела в квазискоростях:

$$(V_c^{0s*} + \langle w_s^0 \rangle^s v_c^{0s}) m(B) = F^s(\neg B, B), \qquad (5.197)$$

$$\theta_c^s w_s^{0s*} + \langle w_s^0 \rangle^s \theta_c^s w_s^{0s} = F_c(\neg B, B). \qquad (5.198)$$

Доказательство достигается простой проверкой. □

Комментарий. Из (5.197) не следует инерционной зависимости движения параллельного переноса центра масс тела от угловой скорости вращения этого тела, несмотря на то что в левую часть равенства (5.197) входит вектор угловой квазискорости w_s^{0s} (но не скорости w_s^{00}). Действительно, переходя в (5.197) к дифференцированию в инерциальной системе координат $v_c^{0s} = c_s^{0,T} v_c^{00}$ и $\langle w_s^0 \rangle^0 = c_s^0 \langle w_s^0 \rangle^s c_s^{0,T}, F^s(\neg B, B) = c_s^{0,T} F^0(\neg B, B)$, получаем

$$m(B) v_c^{00\cdot} = F^0(\neg B, B), \qquad (5.199)$$

$$\theta_c^s w_s^{0s*} + \langle w_s^0 \rangle^s \theta_c^s w_s^{0s} = F_c(\neg B, B). \qquad (5.200)$$

Комментарии: 1. Предыдущее утверждение по сути дела является ответом на вопрос о существовании системы координат, в которой движения параллельного переноса и вращения свободного тела инерционно независимы: для того чтобы движения параллельного переноса и вращения свободного движения твердого тела были инерционно независимы, необходимо и достаточно, чтобы уравнения этого движения тела относительно инерциальной системы координат были записаны в центральной системе координат тела.

2. Равенство (5.199) является на самом деле уравнением движения центра масс твердого тела, как замкнутой континууальной непрерывной механической системы, где $m(B) = \int \chi_B \rho_y^i \mu_3(dx)$, в отличие от уравнений движения конечного множества точек со сосредоточенными массами из «аналитической» механики, названного твердым телом, где $m(B) = \Sigma_{p=1}^n m_p \neq \int \chi_B \rho_y^i \mu_3(dx)$ при любых условиях.

3. Уравнение (5.199) не является второй аксиомой (постулатом, законом) Ньютона. Оно точно сформулировано и строго доказано без обращения к физически несуществующим понятиям точек со сосредоточенными массами.

4. При решении прикладных задач необходимо помнить, что уравнения (5.199) и (5.200) записаны в разных базисах.

Предложение 5.57. Пусть E_c являются главной центральной системой координат (**О.5.27**).

Тогда: 1. Перемножив в левой части равенства (5.195) матрицы с учетом (5.177), получим традиционно известную форму уравнений движения свободного твердого тела Ньютона—Эйлера, имеющих место только при условии записи их в главной центральной системе координат инерции:

$$v_c^{00\cdot}\, m(B) = F^0(\neg B, B), \qquad (5.201)$$

$$\theta_s^c w_c^{0c*} + \langle w_c^0\rangle^c \theta_c^c w_c^{0c} = F_c(\neg B, B). \qquad (5.202)$$

2. Равенство (5.202) является динамическим уравнением Эйлера на самом деле твердого тела, как замкнутой континууальной непрерывной механической системы, где $\theta_c^c = -\int \chi_B \langle r_x^c\rangle^{c2} \rho_y\, \mu_3^i(dx)$, в отличие от уравнений движения конечного множества точек со сосредоточенными массами из «аналитической» механики, названного твердым телом, для которого

$$\theta_c^c = -\Sigma_{p=1}^n\, \chi_B \langle r_p^c\rangle^{c2} m_p \neq -\int \chi_B \langle r_x^c\rangle^{c2} \rho_y^i \mu_3(dx) \qquad (5.203)$$

при любых условиях.

3. Движения параллельного переноса и вращения свободного твердого тела при записи уравнений его движения в главной центральной системе координат тела инерционно независимы.

5.4.2. УРАВНЕНИЯ ПРОСТОГО СВЯЗАННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Предложение 5.58. Пусть: 1. Движение тела таково, что фазовая точка x^s (5.21) движется по некоторому подмногообразию в конфигурационной части фазового пространства Q_q, для некоторых индексов p, определяемом уравнениями

$$o_p^s = \text{const.},\ p \in \overline{1-3},\ \theta_p^s = \text{const.},\ p \in \overline{4-6}, \qquad (5.204)$$

при условии, что для остальных координат какие-либо равенства вида (5.204) отсутствуют (простейшие голономные связи);

2. $\|f^s\|$ — матрица 6-мерных ортов (с единицей на i-м месте, $i \in \overline{1-6}$) осей подвижности тела B ((o; s)-кинематической пары (5.65));

3. q^s — столбец обобщенных координат тела B (5.21);

4. Уравнения кинематики простого связанного движения тела имеют вид (5.67) [19, 33]

$$V_s^{0s} = M_f^0 \|f^s\| q^{s\cdot}. \tag{5.205}$$

5. M_f^0 и $M_f^{0\cdot}$ матрицы из (5.67) и (6.22).

Тогда уравнения простого связанного движения твердого тела в обобщенных координатах имеют вид

$$A_s^s(q^s)q^{s\cdot\cdot} + B_s^s(q^s, q^{s\cdot})q^{s\cdot} = Q_s^s(\neg B, B), \tag{5.206}$$

$$A_s^s(q^s) = \|f^s\|^T M_f^{0,T} \Theta_s^s M_s^0 \|f^s\|, \tag{5.207}$$

$$B_s^s(q^s, q^{s\cdot}) = \|f^s\|^T M_f^{0,T} (\Theta_s^s M_f^{0\cdot} + \Phi_s^{0s} \Theta_s^s M_f^0) \|f^s\|, \tag{5.208}$$

$$Q_s^s(\neg B, B) =$$

$$= \|f^s\|^T M_f^{0,T} (G_s^s(\neg B, B) - D_s^s(\neg B, B)). \tag{5.209}$$

Доказательство достигается заменой в уравнениях (5.191) матрицы $M_f^{0,T}$ на матрицу $\|f^s\|^T M_f^{0,T}$.□

Комментарии: 1. Умножение уравнения (5.189) слева на матрицу $M_f^{0,T}$ переводит его в неортогональный базис осей подвижности тела. При этом составляющие динамического винта реакций связей по этим осям равны нулю (но не равны нулю по остальным осям, т. е. по тем осям, по которым движение тела «запрещено» связями (5.204)). Умножая уравнения (5.189) слева на матрицу $\|f^s\|^T M_f^{0,T}$, «вырезаем» из системы скалярных уравнений те, по осям которых движение разрешено связями (5.204), т. е. уравнения простого связанного движения тела. Этим достигается равенство $\|f^s\|^T M_f^{0,T} R_s^s(\neg B, B) = 0$, в силу которого координаты динамических винтов реакций связей в полученные уравнения не попадают. Векторные уравнения содержат «k» скалярных уравнений с «k» ($k < 6$) неизвестными обобщенными координатами тела.

2. Если тело имеет одну степень свободы или две цилиндрические (но не винтовые), то уравнения движения упрощаются так, как в этом случае:

$$M^0_f \, \|f^s\| = \|f^s\|, \tag{5.210}$$

$$A^s_s(q^s) = \|f^s\|^T \Theta^s_s \|f^s\|, \; B^s_s(q^s, q^{s\cdot}) = \|f^s\|^T \Phi^{0s}_s \Theta^s_s \|f^s\|, \tag{5.211}$$

$$Q^s_s(\neg B, B) = \|f^s\|^T F^s_s(\neg B, B). \tag{5.212}$$

Определение 5.31. Квадратичная форма

$$T = 0.5 V^{0s,T}_s \Theta^s_s V^{0s}_s = 0.5 q^{s\cdot,T} \|f^s\|^T M^{0,T}_f \Theta^s_s M^0_f \|f^s\| q^{s\cdot} \tag{5.213}$$

называется кинетической энергией тела в простом связанном движении с простейшими голономными связями (5.204).

5.4.3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, НЕСУЩЕГО ДИНАМИЧЕСКИ НЕ СБАЛАНСИРОВАННЫЕ И АСИММЕТРИЧНЫЕ ВРАЩАЮЩИЕСЯ ТЕЛА

Предложение 5.59. Пусть: 1. Предположим, что B_s — абсолютно твердое тело;

2. B_i — (i)-е вращающееся тело, установленное на B-теле, E_i — связанная с ним система координат, начало o_i которой находится не на физической оси вращения тела (определяемой шарнирами), Θ^s_i — его матрица Мизаса вида (5.172) при условии (5.179) (B_i — в физическом и математическом смысле динамически несбалансированное и динамически асимметрическое тело);

3. $R^s_{ik} = \mathrm{col}\{p^i_1, p^i_2, p^i_3, \varphi^i_4, \varphi^i_5, 0\}$ — конструктивная конфигурация кинематической пары (s, i), где $p^{ss}_i = \mathrm{col}\{p^i_1, p^i_2, p^i_3\}$ — конструктивный вектор положения тела E_i в E_s и базисе $[e^s]$, φ^i_4, φ^i_5 — конструктивные углы ориентации базиса $[e^{ik}]$ в базисе $[e^s]$ (5.63);

4. $R^{ik}_i = \mathrm{col}\{\mathbf{0}, 0, 0, \theta^i_6\}$ — функциональная конфигурация кинематической пары (s, i), θ^i_6 — угол вращения $[e^i]$ (т. е. тела B_i) относительно базиса $[e^{ik}]$ с ортом $e^{ik}_6 = e^i_6$, $f^i_6 = \mathrm{col}\{\mathbf{0}, e^i_3\}$ (5.63);

5. $L^s_i = L^s_{ik} L^{ik}_i$ — матрицы преобразования координат винтов, индуцированные движениями $E_s \to E_{ik} \to E_i$, соответствующими конфигурациями R^s_{ik} и R^{ik}_i;

6. $n(s)$ — количество вращающихся B_i-тел на (s)-теле;

7. Предположим, что скорости изменения углов $\theta^{i\cdot}_6$, $i = 1, 2, ..., n(i)$ не зависят от движения (s)-тела (обратная связь носителя с несомыми телами отсутствует);

8. Для упрощения письма переобозначено [illegible] $\div Q_s^s$.

Тогда уравнение движения (s)-тела, несущего на себе $n(s)$ вращающихся тел (без обратной связи, см. п. 7), имеет вид [20, 22, 24, 33]:

$$A_s^s V_s^{0s*} + B_s^s V_s^{0s} = F_s^s(\neg B, B) + T_s^s(\cup B_i, B), \qquad (5.214)$$

$$A_s^s = \Theta_s^s + \Sigma_{i=1}^{n(s)} L_i^s \Theta_i^i L_i^{s,T},\ B_s^s = \Phi_s^{0s} A_s^s + A_s^{s\cdot},$$

$$A_s^{s\cdot} = \Sigma_{i=1}^{n(s)} L_i^s([\langle e_3^i\rangle]\Theta_i^i - \Theta_i^i[\langle e_3^i\rangle])L_i^{s,T}\theta_6^{i\cdot},$$

$$T_s^s(\cup B_i, B) = \Sigma_{i=1}^{n(s)} L_i^s G_i^i - \Sigma_{i=1}^{n(s)}(I_i^s \theta_6^{i\cdot\cdot} + J_i^i \theta_6^{i\cdot}),$$

$$I_i^s = L_i^s \Theta_i^i f_6^i,\ J_i^s = (\Phi_s^{0s} L_i^s + L_i^s[\langle e_3^i\rangle]\theta_6^{i\cdot})\Theta_i^i f_6^i.$$

Доказательство. Кинетический винт — векторная мера на сигма-алгебре σ_3^{μ} механических систем Вселенной механики и, следовательно, для системы $B = B_s \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{n(i)}$ имеем $Q_{B0}^{00} = Q_{s0}^{00} + Q_{10}^{00} + \ldots + Q_{n(i)0}^{00}$, где для сокращения письма обозначение систем в нижних индексах винтов в правой части равенства заменено их индексами. Уравнение (5.182) в этом случае с учетом того, что динамический винт $F_0^0(\neg B, B)$ является также векторной мерой, имеет вид

$$(Q_{s0}^{00} + Q_{10}^{00} + \ldots + Q_{n(s)0}^{00})^{\cdot} = F_0^0. \qquad (5.215)$$

Далее следуют очевидные преобразования с учетом (5.173), (5.174) и равенства $V_i^{0i} = L_s^{0,T} V_s^{0s} + V_i^{si}$ (5.69):

$$(L_s^0 \Theta_s^s V_s^{0s} + \Sigma_{i=1}^{n(s)} L_i^s \Theta_i^i V_i^{0i\cdot}) = L_s^0 Q_s^s,$$

$$[L_s^0(\Theta_s^s V_s^{0s} + \Sigma_{i=1}^{n(s)} L_i^s \Theta_i^i V_i^{si})^{\cdot}] = L_s^0 Q_s^s,$$

$$L_s^{0\cdot}(\Theta_s^s V_s^{0s} + \Sigma_{i=1}^{n(s)} L_i^i \Theta_i^i V_i^{si}) + L_s^0(\Theta_i^i A_s^s V_s^{0s} +$$

$$+ \Sigma_{i=1}^{n(s)} L_i^s\, \Theta_i^i\, V_i^{si\cdot}) = L_s^0 Q_s^s.$$

Умножая полученное равенство слева на $(L_s^0)^{-1} = L_0^s$ (7.7), после преобразований получаем доказываемый результат, учитывая равенства $\Phi_i^{si} = [\langle w_i^s\rangle^s] = [\langle e_3^i\rangle]\theta_6^{i\cdot}$, $V_i^{si} = f_6^i \theta_6^{i\cdot}$, $V_i^{si*} = f_6^i \theta_6^{i\cdot\cdot}$.□

Комментарии. 1. Уравнения (5.214) не являются уравнениями движения системы твердых тел «(s)-тело ∪ (i)-тела». Это шесть уравнений движения свободного твердого (s)-тела, несущего на себе (i)-тела, вращение которых не зависит от движения этого тела.

2. Слагаемые $\Sigma_{i=1}^{n(s)} (I_i^s \Theta_6^{i\cdot\cdot} + J_i^i \Theta_6^{i\cdot})$ правой части уравнений (5.214) определяют часть динамических винтов инерции вращающихся тел, передаваемых на (s)-тело. Другая часть этих винтов содержится в слагаемых $A_s^s V_s^{0s*} + B_s^s V_s^{0s}$.

3. Уравнения (5.214) позволяют исследовать влияние вращающихся тел на движение несущего их тела в случаях, когда обратная связь парируется (например, системой управления) или по условиям задачи пренебрежимо мала.

5.4.4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ИНЕРЦИОННОЙ ВНЕШНЕЙ СРЕДЕ

Предложение 5.60. Пусть: 1. Предположим, что B_s — абсолютно твердое тело, несущее на себе динамически несбалансированные и асимметричные вращающиеся тела B_i, $i = 1, 2, \ldots, n(lk)$, V_s^{0s} — вектор квазискоростей B_s относительно инерциальной системы координат E_0;

2. Предположим, что во Вселенной механики Галилея существует открытая механическая система D_s, такая что:

2.1. D_s — локально линейно изменяемая непрерывная среда **(О.2.4)**;

2.2. Деформирование системы D_s при движении в ней тела B_s бесциркуляционно (потенциально) (3.96);

2.3. Кинетический винт Q_{Ds}^{0s} системы D_s в E_s при движении относительно E_{10} является линейным преобразованием векторного пространства квазискоростей тела B_s:

$$Q_{Ds}^{0s} = \Lambda_s^s V_s^{0s}. \qquad (5.216)$$

Тогда уравнения движения твердого тела B_s относительно E_0 в базисе $[e^s]$, связанной системы координат E_s, имеют вид [20, 24, 33]

$$A_s^s V_s^{0s*} + B_s^s V_k^{0s} = Z_s^s + H_s^s + N_s^s, \qquad (5.217)$$

$$A_s^s = \Sigma_s^s + \Sigma_{i=1}^{n(s)} L_i^s \Theta_i^i L_i^{s,T},\ B_s^s = \Phi_s^{0s} A_s^s + A_s^{s\cdot},$$

$$A_s^{s\cdot} = \Sigma_{i=1}^{n(s)} L_i^s[\langle e_3^i\rangle]\Theta_i^i - \Theta_i^s[\langle e_3^i\rangle])L_i^{s,T}\theta_6^{i\cdot},$$

$$T_s^s = \Sigma_{i=1}^{n(s)} L_i^s G_i^i - \Sigma_{i=1}^{n(s)} (I_i^s\theta_6^{i\cdot\cdot} + J_i^s\theta_6^{i\cdot}),$$

$$I_i^s = L_i^s\Theta_i^i f_6^i,\ J_i^s = (\Phi_s^{0s}L_i^s + L_i^s[\langle e_3^i\rangle]\theta_6^{i\cdot})\Theta_i^u f_6^i,$$

$$\Sigma_s^s = \Lambda_s^s + \Theta_s^s.$$

Доказательство уравнения (5.217) аналогично доказательству уравнения (5.214) с учетом того, что $Q_{B0}^{00} = Q_{s0}^{00} + Q_{D0}^{00} + Q_{1,0}^{00} + \ldots + Q_{n(s),0}^{00}$.

Определение 5.32. Постоянная симметрическая матрицы Λ_s^s традиционно называется *матрицей присоединенных масс тела* B_s.

5.4.5. УРАВНЕНИЯ ПРОСТЫХ СВОБОДНОГО И СВЯЗАННОГО ДВИЖЕНИЙ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА II РОДА

Предложение 5.61. Пусть: 1. M_f^s — (6×6)-матрица перехода от базиса $[e^s] \times [e^s]$ к неортогональному базису осей подвижности $[f^s]$, такая что (5.67)

$$V_s^{0s} = M_f^s q^{s\cdot}; \tag{5.218}$$

2. $[c_s^0]$ — блочно-диагональная (6×6)-матрица с (3×3)-блоками c_s^0;

3. M_f^0 — (6×6)-матрица перехода от базиса $[e^0] \times [e^0]$ к неортогональному базису осей подвижности $[f^s]$, такая что

$$V_s^{00} = M_f^0 q^{s\cdot},\ M_f^0 = [c_s^0]M_f^s; \tag{5.219}$$

4. $q^s, q^{s\cdot}$ — обобщенные координаты и скорости свободного движения тела, $\dim q^s = 6$;

5. π-координаты тела в $(\pi_s^{00\cdot} = V_s^{00})$ — непрерывные функции времени.

Тогда: 1. Для производной вектора скоростей V_s^{00} по обобщенным скоростям тела имеем

$$dV_s^{00}/dq^{s\cdot} = M_f^0. \tag{5.220}$$

2. Для производной вектора скоростей V_s^{00} по обобщенным координатам тела имеем

$$dV_s^{00}/dq^s = M_f^{0\cdot} . \tag{5.221}$$

Доказательство. 1. $dV_s^{00}/dq^{s\cdot} = dM_f^0 q^{s\cdot}/dq^{s\cdot} = M_f^0$.

2. $dV_s^{00}/dq^s = d(V_s^{00})^{\cdot}/dq^s = d\pi_s^{00\cdot}/dq^s = (d\pi_s^{00}/dq^s)^{\cdot}$, где $\pi_s^{00\cdot} = V_s^{00}$.

Осталось вычислить координаты $\pi_s^{00}: \pi_s^{00} = \int V_s^{00}\mu_1\ (dt) = = \int M_f^0 q^{s\cdot}\mu_1\ (dt) = \int M_f^0 dq^s \to d\pi_s^{00}/dq^s = M_f^0$.□

Комментарий. Матрица производная $d\pi_s^{00}/dq^s = M_f^0$ вектора координат π_s^{00} тела по обобщенным координатам при традиционном построении теории требует аналитического вычисления 36 частных производных. В рассматриваемом случае этот трудоемкий процесс исключается полностью, так как в (5.46) получен готовый к непосредственному использованию на ЭВМ матричный алгоритм вычисления M_f^0 с учетом (5.42).

Предложение 5.62. Пусть: 1. Кинетическая энергия свободного движения твердого тела зависит от скоростей тела, которые зависят от обобщенных координат и скоростей этого тела (5.218), (5.219):

$$T = V_s^{00,T}\Theta_0^0 V_s^{00} = T(V_s^{00}),\ V_s^{00} = M_f^0 q^{s\cdot} = V_s^{00}(q^s, q^{s\cdot}); \tag{5.222}$$

2. $\mathrm{grad}_{q\cdot}T$, $\mathrm{grad}_q T$, $\mathrm{grad}_{V0}T$ — градиенты кинетической энергии тела в подпространстве обобщенных скоростей, конфигурационном подпространстве фазового пространства тела Q_q и векторном пространстве скоростей $V_s^{00} = [c_s^0]V_s^{0s}$.

Тогда верны следующие соотношения:

$$\mathrm{grad}_q T = (M_f^{0\cdot})^T \mathrm{grad}_{V0}T, \tag{5.223}$$

$$\mathrm{grad}_{q\cdot} T = M_f^{0,T} \mathrm{grad}_{V0}T, \tag{5.224}$$

$$\mathrm{grad}_{q\cdot} T = M_f^{0,T}(M_f^{0\cdot})^{-T} \mathrm{grad}_q T, \tag{5.225}$$

где $(M_f^{0\cdot})^{-T} \equiv (M_f^{0\cdot,T})^{-1}$.

Доказательство. Первые два равенства получаются с использованием правил вычисления частных производных сложных функций и равенств (5.220), (5.221), второе — результат исключения из них вектора $\mathrm{grad}_{V0}\, T$.□

Предложение 5.63. Пусть: 1. Предположим, что B_s — абсолютно твердое тело (5.182):

$$Q_{s0}^{00\cdot} = F_0^0(\neg B, B), \tag{5.226}$$

$$F_0^0(\neg B, B) = G_0^0(\neg B, B) - D_0^0(B, \neg B) \tag{5.227}$$

— уравнение его простого свободного движения относительно инерциальной системы координат E_0 и в базисе этой системы координат;

2. $Q(\neg B, B) = M_f^{0,T} F_0^0(\neg B, B)$ — обобщенные *силы*, отнесенные к обобщенным *координатам* тела (динамический винт $F_0^0(\neg B, B)$, пересчитанный в базис $[f^s]$ осей подвижности тела).

Тогда уравнения Лагранжа второго рода свободного твердого тела имеют вид [37]

$$(\mathrm{grad}_{q^\cdot} T)^\cdot - \mathrm{grad}_q T = Q(\neg B, B). \tag{5.228}$$

Доказательство. Вычтем из производной равенства (5.224) равенство (5.223) с учетом (5.228), (5.269) и (5.226):

$$(\mathrm{grad}_{q^\cdot} T)^\cdot - \mathrm{grad}_q T = M_f^{0,T} (\mathrm{grad}_{V0} T)^\cdot + M_f^{0,T\cdot}\, \mathrm{grad}_{V0} T -$$

$$- (M_f^{0\cdot})^T\, \mathrm{grad}_{V0} T = M_f^{0,T} (\mathrm{grad}_{V0} T)^\cdot = M_f^{0,T} Q_{s0}^{00\cdot} =$$

$$= M_f^{0,T} F_0^0(\neg B, B) = Q(\neg B, B).$$

В этом простейшем доказательстве уравнения Лагранжа второго рода предполагалось, что форма этих уравнений уже известна. Приведем второе доказательство, не использующее этой информации.

Учитывая, что при (5.269) $Q_{s0}^{00} = \mathrm{grad}_{V0} T = (M_f^0)^{-T}\, \mathrm{grad}_{q^\cdot} T$ из (5.223), получаем $d[(M_f^0)^{-T}\, \mathrm{grad}_{q^\cdot} T]/dt = F_0^0(\neg B, B)$, (5.226).

Дифференцирование в левой части этого равенства дает

$$(M_f^0)^{-T} d(\mathrm{grad}_{q^\cdot} T)/dt + (M_f^0)^{-T\cdot}\, \mathrm{grad}_{q^\cdot} T = F_0^0(\neg B, B).$$

Умножая полученный результат слева на матрицу $M_f^{0,T}$, получаем $d(\mathrm{grad}_{q^\cdot} T)/dt + M_f^{0,T}(M_f^0)^{-T\cdot}\,\mathrm{grad}_{q^\cdot} T = M_f^{0,T} F_0^0(\neg B, B) =$ $= Q(\neg B, B)$.

Подставляя в левую часть уравнения вектор $\mathrm{grad}_{q^\cdot} T$ из (5.224), приходим к равенству

$$d(\mathrm{grad}_{q^\cdot} T)/dt + M_f^{0,T}(M_f^0)^{-T\cdot} M_f^{0,T}(M_f^{0\cdot})^{-T}\,\mathrm{grad}_q T = \\ = Q(\neg B, B), \qquad (5.229)$$

где очевидно $(M_f^0)^{-T\cdot} \neq (M_f^{0\cdot})^{-T}$.

Проделаем следующие вычисления: $M_f^0(M_f^0)^{-1} = E \to$ $\to [M_f^0(M_f^0)^{-1}]^\cdot = 0 \to -M_f^{0\cdot}(M_f^0)^{-1} = M_f^0(M_f^0)^{-1\cdot} \to -M_f^{0\cdot} =$ $= M_f^0(M_f^0)^{-1\cdot} M_f^0 \to -(M_f^{0\cdot})^T = M_f^{0,T}(M_f^0)^{-T\cdot} M_f^{0,T}$. Подставляя полученный результат в (5.229) с учетом того, что $(M_f^{0\cdot})^T (M_f^{0\cdot})^{-T} = E$, приходим к доказываемому уравнению.□

Предложение 5.64. Пусть: 1. Движение тела B_s является простым связанным с простейшими голономными связями типа (5.204);

2. $\|f^s\|$ — $(6 \times \dim q^s)$-матрица 6-мерных ортов осей подвижности тела относительно инерциальной системы координат E_0 (5.65);

3. Уравнения кинематики простого связанного движения тела в квазискоростях имеют вид (5.67)

$$V_s^{0s} = M_f^s \|f^s\| q^{s\cdot}; \qquad (5.230)$$

4. M_f^0 — (6×6)-матрица перехода от базиса $[e^0] \times [e^0]$ к неортогональному базису осей подвижности $[f^s]$, такая что (5.219):

$$V_s^{00} = M_f^0 \|f^s\| q^{s\cdot},\ M_f^0 = [c_s^0] M_f^s, \qquad (5.231)$$

где первое равенство является уравнением кинематики тела в скоростях;

5. $q^s, q^{s\cdot}$ — обобщенные координаты и скорости свободного движения тела, $\dim q^s < 6$;

6. Координаты π_s^{00} тела в E_0 — непрерывные функции времени.

Тогда: 1. Для производной вектора скоростей V_s^{00} по обобщенным скоростям тела имеем

$$dV_s^{00}/\,dq^{s\cdot} = M_f^0\|f^s\|; \qquad (5.232)$$

2. Для производной вектора скоростей V_s^{00} по обобщенным координатам тела имеем

$$dV_s^{00}/\,dq^s = M_f^{0\cdot}\|f^s\|. \qquad (5.233)$$

Доказательство дословно совпадает с доказательством (**П.5.61**).□

Предложение 5.65. Пусть: 1. Кинетическая энергия простого связанного движения твердого тела зависит от скоростей тела, которые зависят от обобщенных координат и скоростей этого тела:

$$T = V_s^{00,T}\Theta_0^0 V_s^{00} = T(V_s^{00}),$$

$$V_s^{00} = M_f^0\|f^s\|q^{s\cdot} = V_s^{00}(q^s, q^{s\cdot}); \qquad (5.234)$$

2. $\mathrm{grad}_{q\cdot}T$, $\mathrm{grad}_q T$ $(\dim \mathrm{grad}_{q\cdot} T = \dim \mathrm{grad}_q T = \dim q^s < 6)$, $\mathrm{grad}_{V0}T$ $(\dim \mathrm{grad}_{V0}T = 6)$ — градиенты кинетической энергии тела в подпространстве обобщенных скоростей, конфигурационном подпространстве фазового пространства тела Q_q и векторном пространстве скоростей V_s^{00}.

Тогда верны следующие соотношения:

$$\mathrm{grad}_q T = (M_f^{0\cdot}\,\|f^s\|)^T\,\mathrm{grad}_{V0}T, \qquad (5.235)$$

$$\mathrm{grad}_{q\cdot} T = (M_f^0\,\|f^s\|)^T\,\mathrm{grad}_{V0}T. \qquad (5.236)$$

Доказательство. Оба равенства получаются с использованием правил вычисления частных производных сложных функций и равенств (5.232) и (5.233).□

Предложение 5.66. Пусть: 1. Предположим, что B_s — абсолютно твердое тело и

$$Q_{s0}^{00\cdot} = F_0^0, \qquad (5.237)$$

$$F_0^0(\neg B, B) = G_0^0(\neg B, B) - D_0^0(B, \neg B) + R_0^0(\neg B, B) \quad (5.238)$$

— уравнение его простого связанного движения относительно инерциальной системы координат E_0 и в базисе этой системы координат (5.182) с простейшими голономными связями типа (5.204);

2. $Q(\neg B, B) = \|f^s\|^T M_f^{0,T} F_0^0(\neg B, B)$ — обобщенные силы, отнесенные к обобщенным координатам тела (динамический винт $F_0^0(\neg B_s, B_s)$, пересчитанный в базис $[f^s]$ осей подвижности тела ($\dim Q(\neg B, B) = \dim q^s < 6$);

3. $\|f^s\|^T M_f^{0,T} R_0^0(\neg B, B) = 0.$

Тогда уравнения Лагранжа второго рода простого связанного движения твердого тела имеют вид

$$(\mathrm{grad}_{q^\cdot} T)^\cdot - \mathrm{grad}_q T = Q(\neg B, B). \qquad (5.239)$$

Доказательство. Вычтем из производной равенства (5.236) равенство (5.235) с учетом (5.269):

$$(\mathrm{grad}_{q^\cdot} T)^\cdot - \mathrm{grad}_q T = \|f^s\|^T M_f^{0,T} (\mathrm{grad}_{V0} T)^\cdot +$$

$$+ \|f^s\|^T M_f^{0,T\cdot} \, \mathrm{grad}_{V0} T - \|f^s\|^T (M_f^{0\cdot})^T \mathrm{grad}_{V0} T =$$

$$= \|f^s\|^T M_f^{0,T} (\mathrm{grad}_{V0} T)^\cdot = \|f^s\|^T M_f^{0,T} Q_{s0}^{00\cdot} =$$

$$= \|f^s\|^T M_f^{0,T} F_0^0(\neg B, B) = Q(\neg B, B).\square$$

Комментарии: 1. Равенства (5.228) и (5.239) являются уравнениями Лагранжа II рода на самом деле абсолютно твердого тела, как континуальной непрерывной среды, а не конечного множества несуществующих в реальном физическом мире точек со сосредоточенными массами.

2. При формулировке и доказательстве уравнений (5.228) и (5.239) не используются какие-либо «классические» уравнения движения вышеуказанных конечных систем точек (уравнения Ньютона, общее уравнение динамики, центральное уравнение Лагранжа и т. п.), которые для реального твердого тела (континуальной непрерывной среды) не существуют, как содержащие конечные суммы слагаемых, в состав которых входят нулевые массы (как инерционные меры точек континуума).

3. Доказательство уравнений (5.228) для простого свободного движения тела и (5.239) для простого связанного движения с про-

стейшими голономными связями (5.204) гораздо короче (две строки) и «прозрачнее» (математически и физически) доказательств «классических» уравнений Лагранжа II рода для конечного множества точек со сосредоточенными массами при тех же условиях.

4. Уравнения (5.228) не подлежат непосредственному интегрированию (исключая случаи получения интегралов), являясь лишь алгоритмами составления скалярных уравнений движения тела. Матричные уравнения движения твердого тела (5.206), полученные из тех же равенств (5.182) в два-три действия (5.185), готовы к непосредственному интегрированию на ПК с использованием матричного матобеспечения. Эти же уравнения удобны для получения скалярных уравнений движения (в случае необходимости в таковых) с использованием алгебраических модулей систем аналитических вычислений на ЭВМ [8, 13].

5.4.6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

Определение 5.33. Пусть: 1. В пространстве конфигураций твердого тела B_s определено скалярное поле (возможно точка q^s принадлежит связи (5.204)):

$$P = P(q^s) = \Sigma_i \; P_i(q^s); \tag{5.240}$$

2. В состав обобщенных сил $Q(\neg B, B)$ воздействия внешней среды на тело B_s входят слагаемые, вычисляемые по формулам:

$$Q_{pi}(\neg B, B) = -\operatorname{grad}_q P_i(q^s). \tag{5.241}$$

Тогда: 1. Скалярное поле (5.240) называется *потенциальным*, а сама функция $P(q^s)$ — *потенциалом поля.*

2. Динамический винт $Q_{pi}(\neg B, B)$ называется *потенциальным динамическим винтом.*

Предложение 5.67. Пусть: 1. $Q_{pi}(\neg, B)$ — потенциальные динамические винты;

2. L — скалярная функция $L\colon Q^q \to R_1$, равная разности кинетической энергии тела и потенциала поля, в котором находится тело (5.240)

$$L = T - P; \tag{5.242}$$

3. $Q_s^s(\neg B, B)$ — обобщенные силы непотенциального происхождения

$$Q_s^s(\neg B, B) = Q(\neg B, B) - \Sigma_i\, Q_{pi}(\neg B, B). \qquad (5.243)$$

Тогда: 1. Уравнения простого движения твердого тела в обобщенных скоростях (5.206) имеют вид

$$A_s^s(q^s)q^{s\cdot\cdot} + B_s^s(q^s, q^{s\cdot})q^{s\cdot} =$$

$$= Q_s^s(\neg B, B) - \Sigma_i\, \mathrm{grad}_q P_i(q^s). \qquad (5.244)$$

2. Уравнения Лагранжа второго рода простого движения твердого тела (5.239) имеют вид

$$(\mathrm{grad}_{q^\cdot} L)^\cdot - \mathrm{grad}_q L = Q_s^s(\neg B, B). \qquad (5.245)$$

Примеры: 1. Динамический винт притяжения тела к Земле.

Предположим, что: 1. Вся Вселенная механики состоит только из планеты Земля (Z) и тела B_s так, что $x \in Z$, $y \in B_s$;

2. Планета Земля имеет форму шара радиуса R_z;

3. Плотности Земли и тела B_s постоянны (не зависят от полевых координат);

4. Инерциальная система координат расположена на Земле так, что координатная плоскость e_1^0, o_0, e_2^0 является плоскостью местного горизонта, а ось e_3^0 направлена по радиусу Земли от центра.

В этом случае с использованием (2.35) для потенциала поля тяготения, создаваемого Землей, имеем

$$P_g = m(B_s) g r_{c3}^{00}, \qquad (5.246)$$

где r_{c3}^{00} — третья координата радиуса-вектора центра масс тела B_s в E_o; $g = \gamma\, m(Z)(R_z + r_{c3}^{00})^{-2}$ — ускорение земного тяготения.

Для главного вектора τ^0 динамического винта земного притяжения тела B_s в $[e^0]$ получаем

$$\tau^0 = -\,\mathrm{grad}_q P_g = -\,m(B_s) g^0,\ g^0 = \mathrm{col}\{0,\ 0,\ g\}. \qquad (5.247)$$

Переводя вектор τ^0 в базис связанной системы координат E_s для динамического винта (скользящего вектора) земного притяжения в связанной системе координат $\tau^s = c_s^{0,T} \tau^0$, получаем (с учетом (7.1))

$$G_s^s(Z, B) = - G_{cs}^s [c_s^{0,T}] \mathrm{col}\{\tau^s, \tau^s\}. \qquad (5.248)$$

Уравнения движения тела принимают вид

$$A_s^s(q^s) q^{s\cdot\cdot} + B_s^s(q^s, q^{s\cdot}) q^{s\cdot} = Q_s^s(\neg B, B) + G_s^s(Z, B). \quad (5.249)$$

Комментарий. Не следует путать динамический винт притяжения тела к Земле с динамическим винтом веса тела. Если опора не имеет движения относительно Земли, то динамические винты притяжения тела к Земле и веса тела совпадают. Если ускорение опоры совпадает по направлению с ускорением свободного падения, то норма динамического винта веса тела меньше нормы динамического винта притяжения тела к Земле, если эти ускорения противоположны по направлению, то — больше. Если ускорения совпадают (опора свободно падает), то динамический винт веса тела равен нулю (состояние невесомости).

2. Динамический винт воздействия на тело пружин.

Пусть абсолютно твердое тело B_s опирается на n пружин, точки крепления которых к телу обозначены Pri ($i = 1, 2, \ldots, n$), и их радиусы-векторы r_{Pri}^{ss} в связанной системе координат E_s тела и ее $[e^s]$ базисе $r_{Pri}^{ss} = [r_{Pri}^{ss}(1) r_{Pri}^{ss}(2) r_{Pri}^{ss}(3)]$ (в терминах МАТЛАБ).

Свяжем с телом n систем координат $E_{Pri} = (Pri, [e^s])$ с началами в точках крепления пружин и базисами $[e^s]$ основной связанной системы координат $E_s = (o_s, [e^s])$, тогда матрица перехода $E_s \to E_{Pri}$ в векторном пространстве винтов имеет вид $T_{Pri}^{ss} = [E\ 0; \langle r_{Pri}^s \rangle^s\ \ E]$.

Пусть $Q_{Pri}(Pri, B)$ — обобщенные силы упругого воздействия i-й пружины на тело, тогда для динамического винта того же воздействия в E_{Pri}, входящего в состав винта $F_{Pri}^s(\neg B, B)$ (5.214), получаем $F_{Pri}^s(Pri, B) = (M_f^s)^{-T} Q_{Pri}(Pri, B)$ (5.228), (5.239). Для $Q_{Pri}(Pri, B)$ в [37] при малых обобщенных координатах получено $Q_{Pri}(Pri, B) = - C(i) q^s$, где $C(i)$ — (6×6)-матрица коэффициентов жесткости i-й пружины, поэтому

$$F_{Pri}^s(Pri, B) = (M_f^s)^{-T} Q_{Pri}(Pri, B) = - (M_f^s)^{-T} C(i) q^s. \quad (5.250)$$

Для динамического винта воздействия i-й пружины на тело в основной связанной системе координат получаем $F_s^s(Pri, B) = T_{Pri}^{ss} F_{Pri}^s(Pri, B)$, откуда для динамического винта воздействия всех пружин на тело в $E_s = (o_s, [e^s])$ имеем

$$F_s^s(Pr, B) = \Sigma_{i=1}^n \; F_s^s(Pri, B), \tag{5.251}$$

и для обобщенных сил соответственно

$$Q(Pr, B) = M_f^{s,T} F_s^s(Pr, B). \tag{5.252}$$

Собирая полученные результаты, получаем

$$Q(Pr, B) = -C(B)q^s, \tag{5.253}$$

$$C(B) = M_f^{s,T} \Sigma_{i=1}^n \; T_{Pri}^{ss}(M_f^s)^{-T} C(i).$$

Обобщенные силы (5.253) потенциальны так, что (5.240) [37]

$$P = q^{s,T} C(B) q^s, \; Q(Pr, B) = -\operatorname{grad}_q P. \tag{5.254}$$

В частности, если по условиям задачи при малых обобщенных координатах можно принять $M_f^{s,T} \approx E$, то

$$C(B) = \Sigma_{i=1}^n \; T_{Pri}^{ss} C(i), \tag{5.255}$$

если все пружины одинаковы $C(i) = C$, то

$$C(B) = M_f^{s,T}(\Sigma_{i=1}^n \; T_{Pri}^{ss}(M_f^s)^{-T})C. \tag{5.256}$$

Если имеют место оба вышеуказанных условия, то

$$C(B) = (\Sigma_{i=1}^n \; T_{Pri}^{ss})C. \tag{5.257}$$

При выводе равенства (5.253) принципиально использованы два условия: динамический винт упругости пружины записан в системе координат $E_{Pri} = (Pri, [e^s])$ и в матрице $C(i)$ учтены все (25) коэффициенты жесткости пружины [37]. На практике часто эта информация отсутствует, но взамен ее известны экспериментально определяемые коэффициенты жесткости в инерциальной системе координат E_0, связанной, например со столом, на котором закреплены пружины, и только для продольной и двух одинаковых поперечных деформаций. Иными словами, известна только (3×3)-матрица жесткости пружины вида

$$c(i) = \operatorname{diag}\{c_{11}, c_{22}, c_{33}\}. \tag{5.258}$$

В этом случае для обобщенных сил $Q(Pr, B)$ можно получить другое равенство. Вычислим движения параллельного переноса точек крепления пружин к телу *Pri* относительно E_0, полагая, что $E_0 \equiv E_s$ при $t = 0$:

$$o^{00}_{Pri} = o^{00}_s + c^0_s r^{ss}_{Pri} - r^{ss}_{Pri} = o^{00}_s + r^{ss}_{Pri} + \langle \theta^s \rangle r^{ss}_{Pri} - r^{ss}_{Pri} =$$

$$= o^{00}_s + \langle \theta^s \rangle r^{ss}_{Pri} = o^{00}_s + \langle r^s_{Pri} \rangle^{s,T} \theta^s = [E \enspace \langle r^s_{Pri} \rangle^{s,T}] q^s. \quad (5.259)$$

В этом случае главный вектор динамического скользящего вектора воздействия (i)-пружины на тело примет вид

$$\mathrm{mv}\, F^0_0(Pri, B) = -c(i)[E \enspace \langle r^s_{Pri} \rangle^{s,T}] q^s. \quad (5.260)$$

Перейдем в (5.260) к связанной системе координат и запишем в ней скользящий вектор $F^s_s(Pri, B)$ с учетом:

$$\mathrm{mv}\, F^s_s(Pri, B) = -c^{0,T}_s c(i)[E \enspace \langle r^s_{Pri} \rangle^{s,T}] q^s, \quad (5.261)$$

$$F^s_s(Pri, B) = -G^s_{Pri} \mathrm{col}\{\mathrm{mv}\, F^s_s(Pri, B), \mathrm{mv}\, F^s_s(Pri, B)\}. \quad (5.262)$$

Подставляя в (5.262) равенство (5.260), получим

$$F^s_s(Pri, B) =$$

$$= -G^s_{Pri}[c^{0,T}_s][c(i) \enspace c(i) \langle r^s_{Pri} \rangle^{s,T}; \quad c(i) \enspace c(i) \langle r^s_{Pri} \rangle^{s,T}] q^s. \quad (5.263)$$

Суммируя (5.263) по всем пружинам и переходя к обобщенным силам, получаем нужный результат, аналогичный (5.253):

$$Q(Pr, B) = -C(B) q^s, \quad (5.264)$$

$$C(B) = M^{s,T}_f \Sigma^n_{i=1} G^s_{Pri}[c^{0,T}_s][c(i) \enspace c(i) \langle r^s_{Pri} \rangle^{s,T}, \ldots$$

$$c(i) \enspace c(i) \langle r^s_{Pri} \rangle^{s,T}]. \quad (5.265)$$

Если по условиям задачи допустимы соглашения $M^{s,T}_f \approx E$ и $c^0_s \approx E$, то формула (5.265) принимает более простой вид:

$$C(B) = \Sigma^n_{i=1} G^s_{Pri}[c(i) \enspace c(i) \langle r^s_{Pri} \rangle^{s,T}, c(i) \enspace c(i) \langle r^s_{Pri} \rangle^{s,T}].$$

Остается отметить, что аналогично (5.254) обобщенные силы (5.253) потенциальны так, что

$$P = q^{s,T} C(B) q^s, \; Q(\mathrm{Pr}, B) = -\mathrm{grad}_q P. \quad (5.266)$$

5.5. ВТОРИЧНЫЕ СВОЙСТВА ВСЕЛЕННОЙ МЕХАНИКИ ГАЛИЛЕЯ II

Предложение 5.68. Пусть: 1. T — кинетическая энергия абсолютно твердого тела (5.194), (5.222), (5.234):

$$T = 0.5V_s^{00} \cdot \Theta_0^0 V_s^{00} = 0.5V_s^{0s} \cdot \Theta_s^s V_s^{0s} =$$

$$= 0.5q^{s\cdot} \cdot A_0^0(q^s)q^{s\cdot}; \qquad (5.267)$$

2. Q_{B0}^{00}, Q_{Bs}^{0s} — кинетические винты тела B_s при движении относительно инерциальной системы координат в этой же системе координат и в системе координат, связанной с телом (5.171), (5.169);

3. $Q_B^{0q} \equiv A_0^0(q^s)q^{s\cdot}$ — обобщенный кинетический винт тела B_s при движении относительно инерциальной системы координат (в терминах обобщенных координат).

Тогда кинетическая энергия тела равна половине мощности вышеуказанных кинетических винтов:

$$T = 0.5V_s^{00} \cdot Q_{B0}^{00} = 0.5V_s^{0s} \cdot Q_{Bs}^{0s} = 0.5q^{s\cdot} \cdot Q_B^{0q}. \qquad (5.268)$$

Доказательство следует из определений кинетической энергии и кинетических винтов в терминах скоростей, квазискоростей и обобщенных скоростей (5.173).□

Предложение 5.69. В обозначениях предыдущего утверждения

$$Q_{B0}^{00} = \mathrm{grad}_{V0}T, \; Q_{Bs}^{0s} = \mathrm{grad}_{Vs}T, \; Q_B^{0q} = \mathrm{grad}_{q\cdot}T. \qquad (5.269)$$

Доказательство достигается вычислением градиентов правых частей равенств (5.267).□

Комментарии: 1. Формулы (5.269) многократно использовались ранее, например (5.228), (5.239). Здесь на этих фактах останавливается внимание еще раз.

2. Из первых двух формул (5.268) и (5.269) следует, что

$$V_s^{00} = (\Theta_0^0)^{-1}\,\mathrm{grad}_{V0}T, \; V_s^{0s} = (\Theta_s^s)^{-1}\,\mathrm{grad}_{Vs}T. \qquad (5.270)$$

Предложение 5.70. Пусть: 1. θ_0^0, θ_s^s — (3×3)-матрицы инерции тела (нижние правые (3×3)-«ящики» матриц Мизаса Θ_0^0, Θ_s^s в E_0 и E_s;

2. $o_s^{00}, r_c^{00}, r_c^{ss}$ — координатные столбцы векторов o_s^0, r_c^0, r_c^s положения начала o_s связанной системы координат E_s и центра масс c тела в E_0 и E_s и их базисах $(r_c^{00} = o_s^{00} + c_s^0 r_c^{ss})$.

Тогда верно следующее равенство, связывающее матрицы θ_0^0 и θ_s^s, традиционно называемые тензорами инерции тела в E_0 и E_s

$$\theta_0^0 = c_s^0 \theta_s^s c_s^{0,T} - (\langle r_c^0 \rangle^0 \langle o_s^0 \rangle^0 + \langle o_s^0 \rangle^0 \langle r_c^s \rangle^0) m(B). \quad (5.271)$$

Доказательство достигается прямым перемножением матриц в равенстве (5.175).□

Комментарий. В частности, если в качестве связанной выбрана центральная система координат $E_s = E_{cs}$ (5.176), то $r_c^{ss} = 0$ и поэтому

$$\theta_0^0 = c_s^0 \theta_c^s c_s^{0,T} - \langle r_c^0 \rangle^{02} m(B). \quad (5.272)$$

Предложение 5.71. Пусть $D_{V0}(T)$, $D_{Vs}(T)$, $D_{q\cdot}(T)$ — поверхности уровня кинетической энергии тела в пространствах скоростей V_y^{00}, квазискоростей V_y^{0s} и обобщенных скоростей $q\cdot$ тела.

Тогда

$$Q_{B0}^{00} \perp D_{V0}(T),\ Q_{Bs}^{0s} \perp D_{Vs}(T),\ Q_B^{0q} \perp D_{q\cdot}(T). \quad (5.273)$$

Доказательство следует из утверждения grad $T \perp D(T)$ в пространстве любых переменных и (5.269).□

Предложение 5.72. Пусть: 1. T — кинетическая энергия тела (5.268);

2. P — потенциал поля, в котором находится тело;

3. $Q_s^s(\neg B, B)$ — обобщенные силы непотенциального происхождения (5.243).

Тогда верно следующее равенство:

$$d/dt(q^{s\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q\cdot} T - L) = q^{s\cdot} \cdot Q_s^s(\neg B, B). \quad (5.274)$$

Доказательство. Продифференцируем скалярное произведение $q^{s\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q\cdot} T$:

$$d/dt(q^{s\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q\cdot} T) = q^{s\cdot} \cdot d/dt\, \mathrm{grad}_{q\cdot} T + \\ + q^{s\cdot\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q\cdot} T. \qquad (5.275)$$

Умножим уравнения Лагранжа (5.245) скалярно на столбец обобщенных скоростей

$$q^{s\cdot} \cdot d(\mathrm{grad}_{q\cdot} L) / dt - q^{s\cdot} \cdot \mathrm{grad}_q L = q^{s\cdot} \cdot Q_s^s(\neg B, B)$$

и подставим в полученный результат слагаемое $q^{s\cdot} \cdot d/dt\, \mathrm{grad}_{q\cdot} T$ из равенства (5.275)

$$d/dt(q^{s\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q\cdot} T) - (q^{s\cdot\cdot} \cdot d/dt\, \mathrm{grad}_{q\cdot} T + q^{s\cdot} \cdot \mathrm{grad}_q L) = \\ = q^{s\cdot} \cdot Q(\neg B, B). \qquad (5.276)$$

Но слагаемое в круглых скобках является производной функции Лагранжа $L = L(q^s, q^{s= q^{s\cdot}})$, что и доказывает утверждение (5.274).□

Предложение 5.73. Пусть все динамические винты воздействия внешней среды на тело непотенциального происхождения, кроме инерционного, равны нулю (5.243):

$$Q_s^s(\neg B, B) \equiv 0.$$

Тогда сумма кинетической энергии тела и потенциала поля, в котором находится тело, в процессе его движения сохраняется:

$$T + P = \mathrm{const}. \qquad (5.277)$$

Доказательство следует из (5.274) с учетом (2.542) при условиях (5.268) и (5.269). Действительно: $d/dt(q^{s\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q\cdot} T - L) = = 0 \to q^{s\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q\cdot} T - L = \mathrm{const}. \to 2T - T + P = \mathrm{const}. \to T + P = = \mathrm{const}.$□

Комментарий. В условиях предыдущего предложения равенства $T + P = \mathrm{const}.$ и $q^{s\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q\cdot} T - L = \mathrm{const}.$ ($q^{s\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q\cdot} L - L = = \mathrm{const}.$, так как $\mathrm{grad}_{q\cdot} P = 0$) являются интегралами уравнений (5.274).

Предложение 5.74. Пусть: 1. $iF_0^0(\neg B, B)$ — импульс динамического винта $F_0^0(\neg B, B)$ тела в E_0 (5.128) за время Δt:

$$iF_0^0(\neg B, B) = \int \chi_{\Delta t} F_0^0(\neg B, B) \mu_1(dt); \qquad (5.278)$$

2. $Q_{B0}^{00}(t+\Delta t)$, $Q_{B0}^{00}(t)$ — кинетические винты тела в E_0 в моменты времени t и $t+\Delta t$.

Тогда: 1. Импульс динамического винта $F_0^0(\neg B, B)$ тела в инерциальной системе координат E_0 за время dt равен дифференциалу кинетического винта в той же системе координат за то же время:

$$dQ_{B0}^{00} = F_0^0(\neg B, B)\mu_1(dt). \tag{5.279}$$

2. Приращение кинетического винта $Q_{B0}^{00}(t)$ тела в инерциальной системе координат E_0 за время Δt равно импульсу (5.278) динамического винта в той же системе координат за то же время:

$$Q_{B0}^{00}(t+\Delta t) - Q_{B0}^{00}(t) = iF_0^0(\neg B, B). \tag{5.280}$$

Доказательство равенства (5.280) достигается интегрированием по временному Δt-интервалу утверждения (5.279) или (5.182).□

Комментарий. В развернутой форме равенство (5.280) имеет вид

$$\Theta_0^0(t+\Delta t)\,V_s^{00}(t+\Delta t) - \Theta_0^0(t)\,V_s^{00}(t) =$$
$$= \int \chi_{\Delta t}F_0^0(\neg B, B)\,\mu_1(dt). \tag{5.281}$$

Предложение 5.75. Пусть: 1. $iF_s^s(\neg B, B)$ — импульс динамического винта $F_s^s(\neg B, B)$ тела в связанной системе координат E_s за время Δt:

$$iF_s^s(\neg B, B) = \int \chi_{\Delta t}F_s^s(\neg B, B)\,\mu_1(dt); \tag{5.282}$$

2. $I_{s1}^s(\neg B, B)$, $I_{s2}^s(\neg B, B)$ — две части инерционного винта $I_s^s(\neg B, B)$ тела B в связанной с ним системе координат E_s, зависящие от квазиускорений V_s^{0s*} и квадратичные по квазискоростям V_s^{0s}, такие что (5.186)

$$I_s^s(\neg B, B) = I_{s1}^s(\neg B, B) + I_{s2}^s(\neg B, B); \tag{5.283}$$

$$I_{s1}^s(\neg B, B) = -\,\Theta_s^s V_s^{0s*},\ I_{s2}^s(\neg B, B) = -\,\Phi_s^{0s}\Theta_s^s V_s^{0s}.$$

3. $iI^s_{s1}(\neg B, B)$, $iI^s_{s2}(\neg B, B)$ — импульсы винтов (5.283):

$$iI^s_{s1}(\neg B, B) = \int \chi_{\Delta t} I^s_{s1}(\neg B, B)\,\mu_1(dt), \qquad (5.284)$$

$$iI^s_{s2}(\neg B, B) = \int \chi_{\Delta t} I^s_{s2}(\neg B, B)\,\mu_1(dt); \qquad (5.285)$$

4. $Q^{0s}_{Bs}(t + \Delta t)$, $Q^{0s}_{Bs}(t)$ — кинетические винты тела в E_s в моменты времени t и $t + \Delta t$.

Тогда верно равенство

$$Q^{0s}_{Bs}(t + \Delta t) - Q^{0s}_{Bs}(t) = iF^s_s(\neg B, B) + iI^s_{s2}(\neg B, B). \quad (5.286)$$

Доказательство равенства (5.286) достигается интегрированием по временному Δt-интервалу утверждения (5.185) с учетом (5.173).□

Комментарий. В развернутой форме равенство (5.286) имеет вид

$$\Theta^s_s(V^{0s}_s(t + \Delta t) - V^{0s}_s(t)) =$$

$$= \int \chi_{\Delta t} F^s_s(\neg B, B)\,\mu_1(dt) - \int \chi_{\Delta t} I^s_{s2}(\neg B, B)\,\mu_1(dt).$$

Предложение 5.76. В условиях предыдущего утверждения разность квазискоростей тела в указанные моменты времени может быть вычислена с использованием равенства

$$V^{0s}_s(t + \Delta t) - V^{0s}_s(t) =$$

$$= (\Theta^s_s)^{-1} \int \chi_{\Delta t}(F^s_s(\neg B, B) - \Phi^{0s}_s \Theta^s_s V^{0s}_s)\,\mu_1(dt). \quad (5.287)$$

Комментарий. Равенство (5.287), записанное в форме

$$V^{0s}_s(t) - V^{0s}_s(0) =$$

$$= (\Theta^s_s)^{-1} \int_0^t (F^s_s(\neg B, B) - \Phi^{0s}_s \Theta^s_s V^{0s}_s(t))\mu_1(dt), \quad (5.288)$$

является интегральным уравнением движения тела в квазискоростях с ядром $F^s_s(\neg B, B) - \Phi^{0s}_s \Theta^s_s V^{0s}_s(t)$.

Предложение 5.77. Мощность квадратичной относительно квазискоростей части инерционного винта тела в связанной системе координат $I^s_{s2}(\neg B, B) = \Phi^{0s}_s \Theta^s_s V^{0s}_s$ равна нулю:

$$I^s_{s2}(\neg B, B) \cdot V^{0s}_s = \Phi^{0s}_s \Theta^s_s V^{0s}_s \cdot V^{0s}_s = 0. \qquad (5.289)$$

Доказательство. $\Phi^{0s}_s \Theta^s_s V^{0s}_s \cdot V^{0s}_s = V^{0s,T}_s \Phi^{0s}_s \Theta^s_s V^{0s}_s = m(B) \times$ $\times v^{0s,T}_s \langle w^0_s \rangle^s v^{0s}_s + m(B) v^{0s,T}_s \langle w^0_s \rangle^s \langle r^0_c \rangle^{s,T} w^{0s}_s + m(B) w^{0s,T}_s \langle v^0_s \rangle v^{0s}_s +$ $+ m(B) w^{0s,T}_s \langle v^0_s \rangle \langle r^0_c \rangle^{s,T} w^{0s}_s + m(B) w^{0s,T}_s \langle w^0_s \rangle^s \langle r^0_c \rangle^s v^{0s}_s +$ $+ w^{0s,T}_s \langle w^0_s \rangle^s \theta^s_s w^{0s}_s = - m(B) v^{0s,T}_s \langle v^0_s \rangle^s w^{0s}_s - m(B) w^{0s,T}_s \langle v^0_s \rangle^s \times$ $\times \langle r^0_c \rangle^{s,T} w^{0s}_s + m(B) w^{0s,T}_s \langle v^0_s \rangle^s v^{0s}_s + m(B) w^{0s,T}_s \langle v^0_s \rangle^s \langle r^0_c \rangle^{s,T} w^{0s}_s +$ $+ m(B) w^{0s,T}_s \langle w^0_s \rangle^s \langle r^0_c \rangle^s v^{0s}_s + w^{0s,T}_s \langle w^0_s \rangle^s \Theta^s_s w^{0s}_s = 0$, где использованы свойства кососимметрических матриц $\langle x \rangle y = - \langle y \rangle x$, $\langle x \rangle x = 0$.□

Предложение 5.78. Пусть: 1. T — кинетическая энергия тела;

2. $I^s_s(\neg B, B)$ — динамический винт инерции тела B в связанной с ним системе координат E_s.

Тогда скорость изменения кинетической энергии тела совпадает с мощностью вышеуказанного винта, взятой с обратным знаком:

$$T^{\cdot} = - I^s_s(\neg B, B) \cdot V^{0s}_s. \qquad (5.290)$$

Доказательство. 1. Умножив равенство (5.185) скалярно на вектор квазискоростей V^{0s}_s тела с учетом (5.283) и (5.289), получим

$$- I^s_s(\neg B, B) \cdot V^{0s}_s = V^{0s}_s \cdot Q^{0s*}_{Bs}. \qquad (5.291)$$

Вычислим производную $(V^{0s}_s \cdot Q^{0s}_{Bs})^* = V^{0s}_s \cdot Q^{0s}_{Bs} + V^{0s}_s \cdot Q^{0s*}_{Bs}$ и перепишем полученное равенство в виде $V^{0s}_s \cdot Q^{0s*}_{Bs} = (V^{0s}_s \cdot Q^{0s}_{Bs})^* -$ $- V^{0s*}_s \cdot Q^{0s}_{Bs}$.

Осталось учесть, что $(V^{0s}_s \cdot Q^{0s}_{Bs})^* = 2T^{\cdot}$ (5.269) и воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции $T^{\cdot} =$ $= V^{0s*}_s \cdot \mathrm{grad}_{Vs} T = V^{0s\cdot}_s \cdot Q^{0s}_{Bs}$.□

Предложение 5.79. Пусть: 1. T — кинетическая энергия тела;

2. Q_{Bs}^{0s*} — скорость изменения кинетического винта B_s-тела в связанной с ним системе координат E_s.

Тогда скорость изменения кинетической энергии тела совпадает с мощностью вышеуказанного вектора:

$$T^{\cdot} = Q_{Bs}^{0s*} \cdot V_s^{0s}. \qquad (5.292)$$

Доказательство достигается подстановкой (5.291) в (5.290).□

Предложение 5.80. Пусть: 1. T — кинетическая энергия тела; 2. $F_0^0(\neg B, B) \cdot V_s^{00}$, $F_s^s(\neg B, B) \cdot V_s^{0s}$, $Q(\neg B, B) \cdot q^{\cdot}$ — мощности динамических винтов $F_0^0(\neg B, B)$, $F_s^s(\neg B, B)$ и обобщенных сил $Q(\neg B, B)$.

Тогда верны следующие равенства:

$$T^{\cdot} = F_0^0(\neg B, B) \cdot V_s^{00} = F_s^s(\neg B, B) \cdot V_s^{0s} = Q(\neg B, B) \cdot q^{\cdot}. \qquad (5.293)$$

Доказательство. Второе равенство в (5.293) получается умножением уравнения движения (5.185) скалярно на вектор квазискоростей с учетом (5.289) и (5.292), первое является вторым скалярным произведением, вычисленным в другом базисе (мощности винтов $F_0^0(\neg B, B)$ и $F_s^s(\neg B, B)$ совпадают). Докажем последнее равенство. Умножая уравнения движения (5.239) скалярно на столбец обобщенных скоростей, получаем

$$q^{\cdot} \cdot (\mathrm{grad}_{q^{\cdot}} T)^{\cdot} - q^{\cdot} \cdot \mathrm{grad}_q T = q^{\cdot} \cdot Q(\neg B, B). \qquad (5.294)$$

Вычислим производную произведения $(q^{\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q^{\cdot}} T)^{\cdot} = q^{\cdot\cdot} \times \mathrm{grad}_{q^{\cdot}} T + q^{\cdot} \cdot (\mathrm{grad}_{q^{\cdot}} T)^{\cdot}$, откуда $q^{\cdot} \cdot (\mathrm{grad}_{q^{\cdot}} T)^{\cdot} = (q^{\cdot} \times \mathrm{grad}_{q^{\cdot}} T)^{\cdot} - q^{\cdot\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q^{\cdot}} T$. Подставляя полученный результат в равенство (5.294), получим $(q^{\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q^{\cdot}} T)^{\cdot} - q^{\cdot\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q^{\cdot}} T - q^{\cdot} \times \mathrm{grad}_q T = q^{\cdot} \cdot Q(\neg B, B)$. Осталось учесть, что в соответствии с теоремой Эйлера об однородных функциях $q^{\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q^{\cdot}} T = 2T$ и производная кинетической энергии, как сложной функции $T = T(q, q^{\cdot})$, равна $T^{\cdot} = q^{\cdot\cdot} \cdot \mathrm{grad}_{q^{\cdot}} T + q^{\cdot} \cdot \mathrm{grad}_q T$.□

Предложение 5.81. Пусть: 1. ω_{V0}, ω_{Vs}, $\omega_{q.}$ — 1-формы, порожденные динамическими винтами $F_0^0(\neg B, B)$, $F_s^s(\neg B, B)$ и обобщенными силами $Q(\neg B, B)$ тела в инерциальной системе координат E_0 ($\pi_s^{00\cdot} = V_s^{00}$), в связанной системе координат ($\pi_s^{0s\cdot} = V_s^{0s}$) и обобщенных координатах соответственно [14]:

$$\omega_{V0} = F_0^0(\neg B, B) \cdot d(\pi_s^{00}) = (F_0^0(\neg B, B) \cdot V_s^{00})\mu_1 d(t), \quad (5.295)$$

$$\omega_{Vs} = F_s^s(\neg B, B) \cdot d(\pi_s^{0s}) = (F_s^s(\neg B, B) \cdot V_s^{0s})\mu_1 d(t), \quad (5.296)$$

$$\omega_{q^\cdot} = Q(\neg B, B) \cdot d(q) = (Q(\neg B, B) \cdot q^{s\cdot})\mu_1 d(t); \quad (5.297)$$

2. Импульсы 1-форм (5.295)—(5.297) за время Δt имеют вид:

$$i\omega_{V0} = \int \chi_{\Delta t}(F_0^0(\neg B, B) \cdot V_s^{00})\mu_1(dt), \quad (5.298)$$

$$i\omega_{Vs} = \int \chi_{\Delta t}(F_s^s(\neg B, B) \cdot V_s^{0s})\mu_1(dt), \quad (5.299)$$

$$i\omega_{q^\cdot} = \int \chi_{\Delta t}(Q(\neg B, B) \cdot q^{s\cdot})\mu_1(dt); \quad (5.300)$$

3. $T(t + \Delta t)$, $T(t)$ — кинетическая энергия тела в моменты времени $t + \Delta t$ и t.

Тогда изменение кинетической энергии тела за время Δt совпадает с любым из импульсов (5.298)—(5.300):

$$T(t + \Delta t) - T(t) = i\omega_{V0} = i\omega_{Vs} = i\omega_{q^\cdot}. \quad (5.301)$$

Доказательство следует из (5.293) и (5.298)—(5.300).□

Определение 5.34. 1-формы (5.295)—(5.297) называются *работой динамических винтов* $F_0^0(\neg B, B)$, $F_s^s(\neg B, B)$ *и обобщенных сил* $Q(\neg B, B)$ *на перемещениях* $d(\pi_s^{00})$, $d(\pi_s^{0s})$ *и* q^s *соответственно.*

Определение 5.35. Голономные связи (5.204) называются *идеальными*, если работа динамических винтов реакций $R_0^0(\neg B, B)$, $R_s^s(\neg B, B)$ (5.238) на перемещениях $d(\pi_s^{00})$ и $d(\pi_s^{0s})$ равна нулю:

$$R_0^0(\neg B, B) \cdot d(\pi_s^{00}) = R_s^s(\neg B, B) \cdot d(\pi_s^{0s}) = 0. \quad (5.302)$$

Комментарии: 1. Умножая равенства (5.293) на $\mu_1(dt)$ с учетом первых частей равенств (5.295)—(5.297), получаем следующие утверждения:

1.1. Дифференциал кинетической энергии тела B совпадает с работой динамических винтов $F_0^0(\neg B, B)$, $F_s^s(\neg B, B)$ и обобщенных сил $Q(\neg B, B)$ на перемещениях $d(\pi_s^{00})$, $d(\pi_s^{0s})$ и dq^s:

$$dT = F_0^0(\neg B, B) \cdot d(\pi_s^{00}) = F_s^s(\neg B, B) \cdot d(\pi_s^{0s}) = \\ = Q(\neg B, B) \cdot dq^s. \qquad (5.303)$$

2.2. Изменение кинетической энергии за время Δt равно работе динамических винтов $F_0^0(\neg B, B)$, $F_s^s(\neg B, B)$ и обобщенных сил $Q(\neg B, B)$ на перемещениях $d(\pi_s^{00})$, $d(\pi_s^{0s})$ и dq^s за это же время.

3. Предположим, что связи (5.204) идеальны (5.302). Тогда динамические винты $F_0^0(\neg B, B)$, $F_s^s(\neg B, B)$ в предыдущих равенствах не содержат винтов реакций в силу (5.302).

4. Все вышесказанные утверждения, вообще говоря, не являются «законами природы», но могут быть полезно использованы при решении прикладных задач на уровне точности, соответствующем предположению о существовании во Вселенной абсолютно твердых тел.

6. МЕХАНИКА СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ СО СТРУКТУРОЙ ДЕРЕВА

Полная теория вопроса с большим количеством подробных примеров рассмотрена в [18—33]. Здесь приведены только основные результаты. Доказательства всех утверждений опущены, однопозиционные индексы типа *s* кинематической цепи (О.5.2) заменены на двухпозиционные индексы типа *lk* системы с древовидной структурой [33].

6.1. УРАВНЕНИЯ КИНЕМАТИКИ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

6.1.1. ГРАФ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ СО СТРУКТУРОЙ ДЕРЕВА

Задача конструирования уравнений кинематики систем твердых тел сводится к «упаковыванию» в один блок в соответствии с графом системы уравнений кинематики отдельных кинематических пар системы, полученных для сложного движения одиночного твердого тела (§§ 5.2.1, 5.2.5) [39]. Этим объясняется терминология системного анализа работы [33].

Определение 6.1. 1. E_{lk} — (lk)*-элемент графа*, «l» — индекс ствола дерева, «k» — индекс уровня $l, k \in N$;

2. *Граф ориентирован* возрастающими от корня E_{10} к вершинам дерева последовательностями индексов «l» и «k» с приоритетом индекса «l»;

3. $(lk)_+$ — *множество достижимости* (lk)*-элемента графа*: множество всех элементов графа, достижимых из (lk)-элемента вверх по дереву (в направлении возрастания индексов), $E_{lk} \in (lk)_+$. Для древовидного графа множество достижимости $(lk)_+$ является поддеревом основного дерева с (lk)-корнем;

4. $(lk)_-$ — *множество контрдостижимости* (lk)*-элемента графа*: множество всех элементов графа, достижимых из (lk)-элемента вниз по дереву (в направлении убывания индексов), $E_{lk} \in (lk)_-$. Для древовидного графа множество контрдостижимости является кинематической цепью с первым элементом E_{10} и последним E_{lk};

5. $(lk)^+$ — *множество правой инцидентности* (lk)*-элемента графа*: множество элементов графа из $(lk)_+$, достижимых из (lk)-элемента за один шаг вверх по дереву, $E_{lk} \notin (lk)^+$;

6. $(lk)^-$ — *множество левой инцидентности* (lk)*-элемента графа*: множество элементов графа из $(lk)_-$, достижимых из (lk)-элемента за один шаг вниз по дереву, $E_{lk} \notin (lk)^-$;

7. Два элемента графа $E_{\mu,k-1}$, E_{lk}, если $E_{lk} \in (\mu, k-1)^+$, являются $(\mu.\ k-1;\ lk)$*-кинематической парой*, $\mu \leqslant l$.

6.1.2. КИНЕМАТИКА УПРУГОЙ (μ. k – 1; lk)-КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПАРЫ

Предложение 6.1. Пусть: 1. $R_{lkk}^{\mu,k-1} = (p_1^{lk}, p_2^{lk}, p_3^{lk}, \varphi_\alpha^{lk}, \varphi_\beta^{lk}, \varphi_\gamma^{lk})^T$ — конструктивная конфигурация $(\mu, k-1; lk)$-кинематической пары (5.63);

2. $R_{lk}^{lkk} = (o_1^{lk}, o_2^{lk}, o_3^{lk}, \theta_4^{lk}, \theta_5^{lk}, \theta_6^{lk})^T$ — функциональная конфигурация $(\mu, k-1; lk)$-кинематической пары;

3. $(\delta_1^{lk}, \delta_2^{lk}, \delta_3^{lk})^T$ — вектор линейных деформаций $(\mu, k-1)$-элемента системы;

4. $(\delta_4^{lk}, \delta_5^{lk}, \delta_6^{lk})^T$ — угловые деформации $(\mu, k-1)$-элемента системы;

5. Предположение: $\delta_i^{lk} \neq 0$, если $o_i^{lk} = 0$ или $\theta_i^{lk} = 0$ и $\delta_i^{lk} = 0$, если $o_i^{lk} \neq 0$ или $\theta_i^{lk} \neq 0$, или $\delta_i^{lk} = o_i^{lk} = \theta_i^{lk} = 0$, если функциональные движения любого происхождения по i-координате в $(\mu, k-1; lk)$-кинематической паре отсутствуют.

Тогда: 1. $(\mu, k-1; lk)$-кинематическая пара называется *упругой*;

2. Конфигурация (5.63) упругой $(\mu, k-1; lk)$-кинематической пары имеет вид

$$R_{lk}^{\mu,k-1} = (R_{lkk}^{\mu,k-1}, R_{lk}^{lkk}),\ R_{lkk}^{\mu,k-1} = (p^{lk}, \varphi^{lk}); \qquad (6.1)$$

$$R_{lk}^{lkk} = (\delta_1^{lk}, \delta_2^{lk}, \delta_3^{lk}, \delta_4^{lk}, \delta_5^{lk}, \delta_6^{lk}) + (o_1^{lk}, o_2^{lk}, o_3^{lk}, \theta_4^{lk}, \theta_5^{lk}, \theta_6^{lk}) =$$
$$= (\ldots, q_i^{lk}, \ldots),\ q_i^{lk} = o_i^{lk},\ \text{или} = \theta_i^{lk},\ \text{или} = \delta_i^{lk},\ \text{или} = 0.$$

3. Уравнения кинематики упругой $(\mu, k-1; lk)$-кинематической пары имеют вид (5.67)

$$V_{lk}^{\mu,k-1;lk} = M_{lk}^{lkk} \| f^{lk} \| q^{lk\cdot},\ M_{lk}^{lkk} = \left\| \begin{matrix} c_{lk}^{lkk,T} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{lk}^{lkk} \end{matrix} \right\|, \tag{6.2}$$

$$c_{lk}^{lkk} = c_1(q_4^{lk})c_2(q_5^{lk})c_3(q_6^{lk}), \tag{6.3}$$

$$\varepsilon_{lk}^{lkk} = \| c_3^T(q_6^{lk})c_2^T(q_5^{lk})e_1^{lk} | c_3^T(q_6^{lk})e_2^{lk} | e_3^{lk} \|. \tag{6.4}$$

Комментарий. Элементами упругой $(\mu, k-1; lk)$-кинематической пары являются упругие твердые тела. По предположению перемещение (lk)-тела относительно E_{lkk} осуществляется за счет функциональных движений упругой (деформация $(\mu, k-1)$-тела) и неупругой природы, влиянием первых на одноиндексные вторые пренебрегается.

Сформулируем уравнения кинематики системы в нескольких формах [28, 33].

Предложение 6.2. Пусть: 1. $(10)_+$ — система тел со структурой дерева;

2. $(\mathbf{V}) = \mathrm{col}\{\ldots, V_{nj}^{i,j-1;nj}, \ldots\}$ — $(6n \times 1)$-мерный вектор квазискоростей кинематических пар системы тел (5.67);

3. $\mathbf{V} = \mathrm{col}\{\ldots, V_{lk}^{10,lk}, \ldots\}$ — $(6n \times 1)$-мерный вектор квазискоростей (lk)-элементов системы (5.49);

4. L — блочная верхнетреугольная $(6n \times 6n)$-матрица с (6×6)-матричными блоками L_{lk}^{st} (7.7), если $(lk) \in (st)_+$, и (6×6)-матричными 0-блоками, если $(lk) \notin (st)_+$, на пересечении (st)-матричных строк и (lk)-матричных столбцов;

Тогда: 1. Уравнение кинематики систем тел со структурой дерева имеет вид

$$\mathbf{V} = L^T(\mathbf{V}). \tag{6.5}$$

2. Матрица L называется *конфигурационной матрицей системы тел.*

Комментарий. Вектор квазискоростей $\mathbf{V}$ всех тел системы относительно базовой системы координат E_{10} является линейным преобразованием вектора квазискоростей этих тел (**V**) в кинематических парах системы с матрицей L^T. Из (6.5) следует, что

$$(\mathbf{V}) = (L^T)^{-1}\, \mathbf{V}. \tag{6.6}$$

Предложение 6.3. Пусть: 1. $(10)_+$ — система тел со структурой дерева;

2. $\mathbf{q}^{\cdot} = \mathrm{col}\{q^{11\cdot}, q^{12\cdot}, \ldots, q^{lk\cdot}, \ldots\}$ — столбец обобщенных скоростей системы, составленный из столбцов обобщенных скоростей кинематических пар системы (5.62);

3. M — блочно-диагональная $(6n \times 6n)$-матрица перехода от обобщенных скоростей системы тел к квазискоростям кинематических пар этой системы с (6×6)-матричными блоками M_f^{lkk} кинематических пар (5.46) на главной диагонали

$$M = \mathrm{diag}\,\{\ldots, M_f^{lkk}, \ldots\}; \tag{6.7}$$

4. $\|f\|$ — блочно-диагональная $(6n \times \dim q)$-матрица с $(6 \times \dim q^{lk\cdot})$-блоками $\|f^{lk}\|$ из (6×1)-ортов f_i^{lk}, $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ осей подвижности кинематических пар (5.65) на главной диагонали

$$\|f\| = \mathrm{diag}\{\ldots, \|f^{lk}\|, \ldots\}. \tag{6.8}$$

Тогда имеет место следующее равенство

$$(\mathbf{V}) = M\|f\|\mathbf{q}^{\cdot}. \tag{6.9}$$

Предложение 6.4. Пусть: 1. $(10)_+$ — система тел со структурой дерева;

2. (1×6)-строка или $(\dim q^{st} \times 6)$-матрицы-операторы (5.74), (5.76)

$$s_{lk}^{st-\alpha} = f_\alpha^{st,T} M_f^{stk,T} L_{lk}^{st}, \; s_{lk}^{st} = \left\| \begin{matrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_\alpha^{st,T} M_f^{stk,T} L_{lk}^{st} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{matrix} \right\| \tag{6.10}$$

проектирования винта X_{lk}^{lk} (заданного в E_{lk}) любого происхождения (кинематического, динамического, кинетического и т. д.) на

α-ось (оси) функционального движения (st)-элемента системы в $(i, t-1; st)$-кинематической паре, $\alpha = 1, 2, \ldots 6$;

3. S — верхнетреугольная блочная $(\dim q \times 6n)$-матрица с блоками (6.10) на пересечении $(\dim q^{st} \times 6n)$-матричных строк и $(\dim q \times 6)$-матричных столбцов, если $(lk) \in (st)_+$, и нулевыми блоками на этих местах, если $(lk) \notin (st)_+$;

Тогда: 1. Уравнения кинематики системы тел со структурой дерева имеют вид

$$\mathbf{V} = S^T \mathbf{q}^{\cdot},\ S = \|f\|^T M^T L. \qquad (6.11)$$

2. Матрица S называется *структурной матрицей системы тел со структурой дерева.*

Комментарии: 1. Структурная матрица S в развиваемом формализме механики системы тел играет центральную роль. Ее название обусловлено тем, что она несет в себе полную информацию о структуре системы тел:

— о внутренней конфигурации системы и структуре кинематической схемы системы (графа системы) — матрица L;

— о переходе от квазикоординат системы к обобщенным координатам системы — матрица M;

— о характере движения по каждой из степеней свободы системы — матрица шестимерных ортов осей движения системы $\|f\|$.

Очевиден физический смысл матрицы S: $(6n)$-мерный вектор $P = \mathrm{col}\{\ldots, P_{lk}^{lk}, \ldots\}$ винтов любого происхождения она проектирует на оси движения системы тел. Матрица S^T выполняет обратное действие, в частности, преобразует обобщенные скорости системы в векторы квазискоростей системы (в кинематические винты системы с точностью до перестановки строк).

2. Элементы матрицы S, определяющие вклад движения (lk)-тел в движение (st)-тел, отличны от нуля только в случае $(lk) \in (st)_+$. Например, в кинематической схеме «ежик» (несколько вращающихся динамически несбалансированных тел (5.214), установленных на носителе — вибростенды, грохоты и т. п.) непосредственное влияние вращающихся тел друг на друга принципиально исключено.

6.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

6.2.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ В КВАЗИСКОРОСТЯХ И ОБОБЩЕННЫХ СКОРОСТЯХ

Предложение 6.5. Пусть: 1. Твердое тело B_{lk} — элемент системы твердых тел со структурой дерева;

2. E_{10}, E_{lk} — инерциальная и связанная с B_{lk} системы координат;

3. $V_{lk}^{10,lk} = \mathrm{col}\{v_{lk}^{10,lk}, w_{lk}^{10,lk}\}$ — вектор квазискоростей тела B_{lk} относительно E_{10} в E_{lk};

4. Θ_{lk}^{lk} — матрица Мизаса тела B_{lk} в E_{lk} (постоянная матрица (5.172), вычисленная в начале o_{lk} и базисе $[e^{lk}]$ связанной системы координат);

5. $R_{lk}^{lk}(i, k-1; lk)$, $R_{j,k+1}^{j,k+1}(lk; j, k+1)$ — динамические винты реакций тела $B_{i,k-1} \in (lk)^-$ на тело B_{lk} и тела B_{lk} на тела $B_{j,k+1} \in (lk)^+$:

$$R_{lk}^{lk} = R_{lk}^{lk}(i, k-1; lk) - \Sigma_j\ L_{j,k+1}^{lk} R_{j,k+1}^{j,k+1}(lk; j, k+1);$$

6. $N_{lk}^{lk}(i, k-1; lk)$, $N_{j,k+1}^{j,k+1}(lk; j, k+1)$ — динамические винты трения тела $B_{i,k-1} \in (lk)^-$ о тело B_{lk} и тела B_{lk} о тело $B_{j,k+1} \in (lk)^+$:

$$N_{lk}^{lk} = N_{lk}^{lk}(i, k-1; lk) - \Sigma_j\ L_{j,k+1}^{lk} N_{j,k+1}^{j,k+1}(lk; j, k+1);$$

7. $U_{lk}^{lk}(i, k-1; lk)$, $U_{j,k+1}^{j,k+1}(lk; j, k+1)$ — динамические винты управления движением тела B_{lk} относительно тела $B_{i,k-1} \in (lk)^-$ и движением тела $B_{j,k+1} \in (lk)^+$ относительно тела B_{lk}:

$$U_{lk}^{lk} = U_{lk}^{lk}(i, k-1; lk) - \Sigma_j\ L_{j,k+1}^{lk} U_{j,k+1}^{j,k+1}(lk; j, k+1);$$

8. P_{lk}^{lk} — аэрогидродинамический винт тела B_{lk} в E_{lk};

9. G_{lk}^{lk} — динамический винт тяготения тела B_{lk} в E_{lk} (5.248);

10. $\Phi_{lk}^{10,lk}$ — матрица квазискоростей тела B_{lk} вида (5.184);

11. $*$ — символ операции дифференцирования в E_{lk}.

Тогда уравнение движения элемента B_{lk} системы твердых тел со структурой дерева имеет вид [19, 24]

$$\Theta_{lk}^{lk} V_{lk}^{10,lk*} + \Phi_{lk}^{10,lk} \Theta_{lk}^{lk} V_{lk}^{10,lk} = Z_{lk}^{lk} + H_{lk}^{lk},$$

$$Z_{lk}^{lk} = R_{lk}^{lk} + U_{lk}^{lk} + N_{lk}^{lk},\ H_{lk}^{lk} = P_{lk}^{lk} + G_{lk}^{lk}.$$

Предложение 6.6. Пусть: 1. $\{B_{lk}\}$ — система твердых тел со структурой дерева;

2. $\mathbf{F} = \mathrm{col}\{F_{11}^{11}, F_{12}^{12}, \ldots, F_{lk}^{lk}, \ldots\}$ — $(6n \times 1)$-мерный вектор динамических винтов:

$$F_{lk}^{lk} = Z_{lk}^{lk} + H_{lk}^{lk} + T_{lk}^{lk}, \tag{6.12}$$

$$Z_{lk}^{lk} = R_{lk}^{lk} + U_{lk}^{lk} + N_{lk}^{lk},\ H_{lk}^{lk} = P_{lk}^{lk} + G_{lk}^{lk};$$

3. $\mathbf{R}$ — вектор динамических винтов внутренних реакций системы

$$\mathbf{R} = \mathrm{col}\{R_{10}^{10}, R_{12}^{12}, \ldots, R_{lk}^{lk}, \ldots\}; \tag{6.13}$$

4. $\mathbf{U}$ — $(6n \times 1)$-мерный вектор динамических винтов управления системой, u — столбец управляющих усилий $u(\mu, k-1; lk)$ на осях подвижности кинематических пар $(\mu, k-1; lk)$ системы тел:

$$\mathbf{U} = \mathrm{col}\{U_{10}^{10}, U_{12}^{12}, \ldots, U_{lk}^{lk}, \ldots\}, \tag{6.14}$$

$$\mathbf{u} = \mathrm{col}\{u(10,11), u(11,12), \ldots, u(\mu, k-1; lk), \ldots\}. \tag{6.15}$$

Среди составляющих $u(\mu, k-1; lk)$ могут быть нулевые, что означает свободное движение по соответствующим обобщенным координатам;

5. N — вектор динамических винтов трения на осях движения системы, n-столбец усилий трений $n(\mu, k-1; lk)$ на осях движения кинематических пар $(\mu, k-1; lk)$ системы тел, $\dim n(\mu, k-1; lk) = \Sigma_{lk} \dim q_{lk}^{\mu,k-1}$.

$$\mathbf{N} = \mathrm{col}\{N_{10}^{10}, N_{12}^{12}, \ldots, N_{lk}^{lk}, \ldots\}, \tag{6.16}$$

$$\mathbf{n} = \mathrm{col}\{n(10,11), n(11,12), \ldots, n(\mu, k-1; lk), \ldots\}; \tag{6.17}$$

6. S — структурная матрица системы тел (6.11).

Тогда: 1. Структурная матрица S анулирует вектор $\mathbf{R}$ (иными словами, $R \in \mathrm{Ker}\ S$)

$$S\mathbf{R} = 0. \tag{6.18}$$

2. Структурная матрица S выделяет управляющие усилия и усилия трения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$ из динамических винтов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{u} = S\mathbf{U},\ \mathbf{n} = S\mathbf{N}. \tag{6.19}$$

Предложение 6.7. Пусть: 1. $\{B_{lk}\}$-система твердых тел со структурой дерева, $\{E_{lk}\}$-система связанных с телами систем координат;

2. $\{R_{lk}^{\mu,k-1} = (R_{lkk}^{\mu,k-1}, R_{lk}^{lkk})\}$ — множество конфигураций системы тел;

3. $\mathbf{V} = \mathrm{col}\{V_{11}^{10,11}, V_{12}^{10,12}, \dots, V_{lk}^{10,lk}, \dots\}$ — $(6n \times 1)$-мерный вектор квазискоростей тел системы (5.49);

4. $A = \mathrm{diag}\{A_{lk}^{lk}\}$ — блочно-диагональная $(6n \times 6n)$-матрица инерции системы тел с блоками A_{lk}^{lk} (5.200) на главной диагонали;

5. $\Phi = \mathrm{diag}\{\Phi_{11}^{10,11}, \Phi_{12}^{10,12}, \dots, \Phi_{lk}^{10,lk}, \dots\}$ — блочно-диагональная $(6n \times 6n)$-матрица квазискоростей с (6×6)-блоками (5.184);

6. $\mathbf{H} + \mathbf{T} = \mathrm{col}\{(H+T)_{11}^{11}, (H+T)_{12}^{12}, \dots, (H+T)_{lk}^{lk}, \dots\}$ — $(6n \times 1)$- мерный вектор динамических винтов воздействия на систему тел ее внешней среды $H_{lk}^{lk} = P_{lk}^{lk} + G_{lk}^{lk}$ и установленных на ее элементах вращающихся тел T_{lk}^{lk}.

Тогда: 1. Уравнение движения системы твердых тел со структурой дерева в квазискоростях имеет вид

$$SA\mathbf{V}^{*} + S\Phi A\mathbf{V} = S(\mathbf{H} + \mathbf{T}) + \mathbf{u} + \mathbf{n}. \tag{6.20}$$

2. Уравнение движения систем твердых тел со структурой дерева в обобщенных скоростях имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{Q}, \tag{6.21}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = SAS^{T},\ \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = SBS^{T} + SAS^{T\cdot},\ \mathbf{Q} = S(\mathbf{H} + \mathbf{T}) + \mathbf{u} + \mathbf{n}.$$

Предложение 6.8. Производные $S_{lk}^{st-\alpha}$-строк матрицы S в уравнении (6.21) с учетом (5.76), (6.10) вычисляются с использованием рекуррентных формул

$$s_{lk}^{st-\alpha\cdot} = s_{n,k-1}^{st-\alpha\cdot} L_{lk}^{n,k-1} + s_{n,k-1}^{st-\alpha} L_{lk}^{n,k-1} \Phi_{lk}^{n,k-1;lk}, \tag{6.22}$$

$$s_{st}^{st-\alpha\cdot} = f_{\alpha}^{st,T} M_f^{stk,T\cdot}, \; V_{lk}^{n,k-1;lk} = M_f^{lkk} f_{\alpha}^{lk} q^{lk\cdot},$$

где в матрице $M_f^{stk,T\cdot}$ с учетом (6.3), (6.4) имеем

$$c_{st}^{stk\cdot} = c_{st}^{stk} \langle w_{st}^{stk} \rangle^{st},$$

$$\varepsilon_{st}^{stk\cdot} =$$

$$= \|(\langle e_3^{st}\rangle^T c_3^T(\theta_6^{st}) c_2^T(\theta_5^{st}) \theta_6^{st\cdot} + c_3^T(\theta_6^{st}) c_2^T(\theta_5^{st}) \langle e_2^{st}\rangle^T \theta_5^{st\cdot}) e_1^{st}|$$

$$|\langle e_3^{st}\rangle^T c_3^T(\theta_6^{st}) \theta_6^{st\cdot} e_2^{st}|0\|. \tag{6.23}$$

6.2.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ГУКОВО-УПРУГИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ СО СТРУКТУРОЙ ДЕРЕВА

Предложение 6.9. Пусть: 1. $\{B_{lk}\}$ — система упругих элементов системы тел:

2. $C_{lk}^{lk}(i, k-1; lk)$ — динамический винт воздействия $(i, k-1)$-тела на (lk)-тело, возникающий за счет упругости $(i, k-1)$-тела;

3. $C(i, k-1)$ — (6×6)-матрица жесткости $(i, k-1)$-тела с ненулевыми строками и столбцами, индексы которых соответствуют индексам осей упругого движения кинематической пары $(i, k-1; lk)$, (см. § 5.4.6);

4. Предположим, что обобщенные силы упругости $M_f^{lkk,T} C_{lk}^{lk}(i, k-1; lk)$ являются линейным преобразованием столбца обобщенных координат $\|f^{lk}\| q^{lk}$ кинематической пары $(i, k-1; lk)$ с учетом п. 3 (твердые тела — гуково-упруги)

$$M_f^{lkk,T} C_{lk}^{lk}(i, k-1; lk) = C(i, k-1)\|f^{lk}\| q^{lk}; \tag{6.24}$$

5. **С** — блочно-диагональная матрица с блоками — $\|f^{lk}\|^T C(i, k-1)\|f^{lk}\|$ на главной диагонали.

Тогда: 1. Уравнение (lk)-элемента системы тел имеют вид

$$A_{lk}^{lk}V_{lk}^{10,lk*} + B_{lk}^{lk}V_{lk}^{10,lk} = Z_{lk}^{lk} + H_{lk}^{lk} + T_{lk}^{lk} + C_{lk}^{lk}, \qquad (6.25)$$

$$C_{lk}^{lk} = C_{lk}^{lk}(i, k-1; lk) - \Sigma_j \; L_{j,k+1}^{lk} C_{j,k+1}^{j,k+1}(lk; j, k+1); \qquad (6.26)$$

2. Уравнения движения системы гуково-упругих тел имеют вид [28]

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\mathbf{q}^{\cdot} + \mathbf{C}\mathbf{q} = S(\mathbf{H} + \mathbf{T}) + \mathbf{u} + \mathbf{n}, \qquad (6.27)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = SAS^T, \; \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = SBS^T + SAS^{T\cdot}.$$

Предложение 6.10. Пусть: 1. П-операция перестановки строк и столбцов матриц $\mathbf{A}(\mathbf{q})$, $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$, $\mathbf{C}$ в уравнениях (6.27), такая что

$$\mathbf{\Pi A}(\mathbf{q}) = \begin{Vmatrix} A_+^+(q) & A_+^-(q) \\ A_-^+(q) & A_-^-(q) \end{Vmatrix}, \; \mathbf{\Pi B}(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot}) = \begin{Vmatrix} B_+^+(q,q^{\cdot}) & B_+^-(q,q^{\cdot}) \\ B_-^+(q,q^{\cdot}) & B_-^-(q,q^{\cdot}) \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{\Pi C} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_-^- \end{Vmatrix},$$

где $\mathbf{D}_+^+(\mathbf{q})$, $\mathbf{D}_+^-(\mathbf{q})$, $\mathbf{D}_-^+(\mathbf{q})$, $\mathbf{D}_-^-(\mathbf{q})$ — матрицы вклада движения (верхний индекс) в движение (нижний индекс), (+)-неупругое («медленное») движение, (–)-упругое («быстрое») движение;

2. $\mathbf{q} = \mathrm{col}\{\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-\}$, $\mathbf{q}_+$, $\mathbf{q}_-$ — столбцы обобщенных координат неупругих («медленных») и упругих («быстрых») движений;

3. $\|f_+\|$, $\|f_-\|$ — матрицы шестимерных ортов осей неупругих и упругих движений соответственно.

Тогда уравнения движения системы тел с гуково-упругими элементами имеют вид [28]

$$\mathbf{A}_+^+(\mathbf{q})\mathbf{q}_+^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}_+^+(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\mathbf{q}_+^{\cdot} + \mathbf{A}_+^-(\mathbf{q})\mathbf{q}_-^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}_+^-(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\mathbf{q}_-^{\cdot} = \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{Q} = \|f_+\|^T \mathbf{\Pi}[S(\mathbf{H} + \mathbf{T}) + \mathbf{u} + \mathbf{n}]; \qquad (6.28)$$

$$\mathbf{A}_-^-(\mathbf{q})\mathbf{q}_-^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}_-^-(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})\mathbf{q}_-^{\cdot} + \mathbf{A}_-^+(\mathbf{q})\mathbf{q}_+^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}_-^+(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\mathbf{q}_+^{\cdot} + \mathbf{C}_-^-\mathbf{q}_- = \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{Q} = \|f_-\|^T \mathbf{\Pi}[S(\mathbf{H} + \mathbf{T})].$$

6.2.3. O(n^3)-АЛГОРИТМЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ИНЕРЦИОННЫХ МАТРИЦ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ТЕЛ

Предложение 6.11. Пусть: 1. A_p^p, B_p^p — (6×6)-матрицы инерции из уравнений движения (s)-элемента системы тел (5.217), $s \equiv lk$;

2. $(st, lk)_+ = (st)_+ \cap (lk)_+$ — пересечение множеств достижимости (st)- и (lk)-элементов системы тел;

3. $A_{lk-\beta}^{st-\alpha}$, $B_{lk-\beta}^{st-\alpha}$ — элементы (числа) матриц $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ соответственно, расположенные на пересечении $(st\text{-}\alpha)$-строк и $(lk\text{-}\beta)$-столбцов;

4. $s_p^{st-\alpha} = f^{st,T} M_f^{stk,T} L_p^{st}$, $p \in (st)_+$-строки структурной матрицы системы тел S, $s_p^{st-\alpha\cdot}$ — вычисляются с использованием рекуррентной процедуры (6.22).

Тогда уравнения движения системы твердых тел со структурой дерева могут быть представлены в виде [33]

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{Q}, \ \mathbf{Q} = S(\mathbf{H} + \mathbf{T}) + \mathbf{u} + \mathbf{n}, \qquad (6.29)$$

$$A_{lk-\beta}^{st-\alpha} = \Sigma_{p \in (st,lk)_+} \, s_p^{st-\alpha} A_p^p s_p^{lk-\beta,T}, \qquad (6.30)$$

$$B_{lk-\beta}^{st-\alpha} = \Sigma_{p \in (st,lk)_+} \, (s_p^{st-\alpha} B_p^p s_p^{lk-\beta,T} + s_p^{st-\alpha} A_p^p s_p^{lk-\beta,T\cdot}), \qquad (6.31)$$

$$A_{lk-\beta}^{st-\alpha} = B_{lk-\beta}^{st-\alpha} = 0, \ p \notin (st, lk)_+. \qquad (6.32)$$

Комментарии: 1. Из равенств (6.31) и (6.32) следует, что в уравнения движения (lk)-тела могут входить кинематические характеристики движения (st)-тела и наоборот только в случае, если пересечение их множеств достижимости не пусто. Например, в уравнения движения любого из вращающихся тел системы тел типа «ежик» принципиально не могут входить обобщенные координаты (углы вращения относительно носителя) других вращающихся тел (их суммы или разности), а также их скорости и ускорения.

2. Из качественного анализа уравнений (6.29) следует, что взаимное влияние движений тел друг на друга в случае

$(st, lk)_+ = \varnothing$ возможно только через те (p)-тела системы, для которых $(p, lk)_+ \neq \varnothing$ и $(st, p)_+ \neq \varnothing$. Например, для системы тел типа «ежик» взаимное влияние движений вращающихся тел осуществляется только через движение носителя. Последнее означает (это легко увидеть при простом визуальном анализе структуры уравнений движения (6.29)), что любые эффекты, причиной которых является вышеуказанное взаимное влияние вращающихся тел через носитель, определяются только слагаемыми инерционного происхождения, зависящими от произведения линейных и угловых скоростей отдельных тел и носителя (из состава центробежных, кориолисовых, гироскопических и т. п. составляющих инерционного динамического винта). Естественно, при отсутствии движения носителя эти слагаемые в уравнениях отсутствуют и взаимное влияние вращающихся тел также отсутствует.

6.2.4. O(n^2)-АЛГОРИТМ КОНСТРУИРОВАНИЯ МАТРИЦЫ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Определение 6.2. Пусть: 1. $\mathbf{V} = \mathrm{col}\{..., V_{lk}^{10,lk}, ...\}$ — вектор квазискоростей системы тел (5.49);

2. $\mathbf{q}^{\cdot} = \mathrm{col}\{..., q^{lk\cdot}, ...\}$ — обобщенные скорости системы тел;

3. A и S — блочно-диагональная матрица с блоками A_{lk}^{lk} (6.25) на главной диагонали и структурная матрица системы (6.11).

Тогда: 1. Квадратичная форма со свойствами меры на $\mathfrak{D}_3^{\mu}$

$$T = 0.5\mathbf{V} \cdot A\mathbf{V} = 0.5\mathbf{q}^{\cdot} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot} \tag{6.33}$$

называется *кинетической энергией системы тел со структурой дерева*;

2. Матрицы A и $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ называются *матрицами кинетической энергии системы тел в квазискоростях и обобщенных скоростях* соответственно.

Комментарий. В первом варианте представления (6.33) кинетическая энергия системы тел является суммой кинетических энергий входящих в нее тел, во втором варианте это не так.

Предложение 6.12. Пусть: 1. A_+^{st}, A_+^{lk} — (6 × 6)-матрицы инерции поддеревьев $(st)_+$ и $(lk)_+$ основного дерева с корнями (st) и (lk) соответственно;

2. $L_{lk}^{st} \in \mathbf{L}(\mathbf{R}, 6)$ — матрица преобразования E_{lk} в E_{st} $(lk) \in (st)_+$;

3. $(st)^+$ — множество правой инцидентности (st)-элемента системы.

Тогда имеет место рекуррентное равенство [20]:

$$A_+^{st} + A_{st}^{st} + \sum_{lk\in(st)^+} L_{lk}^{st} A_+^{lk} L_{lk}^{st,T}. \tag{6.34}$$

Предложение 6.13. Пусть: 1. В силу (6.34)

$$A_+^{lk} = A_{lk}^{lk} + \Sigma_{p\in(lk)^+} L_p^{lk} A_+^p L_p^{lk,T}; \tag{6.35}$$

2. β_+^{lk} — (1 × 6)-столбец вида

$$\beta_+^{lk} = A_+^{lk} M_{lk}^{lkk} f_\alpha^{lk}; \tag{6.36}$$

3. $A_+ = \mathrm{diag}(A_+^{lk})$, $M = \mathrm{diag}(M_f^{lkk})$, $\|f\| = \mathrm{diag}(\|f^{lk}\|)$.

Тогда: 1. Для вычисления или аналитического конструирования элементов $A_{lk-\beta}^{st-\alpha}$ правого верхнего угла матрицы кинетической энергии системы может быть использован $o(n^2)$-алгоритм

$$A_{lk-\beta}^{st-\alpha} = s_{lk}^{st-\alpha}\beta_+^{lk},\ (lk)\in(st)_+;\quad A_{lk-\beta}^{st-\alpha} = 0,\ (lk)\notin(st)_+. \tag{6.37}$$

2. Для правого верхнего угла матрицы кинетической энергии системы тел имеет место следующее матричное представление:

$$\mathbf{A}^+(\mathbf{q}) = SA_+M\|f\|. \tag{6.38}$$

6.2.5. O(n)-АЛГОРИТМ КОНСТРУИРОВАНИЯ СТОЛБЦА $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$

Прямое вычисление или аналитическое конструирование столбца $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot) = \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)\mathbf{q}^\cdot$ в (6.29) выполняется с использованием $o(n^3)$-алгоритма (6.21). А. Ю. Белковым предложен вычислительно экономичный, линейный по n, алгоритм конструирования этого столбца [5, 33].

Предложение 6.14. Пусть алгоритм числового или аналитического конструирования вектора $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\mathbf{q}^{\cdot}$ представлен с учетом (6.21) в виде

$$\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = S(A\mathbf{X} + B\mathbf{V}),\ \mathbf{X} = S^{T\cdot}\mathbf{q}^{\cdot}. \qquad (6.39)$$

Тогда существует рекуррентный (от корня дерева (11) к почкам) $o(n)$-алгоритм конструирования вектора $\mathbf{X}$

$$X_{lk} = L_{lk}^{\mu,k-1;T} X_{\mu,k-1} + L_{lk}^{\mu,k-1;T\cdot} V_{\mu,k-1}^{10;\mu,k-1},$$

$$X_{11} = M_{11}^{11k\cdot} \|f^{ss}\| q^{11\cdot}, \qquad (6.40)$$

где матрицы $L_{lk}^{\mu,k-1;T\cdot}$ и M_{11}^{11k} конструируются (в числовой или аналитической форме), с использованием алгоритмов (6.23) и (7.11), а вектор $V_{\mu,k-1}^{10;\mu,k-1}$ — с использованием уравнений кинематики системы (6.11), учитывая, что матрица S уже получена на этапе конструирования матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{q})$.

Предложение 6.15. Пусть: 1. Алгоритм числового или аналитического конструирования вектора $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\mathbf{q}^{\cdot}$ представлен с учетом (6.39) в виде

$$\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = \|f\|^T M^T \mathbf{Z},\ \mathbf{Z} = L\mathbf{Y},\ \mathbf{Y} = (A\mathbf{X} + B\mathbf{V}),\ \mathbf{X} = S^{T\cdot}\mathbf{q}^{\cdot}; \qquad (6.41)$$

2. Вектор $\mathbf{X} = S^{T\cdot}\mathbf{q}^{\cdot}$ вычисляется с использованием алгоритма (6.40);

3. (cd) — почка дерева.

Тогда существует рекуррентный (от почек (cd) к корню дерева — (11)) $o(n)$-алгоритм конструирования вектора $\mathbf{Z}$

$$Z_{\mu,k-1} = Y_{\mu,k-1} + \Sigma_{(\mu,k-1)+} L_{lk}^{\mu,k-1} Z_{lk},\ Z_{cd} = Y_{cd}. \qquad (6.42)$$

6.2.6. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТРАНСВЕКТИВНЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ФОРМЕ КОШИ

В данной главе получены разложения прямой и обратной матриц кинетической энергии системы тел со структурой дерева на простейшие сомножители-трансвекции (3.41), что расширяет возможности аналитического исследования и численного решения задачи Коши уравнений движения систем тел большой размерности с использованием методов компьютерной алгебры [8, 13] и стандартного алгебраического матобеспечения ЭВМ. В частности, осуществляется непосредственное конструирование трансвективного разложения обратной матрицы, минуя стадии конструирования самой матрицы и ее последующего обращения. Принципиально используются свойства агрегативной формы записи уравнений движения системы [25—29, 33]. Рассматривается трансвективная форма Коши уравнений движения систем тел и выполняется оценка вычислительной трудоемкости полученных алгоритмов [31, 32]. Ранее получены два алгоритма конструирования элементов $A_{k-\alpha}^{t-\beta}$ матрицы кинетической энергии **A** (**q**) системы твердых тел (6.30), (6.36)

I алгоритм

$$A_{k-\beta}^{t-\alpha} = \sum_{p\in(t,k)_+} s_p^{t-\alpha} A_p^p s_p^{k-\beta,T}, \ s_k^{t-\alpha} = f_\alpha^{t,T} L_k^t. \tag{6.43}$$

II алгоритм

$$A_{k-\beta}^{t-\alpha} = s_k^{t-\alpha}\beta_+^k, \ k\in(t)_+, \ A_{k-\beta}^{t-\alpha} = 0, \ k\notin(t)_+, \tag{6.44}$$

$$\beta_+^k = A_+^k f_\beta^k, \ A_+^k = A_k^k + \sum_{p\in(k)^+} L_p^k A_+^p L_p^{k,T}, \tag{6.45}$$

$\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(k)$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6)$.

Предложение 6.16. Пусть: 1. $A_k^{k\Delta}$ – (6 × 6)-матрица вида

$$A_k^{k\Delta} = A_k^k + \Delta_k^k, \tag{6.46}$$

где (6 × 6)-матрица Δ_k^k определена рекуррентным равенством

$$\Delta_k^k = \sum_{p\in(k)^+} L_p^k (A_p^{p\Delta} - \hat{\beta}_p^{p\Delta}\hat{\beta}_p^{p\Delta,T}(\beta,\beta)_p^{p\Delta}) L_p^{k,T}; \tag{6.47}$$

2. $\beta_k^{k\Delta}$ – (β)-столбец матрицы $A_k^{k\Delta}$ (β = 1, 2,… , 6)

$$\beta_k^{k\Delta} = A_k^{k\Delta} f_\beta^k; \tag{6.48}$$

3. $(\beta,\beta)_k^{k\Delta}$ – (β,β)-элемент матрицы $A_k^{k\Delta}$:

$$(\beta,\beta)_k^{k\Delta} = f_\beta^{k,T}\beta_k^{k\Delta} = f_\beta^{k,T} A_k^{k\Delta} f_\beta^k; \qquad (6.49)$$

4. $\hat\beta_k^{k\Delta}$ – (6×1)-столбец, определяемый равенством

$$\hat\beta_k^{k\Delta} = \beta_k^{k\Delta} / (\beta,\beta)_k^{k\Delta}; \qquad (6.50)$$

5. (t, k) — скалярное произведение, аналогичное (6.44), вида

$$(t, k) = s_k^{t-\alpha}\,\hat\beta_k^{k\Delta}; \qquad (6.51)$$

6. $t_{tk}((t, k)) \equiv t_{tk}(t, k) \equiv t_{tk},\ t < k,$ -трансвекция (3.41) с аргументом (t, k);

7. T — произведение трансвекций, выполняющих анулирование наддиагональных элементов матрицы $\mathbf{A}$ $(\mathbf{q})$ при выполнении Гаусс-процесса со строками, начиная с последней:

$$\mathbf{T} = \prod_{t,k} t_{tk}^{-1}(t, k),\ t < k; \qquad (6.52)$$

$$\mathbf{T}^T = \prod_{t,k} k_{kt}^{-1}(k, t)^T = \prod_{t,k} t_{kt}^{-1}(t, k),\ t < k; \qquad (6.53)$$

$$t_k((\beta,\beta)_k^{k\Delta}) \equiv t_k(\beta,\beta)_k^{k\Delta}. \qquad (6.54)$$

Тогда имеет место следующее равенство:

$$\mathbf{TA}(\mathbf{q})\mathbf{T}^T = \mathrm{diag}\{\ (\beta,\beta)_k^{k\Delta}\} = \prod_k t_k(\beta,\beta)_k^{k\Delta}. \qquad (6.55)$$

Предложение 6.17. Пусть: 1. $\beta_+^{k\delta}$ есть, аналогично (6.44), (β)-столбец некоторой непосредственно не используемой (6×6)-матрицы $A_+^{k\delta}$;

2. $(\beta,\beta)_+^{k\delta}$ есть (β,β)-элемент матрицы $A_+^{k\delta}$

$$(\beta,\beta)_+^{k\delta} = f_\beta^{k,T}\beta_+^{k\delta}; \qquad (6.56)$$

3. $\hat\beta_+^{k\delta}$ – (6×1)-столбец, определяемый равенством

$$\hat\beta_+^{k\delta} = \beta_+^{k\Delta} / (\beta,\beta)_+^{k\delta}; \qquad (6.57)$$

4. Рекуррентный алгоритм числового или символьного конструирования столбца $\beta_+^{k\delta}$ имеет вид при β_+^k из (6.44):

$$\beta_+^{k\delta} = \beta_+^k - \delta_+^k; \tag{6.58}$$

$$\delta_+^k = \sum_{p \in (k)_+ \setminus (k)} L(k, p) L^T(k, p) f_\beta^k (\beta, \beta)_+^{p\delta}, \tag{6.59}$$

$$L(k, p) = L_p^k \hat{\beta}_+^{p\delta} = L_{k+1}^k L(k+1, p), \; L(p, p) = \hat{\beta}_+^{p\delta}; \tag{6.60}$$

6. (t, k) — скалярное произведение вида

$$(t, k) = s_k^{t-\alpha} \hat{\beta}_+^{k\delta}, \; s_k^{t-\alpha} = f_\alpha^{t, T} L_k^t. \tag{6.61}$$

Тогда, аналогично (6.55), имеет место следующее равенство:

$$\mathbf{T}\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{T}^T = \operatorname{diag}\,\{(\beta, \beta)_+^{k\delta}\} = \prod_k t_k (\beta, \beta)_+^{k\delta}. \tag{6.62}$$

Предложение 6.18. Аналитические трансвективные формы матриц $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q})$ с учетом $(\beta, \beta)^{k\zeta} = (\beta, \beta)_k^{k\Delta} = (\beta, \beta)_+^{k\delta}$ имеют вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}^{-1} \operatorname{diag}\{(\beta, \beta)_k^{k\zeta}\}(\mathbf{T}^{-1})^T, \tag{6.63}$$

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}^T \operatorname{diag}\,\{1/(\beta, \beta)_k^{k\zeta}\}\mathbf{T}. \tag{6.64}$$

Одним из основных приложений полученных результатов является возможность непосредственного аналитического (с использованием методов компьютерной алгебры [8, 13]) или числового (с использованием алгебраического матобеспечения ЭВМ) конструирования уравнений (6.29) в форме Коши $\mathbf{q}^{\cdot\cdot}\; \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{F}$, минуя стадии предварительного конструирования и последующего обращения матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{q})$.

Предложение 6.19. Аналитическая трансвективная форма Коши агрегативных уравнений движения системы тел со структурой дерева имеет вид

$$q^{\cdot\cdot} = \mathbf{T}^T \operatorname{diag}\,\{1/(\beta, \beta)^{k\zeta}\}\mathbf{T}\mathbf{F}, \; \mathbf{F} = \mathbf{Q} - \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}). \tag{6.65}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

7. ОСНОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВИНТОВ

Полный вариант указанной теории разработан в [23, 33]. В данном приложении приведены ее основные результаты для справок по тексту монографии.

7.1. МНОЖЕСТВО СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ

Определение 7.1. Пусть: 1. A_3 — трехмерное аффинно-векторное пространство, $E_s = (o_s, [e^s])$ — произвольная декартова система координат, $x \in V_3$ — свободный вектор, x^s — его координатный столбец в базисе $[e^s]$;

2. $y \in D_3$ — точка, r_y^s — ее радиус-вектор в E_s (верхний индекс), r_y^{ss} — его координатный столбец в базисе $[e^s]$ (верхний внешний индекс), $\langle r_y^s \rangle^s$ — кососимметрическая (3 × 3)-матрица, порожденная координатным столбцом r_y^{ss};

3. l_y^x — прямая, проходящая через точку «y» с направляющим вектором x: множество точек $b \in D_3$, таких что $b = y + kx$, $k \in R_1$.

Тогда шестерка функций, (6 × 1-столбец), вычисляемых по формуле

$$l_s^{xs} = G_{ys}^s \mathrm{col}\{x^s, x^s\}, \tag{7.1}$$

$$\mathrm{col}\{x^s, x^s\} \in R_6 = R_3 \times R_3,\ G_{ys}^s = \left\| \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & \langle r_y^s \rangle^s \end{matrix} \right\|,$$

называется *скользящим вектором, порожденным свободным вектором x и прямой l_y^x в системе координат E_s* (приведенным к началу E_s — нижний индекс и вычисленным в базисе $[e^s]$ — верхний внешний индекс).

Предложение 7.1. Определение скользящего вектора (7.1) не зависит от выбора точки «*y*» на прямой l_y^x.

Доказательство. Пусть «*y*» и «*z*» $\in l_y^x$. Вычитая два скользящих вектора (7.1) с использованием в определении точек «*y*» и «*z*», получаем нулевую шестерку чисел в силу того, что $(< r_z^s >^s - < r_y^s >^s)x^s = < r_z^{ss} - r_y^{ss} > x^{ss} = 0$, так как $r_z^s - r_y^s$ — представитель свободного вектора *kx*, $(r_z^s - r_y^s) \subset kx$, $k \in R_1$. □

В связи с этим индекс «*y*» в обозначении матрицы G_{ys}^s в дальнейшем, как правило, опускается. Из определения скользящего вектора следует важнейшее утверждение.

Предложение 7.2. Скользящий вектор не является вектором, т. е. *множество скользящих* векторов $I = \{l_s^{xs}, x \in V_3\}$ (7.1) не является векторным пространством.

Доказательство. Сумма двух любых скользящих векторов, порожденных непересекающимися прямыми, не является скользящим вектором:

$$l_s^{xs} + l_s^{ys} = G_{as}^s \mathrm{col}\{x^s, x^s\} + G_{bs}^s \mathrm{col}\{y^s, y^s\} =$$

$$= \mathrm{col}\{x^s + y^s, \langle a^s \rangle^s x^s + \langle b^s \rangle^s y^s\} \notin I.$$

В частности, сумма $(0, 0, 0, (\langle a^s \rangle^s - \langle b^s \rangle^s)x^s)^T$ двух скользящих векторов (7.1), порожденных свободными векторами x и $-x \in V_3$ и параллельными прямыми l_a^x и l_b^{-x}, $a \neq b$ не является шестеркой функций типа (7.1), т. е. не является скользящим вектором. □

Комментарий. Шестерка функций l_s^{xs} линейно зависима, так как $\det \langle y^s \rangle^s = 0$, а также наличия уравнения связи $x^{s,T} \langle y^s \rangle^s x^s = 0$.

Предложение 7.3. Для того чтобы скользящий вектор l_s^{xs} в E_s был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы был равен нулю порождающий его свободный вектор x^s:

$$l_s^{xs} = 0 \Leftrightarrow x^s = 0. \qquad (7.2)$$

Доказательство. Необходимость: $l_s^{xs} = G_{as}^s \mathrm{col}\{x^s, x^s\} = 0 \to \mathrm{col}\{x^s, \langle y^s \rangle^s x^s\} = 0 \to x^s = 0$. Достаточность: $x^s = 0 \to \to G_{ys}^s \mathrm{col}\{x^s, x^s\} = G_{ys}^s \cdot \mathrm{col}\{0, 0\} = 0 \to l_s^{xs} = 0$. □

7.2. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО ВИНТОВ

Определение 7.2. Пусть: 1. $I^j = \{l_{sk}^{xs} = G_s^s \mathrm{col}\{x_k^s, x_k^s\}, x_k^s \in R_3, k \in K(j)\} \subset I$ — (j)-система скользящих векторов l_{sk}^{xs} в системе координат E_s; $K(j)$-множество индексов (j)-системы скользящих векторов; j-индекс системы;

2. H_s^s — сумма скользящих векторов системы I^j:

$$H_s^s = \sum_{k \in K} l_{sk}^{xs}. \tag{7.3}$$

Тогда: Шестерка функций (7.3) называется *винтом в системе координат* E_s, порожденным *(j)-системой скользящих векторов* I^j с множеством индексов $K(j)$.

Предложение 7.4. Множество винтов в любой произвольной системе координат E_s является шестимерным числовым векторным пространством $H \cong R_6$.

Определение 7.3. Первые три координаты винта x_s^s называются главным вектором винта и обозначаются

$$mvx_s^s. \tag{7.4}$$

Определение 7.4. Пусть: 1. l_s^{-xs} и l_s^{xs} — два скользящих вектора (7.1), порожденных координатными столбцами $-x^s$ и $x^s \in R_3$ свободных векторов x и $-x \in V_3$ в базисе $[e^s]$ и параллельными прямыми l_y^{-x} и l_z^x;

2. $h = \min \| r_x^s - r_z^s \|$ по всем точкам $y \in l_y^{-x}$, $z \in l_z^x$.

Тогда: 1. Винт H_s^s, являющийся суммой этих скользящих векторов

$$H_s^s = \mathrm{col}\{0, 0, 0, (\langle r_x^s \rangle^s - \langle r_z^s \rangle^s) x^s\}, \tag{7.5}$$

называется *парой*.

2. Число «h» называется *плечом пары* (7.5).

Определение 6.5. Скользящий вектор и винт

$$l_s^{xs} = \mathrm{col}\{x_k^s, 0, 0, 0\}^T,\ H_s^s = \mathrm{col}\{\sum_{k \in K} x_k^s, 0, 0, 0\},\ x_k^s \neq 0 \qquad (7.6)$$

называются *вырожденными в* E_s.

Комментарии: 1. Скользящий вектор l_s^{xs} в E_s вырожден, если линия его действия проходит через начало координат E_s.

2. Скользящий вектор, вырожденный в E_s, не вырожден в E_t, если $o_s \neq o_t$.

3. Вырожденный винт — не обязательно сумма вырожденных скользящих векторов.

4. Множество вырожденных винтов является трехмерным векторным подпространством V_3 пространства $V_3 \times V_3$.

Предложение 7.5. Пара (7.5) и вырожденный винт (7.6) инвариантны относительно выбора точки приведения скользящих векторов. Оба порождаются координатным столбцом свободного вектора $x \in V_3$ в базисе $[e^s]$, причем первый зависит от плеча «*h*».

7.3. ГРУППА ДВИЖЕНИЙ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА ВИНТОВ

Следующие результаты дают простой, легко реализуемый на ЭВМ алгебраический метод преобразования координат винтов при переходе к новой системе координат.

Предложение 7.6. Пусть: 1. $E_s = (o_s, [e^s])$, $E_t = (o_t, [e^t])$ — декартовы системы координат в A_3 с началами в точках o_s, $o_t \in D_3$ и ортонормированными базисами $[e^s] = (e_1^s, e_2^s, e_3^s)$, $[e^t] = (e_1^t, e_2^t, e_3^t) \in V_3$ соответственно;

2. $c_t^s \in \mathbf{SO}$ (**R**, 3) — матрица перехода от базиса $[e^s]$ к базису $[e^t]$, $[e^t] = [e^s]c_t^s$;

3. $o_t^s \in V_3$ — вектор параллельного переноса E_t (нижний индекс) в E_s (верхний индекс), o_t^{ss} — его координатный столбец в базисе $[e^s]$ (внешний верхний индекс), $\langle o_t^s \rangle^s$ — кососимметрическая матрица, порожденная координатным столбцом o_t^{ss};

4. H_s^s, H_t^t — координаты винта в E_s и E_t.

Тогда: 1. Движение $H_t^t \to H_s^s$ имеет вид [23, 33]

$$H_s^s = L_t^s H_t^t,\ L_t^s = T_t^{ss}[c_t^s]. \tag{7.7}$$

2. (6×6)-матрицы T_t^{ss} параллельного переноса и $[c_t^s]$ вращения, индуцированные параллельным переносом на вектор o_t^s и вращением $c_t^s \in$ **SO(R, 3)** в A_3, имеют вид

$$T_t^{ss} = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ \langle o_t^s \rangle^s & E \end{Vmatrix},\quad [c_t^s] = \begin{Vmatrix} c_t^s & 0 \\ 0 & c_t^s \end{Vmatrix}. \tag{7.8}$$

Доказательство. Пусть $l_{sk}^{xs} = G_s^s \| x_k^s, x_k^s \|^T$ — один из скользящих векторов (7.1), входящих в сумму (7.3), тогда:

$$L_t^s l_{tk}^{xt} = L_t^s G_t^t \operatorname{col}\{x_k^t, x_k^t\}^T = T_s^{ss}[c_t^s] G_t^t \operatorname{col}\{x_k^t, x_k^t\} =$$

$$= T_t^{ss}[c_t^s] G_t^t [c_t^s]^T [c_t^s] \operatorname{col}\{x_k^t, x_k^t\} = T_t^{ss} G_t^s \operatorname{col}\{x_k^s, x_k^s\} =$$

$$= G_s^s \operatorname{col}\{x^s, x_k^s\} = l_{sk}^{xs}. \ \square$$

Переходя в обеих частях этого равенства к суммам (7.3) по k с учетом линейности оператора L_t^s, получаем доказываемый результат. □

Предложение 7.7. Множество движений

$$L_t^s : H_t^t \to H_s^s \tag{7.9}$$

векторного пространства винтов

$$\mathbf{L(H.6)} = \{L_t^s : L_t^s = T_t^{ss}[c_t^s],\ s, t \in N\} \tag{7.10}$$

является мультипликативной группой.

Доказательство. 1. $L_t^s L_p^t = T_t^{ss}[c_t^s] T_p^{tt}[c_p^t] = T_t^{ss}[c_t^s] T_p^{tt} \times$ $\times [c_t^s]^T [c_t^s][c_p^t] = T_t^{ss} T_p^{ts}[c_p^s] = T_p^{ss}[c_p^s] = L_p^s \in \mathbf{L(H.6)}$.

2. $(L_t^s)^{-1} = (T_t^{ss}[c_t^s])^{-1} = [c_t^s]^T (T_t^{ss})^{-1} = [c_s^t] T_s^{ts} [c_s^t]^T [c_s^t] =$ $= T_s^{tt}[c_s^t] = L_s^t \in L(H.6)$. □

7.4. УРАВНЕНИЕ КИНЕМАТИКИ НА ГРУППЕ L(H.6)

Предложение 7.8. Пусть: 1. $L_t(H.6) = \{L_t^s(t): L_t^s(t) = T_t^{ss}(t) \times \times [c_t^s(t)], s, t \in N\}$ — однопараметрическая группа преобразования координат винтов при переходе к новой системе координат (7.10);

2. $W_{tt}^{st} = W_t^{st} = \mathrm{col}\{\omega_t^{st}, v_t^{st}\}$ — кинематический винт движения E_t относительно E_s в E_t;

3. $\langle v_t^s \rangle^t$, $\langle \omega_t^s \rangle^t$ — кососимметрические матрицы, порожденные координатными столбцами v_t^{st}, ω_t^{st}.

Тогда уравнение кинематики на группе $\mathbf{L}_t$**(H.6)** имеет вид

$$L_t^{s\cdot} = L_t^s \Phi_t^{st}, \Phi_t^{st} = \begin{Vmatrix} \langle w_t^s \rangle^t & 0 \\ \langle v_t^s \rangle^t & \langle w_t^s \rangle^t \end{Vmatrix}. \tag{7.11}$$

Доказательство. $L_t^{s\cdot} = (T_t^{ss}[c_t^s])^{\cdot} = T_t^{ss\cdot}[c_t^s] + T_t^{ss}[c_t^s]^{\cdot} = = (T_t^{ss\cdot} + T_t^{ss}[c_t^s]^{\cdot}[c_t^s]^T[c_t^s] + (T_t^{ss\cdot} = T_t^{ss}\langle \omega_t^s \rangle^s)[c_t^s] = T_t^{ss}(T_t^{ss\cdot} + +\langle \omega_t^s \rangle^s)[c_t^s] = T_t^{ss}[c_t^s][c_t^s]^T \Phi_t^{ss}[c_t^s] = T_t^{ss}[c_t^s]\Phi_t^{st} = L_t^s \Phi_t^{st}$. □

Уравнение (7.11) позволяет ввести простую, легко реализуемую на ЭВМ операцию дифференцирования на векторном пространстве винтов.

Предложение 6.9. Пусть $L_t^s : H_t^t \to H_s^s$, $H_s^s = L_t^s H_t^t$.

Тогда операции дифференцирования координатного столбца винта в неподвижной (·) и подвижной (*) системах координат E_s и E_t связаны равенством

$$H_s^{s\cdot} = L_t^s (H_t^{t*} + \Phi_t^{st} H_t^t). \tag{7.12}$$

Доказательство. $H_s^s = L_t^s H_t^t \to H_s^{s\cdot} = L_t^{s\cdot} H_t^t + L_t^s H_t^{t^*} = = L_t^s (L_s^t L_t^{s\cdot} H_t^t + H_t^{t^*}) = L_t^s (H_t^{t^*} + \Phi_t^{st} H_t^t)$. □

Комментарий. Символ (*) используется для наглядности, ибо сочетание верхнего индекса «*t*» с символом (·) в обозначении $H_t^{t\cdot}$ достаточно для понимания того, что дифференцирование винта выполняется в подвижной системе координат E_t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1874. 431 с.

2. *Абарцумян Р. В., Мекке И., Штойян Д.* Введение в стохастическую геометрию. М.: Наука, 1989. 399 с.

3. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир, 1965.

4. *Бурбаки Н.* Интегрирование, меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.

5. *Белков А. Ю., Коноплев В. А.* Две новые формы уравнений движения систем твердых тел // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 5. С. 3—11.

6. *Вершик А. М., Фаддеев Л. Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики. Ч. II. Изд-во ЛГУ, 1975. С. 129—141.

7. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. (Ч. I и II). М.: Наука, 1969.

8. *Гердт В. П., Тарасова О. В., Широков Д. В.* Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике // Успехи физ. наук. 1980. Т. 130, вып. 1. С. 113—147.

9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.

10. *Дьедонне Ж.* Геометрия классических групп. М.: Мир, 1974. 204 с.

11. *Дьедонне Ж.* Линейная алгебра и элементарная геометрия. М.: Наука, 1972. 335 с.

12. *Девис П.* Пространство и время в современной картине Вселенной. М.: Мир, 1972. 297 с.

13. *Климов Д. М., Руденко В. М.* Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 214 с.

14. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.

15. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

16. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М.: ГИФ-МЛ, 1963. 583 с.

17. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. II. М.: ГИФ-МЛ, 1963. 727 с.

18. *Коноплев В. А.* Исследование кинематики сложного движения тела с помощью матричных методов // Прикл. механика. 1984. Т. 20, № 9. С. 130—131.

19. *Коноплев В. А.* Матричные формы уравнений движения свободного твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 42—46. (*Konoplev V. A.* Metrical forms of a free solid body motion equation // Mechan. Solid. New York: Allerton Press. 1985. Vol. 20, N 6. P. 40—44.

20. *Коноплев В. А.* Динамика управляемого движения упругого манипулятора в инерционной взволнованной жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 30—35. (*Konoplev V. A.* The dynamics of an elastic motion of a manipulator in inertial liquid // Mechan. Solid. New York: Allerton Press. 1986. Vol. 21, N 4. P. 23—33).

21. *Коноплев В. А.* Декомпозиция и конструирование агрегативных моделей функционирования больших управляемых систем твердых тел со структурой дерева // Тез. докл. VI Всесоюз. съезда по теорет. и приклад. механике. Ташкент, 1986. С. 365. (*Konoplev V. A.* Decomposition and design of aggregative models of large controlled systems of the solid bodies with tree-like structure // Proc. 6 All-Union workshop theor. appl. mechan. Tashkent, 1986).

22. *Коноплев В. А.* Матричные уравнения динамики открытой кинематической цепи с вращающимися массами на звеньях // Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 7. С. 89—96.

23. *Коноплев В. А.* Группа движений векторного пространства винтов и уравнение кинематики на ней // Изв. вузов. Математика. 1987. № 12. С. 31—33.

24. *Коноплев В. А.* Уравнения движения носителя динамически несбалансированных маховиков в инерционной среде // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. № 5. С. 763—766. (*Konoplev V. A.* Motion equations of bearer of dynamical-unbalanced and symmetrical fly-wheels in an inertial environment // Appl. Mathem. Mech. Oxford, England: Pergamon Press. 1987. Vol. 51, N 5, P. 597—660).

25. *Коноплев В. А.* Агрегативные модели механики систем твердых тел со структурой дерева // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 46—53. (*Konoplev V. A.* Aggregate models of mechanics of solid body systems with tree-like structure // Mechan. Solid. New York: Allerton Press. 1989. Vol. 24, N 6. P. 23—33).

26. *Коноплев В. А.* Конструирование агрегативных моделей механики носителя систем твердых тел // Прикл. математ. механ. 1989. Т. 53, № 1. С. 24—31. (*Konoplev V. A.* Design of aggregative models of solid body systems bearer mechanics // Appl. Mathem. Mech. Oxford, England: Pergamon Press. 1989. Vol. 53, N 1. P. 18—24).

27. *Коноплев В. А.* Агрегативные модели механики систем твердых тел // Докл. АН СССР. 1990. Механика. Т. 314, № 4. С. 809—813. (*Konoplev V. A.* Aggregate models of mechanics of solid body systems // AMC, Sov. Phys. Dokl. New York. 1990. Vol. 35, N 10. P. 872—873).

28. *Коноплев В. А., Фишков А. Л.* Агрегативные методы конструирования моделей механики систем из упругих элементов // Прикл. механика. 1991. Т. 27, № 1. С. 116—130. (*Konoplev V. A., Fishkov A. L.* Aggregative methods for design of models of system mechanics with using elastic elements // Sov. Appl. mechan. 1991. Vol. 27, N 1. P. 89—93).

29. *Коноплев В. А.* Агрегативная форма дифференциальных уравнений связей системы тел с телами внешней среды // Докл. АН СССР. Механика. 1992. Т. 322, № 6. С. 1047—1051. (*Konoplev V. A.* Aggregate form of differential equations coupling a system of bodies to bodies of on external medium // AMC, Sov. Phys. Dokl. USA, New York. 1992. Vol. 37 (2). P. 91—92).

30. *Коноплев В. А.* Новая форма дифференциальных уравнений связей системы тел с телами внешней среды // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 3—9. (*Konoplev V. A.* A new from of differential equations coupling a system of bodies to bodies of on external medium // Mechan. Solid. USA, New York: Allerton Press. 1998. Vol. 28, N 1. P. 1—6).

31. *Коноплев В. А.* Аналитические трансвективные формы агрегативных уравнений движения систем твердых тел // Докл АН СССР. Механика. 1994. Т. 334, № 2. (*Konoplev V. A.* The analitikal transvection Caushy-forms for the aggregative motion equations of the multibody systems // AMC. Phys. Dokl. USA, New York: Allerton Press. 1998. Vol. 334, N 2. P. 172—174).

32. *Коноплев В. А.* Аналитические трансвективные формы прямой и обратной матриц кинетической энергии системы // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 3—11.

33. *Коноплев В. А.* Агрегативная механика систем твердых тел. СПб.: Наука, 1996. 166 с.

34. *Коноплев В. А.* Групповые методы в теории конечных поворотов твердого тела // Труды XXII школы-семинара по анализу и синтезу нелинейных механических колебательных систем. СПб., 1995. С. 124—134.

35. *Коноплев В. А.* Уравнения движения двумерной вязкой жидкости // Труды XXIII школы-семинара по анализу и синтезу нелинейных механических колебательных систем. СПб., 1996. С. 207—217.

36. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

37. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Наука, 1970. 939 с.

38. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

39. *Месарович М., Такахара Д.* Общая теория систем. Математические основы. М.: Мир, 1978. 311 с.

40. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1972. 270 с.

41. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 479 с.

42. *Никулин В. В., Шафаревич И. Р.* Геометрии и группы. М.: Наука, 1983. 239 с.

43. *Супруненко Д. А.* Группы матриц (Современная алгебра). М.: Наука, 1972. 351 с.

44. *Скорняков Л. А.* Элементы алгебры. М.: Наука, 1980. 240 с.

45. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.

46. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

47. *Трусдел К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

48. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979. 280 с.

49. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

50. *Яглом И. М.* Математические структуры и математическое моделирование. М.: Сов. радио, 1980. 143 с.

51. *Яглом И. М.* Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М.: Наука, 1969. 304 с.

52. *Weyl H.* Raum, Zeit, Materie. (Пространство, время, материя). Berlin. 1923.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

Владимир Андреевич Коноплев

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ ГАЛИЛЕЯ

Редактор издательства *Т. Н. Токарева*
Художник *Е. В. Кудина*. Технический редактор *Е. В. Траскевич*
Корректоры *О. И. Буркова, Ю. Б. Григорьева*
и А. Х. Салтанаева
Компьютерная верстка *Е. М. Сальниковой*

Лицензия № 020297 от 23 июня 1997 г. Сдано в набор 14.05.99.
Подписано к печати 20.10.99. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18.0.
Уч.-изд. л. 15.6. Тираж 500 экз. Тип. зак. № 3234. С 231

Санкт-Петербургская издательская фирма «Наука» РАН
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская лин., 1

Санкт-Петербургская типография «Наука» РАН
199034, Санкт-Петербург, 9 лин., 12

Доктор физико-математических наук, профессор Владимир Андреевич Коноплев — зав. лабораторией механики управляемых систем Института проблем машиноведения РАН, профессор кафедры теоретической механики БГТУ, член Национального комитета по теории машин и механизмов, засл. деятель науки Российской Федерации. Круг научных интересов: основания общей механики, механика систем твердых тел, прикладная математика и механика.

Doktror of physics and mathematics, professor V. Konoplev is Head of Mechanics of controlled systems in Institute for problems of mechanical engineering RAS, professor of theoretical mechanics department in Baltic State Technical University, member of Russian National Committee of machanes and mechanisms theory, Honored scientists of Russian Federation. Research interests include foundations of general mechanics, multibody systems mechanics, applied mathematics and mechanics.

“НАУКА”