СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА

А. В. Щепетилов

АНАЛИЗ И МЕХАНИКА НА ДВУХТОЧЕЧНО-ОДНОРОДНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Институт Компьютерных Исследований

R&C Dynamics

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Редакционный совет:

Болсинов А. В.
School of Mathematics, Longhborough University Loughborough (UK)

Борисов А. В.
Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск

Козлов В. В.
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Мамаев И. С.
Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск

Тайманов И. А.
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Трещев Д. В.
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Вышли в свет:

Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.
Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения

Богопольский О. В.
Введение в теорию групп

Борисов А. В., Мамаев И. С.
Современные методы теории интегрируемых систем

Брур Х. В., Дюмортье Ф., ван Стрин С., Такенс Ф.
Структуры в динамике. Конечномерные детерминированные системы

Бураго Д., Бураго Ю., Иванов С.
Курс метрической геометрии

Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.
Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей

Добеши И.
Десять лекций по вейвлетам

Кассел К., Россо М., Тураев В.
Квантовые группы и инварианты узлов

Кудряшов Н. А.
Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений

Леонов Г. А.
Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости

Морозов А. Д.
Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах

Морозов А. Д.
Введение в теорию фракталов

Мохов О. И.
Симплектическая и пуассонова геометрия на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые уравнения

Пеллер В. В.
Операторы Ганкеля и их приложения

Песин Я.
Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Рамис Ж. П.
Расходящиеся ряды и асимптотические теории

Рюэль Д.
Термодинамический формализм

Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А.
Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход

Тюрин А. Н.
Квантование, классическая и квантовая теории поля и тэта-функции

Холево А. С.
Статистическая структура квантовой теории

Цыганов А. В.
Интегрируемые системы в методе разделения переменных

Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.
Методы качественной теории в нелинейной динамике. Том I

Щепетилов А. В.
Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах

де ла Яве Р.
Введение в КАМ-теорию

Готовятся к печати:

Капеллер Т., Пёшль Ю.
КдФ и КАМ

Леповски Дж., Ли Х.
Введение в вершинные операторные алгебры и их представление

Шафаревич А. И.
Введение в теорию квазиклассического квантования изотропных многообразий

Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.
Методы качественной теории в нелинейной динамике. Том II

Alexey V. Shchepetilov

Calculus and Mechanics on Two-Point Homogenous Riemannian Spaces

Springer

А. В. Щепетилов

Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах

Авторский перевод с английского

Институт Компьютерных Исследований

R&C Dynamics

Москва ♦ Ижевск

2008

УДК 514.85, 530.145.61, 531.012, 512.816.7, 512.815, 512.816.4, 514.13, 514.161

Интернет-магазин

MATHESIS

http://shop.rcd.ru

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

РФФИ

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №08-01-07052.

Щепетилов А. В.

Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах. (Авторский перевод с англ.) — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2008. — 360 с.

Книга посвящена одно- и двухчастичным задачам классической и квантовой механики на двухточечно-однородных римановых пространствах. Акцент сделан на пространства постоянной кривизны, для которых получены наиболее конкретные результаты. В книге использован бескоординатный подход на основе теории групп Ли.

Для специалистов по математической и теоретической физике, занимающихся приложениями геометрических и алгебраических методов к задачам механики, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-93972-649-8

Alexey V. Shchepetilov ***Calculus and Mechanics on Two-Point Homogenous Riemannian Spaces*** was originally published in English in 2006 by Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg.

Алексей В. Щепетилов ***Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах***. Оригинальное издание опубликовано на английском языке в 2006 году издательством Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg.

© Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006

© Перевод на русский язык,
НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008

http://shop.rcd.ru
http://ics.org.ru

Введение

Развитие математики происходит не только в силу потребностей других наук, но и в силу ее внутренней логики. С этим связано внимание математиков к многим задачам, находящимся в тесной связи с фундаментальными математическими понятиями, даже если эти задачи не имеют непосредственных практических приложений.

Хорошо известно, что одним из базисных понятий геометрии являются пространства постоянной кривизны [26], давшие широкое поле для исследований. В результате были обнаружены многочисленные связи пространств постоянной кривизны с другими разделами математики, например, с интегрируемыми дифференциальными уравнениями в частных производных [112; 186; 212][1] и с интегрируемыми гамильтоновыми динамическими системами [62]. Геодезические потоки на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны (рода большего единицы) являются полигоном для эргодической теории [3] (см. также [73] и библиографию там). Гиперболическое пространство $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ является пространством скоростей специальной теории относительности (см. п. 7.4.1), а также совпадает с пространственноподобными сечениями простейших моделей общей теории относительности.

Задолго до возникновения общей теории относительности основоположники неевклидовой геометрии Лобачевский и Больяи сделали первые попытки перенесения ньютоновской механики на пространства постоянной отрицательной кривизны. Ими были предложены аналоги ньютоновского потенциала для этого пространства. В 1885 году в важной работе Киллинга [147] была подробно рассмотрена задача о движении материальной точки в ньютоновском потенциале на пространстве $\mathbf{S}^3$ и найдены аналоги трех законов Кеплера для этой задачи. В работах Либмана [154; 156] 1902 и 1905 годов результаты Киллинга были распространены на пространство Лобачевского.

[1] Автор также внес свой скромный вклад в данную проблематику [193], прояснив геометрический смысл конструкции из работы [186], получившей широкую известность и распространение в чисто координатной форме.

Вскоре после создания квантовой механики Шредингер, Инфельд и Шильд рассмотрели квантово-механическую задачу о движении частицы в ньютоновском потенциале на пространствах $\mathbf{S}^3$ и $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ и нашли соответствующие энергетические уровни.

Однако эти результаты не получили широкой известности и уже в конце 20 века неоднократно переоткрывались в ряде работ. Даже в недавней книге [220], посвященной классической одночастичной задаче в пространствах $\mathbf{S}^3$ и $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$, результаты В. Киллинга и Г. Либмана ошибочно приписаны авторам работ [48] и [113] конца 20 века. В § 6.4 данной книги описана история задачи движения частицы в центральном поле на односвязных пространствах постоянной кривизны, что заполняет пробел, имеющийся в современной литературе.

Классическая механическая задача двух тел с центральным взаимодействием в пространствах постоянной кривизны была впервые рассмотрена в работе автора [189], а квантово-механическая — в работе [87]. В евклидовом пространстве задача двух тел после отделения движения центра масс сводится к задаче о движении одной частицы в центральном поле. В пространствах постоянной кривизны в силу отсутствия преобразования Галилея это не так [189]. Данная задача является инвариантной относительно группы изометрий пространств постоянной кривизны. Однако данная группа недостаточно широка сама по себе для обеспечения интегрируемости в каком-либо смысле задачи двух тел.

Естественно возникающая задача поиска центральных потенциалов, для которых задача о движении двух тел в пространствах постоянной кривизны все же интегрируема, остается нерешенной. Это связано с тем, что, несмотря на разнообразие методов теории интегрируемых систем, все они либо предназначены для искусственного построения интегрируемых задач, либо для выделения некоторых интегрируемых задач из большого класса динамических систем, либо для «объяснения» с новой точки зрения того, почему данная, ранее проинтегрированная система, является таковой. Для исследования вопроса об интегрируемости вновь возникшей конкретной гамильтоновой динамической системы, как правило, годятся лишь «старые» методы: численное построение сечений Пуанкаре, тест Пенлеве и «угадывание» дополнительных интегралов. Однако в нашей ситуации все они наталкиваются на значительные трудности.

Численное построение сечений Пуанкаре возможно лишь для конкретного потенциала взаимодействия, и найти, таким образом, потенциал без удачной «догадки» невозможно (см. также обсуждение в п. 7.3.2). Тест Пенлеве (см., например, [214]) практически пригоден лишь для дифференциальных уравнений, разрешенных относительно

старших производных, у которых правая часть имеет сравнительно простой, желательно полиномиальный, вид. Для задачи двух тел с центральным взаимодействием в пространствах постоянной кривизны это не так. Удачные «догадки», во-первых, обычно если появляются, то сразу, а во-вторых, могут иметь место лишь в сравнительно простой ситуации. В противном случае обычно приходится ждать разработки изощренной техники, приспособленной для решения конкретного вопроса[2].

Конечно, все приведенные соображения, касающиеся проблемы интегрируемости задачи двух тел с центральным взаимодействием в пространствах постоянной кривизны, носят лишь эвристический характер и не претендуют на законченность, которую может дать либо нахождение потенциалов взаимодействия, соответствующих интегрируемости, либо доказательство отсутствия таковой для любых нетривиальных потенциалов. Отметим в этой связи доказательства неинтегрируемости ограниченной ([37; 38; 161]) и приведенной ([197; 198]) задачи двух тел на двумерных пространствах постоянной кривизны для ряда потенциалов, в частности, ньютоновского и осцилляторного.

Естественными пространствами для задачи двух тел являются двухточечно-однородные пространства. Для этих пространств расстояние между двумя точками является единственным инвариантом их расположения относительно действия группы изометрий. В частности, двухточечно-однородными пространствами являются односвязные пространства постоянной кривизны и евклидово пространство[3]. Система двух частиц на этих пространствах имеет радиальную степень свободы и степени свободы, описываемые в терминах группы изометрий.

Однако запись двухчастичного гамильтониана в явно инвариантном виде, учитывающем данное деление степеней свободы на радиальную и групповые, является нетривиальной задачей, которая поэтапно решалась в работах автора [89; 189; 87; 88], пока наконец в [195] не было достигнуто единообразное описание для всех двухточечно-однородных пространств, на основе специального разложения алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующей группе изометрий G, в прямую сумму подпространств.

Данный подход основан на теории Хелгасона инвариантных дифференциальных операторов [82; 131]. Для квантово-механического случая он приводит к выражению двухчастичного гамильтониана через радиальный дифференциальный оператор и образующие алгебры инвариант-

[2]В качестве примера можно привести историю доказательства Великой теоремы Ферма [65].

[3]В дальнейшем, говоря о двухточечно-однородном пространстве, мы будем иметь в виду произвольное двухточечно-однородное пространство, за исключением евклидова.

ных дифференциальных операторов на расслоении единичных сфер Q_S над двухточечно-однородным пространством Q. Эти образующие в свою очередь полиномиально выражаются через базис алгебры $\mathfrak{g}$. Данное представление позволяет выделить несколько изолированных обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих некоторым (но заведомо не всем) спектральным сериям задачи двух тел на компактных пространствах Q для ряда потенциалов взаимодействия. Для кулоновского и осцилляторного потенциалов эти уравнения могут быть сведены к гипергеометрическому и поэтому решены в явном виде [196]. Такая возможность характеризует так называемые квазиточнорешаемые задачи [77; 78; 217].

Пользуясь соответствием между квантово-механическим гамильтонианом и классической функцией Гамильтона, можно получить явно инвариантный вид последней. При этом образующие алгебры $\mathrm{Diff}_I(Q_S)$ заменяются образующими соответствующей градуированной алгебры $\mathrm{gr}\,\mathrm{Diff}_I(Q_S)$, которая изоморфна пуассоновой алгебре инвариантных функций на кокасательном расслоении T^*Q_S. Этот вид двухчастичной функции Гамильтона позволяет провести анализ проблемы центра масс на двухточечно-однородных пространствах [195] и сравнить между собой известные ранее подходы к этой проблеме [27; 120; 174; 184; 224]. Также данный вид удобен для анализа условий, при которых в задаче двух частиц отсутствуют столкновения на бесконечном интервале времени и для проведения гамильтоновой редукции, которая основывается в данном случае на симплектоморфизме из работы [88].

Заметим, что для исследования задачи двух тел на двухточечно-однородных пространствах потребовалось привлечь разнообразные дифференциально-геометрические, алгебраические и аналитические методы. При анализе общих ситуаций в книге используется бескоординатное описание рассматриваемых конструкций в терминах алгебры Ли соответствующей группы симметрий. Это связано с тем, что за рамками евклидового пространства, особенно в случаях большой размерности (например n), имеющаяся симметрия часто теряется в громоздких координатных вычислениях, которые становятся очень трудоемкими и зачастую практически невыполнимыми даже с помощью систем компьютерной алгебры. В то же время использование выражений через базисные элементы алгебры Ли позволяет отчасти сохранить за дифференциальными операторами вид многочлена с постоянными коэффициентами, правда, от некоммутирующих переменных, упрощающий многие вычисления.

Некоторые полученные результаты имеют самостоятельную ценность и могут быть использованы для других исследований. Это выражение оператора Лапласа–Бельтрами в подвижном репере и, в частности,

через киллинговы векторные поля, описание редуцированного кокасательного расслоения однородного пространства в терминах орбит коприсоединенного действия соответствующей группы Ли, описание алгебры $\mathrm{Diff}_I(Q_S)$ инвариантных дифференциальных операторов на расслоении единичных сфер Q_S над двухточечно-однородным пространством Q в терминах образующих и соотношений.

Опишем в завершении структуру книги. В первых четырех главах развивается дифференциально-геометрический аппарат, служащий в дальнейшем для анализа задачи двух тел на двухточечно-однородных пространствах. В главе 1 дана классификация двухточечно-однородных пространств, приведены модели компактных двухточечно-однородных пространств либо как подмногообразий евклидова пространства, либо как факторпространств таких подмногообразий, а также различные модели вещественных гиперболических пространств $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$. Далее описана связь между компактными и некомпактными двухточечно-однородными пространствами в терминах соответствующих алгебр Ли.

В главе 2 собраны необходимые сведения о дифференциальных операторах. Первый параграф содержит основы теории инвариантных дифференциальных операторов на однородных многообразиях. Во втором параграфе выводится выражение оператора Лапласа–Бельтрами в подвижном репере, в частности, состоящем из киллинговых векторных полей. В третьем параграфе сформулированы достаточные условия самосопряженности абстрактных операторов в гильбертовых пространствах и дифференциальных операторов на римановых пространствах, встречающихся в дальнейшем. В четвертом параграфе описана используемая далее общая схема редукции квантово-механических систем с симметриями.

В главе 3 находятся образующие и соотношения для алгебры инвариантных дифференциальных операторов на расслоении единичных сфер Q_S над двухточечно-однородным пространством Q. Все эти системы образующих содержат оператор D_0 первого порядка. Его ядро изучается в § 3.6. Также найдены некоторые элементы центров данных алгебр.

Глава 4 содержит основные факты, относящиеся к гамильтоновым динамическим системам с симметриями и соответствию между квантово-механическими и классическими системами. В частности, тут обсуждается некоммутативная интегрируемость и отображение момента. Построен важный для дальнейшего симплектоморфизм между приведенным фазовым пространством для гамильтоновой системы на кокасательном расслоении однородного многообразия и некоторым факторпро-

странством орбиты коприсоединенного действия соответствующей группы Ли.

Глава 5 посвящена выводу явно симметричного единого выражения для двухчастичного гамильтониана на двухточечно-однородных пространствах через радиальный дифференциальный оператор и образующие алгебры инвариантных дифференциальных операторов на расслоении единичных сфер.

В главе 6 рассматривается задача о движении одной частицы в центральном поле на двухточечно-однородных пространствах. В § 6.1 доказывается ее некоммутативная интегрируемость. Для пространств постоянной кривизны приводятся более детальные результаты в классическом и квантово-механическом случаях. Эти результаты являются известными, но собраны вместе, по-видимому, впервые.

Описание классического случая содержит вывод бертрановских потенциалов, описание траекторий частиц и их связь с кониками в односвязных пространствах постоянной кривизны. Для квантового случая выводятся явные формулы для одночастичных энергетических уровней и волновых функций, соответствующих бертрановским потенциалам.

В § 6.4 дан исторический обзор исследований одночастичной задачи в центральном потенциале на пространствах постоянной кривизны, содержащий ссылки на большое число работ, начиная с момента возникновения неевклидовой геометрии до наших дней.

Полученное в главе 5 выражение для двухчастичного гамильтониана в начале главы 7 преобразуется в функцию Гамильтона классической механической системы двух частиц на двухточечно-однородных пространствах, также имеющую явно инвариантный вид. Проблема поиска нетривиальных интегралов движения для различных потенциалов обсуждается в § 7.3. Там же доказано отсутствие столкновений частиц для некоторых потенциалов и начальных условий. Найденное выражение для двухчастичной функции Гамильтона рассматривается в § 7.4 с точки зрения проблемы центра масс для двухточечно-однородных пространств. Обсуждаются различные существующие определения центра масс для пространств постоянной кривизны. Показаны их недостатки по сравнению с определением центра масс в евклидовом пространстве. В § 7.5 для пространств $\mathbf{S}^n$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ описаны и классифицированы приведенные классические двухчастичные системы.

В главе 8 исследуется квантово-механическая задача двух тел на двухточечно-однородных компактных пространствах. Показано, что некоторые ее бесконечные спектральные серии могут быть найдены из изолированных обыкновенных дифференциальных уравнений вто-

рого порядка. Все такие уравнения найдены для сфер $\mathbf{S}^n$; для кулоновского и осцилляторного потенциалов некоторые из этих уравнений сводятся к гипергеометрическому, из которого находятся явные спектральные серии. Таким образом, показана квазиточнорешаемость квантово-механической задачи двух тел на сферах $\mathbf{S}^n$ для бертрановских потенциалов. Обсуждаются трудности перенесения данного подхода на задачу двух тел на неплоских некомпактных пространствах.

В книге имеются также четыре приложения. Первое из них содержит технический материал, посвященный вычислению коммутационных соотношений для образующих алгебры инвариантных дифференциальных операторов на расслоении единичных сфер Q_S над двухточечно-однородным пространством Q. Во втором содержатся необходимые сведения о фуксовых дифференциальных уравнениях, в частности об уравнениях Римана и Гойна, используемые при явном решении спектральных задач. Третье приложение содержит основные факты, относящиеся к ортогональным комплексным алгебрам Ли и их конечномерным неприводимым представлениям. Ряд нерешенных задач содержится в четвертом приложении.

Необходимые сведения из дифференциальной геометрии можно найти в [10; 26; 32; 46; 64; 81; 108; 110; 129]; касающиеся используемого в книге современного геометрического языка описания гамильтоновых систем в [6; 76; 108; 125; 163; 165; 206]; из теории групп Ли и их действий на различных пространствах в [2; 7; 17; 20; 42; 59; 63; 70; 82; 90; 130]; из функционального анализа в [41; 66; 118] и многих других книгах.

Читателю, интересующемуся одночастичной задачей в пространствах постоянной кривизны, рекомендуется прочитать п. 1.3.3, § 6.2 для классического случая и п. 1.3.3, § 2.3, § 6.3 для квантового случая.

Библиография претендует на относительную полноту лишь касательно работ, посвященных механике одной и двух частиц на двухточечно-однородных пространствах, и, в частности, на односвязных пространствах постоянной кривизны, за исключением геодезических потоков. Отметим, что обзор, посвященный интегрируемости последних на различных римановых пространствах, содержится в [104].

Автор выражает глубокую благодарность А. О. Старинцу и И. Э. Степановой, помощь которых на протяжении ряда лет значительно облегчила ему доступ к различным литературным источникам и понимание работ на немецком языке. Он благодарит А. И. Молева за советы, касающиеся теории представлений, А. Г. Сергеева за несколько полезных ссылок, П. В. Голубцова за ТеХническую помощь и всех, кто прислал ему

свои работы, цитированные в книге. Автор выражает свою признательность редактору серии Lecture Notes in Physics издательства Springer проф. В. Бейгельбёку за ряд критических замечаний и предложений по улучшению текста английского издания книги. Все возможные замечания и комментарии читателей, касающиеся содержания книги, будут им с благодарностью приняты.

Указатель обозначений и соглашений

1. Множества

1) $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,

2) $\mathbb{R}_+$ — множество положительных вещественных чисел,

3) $(\alpha, \ldots, \omega)$ — множество, состоящее из элементов $\alpha, \ldots, \omega$,

4) pt — одноточечное множество.

2. Пространства

1) $\mathcal{L}^2(M, d\nu)$ — гильбертово пространство измеримых квадратично-интегрируемых по мере ν комплекснозначных функций на многообразии M,

2) $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(M, d\nu)$ — множество комплекснозначных функций на M, локально квадратично интегрируемых по мере ν,

3) $W^{k,l}_{\mathrm{loc}}(M^n, d\mu)$ 59[4]

4) Q — двухточечно-однородное риманово пространство, отличное от евклидова,

5) $M_{\mathbf{S}}$ — расслоение единичных сфер над римановым пространством M,

6) M/G — фактор-пространство пространства M по отношению к действию группы G на M,

7) $\mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n)$ — линейная оболочка элементов $e_1, \ldots, e_n$ некоторого линейного пространства,

8) L^* — пространство дуальное к линейному пространству L,

9) для подпространства L' линейного пространства L подпространство $\mathrm{ann}\, L' \subset L^*$ является аннулятором L', т. е. $\mathrm{ann}\, L' := (\alpha \in L^* |\ \alpha(L') = 0)$.

3. Алгебры и группы

1) $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел,

2) $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел,

3) $\mathbb{H}$ — алгебра кватернионов,

4) $\mathbb{C}a$ — алгебра октав (алгебра Кэли),

[4]Числа после обозначений указывают номера страниц, на которых это обозначение определяется.

5) $C^\infty(M)$ — алгебра бесконечно гладких вещественнозначных функций на гладком многообразии M,

6) $C_c^\infty(M)$ — подалгебра алгебры $C^\infty(M,\mathbb{C})$, состоящая из функций с компактным носителем,

7) $\mathcal{P}(T^*M)$ — алгебра бесконечно гладких вещественных функций на кокасательном расслоении T^*M многообразия M, полиномиальных на слоях,

8) $C^\infty(M,\mathbb{C})$ — алгебра бесконечно гладких комплекснозначных функций на M,

9) $C_c^\infty(M,\mathbb{C})$ — подалгебра алгебры $C^\infty(M,\mathbb{C})$, состоящая из функций с компактным носителем,

10) $\mathcal{X}(M)$ — бесконечномерная алгебра Ли гладких векторных полей на гладком многообразии M, также $\mathcal{X}(M)$ является модулем над $C^\infty(M)$,

11) $U(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра для алгебры Ли $\mathfrak{g}$,

12) $\mathrm{LDiff}(G)$, $\mathrm{RDiff}(G)$, $\mathrm{LRDiff}(G)$ — алгебры лево-, право- и биинвариантных дифференциальных операторов на группе Ли G соответственно,

13) $\mathrm{Diff}_G(M)$ — алгебра G-инвариантных дифференциальных операторов на G-однородном пространстве M,

14) $\mathrm{LDiff}_K(G)$ — алгебра G-левоинвариантных и K-правоинвариантных дифференциальных операторов на G, где K – подгруппа группы Ли G,

15) $\mathrm{O}(1,n)$, $\mathrm{O}_0(1,n)$ 20,

16) $W_{\mathcal{F}}(x)$ 121,

17) $S_p(\mathfrak{g})$ 123.

4. Операции

1) $\circ$ — йорданово умножение в алгебре $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$; в остальных случаях обозначает композицию двух операций,

2) $\pounds_\xi T$ — производная Ли тензорного поля T вдоль векторного поля ξ,

3) ∇ — связность Леви–Чивиты на римановом многообразии,

4) $\mathrm{grad}\, f$ — градиент функции f на римановом многообразии,

5) ad_X — присоединенное действие элемента X из алгебры Ли,

6) Ad_q — присоединенное действие элемента q из группы Ли,

7) Ad_q^* — коприсоединенное действие элемента q из группы Ли, 123

8) $[A, B]$ — коммутатор в алгебрах, в частности, коммутатор векторных полей как операторов, действующих на функции,

9) $\{A, B\}$ — антикоммутатор в алгебрах,

10) $[\varphi, \psi]_P$ — скобки Пуассона функций φ и ψ на пуассоновом многообразии,

11) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение,

12) $\operatorname{im} \lambda$ — образ отображения λ,

13) λ^{-1} — обратное отображение (вообще говоря, многозначное) для отображения λ,

14) id — тождественное отображение,

15) π_i — различные проекции

- π_1 — проекция группы на ее однородное пространство 12, 14, 32, 130,
  - π_2 — 44,
  - π_3 — 72,
  - π_4 — 132,
- $\widetilde{\pi}_1, \widetilde{\pi}_2$ — 149,

16) $d\pi$ и π_* — дифференциал отображения π,

17) $d\pi^*$ — кодифференциал отображения π,

18) $\oplus$ — прямая сумма линейных пространств, если не сказано иное,

19) $\mathrm{Kil}_{\mathfrak{g}}$ — форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

5. Разное

1) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — мнимые единицы в алгебре кватернионов,

2) $\dim_{\mathbb{K}}$ — размерность чего-либо над полем $\mathbb{K}$,

3) $(z_1 : \ldots : z_{n+1})$ — однородные координаты точки проективного пространства,

4) $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ — вещественная и мнимая части элемента из $z \in \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{C}a$,

5) $A \setminus B$ — разность множеств,

6) $\operatorname{symb} D$ — символ дифференциального оператора D 139,

7) $\mathfrak{S}_l$ — группа всех перестановок l элементов.

Если явно не сказано противное, то все многообразия, линейные пространства, алгебры и т. п. предполагаются вещественными; гладкие многообразия, кроме того, являются хаусдорфовыми, паракомпактными и удовлетворяют второй аксиоме счетности.

Группы Ли обозначаются прописными латинскими буквами, а их алгебры Ли — соответствующими строчными готическими буквами. Также строчными готическими буквами обозначаются и линейные подпространства алгебр Ли. Четыре серии простых классических комплексных алгебр Ли обозначаются прописными готическими буквами $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n, \mathfrak{C}_n, \mathfrak{D}_n$.

Для линейного пространства V мы не включаем единицу и тем самым элементы нулевой степени в тензорную алгебру $T(V)$. Аналогично обстоит дело с симметрической алгеброй $S(V)$ и универсальной обертывающей алгеброй $U(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Если группа G действует в линейном пространстве V, то под термином ее *инварианта* в V понимается инвариантный многочлен с аргументами из V, т. е. инвариантный элемент из симметрической алгебры $S(V^*)$, где V^* — дуальное пространство для V.

Скалярное произведение в комплексном и кватернионном линейных пространствах антилинейно по первому и линейно по второму аргументу. Кватернионное линейное пространство является правым относительно умножения на кватернионы.

Квадратный корень из вещественных положительных чисел положителен, для остальных комплексных чисел произволен.

Под многочленом от некоммутативных переменных понимается упорядоченный многочлен, т. е. каждый его моном является упорядоченным произведением.

Оглавление

Введение vii

Указатель обозначений и соглашений xv
1. Множества xv
2. Пространства xv
3. Алгебры и группы xv
4. Операции xvi
5. Разное xvii

Глава 1. **Двухточечно-однородные римановы пространства** . . 1
§ 1.1. Классификация 2
§ 1.2. Специальное разложение алгебры Ли инфинитезимальных изометрий двухточечно-однородных римановых пространств 4
§ 1.3. Модели классических компактных двухточечно-однородных римановых пространств 11
1.3.1. Модель пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$ 11
1.3.2. Модель пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ 14
1.3.3. Модели пространств $\mathbf{S}^n$, $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ 16
§ 1.4. Модель проективной плоскости Кэли 22
1.4.1. Алгебра $\mathbb{C}a$ 22
1.4.2. Йорданова алгебра $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$ 24
1.4.3. Октавная проективная плоскость $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ 26

Глава 2. **Дифференциальные операторы на гладких многообразиях** 31
§ 2.1. Инвариантные дифференциальные операторы на группах Ли и однородных пространствах 32
2.1.1. Основные обозначения 32
2.1.2. Инвариантные дифференциальные операторы на группах Ли 35
2.1.3. Инвариантные дифференциальные операторы на однородных пространствах 39

2.1.4. Представление алгебры $\mathrm{Diff}_G(M)$ образующими и соотношениями 44
§ 2.2. Оператор Лапласа–Бельтрами в подвижном репере 47
§ 2.3. Самосопряженность гамильтонианов 51
2.3.1. Самосопряженность операторов в абстрактных гильбертовых пространствах 51
2.3.2. Самосопряженность операторов Шредингера на римановых пространствах 58
§ 2.4. Общая схема квантово-механической редукции 64

Глава 3. **Алгебры инвариантных дифференциальных операторов на расслоении единичных сфер над двухточечно-однородным римановым пространством** 67
§ 3.1. Инвариантные дифференциальные операторы на пространстве $Q_{\mathbf{S}}$ 68
§ 3.2. Алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$ 72
3.2.1. Образующие алгебр $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$ 72
3.2.2. Соотношения в алгебрах $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$ 77
§ 3.3. Алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$ 88
3.3.1. Образующие алгебр $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$ 88
3.3.2. Соотношения в алгебрах $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$ 91
§ 3.4. Алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}})$, $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^n_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}})$ 94
3.4.1. Образующие алгебр $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^n_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}})$ . . . 94
3.4.1.1. Случай $n \geqslant 4$ 95
3.4.1.2. Случай $n = 2$ 95
3.4.1.3. Случай $n = 3$ 96
3.4.1.4. Образующие алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}})$ 96
3.4.2. Соотношения в алгебрах $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^n_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}})$ 96
§ 3.5. Алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}})$ 99
3.5.1. Образующие алгебр $\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right)$ и $\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right)$ 99
3.5.1.1. Специальный базис в пространстве $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$ 100
3.5.1.2. Инварианты в алгебре $S(\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{p}_\lambda\oplus\mathfrak{k}_\lambda\oplus\mathfrak{p}_{2\lambda}\oplus\mathfrak{k}_{2\lambda})$ 103
3.5.2. Соотношения в алгебрах $\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right)$ и $\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right)$ 108
§ 3.6. Ядро оператора D_0 113

Глава 4. **Гамильтоновы системы с симметрией и их редукция** 116
§ 4.1. Основные факты гамильтоновой механики 116
§ 4.2. Гамильтонова механика с симметриями 122
4.2.1. Пуассонова структура на алгебре $S(\mathfrak{g})$ 122
4.2.2. Пуассоново действие и отображение момента 125
4.2.3. Некоммутативная интегрируемость и отображение момента 127
4.2.4. Метод гамильтоновой редукции 129
§ 4.3. Гамильтоновы системы на кокасательных расслоениях . . 131
4.3.1. Каноническая симплектическая структура на кокасательных расслоениях 132
4.3.2. Инвариантные функции на кокасательных расслоениях 134
4.3.3. Натуральные механические системы и деквантование 138
4.3.4. Редукция кокасательного расслоения над однородным пространством 142

Глава 5. **Двухточечный гамильтониан на двухточечно-однородных пространствах** 149
§ 5.1. Однородные подмногообразия в конфигурационном пространстве задачи двух тел 149
§ 5.2. Двухточечный гамильтониан на компактном двухточечно-однородном пространстве 153
§ 5.3. Двухточечный гамильтониан на некомпактном двухточечно-однородном пространстве 161
§ 5.4. Связь двухточечного гамильтониана и алгебры $\mathrm{Diff}_G(M_{\mathbf{S}})$ 163

Глава 6. **Материальная точка в центральном поле на двухточечно-однородных пространствах** 167
§ 6.1. Интегрируемость одночастичного движения в центральном поле на двухточечно-однородных пространствах . . . 167
6.1.1. Движение на пространствах $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a), \mathbf{P}^2(\mathbb{H}), \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$. 168
6.1.2. Движение на пространствах $\mathbf{S}^2, \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ и $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ . . 170
§ 6.2. Движение частицы в бертрановских потенциалах на пространствах постоянной кривизны 171
6.2.1. Задача Кеплера 173
6.2.1.1. Задача Кеплера в гиперболическом пространстве 174
6.2.1.2. Задача Кеплера на сфере 180
6.2.2. Изотропный осциллятор 182

6.2.2.1. Изотропный осциллятор на гиперболической плоскости 183
6.2.2.2. Изотропный осциллятор на сфере 185
§ 6.3. Квантово-механическая одночастичная задача для бертрановских потенциалов в пространствах постоянной кривизны 187
6.3.1. Гиперболический случай 187
6.3.1.1. Задача Кулона 189
6.3.1.2. Осциллятор 194
6.3.2. Сферический случай 197
6.3.2.1. Задача Кулона 197
6.3.2.2. Осциллятор 201
§ 6.4. Материальная точка в центральном поле на пространствах постоянной кривизны. История вопроса 204

ГЛАВА 7. **Классическая механическая задача двух тел на двухточечно-однородных пространствах** 212
§ 7.1. Явно инвариантный вид гамильтоновой функции задачи двух тел на компактных двухточечно-однородных пространствах 212
7.1.1. Кватернионный случай 214
7.1.2. Октавный случай 216
7.1.3. Комплексный случай 217
7.1.4. Вещественный случай 218
§ 7.2. Явно инвариантный вид гамильтоновой функции задачи двух тел на некомпактных двухточечно-однородных пространствах 219
7.2.1. Кватернионный случай 220
7.2.2. Октавный случай 222
7.2.3. Комплексный случай 223
7.2.4. Вещественный случай 224
§ 7.3. Динамика двухчастичной системы и проблема столкновения частиц 225
7.3.1. Проблема столкновения частиц 227
7.3.2. О поиске нетривиальных интегралов движения . . 231
§ 7.4. Проблема центра масс на двухточечно-однородных пространствах 233
7.4.1. Существующие понятия центра масс на пространствах постоянной кривизны 234
7.4.2. Связь существующих понятий центра масс с двухчастичной гамильтоновой функцией 238

§ 7.5. Гамильтонова редукция задачи двух тел на пространствах постоянной кривизны 241
7.5.1. Гамильтонова редукция задачи двух тел на сферах 241
7.5.2. Гамильтонова редукция задачи двух тел на пространствах $\mathbf{H}^2$ и $\mathbf{H}^3$ 247

Глава 8. **Квазиточнорешаемость задачи двух тел на сферах** . 253
§ 8.1. Представления компактных групп Ли 254
§ 8.2. Общие собственные значения операторов D_i для сфер $\mathbf{S}^n$ и проективных пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ 257
8.2.1. Случай $n = 2k$ 258
8.2.2. Случай $n = 2k - 1$ 270
§ 8.3. Скалярные спектральные уравнения и некоторые энергетические уровни задачи двух тел 274
8.3.1. Кулоновский потенциал 276
8.3.2. Осцилляторный потенциал 282
§ 8.4. Проблема дискретного спектра на некомпактных пространствах 286

Приложение A. **Вычисление коммутационных соотношений для алгебр инвариантных дифференциальных операторов** . . . 289

Приложение B. **Некоторые фуксовы дифференциальные уравнения** 295

Приложение C. **Ортогональные комплексные алгебры Ли и их представления** 305
C.1. Алгебра Ли $\mathfrak{B}_k$ 305
C.2. Алгебра Ли $\mathfrak{D}_k$ 308
C.3. Ограничения представлений алгебр $\mathfrak{B}_k$ и $\mathfrak{D}_k$ 309
C.4. Доказательство двух разложений 310

Приложение D. **Нерешенные задачи** 314

Предметный указатель 315

Литература 319

Глава 1

Двухточечно-однородные римановы пространства

Евклидово пространство обладает рядом замечательных свойств. Оно является связным и односвязным топологическим пространством, т.е. его топология проста. Евклидово пространство является плоским, полным, однородным и изотропным римановым пространством. Более того, для каждой размерности только оно обладает этими свойствами. В силу этих причин, евклидово пространство — удобная и исторически первая арена для построения механических моделей.

Если не настаивать на том, чтобы физическое пространство было плоским и односвязным, то следующими кандидатами на его роль будут так называемые *двухточечно-однородные пространства*, т.е. пространства, в которых любая пара точек может быть преобразована подходящей изометрией в любую другую пару точек с тем же расстоянием между ними. Наиболее известным представителем этого класса римановых пространств являются односвязные *пространства постоянной кривизны*. Их группа имеет максимальную размерность (для пространств фиксированной размерности), и они являются пространственноподобными сечениями простейших моделей общей теории относительности.

В начале этой главы мы приводим классификацию двухточечно-однородных римановых пространств, а затем описываем специальное разложение алгебры Ли группы изометрий произвольного неевклидова пространства этого класса. С помощью этого разложения и свойства однородности в главе 5 будет получена явно инвариантная форма двухчастичного гамильтониана в этих пространствах. Однако изучение более тонких свойств этих пространств (например, алгебр инвариантных дифференциальных операторов на расслоениях единичных сфер над этими пространствами) требует их моделей, которые описаны в конце данной главы.

§ 1.1. Классификация

Ниже Q обозначает произвольное двухточечно-однородное связное риманово пространство. Классификация этих пространств была получена в [215; 221], (см. также [167; 26]) и имеет следующий вид ($n \in \mathbb{N}$):

1) евклидово пространство $\mathbf{E}^n$, $n \geqslant 1$;

2) сфера $\mathbf{S}^n$, $n \geqslant 1$;

3) вещественное проективное пространство $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$;

4) комплексное проективное пространство $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$;

5) кватернионное проективное пространство $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$, $n \geqslant 2$;

6) октавная проективная плоскость $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$;

7) вещественное гиперболическое пространство (пространство Лобачевского) $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$;

8) комплексное гиперболическое пространство $\mathbf{H}^n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$;

9) кватернионное гиперболическое пространство $\mathbf{H}^n(\mathbb{H})$, $n \geqslant 2$;

10) октавная гиперболическая плоскость $\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)$.

В низших размерностях имеются изоморфизмы: $\mathbf{P}^1(\mathbb{R}) \cong \mathbf{S}^1$, $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbf{S}^2$, $\mathbf{P}^1(\mathbb{H}) \cong \mathbf{S}^4$, $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}a) \cong \mathbf{S}^8$, $\mathbf{H}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbf{H}^2(\mathbb{R})$, $\mathbf{H}^1(\mathbb{H}) \cong \mathbf{H}^4(\mathbb{R})$, $\mathbf{H}^1(\mathbb{C}a) \cong$ $\cong \mathbf{H}^8(\mathbb{R})$ [32; 82].

Существуют различные подходы к классификации данных пространств. Напомним, что *ранг симметрического пространства* — это размерность его максимального плоского вполне геодезического подмногообразия.

Теорема 1.1. *Пусть Q — связное риманово пространство, G — связная компонента его группы изометрий, а K_x — стационарная подгруппа для точки x. Тогда следующие условия 1 и 2 эквивалентны*

1) *пространство Q является двухточечно-однородным;*

2) *действие стационарной подгруппы K_x на всех единичных сферах T_xQ, $\forall x \in Q$ в касательных пространствах является транзитивным; другими словами, пространство Q изотропно.*

Совместно эти условия означают, что группа G транзитивно действует на множестве всех геодезических. Поэтому при выполнении любого из этих условий все геодезические на компактном пространстве Q замкнуты и имеют одинаковую длину.

Кроме того, полное односвязное симметрическое риманово пространство ранга один является двухточечно-однородным.

Доказательство этих утверждений можно найти в [26] (лемма 8.12.1), [215; 221], см. также ссылки в [130] (с. 535). Для компактных двухточечно-однородных пространств (т. е. пространств типов 2–6) группа G компактна, а для остальных двухточечно-однородных римановых пространств она некомпактна.

Следующие два утверждения характеризуют двухточечно-однородные пространства с помощью оценок секционной кривизны.

Теорема 1.2 (М. Бергер, [110]). *Пусть M — полное односвязное четномерное риманово пространство, секционная кривизна которого $\varkappa$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{1}{4} \leqslant \varkappa \leqslant 1 \tag{1.1}$$

и диаметр которого равен π. Тогда M изометрично риманову симметрическому пространству ранга один, которое является в силу теоремы 1.1 двухточечно-однородным.

Теорема 1.3 ([110]). *Пусть M — полное односвязное риманово пространство, секционная кривизна которого $\varkappa$ удовлетворяет неравенству* (1.1). *Тогда либо M гомеоморфно сфере, либо изометрично риманову симметрическому пространству ранга один, которое снова является двухточечно-однородным.*

В последующих параграфах данной главы описаны модели всех компактных двухточечно-однородных римановых пространств и пространства $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$. Известны также модели пространств $\mathbf{H}^n(\mathbb{C})$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{H})$. Автору неизвестно, описана ли где-либо модель для пространства $\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)$ или нет.

Напомним, что *рангом* $\operatorname{rk}\mathfrak{g}'$ *полупростой алгебры Ли* $\mathfrak{g}'$ (комплексной или вещественной) называется размерность ее максимальной коммутативной подалгебры. Ранг $\operatorname{rk}\mathfrak{g}'$ совпадает с минимальной коразмерностью Ad_G-орбит. Орбиты такой коразмерности образуют в $\mathfrak{g}'$ открытое плотное множество.

§ 1.2. Специальное разложение алгебры Ли инфинитезимальных изометрий двухточечно-однородных римановых пространств

Пусть Q — компактное двухточечно-однородное риманово пространство (т. е. пространство одного из типов 2–6), G — компонента единицы его группы изометрий, а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in Q$ (индекс x_0 будет часто опускаться в дальнейшем) и пусть K — стационарная подгруппа группы G, соответствующая этой точке, а $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ ее алгебра Ли. Все геодезические пространства Q замкнуты[1] и по теореме 1.1 имеют одинаковую длину $2\operatorname{diam} Q$, где $\operatorname{diam} Q$ обозначает максимальное расстояние между двумя точками пространства Q, т. е. его диаметр. Положим $R = 2\operatorname{diam} Q/\pi$ для пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ и $R = \operatorname{diam} Q/\pi$ для остальных двухточечно-однородных римановых пространств. Тогда максимальная секционная кривизна этих пространств равна R^{-2}, а минимальная секционная кривизна пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$, $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$, $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ равна $(2R)^{-2}$ [130].

Обозначим через $\rho(x,y)$ расстояние между точками $x, y \in Q$ и пусть $\rho_\gamma(x,y)$ — длина гладкой кривой γ, соединяющей точки x и y. Для замкнутой кривой γ обозначим через $\rho_\gamma(x,y)$ длину ее кратчайшего сегмента между точками x и y. Для точки $x \in Q$ подмножество $A_x \subset Q$, состоящее из всех точек y, для которых $\rho(x,y) = \operatorname{diam} Q$, называется *антиподальным многообразием* для x. Для сферы $\mathbf{S}^n$ многообразие A_x состоит из одной точки, для пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{K})$ многообразие A_x изометрично $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$. Для пространства $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ многообразие A_x изометрично $\mathbf{S}^8$ [130; 131].

Предложение 1.1. Пусть γ — замкнутая геодезическая, соединяющая точки x_0 и $x_1 \in \gamma$, так что $\rho_\gamma(x_1, x_0) = \operatorname{diam} Q$. Тогда

1) $\rho_\gamma(x_0, x) = \rho(x_0, x)$ для любой точки $x \in \gamma$, в частности, $x_1 \in A_{x_0}$;

2) если геодезическая $\gamma_1 \neq \gamma$ соединяет x_0 с другой точкой $x \in \gamma$, то $x = x_1$;

3) если $x \in \gamma$ и $0 < \rho(x_0, x) < \operatorname{diam} Q$, то подгруппа K_0 группы G, состоящая из всех изометрий, сохраняющих точки x_0 и x, сохраняет

[1] Помимо компактных двухточечно-однородных римановых пространств, существуют и другие римановы пространства, для которых все геодезические замкнуты [9; 45].

все точки геодезической γ; таким образом, K_0 не зависит от выбора x при выполнении условия $0 < \rho(x_0, x) < \operatorname{diam} Q$.

Доказательство. На протяжении всего доказательства мы используем тот факт, что в полном связном римановом пространстве расстояние между любой парой точек реализуется некоторой геодезической и, наоборот, любая кусочно-гладкая кривая, реализующая это расстояние, является геодезической [26; 46].

Пусть $x_2 \in A_{x_0}$. Тогда существует геодезическая γ', соединяющая точки x_0 и x_2, такая что $\rho_{\gamma'}(x_0, x_2) = \rho(x_0, x_2) = \operatorname{diam} Q$. По теореме 1.1 существует изометрия $q \in K$, переводящая геодезическую γ' в γ. Поэтому справедливо равенство

$$\operatorname{diam} Q = \rho(x_0, x_2) = \rho_{\gamma'}(x_0, x_2) = \rho(x_0, qx_2) = \rho_\gamma(x_0, qx_2).$$

Отсюда следует $qx_2 = x_1$ и, таким образом, $\rho(x_0, x_1) = \rho_\gamma(x_0, x_1) = \operatorname{diam} Q$.

Предположим, что $x \in \gamma$ и $\rho_\gamma(x_0, x) < \operatorname{diam} Q$, но $\rho(x_0, x) < \rho_\gamma(x_0, x)$. Пусть расстояние между точками x_0 и x реализуется геодезической $\widetilde{\gamma}$. Тогда кривая, состоящая из геодезической $\widetilde{\gamma}$ и интервала геодезической γ между точками x и x_1, имеет длину меньше чем $\operatorname{diam} Q$, невозможность чего доказывает первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение. Предположение $\rho_{\gamma_1}(x_0, x) < \rho_\gamma(x_0, x)$ противоречит уже доказанному первому утверждению. Ввиду эквивалентности всех геодезических обратное неравенство $\rho_{\gamma_1}(x_0, x) > \rho_\gamma(x_0, x)$ также невозможно. Отсюда $\rho_{\gamma_1}(x_0, x) = \rho_\gamma(x_0, x)$. Если $x \neq x_1$, то существует ломаная кривая, состоящая из двух геодезических сегментов и соединяющая точки x_0 и x_1 длины $\operatorname{diam} Q$. Это дает $\rho(x_0, x_1) < \operatorname{diam} Q$, что противоречит первому утверждению теоремы. Поэтому $x = x_1$.

Докажем последнее утверждение. Пусть $q \in K_0$, тогда изометрия q переводит сегмент $\widehat{\gamma}$ геодезической γ, соединяющий точки x_0 и x, в геодезический сегмент, соединяющий те же точки. Но ввиду второго утверждения теоремы не существует такого геодезического сегмента, кроме $\widehat{\gamma}$ и $\gamma \backslash \widehat{\gamma}$. Поскольку эти сегменты имеют различные длины, получаем $q(\widehat{\gamma}) = \widehat{\gamma}$. По тем же причинам справедливо равенство $q(\gamma \backslash \widehat{\gamma}) = \gamma \backslash \widehat{\gamma}$, откуда следует $q(\gamma) = \gamma$.

Пусть γ_{K_0} — подмножество геодезической γ, состоящее из всех K_0-неподвижных точек. Непрерывность K_0-действия на пространстве Q влечет замкнутость множества γ_{K_0}. Любая геодезическая $\widetilde{\gamma}$ реализует строгий минимум длин кривых, соединяющих любые две достаточно

близкие точки кривой $\widetilde{\gamma}$ [46]. Поскольку группа K_0 сохраняет геодезическую γ, то множество γ_{K_0} является открытым подмножеством в γ. Отсюда $\gamma_{K_0} = \gamma$, что завершает доказательство. ■

Форма Киллинга $\mathrm{Kil}_{\mathfrak{g}'}(X, Y)$ на произвольной алгебре Ли $\mathfrak{g}'$ определяется как след отображения $Z \to [X, [Y, Z]]$, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}'$.

Поскольку пространство Q симметрическое, то в алгебре $\mathfrak{g}$ существует дополнительное по отношению к подалгебре $\mathfrak{k}$ подпространство $\mathfrak{p}$, такое что $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. Подпространство $\mathfrak{p}$ можно естественно отождествить с касательным пространством $T_{x_0}Q$. При этом отождествлении ограничение формы Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$ на пространство $\mathfrak{p}$ и скалярное произведение на $T_{x_0}Q$ пропорциональны. В частности, разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ однозначно определяется точкой x_0. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение на алгебре $\mathfrak{g}$, пропорциональное ее форме Киллинга и такое, что его ограничение на подпространство $\mathfrak{p} \cong T_{x_0}Q$ совпадает с ограничением римановой метрикой g на $T_{x_0}Q$. Включения

$$[\mathfrak{p}, [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}]] \subset \mathfrak{k}, \ [\mathfrak{p}, [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]] \subset \mathfrak{p}$$

и определение формы Киллинга влекут ортогональность пространств $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{k}$ друг другу относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Из результатов [53; 130] можно извлечь следующее ключевое утверждение.

Предложение 1.2. Алгебра $\mathfrak{g}$ допускает следующее разложение в прямую сумму подпространств:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda}, \tag{1.2}$$

такое что $\dim \mathfrak{a} = 1$, λ — ненулевая линейная форма на подпространстве $\mathfrak{a}$, $\dim \mathfrak{k}_\lambda = \dim \mathfrak{p}_\lambda = q_1$, $\dim \mathfrak{k}_{2\lambda} = \dim \mathfrak{p}_{2\lambda} = q_2$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$; здесь $q_1, q_2 \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, подалгебра $\mathfrak{a}$ является максимальной коммутативной подалгеброй в подпространстве $\mathfrak{p}$ и соответствует касательному вектору к геодезической $\widetilde{\gamma}$ в точке x_0. Все слагаемые в (1.2) $\mathrm{ad}_{\mathfrak{k}_0}$-инвариантны, и справедливы следующие включения:

$$\begin{gathered}
[\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_\lambda] \subset \mathfrak{k}_\lambda, \ [\mathfrak{a}, \mathfrak{k}_\lambda] \subset \mathfrak{p}_\lambda, \ [\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_{2\lambda}] \subset \mathfrak{k}_{2\lambda}, \\
[\mathfrak{a}, \mathfrak{k}_{2\lambda}] \subset \mathfrak{p}_{2\lambda}, \ [\mathfrak{a}, \mathfrak{k}_0] = 0, [\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{p}_\lambda] \subset \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{a}, \\
[\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{k}_\lambda] \subset \mathfrak{k}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_0, \ [\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{p}_\lambda] \subset \mathfrak{k}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_0, \ [\mathfrak{k}_{2\lambda}, \mathfrak{k}_{2\lambda}] \subset \mathfrak{k}_0, \ [\mathfrak{p}_{2\lambda}, \mathfrak{p}_{2\lambda}] \subset \mathfrak{k}_0, \\
[\mathfrak{k}_{2\lambda}, \mathfrak{p}_{2\lambda}] \subset \mathfrak{a}, \ [\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{k}_{2\lambda}] \subset \mathfrak{k}_\lambda, \\
[\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{p}_{2\lambda}] \subset \mathfrak{p}_\lambda, \ [\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{k}_{2\lambda}] \subset \mathfrak{p}_\lambda, \\
[\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{p}_{2\lambda}] \subset \mathfrak{k}_\lambda.
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Более того, для любого базиса $e_{\lambda,i}$, $i = 1, \ldots, q_1$, пространства $\mathfrak{p}_\lambda$ и любого базиса $e_{2\lambda,i}$, $i = 1, \ldots, q_2$, пространства $\mathfrak{p}_{2\lambda}$ существуют базисы $f_{\lambda,i}$, $i = 1, \ldots, q_1$, и $f_{2\lambda,i}$, $i = 1, \ldots, q_2$, в пространствах $\mathfrak{k}_\lambda$ и $\mathfrak{k}_{2\lambda}$ соответственно, такие что:

$$\begin{gathered}[Z, e_{\lambda,i}] = -\lambda(Z) f_{\lambda,i},\ [Z, f_{\lambda,i}] = \lambda(Z) e_{\lambda,i},\ i = 1, \ldots, q_1, \\ [Z, e_{2\lambda,i}] = -2\lambda(Z) f_{2\lambda,i},\ [Z, f_{2\lambda,i}] = 2\lambda(Z) e_{2\lambda,i},\ i = 1, \ldots, q_2, \forall Z \in \mathfrak{a}.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Если вектор $\Lambda \in \mathfrak{a}$ удовлетворяет условию $\langle \Lambda, \Lambda \rangle = R^2$, то $|\lambda(\Lambda)| = \dfrac{1}{2}$.

Неотрицательные целые числа q_1 и q_2 называются *кратностями пространства* Q. Тройка (q_1, q_2, R) характеризует Q однозначно, с точностью до перестановки $\mathbf{S}^n \leftrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$. Для пространств $\mathbf{S}^n$ и $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ мы имеем $q_1 = 0$, $q_2 = n - 1$; для пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$: $q_1 = 2n - 2$, $q_2 = 1$; для пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$: $q_1 = 4n - 4$, $q_2 = 3$ и для пространства $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$: $q_1 = 8$, $q_2 = 7$. Для пространств $\mathbf{S}^n$ и $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ можно было бы наоборот считать, что $q_1 = n - 1, q_2 = 0$. Наш выбор соответствует изометриям $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbf{S}^2$, $\mathbf{P}^1(\mathbb{H}) \cong \mathbf{S}^4$.

Замечание 1.1. Пространство $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda}$ порождает в пространстве Q вполне геодезическое подмногообразие постоянной секционной кривизны R^{-2} и размерности $q_2 + 1$. Для пространств $\mathbf{S}^n, \mathbf{P}^n(\mathbb{C}), \mathbf{P}^n(\mathbb{H}), \mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ это подмногообразие является сферой. Для пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ это подмногообразие совпадает со всем $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$. При $q_1 \neq 0$ элемент Λ и произвольный ненулевой элемент пространства $\mathfrak{p}_\lambda$ порождают в Q вполне геодезическое двумерное подмногообразие постоянной кривизны $(2R)^{-2}$.

Пусть вектора $e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}$, $i = 1, \ldots, q_1$, и $e_{2\lambda,i}, f_{2\lambda,i}$, $i = 1, \ldots, q_2$, такие, как в предложении 1.2. Выберем вектор $\Lambda \in \mathfrak{a}$ так, что $\lambda(\Lambda) = \dfrac{1}{2}$. Следующее предложение легко получается из предложения 1.2.

Предложение 1.3. Пространства $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_\lambda$, $\mathfrak{k}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda}$ попарно ортогональны. Кроме того,

$$\begin{gathered}\langle e_{\lambda,i}, e_{\lambda,j} \rangle = \langle f_{\lambda,i}, f_{\lambda,j} \rangle,\ \langle e_{\lambda,i}, f_{\lambda,j} \rangle = \langle f_{\lambda,i}, e_{\lambda,j} \rangle = 0, \\ i, j = 1, \ldots, q_1, \\ \langle e_{2\lambda,i}, e_{2\lambda,j} \rangle = \langle f_{2\lambda,i}, f_{2\lambda,j} \rangle,\ \langle e_{2\lambda,i}, f_{2\lambda,j} \rangle = \langle f_{2\lambda,i}, e_{2\lambda,j} \rangle = 0, \\ i, j = 1, \ldots, q_2.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Доказательство. Из Ad_G-инвариантности метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ следует симметричность оператора $T_\Lambda : X \to [\Lambda, [\Lambda, X]]$ в пространстве $\mathfrak{g}$.

Этот оператор имеет следующие собственные подпространства $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{k}_\lambda\oplus\mathfrak{p}_\lambda$, $\mathfrak{k}_{2\lambda}\oplus\mathfrak{p}_{2\lambda}$, соответствующие собственным значениям 0, $-\lambda^2(\Lambda) = -\frac{1}{4}$, $-4\lambda^2(\Lambda) = -1$ соответственно. Поэтому эти подпространства попарно ортогональны. Из Ad_G-инвариантности метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и равенства (1.4) следует, что

$$\lambda(\Lambda)\langle e_{\lambda,i}, e_{\lambda,j}\rangle = \langle[\Lambda, f_{\lambda,i}], e_{\lambda,j}\rangle = -\langle f_{\lambda,i}, [\Lambda, e_{\lambda,j}]\rangle = \lambda(\Lambda)\langle f_{\lambda,i}, f_{\lambda,j}\rangle.$$

Это доказывает первое равенство из (1.5). Ортогональность $\mathfrak{p}\perp\mathfrak{k}$ влечет второе и четвертое равенства из (1.5). Третье равенство получается аналогично первому. ■

Тождество Якоби и формула (1.4) дают $[Z, [e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}]] = 0$. Поэтому из соотношения (1.3) вытекают включения $[e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}]\in\mathfrak{a}$. Пусть $[e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}] =: \varkappa_i\Lambda$. Ad_G-инвариантность метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ влечет равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\Lambda, [e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}]\rangle + \langle[e_{\lambda,i}, \Lambda], f_{\lambda,i}\rangle = \\ &= \varkappa_i\langle\Lambda,\Lambda\rangle + \lambda(\Lambda)\langle f_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}\rangle, \end{aligned}$$

из которых, используя (1.5), мы получаем:

$$\varkappa_i = -\frac{\lambda(\Lambda)}{\langle\Lambda,\Lambda\rangle}\langle f_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}\rangle = -\frac{\lambda(\Lambda)}{\langle\Lambda,\Lambda\rangle}\langle e_{\lambda,i}, e_{\lambda,i}\rangle.$$

Аналогично получается:

$$[e_{2\lambda,i}, f_{2\lambda,i}] = -\frac{2\lambda(\Lambda)}{\langle\Lambda,\Lambda\rangle}\langle f_{2\lambda,i}, f_{2\lambda,i}\rangle\Lambda = \frac{2\lambda(\Lambda)}{\langle\Lambda,\Lambda\rangle}\langle e_{2\lambda,i}, e_{2\lambda,i}\rangle\Lambda.$$

Используя свободу в предложении 1.2, выберем базис $\{e_{\lambda,i}\}_{i=1}^{q_1}$ в пространстве $\mathfrak{p}_\lambda$ и базис $\{e_{2\lambda,j}\}_{j=1}^{q_2}$ в пространстве $\mathfrak{p}_{2\lambda}$ ортогональными с нормами их элементов, равными R. Тогда элементы $\Lambda, e_{\lambda,i}, e_{2\lambda,j}$, $i = 1,\ldots,q_1$, $j = 1,\ldots,q_2$, образуют ортогональный базис в пространстве $\mathfrak{p}$, а элементы $f_{\lambda,i}$, $f_{2\lambda,j}$, $i = 1,\ldots,q_1$, $j = 1,\ldots,q_2$, образуют ортогональный базис в пространстве $\mathfrak{k}_\lambda\oplus\mathfrak{k}_{2\lambda}$ согласно предложению 1.3. Заметим, что из (1.5) следуют равенства $\langle f_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}\rangle = R^2$, $i=1,\ldots,q_1$, $\langle f_{2\lambda,j}, f_{2\lambda,j}\rangle = R^2$, $j = 1,\ldots,q_2$.

Предложение 1.4.

1) Соотношения (1.4) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\begin{gathered}
[\Lambda, e_{\lambda,i}] = -\frac{1}{2} f_{\lambda,i},\ [\Lambda, f_{\lambda,i}] = \frac{1}{2} e_{\lambda,i},\ [e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}] = -\frac{1}{2}\Lambda, \\
\langle e_{\lambda,i}, e_{\lambda,j}\rangle = \langle f_{\lambda,i}, f_{\lambda,j}\rangle = \delta_{ij} R^2,\ i,j = 1, \ldots, q_1, \\
[\Lambda, e_{2\lambda,i}] = -f_{2\lambda,i},\ [\Lambda, f_{2\lambda,i}] = e_{2\lambda,i},\ [e_{2\lambda,i}, f_{2\lambda,i}] = -\Lambda, \\
\langle e_{2\lambda,i}, e_{2\lambda,j}\rangle = \langle f_{2\lambda,i}, f_{2\lambda,j}\rangle = \delta_{ij} R^2,\ i,j = 1, \ldots, q_2,\ \langle \Lambda, \Lambda\rangle = R^2.
\end{gathered} \tag{1.6}$$

2) Пусть X и Y — некоторые элементы базиса

$$\Lambda, e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}, e_{2\lambda,j}, f_{2\lambda,j},\ i = 1, \ldots, q_1, j = 1, \ldots, q_2, \tag{1.7}$$

пространства $\mathfrak{m} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda}$. Обозначим через $X'_{\mathfrak{m}}$ проекцию элемента $X' \in \mathfrak{g}$ на пространство $\mathfrak{m}$ по отношению к разложению $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{m}$. Разложим элемент $[X, Y]_{\mathfrak{m}}$ по базису (1.7). Тогда его координаты, соответствующие элементам X и Y, равны нулю.

Доказательство. Соотношения (1.6) очевидны. Ввиду включений из предложения 1.2 достаточно доказать второе утверждение предложения только в следующих двух случаях: a) $X = e_{\lambda,i}$, $Y = f_{2\lambda,j}$ и b) $X = f_{\lambda,i}$, $Y = f_{2\lambda,j}$. Рассмотрим случай a). Из (1.3) следует, что $[f_{2\lambda,j}, e_{\lambda,i}] \in \mathfrak{p}_\lambda$. Ad_G-инвариантность метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ дает $\langle [f_{2\lambda,j}, e_{\lambda,i}], e_{\lambda,i}\rangle = -\langle e_{\lambda,i}, [f_{2\lambda,j}, e_{\lambda,i}]\rangle$, $i = 1, \ldots, q_1, j = 1, \ldots, q_2$, и поэтому $[f_{2\lambda,j}, e_{\lambda,i}] \perp e_{\lambda,i}$. Учитывая ортогональность базиса $\{e_{\lambda,i}\}_{i=1}^{q_1}$ пространства $\mathfrak{p}_\lambda$, мы получаем второе утверждение предложения в случае a). Случай b) рассматривается аналогично. ■

В следующем предложении собрана полезная информация об алгебрах Ли $\mathfrak{g}$, соответствующих двухточечно-однородным римановым пространствам. Эту информацию можно найти в [18; 23; 59; 130].

Предложение 1.5. Некомпактные двухточечно-однородные пространства типов 7,8,9,10 аналогичны компактным двухточечно-однородным пространствам типов 2(3),4,5,6 соответственно. В частности, это означает, что алгебры $\mathfrak{g}$ групп изометрий аналогичных пространств являются различными вещественными формами одной и той же простой (за исключением случаев $\mathbf{S}^3, \mathbf{P}^3(\mathbb{R}), \mathbf{H}^3(\mathbb{R})$, см. ниже) комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$. Переход от одной такой вещественной формы к другой

осуществляется умножением подпространства $\mathfrak{p}$ из разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ на мнимую единицу $\mathbf{i}$ (или на $-\mathbf{i}$).[2]

Для пространств $\mathbf{S}^{2n}, \mathbf{P}^{2n}(\mathbb{R}), \mathbf{H}^{2n}(\mathbb{R})$, $n \geqslant 1$ имеем $\mathfrak{g}(\mathbb{C}) = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}) = \mathfrak{B}_n$; для пространств $\mathbf{S}^{2n-1}, \mathbf{P}^{2n-1}(\mathbb{R}), \mathbf{H}^{2n-1}(\mathbb{R})$, $n \geqslant 3$: $\mathfrak{g}(\mathbb{C}) = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) = \mathfrak{D}_n$; для пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{C}), \mathbf{H}^n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$: $\mathfrak{g}(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}) = \mathfrak{A}_n$; для пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{H}), \mathbf{H}^n(\mathbb{H})$, $n \geqslant 2$: $\mathfrak{g}(\mathbb{C}) = \mathfrak{sp}(2(n+1), \mathbb{C}) = \mathfrak{C}_{n+1}$; для пространств $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a), \mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)$: $\mathfrak{g}(\mathbb{C}) = \mathfrak{f}_4$.

Здесь символы $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n, \mathfrak{C}_n, \mathfrak{D}_n$ обозначают четыре серии простых комплексных алгебр Ли рангов $n \in \mathbb{N}$, алгебра Ли $\mathfrak{f}_4$ ранга 4 является одной из пяти исключительных простых комплексных алгебр Ли[3]. Их компактные вещественные формы имеют тот же ранг n. Для пространств $\mathbf{S}^3, \mathbf{P}^3(\mathbb{R}), \mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ справедливы равенства $\mathfrak{g}(\mathbb{C}) = \mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ (прямая сумма алгебр Ли). Их некомпактная вещественная форма $\mathfrak{so}(1,3)$, соответствующая пространству $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$, проста, а компактная вещественная форма, соответствующая пространствам $\mathbf{S}^3, \mathbf{P}^3(\mathbb{R})$, простой не является: $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.

Обозначим через $S(\mathfrak{g})^G \equiv S(\mathfrak{g})^I$ подалгебру Ad_G-инвариантных элементов в коммутативной симметрической алгебре $S(\mathfrak{g})$ для пространства $\mathfrak{g}$ (см. п. 2.1.2 ниже). Алгебра $S(\mathfrak{A}_n)^I$ свободно порождена многочленами степеней: $2, 3, 4 \ldots n+1$; алгебры $S(\mathfrak{B}_n)^I$ и $S(\mathfrak{C}_n)^I$ многочленами степеней: $2, 4, 6 \ldots 2n$; алгебры $S(\mathfrak{D}_n)^I$ многочленами степеней: $2, 4, 6 \ldots 2n-2, n$; наконец, алгебра $S(\mathfrak{f}_4)^I$ порождена многочленами степеней: $2, 6, 8, 12$.

Ввиду естественного изоморфизма $(\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$ алгебра $S(\mathfrak{g})$ изоморфна алгебре $\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ всех полиномиальных функций на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Предыдущий абзац, таким образом, дает информацию о степенях независимых образующих алгебр инвариантов Ad_G^*-действий, где группа G пробегает простые комплексные группы Ли или их вещественные формы.

Подалгебра $\mathfrak{a}'$ вещественной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}'$ называется $\mathbb{R}$-*диагонализуемой*, если все операторы вида ad_x, $x \in \mathfrak{a}'$ в некотором базисе алгебры $\mathfrak{g}'$ записываются диагональными матрицами. *Вещественным рангом* $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}\, \mathfrak{g}'$ алгебры $\mathfrak{g}'$ называется размерность некоторой ее максимальной $\mathbb{R}$-диагонализуемой подалгебры $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{g}'$ [23; 130]. Вещественный ранг компактной полупростой алгебры Ли, в частности алгебр

[2]Фактически это унитарный трюк Вейля из теории представлений.

[3]Остальные исключительные простые комплексные алгебры Ли обычно обозначаются $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$, где индексы равны их рангам. Их компактные вещественные формы обозначаются так же.

локальных изометрий, соответствующих пространствам типов 2 – 6, равен нулю. Вещественный ранг алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующей некомпактному неплоскому двухточечно-однородному риманову пространству, равен единице, а подалгебра $\mathbf{i}\mathfrak{a}$ является одной из соответствующих диагонализуемых подалгебр, где подалгебра $\mathfrak{a}$ определена в предложении 1.2.

Известно, что любой дискретный нормальный делитель D любой связной топологической группы G' лежит в ее центре ([63], лекция 9) и для любой связной группы Ли G существует ее универсальное накрытие $\widetilde{\pi}\colon \widetilde{G} \to G$ связной и односвязной группой Ли $\widetilde{G}$. Поэтому ядро $\widetilde{\pi}^{-1}(e)$ этого накрытия лежит в центре группы $\widetilde{G}$ и орбиты присоединенных (коприсоединенных) действий групп $\widetilde{G}$ и $G \cong \widetilde{G}/\widetilde{\pi}^{-1}(e)$ совпадают. Резюмируем эти факты в следующем предложении для последующих ссылок.

Предложение 1.6. Пусть G' и G'' — связные локально изоморфные группы Ли. Тогда $\mathrm{Ad}_{G'}$-орбиты совпадают с $\mathrm{Ad}_{G''}$-орбитами, а $\mathrm{Ad}^*_{G'}$-орбиты совпадают с $\mathrm{Ad}^*_{G''}$-орбитами. Если G_1 — группа Ли (не обязательно связная) локально изоморфная группе G', то каждая Ad_{G_1}-орбита состоит из $\mathrm{Ad}_{G'}$-орбит, диффеоморфных друг другу. То же самое справедливо и для $\mathrm{Ad}^*_{G_1}$-орбит.

§ 1.3. Модели классических компактных двухточечно-однородных римановых пространств

1.3.1. Модель пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$

Пусть $\mathbb{H}$ — алгебра кватернионов над полем $\mathbb{R}$ со стандартным базисом $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, где $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$. *Кватернионное сопряжение* действует по формулам: $\overline{x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + t\mathbf{k}} = x - y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - t\mathbf{k}$, $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Обозначим $\mathbb{H}^{n+1}$ — правое кватернионное пространство, а $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ — координаты на нем. *Кватернионное проективное пространство* $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$ является фактор-пространством пространства $\mathbb{H}^{n+1}\backslash(0)$ по отношению к умножению справа на элементы мультипликативной группы $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}\backslash(0)$. Набор кватернионов $(z_1\colon \ldots \colon z_{n+1})$, заданный с точностью до умножения справа на произвольные элементы группы $\mathbb{H}^*$, является однородными координатами элемента[4] $\pi_1(\mathbf{z})$ пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$,

[4]Чтобы отличать точку $\mathbf{x} \in M$ от ее координат, будем выделять ее в дальнейшем жирным шрифтом.

где $\pi_1\colon \mathbb{H}^{n+1}\backslash(0) \to \mathbf{P}^n(\mathbb{H})$ обозначает каноническую проекцию. Пусть $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := \sum\limits_{i=1}^{n+1} \overline{x}_i y_i$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{H}^{n+1}$ — стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{H}^{n+1}$. Пусть

$$\mathbf{z} \in \mathbb{H}^{n+1}\backslash(0), \quad \xi_i \in T_{\mathbf{z}}\mathbb{H}^{n+1},\ \zeta_i = \pi_{1*}\xi_i \in T_{\pi_1(\mathbf{z})}\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})\right), \quad i = 1, 2.$$

Метрика

$$\widetilde{g}|_{\mathbf{z}}(\zeta_1, \zeta_2) = \left(\langle \xi_1, \xi_2\rangle\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle - \langle \xi_1, \mathbf{z}\rangle\langle \mathbf{z}, \xi_2\rangle\right)/\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle^2 \tag{1.8}$$

на пространстве $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$ является аналогом метрики постоянной секционной кривизны на пространстве $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ (см. п. 1.3.3) и метрики постоянной голоморфной секционной кривизны на пространстве $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ (см. п. 1.3.2). Вещественная часть метрики (1.8) является римановой метрикой на пространстве $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$:

$$g = 4R^2 \operatorname{Re} \widetilde{g}. \tag{1.9}$$

Нормировочный множитель $4R^2$ в (1.9) выбран исходя из следующих соображений. Пространство $\mathbf{P}^1(\mathbb{H})$ с этой метрикой является сферой $\mathbf{S}^4$ со стандартной метрикой постоянной секционной кривизны R^{-2}. Действительно, рассмотрим гомеоморфизм $\nu\colon \mathbf{P}^1(\mathbb{H}) \to \overline{\mathbb{H}} \cong \mathbf{S}^4$, $\nu(z_1, z_2) = z_1 (z_2)^{-1} = z \in \overline{\mathbb{H}}$, где $\overline{\mathbb{H}}$ — кватернионное пространство, пополненное бесконечно удаленной точкой. Для $n = 1$ формула (1.9) принимает вид

$$g = 4R^2 \frac{(d\overline{z}_1 dz_1 + d\overline{z}_2 dz_2)(|z_1|^2 + |z_2|^2) - (d\overline{z}_1 \cdot z_1 + d\overline{z}_2 \cdot z_2)(\overline{z}_1 dz_1 + \overline{z}_2 dz_2)}{(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2}. \tag{1.10}$$

С помощью формулы $|z_2|^2 dz_1 - z_1\overline{z}_2 dz_2 = |z_2|^2 (dz) z_2$ простые вычисления приводят выражение (1.10) к виду

$$g = \frac{4R^2 dz d\overline{z}}{\left(1 + |z|^2\right)^2}$$

метрики постоянной секционной кривизны R^{-2} на сфере $\mathbf{S}^4$ (см. п. 1.3.3 ниже).

Пусть $B_M(\rho)$ — геодезический шар радиуса ρ, $\mathbf{S}_M(\rho)$ — его граница (геодезическая сфера радиуса ρ) в римановом пространстве M,

а $\mathrm{vol}(\cdot)$ — соответствующая функция объема, порожденная метрикой. Известно [31; 131], что

$$\mathrm{vol}\left(B_{\mathbf{P}^n(\mathbb{H})}(\rho)\right) = \frac{\pi^{2n}(2R)^{4n}}{(2n+1)!}\sin^{4n}\left(\frac{\rho}{2R}\right)\left(1+2n\cos^2\left(\frac{\rho}{2R}\right)\right).$$

Отсюда

$$\mathrm{vol}\left(\mathbf{S}_{\mathbf{P}^n(\mathbb{H})}(\rho)\right) = \frac{d}{d\rho}\,\mathrm{vol}\left(B_{\mathbf{P}^n(\mathbb{H})}(\rho)\right) =$$

$$= \frac{\pi^{2n}(2R)^{4n-1}}{4(2n-1)!}\sin^{4(n-1)}\left(\frac{\rho}{2R}\right)\sin^3\left(\frac{\rho}{R}\right),$$

$$\mathrm{vol}\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})\right) = \mathrm{vol}\left(B_{\mathbf{P}^n(\mathbb{H})}(\pi R)\right) = \frac{\pi^{2n}(2R)^{4n}}{(2n+1)!}.$$

Левое действие группы $\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n+1)$, состоящей из кватернионных матриц A размера $(n+1)\times(n+1)$, таких что $\overline{A}^T A = E$, сохраняет скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в пространстве $\mathbb{H}^{n+1}$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n+1) = (2n+3)(n+1)$. Если записать кватернионные координаты в пространстве $\mathbb{H}^{n+1}$ как пары комплексных чисел, то группа $\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n+1)$ отождествляется с симплектической группой $\mathrm{Sp}(n+1)$.

Левое и правое умножения всегда коммутируют, поэтому левое действие группы $\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n+1)$ корректно определено на пространстве $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$. Очевидно, оно транзитивно и сохраняет метрику g. Стационарная подгруппа точки пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$ с однородными координатами $(1,0,\ldots,0)$ является группой $\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n)\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(1)$, где группа $\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n)$ действует на последние n координат, а группа $\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(1)$ действует умножением слева всех однородных координат на кватернион с единичной нормой. Все стационарные подгруппы для точек однородного пространства сопряжены, и потому изоморфны. Таким образом:

$$\mathbf{P}^n(\mathbb{H}) = \mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n+1)/(\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n)\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(1)).$$

Алгебра Ли $u_{\mathbb{H}}(n+1)$ состоит из кватернионных матриц A размера $(n+1)\times(n+1)$, таких что $\overline{A}^T = -A$. Пусть E_{kj} — матрица размера $(n+1)\times(n+1)$ с единственным ненулевым элементом, равным 1,

расположенным на пересечении k-ой строки и j-го столбца. Элементы

$$\begin{aligned}\Psi_{kj} &= \frac{1}{2}(E_{kj} - E_{jk}),\ 1 \leqslant k < j \leqslant n+1,\ \Upsilon_{kj} = \frac{\mathbf{i}}{2}(E_{kj} + E_{jk}),\\ \Omega_{kj} &= \frac{\mathbf{j}}{2}(E_{kj} + E_{jk}),\ \Theta_{kj} = \frac{\mathbf{k}}{2}(E_{kj} + E_{jk}),\ 1 \leqslant k \leqslant j \leqslant n+1,\end{aligned} \tag{1.11}$$

образуют базис алгебры $\mathfrak{u}_{\mathbb{H}}(n+1)$. Коммутационные соотношения для этих элементов имеют вид:

$$\begin{aligned}[\Psi_{kj}, \Psi_{ml}] &= \frac{1}{2}\left(\delta_{jm}\Psi_{kl} - \delta_{km}\Psi_{jl} + \delta_{kl}\Psi_{jm} - \delta_{jl}\Psi_{km}\right),\\ [\Psi_{kj}, \Upsilon_{ml}] &= \frac{1}{2}\left(\delta_{jm}\Upsilon_{kl} - \delta_{km}\Upsilon_{jl} + \delta_{lj}\Upsilon_{km} - \delta_{lk}\Upsilon_{jm}\right),\\ [\Upsilon_{kj}, \Upsilon_{ml}] &= \frac{1}{2}\left(\delta_{jm}\Psi_{lk} + \delta_{km}\Psi_{lj} + \delta_{kl}\Psi_{mj} + \delta_{jl}\Psi_{mk}\right),\\ [\Upsilon_{kj}, \Omega_{ml}] &= \frac{1}{2}\left(\delta_{jm}\Theta_{lk} + \delta_{km}\Theta_{lj} + \delta_{kl}\Theta_{mj} + \delta_{jl}\Theta_{mk}\right),\end{aligned} \tag{1.12}$$

плюс аналогичные соотношения, получаемые из последних трех циклической перестановкой $\Upsilon \to \Omega \to \Theta \to \Upsilon$, где $\Psi_{kj} = -\Psi_{jk}$, $\Psi_{kk} = 0$, $\Upsilon_{kj} = \Upsilon_{jk}$, $\Omega_{kj} = \Omega_{jk}$, $\Theta_{kj} = \Theta_{jk}$.

1.3.2. Модель пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$

Факторизуя пространство $\mathbb{C}^{n+1}\backslash(0)$ по действию мультипликативной группы $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash(0)$, получаем *комплексное проективное пространство* $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$. Пусть

$$\pi_1 \colon \mathbb{C}^{n+1}\backslash(0) \to \mathbf{P}^n(\mathbb{C})$$

— каноническая проекция, а

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n+1} \overline{x}_i y_i,\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}),\ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

— стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$.

Метрика $\widetilde{g}$ постоянной голоморфной секционной кривизны в пространстве $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ определяется той же формулой (1.8), как в пространстве $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$, где теперь $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash(0)$, $\xi_i \in T_{\mathbf{z}}\mathbb{C}^{n+1}$, $\zeta_i = \pi_{1*}\xi_i \in T_{\pi_1(\mathbf{z})}(\mathbf{P}^n(\mathbb{C}))$, $i = 1, 2$.

Риманова метрика g на пространстве $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ задается формулой:

$$g = 4R^2 \operatorname{Re} \widetilde{g}. \tag{1.13}$$

При $n = 2$ нетрудно проверить (как в п. 1.3.1), что гомеоморфизм $\tau\colon \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \to \overline{\mathbb{C}} \cong \mathbf{S}^2$, $\tau(z_1, z_2) = z_1 (z_2)^{-1} = z \in \overline{\mathbb{C}}$, переводит (1.13) в метрику

$$g = \frac{4R^2 dz d\overline{z}}{\left(1 + |z|^2\right)^2}$$

секционной кривизны R^{-2} на сфере $\mathbf{S}^2$ (см. п. 1.3.3 ниже).

Для комплексного проективного пространства справедливы формулы [31; 131]

$$\operatorname{vol}\left(B_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}(\rho)\right) = \frac{\pi^n (2R)^{2n}}{n!} \sin^{2n}\left(\frac{\rho}{2R}\right), \; 0 \leqslant \rho \leqslant \pi R,$$

$$\operatorname{vol}\left(\mathbf{S}_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}(\rho)\right) = \frac{d}{d\rho} \operatorname{vol}\left(B_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}(\rho)\right) =$$

$$= \frac{\pi^n (2R)^{2n-1}}{(n-1)!} \sin^{2(n-1)}\left(\frac{\rho}{2R}\right) \sin\left(\frac{\rho}{R}\right),$$

$$\operatorname{vol}\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})\right) = \operatorname{vol}\left(B_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}(\pi R)\right) = \frac{(4\pi R^2)^n}{n!}.$$

Левое действие группы $G = \mathrm{SU}(n+1)$ на пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ сохраняет скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и индуцирует действие группы $\mathrm{SU}(n+1)$ на пространстве $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$, сохраняющее метрики $\widetilde{g}$ и g.

Стационарной подгруппой, соответствующей точке пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ с однородными координатами $(1 : 0 : \ldots : 0)$, является группа $\mathrm{U}(n) = \mathrm{SU}(n)\mathrm{U}(1)$, где подгруппа $\mathrm{SU}(n)$ действует стандартным образом на последние n координат, а подгруппа $\mathrm{U}(1)$ действует умножением первой координаты на число $e^{\mathbf{i}\phi}$ и второй на число $e^{-\mathbf{i}\phi}$, $\phi \in R \mod 2\pi$. Таким образом, $\mathbf{P}^n(\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n)$.

Выберем базис для алгебры $\mathfrak{su}(n+1)$ в виде:

$$\Psi_{kj} = \frac{1}{2}(E_{kj} - E_{jk}), \; \Upsilon_{kj} = \frac{\mathbf{i}}{2}(E_{kj} + E_{jk}), 1 \leqslant k < j \leqslant n+1, \tag{1.14}$$

$$\Upsilon_k = \frac{\mathbf{i}}{2}(E_{11} - E_{kk}), \; 2 \leqslant k \leqslant n+1.$$

Коммутационные соотношения для этих элементов легко извлекаются из (1.12), принимая во внимание, что $\Upsilon_k = \frac{1}{2}(\Upsilon_{11} - \Upsilon_{kk})$ в обозначениях (1.11).

1.3.3. Модели пространств $\mathbf{S}^n$, $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$

Пусть теперь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Уравнение $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = R > 0$ определяет сферу $\mathbf{S}^n \cong \cong \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ радиуса R со стандартной метрикой. *Вещественное проективное пространство* $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ является фактор-пространством сферы $\mathbf{S}^n$ при отождествлении: $\mathbf{x} \sim -\mathbf{x}$.

Пусть

$$\Psi_{kj} = \frac{1}{2}(E_{kj} - E_{jk}),\ 1 \leqslant k < j \leqslant n+1, \tag{1.15}$$

— базис алгебры $\mathfrak{so}(n+1)$. Коммутационные соотношения для его элементов содержатся в (1.12).

Сферу $\mathbf{S}^n$ можно представить также в виде компактификации $\mathbb{R}^n \cup \cup \infty$ с метрикой

$$g_s = 4R^2 \sum_{i=1}^{n} dy_i^2 \Bigg/ \left(1 + \sum_{i=1}^{n} dy_i^2\right)^2, \tag{1.16}$$

где y_i — декартовы координаты в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Действительно, рассмотрим стереографическую проекцию сферы $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ из точки $\mathbf{x}' = (0,\ldots,0,-R)$ на подпространство $P_1 = = (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_{n+1} = 0)$. Пусть прямая, проходящая через точки $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbf{S}^n$, пересекает подпространство P_1 в точке $\widetilde{\mathbf{x}}$. Тогда эта проекция отображает точку $\mathbf{x}$ в точку $\widetilde{\mathbf{x}}$. Точка $\mathbf{x}'$ отображается в ∞. Пусть C обозначает экватор сферы, лежащий в плоскости P_1. Он состоит из неподвижных точек для данной проекции. Геодезическими сферы $\mathbf{S}^n$ являются большие окружности, которые при проектировании переходят в те евклидовы окружности на P_1, которые пересекают C в антиподальных точках, а также в (евклидовы) прямые, проходящие через $0 \in P_1$.

Простые вычисления приводят к формулам для прямого

$$\widetilde{x}_i = \frac{Rx_i}{R + x_{n+1}},\ i = 1,\ldots,n,\ \widetilde{r}^2 := \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i^2 = \frac{R - x_{n+1}}{R + x_{n+1}} R^2 \tag{1.17}$$

и обратного отображения:

$$x_i = \frac{2R^2\widetilde{x}_i}{R^2+\widetilde{r}^2},\ i=1,\dots,n,\ x_{n+1} = \frac{R^2-\widetilde{r}^2}{R^2+\widetilde{r}^2}R. \tag{1.18}$$

Ограничение евклидовой метрики $\sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\mathbf{S}^n$ при проектировании переходит в метрику

$$g_s = 4R^4 \sum_{i=1}^{n} d\widetilde{x}_i^2 \Big/ \left(R^2+\widetilde{r}^2\right)^2,$$

а подстановка $\widetilde{x}_i =: Ry_i$ ведет к (1.16).

Метрику (1.16) можно записать в сферической форме

$$g_s = 4R^2\left(dr^2 + r^2\widetilde{g}_s\right)/\left(1+r^2\right)^2,\ r^2 := \sum_{i=1}^{n} y_i^2, \tag{1.19}$$

где $\widetilde{g}_s$ — стандартная метрика на единичной сфере $\mathbf{S}^{n-1}$. Пусть $v = 2r/(1-r^2)$. Тогда

$$g_s = R^2\left(\frac{dv^2}{(1+v^2)^2} + \frac{v^2\widetilde{g}_s}{1+v^2}\right). \tag{1.20}$$

Данная форма метрики соответствует стереографической проекции сферы $\mathbf{S}^n$ из точки $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ на подпространство $P_2 = (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} = R)$, где vR — евклидово расстояние от текущей точки P_2 до фиксированной точки $\mathbf{x}'' = (0,\dots,0,R) \in \mathbf{S}^n$. Очевидно, что эта проекция является двукратным накрытием пространства P_2 с особенностями на сфере $\mathbf{S}^{n-1} = \mathbf{S}^n \cap P_1$, которая переходит в ∞. Евклидовы прямые в P_2 являются геодезическими метрики (1.20), поскольку они являются образами больших окружностей на $\mathbf{S}^n$. Пусть ρ — расстояние от текущей точки до точки $r = 0$ в метрике (1.19). Тогда

$$r = \mathrm{tg}(\frac{\rho}{2R}),\ v = \mathrm{tg}(\frac{\rho}{R}). \tag{1.21}$$

Формулы объема имеют вид [31]:

$$\mathrm{vol}\,(B_{\mathbf{S}^n}(\rho)) = \frac{2\pi^{n/2}R^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\rho/R}\sin^{n-1}t\,dt,\ 0\leqslant\rho\leqslant\pi R,$$

$$\mathrm{vol}\,(\mathbf{S}_{\mathbf{S}^n}(\rho)) = \frac{d}{d\rho}\mathrm{vol}\,(B_{\mathbf{S}^n}(\rho)) = \frac{2\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\sin^{n-1}\left(\frac{\rho}{R}\right),$$

$$\mathrm{vol}\,(\mathbf{S}^n) = \mathrm{vol}\,(B_{\mathbf{S}^n}(\pi R)) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}R^n}{\Gamma(\frac{n+1}{2})},$$

где Γ — гамма-функция (см. приложение B). Для пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ первые две формулы при $0\leqslant\rho\leqslant\pi R/2$ те же, а последняя формула имеет вид

$$\mathrm{vol}\,(\mathbf{P}^n(\mathbb{R})) = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}R^n}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Рассмотрим сходную конструкцию для гиперболического пространства $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, вложенного стандартным образом в виде одной полы двухполостного гиперболоида

$$-\sum_{i=1}^n x_i^2 + x_{n+1}^2 = R^2,\ x_{n+1}\geqslant R>0 \tag{1.22}$$

в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, наделенное метрикой Минковского

$$\sum_{i=1}^n dx_i^2 - dx_{n+1}^2. \tag{1.23}$$

Стереографическая проекция из точки $\mathbf{x}' = (0,\ldots,0,-R)$ на подпространство P_1 взаимно-однозначно отображает компоненту гиперболоида с $x_{n+1}\geqslant R>0$ на открытый шар в P_1 радиуса R с центром $0\in\mathbb{R}^{n+1}$.

Связь между координатами x_i проектируемой точки и координатами $\widetilde{x}_i$ ее образа имеет вид:

$$\widetilde{x}_i = \frac{Rx_i}{R + x_{n+1}},\ i = 1, \ldots, n,\ \widetilde{r}^2 = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i^2 = \frac{x_{n+1} - R}{x_{n+1} + R} R^2 < R^2,$$

$$x_i = \frac{2R^2 \widetilde{x}_i}{R^2 - \widetilde{r}^2},\ i = 1, \ldots, n,\ x_{n+1} = \frac{R^2 + \widetilde{r}^2}{R^2 - \widetilde{r}^2} R.$$

При этом отображении ограничение метрики Минковского (1.23) на компоненту гиперболоида с $x_{n+1} \geqslant R$ переходит в метрику

$$g_h = 4R^4 \sum_{i=1}^{n} d\widetilde{x}_i^2 \Big/ \left(R^2 - \widetilde{r}^2\right)^2,$$

а подстановка $\widetilde{x}_i =: Ry_i$ ведет к

$$g_h = 4R^2 \sum_{i=1}^{n} dy_i^2 \Bigg/ \left(1 - \sum_{i=1}^{n} dy_i^2\right)^2,\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < 1. \tag{1.24}$$

Данная модель гиперболического пространства в шаре называется *моделью Пуанкаре.*

Эта же метрика в сферической форме имеет вид

$$g_h = 4R^2 \left(dr^2 + r^2 \widetilde{g}_s\right) / \left(1 - r^2\right)^2,\ r < 1, \tag{1.25}$$

где метрика $\widetilde{g}_s$ такая же, как и в (1.19).

Евклидова сфера в пространстве P_1, определенная уравнением $r = 1$, называется *абсолютом.* Геодезическими в данной модели являются дуги евклидовых окружностей и отрезки евклидовых прямых, ортогональные (в евклидовом смысле) абсолюту.

Пусть $v = 2r/(1 + r^2)$. Тогда

$$g_h = R^2 \left(\frac{dv^2}{(1 - v^2)^2} + \frac{v^2 \widetilde{g}_s}{1 - v^2}\right). \tag{1.26}$$

Данная форма метрики соответствует стереографической проекции той же полы гиперболоида из точки $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ на подпространство $P_2 = (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} = R)$, где vR — евклидово расстояние от текущей точки из P_2 до фиксированной точки $\mathbf{x}'' = (0, \ldots, 0, R)$. Евклидовы прямые в P_2 являются геодезическими метрики (1.26), поскольку

геодезические метрики (1.23) на гиперболоиде высекаются двумерными плоскостями в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящими через точку $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Эта модель гиперболического пространства в единичном шаре известна как *модель Бельтрами–Клейна*.

Расстояние ρ от точки $r = 0$ в метрике (1.25) задается формулой:

$$r = \mathrm{th}(\frac{\rho}{2R}),\ v = \mathrm{th}(\frac{\rho}{R}). \tag{1.27}$$

Существует также *модель Пуанкаре гиперболического пространства в верхнем полупространстве*:

$$\mathbb{R}^n_+ := (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_n > 0), \tag{1.28}$$

с метрикой:

$$g_h = \frac{R^2}{x_n^2} \sum_{i=1}^{n} dx_i^2.$$

В этой модели геодезическими являются евклидовы прямые $x_i = c_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, и дуги евклидовых окружностей, ортогональные (в евклидовом смысле) подпространству в $\mathbb{R}^n$, заданному уравнением $x_n = 0$. Объединение последнего подпространства с бесконечно удаленной точкой является абсолютом.

Группа всех линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющих метрику (1.23), называется *псевдоортогональной группой* и обозначается $\mathrm{O}(1, n)$. Она состоит из четырех связных компонент. Две из этих компонент переставляют полы двухполостного гиперболоида (1.22). Две другие компоненты образуют группу изометрий пространства $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$. Пусть $\mathrm{O}_0(1, n)$ — компонента единицы группы $\mathrm{O}(1, n)$. Она транзитивно действует на $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ со стационарной подгруппой изоморфной группе $\mathrm{SO}(n)$.

Существует три типа действия однопараметрических подгрупп $\exp(tX)$, $X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}$ группы $\mathrm{O}_0(1, n)$ в гиперболическом пространстве $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ [96]. Однопараметрическая подгруппа, изоморфная группе $\mathbf{S}^1$, сохраняет все точки некоторого вполне геодезического подмногообразия, изометричного пространству $\mathbf{H}^{n-2}(\mathbb{R})$ при $n \geqslant 4$, и называется *вращением* или *эллиптическим преобразованием*. В малых размерностях она сохраняет все точки некоторой геодезической (при $n = 3$) или некоторую точку (при $n = 2$) и называется вращением вокруг данной геодезической (*оси вращения*) для $n = 3$ или вокруг данной точки (*центра вращения*) для $n = 2$. Соответствующий элемент X называется

эллиптическим. Евклидово вращение в двумерных евклидовых плоскостях, проходящих через точку $y_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, является примером вращения для модели (1.24). Аналогичное вращение в двумерных евклидовых плоскостях, параллельных гиперплоскости $x_n = 0$, является примером вращения в модели (1.28).

Если некоторая однопараметрическая подгруппа группы $\mathrm{O}_0(1,n)$, изоморфная группе $\mathbb{R}$, сохраняет некоторую геодезическую, то она называется *трансляцией* вдоль этой геодезической (*оси трансляции*) или *гиперболическим преобразованием*. Соответствующий элемент $X \in \mathfrak{so}(1,n)$ называется *гиперболическим*. Дилатация $x_i \to e^t x_i$, $t \in \mathbb{R}$, для модели (1.28) является примером трансляции.

Последним типом действия однопараметрической подгруппы является *параболическое действие* подгруппы группы $\mathrm{O}_0(1,n)$, изоморфной группе $\mathbb{R}$. Примером такого действия для модели (1.28) является евклидов сдвиг $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + t\mathbf{c}$, $t \in \mathbb{R}$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $c_n = 0$. Для пространства $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ он сдвигает точки вдоль системы *гороциклов*, которые являются кривыми, ортогональными в каждой точке пучку геодезических, имеющих общую точку на абсолюте. Соответствующий элемент $X \in \mathfrak{so}(1,n)$ называется *параболическим*.

Благодаря транзитивности группы изометрий любое эллиптическое, гиперболическое или параболическое преобразование сопряжено преобразованию одного из рассмотренных примеров.

Многие формулы для сферической метрики (1.16) формально преобразуются в формулы для гиперболической метрики (1.24) подстановкой

$$y_i \to \mp\mathbf{i}y_i,\ r \to \mp\mathbf{i}r,\ v \to \mp\mathbf{i}v,\ R \to \pm\mathbf{i}R, \tag{1.29}$$

благодаря соотношениям

$$\cos(\mathbf{i}x) = \operatorname{ch} x, \sin(\mathbf{i}x) = \mathbf{i}\sin x,\ \operatorname{arctg}(\mathbf{i}x) = \mathbf{i}\operatorname{arcth} x. \tag{1.30}$$

Данное преобразование соответствует преобразованию из предложения 1.5. Отметим, что множитель $\pm\mathbf{i}$ из предложения 1.5 соответствует множителю $\mp\mathbf{i}$ в (1.29), поскольку элементы алгебры Ли соответствуют векторным полям, которые являются дифференциальными операторами первого порядка.

Сходное соответствие справедливо и для других двухточечно-однородных пространств.

§ 1.4. Модель проективной плоскости Кэли

Наше описание в данном параграфе алгебры Кэли $\mathbb{C}a$ и проективной плоскости $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ основано на работах [63; 90; 95]. Мы используем модель проективной плоскости $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ на основе йордановой алгебры $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$ (см. ниже). Отметим также существование иной модели плоскости $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$, построенной в [181], на основе обобщенных проективных координат (см. также [91; 94] и [115]).

1.4.1. Алгебра $\mathbb{C}a$

В соответствии с *теоремой Фробениуса* существует только четыре конечномерных алгебры с делением над полем $\mathbb{R}$: само $\mathbb{R}$ и алгебры $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}a$. Последняя является восьмимерной нормированной алгеброй с делением — алгеброй октав. Она некоммутативна и неассоциативна, но альтернативна, т. е. для любых двух элементов $\xi, \eta \in \mathbb{C}a$ выполняются равенства $(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta)$ и $\xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta$. Группой всех автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}a$ является *простая особая компактная вещественная* 14-*мерная группа Ли* G_2. Стандартный базис алгебры $\mathbb{C}a$ над полем $\mathbb{R}$ есть $\{e_i\}_{i=0}^7$, где $e_0 = 1 \in \mathbb{R}$ и $e_i^2 = -1$, $e_ie_j = -e_je_i$, $i, j = 1, \ldots, 7$, $i \neq j$. Элементы $\{e_i\}_{i=1}^7$ перемножаются в соответствии со следующей схемой:

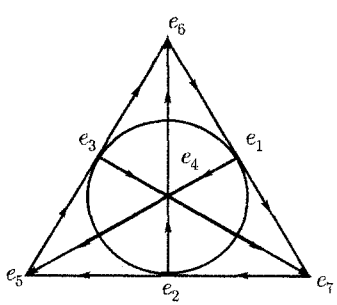

Рис. 1.1

Здесь $e_ie_j = e_k$, если эти элементы расположены на одной прямой или окружности и упорядочены как e_i, e_j, e_k. *Октавное сопряжение* ι: $\mathbb{C}a \mapsto \mathbb{C}a$ действует по формулам $\iota(e_0) \equiv \overline{e}_0 = e_0$, $\iota(e_i) \equiv \overline{e}_i = -e_i, i = 1, \ldots, 7$ и линейно продолжается на всю алгебру $\mathbb{C}a$. Пусть $\operatorname{Re}\xi = \frac{1}{2}(\xi+\overline{\xi})$, $\operatorname{Im}\xi = \frac{1}{2}(\xi-\overline{\xi})$, $\xi \in \mathbb{C}a$. Определим скалярное произведе-

ние в $\mathbb{C}a$ формулой: $\langle\eta,\xi\rangle = \frac{1}{2}(\overline{\eta}\xi + \overline{\xi}\eta) = \mathrm{Re}(\overline{\xi}\eta) = \mathrm{Re}(\overline{\eta}\xi) \in \mathbb{R}$, а норму формулой $\|\eta\| = \langle\eta,\eta\rangle^{1/2}$. В алгебре $\mathbb{C}a$ любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру и справедливо *центральное тождество Муфанг*:

$$u \cdot xy \cdot u = ux \cdot yu,\ u, x, y \in \mathbb{C}a. \tag{1.31}$$

Здесь использованы обозначения $u \cdot xy := u(xy)$, $xy \cdot u := (xy)u$.

Приведем следующее описание левого и правого (8-мерных) спинорных представлений группы $\mathrm{Spin}(8)$ в алгебре $\mathbb{C}a$ [59; 63], которое будет использовано в дальнейшем. Определим линейные операторы в $\mathbb{C}a$:

$$L_\alpha\colon \xi \mapsto \frac{1}{2}e_\alpha\xi,\ \alpha = 1, \ldots, 7,\ \xi \in \mathbb{C}a,$$

$$L_{\alpha,\beta}\colon \xi \mapsto \frac{1}{2}e_\alpha(e_\beta\xi),\ 1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 7,\ \xi \in \mathbb{C}a.$$

Эти операторы являются образами некоторого базиса алгебры Ли $\mathbf{spin}(8)$ под действием левого спинорного представления группы $\mathrm{Spin}(8)$, т. е. генераторами данного представления. Аналогичным образом операторы

$$R_\alpha\colon \xi \mapsto \frac{1}{2}\xi e_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, 7,\ \xi \in \mathbb{C}a,$$

$$R_{\alpha,\beta}\colon \xi \mapsto \frac{1}{2}(\xi e_\beta)e_\alpha,\ 1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 7,\ \xi \in \mathbb{C}a,$$

являются генераторами правого спинорного представления группы $\mathrm{Spin}(8)$. Все эти операторы кососимметричны по отношению к скалярному произведению в $\mathbb{C}a$.

Написанные выше формулы определяют операторы $L_{\alpha,\beta}, R_{\alpha,\beta}$ также для $1 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 7$. Если $\mathbb{C}a'$ является пространством чисто мнимых октав, $u \in \mathbb{C}a'$, $\xi \in \mathbb{C}a$, то ввиду альтернативности алгебры $\mathbb{C}a$ получаем:

$$\xi u \cdot u = \xi u^2 = -\xi|u|^2 = -|u|^2\xi = u \cdot u\xi.$$

Для $u = e_\alpha + e_\beta$, $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 7$, выполняются равенства

$$\begin{aligned} -2\xi &= -\xi|e_\alpha + e_\beta|^2 = \xi(e_\alpha + e_\beta)\cdot(e_\alpha + e_\beta) = \\ &= \xi e_\alpha \cdot e_\alpha + \xi e_\alpha \cdot e_\beta + \xi e_\beta \cdot e_\alpha + \xi e_\beta \cdot e_\beta = \\ &= -\xi + \xi e_\alpha \cdot e_\beta + \xi e_\beta \cdot e_\alpha - \xi \end{aligned}$$

и $\xi e_\alpha \cdot e_\beta + \xi e_\beta \cdot e_\alpha = 0$. Аналогично $e_\alpha \cdot e_\beta \xi + e_\beta \cdot e_\alpha \xi = 0$. Для $0 \leqslant i$, $j \leqslant 7$, $i \neq j$, мы можем написать более общие формулы:

$$e_i \cdot e_j \xi = -\overline{e}_j \cdot \overline{e}_i \xi,\ \xi e_i \cdot e_j = -\xi \overline{e}_j \cdot \overline{e}_i,\ \xi \in \mathbb{C}a, \tag{1.32}$$

полезные в дальнейшем.

В частности, мы имеем $L_{\alpha,\beta} = -L_{\beta,\alpha}$, $R_{\alpha,\beta} = -R_{\beta,\alpha}$, $1 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant 7$, $\alpha \neq \beta$.

Группа Spin(8) является двукратным накрытием группы SO(8), и тавтологическое представление последней индуцирует векторное представление группы Spin(8), также, очевидно, 8-мерное. Для элемента $q \in \mathrm{Spin}(8)$ обозначим q^L, q^R и q^V его образы при левом спинорном, правом спинорном и векторном представлениях соответственно. Следующее предложение является одной из версий *принципа тройственности* для группы Spin(8)[5].

Предложение 1.7 ([63]). Для любого элемента $q \in \mathrm{Spin}(8)$ выполняется равенство

$$q^V(\xi\eta) = q^L(\xi) \cdot q^R(\eta),\ \xi, \eta \in \mathbb{C}a. \tag{1.33}$$

Наоборот, если A, B, C — ортогональные операторы $\mathbb{C}a \mapsto \mathbb{C}a$, такие что

$$A(\xi\eta) = B(\xi) \cdot C(\eta)$$

для любых $\xi, \eta \in \mathbb{C}a$, то существует единственный элемент $q \in \mathrm{Spin}(8)$, такой что $A = q^V, B = q^L, C = q^R$.

Из уравнения (1.33) легко следуют его инфинитезимальные аналоги:

$$\begin{aligned} V_i(\xi\eta) &= L_i(\xi) \cdot \eta + \xi \cdot R_i(\eta),\ i = 1, \ldots, 7, \\ V_{i,j}(\xi\eta) &= L_{i,j}(\xi) \cdot \eta + \xi \cdot R_{i,j}(\eta),\ 1 \leqslant i < j \leqslant 7, \xi, \eta \in \mathbb{C}a, \end{aligned} \tag{1.34}$$

где V_i и $V_{i,j}$ — генераторы векторного представления группы Spin(8).

1.4.2. Йорданова алгебра $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$

Подобно комплексному и кватернионному случаю, *эрмитово сопряжение* $A \mapsto A^*$ для квадратной матрицы с элементами из алгебры $\mathbb{C}a$

[5] Другие версии принципа тройственности можно найти в [95].

определяется как композиция сопряжения в $\mathbb{C}a$ и транспонирования матрицы A. Матрица A называется *эрмитовой*, если $A^* = A$. *Простая особая йорданова алгебра* $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$ состоит из всех эрмитовых 3×3 матриц с элементами из $\mathbb{C}a$. Она наделяется йордановым умножением:

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX),\ X, Y \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a).$$

Это умножение удовлетворяет тождеству $(X^2 \circ Y) \circ X = X^2 \circ (Y \circ X)$, которое выделяет йордановы алгебры в классе коммутативных алгебр. Размерность йордановой алгебры $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$ над полем $\mathbb{R}$ равна 27. Любой ее элемент представим в виде:

$$X = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 + X_1(\xi_1) + X_2(\xi_2) + X_3(\xi_3), \tag{1.35}$$

где

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_1(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \\ 0 & \overline{\xi} & 0 \end{pmatrix},\ X_2(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{\xi} \\ 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_3(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 \\ \overline{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$a_i \in \mathbb{R}, \xi_i \in \mathbb{C}a$, $i = 1, 2, 3$. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} E_i \circ E_j &= \begin{cases} E_i, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j, \end{cases} \\ E_i \circ X_j(\xi) &= \begin{cases} 0, \text{ если } i = j, \\ \frac{1}{2}X_j(\xi), \text{ если } i \neq j, \end{cases} \\ X_i(\xi) \circ X_j(\eta) &= \begin{cases} (\xi, \eta)(E - E_i), \text{ если } i = j, \\ \frac{1}{2}X_{i+j}(\overline{\xi\eta}), \text{ если } j \equiv i + 1 \mod 3, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.36}$$

где $E = E_1 + E_2 + E_3$ — единичная матрица. В последней формуле все индексы рассматриваются по модулю 3.

Группой всех автоморфизмов йордановой алгебры $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$ является простая компактная 52-мерная *особая вещественная группа Ли* F_4. Эта группа сохраняет следующие билинейную и трилинейную формы:

$\mathcal{A}(X,Y) = \operatorname{tr}(X \circ Y)$, $\mathcal{B}(X,Y,Z) = \mathcal{A}(X \circ Y, Z)$. Наоборот, любой линейный оператор $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a) \mapsto \mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$, сохраняющий эти две формы, лежит в группе F_4.

Определим норму элемента (1.35) по формуле $\|X\|^2 = \mathcal{A}(X,X) = \sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + 2|\xi|^2)$. Последнее равенство является следствием (1.36).

Теорема 1.4 (Фрейденталь, [63]). *Для любого элемента $X \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$ существует автоморфизм $\Phi \in F_4$, такой что*

$$\Phi X = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3, \tag{1.37}$$

а числа $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ однозначно определяются элементом X. Два элемента из $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$ лежат на одной орбите группы F_4, если их диагональные представления (1.37) *совпадают.*

1.4.3. Октавная проективная плоскость $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$

Элементы $X \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$, удовлетворяющие условиям

$$X^2 = X, \ \operatorname{tr} X = 1, \tag{1.38}$$

образуют *октавную проективную плоскость* $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$, которая является 16-мерным вещественным многообразием. Автоморфизмы алгебры $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$ сохраняют уравнения (1.38) и группа F_4 действует на $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$. Из теоремы Фрейденталя и уравнений (1.38) следует, что каждый элемент из $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ подходящим преобразованием из F_4 можно перевести в элемент E_1. Поэтому $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ является однородным пространством группы F_4 и вычисления из [63] (лекция 16) показывают, что стационарная подгруппа любой точки $X \in \mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ изоморфна группе $\operatorname{Spin}(9)$.

Пусть элемент

$$X = (1 + a_1)E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 + X_1(\xi_1) + X_2(\xi_2) + X_3(\xi_3) \in \mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$$

находится в некоторой окрестности элемента E_1, т. е. величины $a_i, |\xi_i|, i = 1,2,3$ достаточно малы. Из (1.36) получаем

$$X \circ X = (1 + 2a_1)E_1 + X_2(\xi_2) + X_3(\xi_3) + o\left(\sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + |\xi|^2)\right),$$

и равенство $X \circ X = X$ влечет $a_1 = a_2 = a_3 = 0, \xi_1 = 0$. Это означает, что касательное пространство $T_{E_1}\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ отождествляется с множеством $\{X_2(\xi_2) + X_3(\xi_3) \mid \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}a\}$.

Пусть $K \subset F_4$ — стационарная подгруппа, соответствующая точке E_1 и действующая автоморфизмами в пространстве $T_{E_1}\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a) \simeq \simeq \{X_2(\xi_2) + X_3(\xi_3) \mid \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}a\}$. Пусть K_0 — стационарная подгруппа группы K, соответствующая элементу $X_3(1) \in T_{E_1}\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$.

Согласно § 3.5, мы должны вычислить K_0-действие на пространстве $T_{E_1}\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$. Для любого элемента $X \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$ пусть $\operatorname{ann} X := = \{Y \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a) \mid Y \circ X = 0\}$. Будучи автоморфизмом алгебры $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$, элемент $\Phi \in K_0$ сохраняет пространство $\operatorname{ann} X_3(1)$. Из формул (1.36) следует, что

$$\operatorname{ann} X_3(1) = \{a(E_1 - E_2) + bE_3 + X_3(\xi) \mid a, b \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{C}a'\}.$$

Если $\Phi(E_1 - E_2) = a(E_1 - E_2) + bE_3 + X_3(\xi)$, то

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{A}(E_1 - E_2, E_1) &= \mathcal{A}(\Phi(E_1 - E_2), \Phi(E_1)) = \\ &= \mathcal{A}(a(E_1 - E_2) + bE_3 + X_3(\xi), E_1) = a. \end{aligned}$$

Отсюда $\Phi(E_1 - E_2) = E_1 - E_2 + bE_3 + X_3(\xi)$ и равенство $\|E_1 - E_2\| = = \|\Phi(E_1 - E_2)\|$ дает $b = 0, \xi = 0$. Это означает, что $\Phi(E_2) = E_2$ и поэтому $\Phi(E_3) = \Phi(E - E_1 - E_2) = E - E_1 - E_2 = E_3$. Таким образом, группа K_0 сохраняет элементы E_1, E_2, E_3.

Пусть K' — максимальная подгруппа группы F_4, сохраняющая элементы E_1, E_2, E_3. Тогда $K_0 \subset K' \subset K$. Поскольку $\operatorname{ann} E_1 = = \{a_2E_2 + a_3E_3 + X_1(\xi),\ a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{C}a\}$, то группа K' отображает элемент $X_1(\xi)$ в элемент $X_1(\widetilde{\xi})$ и аналогично $X_i(\xi_i) \mapsto X_i(\widetilde{\xi_i})$, $i = 1, 2, 3$.

Пусть $\Phi_i : \mathbb{C}a \mapsto \mathbb{C}a$, $i = 1, 2, 3$, — ортогональные операторы такие, что $\Phi X_i(\xi_i) = X_i(\Phi_i(\xi_i))$ для $\Phi \in K'$. Из последней формулы в (1.36) следует, что

$$\begin{aligned} X_3\left(\Phi_3(\overline{\xi\eta})\right) &= \Phi\left(X_3(\overline{\xi\eta})\right) = 2\Phi\left(X_1(\xi) \circ X_2(\eta)\right) = \\ &= 2\Phi\left(X_1(\xi)\right) \circ \Phi\left(X_2(\eta)\right) = \\ &= 2X_1\left(\Phi_1(\xi)\right) \circ X_2\left(\Phi_2(\eta)\right) = X_3\left(\overline{\Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta)}\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем равенство

$$\Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta) = \overline{\Phi_3\left(\overline{\xi\eta}\right)} \tag{1.39}$$

для $\Phi \in K'$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}a$.

Обозначим через $\mathbb{C}a_i$, $i = 1, 2, 3$, области действия операторов Φ_i, $i = 1, 2, 3$. Тогда $T_{E_1}\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a) \simeq \mathbb{C}a_2^* \oplus \mathbb{C}a_3^*$, где верхний индекс * обозначает сопряженное пространство.[6]

[6]Здесь мы рассматриваем октавы $\xi \in \mathbb{C}a_2$ и $\eta \in \mathbb{C}a_3$ как «координаты» элементов $X_2(\xi)$ и $X_3(\eta)$ соответственно.

Из формулы (1.39) и предложения 1.7 следует

Предложение 1.8. Операторы Φ_1 и Φ_2 являются соответственно левым и правым представлениями группы $\mathrm{Spin}(8) \simeq K'$, а композиция $\iota \circ \Phi_3 \circ \iota$ является векторным представлением той же группы.

Поскольку группа $\mathrm{Spin}(8)$ является универсальной (двукратной) накрывающей группы $\mathrm{SO}(8)$, их алгебры Ли $\mathfrak{spin}(8)$ и $\mathfrak{so}(8)$ изоморфны.

Рассмотрим представление алгебры Ли $\mathfrak{k}'$ группы K' в пространствах $\mathbb{C}a_i$, $i = 1, 2, 3$. Все эти представления являются точными. Для $A \in \mathfrak{k}'$ обозначим $A^{(i)}$ соответствующий кососимметричный оператор в $\mathbb{C}a_i$, $i = 1, 2, 3$. Из (1.39) получаем следующий *инфинитезимальный аналог принципа тройственности*:

$$A^{(1)}(\xi) \cdot \eta + \xi \cdot A^{(2)}(\eta) = \overline{A^{(3)}(\overline{\xi}\eta)}. \tag{1.40}$$

Из формулы (1.34) следует, что если $A^{(1)}{=}L_i$ (соответственно $A^{(1)}{=}L_{i,j}$), то $A^{(2)} = R_i$, $A^{(3)} = \iota \circ V_i \circ \iota$ (соответственно $A^{(2)} = R_{i,j}$, $A^{(3)} = \iota \circ V_{i,j} \circ \iota$).

Отождествим алгебру $\mathfrak{k}'$ с ее векторным представлением в пространстве $\mathbb{C}a_3$, в частности, положим $A \equiv A^{(3)}$ для $A \in \mathfrak{k}'$. Обозначим через $\varkappa$ включение подалгебры $\mathfrak{k}'$ в алгебру Ли $\mathfrak{f}_4$, соответствующую группе F_4.

По определению, алгебра Ли $\mathfrak{k}_0$ группы $K_0 \subset K'$ состоит из кососимметричных операторов в $\mathbb{C}a_3$, переводящих $1 \in \mathbb{C}a_3$ в 0. Из вышесказанного вытекает следующее предложение.

Предложение 1.9. Группа K_0 изоморфна группе $\mathrm{Spin}(7)$, действующей в пространстве $\mathbb{C}a_1$ по *левому спинорному представлению*, в пространстве $\mathbb{C}a_2$ *по правому спинорному представлению* (эквивалентному для группы $\mathrm{Spin}(7)$ левому, см. (3.40) ниже), а в пространстве $\mathbb{C}a_3'$ по *векторному представлению*, которое является ограничением соответствующего представления группы $K' \simeq \mathrm{Spin}(8)$.

Пусть $\mathfrak{m}$ — пространство 3×3 косоэрмитовых матриц с элементами из алгебры $\mathbb{C}a$ и нулевым следом. Пусть

$$Y_1(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \\ 0 & -\overline{\xi} & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_2(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\overline{\xi} \\ 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_3(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 \\ -\overline{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi \in \mathbb{C}a,$$

— элементы из пространства $\mathfrak{m}$, а его линейное подпространство $\mathfrak{m}_0$ состоит из элементов вида

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i(\xi_i),\ \xi_i \in \mathbb{C}a.$$

Из результатов [63] (лекция 16) можно извлечь следующее утверждение:

Предложение 1.10. Для произвольного элемента $Y \in \mathfrak{m}$ линейный оператор $\operatorname{ad} Y\colon \mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a) \mapsto \mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$, действующий по формуле $\operatorname{ad} Y(X) = YX - XY, X \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$, является дифференцированием алгебры $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$. Поэтому пространство $\mathfrak{m}$ содержится в алгебре $\mathfrak{f}_4$, которая раскладывается в прямую сумму линейных подпространств:

$$\mathfrak{f}_4 \simeq \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{m}_0.$$

При этом справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$[\varkappa A, \operatorname{ad} Y_i(\xi)] = \operatorname{ad} Y_i(A^{(i)}\xi),\ i = 1, 2, 3, \tag{1.41}$$

$$[\operatorname{ad} Y_i(\xi), \operatorname{ad} Y_j(\eta)] = \begin{cases} \varkappa C_{i,\xi,\eta}, \text{ если } j = i, \\ \operatorname{ad} Y_{i+2}\left(-\overline{\xi\eta}\right), \text{ если } j = i+1, \end{cases} \tag{1.42}$$

где $A \equiv A^{(3)} \in \mathfrak{k}'$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}a$, операторы $A^{(i)}$ такие же, как в формуле (1.40), индексы в последнем уравнении рассматриваются по модулю 3, а косоэрмитовы операторы $C_{i,\xi,\eta}\colon \mathbb{C}a_3 \mapsto \mathbb{C}a_3$, $i = 1, 2, 3$, задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} &C_{1,\xi,\eta} : \zeta \mapsto \zeta\xi \cdot \overline{\eta} - \zeta\eta \cdot \overline{\xi}, \\ &C_{2,\xi,\eta} : \zeta \mapsto \overline{\eta} \cdot \xi\zeta - \overline{\xi} \cdot \eta\zeta,\ \zeta \in \mathbb{C}a, \\ &C_{3,\xi,\eta} : \zeta \mapsto 4(\xi, \zeta)\eta - 4(\eta, \zeta)\xi. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Действие операторов $\varkappa C_{i,\xi,\eta}$ в пространствах $\mathbb{C}a_1$ и $\mathbb{C}a_2$ получается

из (1.43) циклической перестановкой индексов:

$$
\begin{aligned}
&\varkappa C_{1,\xi,\eta}|_{\mathbb{C}a_1} : \zeta \mapsto 4(\xi,\zeta)\eta - 4(\eta,\zeta)\xi,\\
&\varkappa C_{2,\xi,\eta}|_{\mathbb{C}a_1} : \zeta \mapsto \zeta\xi\cdot\overline{\eta} - \zeta\eta\cdot\overline{\xi},\\
&\varkappa C_{3,\xi,\eta}|_{\mathbb{C}a_1} : \zeta \mapsto \overline{\eta}\cdot\xi\zeta - \overline{\xi}\cdot\eta\zeta,\\
&\varkappa C_{1,\xi,\eta}|_{\mathbb{C}a_2} : \zeta \mapsto \overline{\eta}\cdot\xi\zeta - \overline{\xi}\cdot\eta\zeta,\\
&\varkappa C_{2,\xi,\eta}|_{\mathbb{C}a_2} : \zeta \mapsto 4(\xi,\zeta)\eta - 4(\eta,\zeta)\xi,\\
&\varkappa C_{3,\xi,\eta}|_{\mathbb{C}a_2} : \zeta \mapsto \zeta\xi\cdot\overline{\eta} - \zeta\eta\cdot\overline{\xi}.
\end{aligned}
\tag{1.44}
$$

Заметим, что в [63] (лекция 16) аналоги формул (1.39), (1.41) и последней формулы (1.36) содержат ошибки.

Для функции объема для октавной проективной плоскости $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ справедливы следующие равенства [31; 131]:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{vol}\left(B_{\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)}(\rho)\right) &= \frac{6\pi^8(2R)^{16}}{11!}\sin^{16}\left(\frac{\rho}{2R}\right)\times\\
&\times\left(1+8\cos^2\left(\frac{\rho}{2R}\right)+36\cos^4\left(\frac{\rho}{2R}\right)+120\cos^6\left(\frac{\rho}{2R}\right)\right),\\
\operatorname{vol}\left(\mathbf{S}_{\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)}(\rho)\right) &= \frac{d}{d\rho}\operatorname{vol}\left(B_{\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)}(\rho)\right) = \frac{2^9\pi^8R^{15}}{7!}\sin^8\left(\frac{\rho}{2R}\right)\sin^7\left(\frac{\rho}{R}\right),\\
\operatorname{vol}\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)\right) &= \operatorname{vol}\left(B_{\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)}(\pi R)\right) = \frac{6\pi^8(2R)^{16}}{11!}.
\end{aligned}
$$

Описание октавной проективной плоскости $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ через йорданову алгебру $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$ не является исключительным случаем в теории двухточечно-однородных пространств. Остальные двухточечно-однородные пространства тоже могут быть описаны через соответствующие йордановы алгебры [95].

Глава 2

Дифференциальные операторы на гладких многообразиях

Инвариантность дифференциального оператора на гладком многообразии M по отношению к действию на M некоторой группы G (особенно группы Ли) играет большую роль в математической физике, поскольку способствует отбору физически значимых операторов. Алгебра $\mathrm{Diff}_G(M)$ всех G-инвариантных дифференциальных операторов на M с комплексными или вещественными коэффициентами предоставляет материал для построения G-инвариантных физических теорий. Свойства таких теорий тесно связаны со свойствами алгебры $\mathrm{Diff}_G(M)$.

Гладкое многообразие M, однородное относительно действия группы Ли G, называется *коммутативным пространством*, если алгебра $\mathrm{Diff}_G(M)$ коммутативна. Известным примером коммутативного пространства является симметрическое пространство ранга l. Коммутативная алгебра $\mathrm{Diff}_G(M)$ для этого пространства имеет l свободных образующих [129]. В частности, для симметрических пространств ранга один, которые в классе полных односвязных римановых пространств совпадают с двухточечно-однородными пространствами (теорема 1.1), алгебра $\mathrm{Diff}_G(M)$ порождается оператором Лапласа–Бельтрами. Кроме того, класс коммутативных пространств содержит слабо симметрические пространства [20].

Известны только спорадические примеры некоммутативных алгебр вида $\mathrm{Diff}_G(M)$ (см., например, гл.2 из [131]). Одним из таких примеров является алгебра $\mathrm{Diff}_{\mathrm{O}_0(1,n)}(M_1)$ для пространства $M_1 = \mathrm{O}_0(1,n)/\mathrm{SO}(n-1)$, описанная в работе [182], где пространство M_1 интерпретируется как тотальное пространство расслоения единичных сфер над гиперболическим пространством $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$. Другие примеры некоммутативных алгебр вида $\mathrm{Diff}_G(M)$ были рассмотрены в [194] и описаны ниже в главе 3.

§ 2.1. Инвариантные дифференциальные операторы на группах Ли и однородных пространствах

Этот параграф содержит основы теории инвариантных дифференциальных операторов на однородных пространствах [82; 128; 129; 131]. Основной результат состоит в том, что алгебра инвариантных дифференциальных операторов на G-однородном многообразии конечно порождена над полем констант, описывается в терминах универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ и существует линейное взаимно-однозначное соответствие между инвариантными дифференциальными операторами и их символами, определяемыми ниже как элементы симметрической алгебры $S(\mathfrak{g})$.

2.1.1. Основные обозначения

Для наших целей достаточно считать, что поле констант есть $\mathbb{R}$, хотя большинство результатов этого параграфа справедливы и для поля констант $\mathbb{C}$.

Пусть G — связная группа Ли, M — гладкое G-однородное многообразие, $\dim M = m$, $\dim G = N, x_0 \in M, K_{x_0} \subset G$ — стационарная подгруппа точки $x_0 \in M$, а $\mathfrak{k}_{x_0} \subset \mathfrak{g} \equiv T_eG$ — соответствующая подалгебра Ли, где $e \in G$ — единичный элемент. Выберем подпространство $\mathfrak{p}_{x_0} \subset \mathfrak{g}$, так что $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{x_0} \oplus \mathfrak{k}_{x_0}$ (прямая сумма линейных пространств). Далее в этом параграфе точка x_0 фиксирована и мы опускаем индекс x_0 в обозначениях $K_{x_0}, \mathfrak{k}_{x_0}, \mathfrak{p}_{x_0}$ и им подобных.

Отождествим пространство M с фактор-пространством левых классов смежности группы G по ее подгруппе K. Пусть $\pi_1 \colon G \to G/K$ — естественная проекция. Обозначим

$$L_q \colon q_1 \to qq_1, \quad R_q \colon q_1 \to q_1 q, \quad q, q_1 \in G,$$

— левый и правый сдвиг на группе G, а

$$\tau_q \colon x \to qx, \quad q \in G, \quad x \in M,$$

— действие элемента $q \in G$ на M. Очевидно, что $\pi_1 \circ L_q = \tau_q \circ \pi_1$, $q \in G$, и $\pi_1 \circ R_q = \pi_1$, $q \in K$. Пусть левые и правые сдвиги действуют на пространстве $C^\infty(G)$ по формулам:

$$\widehat{L}_q(f)(q_1) = f(q^{-1}q_1), \qquad \widehat{R}_q(f)(q_1) = f(q_1 q^{-1}), \quad f \in C^\infty(G),\ q, q_1 \in G.$$

Аналогично левый сдвиг действует на пространстве $C^\infty(M)$ по формуле:

$$\widehat{\tau}_q(f)(x) = f(q^{-1}x), \quad f \in C^\infty(M), \ q, q_1 \in G.$$

Тогда $\widehat{L}_{q_1q_2} = \widehat{L}_{q_1} \circ \widehat{L}_{q_2}$, $\widehat{R}_{q_1q_2} = \widehat{R}_{q_2} \circ \widehat{R}_{q_1}$, $\widehat{\tau}_{q_1q_2} = \widehat{\tau}_{q_1} \circ \widehat{\tau}_{q_2}$, $\widehat{L}_{q_1} \circ \widehat{R}_{q_2} = \widehat{R}_{q_2} \circ \widehat{L}_{q_1}$, $q_1, q_2 \in G$.

Пусть $\mathrm{Diff}(G)$ и $\mathrm{Diff}(M)$ — алгебры дифференциальных операторов с гладкими вещественнозначными коэффициентами на группе G и пространстве M соответственно. Определим действие сдвигов на операторы формулами:

$$\widetilde{L}_q(\square) = \widehat{L}_q \circ \square \circ \widehat{L}_{q^{-1}}, \quad \widetilde{R}_q(\square) = \widehat{R}_q \circ \square \circ \widehat{R}_{q^{-1}}, \quad \square \in \mathrm{Diff}(G),$$
$$\widetilde{\tau}_q(\square) = \widehat{\tau}_q \circ \square \circ \widehat{\tau}_{q^{-1}}, \quad \square \in \mathrm{Diff}(M).$$

Определим также следующие подалгебры:

$$\mathrm{LDiff}(G) := \left\{\square \in \mathrm{Diff}(G) \,|\, \widetilde{L}_q(\square) = \square, \forall q \in G\right\},$$

$$\mathrm{Diff}_G(M) := \{\square \in \mathrm{Diff}(M) \,|\, \widetilde{\tau}_q(\square) = \square, \forall q \in G\},$$

$$\mathrm{RDiff}(G) := \left\{\square \in \mathrm{Diff}(G) \,|\, \widetilde{R}_q(\square) = \square, \forall q \in G\right\},$$

$$\mathrm{LRDiff}(G) := \left\{\square \in \mathrm{LDiff}(G) \,|\, \widetilde{R}_q(\square) = \square, \forall q \in G\right\},$$

$$\mathrm{LDiff}_K(G) := \left\{\square \in \mathrm{LDiff}(G) \,|\, \widetilde{R}_q(\square) = \square, \forall q \in K\right\}.$$

Алгебра A называется *фильтрованной*, если существует последовательность $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ ее подпространств такая, что

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset A = \bigcup_{i \geqslant 1} F_i \quad \text{и} \quad F_iF_j \subset F_{i+j}.$$

Алгебра A называется *градуированной*, если существует последовательность $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ ее подпространств такая, что $A = \bigoplus_{i=1}^\infty A_i$ и $A_iA_j \subset A_{i+j}$. Для фильтрованной алгебры A соответствующей градуированной алгеброй $\mathrm{gr}\, A$ является алгебра $\bigoplus_{i=1}^\infty F_i/F_{i-1}$. Если $a \in F_i/F_{i-1}$ и $b \in F_j/F_{j-1}$, то произведение ab, очевидно, принадлежит фактор-пространству F_{i+j}/F_{i+j-1}.

Степень элемента $a \in A$ равна i, если $a \in F_i \setminus F_{i-1}$. Алгебры $\mathrm{Diff}(M)$ и $\mathrm{Diff}(G)$ имеют стандартные фильтрации, для которых пространства $\mathrm{Diff}(M)_i$ и $\mathrm{Diff}(G)_i$ состоят из дифференциальных операторов степеней $\leqslant i$. Для алгебры $\mathcal{A}$ обозначим $Z\mathcal{A}$ ее центр.

Пусть $e_1, \ldots, e_N$ — базис в алгебре $\mathfrak{g}$ такой, что $e_1, \ldots, e_m$ — базис в подпространстве $\mathfrak{p}$, а $e_{m+1}, \ldots, e_N$ — базис в подалгебре $\mathfrak{k}$. Пусть

$$X_i^l(q) = (dL_q)e_i, \quad X_i^r(q) = (dR_q)e_i,\ i = 1, \ldots, N,\ q \in G,$$

— соответствующие подвижные реперы на группе G, состоящие соответственно из лево- и правоинвариантных векторных полей.

Пусть $X_l^i(q), X_r^i(q)$ — соответствующие дуальные реперы. Для элемента $Y \in \mathfrak{g}$ обозначим Y^l и Y^r соответствующие лево- и правоинвариантные векторные поля на G, а через $\widetilde{Y}$ соответствующее векторное поле на M: $\widetilde{Y} = \frac{d}{dt}\exp(tY)x\Big|_{t=0}$, $x \in M$. Очевидно, что $d\pi_1(Y^r) = \widetilde{Y}$. Отметим, что левоинвариантное векторное поле соответствует правым сдвигам на группе G, а правоинвариантное векторное поле — левым сдвигам.

Определим *коммутатор векторных полей*[1] $X', Y' \in \mathcal{X}(M)$ через их действие на функциях $f \in C^\infty(M)$:

$$[X', Y']f = X'(Y'f) - Y'(X'f).$$

Хорошо известно, что соответствие $X \to \widetilde{X}$, $X \in \mathfrak{g}$ меняет знаки коммутаторов (см., например, [10], 7.21):

$$\widetilde{[X, Y]} = -[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]. \tag{2.1}$$

В частности:

$$[X^r, Y^r] = -[X^r, Y^r]. \tag{2.2}$$

С другой стороны, правое действие группы Ли сохраняет знаки коммутаторов. В частности, для правого действия группы G на ней самой имеем:

$$[X, Y]^l = [X^l, Y^l]. \tag{2.3}$$

[1] Для любого гладкого многообразия M, не обязательно наделенного действием группы G.

2.1.2. Инвариантные дифференциальные операторы на группах Ли

Пусть $U_1(\mathfrak{g}) \subset U_2(\mathfrak{g}) \subset \ldots \subset U(\mathfrak{g})$ — стандартная фильтрация универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ для $\mathfrak{g}$, где подпространство $U_k(\mathfrak{g})$ состоит из элементов вида $P_i(e_1, \ldots, e_N)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, а P_i — многочлен степени i без постоянного члена[2]. Поскольку $[U_i(\mathfrak{g}), U_j(\mathfrak{g})] \subset \subset U_{i+j-1}(\mathfrak{g})$, градуированная алгебра $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ коммутативна.

Пусть $S(V)$ — *симметрическая алгебра* для конечномерного вещественного линейного пространства V, т.е. свободная коммутативная алгебра над полем $\mathbb{R}$, порожденная элементами произвольного базиса в пространстве V. Эта алгебра градуирована подпространствами $S_i(V)$, $i \geqslant 1$, состоящими из однородных многочленов степени i.

Для элемента $Y \in \mathfrak{g}$ обозначим через Y^* соответствующий элемент из $S(\mathfrak{g})$. Присоединенное действие группы G на $\mathfrak{g}$ естественно продолжается до действия G на алгебре $U(\mathfrak{g})$ по формуле:

$$\mathrm{Ad}_q \colon Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_i \to \mathrm{Ad}_q(Y_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Ad}_q(Y_i),\ Y_1, \ldots, Y_i \in \mathfrak{g},$$

и аналогично до действия G на алгебре $S(\mathfrak{g})$. Для любой подгруппы K' группы G обозначим через $U(\mathfrak{g})^{K'}$ и $S(\mathfrak{g})^{K'}$ множества всех $\mathrm{Ad}_{K'}$-инвариантных элементов в алгебрах $U(\mathfrak{g})$ и $S(\mathfrak{g})$ соответственно.

Следующая теорема хорошо известна [18; 33; 63].

Теорема 2.1 (Пуанкаре–Биркгофа–Витта). *Коммутативные алгебры* $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ *и* $S(\mathfrak{g})$ *изоморфны. Множество* $(e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} \mid 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant N;\ k \in \mathbb{N})$ *является базисом в* $U(\mathfrak{g})$.

Предложение 2.1 ([33], 2.4.5, 2.4.6). Линейное *отображение симметризации* $\lambda \colon S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, определенное на мономах формулой

$$\lambda(e^*_{i_1} \cdot \ldots \cdot e^*_{i_k}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} e_{i_{\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot e_{i_{\sigma(k)}},$$

где $\mathfrak{S}_k$ — группа, состоящая из всех перестановок k элементов, является изоморфизмом линейных пространств.

Для любой подгруппы K' группы G обозначим через $U(\mathfrak{g})^{K'}$ и $S(\mathfrak{g})^{K'}$ множества всех $\mathrm{Ad}_{K'}$-инвариантных элементов в алгебрах $U(\mathfrak{g})$

[2]Мы не включаем основное поле $\mathbb{R}$ в алгебру $U(\mathfrak{g})$, как делают некоторые авторы [33; 70], полагая $U_0(\mathfrak{g}) := \mathbb{R}$, $[U_0(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g})] = 0$.

и $S(\mathfrak{g})$ соответственно. Предложение 2.1 и очевидное равенство $\lambda \circ \mathrm{Ad}_q = \mathrm{Ad}_q \circ \lambda$, $\forall q \in G$ дают:

$$\lambda\left(S(\mathfrak{g})^{K'}\right) = U(\mathfrak{g})^{K'}. \tag{2.4}$$

Векторные поля на группе G можно рассматривать как дифференциальные операторы первого порядка и любой дифференциальный оператор на G можно рассматривать как многочлен от X_i^l или от X_i^r, $i = 1, \ldots, N$ с переменными коэффициентами. Ясно, что любая полиномиальная комбинация левоинвариантных векторных полей на группе G с постоянными коэффициентами лежит в $\mathrm{LDiff}(G)$. Это соответствие определяет гомоморфизм $\iota\colon U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{LDiff}(G)$. Ниже под многочленом мы понимаем упорядоченный многочлен, в котором каждый моном является упорядоченным произведением.

Теорема 2.2. *Гомоморфизм ι является изоморфизмом.*

Доказательство. Остается доказать только сюръективность ι. Пусть $D \in \mathrm{LDiff}(G)$, тогда существует многочлен P такой, что

$$(Df)(e) = P(\partial/\partial t^1, \ldots, \partial/\partial t^N) f\left(\exp(t^1 e_1 + \ldots + t^N e_N)\right), \; f \in C^\infty(G),$$

поскольку множество $(t^1, \ldots t^N) \in \mathbb{R}^N$ является *нормальными координатами* точки $\exp(t^1 e_1 + \ldots + t^N e_N)$ из некоторой окрестности единичного элемента $e \in G$. Тогда, ввиду левой инвариантности оператора D, имеем:

$$(Df)(q) = P(\partial/\partial t^1, \ldots, \partial/\partial t^N) f\left(q \exp(t^1 e_1 + \ldots + t^N e_N)\right), \; q \in G.$$

Пусть

$$D_* = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} P\left(e_{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_N}\right) \in U(\mathfrak{g}).$$

Мы утверждаем, что $\iota(D_*) = D$. Для элемента $X = t^i e_i \equiv \sum_{i=1}^N t^i e_i \in \mathfrak{g}$ получаем

$$\left(t^i X_i^l\right)^k f(q) = \left(X^l\right)^k f(q) = \frac{d^k}{dt^k} f\left(g \exp tX\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \left(t^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right)^k f\left(q \exp(y^i e_i)\right)\Big|_{y^i=0},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $y^i := tt^i$. Сравнивая члены, содержащие моном $\prod_{i=1}^k t^{j_i}$, где $1 \leqslant j_i \leqslant N$, в левой и правой частях последнего равенства, мы получаем

$$\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} X^l_{j_{\sigma(1)}} \circ \ldots \circ X^l_{j_{\sigma(k)}} f(q) = \left(\prod_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial y^{j_i}}\right) f(q\exp(y^j e_j))\Big|_{y^j=0}.$$

Это означает, что оператор $\square \in \mathrm{LDiff}(G)$ вида

$$\square\colon f(q) \to \left(\prod_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial y^{j_i}}\right) f(q\exp(y^j e_j))\Big|_{y^j=0}$$

лежит в $\iota(U(\mathfrak{g}))$. Ввиду линейности справедливы формулы $\iota(D_*) = D$ и $\mathrm{LDiff}(G) = \iota(U(\mathfrak{g}))$. ■

Из этого доказательства и предложения 2.1 мы получаем также:

Следствие 2.1. *Композиция $\lambda^* := \iota \circ \lambda$ является изоморфизмом линейных пространств $S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{LDiff}(G)$, причем справедлива следующая формула:*

$$\begin{aligned}&\left(\lambda^*(P(Y^*_{i_1},\ldots,Y^*_{i_k}))f\right)(q) = \\ &= P(\partial/\partial t^{i_1},\ldots,\partial/\partial t^{i_k}) f\left(q\exp(t^{i_1}Y_{i_1}+\ldots+t^{i_k}Y_{i_k})\right)\big|_{t=0} = \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} P\left(Y^l_{i_{\sigma(1)}},\ldots,Y^l_{i_{\sigma(k)}}\right) f(q),\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $Y_{i_j} \in \mathfrak{g}$, $j = 1,\ldots,k$, а P — многочлен.

Для оператора $\square \in \mathrm{LDiff}(G)$ назовем элемент $(\lambda^*)^{-1}\square \in S(\mathfrak{g})$ *лисимволом* оператора $\square$. Пусть $\widetilde{\mathrm{Ad}}_q\square := \widetilde{L}_q \circ \widetilde{R}_{q^{-1}}(\square)$, $\square \in \mathrm{Diff}(G)$, $q \in G$. Ясно, что отображение $\widetilde{\mathrm{Ad}}_q$ является автоморфизмом алгебр $\mathrm{Diff}(G)$, $\mathrm{LDiff}(G)$, $\mathrm{RDiff}(G)$. Очевидно,

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_q\square = \widetilde{R}_{q^{-1}}(\square),\ \square \in \mathrm{LDiff}(G).$$

Лемма 2.1. *Для элемента $q \in G$ в алгебре $\mathrm{LDiff}(G)$ выполняется равенство:*

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_q \circ \iota = \iota \circ \mathrm{Ad}_q\,.$$

Доказательство. Для $X \in \mathfrak{g}$ и $f \in C^\infty(G)$ имеем

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_q \circ \iota(X)(f)\Big|_g = \widetilde{L}_q \circ \widetilde{R}_{q^{-1}} \circ \iota(X)(f)\Big|_g = \widetilde{R}_{q^{-1}} \circ \iota(X)(f)\Big|_g =$$

$$= \widehat{R}_{q^{-1}} \circ \iota(X)\left(\widehat{R}_q f\right)\Big|_g = \frac{d}{dt} f\left(gq\exp(tX)q^{-1}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} f\left(g\exp\left(t\,\mathrm{Ad}_q X\right)\right)\Big|_{t=0} = \left(\iota \circ \mathrm{Ad}_q X(f)\right)(g);\ g, q \in G.$$

В соответствии с теоремой 2.2 элементы $\iota(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, порождают алгебру $\mathrm{LDiff}(G)$, поэтому в ней справедливо равенство $\widetilde{\mathrm{Ad}}_q \circ \iota = \iota \circ \mathrm{Ad}_q$.

Предложение 2.2. $\mathrm{ZLDiff}(G) = \lambda^*(S(\mathfrak{g})^G)$.

Доказательство. Поскольку алгебры $\mathrm{LDiff}(G)$ и $U(\mathfrak{g})$ изоморфны, выполнено равенство $\iota(ZU(\mathfrak{g})) = \mathrm{ZLDiff}(G)$.

Центр $ZU(\mathfrak{g})$ совпадает с множеством $U(\mathfrak{g})^G$. Действительно, если $Y \in U(\mathfrak{g})^G$, то $[X, Y] = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\exp(tX)} Y\Big|_{t=0} = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, и поэтому $[A, Y] = 0$, $\forall A \in U(\mathfrak{g})$. Наоборот, если $Y \in ZU(\mathfrak{g})$, то

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\exp(tX)} Y = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\exp(tX)} \circ \frac{d}{ds}\mathrm{Ad}_{\exp(sX)} Y\Big|_{s=0} = \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}[X, Y] = 0,$$

$\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Отсюда $\mathrm{Ad}_{\exp X} Y = Y$, $\forall X \in \mathfrak{g}$ и $\mathrm{Ad}_q Y = Y$, $\forall q \in G$, поскольку связные группы Ли порождаются любыми окрестностями своих единичных элементов.

Теперь предложение следует из равенства $\lambda(S(\mathfrak{g})^G) = U(\mathfrak{g})^G$. ■

Предположим, что алгебра Ли g полупроста, тогда ее форма Киллинга $\mathrm{Kil}_{\mathfrak{g}}$ не вырождена. Пусть e_i, $i = 1, \ldots, N$, — базис в алгебре $\mathfrak{g}$, а e^j, $j = 1, \ldots, N$, — дуальный базис, так что $\mathrm{Kil}_{\mathfrak{g}}(e_i, e^j) = \delta_i^j$.

Лемма 2.2. *Элемент $C := e_i e^i \in U(\mathfrak{g})$ не зависит от выбора базиса e_i и лежит в $ZU(\mathfrak{g})$. Кроме того, $C = e^i e_i$. Таким образом, $\iota(C) \in \mathrm{ZLDiff}(G)$.*

Доказательство. Если $\overline{e}_i = a_i^j e_j$ — другой базис в алгебре $\mathfrak{g}$, то дуальный к нему базис есть $\overline{e}^j = b_i^j e^i$, где $b_k^i a_j^k = \delta_j^i$. Отсюда $\overline{e}_i \overline{e}^i = a_i^j b_k^i e_j e^k = \delta_k^j e_j e^k = e_j e^j$ и аналогично $e^i e_i = \overline{e}^i \overline{e}_i$.

Форма Киллинга является $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-инвариантной. Поэтому

$$\alpha_i^j(X) := \mathrm{Kil}_{\mathfrak{g}}([X, e_i], e^j) = -\mathrm{Kil}_{\mathfrak{g}}(e_i, [X, e^j]) =: -\beta_i^j(X),\ \forall X \in \mathfrak{g},$$

где $[X, e_i] = \alpha_i^j(X)e_j$, $[X, e^i] = \beta_j^i(X)e^j$. Таким образом:

$$[X, C] = [X, e_i]e^i + e_i[X, e^i] = \alpha_i^j(X)e_je^i + \beta_j^i(X)e_ie^j =$$
$$= \left(\alpha_i^j(X) + \beta_i^j(X)\right) e_je^i = 0.$$

Хорошо известно, что базис e_i можно выбрать таким образом, что $e_i = \pm e^i$. Поэтому, поскольку в этом случае $[e_i, e^i] = 0$, получаем $C = e^ie_i$.

Элемент C был введен Казимиром в работе [109]. Его образы под действием представлений алгебры $\mathfrak{g}$ называются *операторами Казимира*.

2.1.3. Инвариантные дифференциальные операторы на однородных пространствах

Функции на G-однородном пространстве $M \cong G/K$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с функциями на группе G, инвариантными относительно правых K-сдвигов. Это соответствие определяется формулой $\zeta : f \to \widetilde{f} := f \circ \pi_1$, где f — функция на пространстве M, $\widetilde{f}$ — соответствующая функция на группе G, а π_1, как и выше, — каноническая проекция $G \to G/K$. Если функция f гладкая, то функция $\widetilde{f}$ также гладка. Определим отображение

$$\eta : \mathrm{LDiff}_K(G) \to \mathrm{Diff}_G(M)$$

формулой

$$\eta(\Box)f = \zeta^{-1} \circ \Box \circ \zeta(f),\ f \in C^\infty(M),\ \Box \in \mathrm{LDiff}_K(G).$$

Это отображение корректно определено, поскольку функция $\Box \circ \zeta(f)$ инвариантна относительно правых K-сдвигов. Очевидно, что η — гомоморфизм.

Предположим, что пространство M *редуктивно*, т. е. $\mathrm{Ad}_K\,\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$, и поэтому $[\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}$.

Это предположение справедливо, если M — риманово пространство, а G — группа его изометрий или ее подгруппа. Действительно, в этом случае стационарная подгруппа K компактна как подгруппа группы $\mathrm{SO}(m)$. При помощи усреднения на группе K можно определить Ad_K-инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$ и выбрать подпространство $\mathfrak{p}$ ортогональным к $\mathfrak{k}$ относительно этого произведения

[46; 82]. В дальнейшем в связи с двухточечно-однородными пространствами мы будем рассматривать только этот случай.

В некоторой окрестности точки $x_0 \in M$ набор чисел $(x^1, \dots, x^m)$ является координатами точки $\pi_1(\exp(\sum_{i=1}^m x^i e_i))$. Пусть $P(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ — полиномиальное выражение оператора $\Box \in \mathrm{Diff}_G(M)$ в точке x_0. Определим отображение

$$\varkappa : \mathrm{Diff}_G(M) \to S(\mathfrak{p}) \subset S(\mathfrak{g}) \tag{2.6}$$

формулой $\varkappa(\Box) = P(e_1^*, \dots, e_m^*) \in S(\mathfrak{p})$. Прямые вычисления показывают, что отображение $\varkappa$ не зависит от выбора базиса в пространстве $\mathfrak{p}$. Назовем элемент $\varkappa(\Box)$ *ли-символом* оператора $\Box \in \mathrm{Diff}_G(M)$. В случае $M = G$ это тот же ли-символ, что и в предыдущем пункте.

Поскольку $\widehat{\tau}_{q^{-1}} \circ \Box \circ \widehat{\tau}_q = \Box$, $\forall q \in G$, для любой функции $f \in C^\infty(M)$ имеем

$$\begin{aligned}
(\Box f)(qx_0) &= \widehat{\tau}_{q^{-1}} \circ \Box(f)(x_0) = \Box \circ \widehat{\tau}_{q^{-1}}(f)(x_0) = \\
&= P\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) f\left(\pi\left(q \exp(\sum_{i=1}^m x^i e_i)\right)\right)\Bigg|_{x^i=0} = \\
&= P\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) \widetilde{f}\left(q \exp(\sum_{i=1}^m x^i e_i)\right)\Bigg|_{x^i=0} = \\
&= \eta \circ \lambda^*(P(e_1^*, \dots, e_m^*)) f(qx_0).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Последнее равенство следует из (2.5). Пусть $q \in K$, $\mathrm{Ad}_q\, e_i =: A_i^j e_j$ и $y^j := A_i^j x^i$. Тогда $\frac{\partial}{\partial x^i} = A_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$, $\mathrm{Ad}_q\, e_i^* = A_i^j e_j^*$ и в силу $qx_0 = x_0$ выполнено равенство

$$\begin{aligned}
(\Box f)(x_0) &= P\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) \widetilde{f}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^m x^i \,\mathrm{Ad}_q\, e_i\right)\right)\Bigg|_{x^i=0} = \\
&= \widetilde{P}\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m}\right) \widetilde{f}\left(\exp(\sum_{i=1}^m y^i e_i)\right)\Bigg|_{y^i=0},
\end{aligned}$$

где $\widetilde{P}(e_1^*, \dots, e_m^*) = P(\mathrm{Ad}_q\, e_1^*, \dots, \mathrm{Ad}_q\, e_m^*) = \mathrm{Ad}_q\, P(e_1^*, \dots, e_m^*)$, поскольку отображение $\varkappa$ не зависит от выбора базиса в пространстве $\mathfrak{p}$,

в частности, при переходе к базису $\mathrm{Ad}_q e_i$. С другой стороны, многочлены P и $\widetilde{P}$ являются двумя выражениями оператора $\square$ в точке x_0, поэтому $\widetilde{P}(e_1^*, \ldots, e_m^*) = P(e_1^*, \ldots, e_m^*)$, т. е. $P(e_1^*, \ldots, e_m^*) \in S(\mathfrak{p})^K$, где $S(\mathfrak{p})^K$ — множество всех Ad_K-инвариантных элементов в алгебре $S(\mathfrak{p})$. Отметим, что $S(\mathfrak{p})^K \subset S(\mathfrak{g})^K$.

Рассуждая в обратном порядке, мы получаем из (2.7), что если $P(e_1^*, \ldots, e_n^*) \in S(\mathfrak{p})^K$, то

$$\lambda^*(P(e_1^*, \ldots, e_n^*)) \in \mathrm{LDiff}_K(G) \quad \text{и} \quad \eta \circ \lambda^*(P(e_1^*, \ldots, e_n^*)) \in \mathrm{Diff}_G(M).$$

Выражением оператора $\eta \circ \lambda^*(P(e_1^*, \ldots, e_n^*))$ в точке x_0 через координаты $x^1, \ldots, x^m$ является снова $P\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^m}\right)$, поэтому $\varkappa \circ \eta \circ \lambda^* = \mathrm{id}$.

Формула (2.7) влечет равенство $\eta \circ \lambda^* \circ \varkappa = \mathrm{id}$, т. е. коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
S(\mathfrak{p})^K \arrow[r, "\lambda"] & U(\mathfrak{g})^K \arrow[r, "\iota"] & \mathrm{LDiff}_K(G) \arrow[d, "\eta"] \\
\mathrm{Diff}_G(M) \arrow[u, "\varkappa"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & \mathrm{Diff}_G(M)
\end{tikzcd}$$

Таким образом, отображение $\varkappa$ биективно, η — сюръективно, а отображение $\lambda^* = \iota \circ \lambda$ инъективно, откуда

$$\mathrm{LDiff}_K(G) = \lambda^*(S(\mathfrak{p})^K) \oplus \ker \eta. \tag{2.8}$$

Лемма 2.3. *Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}'$ и любой ее подалгебры $\mathfrak{k}'$ обозначим через $U(\mathfrak{g}')\mathfrak{k}'$ левый идеал в $U(\mathfrak{g}')$, порожденный подалгеброй $\mathfrak{k}'$. Пусть $\mathfrak{g}' = \mathfrak{p}' \oplus \mathfrak{k}'$ — разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}'$ в прямую сумму линейных подпространств. Тогда линейное пространство $U(\mathfrak{g}')$ допускает разложение:*

$$U(\mathfrak{g}') = U(\mathfrak{g}')\mathfrak{k}' \oplus \lambda(S(\mathfrak{p}')). \tag{2.9}$$

Доказательство. Прямое доказательство проводится индукцией по степени полиномиального выражения элемента из $U(\mathfrak{g}')$ через элементы алгебры $\mathfrak{g}'$. ■

Пусть $(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ — множество всех Ad_K-инвариантных элементов из $U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$. Оно является двусторонним идеалом $U(\mathfrak{g})^K$, поскольку для

элементов $f \in \mathfrak{k}$ и $g \in U(\mathfrak{g})^K$ справедливо равенство $fg = \mathrm{ad}_f\, g + gf = gf$. Поэтому корректно определена фактор-алгебра $U(\mathfrak{g})^K/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$. Если $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}, \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$, то оба слагаемых в (2.9) являются Ad_K-инвариантными и справедливо равенство

$$U(\mathfrak{g})^K = (U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K \oplus \lambda(S(\mathfrak{p})^K). \tag{2.10}$$

Согласно теореме 2.2 отображение $\iota\colon U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{LDiff}(G)$ является изоморфизмом. Поэтому в силу леммы 2.1 отображение $\iota|_{U(\mathfrak{g})^K}$ — изоморфизм алгебр $U(\mathfrak{g})^K$ и $\mathrm{LDiff}_K(G)$. Из разложений (2.8) и (2.10) мы получаем

$$\mathrm{LDiff}_K(G) = \iota\left(U(\mathfrak{g})^K\right) = \iota\left((U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K\right) \oplus \lambda^*(S(\mathfrak{p})^K). \tag{2.11}$$

Очевидно, что $\eta \circ \iota\left((U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K\right) = 0$, и, сравнивая (2.11) с (2.8), получаем $\iota\left((U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K\right) = \ker \eta$.

Эти рассуждения можно подытожить в следующей теореме.

Теорема 2.3. *Изоморфизм $\eta \circ \iota$ индуцирует изоморфизм*

$$\iota^*\colon U(\mathfrak{g})^K/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K \to \mathrm{Diff}_G(M).$$

Отображение $\eta \circ \lambda^* = \eta \circ \iota \circ \lambda$ является изоморфизмом линейных пространств $S(\mathfrak{p})^K$ и $\mathrm{Diff}_G(M)$.

Фильтрация алгебры $U(\mathfrak{g})$ индуцирует фильтрацию алгебры $\mathrm{Diff}_G(M)$, совпадающую с естественной фильтрацией алгебры $\mathrm{Diff}_G(M)$ как алгебры дифференциальных операторов.

Ввиду $\mathrm{ZLDiff}(G) \subset \mathrm{LDiff}_K(G)$, из предложения 2.2 и леммы 2.2 вытекает

Следствие 2.2. *Множество $\eta\circ\lambda^*(S(\mathfrak{g})^G)$ и элемент $\eta\circ\iota(C)$ лежат в $\mathrm{Z}\,\mathrm{Diff}_G(M)$.*

Это означает, что любой Ad_G-инвариантный элемент из $S(\mathfrak{g})$ порождает элемент из $\mathrm{Z}\,\mathrm{Diff}_G(M)$. Оператор $\eta \circ \iota(C)$ является оператором Казимира.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Мы будем использовать оператор $\lambda^* \circ \varkappa(\Box) \in \mathrm{LDiff}_K(G)$ как поднятие $\widetilde{\Box}$ оператора $\Box \in \mathrm{Diff}_G(M)$ на группу G.

Следующая теорема дает рецепт вычисления этого поднятия.

Теорема 2.4. *Пусть* $\Box|_{x_0} = P(\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_k)\Big|_{x_0}$, *где* P — *многочлен, инвариантный относительно любой перестановки его аргументов,* $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{g}$ *и* $\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_k$ — *соответствующие киллинговы векторные поля. Тогда* $\lambda^* \circ \varkappa(\Box) = P(Y_1^l, \ldots, Y_k^l)$. *Эта формула для поднятия зависит от разложения* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \equiv \mathfrak{k}_{x_0} \oplus \mathfrak{p}_{x_0}$.

Доказательство. Поскольку

$$\widetilde{Y}^k f(x_0) = \frac{d^k}{dt^k} f\left(\exp(tY)x_0\right)\Big|_{t=0}, \; Y \in \mathfrak{g}, \; f \in C^\infty(M),$$

то те же аргументы, что и в доказательстве теоремы 2.2, приводят к формуле:

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \widetilde{P}\left(\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_k\right) f(x_0) =$$
$$= \widetilde{P}\left(\partial/\partial t^1, \ldots, \partial/\partial t^k\right) f\left(\exp(t^1 Y_1 + \ldots + t^k Y_k)x_0\right)\Big|_{t^i=0}$$

для любого многочлена $\widetilde{P}$ и элементов $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{g}$. Отсюда

$$\Box f(x_0) = P\left(\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_k\right) f(x_0) =$$
$$= P\left(\partial/\partial t^1, \ldots, \partial/\partial t^k\right) f\left(\exp(t^1 Y_1 + \ldots + t^k Y_k)x_0\right)\Big|_{t^i=0}.$$

Таким образом, $\varkappa(\Box) = P\left(Y_1^*, \ldots, Y_k^*\right)$, и из следствия 2.1 и симметричности многочлена P получаем: $\lambda^* \circ \varkappa(\Box) = P\left(Y_1^l, \ldots, Y_k^l\right)$. ■

Следующее предложение содержит теоретические основы для вычисления инвариантов в главе 3.

Предложение 2.3 ([22] гл. 11, теоремы 3, 4). Пусть G — компактная группа Ли, действующая в вещественном или комплексном векторном пространстве V. Тогда алгебра $S(V^*)^G$ ее полиномиальных инвариантов является конечно порожденной. Для вещественного пространства V орбиты действия группы G разделяются полиномиальными инвариантами.

Для поиска инвариантов будет также использоваться следующая очевидная лемма.

Лемма 2.4. *Пусть группа G действует в евклидовом пространстве V, $\dim V = m$ ортогональными преобразованиями. Пусть e_i, $i=1,\dots m$,— ортономированный базис, а x^i, $i = 1,\dots m$,— соответствующие координаты. Пусть $P(x^1,\dots,x^m)$ — полиномиальный инвариант действия G на V. Тогда $P(e_1,\dots,e_m)$ является G-инвариантным элементом из $S(V)$ и данное соответствие взаимнооднозначно.*

Доказательство. Пусть A_g — матрица, соответствующая действию элемента $g \in G$ в базисе $x^1,\dots,x^m$ пространства V^*, тогда A_g^T — матрица, соответствующая действию элемента g в базисе $e_1,\dots,e_m$. Ортогональность G-действия в V дает $A_g^T = A_g^{-1} = A_{g^{-1}}$, что завершает доказательство. ■

2.1.4. Представление алгебры $\mathrm{Diff}_G(M)$ образующими и соотношениями

Пусть

$$P(a_1,\dots,a_k) = \sum_l \sum_{(i_1,\dots,i_l)} p_{(i_1,\dots,i_l)} a_{i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_l} \tag{2.12}$$

— упорядоченный многочлен, где $(i_1,\dots i_l)$ — выборки с повторениями из множества $(1,\dots,k)$, a_i — элементы некоторой ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{K}$ и $p_{(i_1,\dots,i_l)} \in \mathbb{K}$. Назовем его симметричным, если для всех коэффициентов $p_{(i_1,\dots,i_l)}$ в (2.12) справедливо равенство

$$p_{(i_1,\dots,i_l)} = p_{(\sigma(i_1),\dots\sigma(i_l))},\ \forall\sigma \in \mathfrak{S}_l.$$

Пусть $\pi_2\colon U(\mathfrak{g})^K \to U(\mathfrak{g})^K/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ — каноническая проекция. Соотношения в $\mathrm{Diff}_G(M) \cong U(\mathfrak{g})^K/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ можно найти, оперируя в $U(\mathfrak{g})^K$ по модулю $(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$. Этот подход требует менее громоздких выкладок, чем вычисления в локальных координатах на M (как в работе [182]), которые сложны даже в относительно простом случае пространства $M = \mathbf{H}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}}$.

Пусть (g_i) — множество образующих[3] подалгебры $S(\mathfrak{p})^K$ коммутативной алгебры $S(\mathfrak{p})$. Без потери общности можно считать, что все g_i

[3]Между ними могут быть соотношения или *сизигии*. Соотношения между сизигиями (если они существуют) называются сизигиями второго порядка и т.д.

являются однородными элементами по отношению к градуировке алгебры $S(\mathfrak{p})$. Ввиду разложения (2.10), элементы $\pi_2 \circ \lambda(g_i)$ порождают алгебру $U(\mathfrak{g})^K/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$.

Соотношения между элементами $\pi_2 \circ \lambda(g_i)$ бывают двух типов. Первый тип состоит из соотношений, индуцированных соотношениями в алгебре $U(\mathfrak{g})$. Ввиду универсальности алгебры $U(\mathfrak{g})$, все такие соотношения являются коммутационными, т. е. индуцированными операцией Ли в $\mathfrak{g}$. Они приводятся к *коммутационным соотношениям* или *соотношениям первого типа* в простейшей форме: $[D_1, D_2] = \widetilde{D}$, где операторы $D_1, D_2 \in U(\mathfrak{g})^K/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ имеют степени m_1 и m_2 соответственно, а степень оператора $\widetilde{D} \in U(\mathfrak{g})^K/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ меньше или равна m_1+m_2-1.

Предположим теперь, что в алгебре $U(\mathfrak{g})^K/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ имеется соотношение вида:

$$P(\pi_2 \circ \lambda(g_1), \ldots, \pi_2 \circ \lambda(g_k)) = 0$$

или эквивалентное соотношение в алгебре $U(\mathfrak{g})$

$$P(\lambda(g_1), \ldots, \lambda(g_k)) = \widetilde{D}, \tag{2.13}$$

где P — упорядоченный многочлен и $\widetilde{D} \in (U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$. Используя коммутационные соотношения между элементами $\lambda(g_i)$, $i = 1, \ldots, k$, можно привести многочлен

$$P(\lambda(g_1), \ldots, \lambda(g_k))$$

к симметричному многочлену

$$P_s(\lambda(g_1), \ldots, \lambda(g_k)).$$

При этом уравнение (2.13) принимает вид:

$$P_s(\lambda(g_1), \ldots, \lambda(g_k)) = \sum_l \sum_{(i_1,\ldots,i_l)} p_{(i_1,\ldots,i_l)} \lambda(g_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \lambda(g_{i_l}) = D_*, \tag{2.14}$$

где $D_* \in (U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$. Соотношения (2.14) могут быть тривиальными:

$$p_{(i_1,\ldots,i_l)} = 0, \forall (i_1, \ldots, i_l),\ D_* = 0.$$

Это означает, что соотношение (2.13) является коммутационным. Предположим, что соотношение (2.14) нетривиально. Пусть $P_1(\lambda(g_1), \ldots \ldots, \lambda(g_k))$ — сумма мономов многочлена $P_s(\lambda(g_1), \ldots, \lambda(g_k))$ наибольшей степени в алгебре $U(\mathfrak{g})$. Рассмотрим многочлен $P_1(t_1, \ldots, t_k)$

с коммутативными переменными $t_1, \ldots, t_k$. Ввиду определения симметричного многочлена (2.14), многочлен $P_1(t_1, \ldots, t_k)$ нетривиален. С другой стороны, из (2.14) следует, что $P_1(g_1, \ldots, g_k) = 0$ с учетом разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$. Значит, любому соотношению между образующими $\pi_2 \circ \lambda(g_1), \ldots, \pi_2 \circ \lambda(g_k)$ алгебры $U(\mathfrak{g})^K/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ по модулю коммутационных соотношений и соотношений низших степеней соответствует соотношение между однородными образующими $g_1, \ldots, g_k$ коммутативной алгебры $S(\mathfrak{p})^K$. Назовем такие соотношения *соотношениями второго типа*.

Наоборот, пусть

$$P_1(g_1, \ldots, g_k) = 0$$

— нетривиальное соотношение в алгебре $S(\mathfrak{p})^K$. Не теряя общности, можно предполагать многочлен $P_1(g_1, \ldots, g_k)$ однородным (т.е. все его мономы имеют одинаковую степень d в $S(\mathfrak{p})$) и упорядоченным. Пусть все его мономы имеют степень d в алгебре $S(\mathfrak{p})$. Тогда очевидно, что

$$P_1(\lambda(g_1), \ldots, \lambda(g_k)) = \widetilde{D}, \tag{2.15}$$

где $\widetilde{D}$ — элемент из $U(\mathfrak{g})^K$ степени, меньшей чем d. После редукции соотношений (2.15) по модулю $(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ получаем соотношение в алгебре $U(\mathfrak{g})^K/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$:

$$P(\pi_2 \circ \lambda(g_1), \ldots, \pi_2 \circ \lambda(g_k)) = 0,$$

где P — многочлен степени d, совпадающий в старших членах с многочленом P_1.

Таким образом, получаем

Предложение 2.4. Существует описанное выше взаимно-однозначное соответствие между соотношениями для образующих $g_1, \ldots, g_k$ алгебры $S(\mathfrak{p})^K$ и соотношениями для образующих $\pi_2 \circ \lambda(g_1), \ldots, \pi_2 \circ \lambda(g_k)$ алгебры $U(\mathfrak{g})^K/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ по модулю соотношений низших степеней и коммутационных соотношений.

На протяжении всей книги мы будем рассматривать для простоты инвариантность дифференциальных операторов только относительно компоненты связности единицы полной группы изометрий риманова пространства.

На любой группе Ли существует единственная с точностью до постоянного множителя лево- или правоинвариантная мера (мера Хаара)

[42; 82]. Обозначим через μ_G некоторую левоинвариантную меру Хаара на G. Мера на пространстве M, порожденная G-инвариантной метрикой, также G-инвариантна. Все G-инвариантные меры на M пропорциональны [82], и такую меру можно определит, положив $\mu_M(V) = \mu_G(\pi_1^{-1}(V))$ для любого компактного множества $V \in M$. Группа K_{x_0} компактна, поэтому множество $\pi_1^{-1}(V)$ также компактно и $\mu_G(\pi_1^{-1}(V)) < \infty$. Мера μ_M — левоинвариантна, в силу левоинвариантности меры μ_G.

Левоинвариантные меры на унимодулярных группах являются также правоинвариантными. Замена точки $x_0 \in M$ точкой $x_1 = qx_0, q \in G$, влечет замену прообраза $\pi_1^{-1}(V)$ на $\pi_1^{-1}(V)q^{-1}$ при отождествлении пространства M с пространством G/K_{x_0}. Поэтому G-инвариантная мера μ_M для унимодулярной группы G не зависит от выбора точки x_0.

§ 2.2. Оператор Лапласа–Бельтрами в подвижном репере

В этом параграфе мы не предполагаем пространство M однородным по отношению к его группе изометрий, если иное не сказано явно. Здесь мы найдем многочлен P из теоремы 2.4, соответствующий оператору Лапласа–Бельтрами на римановом пространстве M. Получим, во-первых, выражение оператора Лапласа–Бельтрами в произвольном подвижном репере.

Обозначим метрику на M через g. Пусть $x^i, i = 1, \ldots, m$, — локальные координаты в области $U \subset M$, а $g_{ij}dx^i dx^j$ — соответствующее выражение метрики g на U. Всюду в этом параграфе индексы меняются от 1 до m. Оператор Лапласа–Бельтрами, порожденный метрикой g, имеет на U следующий вид:

$$\triangle_g = (\gamma)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\gamma} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right), \tag{2.16}$$

где $\gamma = |\det g_{ij}|$, а $g^{ij}(x)$ — матрица, обратная к матрице $g_{ij}(x)$. Оператор $\triangle_g$ сохраняется всеми изометриями пространства M. Наоборот, если оператор $\triangle_g$ сохраняется некоторым диффеоморфизмом пространства M, то этот диффеоморфизм является изометрией [82].

Пусть $\xi_i = \phi_i^k(x)\partial/\partial x^k$ — векторные поля на U, образующие подвижный репер. Любое векторное поле является дифференциальным оператором первого порядка. Используя операцию композиции, любой дифференциальный оператор на U можно выразить через этот подвижный репер с некоторыми (вообще говоря, непостоянными) коэффициен-

тами. Пусть $\|\psi^i_j\|$ — матрица, обратная к матрице $\|\phi^k_i\|$. Тогда $\partial/\partial x^k = \psi^m_k \xi_m$ и $\widehat{g}_{i,j} := g(\xi_i, \xi_j) = \phi^k_i \phi^m_j g_{km}$ — коэффициенты метрики g в подвижном репере ξ_i. Отсюда $\widehat{g}^{ij} = \psi^i_k g^{kn} \psi^j_n$ и $\widehat{\gamma} := |\det \widehat{g}_{ij}| = \phi^2 \gamma$, где $\phi = \det \|\phi^k_i\|$. Подставляя эти формулы в (2.16), получаем:

$$\begin{aligned}
\triangle_g &= (\widehat{\gamma})^{-1/2} \phi \psi^q_i \xi_q \circ \left(\phi^{-1} \widehat{\gamma}^{1/2} \phi^i_k \widehat{g}^{kn} \phi^j_n \psi^p_j \xi_p\right) = \\
&= (\widehat{\gamma})^{-1/2} \phi \psi^q_i \xi_q \circ \left(\phi^{-1} \widehat{\gamma}^{1/2} \phi^i_k \widehat{g}^{kn} \xi_n\right) = \\
&= (\widehat{\gamma})^{-1/2} \psi^q_i \phi^i_k \xi_q \circ \left(\widehat{\gamma}^{1/2} \widehat{g}^{kn} \xi_n\right) + \phi \psi^q_i \widehat{g}^{kn} \xi_q \left(\phi^{-1} \phi^i_k\right) \xi_n = \\
&= (\widehat{\gamma})^{-1/2} \xi_k \circ \left(\widehat{\gamma}^{1/2} \widehat{g}^{kn} \xi_n\right) + \widehat{g}^{kn} L_k \xi_n,
\end{aligned}$$

где $L_k = \phi \psi^q_i \xi_q \left(\phi^{-1} \phi^i_k\right) = \psi^q_i \xi_q \left(\phi^i_k\right) + \phi \xi_k \left(\phi^{-1}\right) = \psi^q_i \xi_q \left(\phi^i_k\right) - \phi^{-1} \xi_k(\phi)$.

Обозначим $\Phi(x) = \|\phi^i_k(x)\|$. Используя хорошо известную формулу $\det \exp(A) = \exp(\mathrm{Tr} A)$, где A — произвольная комплексная матрица, получаем:

$$\begin{aligned}
\phi^{-1} \xi_k(\phi) = \xi_k(\ln \phi) = \xi_k \left(\ln \exp(\mathrm{Tr} \ln \Phi)\right) = \xi_k \left(\mathrm{Tr} \ln \Phi\right) = \\
= \mathrm{Tr} \left(\Phi^{-1} \xi_k(\Phi)\right) = \psi^q_i \xi_k(\phi^i_q),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

поскольку $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ для любых квадратных матриц A и B. С другой стороны, следующие уравнения для коммутаторов векторных полей:

$$[\xi_i, \xi_j] = \xi_i \left(\phi^k_j\right) \frac{\partial}{\partial x^k} - \xi_j \left(\phi^k_i\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\xi_i \left(\phi^k_j\right) - \xi_j \left(\phi^k_i\right)\right) \psi^q_k \xi_q =: c^q_{ij} \xi_q$$

определяют функции

$$c^q_{ij} = \left(\xi_i \left(\phi^k_j\right) - \xi_j \left(\phi^k_i\right)\right) \psi^q_k$$

на U. Поэтому, ввиду (2.17), получаем:

$$L_k = \left(\xi_q \left(\phi^i_k\right) - \xi_k \left(\phi^i_q\right)\right) \psi^q_i = c^q_{qk}.$$

Таким образом, формула для оператора Лапласа–Бельтрами в подвижном репере ξ_i имеет вид:

$$\triangle_g = (\widehat{\gamma})^{-1/2} \xi_q \circ \left(\sqrt{\widehat{\gamma}} \widehat{g}^{qn} \xi_n\right) + \widehat{g}^{kn} c^q_{qk} \xi_n. \tag{2.18}$$

Предположим теперь, что ξ_i — киллинговы векторные поля для метрики g на U.[4] Преобразуем формулу (2.18) к виду $\triangle_g = a^{ij}\xi_i \circ \xi_j + b^i\xi_i$. Ясно, что $a^{ij} = \widehat{g}^{ij}$, и остается вычислить коэффициенты b^i. Из известной формулы

$$X\,(g(Y,Z)) = (\pounds_X g)(Y,Z) + g([X,Y],Z) + g(Y,[X,Z]), \tag{2.19}$$

где X, Y, Z — векторные поля на M, $\pounds_X$ — производная Ли вдоль поля X, и формул $\pounds_{\xi_k} g = 0$, (2.17), (2.18) следует

$$\begin{aligned}
b^i\widehat{g}_{ij} &= \widehat{\gamma}^{-1/2}\xi_k(\widehat{\gamma}^{1/2}\widehat{g}^{ki})\widehat{g}_{ij} + \widehat{g}^{ki}c^q_{qk}\widehat{g}_{ij} = \\
&= \xi_k(\widehat{g}^{ki}\widehat{g}_{ij}) - \xi_k(\widehat{g}_{ij})\widehat{g}^{ki} + \frac{1}{2\widehat{\gamma}}\xi_k(\widehat{\gamma})\widehat{g}^{ki}\widehat{g}_{ij} + \\
&+ c^q_{qk}\delta^k_j = \xi_k(\delta^k_j) - \xi_k(g(\xi_i,\xi_j))\widehat{g}^{ki} + \frac{1}{2}\widehat{g}^{qi}\xi_k(\widehat{g}_{qi})\delta^k_j + c^q_{qj} = \\
&= -g([\xi_k,\xi_i],\xi_j)\widehat{g}^{ki} - g(\xi_i,[\xi_k,\xi_j])\widehat{g}^{ki} + \\
&+ \frac{1}{2}\widehat{g}^{qi}g([\xi_j,\xi_q],\xi_i) + \frac{1}{2}\widehat{g}^{qi}g(\xi_q,[\xi_j,\xi_i]) + c^q_{qj} = -\widehat{g}_{iq}c^q_{kj}\widehat{g}^{ki} + \\
&+ \frac{1}{2}\widehat{g}^{qi}c^k_{jq}\widehat{g}_{ki} + \frac{1}{2}\widehat{g}^{qi}c^k_{ji}\widehat{g}_{qk} + c^q_{qj} = -c^q_{qj} + \frac{1}{2}c^q_{jq} + \frac{1}{2}c^q_{jq} + c^q_{qj} = c^q_{jq},
\end{aligned} \tag{2.20}$$

принимая во внимание антисимметричность тензора c^q_{ki} по нижним индексам. Отсюда $b^i = c^q_{jq}\widehat{g}^{ji}$. Суммируем данные рассуждения в следующем предложении.

Предложение 2.5. В подвижном репере ξ_i, состоящем из киллинговых векторных полей, оператор Лапласа–Бельтрами имеет следующий вид:

$$\triangle_g = \sum_{i,j=1}^{m} \widehat{g}^{ij}\xi_i \circ \xi_j + \sum_{i,j,q=1}^{m} c^q_{jq}\widehat{g}^{ji}\xi_i.$$

Если пространство M однородно и $\xi_i = \widetilde{e}_i$, $i = 1,\ldots,m$, в обозначениях § 2.1, то теорема 2.4 дает следующее выражение для поднятия оператора $\triangle_g$ на группу G:

$$\widetilde{\triangle}_g = \sum_{i,j=1}^{m} \widehat{g}^{ij}\big|_{x_0} X^l_i \circ X^l_j + \sum_{i,j,q=1}^{m} c^q_{jq}\widehat{g}^{ji}\big|_{x_0} X^l_i.$$

[4]Локальный репер, состоящий из киллинговых векторных полей, существует для любого однородного риманова пространства.

Замечание 2.2. Иногда векторные поля ξ_i можно выбрать так, что $c^q_{jq} = 0$. В этом случае справедливы формулы $\triangle_g = \widehat{g}^{ij}\xi_i \circ \xi_j$ и $\widehat{\triangle}_g = \widehat{g}^{ij}\big|_{x_0} X^l_i \circ X^l_j$.

В дальнейшем нам потребуется следующее выражение для связности Леви–Чивиты ∇ через киллинговы векторные поля:

Лемма 2.5 ([10], 7.27). *Пусть ξ_i, $i = 1, 2, 3$, — киллинговы векторные поля. Тогда*

$$g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2}g(\xi_1, [\xi_2, \xi_3]) + \frac{1}{2}g(\xi_2, [\xi_1, \xi_3]) + \frac{1}{2}g([\xi_1, \xi_2], \xi_3).$$

В частности,

$$g(\nabla_{\xi_1}\xi_1, \xi_3) = g(\xi_1, [\xi_1, \xi_3]). \tag{2.21}$$

Доказательство. Вначале докажем справедливость формулы

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$$

для киллингова поля X и произвольных векторных полей Y и Z.

В частности, для $Z = Y$ или $Z = X$:

$$g(\nabla_Y X, Y) = -g(\nabla_Y X, Y) = 0, \; g(\nabla_Y X, X) = -g(\nabla_X X, Y). \tag{2.22}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 0 = (\pounds_X g)(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) = \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) - \\ &- g(Y, \nabla_X Z) + g(Y, \nabla_Z X) = \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X), \end{aligned}$$

где мы воспользовались отсутствием кручения у связности Леви–Чивиты: $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$. Используя (2.22) и отсутствие кручения еще раз, получаем:

$$g([\xi_1, \xi_3], \xi_1) = g(\nabla_{\xi_1}\xi_3 - \nabla_{\xi_3}\xi_1, \xi_1) = g(\nabla_{\xi_1}\xi_1, \xi_3).$$

Поляризацией (т. е. используя подстановку $\xi_1 \to \xi_1 + \xi_2$) получаем из последней формулы равенство:

$$\begin{aligned} &g([\xi_1, \xi_3], \xi_2) + g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) = \\ &= g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, \xi_3) + g(\nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_3) = \\ &= 2g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, \xi_3) + g([\xi_2, \xi_1], \xi_3). \end{aligned}$$

■

§ 2.3. Самосопряженность гамильтонианов

2.3.1. Самосопряженность операторов в абстрактных гильбертовых пространствах

По теореме Стоуна [66], гамильтониан H квантово-механической системы определяет квантовую динамику (однопараметрическую группу унитарных преобразований гильбертова пространства $\mathcal{H}$) тогда и только тогда, когда H — самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{H}$. Данный пункт содержит основные факты о самосопряженных операторах (подробнее см. [66; 67; 118]), которые используются ниже применительно к дифференциальным операторам на римановых многообразиях.

Пусть $\mathcal{H}$ — унитарное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$, которое линейно по второму и полулинейно по первому аргументам. Пусть $T\colon \mathcal{H} \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}$ — линейный оператор, определенный на линейном подпространстве[5] $\mathrm{Dom}(T) \subset \mathcal{H}$, плотном в $\mathcal{H}$.

Пусть $\mathrm{Dom}(T^*)$ — линейное подпространство в пространстве $\mathcal{H}$, состоящее из всех элементов $\varphi \in \mathcal{H}$, таких что отображение $\psi \to \langle T\psi, \varphi\rangle_{\mathcal{H}}$ является ограниченным линейным функционалом на $\mathrm{Dom}(T)$. Ввиду равенства $\overline{\mathrm{Dom}(T)} = \mathcal{H}$, из леммы Рисса [66] следует, что для любого элемента $\varphi \in \mathrm{Dom}(T^*)$ существует единственный элемент $\chi \in \mathcal{H}$, такой что

$$\langle T\psi, \varphi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi, \chi\rangle_{\mathcal{H}}, \ \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Определим линейный оператор T^*, *сопряженный* к оператору T, формулой $T^*\varphi = \chi$.

Оператор T называется *симметричным,* если $T \subset T^*$, т. е. $\mathrm{Dom}(T) \subset \subset \mathrm{Dom}(T^*)$ и $T\varphi = T^*\varphi$, $\forall \varphi \in \mathrm{Dom}(T)$. Оператор T называется *самосопряженным*, если $T = T^*$; другими словами, если T симметричен и $\mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(T^*)$.

Часто затруднительно указать точную область определения симметричного оператора так, чтобы он стал самосопряженным. Это мотивирует понятие *существенной самосопряженности*. Линейное подпространство

$$\Gamma(T) := \left((\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \mid \varphi \in \mathrm{Dom}(T),\ \psi = T\varphi \right)$$

пространства $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ называется *графиком* оператора T. Если замыкание $\overline{\Gamma(T)}$ подпространства $\Gamma(T)$ по отношению к скалярному произведению $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$ является графиком некоторого линейного оператора $\overline{T}$

[5] Мы не предполагаем по умолчанию замкнутость линейных подпространств в $\mathcal{H}$.

(это, очевидно, эквивалентно тому, что в пространстве $\overline{\Gamma(T)}$ нет элементов вида $(0,\psi)$, $0 \neq \psi \in \mathcal{H}$), то оператор T называется *замыкаемым*, а оператор $\overline{T}$ называется *замыканием* оператора T. Для любого оператора T оператор T^* замкнут, а оператор T замыкаем, если и только если $\overline{\mathrm{Dom}(T^*)} = \mathcal{H}$. В последнем случае $\overline{T} = T^{**}$ (теорема VIII.1 из [66]). Для симметричного оператора T выполнено $\mathrm{Dom}(T) \subset \mathrm{Dom}(T^*)$ и поэтому симметричный оператор замыкаем.

Следующая теорема хорошо известна, см., например, [41]:

Теорема 2.5. *Следующие условия для симметричного оператора T эквивалентны:*

1) *$\overline{T}$ самосопряжен;*

2) *T имеет единственное самосопряженное расширение;*

3) *$T^* = T^{**}$;*

4) *T^* симметричен.*

Если выполнено любое (и потому все) из этих условий, то оператор T называется *существенно самосопряженным*. Если оператор $T|_{\mathcal{D}}$ существенно самосопряжен для некоторого линейного подпространства $\mathcal{D}$, то это подпространство называется *областью существенной самосопряженности* для T.

Все эти факты справедливы как для неограниченных, так и для ограниченных операторов T. В последнем случае $\mathrm{Dom}(T) = \mathcal{H}$. Квантово-механические гамильтонианы симметричны и большинство из них неограничены. По теореме Хелигера–Теплица [66], всюду определенный симметричный оператор $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ограничен. Поэтому в квантовой механике ситуация $\mathrm{Dom}(T) \neq \mathcal{H}$ является типичной.

Полуторалинейной формой в пространстве $\mathcal{H}$ называется отображение

$$q\colon \mathrm{Dom}(q) \times \mathrm{Dom}(q) \to \mathbb{C},$$

где $\mathrm{Dom}(q)$ — плотное линейное подпространство пространства $\mathcal{H}$, полулинейное по первому и линейное по второму аргументам. Полуторалинейная форма q симметрична, если $q(\varphi,\psi) = \overline{q(\psi,\varphi)}$. Симметричная форма q *положительна*, если $q(\varphi,\varphi) \geqslant 0$, $\forall \varphi \in \mathrm{Dom}(q)$ и *полуограничена*, если $q(\varphi,\varphi) \geqslant c\|\varphi\|^2$, $\forall \varphi \in \mathrm{Dom}(q)$, где $c \in \mathbb{R}$, а $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $\mathcal{H}$, порожденная скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$. Симметричный оператор T полуограничен, если $\langle\varphi, T\varphi\rangle \geqslant c\|\varphi\|^2$, $\forall \varphi \in \mathrm{Dom}(T), c \in \mathbb{R}$.

Пусть q — полуограниченная полуторалинейная форма и $q(\varphi,\varphi) \geqslant c\|\varphi\|^2$. Она *замкнута*, если ее область определения $\mathrm{Dom}(q)$ замкнута относительно скалярного произведения $\langle\varphi,\psi\rangle_+ := q(\varphi,\psi)+(1-c)\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}$. В этом случае линейное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dom}(q)$ является *существенной областью* для q, если замыкание подпространства $\mathcal{D}$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle_+$ совпадает с $\mathrm{Dom}(q)$. Если форма q незамкнута, то пространство $\mathcal{H}$ можно пополнить относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_+$ до гильбертова пространства $\mathcal{H}_+$. Форма q при этом продолжается до ограниченной полуторалинейной формы $\widehat{q}$ в $\mathcal{H}_+$. Поскольку $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_+$ при $\varphi \in \mathrm{Dom}(q)$, то включение $\mathrm{Dom}(q) \to \mathcal{H}$ продолжается до ограниченного отображения $j\colon \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}$, с нормой, не превосходящей 1. Если j инъективно, то пространство $\mathcal{H}_+$ можно рассматривать как линейное подпространство в $\mathcal{H}$, а форму $\widehat{q}$ — как замкнутую форму в пространстве $\mathcal{H}$ с $\mathrm{Dom}(\widehat{q}) = \mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}$. В этом случае форма q называется *замыкаемой*, а форма $\widehat{q}$ с $\mathrm{Dom}(\widehat{q}) = \mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}$ *замыканием* формы q.

Например, форма $q(\varphi,\psi) := \overline{\varphi(0)}\psi(0)$, где $\varphi,\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \mathcal{H} := \mathcal{L}^2(\mathbb{R},dx)$, не является замыкаемой, поскольку для нее $\mathcal{H}_+ = \big((\psi,a) \mid \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R},dx),\, a \in \mathbb{C}\big)$, соответствующее отображение j действует по формуле $j(\psi,a) = \psi$ и не является инъективным ([66] раздел VIII.6, [67] раздел X.3).

Следующее соответствие между операторами и полуторалинейными формами в $\mathcal{H}$ является важным инструментом для изучения самосопряженности. Пусть T — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$. Согласно спектральной теореме [66], существует изоморфизм

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{k=1}^{N} \mathcal{L}^2(\mathbb{R},d\mu_k), \tag{2.23}$$

где $N \in \mathbb{N} \cup \infty$, $d\mu_k$ — некоторые положительные меры на $\mathbb{R}$, такой что оператор T становится оператором умножения на координату $x \in \mathbb{R}$ в каждом пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},d\mu_k)$. Изоморфизм (2.23) представляет каждый элемент $\psi \in \mathcal{H}$ как последовательность (конечную или бесконечную) $\psi_k(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R},d\mu_k)$, $k = 1,\ldots,N$. Пусть

$$\mathrm{Dom}_q(T) := \left((\psi_k)_{k=1}^N \mid \sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,|\psi_k(x)|^2 d\mu_k < \infty \right) \tag{2.24}$$

и

$$q_T(\varphi,\psi) := \sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} x\overline{\varphi_k(x)}\psi_k(x)d\mu_k$$

для $\varphi,\psi \in \mathrm{Dom}(q_T) := \mathrm{Dom}_q(T)$.

Форма q_T *порождается оператором* T. Очевидно, что $\mathrm{Dom}(T) \subset \subset \mathrm{Dom}_q(T)$, но последнее множество может быть больше первого. Если T — полуограниченный самосопряженный оператор, то форма q_T полуограничена. Конструкции, используемые в доказательствах следующих двух теорем из [66] и [67], будут использованы ниже для операторов Шредингера.

Теорема 2.6. *Если T — полуограниченный самосопряженный оператор, то форма q_T замкнута и любая существенная область самосопряженности для T является существенной областью для формы q_T. Наоборот, любая замкнутая полуограниченная полуторалинейная форма q совпадает с формой q_T для единственного самосопряженного оператора T. Более того, если $q(\varphi,\varphi) \geqslant c\|\varphi\|^2$, то $T \geqslant c\,\mathrm{id}$.*

Доказательство. Для скалярных операторов и соответствующих полуторалинейных форм, пропорциональных скалярному произведению $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$, оба утверждения теоремы очевидны. Поэтому, не теряя общности, можно предполагать, что $T \geqslant \mathrm{id}$ и $q(\cdot,\cdot) \geqslant \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$.

Пусть $T \geqslant \mathrm{id}$ — самосопряженный оператор. Тогда $\langle\varphi,\psi\rangle_+ := = \langle\varphi,T\psi\rangle_{\mathcal{H}}$ — скалярное произведение на подпространстве $\mathrm{Dom}(T)$. Обозначим через $\mathcal{H}_+$ замыкание подпространства $\mathrm{Dom}(T)$ по отношению к скалярному произведению $\langle\varphi,\psi\rangle_+$.

Пусть $\imath\colon \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}$ — включение. В силу $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|\cdot\|_+$, отображение $\imath$ может быть однозначно продолжено до отображения $\widehat{\imath}\colon \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}$ с нормой, не превосходящей 1.

Покажем, что отображение $\widehat{\imath}$ инъективно. Пусть $\widehat{\imath}(\varphi) = 0$, тогда существует последовательность $\varphi_i \in \mathrm{Dom}(T)$, такая что $\|\varphi - \varphi_i\|_+ \to 0$ и $\|\widehat{\imath}(\varphi_i)\|_{\mathcal{H}} = \|\varphi_i\|_{\mathcal{H}} \to 0$ при $i \to \infty$. Поэтому

$$\|\varphi\|_+^2 = \lim_{i,j\to\infty}\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle_+ = \lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty}\langle\varphi_i,T\varphi_j\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{j\to\infty}\langle 0,T\varphi_j\rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

откуда $\varphi = 0$. Таким образом, отображение $\widehat{\imath}$ инъективно и $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}$.

Если $\psi \in \mathrm{Dom}(T)$, то в обозначениях (2.24) имеем

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,|\psi_k(x)|^2 d\mu_k = \langle \psi, T\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle_+.$$

Поэтому подпространство $\mathrm{Dom}_q(T)$ является замыканием подпространства $\mathrm{Dom}(T)$ в $\mathcal{H}$ по отношению к скалярному произведению $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$. Поскольку $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}$, то $\mathrm{Dom}_q(T) = \mathcal{H}_+$ и форма q_T замкнута.

Поскольку любая существенная область самосопряженности для оператора T плотна в $\mathrm{Dom}(T)$ по норме $\|\psi\|_T := \|T\psi\| \geqslant \|\psi\|_+$, то первое утверждение теоремы доказано.

Наоборот, пусть $q(\cdot, \cdot) \geqslant \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ – замкнутая полуторалинейная форма. Тогда пространство $\mathcal{H}_+ := \mathrm{Dom}(q) \subset \mathcal{H}$ является гильбертовым по отношению к скалярному произведению $\langle \varphi, \psi \rangle_+ := q(\varphi, \psi)$. По лемме Рисса тождество

$$\langle \varphi, \jmath(\psi) \rangle_+ = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}, \ \forall \varphi \in \mathcal{H}_+$$

определяет линейный оператор $\jmath\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}$ с нормой, не превосходящей 1.

Этот оператор инъективен, т. к. иначе существует элемент $\psi \in \mathcal{H}_+$, $\psi \neq 0$, такой что

$$0 = \langle \varphi, 0 \rangle_+ = \langle \varphi, \jmath(\psi) \rangle_+ = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}, \ \forall \varphi \in \mathcal{H}_+,$$

что противоречит тому факту, что подпространство $\mathcal{H}_+$ плотно в $\mathcal{H}$. Кроме того, подпространство $\mathrm{Im}\,\jmath$ плотно в $\mathcal{H}_+$ (и поэтому также в $\mathcal{H}$), т. к. иначе существует элемент $\varphi \in \mathcal{H}$, $\varphi \neq 0$, такой, что

$$0 = \langle \varphi, \jmath(\psi) \rangle_+ = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}, \ \forall \psi \in \mathcal{H}_+,$$

что снова противоречит тому факту, что подпространство $\mathcal{H}_+$ плотно в $\mathcal{H}$.

Тождество

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \jmath(\psi) \rangle_{\mathcal{H}} &= \overline{\langle \jmath(\psi), \varphi \rangle_{\mathcal{H}}} = \overline{\langle \jmath(\psi), \jmath(\varphi) \rangle_+} = \\ &= \langle \jmath(\varphi), \jmath(\psi) \rangle_+ = \langle \jmath(\varphi), \psi \rangle_{\mathcal{H}}, \ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

показывает, что оператор $\jmath$ симметричен и, будучи ограниченным, является самосопряженным. Из функционального исчисления самосопряженных операторов и инъективности отображения $\jmath$ следует самосопряженность оператора $T := \jmath^{-1}\big|_{\mathrm{Im}\,\jmath}$ с $\mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Im}\,\jmath$.

Кроме того,

$$\langle \psi, \jmath(\psi)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \jmath(\psi), \jmath(\psi)\rangle_+ \geqslant 0,$$

и поэтому $0 \leqslant \jmath \leqslant \mathrm{id}$. Отсюда $T \geqslant \mathrm{id}$.

В силу

$$q_T(\varphi, \psi) = \langle \varphi, T\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \varphi, \jmath(T\psi)\rangle_+ = \langle \varphi, \psi\rangle_+ = q(\varphi, \psi),\ \forall \varphi, \psi \in \mathrm{Dom}(T),$$

замкнутые формы q_T и q совпадают на подпространстве $\mathrm{Dom}(T)$, плотном как в пространстве $\mathrm{Dom}(q) = \mathcal{H}_+$, так и в пространстве $\mathrm{Dom}(q_T)$. Поэтому $q_T = q$.

Пусть теперь $q_T = q_{T'}$ для другого самосопряженного оператора T'. Тогда

$$\langle \varphi, \jmath(T'\psi)\rangle_+ = \langle \varphi, T'\psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \varphi, \psi\rangle_+,\ \forall \varphi, \psi \in \mathrm{Dom}(T')$$

и поэтому

$$\jmath \circ T'|_{\mathrm{Dom}(T')} = \mathrm{id}|_{\mathrm{Dom}(T')}\,.$$

Таким образом, $\mathrm{Dom}(T') \subset \mathrm{Im}\,\jmath = \mathrm{Dom}(T)$, и оператор T является самосопряженным расширением оператора T'. По теореме 2.5 отсюда $T = T'$.

■

Теорема 2.7. *Пусть $T \geqslant c\,\mathrm{id}$ — полуограниченный симметричный оператор и $q(\varphi, \psi) := \langle \varphi, T\psi\rangle_{\mathcal{H}}$ для $\varphi, \psi \in \mathrm{Dom}(H)$. Тогда q — замыкаемая полуторалинейная форма и ее замыкание $\overline{q}$ совпадает с формой q_{T_F} для единственного самосопряженного оператора T_F, являющегося полуограниченным расширением оператора T. Кроме того, $T_F \geqslant c\,\mathrm{id}$ и T_F — единственное самосопряженное расширение оператора T с областью определения, содержащейся в* $\mathrm{Dom}(\overline{q})$.

Доказательство. Снова, не теряя общности, можно предполагать, что $T \geqslant \mathrm{id}$. То же доказательство, что и для первого утверждения предыдущей теоремы, дает $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}_+$ — замыкание подпространства $\mathrm{Dom}(H)$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot\rangle_+ := q(\cdot, \cdot)$. Поэтому форма q замыкаема.

Пусть $\overline{q}$ — замыкание формы q. Очевидно, что $\overline{q}(\varphi, \varphi) \geqslant c\|\varphi\|^2$. В соответствии с предыдущей теоремой существует единственный самосопряженный оператор T_F, такой что $\overline{q} = q_{T_F}$ и

$$\overline{q}(\varphi, \psi) = \langle \varphi, T_F\psi\rangle_{\mathcal{H}},\ \forall \varphi, \psi \in \mathrm{Dom}(T_F) \subset \mathrm{Dom}(\overline{q}).$$

Этот оператор удовлетворяет неравенству $T_F \geqslant c\,\mathrm{id}$. Поскольку форма $\overline{q}$ непрерывна в пространстве $\mathcal{H}_+$, то для элемента $\varphi \in \mathrm{Dom}(T)$ справедливы равенства:

$$\langle T\varphi, \psi\rangle_{\mathcal{H}} = \overline{q}(\varphi, \psi) = \langle \varphi, T_F\psi\rangle_{\mathcal{H}},\ \forall \psi \in \mathrm{Dom}(T_F).$$

Отсюда $\varphi \in \mathrm{Dom}(T_F^*) = \mathrm{Dom}(T_F)$, $T\varphi = T_F^*\varphi = T_F\varphi$, и оператор T_F расширяет оператор T.

Пусть теперь $\widetilde{T}$ — симметричное расширение оператора T, такое что $\mathrm{Dom}(\widetilde{T}) \subset \mathrm{Dom}(\overline{q})$. Для элементов $\psi \in \mathrm{Dom}(\widetilde{T})$, $\varphi \in \mathrm{Dom}(T)$ справедливы равенства

$$\overline{q}(\varphi, \psi) = \langle T\varphi, \psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \widetilde{T}\varphi, \psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \varphi, \widetilde{T}\psi\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Из непрерывности формы $\overline{q}$ в пространстве $\mathcal{H}_+$ следует, что

$$\overline{q}(\varphi, \psi) = \langle \varphi, \widetilde{T}\psi\rangle_{\mathcal{H}} =: \widetilde{q}(\varphi, \psi),\ \forall \psi \in \mathrm{Dom}(\widetilde{T}).$$

Поэтому форма $\overline{q}$ является замыканием формы $\widetilde{q}$ и вышеприведенное доказательство, примененное к оператору $\widetilde{T}$ (вместо T), дает $\widetilde{T} \subset T_F$.

Если дополнительно оператор $\widetilde{T}$ самосопряжен, то теорема 2.5 дает $\widetilde{T} = T$, что завершает доказательство. ■

Оператор T_F из последней теоремы называется *расширением Фридрихса* оператора T.

Общим методом доказательства самосопряженности или существенной самосопряженности некоторого симметричного оператора является его представление в виде «возмущения» некоторого самосопряженного оператора. Различные интерпретации термина «возмущение» дают различные результаты. Наиболее известные результаты сформулированы ниже.

Теорема 2.8 (Като–Реллих; [67], теорема X.12). *Пусть A — самосопряженный, а B — симметричный оператор, такие что:*

1) $\mathrm{Dom}(A) \subset \mathrm{Dom}(B)$;

2) *существуют вещественные постоянные $a < 1$ и $b > 0$, такие что*

$$\|B\psi\| \leqslant a\|A\psi\| + b\|\psi\|,\ \forall \psi \in \mathrm{Dom}(A).$$

Тогда $A + B$ является самосопряженным оператором с областью определения $\mathrm{Dom}(A)$ и существенно самосопряженным на любой области существенной самосопряженности оператора A.

Теорема 2.9 (КЛМН; [67], теорема X.17). *Пусть A — самосопряженный положительный оператор, а q — симметричная полуторалинейная форма на $\mathrm{Dom}_q(A)$, такая что*

$$|q(\varphi,\varphi)| \leqslant a\langle\varphi, A\varphi\rangle + b\langle\varphi,\varphi\rangle,\ \forall\varphi \in \mathrm{Dom}(A)$$

для вещественных постоянных $a < 1$ и $b > 0$. Тогда существует единственный самосопряженный оператор B с $\mathrm{Dom}_q(B) = \mathrm{Dom}_q(A)$, такой что

$$\langle\varphi, B\varphi\rangle = \langle\varphi, A\varphi\rangle + q(\varphi,\varphi),\ \forall\varphi \in \mathrm{Dom}_q(B).$$

Любая область существенной самосопряженности оператора A является таковой и для оператора B.

2.3.2. Самосопряженность операторов Шредингера на римановых пространствах

Пусть M^n — полное C^∞ риманово пространство с метрикой g, μ — мера на M^n, индуцированная метрикой g. Это означает, что локально справедливо равенство

$$d\mu = \sqrt{\det g_{ij}}dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n, \tag{2.25}$$

если метрика имеет локальный вид $g = g_{ij}dx^i dx^j$. Обозначим через $\mathrm{grad}\, f$ градиент функции f на M^n, определенный в локальных координатах выражением

$$g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Пусть $\triangle = \triangle_g$ — оператор Лапласа–Бельтрами на M^n.

Наиболее естественной «невозмущенной» частью оператора Шредингера

$$-\triangle + V, \tag{2.26}$$

где V — вещественный скалярный потенциал, является оператор $-\triangle$. Оператор $-\triangle$ является существенно самосопряженным на $\mathrm{Dom}(-\triangle) = C_c^\infty(M^n, \mathbb{C})$ ([211], теорема 2.4). Заметим, что он естественно действует не только на функции, но также на дифференциальные формы и тензорные поля.

В евклидовом пространстве подход к доказательству самосопряженности оператора (2.26), как возмущения оператора $-\triangle$, обсуждается в [67] на различных физических примерах (см. также обзор [201]). Обзор различных результатов, касающихся самосопряженности операторов

Шредингера на римановых пространствах, можно найти в [15]. Здесь мы сформулируем упрощенный результат из [117], достаточный для большинства конкретных пространств и потенциалов, рассматриваемых ниже.

Обозначим через H_0 оператор (2.26), определенный на пространстве $C_c^\infty(M^n, \mathbb{C})$ гладких функций с компактным носителем. Этот оператор очевидно является симметричным в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(M^n, d\mu)$ и поэтому замыкаемым. Пусть $W^{k,l}_{\mathrm{loc}}(M^n, d\mu)$ — линейное подпространство пространства $\mathcal{L}^2(M^n, d\mu)$, состоящее из комплекснозначных функций на пространстве M^n, частные производные которых (понимаемые в смысле обобщенных функций) до порядка k лежат в пространстве $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(M^n, d\mu)$.

Теорема 2.10 ([117]). *Пусть $V \in \mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}(M^n, d\mu)$, $n \geqslant 2$, где $p = 2$ при $n = 2, 3$, $p > n/2$ при $n \geqslant 4$ и $V \geqslant -c$ вне некоторого компактного множества для некоторой постоянной $c > 0$. Тогда*

1) *оператор H_0 существенно самосопряжен;*

2) *оператор $\overline{H}_0$ самосопряжен с*

$$\mathrm{Dom}(\overline{H}_0) = \tag{2.27}$$
$$= \left(u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(M^n, d\mu) \cap \mathcal{L}^2(M^n, d\mu) \,\middle|\, (-\triangle u + Vu)_{\mathrm{dist}} \in \mathcal{L}^2(M^n, d\mu) \right),$$

где индекс «dist» означает, что дифференциальный оператор понимается в смысле обобщенных функций,

3) *для элемента $u \in \mathrm{Dom}(\overline{H}_0)$ справедливы следующие включения:*

$$|\operatorname{grad} u| \in \mathcal{L}^2(M^n, d\mu), \ |V|^{1/2} u \in \mathcal{L}^2(M^n, d\mu).$$

Условия, налагаемые на p, были ослаблены в [169] для некоторых специальных типов римановых пространств. *Экспоненциальное геодезическое отображение* $\exp_x \colon T_x M \mapsto M$ определяется формулой $\exp_x X = \gamma(1)$, где $\gamma(s)$ — геодезическая, исходящая из точки $x \in M$ с начальной скоростью $\gamma'(0) = X \in T_x M$, а s — длина ее дуги. Экспоненциальное геодезическое отображение является диффеоморфизмом шара в $T_x M$ радиуса r с центром 0 на некоторую окрестность $U_{x,r}$ точки x в M. Пусть r_x — точная верхняя грань возможных радиусов (допуская ∞) таких шаров в $T_x M$, а $r_{inj} := \inf_{x \in M} r_x$.

Определение 2.1 ([111; 199]). Риманово пространство M называется *пространством ограниченной геометрии*, если выполнены следующие условия:

1) $r_{inj} > 0$,

2) $|\nabla^k R| \leqslant C_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

где ∇ — связность Леви-Чивиты, R — тензор кривизны, $|\cdot|$ — послойная норма в пространстве тензоров, индуцированная римановой метрикой, а C_k — вещественные постоянные.

Заметим, что первое условие влечет полноту пространства M. Очевидно, что любое однородное или компактное риманово пространство является пространством ограниченной геометрии. Следующая теорема является ограничением результата из [169] на скалярный случай.

Теорема 2.11. *Пусть M^n — пространство ограниченной геометрии, а потенциал V можно представить в виде $V = V_1 + V_2$, где вещественнозначные функции V_1, V_2 удовлетворяют следующим условиям: $0 \leqslant V_1 \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(M^n, d\mu)$, $0 \geqslant V_2 \in \mathcal{L}^p(M^n, d\mu)$ при $p = n/2$, если $n \geqslant 3$, при $p > 1$, если $n = 2$ и при $p = 1$, если $n = 1$.*

Тогда оператор $H = -\triangle + V$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}(H) = \left(u \in W^{1,2}(M^n, d\mu) \middle| \int_M V_1 |u|^2 d\mu < +\infty,\ Hu \in \mathcal{L}^2(M^n, d\mu) \right), \tag{2.28}$$

где Hu понимается в смысле обобщенных функций, является самосопряженным. Кроме того, $Vu \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(M^n, d\mu)$ при $u \in \mathrm{Dom}(H)$.

Если потенциал V не лежит в пространстве $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(M^n, d\mu)$, то теоремы 2.10 и 2.11 неприменимы. Но если вместо этого потенциал V ограничен снизу, то можно попытаться ограничить оператор Шредингера на некоторое подмногообразие M' пространства M^n, такое что $V|_{M'} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(M', d\mu)$, и построить самосопряженное расширение Фридрихса оператора $-\triangle + V$ с начальной областью определения $C_c^\infty(M', \mathbb{C})$. Эта процедура физически мотивирована, например, в случае когда $V \to +\infty$ вблизи границы подмногообразия M', и поэтому волновые функции должны стремиться к нулю вблизи этой границы.

Перейдем к аккуратному математическому описанию. Пусть M' — открытое связное подмногообразие пространства M^n размерности n. Мы не предполагаем полноту M' по отношению к римановой структуре,

являющейся ограничением римановой структуры на пространстве M^n. Пусть $V \geqslant C \in \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция из $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(M', d\mu)$, а $H_0 = -\triangle + V$ — оператор Шредингера с областью определения $C_c^\infty(M', \mathbb{C})$. Не теряя общности, предположим, что $C = 1$. Пусть $H_F \geqslant \mathrm{id}$ — расширение Фридрихса оператора H_0, построенное в теореме 2.7 в абстрактном случае. Займемся точным описанием подпространства $\mathrm{Dom}(H_F)$.

Очевидно, что замыкание полуторалинейной формы q_{H_0}, ассоциированной с оператором H_0, имеет вид

$$q_{H_F}(\varphi, \psi) = \int_{M'} (g(\mathrm{grad}\,\overline{\varphi}, \mathrm{grad}\,\psi) + V\overline{\varphi}\psi)\, d\mu, \tag{2.29}$$

причем $\mathrm{Dom}(q_{H_F}) \subset \mathcal{L}^2(M', d\mu)$ — замыкание пространства $C_c^\infty(M', \mathbb{C})$ относительно скалярного произведения (2.29).

В соответствии с конструкцией из доказательства теоремы 2.6, оператор H_F определяется тождеством

$$\int_{M'} (g(\mathrm{grad}\,\overline{\varphi}, \mathrm{grad}\,\psi) + V\overline{\varphi}\psi)\, d\mu =$$
$$= \int_{M'} \overline{\varphi} H_F \psi d\mu, \ \forall \varphi \in \mathrm{Dom}(q_{H_F}), \psi \in \mathrm{Dom}(H_F).$$

Отсюда

$$H_F\psi = (-\triangle\psi + V\psi)_{\mathrm{dist}}, \ \psi \in \mathrm{Dom}(H_F). \tag{2.30}$$

Пусть $-\triangle_F + \mathrm{id}$ — расширение Фридрихса (очевидно неотрицательное) оператора

$$(-\triangle + \mathrm{id})|_{C_c^\infty(M', \mathbb{C})},$$

а $\mathrm{Dom}(q_{-\triangle_F + \mathrm{id}})$ — область определения ассоциированной с ним полуторалинейной формы. Она является замыканием пространства $C_c^\infty(M', \mathbb{C})$ относительно скалярного произведения

$$q_{-\triangle_F + \mathrm{id}}(\varphi, \psi) = \int_{M'} (g(\mathrm{grad}\,\overline{\varphi}, \mathrm{grad}\,\psi) + \overline{\varphi}\psi)\, d\mu. \tag{2.31}$$

Пусть также $\mathrm{Dom}(q_V)$ — замыкание пространства $C_c^\infty(M', \mathbb{C})$ относительно скалярного произведения

$$q_V(\varphi, \psi) = \int_{M'} \overline{\varphi} V \psi d\mu.$$

Следующая теорема является прямым обобщением теоремы X.32 из [67] на римановы пространства. Для $M' = \mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ она была анонсирована в [86].

Теорема 2.12. *Областью определения оператора H_F является*

$$\left(\psi \in \mathrm{Dom}(q_{-\triangle_F+\mathrm{id}}) \mid V\psi \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(M', d\mu); (-\triangle\psi + V\psi)_{\mathrm{dist}} \in \mathcal{L}^2(M', d\mu)\right) \tag{2.32}$$

и H_F действует по формуле (2.30).

Для доказательства этой теоремы нам потребуются некоторые предварительные сведения, собранные в три предложения. Первое предложение является обобщением *неравенства Като* на римановы пространства, ограниченным на скалярный случай (см. теорему 5.7 из [15] и теорему X.27 из [67]).

Предложение 2.6. Пусть $u \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(M', d\mu)$ и $(\triangle u)_{\mathrm{dist}} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(M', d\mu)$. Тогда

$$(\triangle|u|)_{\mathrm{dist}} \geqslant \mathrm{Re}\left((\mathrm{sign}\, u)(\triangle u)_{\mathrm{dist}}\right), \tag{2.33}$$

где

$$(\mathrm{sign}\, u)(\mathbf{x}) := \begin{cases} \overline{u}(\mathbf{x})/|u(\mathbf{x})|, \text{ если } & u(\mathbf{x}) \neq 0 \\ 0 \text{ в противном случае.} & \end{cases}$$

Здесь неравенство (2.33) понимается в смысле обобщенных функций.

Второе предложение является следствием теоремы 2.2 из [170]. Пусть множество $\mathcal{L}^2(M', d\mu)^+$ состоит из всех вещественнозначных функций из $\mathcal{L}^2(M', d\mu)$, являющихся положительными почти всюду по мере μ. Аналогично $C_c^\infty(M')^+$ обозначает множество всех неотрицательных функций из $C_c^\infty(M')$.

Предложение 2.7. Для любой функции u из $\mathrm{Dom}(q_{-\triangle_F+\mathrm{id}}) \cap \cap\, \mathcal{L}^2(M', d\mu)^+$ существует последовательность $u_k \in C_c^\infty(M')^+$, такая что $\|u_k - u\|_{-\triangle_F+\mathrm{id}} \to 0$ при $k \to \infty$, где $\|\cdot\|_{-\triangle_F+\mathrm{id}}$ — норма, ассоциированная с положительной полуторалинейной формой (2.31).

Третье предложение является частным случаем леммы 2.12 из [170].

Предложение 2.8. Ограниченный оператор $(-\triangle_F + \mathrm{id})^{-1}$ сохраняет множество $\mathcal{L}^2(M', d\mu)^+$.

Теперь мы можем дать доказательство теоремы 2.12. До неравенства (2.36) это доказательство повторяет *mutatis mutandis* доказательство теоремы X.32 из [67]. Заключительная часть доказательства следует идеям из [170].

Доказательство теоремы 2.12. Пусть $\widetilde{H}$ — оператор с $\mathrm{Dom}(\widetilde{H})$, заданной формулой (2.32) и

$$\widetilde{H}\psi := (-\triangle\psi + V\psi)_{\mathrm{dist}}, \ \psi \in \mathrm{Dom}(\widetilde{H}).$$

Во-первых, мы покажем, что оператор $\widetilde{H}$ расширяет оператор H_F. Поскольку $-\triangle_F$ и V неотрицательные операторы, то

$$\mathrm{Dom}(H_F) \subset \mathrm{Dom}(q_{H_F}) = \mathrm{Dom}(q_{-\triangle_F+\mathrm{id}}) \cap \mathrm{Dom}(q_V).$$

Пусть $\varphi \in \mathrm{Dom}(H_F)$, тогда $V^{1/2}\varphi \in \mathcal{L}^2(M', d\mu)$. Тогда из $V^{1/2} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(M', d\mu)$ и неравенства Коши получаем

$$V\varphi = V^{1/2}(V^{1/2}\varphi) \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(M', d\mu). \tag{2.34}$$

Отсюда, в силу (2.30), имеем $\varphi \in \mathrm{Dom}(\widetilde{H})$, $\mathrm{Dom}(H_F) \subset \mathrm{Dom}(\widetilde{H})$ и

$$\widetilde{H}\Big|_{\mathrm{Dom}(H_F)} = H_F. \tag{2.35}$$

Наоборот, пусть $\varphi \in \mathrm{Dom}(\widetilde{H})$. Поскольку оператор H_F самосопряжен и $H_F \geqslant \mathrm{id}$, то существует элемент $\psi \in \mathrm{Dom}(H_F)$, такой что $\widetilde{H}\varphi = H_F\psi$. Из (2.35) следует равенство $\widetilde{H}\eta = 0$, где $\eta := \varphi - \psi \in \mathrm{Dom}(\widetilde{H}) \subset \mathrm{Dom}(q_{-\triangle_F+\mathrm{id}})$. В силу (2.34), это означает, что

$$(-\triangle\eta)_{\mathrm{dist}} = \widetilde{H}\eta - V\eta = -V\eta \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(M', d\mu)$$

и предложение 2.6 дает

$$(\triangle|\eta|)_{\mathrm{dist}} \geqslant \mathrm{Re}\,((\mathrm{sign}\,\eta)V\eta) = V|\eta| \geqslant |\eta|. \tag{2.36}$$

Поэтому

$$\langle(-\triangle+1)w, |\eta|\rangle_{\mathcal{L}^2(M',d\mu)} \leqslant 0, \ \forall w \in C_c^\infty(M')^+. \tag{2.37}$$

Благодаря предложению 2.8, имеем $f := (-\triangle_F + \mathrm{id})^{-1}|\eta| \in \mathcal{L}^2(M', d\mu)^+ \cap \mathrm{Dom}(-\triangle_F)$. Предложение 2.7 влечет поэтому существование последовательности $f_k \in C_c^\infty(M')^+$ такой, что

$$\lim_{k\to\infty} q_{-\triangle_F+\mathrm{id}}(f_k, |\eta|) = q_{-\triangle_F+\mathrm{id}}(f, |\eta|) =$$
$$= q_{-\triangle_F+\mathrm{id}}((-\triangle_F+\mathrm{id})^{-1}|\eta|, |\eta|) = \|\eta\|^2_{\mathcal{L}^2(M',d\mu)}.$$

Из (2.37) получаем $q_{-\triangle_F+\mathrm{id}}(f_k, |\eta|) \leqslant 0$, откуда $\|\eta\|^2_{\mathcal{L}^2(M',d\mu)} \leqslant 0$, т.е. $\eta = 0$. Таким образом, $\varphi = \psi$ и $\mathrm{Dom}(\widetilde{H}) \subset \mathrm{Dom}(H_F)$, что, благодаря (2.35), завершает доказательство. ■

§ 2.4. Общая схема квантово-механической редукции

Пусть M — риманово пространство с действием группы изометрий G (не обязательно всех) на нем. Предположим, что G-орбиты на M максимальной размерности ℓ изоморфны друг другу, их объединение является открытым подмногообразием M', множество $M \backslash M'$ имеет нулевую меру, $M' = W \times \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ — G-орбита максимальной размерности, а W — подмногообразие многообразия M', трансверсальное ко всем G-орбитам размерности ℓ. Эта ситуация является типичной [17], и мы получаем изоморфизм измеримых множеств $(M, \mu) \cong (W, \nu) \times (\mathcal{O}, \mu_G)$, где μ — G-инвариантная мера на многообразии M, порожденная его метрикой, ν — некоторая мера на W, а μ_G — G-инвариантная мера на $\mathcal{O}$. Отсюда следует изоморфизм функциональных пространств (см., например, теорему II.10 из [66]):

$$\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(M, d\mu) = \mathcal{L}^2(W \times \mathcal{O}, d\nu \otimes d\mu_G) = \mathcal{L}^2(W, d\nu) \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{O}, d\mu_G). \quad (2.38)$$

При этих предположениях G-инвариантный дифференциальный оператор D на M' допускает явно инвариантное представление вида:

$$D = D_T + \sum_{(i)} D_{(i)} \circ \widetilde{X}_{i_1} \circ \ldots \circ \widetilde{X}_{i_r} \equiv D_T + \sum_{(i)} D_{(i)} \circ \Box_{(i)}, \quad (2.39)$$

где, как и выше, $\widetilde{X}_i$ — дифференциальный оператор первого порядка, соответствующий действию однопараметрической подгруппы $\exp(tX_i)$, $X_i \in \mathfrak{g}$, группы G на пространстве M'; D_T и $D_{(i)}$ — операторы, трансверсальные к подмногообразию W; здесь оператор D_T называется *трансверсальной частью* оператора D (см. теорему 3.4 из главы II, [82]). Операторы $\Box_{(i)}$ являются инвариантными операторами на G-орбитах в пространстве M'. В соответствии с § 2.1, такие операторы естественно выражаются в терминах алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Всюду в данной книге мы предполагаем, что M и G связны. Выражение (2.39) инвариантных дифференциальных операторов соответствует общему подходу к инвариантным дифференциально-геометрическим объектам на однородных пространствах. Эти объекты имеют простейший вид в базисах, состоящих из киллинговых векторных полей [10; 46]. Для инвариантных метрик этот подход был развит в работах [92; 93] применительно к бесконечномерным группам. Заметим, что представление (2.39) зависит от выбора трансверсального к G-орбитам подмногообразия W.

Группа G естественно действует на пространстве $\mathcal{L}^2(\mathcal{O}, d\mu_G)$ левыми сдвигами. Пусть

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{O}, d\mu_G) = \oplus_j \mathcal{H}'_j$$

— разложение пространства $\mathcal{L}^2(\mathcal{O}, d\mu_G)$, такое что $\mathcal{H}'_j$ — сумма всех неприводимых G-представлений из $\mathcal{L}^2(\mathcal{O}, d\mu_G)$ фиксированного типа. Очевидно, что различные представления $\mathcal{H}'_j$ не имеют изоморфных неприводимых слагаемых. Поскольку операторы $\Box_{(i)}$ коммутируют с действием группы G, то они не могут переставлять пространства $\mathcal{H}'_j$ в силу леммы Шура [36; 42]. Это приводит к разложению

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(W, d\nu) \otimes \left(\oplus_j \mathcal{H}'_j\right) = \oplus_j \left(\mathcal{L}^2(W, d\nu) \otimes \mathcal{H}'_j\right)$$

пространства $\mathcal{H}$ в сумму D-инвариантных подпространств $\mathcal{H}_j := \mathcal{L}^2(W, d\nu) \otimes \mathcal{H}'_j$.[6] Для компактной группы G пространства $\mathcal{H}'_j$ конечномерны.

Если оператор $D = H$ является гамильтонианом некоторой квантово-механической системы на римановом пространстве M, то эта конструкция дает редукцию G-инвариантной квантово-механической системы к множеству ее подсистем. Этот метод был описан в работах [151; 213; 223] без упоминания разложения (2.39). С другой стороны, обойтись без разложения (2.39) при редукции квантово-механической системы затруднительно, т. к. теория представлений для группы G дает только формулы для действия операторов $\Box_{(i)}$ в пространстве $\mathcal{H}'_i$. Без разложения (2.39) получение явных формул для действия оператора H в пространстве $\mathcal{H}_i$ требует громоздких вычислений.

В то же время разложение (2.39) дает некоторую информацию о сложности приведенных подсистем даже в отсутствие детальной информации о неприводимых представлениях группы G в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathcal{O}, d\mu_G)$. Например, если все операторы $\Box_{(i)}$ в (2.39) коммутируют, то они имеют только общие собственные функции, и тогда спектральная задача для гамильтониана H редуцируется к множеству спектральных задач для некоторых скалярных дифференциальных операторов на многообразии W.

Простейшим примером этой конструкции является одночастичный гамильтониан с центральным потенциалом в евклидовом простран-

[6]Отметим, что оператор D определен лишь на некоторых плотных подпространствах пространств $\mathcal{H}_j$.

стве $\mathbf{E}^n$. Здесь $W = \mathbb{R}_+, \mathcal{O} = \mathbf{S}^{n-1}$, а разложение (2.39) имеет вид

$$D = H_e = -\frac{1}{2m\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{2m\rho^2}\triangle_s + V(\rho),$$

где ρ — расстояние от центра потенциала, а $\triangle_s$ – оператор Лапласа–Бельтрами на сфере $\mathbf{S}^{n-1}$ (везде мы полагаем $\hbar = 1$). Сходное выражение для одночастичного гамильтониана с центральным потенциалом в пространствах постоянной кривизны будет изучено в § 6.3.

Рассмотрим более сложную задачу двух тел в римановом пространстве $\widetilde{M}$ с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2m_1}\triangle_1 - \frac{1}{2m_2}\triangle_2 + V =: H_0 + V. \tag{2.40}$$

Здесь H_0 является свободным двухчастичным гамильтонианом, m_1, m_2 — массы частиц, $\triangle_i$, $i = 1, 2$, — оператор Лапласа–Бельтрами на i-ом сомножителе конфигурационного пространства $M = \widetilde{M} \times \widetilde{M}$ данной системы, V — потенциал взаимодействия, зависящий только от расстояния между частицами, а G — компонента связности единицы группы изометрий пространства $\widetilde{M}$. Группа G естественно действует на пространстве $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$ по формуле

$$g\colon (q_1, q_2) \to (gq_1, gq_2),\ g \in G,\ (q_1, q_2) \in Q \times Q.$$

Коразмерность G-орбит в пространстве M в этом случае не менее единицы, поскольку группа G сохраняет расстояние между двумя точками пространства $\widetilde{M}$. Другими словами, $\dim W \geqslant 1$ для подмногообразия $W \subset M$, трансверсального к G-орбитам в M. В главе 5 мы рассмотрим случай двухточечно-однородного риманового пространства $\widetilde{M} = Q$, для которого $\dim W = 1$, и найдем для оператора H соответствующее разложение (2.39). Основным отличием этого разложения от одночастичного случая является некоммутативность алгебры, порожденной операторами $\Box_{(i)}$.

Глава 3

Алгебры инвариантных дифференциальных операторов на расслоении единичных сфер над двухточечно-однородным римановым пространством

В этой главе мы изучим алгебру $\mathrm{Diff}_I(Q_{\mathbf{S}})$ инвариантных дифференциальных операторов на расслоении единичных сфер $Q_{\mathbf{S}}$ над двухточечно-однородным римановым пространством Q. Именно, мы построим систему образующих и соотношений для этих алгебр. Эти образующие появятся вновь в главе 5 в явно инвариантном выражении двухточечного гамильтониана H на пространствах Q. С другой стороны, центр алгебры $\mathrm{Diff}_I(Q_{\mathbf{S}})$ коммутирует с оператором H, т. е. он состоит из интегралов квантово-механической двухчастичной задачи на пространстве Q.

В § 3.1 мы получим часть образующих и соотношений для алгебры $\mathrm{Diff}_I(Q_{\mathbf{S}})$, соответствующих произвольному двухточечно-однородному римановому пространству Q, используя общую информацию о Q из § 1.2. Однако этой информации недостаточно для получения всех образующих и соотношений для $\mathrm{Diff}_I(Q_{\mathbf{S}})$. Вычисление остальных образующих и соотношений использует модели двухточечно-однородных пространств, описанные в § 1.3. Аналогичное описание алгебры $\mathrm{Diff}_I(Q_{\mathbf{S}})$ для некомпактных двухточечно-однородных римановых пространств получается при помощи преобразования из предложения 1.5.

Мы вычислим также некоторые центральные элементы алгебр $\mathrm{Diff}_I(Q_{\mathbf{S}})$, которые будут использованы в главе 7. Результат § 3.6 не будет использован в дальнейшем, но он кажется интересным с дифференциально геометрической точки зрения. Данная глава основана на работе автора [194], но также содержит некоторую дополнительную информацию об алгебрах $\mathrm{Diff}_I(Q_{\mathbf{S}})$ и соотношение (3.13).

§ 3.1. Инвариантные дифференциальные операторы на пространстве $Q_{\mathbf{S}}$

Для произвольного риманова пространства M обозначим через $M_{\mathbf{S}}$ расслоение единичных сфер (в касательных пространствах) над M. В этом параграфе мы более детально опишем конструкцию из § 2.1 для пространства $Q_{\mathbf{S}}$, где Q — двухточечно-однородное компактное риманово пространство, используя предложение 1.2. При этом мы будем пользоваться обозначениями из § 1.2 и § 2.1.

Пусть G — компонента связности группы изометрий пространства Q, а K — ее стационарная подгруппа, соответствующая точке $x_0 \in Q$. Группа G естественно действует на пространстве $Q_{\mathbf{S}}$, и это действие транзитивно в силу теоремы 1.1. В частности, ее подгруппа K транзитивно действует на единичной сфере $\mathbf{S}_{x_0} \subset T_{x_0}Q$. Отождествим пространство $\mathfrak{p}$ из предложения 1.2 с пространством $T_{x_0}Q$. При этом действие подгруппы K на $T_{x_0}Q$ отождествляется с присоединенным действием Ad_K на подпространстве $\mathfrak{p}$. Пусть K_0 — подгруппа группы K, соответствующая подалгебре $\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}$. В силу соотношений (1.3), (1.6), группа K_0 является стационарной подгруппой группы G, соответствующей точке $y := (x_0, \Lambda') \in Q_{\mathbf{S}}$, где $\Lambda' := \dfrac{1}{R}\Lambda$. Используя модели компактных двухточечно-однородных римановых пространств, мы покажем ниже, что группа K_0 связна.

Пусть $\widetilde{\mathfrak{p}} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$. В силу $[\mathfrak{k}_0, \widetilde{\mathfrak{p}}] \subset \widetilde{\mathfrak{p}}$, разложение $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{k}_0$ является редуктивным. Справедливо также разложение $T_yQ_{\mathbf{S}} = T_{x_0}Q \oplus T_{\Lambda'}\mathbf{S}_{x_0}$. Из предложения 1.2 получаем $\Lambda' \perp (\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda})$ и $[f_{\lambda,i}, \Lambda'] = -(2R)^{-1}e_{\lambda,i}$, $i = 1, \ldots, q_1$, $[f_{2\lambda,j}, \Lambda'] = -R^{-1}e_{2\lambda,j}$, $j = 1, \ldots, q_2$. Поэтому пространство $\mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$ отождествляется посредством действия группы K на $T_{x_0}Q$ с пространством $T_{\Lambda'}\mathbf{S}_{x_0}$ и действие группы K_0 на пространстве $T_yQ_{\mathbf{S}} \simeq \widetilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$ совпадает с присоединенным.

Из предложения 1.2 следует, что действие Ad_{K_0} сохраняет все слагаемые в последнем разложении. С другой стороны, действие группы K_0 на пространстве $T_{\Lambda'}\mathbf{S}_{x_0}$ является дифференциалом ее действия на пространстве $(\Lambda')^\perp \subset T_{x_0}Q$. Из линейности последнего действия получаем эквивалентность ограничений действия Ad_{K_0} на пространства $\mathfrak{p}_\lambda$ и $\mathfrak{k}_\lambda$, а также на пространства $\mathfrak{p}_{2\lambda}$ и $\mathfrak{k}_{2\lambda}$. Пусть $\chi_\lambda\colon \mathfrak{k}_\lambda \to \mathfrak{p}_\lambda$, $\chi_{2\lambda}\colon \mathfrak{k}_{2\lambda} \to \mathfrak{p}_{2\lambda}$ — изоморфизм линейных пространств, такой что $\mathrm{Ad}_{K_0}|_{\mathfrak{p}_\lambda} \circ \chi_\lambda = \chi_\lambda \circ \mathrm{Ad}_{K_0}|_{\mathfrak{k}_\lambda}$ и $\mathrm{Ad}_{K_0}|_{\mathfrak{p}_{2\lambda}} \circ \chi_{2\lambda} = \chi_{2\lambda} \circ \mathrm{Ad}_{K_0}|_{\mathfrak{k}_{2\lambda}}$.

После подстановки $\mathfrak{p} \to \widetilde{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{k} \to \mathfrak{k}_0$ можно применить конструкцию из § 2.1 для вычисления образующих и соотношений для алгебры $U(\mathfrak{g})^{K_0}/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}_0)^{K_0} \cong \mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}})$. Пусть $g_i \in S(\widetilde{\mathfrak{p}})$ — независимые инвариантные элементы действия Ad_{K_0} в алгебре $S(\widetilde{\mathfrak{p}})$, порождающие ее подалгебру $S(\widetilde{\mathfrak{p}})^{K_0}$. Тогда элементы $\eta \circ \lambda^*(g_i)$ порождают алгебру $\mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}})$.

В данной главе мы примем для краткости изложения следующее соглашение:

Соглашение 3.1. Отождествим изоморфные алгебры

$$U(\mathfrak{g})^{K_0}/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}_0)^{K_0} \quad \text{и} \quad \mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}}).$$

Будем рассматривать элементы $\lambda(g_i) \in U(\mathfrak{g})^{K_0}$ по модулю $(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}_0)^{K_0}$ как элементы алгебры $\mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}})$. Вместо записи $g \equiv g' \mod (U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}_0)^{K_0}$ иногда будем просто писать $g = g'$. Поскольку группа G однозначно определяется пространством Q_S, будем писать $\mathrm{Diff}_I(Q_S)$ вместо $\mathrm{Diff}_G(Q_S)$ для конкретных пространств Q_S.

Элемент $\Lambda \in \mathfrak{a}$ очевидно инвариантен относительно действия Ad_{K_0} на алгебре $S(\widetilde{\mathfrak{p}})$, поскольку $[\mathfrak{k}_0, \mathfrak{a}] = 0$, а группа K_0 связна. Кроме того, поскольку действие Ad_{K_0} ортогонально по отношению к форме Киллинга, которая пропорциональна скалярному произведению $\langle\cdot,\cdot\rangle$, действие Ad_{K_0} сохраняет ограничение скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на пространства $\mathfrak{p}_\lambda$, $\mathfrak{p}_{2\lambda}$, $\mathfrak{k}_\lambda$, $\mathfrak{k}_{2\lambda}$. Аналогично действие Ad_{K_0} сохраняет функции $\langle \chi_\lambda X_1, Y_1\rangle$, $X_1 \in \mathfrak{k}_\lambda$, $Y_1 \in \mathfrak{p}_\lambda$ и $\langle \chi_{2\lambda} X_2, Y_2\rangle$, $X_2 \in \mathfrak{k}_{2\lambda}$, $Y_2 \in \mathfrak{p}_{2\lambda}$. Все эти функции являются инвариантными элементами действия $\mathrm{Ad}^*_{K_0}$ на алгебре $S(\mathfrak{p}^*_\lambda \oplus \mathfrak{p}^*_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}^*_\lambda \oplus \mathfrak{k}^*_{2\lambda})$.

Определим линейные отображения $\chi_\lambda\colon \mathfrak{k}_\lambda \mapsto \mathfrak{p}_\lambda$ и $\chi_{2\lambda}\colon \mathfrak{k}_{2\lambda} \mapsto \mathfrak{p}_{2\lambda}$ формулами

$$\chi_\lambda X = 2[\Lambda, X],\ X \in \mathfrak{k}_\lambda,\ \chi_{2\lambda} Y = [\Lambda, Y],\ Y \in \mathfrak{k}_{2\lambda}. \tag{3.1}$$

Действительно из (3.1) и равенства $\mathrm{Ad}_k \Lambda = \Lambda$, $k \in K_0$, получим

$$\mathrm{Ad}_k \circ \chi_\lambda X = 2[\Lambda, \mathrm{Ad}_k X] = \chi_\lambda \circ \mathrm{Ad}_k X,\ X \in \mathfrak{k}_\lambda,$$
$$\mathrm{Ad}_k \circ \chi_{2\lambda} Y = [\Lambda, \mathrm{Ad}_k Y] = \chi_{2\lambda} \circ \mathrm{Ad}_k Y,\ Y \in \mathfrak{k}_{2\lambda}.$$

Очевидно, что $\chi_\lambda f_{\lambda,i} = e_{\lambda,i}$, $i = 1, \ldots, q_1$, и $\chi_{2\lambda} f_{2\lambda,j} = e_{2\lambda,j}$, $j = 1, \ldots, q_2$.

Из предложения 1.2 следует, что базисы

$$\{\frac{1}{R} e_{\lambda,i}\}_{i=1}^{q_1}, \{\frac{1}{R} f_{\lambda,i}\}_{i=1}^{q_1}, \{\frac{1}{R} e_{2\lambda,j}\}_{j=1}^{q_2}, \{\frac{1}{R} f_{2\lambda,j}\}_{j=1}^{q_2}$$

пространств $\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{p}_{2\lambda}, \mathfrak{k}_{2\lambda}$ являются ортонормированными, поэтому по лемме 2.4 получаем следующие образующие алгебры $\mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}})$:

$$\begin{aligned} &D_0 = \Lambda, && D_1 = \sum_{i=1}^{q_1} e_{\lambda,i}^2, \quad D_2 = \sum_{i=1}^{q_1} f_{\lambda,i}^2, \\ &D_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q_1}\{e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}\}, && D_4 = \sum_{j=1}^{q_2} e_{2\lambda,j}^2, \\ &D_5 = \sum_{j=1}^{q_2} f_{2\lambda,j}^2, && D_6 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q_2}\{e_{2\lambda,j}, f_{2\lambda,j}\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ — антикоммутатор. Из (1.6) легко видеть, что

$$[D_0, D_1] = -D_3,\ [D_0, D_2] = D_3,\ [D_0, D_3] = \frac{1}{2}(D_1 - D_2),$$
$$[D_0, D_4] = -2D_6,\ [D_0, D_5] = 2D_6,\ [D_0, D_6] = D_4 - D_5.$$

Для нахождения полной системы образующих и соотношений для алгебры $\mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}})$ нам нужна более детальная информация о действии Ad_{K_0} в пространстве $\widetilde{\mathfrak{p}}$ и о коммутационных соотношениях в алгебре $\mathfrak{g}$. Ниже мы получим эту информацию, пользуясь моделями двухточечно-однородных римановых пространств.

Очевидно, что любой автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, сохраняющий ее подалгебру $\mathfrak{k}_0$, порождает автоморфизм алгебры $\mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}})$. В силу соотношений (1.3) отображение $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\sigma|_{\mathfrak{k}} = \mathrm{id}$, $\sigma|_{\mathfrak{p}} = -\mathrm{id}$ является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$. Оно порождает автоморфизм алгебры $\mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}})$: $D_0 \to -D_0$, $D_1 \to D_1$, $D_2 \to D_2$, $D_3 \to -D_3$, $D_4 \to D_4$, $D_5 \to D_5$, $D_6 \to -D_6$. Мы обозначим его тем же символом σ.

Кроме того, присоединенное действие ad_Λ порождает однопараметрическую группу ζ_α автоморфизмов алгебры $\mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}})$. Из (1.6) получаем:

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha(\Lambda) &= \Lambda,\ \zeta_\alpha(e_{\lambda,i}) = \cos(\alpha/2)e_{\lambda,i} - \sin(\alpha/2)f_{\lambda,i}, \\ \zeta_\alpha(f_{\lambda,i}) &= \sin(\alpha/2)e_{\lambda,i} + \cos(\alpha/2)f_{\lambda,i},\ i = 1, \dots, q_1, \\ \zeta_\alpha(e_{2\lambda,j}) &= \cos(\alpha)e_{2\lambda,j} - \sin(\alpha)f_{2\lambda,j},\ \zeta_\alpha(f_{2\lambda,i}) = \sin(\alpha)e_{2\lambda,j} + \cos(\alpha)f_{2\lambda,j}, \\ &j = 1, \dots, q_2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\zeta_\alpha(D_0) = D_0,\ \zeta_\alpha(D_1) = \cos^2(\alpha/2)D_1 + \sin^2(\alpha/2)D_2 - \sin(\alpha)D_3,$$

$$\zeta_\alpha(D_2) = \sin^2(\alpha/2)D_1 + \cos^2(\alpha/2)D_2 + \sin\alpha D_3,$$
$$\zeta_\alpha(D_3) = \frac{1}{2}\sin(\alpha)(D_1 - D_2) + \cos(\alpha)D_3,$$
$$\zeta_\alpha(D_4) = \cos^2(\alpha)D_4 + \sin^2(\alpha)D_5 - \sin(2\alpha)D_6,$$
$$\zeta_\alpha(D_5) = \sin^2(\alpha)D_4 + \cos^2(\alpha)D_5 + \sin(2\alpha)D_6,$$
$$\zeta_\alpha(D_6) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)(D_4 - D_5) + \cos(2\alpha)D_6.$$

В частности, $\zeta_\pi(D_1) = D_2$, $\zeta_\pi(D_2) = D_1$, $\zeta_\pi(D_3) = -D_3$, $\zeta_\pi(D_i) = D_i$, $i = 0, 4, 5, 6$.

В силу ортонормированности базиса

$$\frac{1}{R}\Lambda, \frac{1}{R}e_{\lambda,i}, \frac{1}{R}f_{\lambda,i}, \frac{1}{R}e_{2\lambda,j}, \frac{1}{R}f_{2\lambda,j}, \ i = 1, \ldots, q_1, j = 1, \ldots, q_2,$$

в пространстве $\widetilde{\mathfrak{p}}$, оператор $C_1 = D_0^2 + D_1 + D_2 + D_4 + D_5$ является оператором Казимира и лежит в центре алгебры $\mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}})$ в соответствии со следствием 2.2.

Для изучения интегралов задачи двух тел на двухточечно-однородных римановых пространств в главе 7 нам потребуется информация о центре алгебры $\mathrm{Diff}_G(Q_S)$. Его полное описание представляется трудной задачей. Общая теория (см. следствие 2.2) гарантирует только включение $\eta \circ \lambda^*(S(\mathfrak{g})^G) \subset \mathrm{ZDiff}_G(Q_S)$. При этом неизвестно, исчерпывает ли множество $\eta \circ \lambda^*(S(\mathfrak{g})^G)$ центр алгебры $\mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}})$ или нет. Отметим, что в некоторых примерах ниже отображение $\eta \circ \lambda^*|_{S(\mathfrak{g})^G}$ не является инъективным.

Для нахождения образующих алгебры $\eta \circ \lambda^*(S(\mathfrak{g})^G)$ вначале необходимо описать независимые инвариантные элементы действия Ad_G в алгебре $S(\mathfrak{g})$. Их число и степени для рассматриваемых групп указаны в предложении 1.5. Однако их явный вид (особенно для больших степеней), по-видимому, отсутствует в литературе. Выражение образов этих инвариантных элементов под действием отображения $\eta \circ \lambda^*$ через выбранные образующие алгебры $\mathrm{Diff}_G(Q_S)$ требует большого объема вычислений даже для инвариантных элементов третьей степени в относительно хорошо известном случае группы SU(3). Ниже мы получим выражения для некоторых элементов из $\mathrm{ZDiff}_G(Q_S)$ низших степеней прямыми вычислениями и докажем, что для пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}}, \mathbf{P}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}}, \mathbf{S}^n_{\mathbf{S}}$ и их некомпактных аналогов мы нашли полные системы образующих подалгебр $\eta \circ \lambda^*(S(\mathfrak{g})^G)$.

Пусть $\pi_3\colon Q_{\mathbf{S}} \to Q$ — каноническая проекция, а $\widetilde{\pi}_3$ — дуальное отображение, действующее по формуле $f \mapsto f \circ \pi_1$, где f — функция на пространстве Q. В силу отождествления $\mathfrak{p} \simeq T_{x_0}Q$ оператор $(D_0^2 + D_1 + D_2) \circ \widetilde{\pi}_3$ является оператором Лапласа–Бельтрами на пространстве Q.

§ 3.2. Алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$

Здесь мы будем пользоваться обозначениями из п. 1.3.1.

3.2.1. Образующие алгебр $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$

Рассмотрим теперь тотальное пространство расслоения единичных сфер $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}$ над пространством $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$. Пусть $(\mathbf{z}, \zeta)$ — текущая точка пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}$, где $\mathbf{z} \in \mathbf{P}^n(\mathbb{H})$, $\zeta \in T_{\mathbf{z}}\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$. Ввиду наличия изоморфизма $\mathbf{P}^1(\mathbb{H}) \cong \mathbf{S}^4$, предположим, что $n \geqslant 2$.

Пусть $\widetilde{\mathbf{z}}_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{H}^{n+1}$, а элемент $\xi_0 \in T_{\widetilde{\mathbf{z}}_0}\mathbb{H}^{n+1} \cong \mathbb{H}^{n+1}$ имеет координаты $(0, 1, 0, \ldots, 0)$. Положим $\mathbf{z}_0 = \pi\widetilde{\mathbf{z}}_0$, $\zeta_0 = \pi_*\xi_0 \in T_{\mathbf{z}_0}\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$.

Стационарная подгруппа K_0 группы $\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n+1)$, соответствующая точке $(\mathbf{z}_0, \zeta_0)$, порождается группой $K_1 = \mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n-1)$, действующей на последние $n-1$ однородных координат, и группой $K_2 = \mathrm{U}_{\mathbb{H}}(1)$, действующей левым умножением всех однородных координат на кватернион единичной нормы. В частности, группа K_0 связна, а ее $(2n^2 - 3n + 4)$-мерная алгебра Ли $\mathfrak{k}_0$ (в соответствии с предложением 1.2) порождается элементами (1.11) при $3 \leqslant k \leqslant j \leqslant n+1$, а также элементами

$$\sum_{k=1}^{n+1} \Upsilon_{kk}, \sum_{k=1}^{n+1} \Omega_{kk}, \sum_{k=1}^{n+1} \Theta_{kk}.$$

Выберем подпространство $\widetilde{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{u}_{\mathbb{H}}(n+1)$, дополнительное к подалгебре $\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{g}$, как линейную оболочку элементов:

$$\Psi_{1k},\ \Upsilon_{1k},\ \Omega_{1k},\ \Theta_{1k},\ 2 \leqslant k \leqslant n+1,\ \Psi_{2k},\ \Upsilon_{2k},\ \Omega_{2k},\ \Theta_{2k},\ 3 \leqslant k \leqslant n+1,$$

$$\Upsilon_* = \frac{\mathbf{i}}{2}(E_{11} - E_{22}),\ \Omega_* = \frac{\mathbf{j}}{2}(E_{11} - E_{22}),\ \Theta_* = \frac{\mathbf{k}}{2}(E_{11} - E_{22}). \tag{3.3}$$

Принимая во внимание соотношения (1.12), легко проверить редуктивность разложения $\mathfrak{u}_{\mathbb{H}}(n+1) = \widetilde{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{k}_0$, т. е. $[\widetilde{\mathfrak{p}}, \mathfrak{k}_0] \subset \widetilde{\mathfrak{p}}$.

Из (1.12) легко видеть, что, положив

$$\begin{gathered}\Lambda = -\Psi_{12},\ e_{\lambda,k-2} = \Psi_{1k},\ e_{\lambda,n-3+k} = \Upsilon_{1k},\\ e_{\lambda,2n-4+k} = \Omega_{1k},\ e_{\lambda,3n-5+k} = \Theta_{1k},\\ f_{\lambda,k-2} = -\Psi_{2k},\ f_{\lambda,n-3+k} = -\Upsilon_{2k},\\ f_{\lambda,2n-4+k} = -\Omega_{2k},\ f_{\lambda,3n-5+k} = -\Theta_{2k},\ k = 3,\ \dots,n+1,\\ e_{2\lambda,1} = \Upsilon_{12},\ e_{2\lambda,2} = \Omega_{12},\ e_{2\lambda,3} = \Theta_{12},\\ f_{2\lambda,1} = \Upsilon_*,\ f_{2\lambda,2} = \Omega_*,\ f_{2\lambda,3} = \Theta_*,\end{gathered} \tag{3.4}$$

мы получим базис из предложения 1.2 для $q_1 = 4n-4, q_2 = 3$.

Теперь мы можем найти полную систему независимых Ad_{K_0}-инвариантных элементов из алгебры $S(\widetilde{\mathfrak{p}})$. В соответствии с § 3.1, разложение $\widetilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda}$ является инвариантным относительно действия Ad_{K_0}. В пространстве $\mathfrak{a}$ действие K_0 тривиально, что дает инвариантный элемент $D_0 = \Lambda \in \lambda\left(S(\widetilde{\mathfrak{p}})^{K_0}\right)$, уже найденный в § 3.1.

Из формулы (3.4) мы видим, что пространство $\mathfrak{p}_\lambda \cong \mathbb{H}^{n-1}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -a^* \\ a & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\overline{a}_1 & \dots & -\overline{a}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ a_1,\dots,a_{n-1} \in \mathbb{H}.$$

Аналогично пространство $\mathfrak{k}_\lambda \cong \mathbb{H}^{n-1}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^* \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{b}_1 & \dots & -\overline{b}_{n-1} \\ 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ b_1,\dots,b_{n-1} \in \mathbb{H}.$$

В силу формулы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a^* \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(Ua)^* \\ Ua & 0 \end{pmatrix},$$
$$U \in \mathrm{U}_\mathbb{H}(n-1), \quad a \in \mathbb{H}^{n-1},$$

действие группы K_1 в пространстве $\mathfrak{p}_\lambda$ эквивалентно тавтологическому действию группы $U_{\mathbb{H}}(n-1)$ в пространстве $\mathbb{H}^{n-1}$: $a \to Ua$. В пространстве $\mathfrak{k}_\lambda$ действие группы K_1 — аналогично: $b \to Ub$.

Тавтологическое действие группы $\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n-1)$ в пространстве $\mathbb{H}^{n-1}$ имеет только один независимый вещественный инвариант: $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$, $\mathbf{z} \in \mathbb{H}^{n-1}$, а диагональное действие той же группы в пространстве $\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \cong \mathbb{H}^{n-1} \oplus \mathbb{H}^{n-1}$ имеет шесть (независимых при $n \geqslant 3$) вещественных инвариантов:

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle \in \mathbb{R},\ \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle \in \mathbb{R},\ \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4,\ \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{H}^{n-1}. \tag{3.5}$$

В силу леммы 2.4 соответствующие элементы из множества $\lambda\left(S(\widetilde{\mathfrak{p}})^{K_1}\right)$ имеют вид:

$$\begin{gathered}
D_1 = \sum_{k=3}^{n+1} \left(\Psi_{1k}^2 + \Upsilon_{1k}^2 + \Omega_{1k}^2 + \Theta_{1k}^2\right),\ D_2 = \sum_{k=3}^{n+1} \left(\Psi_{2k}^2 + \Upsilon_{2k}^2 + \Omega_{2k}^2 + \Theta_{2k}^2\right), \\
D_3 = -\frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \left(\{\Psi_{1k}, \Psi_{2k}\} + \{\Upsilon_{1k}, \Upsilon_{2k}\} + \{\Omega_{1k}, \Omega_{2k}\} + \{\Theta_{1k}, \Theta_{2k}\}\right), \\
\square_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \left(-\{\Psi_{1k}, \Upsilon_{2k}\} + \{\Psi_{2k}, \Upsilon_{1k}\} + \{\Theta_{1k}, \Omega_{2k}\} - \{\Theta_{2k}, \Omega_{1k}\}\right), \\
\square_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \left(-\{\Psi_{1k}, \Omega_{2k}\} + \{\Psi_{2k}, \Omega_{1k}\} + \{\Upsilon_{1k}, \Theta_{2k}\} - \{\Upsilon_{2k}, \Theta_{1k}\}\right), \\
\square_3 = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \left(-\{\Psi_{1k}, \Theta_{2k}\} + \{\Psi_{2k}, \Theta_{1k}\} + \{\Omega_{1k}, \Upsilon_{2k}\} - \{\Omega_{2k}, \Upsilon_{1k}\}\right).
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Если $n = 2$, то существует единственное независимое соотношение между инвариантами (3.5):

$$|\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle|^2 = |\overline{z}_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle,\ \mathbf{z}_1 = z_1, \mathbf{z}_2 = z_2 \in \mathbb{H}. \tag{3.7}$$

Если записать это соотношение в координатах, то мы получим хорошо известное *тождество Эйлера*, которое является ключевым ингредиентом доказательства *теоремы Лагранжа* из теории чисел: *любое натуральное число можно представить в виде суммы четырех квадратов*.

Элементы D_1, D_2, D_3, уже найденные в § 3.1, являются инвариантными относительно действия всей группы K_0, поэтому они соответствуют операторам второго порядка из алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$. Элементы $\square_1, \square_2, \square_3$ не являются инвариантными относительно действия

группы $K_2 \cong \mathrm{U}_{\mathbb{H}}(1)$. Очевидно, что действие группы K_2 в линейной оболочке элементов $\Box_1, \Box_2, \Box_3$ эквивалентно, после отождествления $\Box_1 \leftrightarrow \mathbf{i}$, $\Box_2 \leftrightarrow \mathbf{j}$, $\Box_3 \leftrightarrow \mathbf{k}$, хорошо известному действию группы $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{U}_{\mathbb{H}}(1)/(1,-1)$ в пространстве $\mathbb{H}'$ чисто мнимых кватернионов:

$$x \to qx\bar{q},\ x \in \mathbb{H}',\ q \in \mathrm{U}_{\mathbb{H}}(1). \tag{3.8}$$

Действие Ad_{K_2} на трехмерных пространствах $\mathfrak{p}_{2\lambda}$, $\mathfrak{k}_{2\lambda}$ совпадает с (3.8) после отождествления $\Upsilon_{12}, \Upsilon_* \leftrightarrow \mathbf{i}$; $\Omega_{12}, \Omega_* \leftrightarrow \mathbf{j}$; $\Theta_{12}, \Theta_* \leftrightarrow \mathbf{k}$; а действие Ad_{K_1} в этих пространствах тривиально. Таким образом, нам нужно найти инварианты диагонального действия группы $\mathrm{SO}(3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$. Ясно, что существует $6 = 9-3$ таких независимых инвариантов:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle,\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle,\ \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle,\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle,\ \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle,\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$$

и инвариант $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \equiv \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z} \rangle$, алгебраически связанный с первыми шестью:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle^2 = \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2\mathbf{z}^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle - \mathbf{x}^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle^2 - \\ - \mathbf{y}^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle^2 - \mathbf{z}^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\mathbf{y} \times \mathbf{z}$ — стандартное векторное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$. Соотношение (3.9) может быть проверено с помощью хорошо известных формул: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 = \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 - \langle \mathbf{x} \times \mathbf{y} \rangle^2$ и $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{z}$.

Заметим, что соотношение (3.9) можно записать в матричной форме:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle^2 = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \\ \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \end{vmatrix}.$$

Лемма 2.4 дает следующие инвариантные элементы из $U(\mathfrak{g})^{K_0}$:

$$\begin{aligned} &D_4 = \Upsilon_{12}^2 + \Omega_{12}^2 + \Theta_{12}^2,\ D_5 = \Upsilon_*^2 + \Omega_*^2 + \Theta_*^2, \\ &D_6 = \frac{1}{2}\left(\{\Upsilon_{12}, \Upsilon_*\} + \{\Omega_{12}, \Omega_*\} + \{\Theta_{12}, \Theta_*\}\right), \\ &D_7 = \frac{1}{2}\left(\{\Box_1, \Upsilon_{12}\} + \{\Box_2, \Omega_{12}\} + \{\Box_3, \Theta_{12}\}\right), \\ &D_8 = \frac{1}{2}\left(\{\Box_1, \Upsilon_*\} + \{\Box_2, \Omega_*\} + \{\Box_3, \Theta_*\}\right),\ D_9 = \Box_1^2 + \Box_2^2 + \Box_3^2, \\ &D_{10} = \Box_1\Omega_{12}\Theta_* - \Box_1\Omega_*\Theta_{12} + \Box_2\Upsilon_*\Theta_{12} - \Box_2\Upsilon_{12}\Theta_* + \Box_3\Omega_*\Upsilon_{12} - \Box_3\Omega_{12}\Upsilon_*. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь мы учли, что все три сомножителя из любого слагаемого в последнем выражении попарно коммутируют. Инвариантные элементы D_4, D_5, D_6 были рассмотрены в общей ситуации в § 3.1.

Фактически элементы D_7, D_8, D_9 и D_{10} не содержатся в $\lambda\left(S\left(\widetilde{\mathfrak{p}}\right)^{K_0}\right)$, т. к. они не симметричны по отношению ко всем перестановкам их сомножителей первой степени. После полной симметризации мы получим инвариантные элементы $\widetilde{D}_k$ из множества $\lambda\left(S\left(\widetilde{\mathfrak{p}}\right)^{K_0}\right)$

$$\widetilde{D}_k \equiv D_k + D_k^* \mod \left(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}_0\right)^{K_0},$$
$$k = 7, 8, 9, 10,$$

где D_k^* — элементы из $U\left(\mathfrak{g}\right)^{K_0}$ с $\deg D_k^* < \deg D_k$. Но для удобства мы будем использовать элементы D_k вместо элементов $\widetilde{D}_k$, $k = 7, 8, 9, 10$.

Таким образом, операторы $D_0, \ldots, D_{10}$ порождают алгебру $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$.

Степени этих образующих таковы:

$$\begin{aligned} &\deg(D_0) = 1,\ \deg(D_1) = \deg(D_2) = \deg(D_3) = \deg(D_4) = \\ &\qquad = \deg(D_5) = \deg(D_6) = 2, \\ &\deg(D_7) = \deg(D_8) = 3,\ \deg(D_9) = \deg(D_{10}) = 4. \end{aligned} \tag{3.11}$$

В модели пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$ мы можем переставить координаты z_1 и z_2. Операторы $D_3, D_4, D_5, D_8, D_9, D_{10}$ симметричны (инвариантны) относительно этой перестановки, а операторы $D_0, \Box_1, \Box_2, \Box_3, D_6, D_7$ являются кососимметричными. Операторы D_1 и D_2 переходят друг в друга при этой перестановке.

Легко убедиться, что автоморфизмы ζ_α, σ действуют на элементы $\Box_i, D_7, \ldots, D_{10}$, $i = 1, 2, 3$, следующим образом:

$$\begin{aligned} &\zeta_\alpha(\Box_i) = \Box_i, i = 1, 2, 3,\ \zeta_\alpha(D_7) = \cos(\alpha)D_7 - \sin(\alpha)D_8, \\ &\zeta_\alpha(D_8) = \sin(\alpha)D_7 + \cos(\alpha)D_8, \\ &\zeta_\alpha(D_9) = D_9,\ \zeta_\alpha(D_{10}) = D_{10}, \sigma(\Box_i) = -\Box_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ &\sigma(D_7) = D_7,\ \sigma(D_8) = -D_8, \quad \sigma(D_9) = D_9,\ \sigma(D_{10}) = D_{10}. \end{aligned}$$

Рассматривая действия этих автоморфизмов на другие образующие (см. § 3.1), получаем, что перестановка координат элементов z_1 и z_2 при действии в алгебре $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$ эквивалентна композиции $\sigma \circ \zeta_\pi$.

Для получения образующих алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$ используем предложение 1.5, формулу (3.4) и сделаем формальную подстановку:

$$\begin{gathered}\Lambda \to \mathbf{i}\Lambda,\ \Psi_{1k} \to \mathbf{i}\Psi_{1k},\ \Upsilon_{1k} \to \mathbf{i}\Upsilon_{1k},\\ \Omega_{1k} \to \mathbf{i}\Omega_{1k},\ \Theta_{1k} \to \mathbf{i}\Theta_{1k},\ \Upsilon_{12} \to \mathbf{i}\Upsilon_{12},\\ \Omega_{12} \to \mathbf{i}\Omega_{12},\ \Theta_{12} \to \mathbf{i}\Theta_{12},\ \Psi_{2k} \to \Psi_{2k},\ \Upsilon_{2k} \to \Upsilon_{2k},\\ \Omega_{2k} \to \Omega_{2k},\ \Theta_{2k} \to \Theta_{2k},\\ \Upsilon_* \to \Upsilon_*,\ \Omega_* \to \Omega_*,\ \Theta_* \to \Theta_*,\ k = 3, \dots, n+1.\end{gathered}$$

Эта подстановка индуцирует следующую подстановку образующих $D_0, \dots, D_{10}$:

$$\begin{gathered}D_0 \to \mathbf{i}\overline{D}_0,\ D_1 \to -\overline{D}_1,\ D_2 \to \overline{D}_2,\ D_3 \to \mathbf{i}\overline{D}_3,\ D_4 \to -\overline{D}_4,\ D_5 \to \overline{D}_5,\\ D_6 \to \mathbf{i}\overline{D}_6,\ D_7 \to -\overline{D}_7,\ D_8 \to \mathbf{i}\overline{D}_8,\ D_9 \to -\overline{D}_9,\ D_{10} \to -\overline{D}_{10}.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Операторы $\overline{D}_0, \dots, \overline{D}_{10}$ порождают алгебру $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$.

3.2.2. Соотношения в алгебрах $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$

Здесь мы найдем независимые соотношения в алгебре $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$ для ее образующих $D_0, \dots, D_{10}$. В соответствии с п. 2.1.4 эти соотношения бывают двух типов. Первый тип состоит из коммутационных соотношений, поскольку коммутатор двух дифференциальных операторов порядков m_1 и m_2 является оператором порядка $m_3 \leqslant m_1 + m_2 - 1$. Это дает $11(11-1)/2 = 55$ соотношений. В силу (3.9) для $n \geqslant 3$ второй тип состоит из единственного независимого соотношения вида:

$$D_{10}^2 - D_9D_4D_5 - D_7D_6D_8 - D_8D_6D_7 + D_9D_6^2 + D_7D_5D_7 + D_8D_4D_8 = D', \tag{3.13}$$

где D' — оператор порядка $\leqslant 7$, полиномиально выражающийся через образующие $D_0, \dots, D_{10}$. Его точный вид будет указан ниже. Для $n = 2$ формула (3.7) дает еще одно независимое соотношение вида:

$$\frac{1}{2}\{D_1, D_2\} - D_3^2 - D_9 = D'',$$

где D'' — оператор порядка $\leqslant 3$, полиномиально выражающийся через операторы $D_0, \dots, D_8$. Прямые вычисления дают $D'' = D_1 + D_2$, поэтому

в случае $n = 2$ имеем дополнительное соотношение:

$$\frac{1}{2}\{D_1, D_2\} - D_3^2 - D_9 = D_1 + D_2. \tag{3.14}$$

Для $n = 2$ при помощи этого соотношения можно исключить элемент D_9 из списка образующих.

В принципе все соотношения могут быть получены прямыми вычислениями в обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ по модулю $(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}_0)^{K_0}$, но эти вычисления становятся слишком громоздкими для выписывания их здесь. В приложении А приведен пример вывода некоторых коммутационных соотношений для алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$. После получения некоторых коммутационных соотношений прямыми вычислениями ряд других может быть получен (см. приложение А) при помощи тождества Якоби:

$$[D_i, [D_j, D_k]] + [D_k, [D_i, D_j]] + [D_j, [D_k, D_i]] = 0,$$

которое справедливо, в частности, в любой ассоциативной алгебре. Данное тождество также дает инструмент для проверки уже найденных коммутационных соотношений.

Элемент D' можно записать в виде $D' = \sum_{i=2}^{7} \delta_i$, где

$$\begin{aligned}
\delta_7 &= D_7(D_1 - D_2)D_5 + 2D_8D_3D_4 - D_7\{D_3, D_6\} - \\
&\quad - \frac{1}{2}D_8\{D_1 - D_2, D_6\} + 2D_9D_6D_0, \\
\delta_6 &= \frac{5}{4}D_0(D_1 - D_2)D_8 - \frac{5}{2}D_0D_3D_7 + D_7^2 + D_8^2 + 2D_9D_4 - \\
&\quad - \frac{9}{4}D_3^2D_4 - \frac{9}{16}(D_1 - D_2)^2D_5 + \\
&\quad + \frac{9}{4}(D_1 - D_2)D_3D_6 - \frac{3}{2}(D_1 + D_2)D_5D_4 + \frac{3}{2}(D_1 + D_2)D_6^2 - \\
&\quad - \frac{13}{4}D_0^2D_9 - \frac{5}{2}D_0^2D_{10} + \frac{3}{2}(D_4 + D_5)D_{10}, \\
\delta_5 &= \frac{33}{8}D_0(D_1 + D_2)D_6 - \frac{9}{4}\left(D_3D_8 + \frac{1}{2}(D_1 - D_2)D_7\right), \\
\delta_4 &= \frac{9}{4}D_3^2 + \frac{9}{16}(D_1 - D_2)^2 + \frac{1}{8}(D_1 + D_2)(9D_5 - 15D_4) + \frac{19}{2}D_9 + \frac{3}{2}D_{10} + \\
&\quad + \frac{3}{2}D_0^2(D_1 + D_2) + 3n(n-1)(D_5D_4 - D_6^2),
\end{aligned}$$

$$\delta_3 = -\frac{33}{4}n(n-1)D_0D_6,$$

$$\delta_2 = \frac{1}{4}n(n-1)(15D_4 - 9D_5) - 3n(n-1)D_0^2.$$

Ниже приведены все 55 коммутационных соотношений в лексикографическом порядке.

$$[D_0, D_1] = -D_3, \quad [D_0, D_2] = D_3,$$

$$[D_0, D_3] = \frac{1}{2}(D_1 - D_2), \quad [D_0, D_4] = -2D_6,$$

$$[D_0, D_5] = 2D_6, \quad [D_0, D_6] = D_4 - D_5,$$

$$[D_0, D_7] = -D_8, \quad [D_0, D_8] = D_7, \quad [D_0, D_9] = 0,$$

$$[D_0, D_{10}] = 0, \quad [D_1, D_2] = -\{D_0, D_3\} - 2D_7,$$

$$[D_1, D_3] = -\frac{1}{2}\{D_0, D_1\} + D_8 + n(n-1)D_0,$$

$$[D_1, D_4] = 2D_7, \ [D_1, D_5] = 0, \ [D_1, D_6] = D_8,$$

$$[D_1, D_7] = -\frac{1}{2}\{D_3, D_6\} - \frac{1}{2}\{D_1, D_4\} +$$

$$+ \frac{3}{8}(D_1 - D_2) + D_9 + D_{10} + n(n-1)D_4,$$

$$[D_1, D_8] = -\frac{1}{2}\{D_3, D_5\} + \frac{3}{4}D_3 - \frac{1}{2}\{D_1, D_6\} + n(n-1)D_6,$$

$$[D_1, D_9] = -\{D_3, D_8\} - \{D_1, D_7\} - \frac{3}{4}\{D_0, D_3\} +$$

$$+ 2(n - \frac{3}{2})(n + \frac{1}{2})D_7,$$

$$[D_1, D_{10}] = \frac{1}{2}\{D_6, D_8\} - \frac{1}{2}\{D_5, D_7\} + \frac{3}{8}\{D_0, D_3\} + \frac{1}{2}D_7,$$

$$[D_2, D_3] = \frac{1}{2}\{D_0, D_2\} + D_8 - n(n-1)D_0,$$

$$[D_2, D_4] = -2D_7, \ [D_2, D_5] = 0, \quad [D_2, D_6] = -D_8,$$

$$[D_2, D_7] = -\frac{1}{2}\{D_3, D_6\} + \frac{1}{2}\{D_2, D_4\} + \frac{3}{8}(D_1 - D_2) - D_9 - D_{10} -$$

$$- n(n-1)D_4,$$

$$[D_2, D_8] = -\frac{1}{2}\{D_3, D_5\} + \frac{1}{2}\{D_2, D_6\} + \frac{3}{4}D_3 - n(n-1)D_6,$$

$$
\begin{aligned}
&[D_2, D_9] = -\{D_3, D_8\} + \{D_2, D_7\} + \frac{3}{4}\{D_0, D_3\} - 2(n - \frac{3}{2})(n + \frac{1}{2})D_7,\\
&[D_2, D_{10}] = -\frac{1}{2}\{D_6, D_8\} + \frac{1}{2}\{D_5, D_7\} - \frac{3}{8}\{D_0, D_3\} - \frac{1}{2}D_7, \qquad (3.15)\\
&[D_3, D_4] = 0, \quad [D_3, D_5] = 2D_8,\\
&[D_3, D_6] = D_7, [D_3, D_7] = -\frac{1}{4}\{D_1 + D_2, D_6\} + n(n-1)D_6,\\
&[D_3, D_8] = -\frac{1}{4}\{D_1 + D_2, D_5\} + n(n-1)D_5 + D_9 + D_{10},\\
&[D_3, D_9] = -\frac{1}{2}\{D_1 + D_2, D_8\} + \frac{3}{8}\{D_0, D_1 - D_2\} + 2(n - \frac{3}{2})(n + \frac{1}{2})D_8,\\
&[D_3, D_{10}] = \frac{1}{2}\{D_6, D_7\} - \frac{1}{2}\{D_4, D_8\} - \frac{3}{16}\{D_0, D_1 - D_2\} + \frac{1}{2}D_8,\\
&[D_4, D_5] = -2\{D_0, D_6\},\\
&[D_4, D_6] = -\{D_0, D_4\} + \frac{3}{2}D_0,\\
&[D_4, D_7] = \frac{1}{2}\{D_1 - D_2, D_4\} + \frac{3}{4}(D_2 - D_1),\\
&[D_4, D_8] = \frac{1}{2}\{D_1 - D_2, D_6\} - \{D_0, D_7\},\\
&[D_4, D_9] = \{D_1 - D_2, D_7\}, [D_4, D_{10}] = 0,\\
&[D_5, D_6] = \{D_0, D_5\} - \frac{3}{2}D_0,\\
&[D_5, D_7] = \{D_3, D_6\} + \{D_0, D_8\},\\
&[D_5, D_8] = \{D_3, D_5\} - \frac{3}{2}D_3,\\
&[D_5, D_9] = 2\{D_3, D_8\}, \quad [D_5, D_{10}] = 0,\\
&[D_6, D_7] = \frac{1}{4}\{D_1 - D_2, D_6\} +\\
&\qquad + \frac{1}{2}\{D_3, D_4\} + \frac{1}{2}\{D_0, D_7\} - \frac{3}{4}D_3,\\
&[D_6, D_8] = \frac{1}{4}\{D_1 - D_2, D_5\} + \frac{1}{2}\{D_3, D_6\} - \frac{1}{2}\{D_0, D_8\} + \frac{3}{8}(D_2 - D_1),\\
&[D_6, D_9] = \frac{1}{2}\{D_1 - D_2, D_8\} + \{D_3, D_7\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[D_6, D_{10}] &= 0,\ [D_7, D_8] = \frac{1}{4}\{D_1 - D_2, D_8\} - \\
&- \frac{1}{2}\{D_3, D_7\} + \frac{3}{16}\{D_0, D_1 + D_2\} - \\
&- \frac{1}{2}\{D_0, D_9 + D_{10}\} - \frac{3}{4}n(n-1)D_0, \\
[D_7, D_9] &= \frac{1}{4}\{D_3, D_6\} + \frac{1}{8}\{D_1 - D_2, D_4\} + \\
&+ \frac{1}{2}\{D_1 - D_2, D_9 + D_{10}\} - \frac{3}{8}(D_1^2 - D_2^2) + \\
&+ \frac{3}{4}(n^2 - n - \frac{1}{4})(D_1 - D_2), \\
[D_7, D_{10}] &= \frac{1}{4}\{D_2 - D_1, D_6^2\} - \frac{1}{4}\{\{D_0, D_7\}, D_6\} + \frac{1}{4}\{\{D_0, D_4\}, D_8\} + \\
&+ \frac{1}{8}\{\{D_1 - D_2, D_5\}, D_4\} - \frac{1}{4}\{D_3, D_6\} + \\
&+ \frac{1}{8}\{D_2 - D_1, 3D_4 + D_5\} - \frac{1}{2}\{D_0, D_8\} + \\
&+ \frac{15}{32}(D_1 - D_2), \\
[D_8, D_9] &= \frac{1}{8}\{D_1 - D_2, D_6\} + \frac{1}{4}\{D_3, D_5\} - \frac{3}{8}\{D_3, D_1 + D_2\} + \\
&+ \{D_3, D_9 + D_{10}\} + \frac{3}{2}(n^2 - n - \frac{1}{4})D_3, \\
[D_8, D_{10}] &= -\frac{1}{4}\{\{D_3, D_6\}, D_6\} + \frac{1}{4}\{\{D_0, D_6\}, D_8\} - \\
&- \frac{1}{4}\{\{D_0, D_5\}, D_7\} + \frac{1}{4}\{\{D_3, D_5\}, D_4\} - \frac{1}{2}\{D_3, D_5\} - \\
&- \frac{1}{4}\{D_3, D_4\} + \frac{1}{4}\{D_0, D_7\} + \frac{9}{16}D_3, \\
[D_9, D_{10}] &= \frac{1}{4}\{-\{D_6, D_8\} + \{D_5, D_7\}, D_1 - D_2\} + \frac{1}{2}\{\{D_3, D_8\}, D_4\} - \\
&- \frac{1}{2}\{\{D_3, D_6\}, D_7\} + \frac{1}{4}\{D_2 - D_1, D_7\} - \frac{1}{2}\{D_3, D_8\}.
\end{aligned}
$$

Любопытно, что операторы D_9 и D_{10} появляются в правых частях этих соотношений только в виде комбинации $D_9 + D_{10}$.

Используя соотношения (3.15), нетрудно убедиться непосредственно, что оператор Казимира $C_1 = D_0^2 + D_1 + D_2 + D_4 + D_5$ принадлежит центру алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$ в соответствии с § 3.1. Поскольку группа $\mathrm{U}_\mathbb{H}(n+1) \cong \mathrm{Sp}(2(n+1))$ является компактной вещественной формой группы $\mathrm{Sp}(2(n+1), \mathbb{C})$, то из предложения 1.5 вытекает, что действие $\mathrm{Ad}_{U_\mathbb{H}(n+1)}$ в алгебре $\mathfrak{u}_\mathbb{H}(n+1)$ имеет $n+1$ независимых инвариантов степеней $2, 4, 6, \ldots, 2n+2$.

Предложение 3.1. Образ отображения $\eta \circ \lambda^*|_{S(\mathfrak{u}_\mathbb{H}(n+1))^{\mathrm{U}_\mathbb{H}(n+1)}}$ порождается некоторыми элементами степеней $\leqslant 8$.

Доказательство. Алгебра Ли $\mathfrak{u}_\mathbb{H}(n')$ состоит из матриц вида $A + B\mathbf{j}$, $A, B \in \mathrm{Mat}(n', \mathbb{C})$, $\overline{A}^T = -A, B^T = B$. Легко убедиться в том, что отображение

$$A + B\mathbf{j} \to \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2n', \mathbb{C}) \tag{3.16}$$

определяет изоморфизм алгебр $\mathfrak{u}_\mathbb{H}(n')$ и $\mathfrak{sp}(n') := \mathfrak{sp}(n', \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n')$. Группы $U_\mathbb{H}(n')$ и $\mathrm{Sp}(n')$ также изоморфны. Известно [59], что свободные образующие алгебры $S(\mathfrak{sp}(n'))^{\mathrm{Sp}(n')}$ соответствуют коэффициентам p_{2k}, $k = 1, \ldots, n'$, многочлена:

$$p_C(\chi) = \det(\chi\,\mathrm{id} - \mathbf{i}C) = \chi^{2n'} + \sum_{k=1}^{2n'} p_k \chi^{2n'-k},\ C \in \mathfrak{sp}(n').$$

Заметим, что $p_{2k-1} = 0$, $k = 1, \ldots, n'$, а коэффициенты p_{2k}, $k = 1, \ldots, n'$, — вещественны. В самом деле, в силу $C \in \mathfrak{sp}(n', \mathbb{C})$ справедливо равенство

$$C^T = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$p_C(\chi) = p_{C^T}(\chi) = \det\left(-\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}(\chi\,\mathrm{id} + \mathbf{i}C)\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \det\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}^2 \det(-\chi\,\mathrm{id} - \mathbf{i}C) = p_C(-\chi),$$

что доказывает первое утверждение. Кроме того, $\left(\overline{\mathbf{i}C}\right)^T = -\mathbf{i}\overline{C}^T = \mathbf{i}C$, т. к. $C \in \mathfrak{u}(2n')$. Поэтому $\mathbf{i}C$ — эрмитовая матрица, что доказывает второе утверждение.

Пусть теперь $n' = n+1$. В силу (3.4), координаты в алгебре Ли $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{u}_\mathbb{H}(n+1)$, соответствующие подпространству $\widetilde{\mathfrak{p}}$, расположены только в первых двух строках и столбцах матрицы $A + B\mathbf{j} \in \mathfrak{u}_\mathbb{H}(n+1)$. Изоморфизм (3.16) отображает эти строки и столбцы в четыре строки и столбца матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}.$$

Поэтому данные координаты входят в многочлены p_{2k}, $k = 1, \ldots, n$, не более чем в восьмой степени в совокупности. Применение леммы 2.4 завершает доказательство. ■

Следствие 3.1. *Поскольку в центре* $\mathrm{ZDiff}_I(P^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$ *имеется лишь конечное число элементов степеней* $\leqslant 8$, *то отображение* $\eta \circ \lambda^*|_{S(\mathfrak{u}_\mathbb{H}(n+1))^{\mathrm{U}_\mathbb{H}(n+1)}}$ *не является инъективным для достаточно больших значений* n.

Вместо непосредственного перехода посредством громоздких вычислений от образующих алгебры $S(\mathfrak{u}_\mathbb{H}(n+1))^{\mathrm{U}_\mathbb{H}(n+1)}$ к соответствующим элементам из $\mathrm{ZDiff}_I(P^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$ мы просто отберем элементы из $\mathrm{ZDiff}_I(P^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$ степени не выше четырех. Прямые вычисления приводят к выводу, что все такие элементы являются линейными комбинациями элементов C_1^2,

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{1}{2}\{D_1, D_2\} - D_3^2 - D_9 - (n^2 - n - 1)(D_1 + D_2), \\
C_3 &= \frac{1}{4}\{D_1 + D_2, D_4 + D_5\} + \frac{1}{4}(D_1 - D_2)^2 + D_3^2 + \\
&\quad + \frac{1}{4}(D_4 - D_5)^2 + D_6^2 + D_9 - 2D_{10} + \\
&\quad + \frac{1}{4}\{D_0^2, D_1 + D_2 + D_4 + D_5\} + \frac{1}{4}D_0^4 - \\
&\quad - (n^2 - n - \frac{3}{2})(D_4 + D_5) + (-n^2 + n + \frac{7}{4})D_0^2,
\end{aligned}$$

четвертой степени и элемента C_1 второй степени. В силу (3.14), при $n = 2$ имеем $C_2 = 0$.

Существование в случае $n \geqslant 3$ двух элементов из $\mathrm{ZDiff}_I(P^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$ (независимых друг от друга и от элемента C_1) четвертой степени означает одну из двух возможностей. Первая состоит в существовании элемента из центра $\mathrm{ZDiff}_I(P^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$, не входящего в мно-

жество $\eta \circ \lambda^* \left(S\left(\mathfrak{u}_{\mathbb{H}}(n+1)\right)^{\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n+1)} \right)$. Вторая возможность состоит в том, что образ в $\mathrm{ZDiff}_I(P^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$ некоторого элемента степени $\geqslant 6$ из $S\left(\mathfrak{u}_{\mathbb{H}}(n+1)\right)^{\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(n+1)}$ имеет степень четыре.

Используя подстановку (3.12), получаем из (3.15) коммутационные соотношения в алгебре $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$:

$$
\begin{aligned}
&[\bar{D}_0, \bar{D}_1] = \bar{D}_3,\ [\bar{D}_0, \bar{D}_2] = \bar{D}_3,\\
&[\bar{D}_0, \bar{D}_3] = \frac{1}{2}(\bar{D}_1 + \bar{D}_2),\ [\bar{D}_0, \bar{D}_4] = 2\bar{D}_6,\\
&[\bar{D}_0, \bar{D}_5] = 2\bar{D}_6,\ [\bar{D}_0, \bar{D}_6] = \bar{D}_4 + \bar{D}_5,\\
&[\bar{D}_0, \bar{D}_7] = \bar{D}_8, [\bar{D}_0, \bar{D}_8] = \bar{D}_7,\ [\bar{D}_0, \bar{D}_9] = 0,\\
&[\bar{D}_0, \bar{D}_{10}] = 0,\ [\bar{D}_1, \bar{D}_2] = -\{\bar{D}_0, \bar{D}_3\} - 2\bar{D}_7,\\
&[\bar{D}_1, \bar{D}_3] = -\frac{1}{2}\{\bar{D}_0, \bar{D}_1\} - \bar{D}_8 - n(n-1)\bar{D}_0,\\
&[\bar{D}_1, \bar{D}_4] = -2\bar{D}_7,\ [\bar{D}_1, \bar{D}_5] = 0,\ [\bar{D}_1, \bar{D}_6] = -\bar{D}_8,\\
&[\bar{D}_1, \bar{D}_7] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_6\} - \frac{1}{2}\{\bar{D}_1, \bar{D}_4\} -\\
&\qquad - \frac{3}{8}(\bar{D}_1 + \bar{D}_2) - \bar{D}_9 - \bar{D}_{10} - n(n-1)\bar{D}_4,\\
&[\bar{D}_1, \bar{D}_8] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_5\} - \frac{1}{2}\{\bar{D}_1, \bar{D}_6\} -\\
&\qquad - \frac{3}{4}\bar{D}_3 - n(n-1)\bar{D}_6,\\
&[\bar{D}_1, \bar{D}_9] = \{\bar{D}_3, \bar{D}_8\} - \{\bar{D}_1, \bar{D}_7\} + \frac{3}{4}\{\bar{D}_0, \bar{D}_3\} -\\
&\qquad - 2(n - \frac{3}{2})(n + \frac{1}{2})\bar{D}_7,\\
&[\bar{D}_1, \bar{D}_{10}] = -\frac{1}{2}\{\bar{D}_6, \bar{D}_8\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_5, \bar{D}_7\} - \frac{3}{8}\{\bar{D}_0, \bar{D}_3\} - \frac{1}{2}\bar{D}_7,\\
&[\bar{D}_2, \bar{D}_3] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_0, \bar{D}_2\} + \bar{D}_8 - n(n-1)\bar{D}_0,\\
&[\bar{D}_2, \bar{D}_4] = -2\bar{D}_7,\ [\bar{D}_2, \bar{D}_5] = 0,\\
&[\bar{D}_2, \bar{D}_6] = -\bar{D}_8,\ [\bar{D}_2, \bar{D}_7] = -\frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_6\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_2, \bar{D}_4\} +\\
&\qquad + \frac{3}{8}(\bar{D}_1 + \bar{D}_2) - \bar{D}_9 - \bar{D}_{10} - n(n-1)\bar{D}_4,
\end{aligned}
$$

$$[\bar{D}_2, \bar{D}_8] = -\frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_5\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_2, \bar{D}_6\} + \frac{3}{4}\bar{D}_3 - n(n-1)\bar{D}_6,$$

$$[\bar{D}_2, \bar{D}_9] = -\{\bar{D}_3, \bar{D}_8\} + \{\bar{D}_2, \bar{D}_7\} + \frac{3}{4}\{\bar{D}_0, \bar{D}_3\} - 2(n - \frac{3}{2})(n + \frac{1}{2})\bar{D}_7, \tag{3.17}$$

$$[\bar{D}_2, \bar{D}_{10}] = -\frac{1}{2}\{\bar{D}_6, \bar{D}_8\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_5, \bar{D}_7\} - \frac{3}{8}\{\bar{D}_0, \bar{D}_3\} - \frac{1}{2}\bar{D}_7,$$

$$[\bar{D}_3, \bar{D}_4] = 0,\ [\bar{D}_3, \bar{D}_5] = 2\bar{D}_8,$$

$$[\bar{D}_3, \bar{D}_6] = \bar{D}_7,\ [\bar{D}_3, \bar{D}_7] = -\frac{1}{4}\{\bar{D}_1 - \bar{D}_2, \bar{D}_6\} - n(n-1)\bar{D}_6,$$

$$[\bar{D}_3, \bar{D}_8] = -\frac{1}{4}\{\bar{D}_1 - \bar{D}_2, \bar{D}_5\} - n(n-1)\bar{D}_5 + \bar{D}_9 + \bar{D}_{10},$$

$$[\bar{D}_3, \bar{D}_9] = -\frac{1}{2}\{\bar{D}_1 - \bar{D}_2, \bar{D}_8\} + \frac{3}{8}\{\bar{D}_0, \bar{D}_1 + \bar{D}_2\} -$$

$$- 2(n - \frac{3}{2})(n + \frac{1}{2})\bar{D}_8,$$

$$[\bar{D}_3, \bar{D}_{10}] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_6, \bar{D}_7\} - \frac{1}{2}\{\bar{D}_4, \bar{D}_8\} - \frac{3}{16}\{\bar{D}_0, \bar{D}_1 + \bar{D}_2\} - \frac{1}{2}\bar{D}_8,$$

$$[\bar{D}_4, \bar{D}_5] = -2\{\bar{D}_0, \bar{D}_6\},\ [\bar{D}_4, \bar{D}_6] = -\{\bar{D}_0, \bar{D}_4\} - \frac{3}{2}\bar{D}_0,$$

$$[\bar{D}_4, \bar{D}_7] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_4\} + \frac{3}{4}(\bar{D}_2 + \bar{D}_1),$$

$$[\bar{D}_4, \bar{D}_8] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_6\} - \{\bar{D}_0, \bar{D}_7\},$$

$$[\bar{D}_4, \bar{D}_9] = \{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_7\},\ [\bar{D}_4, \bar{D}_{10}] = 0,$$

$$[\bar{D}_5, \bar{D}_6] = \{\bar{D}_0, \bar{D}_5\} - \frac{3}{2}\bar{D}_0,\ [\bar{D}_5, \bar{D}_7] = \{\bar{D}_3, \bar{D}_6\} + \{\bar{D}_0, \bar{D}_8\},$$

$$[\bar{D}_5, \bar{D}_8] = \{\bar{D}_3, \bar{D}_5\} - \frac{3}{2}\bar{D}_3,\ [\bar{D}_5, \bar{D}_9] = 2\{\bar{D}_3, \bar{D}_8\},\ [\bar{D}_5, \bar{D}_{10}] = 0,$$

$$[\bar{D}_6, \bar{D}_7] = \frac{1}{4}\{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_6\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_4\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_0, \bar{D}_7\} + \frac{3}{4}\bar{D}_3,$$

$$[\bar{D}_6, \bar{D}_8] = \frac{1}{4}\{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_5\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_6\} - \frac{1}{2}\{\bar{D}_0, \bar{D}_8\} - \frac{3}{8}(\bar{D}_1 + \bar{D}_2),$$

$$[\bar{D}_6, \bar{D}_9] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_8\} + \{\bar{D}_3, \bar{D}_7\},$$

$$[\bar{D}_6, \bar{D}_{10}] = 0,\ [\bar{D}_7, \bar{D}_8] = \frac{1}{4}\{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_8\} - \frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_7\} +$$

$$+\frac{3}{16}\{\bar{D}_0,\bar{D}_1-\bar{D}_2\}-\frac{1}{2}\{\bar{D}_0,\bar{D}_9+\bar{D}_{10}\}+\frac{3}{4}n(n-1)\bar{D}_0,$$

$$[\bar{D}_7,\bar{D}_9]=-\frac{1}{4}\{\bar{D}_3,\bar{D}_6\}+\frac{1}{8}\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_4\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_9+\bar{D}_{10}\}-\frac{3}{8}(\bar{D}_1^2-\bar{D}_2^2)-$$

$$-\frac{3}{4}(n^2-n-\frac{1}{4})(\bar{D}_1+\bar{D}_2),$$

$$[\bar{D}_7,\bar{D}_{10}]=-\frac{1}{4}\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_6^2\}-\frac{1}{4}\{\{\bar{D}_0,\bar{D}_7\},\bar{D}_6\}+$$

$$+\frac{1}{4}\{\{\bar{D}_0,\bar{D}_4\},\bar{D}_8\}+\frac{1}{8}\{\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_5\},\bar{D}_4\}+\frac{1}{4}\{\bar{D}_3,\bar{D}_6\}+$$

$$+\frac{1}{8}\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_5-3\bar{D}_4\}+\frac{1}{2}\{\bar{D}_0,\bar{D}_8\}-\frac{15}{32}(\bar{D}_1+\bar{D}_2),$$

$$[\bar{D}_8,\bar{D}_9]=\frac{1}{8}\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_6\}-\frac{1}{4}\{\bar{D}_3,\bar{D}_5\}-\frac{3}{8}\{\bar{D}_3,\bar{D}_1-\bar{D}_2\}+$$

$$+\{\bar{D}_3,\bar{D}_9+\bar{D}_{10}\}-\frac{3}{2}(n^2-n-\frac{1}{4})\bar{D}_3,$$

$$[\bar{D}_8,\bar{D}_{10}]=-\frac{1}{4}\{\{\bar{D}_3,\bar{D}_6\},\bar{D}_6\}+\frac{1}{4}\{\{\bar{D}_0,\bar{D}_6\},\bar{D}_8\}-$$

$$-\frac{1}{4}\{\{\bar{D}_0,\bar{D}_5\},\bar{D}_7\}+\frac{1}{4}\{\{\bar{D}_3,\bar{D}_5\},\bar{D}_4\}+\frac{1}{2}\{\bar{D}_3,\bar{D}_5\}-$$

$$-\frac{1}{4}\{\bar{D}_3,\bar{D}_4\}+\frac{1}{4}\{\bar{D}_0,\bar{D}_7\}-\frac{9}{16}\bar{D}_3,\ [\bar{D}_9,\bar{D}_{10}]=\frac{1}{4}\{-\{\bar{D}_6,\bar{D}_8\}+$$

$$+\{\bar{D}_5,\bar{D}_7\},\bar{D}_1+\bar{D}_2\}+\frac{1}{2}\{\{\bar{D}_3,\bar{D}_8\},\bar{D}_4\}-\frac{1}{2}\{\{\bar{D}_3,\bar{D}_6\},\bar{D}_7\}-$$

$$-\frac{1}{4}\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_7\}+\frac{1}{2}\{\bar{D}_3,\bar{D}_8\}.$$

Аналог оператора C_1 из центра алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$ имеет вид $\overline{C}_1=\overline{D}_0^2+\overline{D}_1-\overline{D}_2+\overline{D}_4-\overline{D}_5$, для оператора C_2 вид:

$$\overline{C}_2=\frac{1}{2}\{\bar{D}_1,\bar{D}_2\}-\bar{D}_3^2-\bar{D}_9-(n^2-n-1)(\bar{D}_1-\bar{D}_2)$$

и для оператора C_3 вид:

$$\overline{C}_3=\frac{1}{4}\{\bar{D}_1-\bar{D}_2,\bar{D}_4-\bar{D}_5\}+\frac{1}{4}(\bar{D}_1+\bar{D}_2)^2-\bar{D}_3^2+$$

$$+\frac{1}{4}(\bar{D}_4+\bar{D}_5)^2-\bar{D}_6^2-\bar{D}_9+2\bar{D}_{10}+$$
$$+\frac{1}{4}\{\bar{D}_0^2,\bar{D}_1-\bar{D}_2+\bar{D}_4-\bar{D}_5\}+\frac{1}{4}\bar{D}_0^4+$$
$$+(n^2-n-\frac{3}{2})(\bar{D}_4-\bar{D}_5)+(n^2-n-\frac{7}{4})\bar{D}_0^2.$$

Соотношение (3.13) принимает вид:

$$\bar{D}_{10}^2-\bar{D}_9\bar{D}_4\bar{D}_5-\bar{D}_7\bar{D}_6\bar{D}_8-\bar{D}_8\bar{D}_6\bar{D}_7+\bar{D}_9\bar{D}_6^2+$$
$$+\bar{D}_7\bar{D}_5\bar{D}_7+\bar{D}_8\bar{D}_4\bar{D}_8=\sum_{i=2}^{7}\bar{\delta}_i, \tag{3.18}$$

где

$$\bar{\delta}_7=\bar{D}_7(\bar{D}_1+\bar{D}_2)\bar{D}_5+2\bar{D}_8\bar{D}_3\bar{D}_4-\bar{D}_7\{\bar{D}_3,\bar{D}_6\}-$$
$$-\frac{1}{2}\bar{D}_8\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_6\}+2\bar{D}_9\bar{D}_6\bar{D}_0,$$
$$\bar{\delta}_6=\frac{5}{4}\bar{D}_0(\bar{D}_1+\bar{D}_2)\bar{D}_8-\frac{5}{2}\bar{D}_0\bar{D}_3\bar{D}_7+\bar{D}_7^2-$$
$$-\bar{D}_8^2+2\bar{D}_9\bar{D}_4-\frac{9}{4}\bar{D}_3^2\bar{D}_4-\frac{9}{16}(\bar{D}_1+\bar{D}_2)^2\bar{D}_5+$$
$$+\frac{9}{4}(\bar{D}_1+D_2)\bar{D}_3\bar{D}_6-\frac{3}{2}(\bar{D}_1-\bar{D}_2)\bar{D}_5\bar{D}_4+$$
$$+\frac{3}{2}(\bar{D}_1-\bar{D}_2)\bar{D}_6^2-\frac{13}{4}\bar{D}_0^2\bar{D}_9-\frac{5}{2}\bar{D}_0^2\bar{D}_{10}+$$
$$+\frac{3}{2}(\bar{D}_4-\bar{D}_5)\bar{D}_{10},$$
$$\bar{\delta}_5=\frac{33}{8}\bar{D}_0(\bar{D}_1-\bar{D}_2)\bar{D}_6+$$
$$+\frac{9}{4}\left(\bar{D}_3\bar{D}_8-\frac{1}{2}(\bar{D}_1+\bar{D}_2)\bar{D}_7\right),$$
$$\bar{\delta}_4=-\frac{9}{4}\bar{D}_3^2+\frac{9}{16}(\bar{D}_1+\bar{D}_2)^2-$$
$$-\frac{1}{8}(\bar{D}_1-\bar{D}_2)(9\bar{D}_5+15\bar{D}_4)-\frac{19}{2}\bar{D}_9-\frac{3}{2}\bar{D}_{10}+$$
$$+\frac{3}{2}\bar{D}_0^2(\bar{D}_1-\bar{D}_2)-3n(n-1)(\bar{D}_5\bar{D}_4-\bar{D}_6^2),$$

$$\bar{\delta}_3 = \frac{33}{4}n(n-1)\bar{D}_0\bar{D}_6,$$

$$\bar{\delta}_2 = -\frac{1}{4}n(n-1)(15\bar{D}_4 + 9\bar{D}_5) + 3n(n-1)\bar{D}_0^2.$$

В случае $n = 2$ дополнительное соотношение (3.14) принимает вид:

$$\frac{1}{2}\{\overline{D}_1, \overline{D}_2\} - \overline{D}_3^2 - \overline{D}_9 = \overline{D}_1 - \overline{D}_2. \tag{3.19}$$

В силу соответствия с компактным случаем и предложения 3.1 для пространства $\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}$, образ отображения $\eta \circ \lambda^*|_{S(\mathfrak{g})^G}$ порождается некоторыми элементами степени $\leqslant 8$.

§ 3.3. Алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$

Здесь мы воспользуемся обозначениями из п. 1.3.2.

3.3.1. Образующие алгебр $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$

Рассмотрим пространство $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}}$. В силу изоморфизма $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbf{S}^2$ предположим опять, что $n \geqslant 2$.

Пусть $\widetilde{\mathbf{z}}_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$, а элемент $\xi_0 \in T_{\widetilde{\mathbf{z}}_0}\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{n+1}$ имеет координаты $(0, 1, 0, \ldots, 0)$. Положим $\mathbf{z}_0 = \pi\widetilde{\mathbf{z}}_0$, $\zeta_0 = \pi_*\xi_0 \in T_{\mathbf{z}_0}\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$.

Стационарная подгруппа $K_0 \subset G = \mathrm{SU}(n+1)$ точки $(\mathbf{z}_0, \zeta_0)$ порождается группой $K_1 = \mathrm{SU}(n-1)$, действующей на последние $n-1$ координат и группой $K_2 = \mathrm{U}(1)$, действующей на однородные координаты в пространстве $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ по формуле:

$$(x_1 : \ldots : x_{n+1}) \to (e^{\mathbf{i}\phi}x_1 : e^{\mathbf{i}\phi}x_2 : e^{-2\mathbf{i}\phi}x_3 : x_4 : \ldots : x_{n+1}). \tag{3.20}$$

Поскольку $\dim_{\mathbb{R}} K_0 = (n-1)^2$, мы получаем $K_0 \cong \mathrm{U}(n-1)$ и, в частности, группа K_0 связна.

Алгебра Ли $\mathfrak{k}_0$ группы K_0 является линейной оболочкой элементов (1.14) при $3 \leqslant k < j \leqslant n+1$ и элементов:

$$\Upsilon_j - \Upsilon_3 = \frac{\mathbf{i}}{2}(E_{33} - E_{jj}),\ 3 < j \leqslant n+1,\ 2\Upsilon_3 - \Upsilon_2 = \frac{\mathbf{i}}{2}(E_{11} + E_{22} - 2E_{33}).$$

Выберем подпространство $\widetilde{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n+1)$, дополнительное к подалгебре $\mathfrak{k}_0$ алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n+1)$, как линейную оболочку элементов:

$$\Psi_{1k},\ \Upsilon_{1k},\ 2 \leqslant k \leqslant n+1,\ \Psi_{2k},\ \Upsilon_{2k},\ 3 \leqslant k \leqslant n+1,\ \Upsilon_* = \Upsilon_2. \tag{3.21}$$

Принимая во внимание соотношения (1.12), легко получить редуктивность разложения $\mathfrak{su}(n+1) = \widetilde{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{k}_0$, т. е. включение $[\widetilde{\mathfrak{p}}, \mathfrak{k}_0] \subset \widetilde{\mathfrak{p}}$.

Частный случай предложения 1.2 для $q_1 = 2n-2, q_2 = 1$ мы получим, положив:

$$\begin{aligned} &\Lambda = -\Psi_{12},\ e_{\lambda,k-2} = \Psi_{1k},\ e_{\lambda,n-3+k} = \Upsilon_{1k},\ f_{\lambda,k-2} = -\Psi_{2k}, \\ &f_{\lambda,n-3+k} = -\Upsilon_{2k},\ e_{2\lambda,1} = \Upsilon_{12},\ f_{2\lambda,1} = \Upsilon_*,\ k = 3, \ldots, n+1. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Теперь мы можем найти образующие алгебры $S\left(\widetilde{\mathfrak{p}}\right)^{K_0}$. Разложение $\widetilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda}$ является инвариантным относительно действия Ad_{K_0}. В пространствах $\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_{2\lambda}, \mathfrak{k}_{2\lambda}$ действие K_0 тривиально, что дает инварианты $D_0 = \Lambda$, $D_4 = \Upsilon_{12}$, $D_5 = \Upsilon_* \in \lambda\left(S\left(\widetilde{\mathfrak{p}}\right)^{K_0}\right)$. Операторы D_4, D_5 являются квадратными корнями из их аналогов из § 3.1.

Из (3.22) видно, что пространство $\mathfrak{p}_\lambda \cong \mathbb{C}^{n-1}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -a^* \\ a & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\overline{a}_1 & \ldots & -\overline{a}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},\ a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}.$$

Аналогично пространство $\mathfrak{k}_\lambda \cong \mathbb{C}^{n-1}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^* \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{b}_1 & \ldots & -\overline{b}_{n-1} \\ 0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n-1} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},\ b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}.$$

Действие группы K_1 в пространствах $\mathfrak{p}_\lambda$ и $\mathfrak{k}_\lambda$ эквивалентно тавтологическому действию группы $\mathrm{SU}(n-1)$ в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$: $a \to Ua$, $U \in \mathrm{SU}(n-1)$, аналогично конструкции из п. 3.2.1. Легко проверить, что действие (3.20) индуцирует K_1-действия $a_1 \to \exp^{-3\mathbf{i}\phi} a_1$, $a_i \to \exp^{-\mathbf{i}\phi} a_i$, $b_1 \to \exp^{-3\mathbf{i}\phi} b_1$, $b_i \to \exp^{-\mathbf{i}\phi} b_i$, $i = 2, \ldots, n-1$. Поэтому K_0-действие в пространствах $\mathfrak{p}_\lambda$ и $\mathfrak{k}_\lambda$ эквивалентно тавтологическому действию группы $\mathrm{U}(n-1)$ в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$.

Это действие имеет один независимый вещественный инвариант: $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n-1}$, а диагональное действие группы $\mathrm{U}(n-1)$ в пространстве $\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \cong \mathbb{C}^{n-1} \oplus \mathbb{C}^{n-1}$ имеет четыре (независимых при $n \geqslant 3$)

вещественных инварианта:

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle \in \mathbb{R},\ \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle \in \mathbb{R},\ \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2,\ \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^{n-1}. \tag{3.23}$$

В силу леммы 2.4 соответствующие элементы из множества $\lambda\left(S\left(\widetilde{\mathfrak{p}}\right)^{K_0}\right)$ имеют вид:

$$\begin{gathered} D_1 = \sum_{k=3}^{n+1} \left(\Psi_{1k}^2 + \Upsilon_{1k}^2\right),\ D_2 = \sum_{k=3}^{n+1} \left(\Psi_{2k}^2 + \Upsilon_{2k}^2\right), \\ D_3 = -\frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \left(\{\Psi_{1k}, \Psi_{2k}\} + \{\Upsilon_{1k}, \Upsilon_{2k}\}\right), \\ \Box = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \left(-\{\Psi_{1k}, \Upsilon_{2k}\} + \{\Psi_{2k}, \Upsilon_{1k}\}\right). \end{gathered} \tag{3.24}$$

В данном случае только оператор $\Box$ является новым по сравнению с § 3.1.

Для $n = 2$ существует единственное независимое соотношение между инвариантами (3.23):

$$\begin{gathered} |\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle|^2 = |\overline{z}_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle, \\ \mathbf{z}_1 = z_1, \quad \mathbf{z}_2 = z_2 \in \mathbb{C}. \end{gathered} \tag{3.25}$$

Таким образом, операторы $D_0, \ldots, D_5, \Box$ порождают алгебру $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_\mathbf{S})$.

Степени этих образующих таковы:

$$\begin{gathered} \deg(D_0) = \deg(D_4) = \deg(D_5) = 1, \\ \deg(D_1) = \deg(D_2) = \deg(D_3) = \deg(\Box) = 2. \end{gathered} \tag{3.26}$$

Операторы D_3, D_4 симметричны, а операторы $D_0, \Box, D_5$ антисимметричны относительно перестановки координат z_1 и z_2. Операторы D_1 и D_2 переходят друг в друга при данной перестановке.

Для получения образующих алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_\mathbf{S})$ сделаем формальную замену:

$$\begin{gathered} \Lambda \to \mathbf{i}\Lambda,\ \Psi_{1k} \to \mathbf{i}\Psi_{1k},\ \Upsilon_{1k} \to \mathbf{i}\Upsilon_{1k},\ \Upsilon_{12} \to \mathbf{i}\Upsilon_{12}, \\ \Psi_{2k} \to \Psi_{2k},\ \Upsilon_{2k} \to \Upsilon_{2k},\ \Upsilon_* \to \Upsilon_*,\ k = 3, \ldots, n+1. \end{gathered}$$

Эта замена индуцирует следующую замену образующих $D_0, \ldots, D_5, \Box$:

$$D_0 \to \mathbf{i}\overline{D}_0,\ D_1 \to -\overline{D}_1,\ D_2 \to \overline{D}_2, \tag{3.27}$$
$$D_3 \to \mathbf{i}\overline{D}_3,\ D_4 \to \mathbf{i}\overline{D}_4,\ \Box \to \mathbf{i}\overline{\Box},\ D_5 \to \overline{D}_5.$$

Операторы $\overline{D}_0, \ldots, \overline{D}_5, \overline{\Box}$ индуцируют алгебру $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_\mathbf{S})$.

3.3.2. Соотношения в алгебрах $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_\mathbf{S})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_\mathbf{S})$

Коммутационные соотношения в алгебре $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_\mathbf{S})$ таковы:

$$[D_0, D_1] = -D_3, \quad [D_0, D_2] = D_3, \quad [D_0, D_3] = \frac{1}{2}(D_1 - D_2),$$
$$[D_0, D_4] = -D_5, \quad [D_0, D_5] = D_4,$$
$$[D_0, \Box] = 0, \quad [D_1, D_2] = -\{D_0, D_3\} - \{\Box, D_4\},$$
$$[D_1, D_3] = -\frac{1}{2}\{D_0, D_1\} + \frac{1}{2}\{\Box, D_5\} + \frac{(n-1)^2}{4}D_0, \quad [D_1, D_4] = \Box,$$
$$[D_1, D_5] = 0, \quad [D_1, \Box] = -\frac{1}{2}\{D_1, D_4\} - \frac{1}{2}\{D_3, D_5\} + \frac{(n-1)^2}{4}D_4,$$
$$[D_2, D_3] = \frac{1}{2}\{D_0, D_2\} + \frac{1}{2}\{\Box, D_5\} - \frac{(n-1)^2}{4}D_0,$$
$$[D_2, D_4] = -\Box, [D_2, D_5] = 0,$$
$$[D_2, \Box] = \frac{1}{2}\{D_2, D_4\} - \frac{1}{2}\{D_3, D_5\} - \frac{(n-1)^2}{4}D_4, \quad [D_3, D_4] = 0,$$
$$[D_3, D_5] = \Box, \quad [D_3, \Box] = -\frac{1}{4}\{D_1 + D_2, D_5\} + \frac{(n-1)^2}{4}D_5,$$
$$[D_4, D_5] = -D_0, \quad [D_4, \Box] = \frac{1}{2}(D_1 - D_2), \quad [D_5, \Box] = D_3.$$

Для $n > 2$ соотношения второго типа отсутствуют. Для $n = 2$ в силу (3.25) существует единственное соотношение второго типа:

$$\frac{1}{2}\{D_1, D_2\} - D_3^2 - \Box^2 - \frac{1}{4}(D_0^2 + D_4^2 + D_5^2) = 0. \tag{3.28}$$

Из предложений 1.5 и 2.2 следует существование n независимых образующих алгебры

$$\mathrm{ZDiff}_I(\mathrm{SU}(n+1)) \cong \mathrm{Z}U(\mathfrak{u}(n+1))$$

степеней $2, 3, 4, \ldots, n+1$. Образом в алгебре $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$ образующей второго порядка является оператор Казимира $C_1 = D_0^2 + D_1 + D_2 + D_4^2 + D_5^2$. Легко проверить прямым вычислением, что все элементы из $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$ степеней $\leqslant 4$ являются линейными комбинациями элементов C_1, C_1^2, C_2 и C_3, где

$$C_2 = \{D_1 - D_2, D_5\} - 2\{D_3, D_4\} + 2\{D_0, \Box\},$$

$$C_3 = \frac{1}{2}\{D_1, D_2\} - D_3^2 - \Box^2 - \frac{n^2 - 2n - 1}{4}(D_1 + D_2).$$

В силу (3.28) в случае $n = 2$ имеем $C_1 = 4C_3$. Оператор C_2 имеет степень 3, а степень оператора C_3 для $n \geqslant 3$ равна 4.

Предложение 3.2. Образ отображения $\eta \circ \lambda^*|_{S(\mathfrak{u}(n+1))^{\mathrm{U}(n+1)}}$ порождается элементами степени $\leqslant 4$.

Доказательство. Известно [59], что свободные образующие алгебры $S\left(\mathfrak{u}(n+1)\right)^{\mathrm{U}(n+1)}$ соответствуют коэффициентам p_k, $k = 1, \ldots, n+1$, многочлена:

$$p_A(\chi) = \det\left(\chi\,\mathrm{id} - \mathbf{i}A\right) = \chi^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} p_k \chi^{n+1-k},\ A \in \mathfrak{u}(n+1).$$

В силу тех же аргументов, что и в доказательстве предложения 3.1, коэффициенты p_k, $k = 1, \ldots, n+1$, вещественны. Из (3.22) легко видеть, что координаты в алгебре $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{u}(n+1)$, соответствующие подпространству $\widetilde{\mathfrak{p}}$, расположены только в первых двух строках и столбцах матрицы $A \in \mathfrak{u}(n+1)$. Поэтому эти координаты входят в многочлены p_k, $k = 1, \ldots, n+1$, не более чем в четвертой степени в совокупности. Применение леммы 2.4 завершает доказательство. ■

Следствие 3.2. *Элементы C_1, C_2 и C_3 порождают подалгебру $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$, содержащую подалгебру $\eta \circ \lambda^*\left(S\left(\mathfrak{u}(n+1)\right)^{\mathrm{U}(n+1)}\right)$. Поскольку существует лишь конечное число линейно независимых элементов из $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$ степеней $\leqslant 4$, то отображение $\eta \circ \lambda^*|_{S(\mathfrak{u}(n+1))^{\mathrm{U}(n+1)}}$ не является инъективным для достаточно больших значений n.*

Используя замену (3.27), получаем соотношения для образующих $\overline{D}_0, \ldots, \overline{D}_5, \overline{\Box}$ алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$.

Коммутационные соотношения теперь имеют вид:

$$[\bar{D}_0, \bar{D}_1] = \bar{D}_3,\ [\bar{D}_0, \bar{D}_2] = \bar{D}_3,\ [\bar{D}_0, \bar{D}_3] = \frac{1}{2}(\bar{D}_2 + \bar{D}_1),$$
$$[\bar{D}_0, \bar{D}_4] = \bar{D}_5,\ [\bar{D}_0, \bar{D}_5] = \bar{D}_4,$$
$$[\bar{D}_0, \overline{\Box}] = 0,\ [\bar{D}_1, \bar{D}_2] = -\{\bar{D}_0, \bar{D}_3\} - \{\overline{\Box}, \bar{D}_4\},$$
$$[\bar{D}_1, \bar{D}_3] = -\frac{1}{2}\{\bar{D}_0, \bar{D}_1\} - \frac{1}{2}\{\overline{\Box}, \bar{D}_5\} - \frac{(n-1)^2}{4}\bar{D}_0,$$
$$[\bar{D}_1, \bar{D}_4] = -\overline{\Box},\ [\bar{D}_1, \bar{D}_5] = 0,$$
$$[\bar{D}_1, \overline{\Box}] = -\frac{1}{2}\{\bar{D}_1, \bar{D}_4\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_5\} - \frac{(n-1)^2}{4}\bar{D}_4,$$
$$[\bar{D}_2, \bar{D}_3] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_0, \bar{D}_2\} + \frac{1}{2}\{\overline{\Box}, \bar{D}_5\} - \frac{(n-1)^2}{4}\bar{D}_0,\ [\bar{D}_2, \bar{D}_4] = -\overline{\Box},$$
$$[\bar{D}_2, \bar{D}_5] = 0,\ [\bar{D}_2, \overline{\Box}] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_2, \bar{D}_4\} - \frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_5\} - \frac{(n-1)^2}{4}\bar{D}_4,$$
$$[\bar{D}_3, \bar{D}_4] = 0,\ [\bar{D}_3, \bar{D}_5] = \overline{\Box},\ [\bar{D}_3, \overline{\Box}] = -\frac{1}{4}\{\bar{D}_1 - \bar{D}_2, \bar{D}_5\} - \frac{(n-1)^2}{4}\bar{D}_5,$$
$$[\bar{D}_4, \bar{D}_5] = -\bar{D}_0,\ [\bar{D}_4, \overline{\Box}] = \frac{1}{2}(\bar{D}_1 + \bar{D}_2),\ [\bar{D}_5, \overline{\Box}] = \bar{D}_3.$$

Для $n > 2$ коммутационные соотношения второго типа отсутствуют. С другой стороны, для $n = 2$ существует одно соотношение второго типа, аналогичное соотношению (3.28):

$$\frac{1}{2}\{\bar{D}_1, \bar{D}_2\} - \bar{D}_3^2 - \overline{\Box}^2 - \frac{1}{4}(\bar{D}_0^2 + \bar{D}_4^2 - \bar{D}_5^2) = 0. \tag{3.29}$$

Аналоги в $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_\mathbf{S})$ операторов C_1, C_2 и C_3 имеют вид

$$\overline{C}_1 = \bar{D}_0^2 + \bar{D}_1 - \bar{D}_2 + \bar{D}_4^2 - \bar{D}_5^2,$$
$$\overline{C}_2 = \{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_5\} - 2\{\bar{D}_3, \bar{D}_4\} + 2\{\bar{D}_0, \overline{\Box}\},$$
$$\overline{C}_3 = \frac{1}{2}\{\bar{D}_1, \bar{D}_2\} - \bar{D}_3^2 - \overline{\Box}^2 - \frac{n^2 - 2n - 1}{4}(\bar{D}_1 - \bar{D}_2).$$

Соответствие между компактным и некомпактным случаями и следствие 3.2 дают:

Следствие 3.3. *Пусть G — компонента связности единицы группы изометрий пространства $\mathbf{H}^n(\mathbb{C})$. Элементы $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ и $\overline{C}_3$ порождают подалгебру алгебры $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_\mathbf{S})$, содержащую подалгебру $\eta \circ \lambda^* \left(S(\mathfrak{g})^G\right)$. Поскольку существует только конечное число линейно независимых элементов в $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_\mathbf{S})$ степеней $\leqslant 4$, то отображение $\eta \circ \lambda^*|_{S(\mathfrak{g})^G}$ не является инъективным для достаточно больших значений n.*

§ 3.4. Алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{R})_\mathbf{S})$, $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^n_\mathbf{S})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_\mathbf{S})$

Здесь мы будем пользоваться обозначениями из п. 1.3.3.

3.4.1. Образующие алгебр $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^n_\mathbf{S})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_\mathbf{S})$

Рассмотрим пространство $\mathbf{S}^n_\mathbf{S}$. Предположим, что $\widetilde{\mathbf{z}}_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, а элемент $\xi_0 \in T_{\widetilde{\mathbf{z}}_0}\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ имеет координаты $(0, 1, 0, \ldots, 0)$. Пусть $\mathbf{z}_0 = \pi\widetilde{\mathbf{z}}_0$, $\zeta_0 = \pi_*\xi_0 \in T_{\mathbf{z}_0}\mathbf{S}^n_\mathbf{S}$.

Стационарная подгруппа $K_0 \subset \mathrm{SO}(n+1)$, соответствующая точке $(\mathbf{z}_0, \zeta_0) \in \mathbf{S}^n_\mathbf{S}$, является группой $\mathrm{SO}(n-1)$, действующей на последние $n-1$ координат.

Группа $\mathrm{SO}(n+1)$ является групповым накрытием компоненты связности единицы G группы изометрий пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$. Группа $K_0 = \mathrm{SO}(n-1) \subset \mathrm{SO}(n+1)$ есть групповое накрытие соответствующей подгруппы $K_0' \subset G$. В силу предложения 1.6 орбиты действий Ad_{K_0} и $\mathrm{Ad}_{K_0'}$ на подпространстве $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ совпадают и конструкция из § 2.1 дает изоморфизм $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{R})_\mathbf{S}) \cong \mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^n_\mathbf{S})$.

Алгебра Ли $\mathfrak{k}_0$ группы K_0 является линейной оболочкой элементов Ψ_{kj} при $3 \leqslant k < j \leqslant n+1$. Выберем подпространство $\widetilde{\mathfrak{p}}$, дополнительное к подалгебре $\mathfrak{k}_0$ в алгебре $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1)$, как линейную оболочку элементов:

$$\Psi_{1k},\ 2 \leqslant k \leqslant n+1,\ \Psi_{2k},\ 3 \leqslant k \leqslant n+1. \tag{3.30}$$

Ясно, что разложение $\mathfrak{so}(n+1) = \widetilde{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{so}(n-1)$ редуктивно.

Частный случай предложения 1.2 для $q_1 = 0, q_2 = n-1$ мы получим, положив

$$\Lambda = -2\Psi_{12},\ e_{2\lambda,k-2} = 2\Psi_{1k},\ f_{2\lambda,k-2} = -2\Psi_{2k},\ k = 3, \ldots, n+1. \tag{3.31}$$

Рассмотрим разложение $\widetilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda}$, инвариантное относительно действия Ad_{K_0}. Легко видеть, что в пространстве $\mathfrak{a}$ действие K_0 тривиально, а в пространствах $\mathfrak{k}_{2\lambda}$ и $\mathfrak{p}_{2\lambda}$ оно совпадает с тавтологическим действием группы $\mathrm{SO}(n-1)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. Тривиальное действие группы K_0 в пространстве $\mathfrak{a}$ имеет инвариантный элемент $D_0 = \Lambda$. Описание базисных K_0-инвариантов в пространстве $\mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$ различно в случаях $n = 2$, $n = 3$ и $n \geqslant 4$.

3.4.1.1. Случай $n \geqslant 4$

Действие группы $\mathrm{SO}(n-1)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ имеет один независимый инвариант: $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n-1}$, а ее диагональное действие в пространстве $\mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda} \cong \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^{n-1}$ имеет три независимых вещественных инварианта:

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle,\ \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle,\ \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle,\ \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.32}$$

Лемма 2.4 дает соответствующие этим инвариантам элементы из алгебры $\lambda\left(S\left(\widetilde{\mathfrak{p}}\right)^{K_0}\right)$ в виде:

$$D_1 = 4\sum_{k=3}^{n+1} \Psi_{1k}^2,\ D_2 = 4\sum_{k=3}^{n+1} \Psi_{2k}^2,$$

$$D_3 = -2\sum_{k=3}^{n+1} \{\Psi_{1k}, \Psi_{2k}\}.$$

Все эти инварианты были найдены в § 3.1 в общей ситуации. Таким образом, операторы D_0, D_1, D_2, D_3 порождают алгебру $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^n_\mathbf{S})$.

Степени этих образующих таковы:

$$\deg(D_0) = 1,\ \deg(D_1) = \deg(D_2) = \deg(D_3) = 2. \tag{3.33}$$

Оператор D_3 симметричен, а оператор D_0 кососимметричен относительно перестановки координат z_1 и z_2. Операторы D_1 и D_2 переходят друг в друга при этой транспозиции.

3.4.1.2. Случай $n = 2$

В этом случае группа K_0 тривиальна и базисные инвариантные операторы соответствуют элементам D_0, $D_1 = e_{2\lambda,1}$, $D_2 = f_{2\lambda,1}$ алгебры $\mathfrak{so}(3)$. Таким образом, алгебра $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^2_\mathbf{S})$ изоморфна алгебре $U(\mathfrak{so}(3))$. Центр этой алгебры порожден оператором $D_0^2 + D_1^2 + D_2^2$.

3.4.1.3. Случай $n = 3$

В этом случае $K_0 = \mathfrak{so}(2)$ и имеется один дополнительный (по отношению к случаю $n \geqslant 4$) инвариант второго порядка

$$\Box = 2(\{\Psi_{13}, \Psi_{24}\} - \{\Psi_{14}, \Psi_{23}\}).$$

Он алгебраически связан с операторами D_0, D_1, D_2, D_3, которые определены так же, как и в случае $n \geqslant 4$.

3.4.1.4. Образующие алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_\mathbf{S})$

Во-первых, пусть $n \geqslant 4$. Для получения образующих алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_\mathbf{S})$ используем формальную замену:

$$\Lambda \to \mathbf{i}\Lambda,\ \Psi_{1k} \to \mathbf{i}\Psi_{1k},\ \Psi_{2k} \to \Psi_{2k},\ k = 3, \ldots, n+1.$$

Данная замена порождает следующую замену для образующих $D_0, \ldots, D_3$:

$$D_0 \to \mathbf{i}\overline{D}_0,\ D_1 \to -\overline{D}_1,\ D_2 \to \overline{D}_2,\ D_3 \to \mathbf{i}\overline{D}_3. \tag{3.34}$$

Таким образом, операторы $\overline{D}_0, \ldots, \overline{D}_3$ порождают алгебру $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_\mathbf{S})$.

В случае $n = 3$ имеется дополнительная замена $\Box \to \mathbf{i}\overline{\Box}$, а операторы $\overline{D}_0, \ldots, \overline{D}_3, \overline{\Box}$ порождают алгебру $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^3(\mathbb{R})_\mathbf{S})$.

В случае $n = 2$ имеется замена

$$D_0 \to \mathbf{i}\overline{D}_0,\ D_1 \to \mathbf{i}\overline{D}_1,\ D_2 \to \overline{D}_2.$$

Алгебра $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^2(\mathbb{R})_\mathbf{S})$ изоморфна алгебре $U(\mathfrak{so}(1,2))$, а ее центр порождается оператором $D_0^2 + D_1^2 - D_2^2$.

3.4.2. Соотношения в алгебрах $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^n_\mathbf{S})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_\mathbf{S})$

Здесь мы рассмотрим только случай $n \geqslant 3$, поскольку $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^2_\mathbf{S}) \cong \cong U(\mathfrak{so}(3))$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^2(\mathbb{R})_\mathbf{S}) \cong U(\mathfrak{so}(1,2))$.

Коммутационные соотношения для алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^n_\mathbf{S})$ имеют вид:

$$[D_0, D_1] = -2D_3,\ [D_0, D_2] = 2D_3,\ [D_0, D_3] = D_1 - D_2, \tag{3.35}$$

$$[D_1, D_2] = -2\{D_0, D_3\},\ [D_1, D_3] = -\{D_0, D_1\} + \frac{(n-1)(n-3)}{2}D_0,$$

$$[D_2, D_3] = \{D_0, D_2\} - \frac{(n-1)(n-3)}{2}D_0.$$

При $n = 3$ дополнительный оператор $\Box$ лежит в центре алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^3_{\mathbf{S}})$.

При $n > 3$ соотношения второго типа отсутствуют. При $n = 3$ имеется одно независимое соотношение второго типа:

$$\frac{1}{2}\{D_1, D_2\} - D_0^2 = D_3^2 + \Box^2. \tag{3.36}$$

Прямыми вычислениями нетрудно убедиться в том, что операторы $C_1 = D_0^2 + D_1 + D_2$ и

$$C_2 = \frac{1}{2}\{D_1, D_2\} - D_3^2 + \left(1 - \frac{(n-3)(n-1)}{4}\right)(D_1 + D_2)$$

лежат в центре алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{S}^n_{\mathbf{S}})$, а при $n \geqslant 4$ любой оператор из алгебры $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{S}^n_{\mathbf{S}})$ степени $\leqslant 6$ полиномиально зависит от операторов C_1 и C_2. При $n = 3$ в силу (3.36) справедливо равенство $C_2 = \Box^2 + C_1$. Также любой оператор из алгебры $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{S}^3_{\mathbf{S}})$ степени $\leqslant 6$ полиномиально зависит от операторов C_1 и $\Box$.

Предложение 3.3. Образ отображения $\eta \circ \chi^*|_{S(\mathfrak{so}(n+1))^{\mathrm{SO}(n+1)}}$ порождается элементами степеней $\leqslant 4$.

Доказательство. Для матрицы $A \in \mathfrak{so}(n+1)$ рассмотрим многочлен

$$p_A(\chi) = \det(\chi\,\mathrm{id} - \mathbf{i}A) = \chi^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} p_k \chi^{n+1-k}.$$

В силу тех же аргументов, что и в доказательстве предложения 3.1, коэффициенты p_k, $k = 1, \ldots, n+1$, являются вещественными. Более того,

$$p_A(\chi) = p_{A^T}(\chi) = \det(\chi\,\mathrm{id} + \mathbf{i}A) =$$
$$= (-1)^{n+1}\det(-\chi\,\mathrm{id} - \mathbf{i}A) = (-1)^{n+1} p_A(-\chi).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n+1} p_k \chi^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k p_k \chi^{n+1-k}$$

и $p_k = 0$ при нечетных k.

Известно [59], что свободные образующие алгебры $S(\mathfrak{so}(n+1))^{\mathrm{SO}(n+1)}$ в случае $n+1=2\ell+1$, $\ell \geqslant 1$, соответствуют коэффициентам p_k, $k=2,4,\ldots,2\ell$, а в случае $n+1=2\ell$, $\ell \geqslant 2$, они соответствуют коэффициентам p_k, $k=2,4,\ldots,2\ell-2$, и *пфаффиану* $\operatorname{Pf} A$ матрицы A.

Пфаффиан дается формулой

$$\operatorname{Pf} A = \sum_{(i_1 i_2|\ldots|i_{2\ell-1}i_{2\ell})} \operatorname{sgn}(i_1,\ldots,i_{2\ell}) a_{i_1 i_2}\ldots a_{i_{2\ell-1}i_{2\ell}},\ A \in \mathfrak{so}(2\ell),$$

где $a_{i_1 i_2}$ — элементы матрицы A, а суммирование осуществляется по всем неэквивалентным разбиениям множества чисел $1,2,\ldots,2\ell$ на пары (два разбиения, различающиеся только упорядочиванием пар и упорядочиванием внутри пар, считаются эквивалентными).

В силу (3.31) координаты в алгебре $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(n+1)$, соответствующие подпространству $\widetilde{\mathfrak{p}}$, расположены только в первых двух строках и столбцах матрицы $A \in \mathfrak{so}(n+1)$. Поэтому они входят в коэффициенты p_k, $k=2,4,\ldots$, и пфаффиан $\operatorname{Pf} A$ не более чем в четвертой степени.

Применение леммы 2.4 завершает доказательство.

Следствие 3.4. *Элементы C_1 и C_2 в случае $n \geqslant 4$ (или элементы $C_1, \square$ в случае $n=3$) порождают подалгебру в алгебре $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{S}^n_{\mathbf{S}})$, содержащую подалгебру $\eta \circ \lambda^* \left(S(\mathfrak{so}(n+1))^{\mathrm{SO}(n+1)}\right)$. Поскольку в алгебре $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{S}^n_{\mathbf{S}})$ существует лишь конечное число линейно независимых элементов степени $\leqslant 4$, то отображение $\eta \circ \lambda^*|_{S(\mathfrak{so}(n+1))^{\mathrm{SO}(n+1)}}$ не является инъективным для достаточно больших значений n.*

Используя соотношение (3.34), можно получить аналогичные соотношения для алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}})$.

Коммутационные соотношения имеют вид:

$$[\bar{D}_0,\bar{D}_1]=2\bar{D}_3,\ [\bar{D}_0,\bar{D}_2]=2\bar{D}_3,$$
$$[\bar{D}_0,\bar{D}_3]=\bar{D}_1+\bar{D}_2,\ [\bar{D}_1,\bar{D}_2]=-2\{\bar{D}_0,\bar{D}_3\},$$
$$[\bar{D}_1,\bar{D}_3]=-\{\bar{D}_0,\bar{D}_1\}-\frac{(n-1)(n-3)}{2}\bar{D}_0,$$
$$[\bar{D}_2,\bar{D}_3]=\{\bar{D}_0,\bar{D}_2\}-\frac{(n-1)(n-3)}{2}\bar{D}_0,$$

а для $n=3$ также

$$[\bar{D}_0,\overline{\square}]=[\bar{D}_1,\overline{\square}]=[\bar{D}_2,\overline{\square}]=[\bar{D}_3,\overline{\square}]=0.$$

Первые три соотношения были найдены в [182], но остальные соотношения там отсутствуют.

Для $n > 3$ соотношения второго типа отсутствуют. В случае $n=3$ имеется одно независимое соотношение второго типа, аналогичное (3.36):

$$\frac{1}{2}\{\bar{D}_1, \bar{D}_2\} - \bar{D}_0^2 = \bar{D}_3^2 + \overline{\Box}^2. \tag{3.37}$$

Операторы $\overline{C}_1 = \bar{D}_0^2 + \bar{D}_1 - \bar{D}_2$ и

$$\overline{C}_2 = \frac{1}{2}\{\bar{D}_1, \bar{D}_2\} - \bar{D}_3^2 + \left(1 - \frac{(n-3)(n-1)}{4}\right)(\bar{D}_1 - \bar{D}_2)$$

лежат в центре алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_\mathbf{S})$, а при $n = 3$ в силу (3.37) справедливо равенство $\overline{C}_2 = \overline{\Box}^2 + \overline{C}_1$.

Для $n \geqslant 4$ любой оператор из алгебры $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{H}^n_\mathbf{S})$ степени $\leqslant 6$ полиномиально зависит от операторов $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$. Любой оператор из алгебры $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{H}^3_\mathbf{S})$ степени $\leqslant 6$ полиномиально зависит от операторов $\overline{C}_1$ и $\overline{\Box}$.

Из соответствия между компактным и некомпактным случаями и следствия 3.4 вытекает:

Следствие 3.5. *Пусть G — связная компонента единицы группы изометрий пространства $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$. Элементы $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ в случае $n \geqslant 4$ (или элементы $\overline{C}_1, \overline{\Box}$ в случае $n = 3$) порождают подалгебру алгебры $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_\mathbf{S})$, содержащую подалгебру $\eta \circ \lambda^* \left(S(\mathfrak{g})^G\right)$. Поскольку в алгебре $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_\mathbf{S})$ существует лишь конечное число линейно независимых элементов степени $\leqslant 4$, отображение $\eta \circ \lambda^*|_{S(\mathfrak{g})^G}$ не является инъективным для достаточно больших значений n.*

§ 3.5. Алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S})$ и $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S})$

Здесь мы будем использовать обозначения из § 1.4.

3.5.1. Образующие алгебр $\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S}\right)$ и $\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S}\right)$

Детализируем конструкцию из § 3.1 для пространства $M = \mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S}$.

3.5.1.1. Специальный базис в пространстве $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$

Легко видеть, что

$$[Y_1(\xi), E_1] = 0,\ [Y_2(\xi), E_1] = X_2(\xi),\ [Y_3(\xi), E_1] = -X_3(\xi),\ \xi \in \mathbb{C}a,$$

поэтому пространство $T_{E_1}\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ можно отождествить с пространством

$$(Y_2(\xi) + Y_3(\eta) \,|\, \xi, \eta \in \mathbb{C}a) \subset \mathfrak{m}_0.$$

Из (1.41) следует, что разложение

$$(Y_2(\xi) + Y_3(\eta) \,|\, \xi, \eta \in \mathbb{C}a) = (Y_3(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{R}) \oplus \\ \oplus (Y_2(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{C}a) \oplus (Y_3(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{C}a')$$

является Ad_{K_0}-инвариантным, и, в соответствии с § 1.2 и § 3.1, положим

$$\mathfrak{a} := (Y_3(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{R}),\ \mathfrak{p}_\lambda := (Y_2(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{C}a),\ \mathfrak{p}_{2\lambda} := (Y_3(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{C}a').$$

Пусть $y = \left(E_1, \frac{1}{2}X_3(1)\right) \in \mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}$, где $\frac{1}{2}X_3(1) \in \mathbf{S}_{E_1}$. Имеем $T_y\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}} = T_{E_1}\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a) \oplus T_{\frac{1}{2}X_3(1)}\mathbf{S}_{E_1}$ и

$$T_{\frac{1}{2}X_3(1)}\mathbf{S}_{E_1} \simeq \{X_2(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{C}a\} \oplus \{X_3(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{C}a'\}.$$

В силу $\mathrm{ad}\, Y_1(\xi)\,(X_3(1)) = -X_2(\overline{\xi})$, $\xi \in \mathbb{C}a$, пространство $(X_2(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{C}a) \subset \subset T_{\frac{1}{2}X_3(1)}\mathbf{S}_{E_1}$ отождествляется с пространством $(Y_1(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{C}a) \subset \mathfrak{m}_0$. Поскольку $\dim_{\mathbb{R}}(Y_1(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{C}a) = 8 = \dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{p}_\lambda$, обозначим $\mathfrak{k}_\lambda := = (Y_1(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{C}a)$. Таким образом, $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_\lambda$.

Обозначим через $A_{ij} \in \mathfrak{k}'$, $i \neq j$ генераторы поворота в 2-мерной плоскости, содержащей элементы $e_i, e_j \in \mathbb{C}a_3$, так что $A_{ij}e_j = = e_i$, $A_{ij}e_i = -e_j$. Операторы A_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 7$, являются базисом алгебры $\mathfrak{k}_0$. Аналогично кватернионному случаю линейная оболочка $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{k}'$ элементов $A_{0\alpha} =: A_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, 7$, является Ad_{K_0}-инвариантной и отождествляется посредством действия группы K_0 на пространстве $T_y\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}$ с пространством $(X_3(\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{C}a') \subset T_{\frac{1}{2}X_3(1)}\mathbf{S}_{E_1}$. Поэтому обозначим $\mathfrak{k}_{2\lambda} := \mathfrak{q}$.

Лемма 3.1. *Справедливы равенства*

$$A_\alpha^{(1)} = L_\alpha,\ A_\alpha^{(2)} = R_\alpha,\ A_{\alpha\beta}^{(1)} = L_{\beta,\alpha},\ A_{\alpha\beta}^{(2)} = R_{\beta,\alpha},$$
$$C_{3,e_\alpha,e_\beta} = 4A_{\beta,\alpha},\ C_{3,e_0,e_\alpha} = -4A_\alpha,\ \alpha,\beta = 1,\ldots,7, \alpha \neq \beta.$$

Доказательство. Из (1.40) получаем

$$A^{(3)}(\xi) = \overline{A^{(1)}(\bar{\xi}) + \bar{\xi}A^{(2)}(1)}.$$

Пусть $A^{(1)} = L_\alpha$, тогда $A^{(2)} = R_\alpha$ и $A^{(3)}(e_k) = \frac{1}{2}\overline{(e_\alpha\bar{e}_k + \bar{e}_k e_\alpha)} = -\frac{1}{2}(e_k e_\alpha + e_\alpha e_k)$. Если $1 \leqslant k \neq \alpha$, то $e_k e_\alpha = -e_\alpha e_k$ и $A^{(3)}(e_k) = 0$. Поэтому $A^{(3)} = A_\alpha$, в силу $A^{(3)}(1) = -e_\alpha$, $A^{(3)}(e_\alpha) = 1$. Это доказывает равенства $A_\alpha^{(1)} = L_\alpha$, $A_\alpha^{(2)} = R_\alpha$.

Пусть теперь $A^{(1)} = L_{\beta,\alpha}$, тогда

$$A^{(2)}=R_{\beta,\alpha} \text{ и } A^{(3)}(e_k)=\frac{1}{2}\overline{(e_\beta\cdot e_\alpha\bar{e}_k+\bar{e}_k\cdot e_\alpha e_\beta)}=\frac{1}{2}\left(e_k e_\alpha\cdot e_\beta+e_\beta e_\alpha\cdot e_k\right).$$

Легко проверить прямым вычислением, что если $\alpha = 1, \beta = 2$, то $A^{(3)}(e_k) = 0$ для $k \neq 1,2$ и $A^{(3)}(e_1) = -e_2$, $A^{(3)}(e_2) = e_1$. Таким образом, $L_{\beta,\alpha}^{(3)} = A_{12}$. Поэтому $L_{\beta,\alpha}^{(3)} = A_{\alpha\beta}$ для любой другой пары e_α, e_β, поскольку группа G_2 автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}a$ действует транзитивно на всех парах мнимых единиц ([63], лекция 15). Это доказывает равенства $A_{\alpha\beta}^{(1)} = L_{\beta,\alpha}$, $A_{\alpha\beta}^{(2)} = R_{\beta,\alpha}$.

Последние два равенства леммы очевидны. ■

Суммируем данные рассуждения в следующем предложении:

Предложение 3.4. Выберем следующий базис:

$$\Lambda := \frac{1}{2}\operatorname{ad} Y_3(e_1),\ e_{2\lambda,\alpha} := \frac{1}{2}\operatorname{ad} Y_3(e_\alpha),\ f_{2\lambda,\alpha} := \varkappa A_\alpha,$$
$$e_{\lambda,i} := -\frac{1}{2}\operatorname{ad} Y_2(\bar{e}_i),\ f_{\lambda,i} := \frac{1}{2}\operatorname{ad} Y_1(e_i),\ \widetilde{A}_{\alpha\beta} := \varkappa A_{\alpha\beta}$$

в пространстве $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$, где латинские индексы изменяются от 0 до 7, а греческие (кроме λ) от 1 до 7. Имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$[\Lambda, e_{2\lambda,\alpha}] = -f_{2\lambda,\alpha},\ [\Lambda, f_{2\lambda,\alpha}] = e_{2\lambda,\alpha},$$

$$[\Lambda, e_{\lambda,i}] = -\frac{1}{2} f_{\lambda,i},\ [\Lambda, f_{\lambda,i}] = \frac{1}{2} e_{\lambda,i},\ [\Lambda, \widetilde{A}_{\alpha\beta}] = 0,$$

$$[e_{2\lambda,\alpha}, e_{2\lambda,\beta}] = \widetilde{A}_{\beta\alpha},\ [e_{2\lambda,\alpha}, f_{2\lambda,\beta}] = -\delta_{\alpha\beta}\Lambda,$$

$$[f_{2\lambda,\alpha}, f_{2\lambda,\beta}] = \widetilde{A}_{\beta\alpha},\ [e_{2\lambda,\alpha}, e_{\lambda,j}] = \frac{1}{2} f_{\lambda,e_\alpha e_j},$$

$$[e_{2\lambda,\alpha}, f_{\lambda,j}] = \frac{1}{2} e_{\lambda,e_\alpha e_j},\ [f_{2\lambda,\alpha}, e_{\lambda,j}] = -\frac{1}{2} e_{\lambda,e_\alpha e_j},$$

$$[f_{2\lambda,\alpha}, f_{\lambda,j}] = \frac{1}{2} f_{\lambda,e_\alpha e_j},$$

$$[e_{\lambda,i}, e_{\lambda,j}] = \frac{1}{4}\varkappa C_{2,\overline{e}_i,\overline{e}_j} = \frac{1}{2} f_{2\lambda,e_i\overline{e}_j} + \frac{1}{2}\varkappa\widetilde{C}_{2,i,j},\ i \neq j,$$

$$[f_{\lambda,i}, f_{\lambda,j}] = \frac{1}{4}\varkappa C_{1,e_i,e_j} = -\frac{1}{2} f_{2\lambda,e_i\overline{e}_j} + \frac{1}{2}\varkappa\widetilde{C}_{1,i,j},\ i \neq j,$$

$$[e_{\lambda,i}, f_{\lambda,j}] = \begin{cases} -\frac{1}{2}\Lambda,\ i = j, \\ -\frac{1}{2} e_{2\lambda,e_i\overline{e}_j},\ i \neq j, \end{cases}$$

где обозначено $f_{\lambda,e_\alpha e_j} := f_{\lambda,i}$ при $e_\alpha e_j = e_i$ и $f_{\lambda,e_\alpha e_j} := -f_{\lambda,i}$ при $e_\alpha e_j = -e_i$. Аналогичные обозначения мы используем для $e_{\lambda,i}, e_{2\lambda,\gamma}, f_{2\lambda,\gamma}$. Здесь операторы $\widetilde{C}_{l,i,j}$, $l = 1, 2, i \neq j$, принадлежат подалгебре $\mathfrak{k}_0$ и действуют по формулам:

$$\widetilde{C}_{1,i,j}(e_k) = e_k e_i \cdot \overline{e}_j,\ e_k \neq 1, \pm e_i\overline{e}_j,\ \widetilde{C}_{1,i,j}(e_k) = 0,\ e_k = 1, \pm e_i\overline{e}_j,$$
$$\widetilde{C}_{2,i,j}(e_k) = e_j \cdot \overline{e}_i e_k,\ e_k \neq 1, \pm e_i\overline{e}_j,\ \widetilde{C}_{2,i,j}(e_k) = 0,\ e_k = 1, \pm e_i\overline{e}_j.$$

Выбранные базисы $\Lambda, e_{\lambda,i}$, $e_{2\lambda,\alpha}$, $f_{\lambda,i}, f_{2\lambda,\alpha}$ в пространствах $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_\lambda$, $\mathfrak{p}_{2\lambda}$, $\mathfrak{k}_\lambda$, $\mathfrak{k}_{2\lambda}$ соответствуют предложению 1.2.

Доказательство. Коммутационные соотношения являются следствиями (1.41), (1.42), леммы 3.1 и соотношений в алгебре $\mathfrak{k}' \simeq \mathfrak{so}(8)$. Например, вычислим коммутатор $[f_{2\lambda,\alpha}, e_{\lambda,j}]$. Из (1.41) и леммы 3.1 имеем:

$$\begin{aligned}
[f_{2\lambda,\alpha}, e_{\lambda,j}] &= -\left[\varkappa A_\alpha, \frac{1}{2}\operatorname{ad} Y_2(\overline{e}_j)\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\operatorname{ad} Y_2\left(A_\alpha^{(2)}\overline{e}_j\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{ad} Y_2\left(R_\alpha\overline{e}_j\right) = \\
&= -\frac{1}{4}\operatorname{ad} Y_2\left(\overline{e}_j e_\alpha\right) = \frac{1}{4}\operatorname{ad} Y_2\left(\overline{e}_j\overline{e}_\alpha\right) = -\frac{1}{2} e_{\lambda,e_\alpha e_j}.
\end{aligned}$$

Аналогичные вычисления справедливы для $[f_{2\lambda,\alpha}, f_{\lambda,j}]$.

Вычислим теперь $[e_{\lambda,i}, e_{\lambda,j}]$, $i \neq j$. Из (1.42) получаем:

$$[e_{\lambda,i}, e_{\lambda,j}] = \frac{1}{4}\left[\mathrm{ad}\, Y_2(\bar{e}_i), \mathrm{ad}\, Y_2(\bar{e}_j)\right] = \frac{1}{4}\varkappa C_{2,\bar{e}_i,\bar{e}_j},\ i \neq j.$$

А из (1.32) и (1.43) следует

$$\frac{1}{2}C_{2,\bar{e}_i,\bar{e}_j}(e_k) = \frac{1}{2}\left(e_j \cdot \bar{e}_i e_k - e_i \cdot \bar{e}_j e_k\right) = -e_i \cdot \bar{e}_j e_k.$$

В частности,

$$\frac{1}{2}C_{2,\bar{e}_i,\bar{e}_j}(1) = -e_i\bar{e}_j,\ \frac{1}{2}C_{2,\bar{e}_i,\bar{e}_j}(e_i\bar{e}_j) = -\left(e_i \cdot \bar{e}_j\right)^2 = 1,$$

поэтому

$$\frac{1}{2}\varkappa C_{2,\bar{e}_i,\bar{e}_j} = \varkappa A_{e_i\bar{e}_j} + \varkappa\widetilde{C}_{2,i,j} = f_{2\lambda,e_i\bar{e}_j} + \varkappa\widetilde{C}_{2,i,j},$$

где $\widetilde{C}_{2,i,j} \in \mathfrak{k}_0$ и

$$\widetilde{C}_{2,i,j}(e_k) = e_j \cdot \bar{e}_i e_k,\ e_k \neq 1, \pm e_i\bar{e}_j,\ \widetilde{C}_{2,i,j}(e_i\bar{e}_j) = \widetilde{C}_{2,i,j}(1) = 0.$$

Аналогичные вычисления справедливы для $[f_{\lambda,i}, f_{\lambda,j}]$. ■

3.5.1.2. Инварианты в алгебре $S(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda})$

Инвариантные операторы $D_0, \ldots, D_6$, соответствующие некоторым K_0-инвариантам в алгебре $S(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda})$, уже построены в § 3.1. Здесь мы построим другие независимые Ad_{K_0}-инварианты в алгебре $S(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda})$ или, что эквивалентно, в алгебре $S(\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda})$ (поскольку $\mathfrak{a}$ — инвариантное одномерное пространство) и соответствующие инвариантные дифференциальные операторы.

Элемент $\Phi \in K'$ принадлежит подгруппе $K_0 \subset K'$ тогда и только тогда, когда $\Phi_3(1) = 1$, и в этом случае $\Phi_3(\xi) = \xi$ для любого значения $\xi \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}a_3$. Всюду ниже в этом пункте $\Phi \in K_0$. Ортогональность оператора Φ_i означает, что

$$\mathrm{Re}\left(\Phi_i(\xi)\overline{\Phi_i(\eta)}\right) = \mathrm{Re}(\xi\bar{\eta}),\ \xi, \eta \in \mathbb{C}a_i. \tag{3.38}$$

В частности, $\Phi_i(\xi)\overline{\Phi_i(\xi)} = |\xi|^2$ и

$$\overline{\Phi_i(\xi)^{-1}} = \Phi_i(\xi)/|\xi|^2. \tag{3.39}$$

При $\eta = \overline{\xi}$ из (1.39) получаем $\Phi_1(\xi)\Phi_2(\overline{\xi}) = \overline{\Phi_3(|\xi|^2)} = |\xi|^2$, поэтому из (3.39) следует $\Phi_1(\xi) = |\xi|^2\Phi_2(\overline{\xi})^{-1} = \overline{\Phi_2(\overline{\xi})}$ и

$$\Phi_1 = \iota \circ \Phi_2 \circ \iota. \tag{3.40}$$

Пусть $Q_1(\xi,\eta) = \mathrm{Re}(\xi\eta)$, $\xi \in \mathbb{C}a_1, \eta \in \mathbb{C}a_2$. Из (3.38) и (3.40) следует

$$Q_1(\Phi_1(\xi),\Phi_2(\eta)) = \mathrm{Re}(\Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta)) = \mathrm{Re}(\Phi_1(\xi)\overline{\Phi_1(\overline{\eta})}) = \mathrm{Re}(\xi\overline{\eta}) = Q_1(\xi,\eta).$$

Таким образом, величина $Q_1(\xi,\eta)$ инвариантна относительно действия K_0.

Из предложений 1.8 и 1.9 следуют равенства $\Phi_1 = g^L, \Phi_2 = g^R, \Phi_3 = \iota \circ g^V \circ \iota = g^V$, где g^L, g^R, g^V являются соответственно левым спинорным, правым спинорным и векторным представлениями группы $K_0 \simeq \mathrm{Spin}(7)$, поскольку $\iota|_{\mathbb{C}a_3'} = -\mathrm{id}$. Кроме того, поскольку действие группы K_0 на пространстве значений $\mathrm{Im}(\xi\eta)$, $\xi \in \mathbb{C}a_1, \eta \in \mathbb{C}a_2$ совпадает с g^V, то величина $Q_2(\xi,\eta,\zeta) := \mathrm{Re}\,(\mathrm{Im}(\xi\eta)\zeta)$ является инвариантной относительно действия группы K_0 при $\zeta \in \mathbb{C}a_3'$.

В силу отождествления элементов $X_2(\xi)$ и $Y_2(\xi)$ в соответствии с формулой

$$[Y_2(\xi), E_1] = X_2(\xi),$$

действие группы K_0 на пространстве $\mathfrak{p}_\lambda^* \cong \mathbb{C}a_2$ можно отождествить с операторами Φ_2.[1] Аналогично в силу формул

$$\mathrm{ad}\, Y_1(\xi)\,(X_3(1)) = -X_2(\overline{\xi}),\ [Y_3(\xi), E_1] = -X_3(\xi)$$

можно отождествить действие группы K_0 на пространстве $\mathfrak{k}_\lambda^* \cong \mathbb{C}a_1$ с операторами $\iota \circ \Phi_2 \circ \iota = \Phi_1$, а ее действие на пространстве $\mathfrak{p}_{2\lambda}^* \cong \mathbb{C}a_3'$ с операторами Φ_3. Наконец, действие группы K_0 на пространстве $\mathfrak{k}_{2\lambda}^*$ эквивалентно действию операторов Φ_3 на еще одном экземпляре пространства $\mathbb{C}a_3'$. Любой инвариант действия группы K_0 на пространстве $\mathbb{C}a_1 \oplus \mathbb{C}a_2 \oplus \mathbb{C}a_3' \oplus \mathbb{C}a_3'$ естественно отождествляется с K_0-инвариантными элементами из алгебры

$$S\left((\mathbb{C}a_1 \oplus \mathbb{C}a_2 \oplus \mathbb{C}a_3' \oplus \mathbb{C}a_3')^*\right) \cong S\left(\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}\right).$$

[1] См. сноску на стр. 27.

Поэтому аналогом инварианта $\mathrm{Im}(\xi\eta)$, $\xi \in \mathbb{C}a_1, \eta \in \mathbb{C}a_2$ является элемент

$$\sum_{i\neq j} f^*_{\lambda,i} e^*_{\lambda,\overline{e}_j} \otimes e_i e_j \in S(\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}) \otimes \mathbb{C}a,$$

где $e^*_{\lambda,i}, f^*_{\lambda,i}$ — элементы из алгебры $S(\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda})$, соответствующие элементам $e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i} \in \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$, как в п. 2.1.2.

Таким образом, инварианту Q_2 соответствует инвариантный элемент из алгебры $S(\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda})$ вида

$$\sum_{i\neq j} f^*_{\lambda,i} e^*_{\lambda,\overline{e}_j} e^*_{2\lambda,e_i e_j} = \sum_{i\neq j} f^*_{\lambda,i} e^*_{\lambda,j} e^*_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}.$$

Определим соответствующий инвариантный дифференциальный оператор

$$D_7 = -\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\left\{\{f_{\lambda,i}, e_{\lambda,j}\}, e_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}\right\} = \frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\left\{\{f_{\lambda,j}, e_{\lambda,i}\}, e_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}\right\}.$$

Второе равенство имеет место в силу соотношений $e_j\overline{e}_i = -\overline{e_j\overline{e}_i} = -e_i\overline{e}_j$ при $i \neq j$.

Подстановка $e_{2\lambda,e_i\overline{e}_j} \longrightarrow f_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}$ дает еще один инвариантный дифференциальный оператор

$$D_8 = -\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\left\{\{f_{\lambda,i}, e_{\lambda,j}\}, f_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}\right\} = \frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\left\{\{f_{\lambda,j}, e_{\lambda,i}\}, f_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}\right\}.$$

По определению группы K', уравнение (1.39) остается справедливым после циклической перестановки индексов $1, 2, 3$, откуда

$$\Phi_3(\zeta)\Phi_1(\xi) = \overline{\Phi_2(\overline{\zeta\xi})},\ \Phi_2(\eta)\Phi_3(\zeta) = \overline{\Phi_1(\overline{\eta\zeta})},\ \xi \in \mathbb{C}a_1, \eta \in \mathbb{C}a_2, \zeta \in \mathbb{C}a_3'. \tag{3.41}$$

Определим функцию

$$P(\xi, \eta, \zeta_1, \zeta_2) := \mathrm{Re}(\zeta_1\xi \cdot \eta\zeta_2),\ \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}a_3'.$$

Она является инвариантной относительно сдвигов на элементы группы K_0, поскольку ввиду (3.41), (3.40) и (3.38) справедливо равенство:

$$P(\Phi_1(\xi), \Phi_2(\eta), \Phi_3(\zeta_1), \Phi_3(\zeta_2)) = \mathrm{Re}(\Phi_3(\zeta_1)\Phi_1(\xi) \cdot \Phi_2(\eta)\Phi_3(\zeta_2)) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\overline{\Phi_2\left(\overline{\zeta_1\xi}\right)}\,\overline{\Phi_1\left(\overline{\eta\zeta_2}\right)}\right) = \operatorname{Re}\left(\Phi_1\left(\zeta_1\xi\right)\overline{\Phi_1\left(\overline{\eta\zeta_2}\right)}\right) =$$
$$= \operatorname{Re}\left(\zeta_1\xi\cdot\overline{\overline{\eta\zeta_2}}\right) = P(\xi,\eta,\zeta_1,\zeta_2).$$

Функции $P(\xi,\eta,\zeta_1,\zeta_2)$ и $P(\xi,\eta,\zeta_2,\zeta_1)$ не являются независимыми друг от друга и от инвариантов второго порядка. В самом деле, следствие 15.12 из [90] дает

$$\operatorname{Re}(ab\cdot c) = \operatorname{Re}(bc\cdot a) = \operatorname{Re}(ca\cdot b) = \operatorname{Re}(a\cdot bc) =$$
$$= \operatorname{Re}(b\cdot ca) = \operatorname{Re}(c\cdot ab),\ a,b,c\in\mathbb{C}a.$$

Поэтому, используя тождество Муфанг (1.31), получаем:

$$P(\xi,\eta,\zeta,\zeta) = \operatorname{Re}(\zeta\cdot\xi\eta\cdot\zeta) = \operatorname{Re}(\zeta^2\cdot\xi\eta) = \tag{3.42}$$
$$= -\operatorname{Re}(|\zeta|^2\xi\eta) = -|\zeta|^2\operatorname{Re}(\xi\eta) = -|\zeta|^2 Q_1(\xi,\eta).$$

Это означает, что для $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$ инвариант $P(\xi,\eta,\zeta,\zeta)$ выражается через инварианты второго порядка. Поляризуя равенство (3.42) по переменной ζ, т. е. делая подстановку $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$, получаем:

$$P(\xi,\eta,\zeta_1,\zeta_2) + P(\xi,\eta,\zeta_2,\zeta_1) = -2\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle Q_1(\xi,\eta).$$

Это означает зависимость двух инвариантов $P(\xi,\eta,\zeta_1,\zeta_2)$, $P(\xi,\eta,\zeta_2,\zeta_1)$ и инвариантов $Q_1(\xi,\eta)$, $\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle$ второго порядка. Последние два инварианта соответствуют операторам D_3 и D_6.

Для построения инвариантного дифференциального оператора D_9 используем инвариантную функцию

$$P(\xi,\eta,\zeta_1,\zeta_2) - P(\xi,\eta,\zeta_2,\zeta_1).$$

Используя элемент $\sum_k e_{\lambda,\overline{e}_k}\otimes e_k$ как аналог переменной η, получаем соответствующее выражение из $S(\mathfrak{p}_\lambda\oplus\mathfrak{k}_\lambda\oplus\mathfrak{p}_{2\lambda}\oplus\mathfrak{k}_{2\lambda})$ вида

$$\sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq k}}\left(f^*_{2\lambda,e_j\overline{e}_i}f^*_{\lambda,i}e^*_{\lambda,\overline{e}_k}e^*_{2\lambda,\overline{e}_k\overline{e}_j} - e^*_{2\lambda,e_j\overline{e}_i}f^*_{\lambda,i}e^*_{\lambda,\overline{e}_k}f^*_{2\lambda,\overline{e}_k\overline{e}_j}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq k}}\left(e^*_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}f^*_{\lambda,i}e^*_{\lambda,k}f^*_{2\lambda,e_k\overline{e}_j} - f^*_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}f^*_{\lambda,i}e^*_{\lambda,k}e^*_{2\lambda,e_k\overline{e}_j}\right),$$

где опять использовано равенство $e_j\overline{e}_i = -\overline{e_j\overline{e}_i} = -e_i\overline{e}_j$ при $i\neq j$.

Определим соответствующий инвариантный дифференциальный оператор

$$D_9 = \frac{1}{8}\sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq k}}\Big(\big\{\{e_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}, f_{\lambda,i}\}, \{f_{2\lambda,e_k\overline{e}_j}, e_{\lambda,k}\}\big\} - \\ - \big\{\{e_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}, e_{\lambda,i}\}, \{f_{2\lambda,e_k\overline{e}_j}, f_{\lambda,k}\}\big\}\Big).$$

Покажем, что существует в точности 9 независимых K_0-инвариантов в алгебре $S(\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda})$.

Действительно, имеют место равенства $\dim(\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}) = 8 + 8 + 7 + 7 = 30$ и $\dim K_0 = \dim \mathrm{Spin}(7) = 21$. Поэтому коразмерность K_0-орбит в пространстве $\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$ не менее чем $30 - 21 = 9$ и должно быть по крайней мере 9 независимых K_0-инвариантов в алгебре $S(\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda})$.

С другой стороны, очевидно, что стационарная подгруппа группы $\mathrm{Spin}(7)$, действующей в пространстве $\mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$ по представлению $g^V \oplus g^V$, и, соответствующая точке в общем положении, совпадает с группой $\mathrm{Spin}(5)$. Поэтому размерность общей $\mathrm{Spin}(7)$-орбиты в пространстве $\mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$ совпадает с $\dim \mathrm{Spin}(7) - \dim \mathrm{Spin}(5) = 11$. Группа $\mathrm{Spin}(5)$ изоморфна группе $U_\mathbb{H}(2)$, см. [90], предложение 5.1. В п. 3.2.1 найдены шесть независимых инвариантов диагонального тавтологического действия группы $U_\mathbb{H}(2)$ в пространстве $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \simeq \mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda$, поэтому общие орбиты последнего действия являются 10-мерными, т. к. $\dim_\mathbb{R}(\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2) - 6 = 10$. Поскольку общие $\mathrm{Spin}(7)$-орбиты в пространстве $\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$ являются $11 + 10 = 21$-мерными, то их коразмерности равны 9 и существует в точности 9 функционально независимых инвариантов действия группы $\mathrm{Spin}(7)$ в пространстве $\mathfrak{p}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_{2\lambda} \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$.

Неизвестно, существуют ли другие инварианты этого действия, полиномиально выражающиеся через элементы $e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}, e_{2\lambda,\alpha}, f_{2\lambda,\alpha}$, но не выражающиеся полиномиально через элементы $D_0, \ldots, D_9$. Такие инварианты, если они существуют, связаны с операторами $D_0, \ldots, D_9$ алгебраическим нелинейным уравнением. В случае пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S}$, $n \geqslant 3$, таким инвариантом является D_{10}, а его квадрат D_{10}^2 полиномиально выражается через $D_0, \ldots, D_9$. Оператор D_{10} появляется в коммутационных соотношениях $D_1, \ldots, D_9$.

В следующем пункте найдены все коммутаторы операторов $D_0, \ldots, D_9$ как полиномиальные выражения от $D_0, \ldots, D_9$. Поэтому веро-

ятно, что в октавном случае не существует аналога оператора D_{10}, не представимого полиномиально через операторы $D_0, \ldots, D_9$.

Строгое доказательство полноты системы инвариантов $D_0, \cdots, D_9$ представляется трудной проблемой, как и многие проблемы теории инвариантов [24]. В любом случае операторы $D_0, \cdots, D_9$ порождают некоторую подалгебру в алгебре $\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S}\right)$.

Легко проверить, что автоморфизм ζ_α, σ действует на операторы D_7, D_8, D_9 по формулам

$$\begin{aligned}
\zeta_\alpha(D_7) &= \cos(\alpha)D_7 - \sin(\alpha)D_8,\\
\zeta_\alpha(D_8) &= \sin(\alpha)D_7 + \cos(\alpha)D_8,\\
\zeta_\alpha(D_9) &= D_9,\ \sigma(D_7) = D_7,\\
\sigma(D_8) &= -D_8,\ \sigma(D_9) = D_9.
\end{aligned}$$

Аналогично предыдущим параграфам для получения образующих алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S})$ можно использовать предложение 1.5 и сделать формальную замену:

$$\Lambda \to \mathbf{i}\Lambda, e_{\lambda,i} \to \mathbf{i}e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i} \to f_{\lambda,i}, e_{2\lambda,\alpha} \to \mathbf{i}e_{\lambda,\alpha}, f_{\lambda,\alpha} \to f_{\lambda,\alpha}.$$

Эта замена порождает соответствующую замену образующих $D_0, \ldots, D_{10}$:

$$\begin{aligned}
&D_0 \to \mathbf{i}\overline{D}_0,\ D_1 \to -\overline{D}_1,\ D_2 \to \overline{D}_2,\ D_3 \to \mathbf{i}\overline{D}_3,\ D_4 \to -\overline{D}_4,\\
&D_5 \to \overline{D}_5,\ D_6 \to \mathbf{i}\overline{D}_6,\ D_7 \to -\overline{D}_7,\ D_8 \to \mathbf{i}\overline{D}_8,\ D_9 \to -\overline{D}_9.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Операторы $\overline{D}_0, \ldots, \overline{D}_9$ порождают алгебру $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S})$.

3.5.2. Соотношения в алгебрах $\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S}\right)$ и $\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S}\right)$

Ниже приведены все 45 коммутационных соотношений для операторов $D_0, \ldots, D_9$. Пример вычисления одного такого соотношения приведен в приложении А. Все методы, описанные в п. 3.2.2 для вычисления коммутационных соотношений, были использованы в данном случае. Кроме того, нумерация базисных элементов $e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}, e_{2\lambda,\alpha}, f_{\lambda,\alpha}$ октавными единицами e_i, $i = 0, \ldots, 7$, оказалась весьма удобной.

$$[D_0, D_1] = -D_3,\ [D_0, D_2] = D_3,$$

$$[D_0, D_3] = \frac{1}{2}(D_1 - D_2),\ [D_0, D_4] = -2D_6,$$

$$
\begin{aligned}
&[D_0, D_5] = 2D_6,\ [D_0, D_6] = D_4 - D_5,\\
&[D_0, D_7] = -D_8, [D_0, D_8] = D_7,\ [D_0, D_9] = 0,\\
&[D_1, D_2] = -\{D_0, D_3\} - 2D_7,\ [D_1, D_3] = -\frac{1}{2}\{D_0, D_1\} + D_8 + 10D_0,\\
&[D_1, D_4] = 2D_7,\ [D_1, D_5] = 0,\ [D_1, D_6] = D_8,\\
&[D_1, D_7] = \frac{1}{2}\{D_1, D_2 - D_4\} - D_9 - \frac{1}{2}\{D_3, D_6\} - D_3^2 -\\
&\qquad - 5D_0^2 - \frac{3}{32}D_1 - \frac{283}{32}D_2 + \frac{19}{2}D_4 - \frac{1}{2}D_5,\\
&[D_1, D_8] = -\frac{1}{2}\{D_3, D_5\} - \frac{1}{2}\{D_1, D_6\} + 10D_6 + \frac{35}{4}D_3,\\
&[D_1, D_9] = \frac{1}{2}\{D_5, D_7\} - \frac{1}{2}\{D_6, D_8\} - \frac{189}{32}\{D_0, D_3\} - \frac{169}{16}D_7,\\
&[D_2, D_3] = \frac{1}{2}\{D_0, D_2\} + D_8 - 10D_0,\\
&[D_2, D_4] = -2D_7,\ [D_2, D_5] = 0, [D_2, D_6] = -D_8,\\
&[D_2, D_7] = -\frac{1}{2}\{D_2, D_1 - D_4\} + D_9 - \frac{1}{2}\{D_3, D_6\} +\\
&\qquad + D_3^2 + 5D_0^2 + \frac{3}{32}D_2 + \frac{283}{32}D_1 - \frac{19}{2}D_4 + \frac{1}{2}D_5,\\
&[D_2, D_8] = \frac{1}{2}\{D_2, D_6\} - \frac{1}{2}\{D_3, D_5\} + \frac{35}{4}D_3 - 10D_6,\\
&[D_2, D_9] = -\frac{1}{2}\{D_5, D_7\} + \frac{1}{2}\{D_6, D_8\} + \frac{189}{32}\{D_0, D_3\} + \frac{169}{16}D_7,\\
&[D_3, D_4] = 0,\ [D_3, D_5] = 2D_8,\ [D_3, D_6] = D_7,\\
&[D_3, D_7] = -\frac{1}{4}\{D_1 + D_2, D_6\} + 10D_6, \qquad (3.44)\\
&[D_3, D_8] = \frac{1}{2}\{D_1, D_2\} - \frac{1}{4}\{D_1 + D_2, D_5\} -\\
&\qquad - D_9 - D_3^2 - 5D_0^2 - \frac{143}{32}(D_1 + D_2) - \frac{1}{2}D_4 + \frac{19}{2}D_5,\\
&[D_3, D_9] = \frac{1}{2}\{D_4, D_8\} - \frac{1}{2}\{D_6, D_7\} + \frac{189}{64}\{D_0, D_1 - D_2\} - \frac{169}{16}D_8,\\
&[D_4, D_5] = -2\{D_0, D_6\},\ [D_4, D_6] = -\{D_0, D_4\} + \frac{35}{2}D_0,
\end{aligned}
$$

$$[D_4, D_7] = \frac{1}{2}\{D_1 - D_2, D_4\} +$$
$$+ \frac{35}{4}(D_2 - D_1),\ [D_4, D_8] = \frac{1}{2}\{D_1 - D_2, D_6\} - \{D_0, D_7\},$$
$$[D_4, D_9] = -9\{D_0, D_6\},\ [D_5, D_6] = \{D_0, D_5\} - \frac{35}{2}D_0,$$
$$[D_5, D_7] = \{D_3, D_6\} + \{D_0, D_8\},\ [D_5, D_8] = \{D_3, D_5\} - \frac{35}{2}D_3,$$
$$[D_5, D_9] = 9\{D_0, D_6\},\ [D_6, D_7] = \frac{1}{4}\{D_1 - D_2, D_6\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\{D_3, D_4\} + \frac{1}{2}\{D_0, D_7\} - \frac{35}{4}D_3,$$
$$[D_6, D_8] = \frac{1}{4}\{D_1 - D_2, D_5\} + \frac{1}{2}\{D_3, D_6\} - \frac{1}{2}\{D_0, D_8\} + \frac{35}{8}(D_2 - D_1),$$
$$[D_6, D_9] = \frac{9}{2}\{D_0, D_4 - D_5\},$$
$$[D_7, D_8] = -\frac{1}{4}\{D_0, \{D_1, D_2\}\} + \frac{1}{2}\{D_0, D_3^2\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\{D_0, D_9\} + \frac{1}{4}\{D_1 - D_2, D_8\} +$$
$$+ \frac{1}{4}\{D_0, D_5\} + \frac{283}{64}\{D_0, D_1 + D_2\} -$$
$$- \frac{175}{2}D_0 - \frac{1}{2}\{D_3, D_7\} + 5D_0^3 + \frac{1}{4}\{D_0, D_4\},$$
$$[D_7, D_9] = \frac{1}{4}\{\{D_0, D_7\}, D_6\} + \frac{1}{8}\{D_2 - D_1, \{D_4, D_5\}\} -$$
$$- \frac{1}{4}\{\{D_0, D_4\}, D_8\} + \frac{1}{4}\{D_1 - D_2, D_6^2\} -$$
$$- \frac{1}{2}\{D_0, D_8\} + \frac{25}{32}\{D_3, D_6\} + \frac{185}{64}\{D_1 - D_2, D_4\} +$$
$$+ \frac{17}{8}\{D_1 - D_2, D_5\} + \frac{35 \cdot 181}{128}(D_2 - D_1),$$
$$[D_8, D_9] = -\frac{1}{4}\{\{D_0, D_6\}, D_8\} - \frac{1}{4}\{D_3, \{D_4, D_5\}\} +$$
$$+ \frac{1}{4}\{\{D_0, D_7\}, D_5\} + \frac{1}{2}\{D_3, D_6^2\} + \frac{169}{32}\{D_3, D_5\} +$$

$$+\frac{45}{64}\{D_1-D_2,D_6\}+\frac{37}{8}\{D_3,D_4\}+\frac{5}{8}\{D_0,D_7\}-\frac{35\cdot 177}{64}D_3.$$

Легко проверить прямыми вычислениями, что все элементы из $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S})$ степеней $\leqslant 4$ являются линейными комбинациями элементов C_1, C_1^2 и C_2, где

$$C_1 = D_0^2 + D_1 + D_2 + D_4 + D_5,$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\{D_4, D_5\} - D_6^2 - 2D_9 + \frac{189}{16}(D_1 + D_2) + \frac{5}{4}(D_4 + D_5).$$

Используя замену (3.43), из соотношений выше можно получить коммутационные соотношения для алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_\mathbf{S})$:

$$[\bar D_0,\bar D_1]=\bar D_3,\ [\bar D_0,\bar D_2]=\bar D_3,\ [\bar D_0,\bar D_3]=\frac{1}{2}(\bar D_1+\bar D_2),\ [\bar D_0,\bar D_4]=2\bar D_6,$$
$$[\bar D_0,\bar D_5]=2\bar D_6,\ [\bar D_0,\bar D_6]=\bar D_4+\bar D_5,$$
$$[\bar D_0,\bar D_7]=\bar D_8,\ [\bar D_0,\bar D_8]=\bar D_7,\ [\bar D_0,\bar D_9]=0,$$
$$[\bar D_1,\bar D_2]=-\{\bar D_0,\bar D_3\}-2\bar D_7,\ [\bar D_1,\bar D_3]=-\frac{1}{2}\{\bar D_0,\bar D_1\}-\bar D_8-10\bar D_0,$$
$$[\bar D_1,\bar D_4]=-2\bar D_7,\ [\bar D_1,\bar D_5]=0,\ [\bar D_1,\bar D_6]=-\bar D_8,$$
$$[\bar D_1,\bar D_7]=-\frac{1}{2}\{\bar D_1,\bar D_2+\bar D_4\}+\bar D_9+\frac{1}{2}\{\bar D_3,\bar D_6\}+\bar D_3^2+$$
$$+5\bar D_0^2+\frac{3}{32}\bar D_1-\frac{283}{32}\bar D_2-\frac{19}{2}\bar D_4-\frac{1}{2}\bar D_5,$$
$$[\bar D_1,\bar D_8]=\frac{1}{2}\{\bar D_3,\bar D_5\}-\frac{1}{2}\{\bar D_1,\bar D_6\}-$$
$$-10\bar D_6-\frac{35}{4}\bar D_3,\ [\bar D_1,\bar D_9]=-\frac{1}{2}\{\bar D_5,\bar D_7\}+\frac{1}{2}\{\bar D_6,\bar D_8\}+$$
$$+\frac{189}{32}\{\bar D_0,\bar D_3\}+\frac{169}{16}\bar D_7,$$
$$[\bar D_2,\bar D_3]=\frac{1}{2}\{\bar D_0,\bar D_2\}+\bar D_8-10\bar D_0,\ [\bar D_2,\bar D_4]=-2\bar D_7,$$
$$[\bar D_2,\bar D_5]=0,[\bar D_2,\bar D_6]=-\bar D_8,$$
$$[\bar D_2,\bar D_7]=-\frac{1}{2}\{\bar D_2,\bar D_1-\bar D_4\}+\bar D_9-\frac{1}{2}\{\bar D_3,\bar D_6\}+\bar D_3^2+$$
$$+5\bar D_0^2-\frac{3}{32}\bar D_2+\frac{283}{32}\bar D_1-\frac{19}{2}\bar D_4-\frac{1}{2}\bar D_5,$$

$$
\begin{aligned}
&[\bar{D}_2, \bar{D}_8] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_2, \bar{D}_6\} - \frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_5\} + \frac{35}{4}\bar{D}_3 - 10\bar{D}_6,\\
&[\bar{D}_2, \bar{D}_9] = -\frac{1}{2}\{\bar{D}_5, \bar{D}_7\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_6, \bar{D}_8\} + \frac{189}{32}\{\bar{D}_0, \bar{D}_3\} + \frac{169}{16}\bar{D}_7,\\
&[\bar{D}_3, \bar{D}_4] = 0,\ [\bar{D}_3, \bar{D}_5] = 2\bar{D}_8,\ [\bar{D}_3, \bar{D}_6] = \bar{D}_7,\\
&[\bar{D}_3, \bar{D}_7] = -\frac{1}{4}\{\bar{D}_1 - \bar{D}_2, \bar{D}_6\} - 10\bar{D}_6, \qquad (3.45)\\
&[\bar{D}_3, \bar{D}_8] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_1, \bar{D}_2\} - \frac{1}{4}\{\bar{D}_1 - \bar{D}_2, \bar{D}_5\} -\\
&\qquad - \bar{D}_9 - \bar{D}_3^2 - 5\bar{D}_0^2 - \frac{143}{32}(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) - \frac{1}{2}\bar{D}_4 - \frac{19}{2}\bar{D}_5,\\
&[\bar{D}_3, \bar{D}_9] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_4, \bar{D}_8\} - \frac{1}{2}\{\bar{D}_6, \bar{D}_7\} + \frac{189}{64}\{\bar{D}_0, \bar{D}_1 + \bar{D}_2\} + \frac{169}{16}\bar{D}_8,\\
&[\bar{D}_4, \bar{D}_5] = -2\{\bar{D}_0, \bar{D}_6\},\ [\bar{D}_4, \bar{D}_6] = -\{\bar{D}_0, \bar{D}_4\} - \frac{35}{2}\bar{D}_0,\\
&[\bar{D}_4, \bar{D}_7] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_4\} + \frac{35}{4}(\bar{D}_2 + \bar{D}_1),\\
&[\bar{D}_4, \bar{D}_8] = \frac{1}{2}\{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_6\} - \{\bar{D}_0, \bar{D}_7\},\\
&[\bar{D}_4, \bar{D}_9] = 9\{\bar{D}_0, \bar{D}_6\},\ [\bar{D}_5, \bar{D}_6] = \{\bar{D}_0, \bar{D}_5\} - \frac{35}{2}\bar{D}_0,\\
&[\bar{D}_5, \bar{D}_7] = \{\bar{D}_3, \bar{D}_6\} + \{\bar{D}_0, \bar{D}_8\},\ [\bar{D}_5, \bar{D}_8] = \{\bar{D}_3, \bar{D}_5\} - \frac{35}{2}\bar{D}_3,\\
&[\bar{D}_5, \bar{D}_9] = 9\{\bar{D}_0, \bar{D}_6\},\ [\bar{D}_6, \bar{D}_7] = \frac{1}{4}\{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_6\} +\\
&\qquad + \frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_4\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_0, \bar{D}_7\} + \frac{35}{4}\bar{D}_3,\\
&[\bar{D}_6, \bar{D}_8] = \frac{1}{4}\{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_5\} +\\
&\qquad + \frac{1}{2}\{\bar{D}_3, \bar{D}_6\} - \frac{1}{2}\{\bar{D}_0, \bar{D}_8\} - \frac{35}{8}(\bar{D}_2 + \bar{D}_1),\\
&[\bar{D}_6, \bar{D}_9] = \frac{9}{2}\{\bar{D}_0, \bar{D}_4 + \bar{D}_5\},\\
&[\bar{D}_7, \bar{D}_8] = -\frac{1}{4}\{\bar{D}_0, \{\bar{D}_1, \bar{D}_2\}\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_0, \bar{D}_3^2\} + \frac{1}{2}\{\bar{D}_0, \bar{D}_9\} +\\
&\qquad + \frac{1}{4}\{\bar{D}_1 + \bar{D}_2, \bar{D}_8\} - \frac{1}{4}\{\bar{D}_0, \bar{D}_5\} + \frac{283}{64}\{\bar{D}_0, \bar{D}_1 - \bar{D}_2\} +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{175}{2}\bar{D}_0-\frac{1}{2}\{\bar{D}_3,\bar{D}_7\}+5\bar{D}_0^3+\frac{1}{4}\{\bar{D}_0,\bar{D}_4\},$$

$$[\bar{D}_7,\bar{D}_9]=\frac{1}{4}\{\{\bar{D}_0,\bar{D}_7\},\bar{D}_6\}-\frac{1}{8}\{\bar{D}_2+\bar{D}_1,\{\bar{D}_4,\bar{D}_5\}\}-$$

$$-\frac{1}{4}\{\{\bar{D}_0,\bar{D}_4\},\bar{D}_8\}+\frac{1}{4}\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_6^2\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{\bar{D}_0,\bar{D}_8\}-\frac{25}{32}\{\bar{D}_3,\bar{D}_6\}+\frac{185}{64}\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_4\}-$$

$$-\frac{17}{8}\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_5\}+\frac{35\cdot 181}{128}(\bar{D}_2+\bar{D}_1),$$

$$[\bar{D}_8,\bar{D}_9]=-\frac{1}{4}\{\{\bar{D}_0,\bar{D}_6\},\bar{D}_8\}-$$

$$-\frac{1}{4}\{\bar{D}_3,\{\bar{D}_4,\bar{D}_5\}\}+\frac{1}{4}\{\{\bar{D}_0,\bar{D}_7\},\bar{D}_5\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{\bar{D}_3,\bar{D}_6^2\}-\frac{169}{32}\{\bar{D}_3,\bar{D}_5\}+$$

$$+\frac{45}{64}\{\bar{D}_1+\bar{D}_2,\bar{D}_6\}+\frac{37}{8}\{\bar{D}_3,\bar{D}_4\}+\frac{5}{8}\{\bar{D}_0,\bar{D}_7\}+\frac{35\cdot 177}{64}\bar{D}_3.$$

Аналогами операторов C_1 и C_2 из $\mathrm{ZDiff}_I(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}})$ являются операторы:

$$\overline{C}_1=\bar{D}_0^2+\bar{D}_1-\bar{D}_2+\bar{D}_4-\bar{D}_5,$$

$$\overline{C}_2=\frac{1}{2}\{\bar{D}_4,\bar{D}_5\}-\bar{D}_6^2-2\bar{D}_9+\frac{189}{16}(\bar{D}_1-\bar{D}_2)+\frac{5}{4}(\bar{D}_4-\bar{D}_5).$$

§ 3.6. Ядро оператора D_0

Теорема ниже относится к ядру оператора D_0, построенного выше для всех двухточечно-однородных римановых пространств.

Теорема 3.1 ([194]). *Пусть Q — двухточечно-однородное риманово пространство, а G – компонента связности единицы его группы изометрий. Для любого гладкого векторного поля v на Q определим функцию f_v на пространстве $Q_{\mathbf{S}}$ формулой:*

$$f_v(y)=\widehat{g}(v(x),\xi)\equiv\langle v(x),\xi\rangle,$$

где $x\in Q$, $\widehat{g}(\cdot,\cdot)\equiv\langle\cdot,\cdot\rangle$ – риманова метрика на Q, $\xi\in T_xQ$, $\langle\xi,\xi\rangle=1$, $y=(x,\xi)\in Q_{\mathbf{S}}$. Пусть $D_0\in\mathrm{Diff}_G(Q_{\mathbf{S}})$ — дифференциальный оператор, построенный в § 3.1 (для некомпактного случая см.

предложение 1.5). *Для любого элемента* $X \in \mathfrak{g}$ *обозначим через* $\widetilde{X}$ *соответствующее киллингово векторное поле на* Q. *Тогда тождество* $D_0 f_v \equiv 0$ *на* $Q_{\mathbf{S}}$ *эквивалентно равенству* $v = \widetilde{X}$ *для некоторого* $X \in \mathfrak{g}$.

Данная теорема в случае $Q = \mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ была сформулирована и доказана в [182] явными координатными вычислениями. Доказательство ниже общего случая является более концептуальным.

Доказательство. Выберем произвольную точку $x_0 \in Q$ и положим $e_0 = \frac{1}{R}\widetilde{\Lambda}(x_0) \in T_{x_0}Q$, где обозначения Λ и R введены в предложении 1.4. Тогда $\langle e_0, e_0\rangle = 1$. Пространство $Q_{\mathbf{S}}$ является G-орбитой Gy_0, где $y_0 = (x_0, e_0) \in Q_{\mathbf{S}}$.

Действие оператора D_0 на функцию f_v может быть записано следующим образом (см. (2.7)):

$$(D_0 f_v)(gy_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f_v\left(g\exp(t\Lambda)y_0\right), \; g \in G.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
(D_0 f_v)(gy_0) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle v\left(g\exp(t\Lambda)x_0\right), g\exp(t\Lambda)e_0\rangle = \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left\langle v\left(g\exp(t\Lambda)g^{-1}gx_0\right), g\exp(t\Lambda)\,\frac{d}{d\mu}\bigg|_{\mu=0}\exp(\mu\Lambda)x_0\right\rangle = \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left\langle v\left(\exp(t\,\mathrm{Ad}_g\,\Lambda)gx_0\right), \frac{d}{d\mu}\bigg|_{\mu=0}\exp(t\,\mathrm{Ad}_g\,\Lambda)\exp(\mu\,\mathrm{Ad}_g\,\Lambda)gx_0\right\rangle = \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left\langle v\left(\exp(t\,\mathrm{Ad}_g\,\Lambda)gx_0\right), \frac{d}{d\mu}\bigg|_{\mu=0}\exp(\mu\,\mathrm{Ad}_g\,\Lambda)\exp(t\,\mathrm{Ad}_g\,\Lambda)gx_0\right\rangle.
\end{aligned}$$

В силу транзитивности действия группы G на пространстве $Q_{\mathbf{S}}$, точка $y := (x, e) := \left(gx_0, \widetilde{\mathrm{Ad}_g\,\Lambda}\Big|_{gx_0}\right)$ может быть произвольной. Обозначим $W = \mathrm{Ad}_g\,\Lambda$. Тогда

$$(D_0 f_v)(y) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left\langle v\left(\exp(tW)x\right), \widetilde{W}\left(\exp(tW)x\right)\right\rangle = \pounds_{\widetilde{W}}\widehat{g}(v(x), \widetilde{W}(x)),$$

где $\pounds_X$ — производная Ли вдоль векторного поля X. Векторное поле $\widetilde{W}$ является киллинговым, поэтому $\pounds_{\widetilde{W}}\widehat{g} = 0$ и

$$D_0 f_v = \widehat{g}(\pounds_{\widetilde{W}} v, \widetilde{W}) + \widehat{g}(v, \pounds_{\widetilde{W}} \widetilde{W}) = \widehat{g}(\pounds_{\widetilde{W}} v, \widetilde{W}) = -\widehat{g}(\pounds_v \widetilde{W}, \widetilde{W}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\pounds_v \widehat{g}\right)(\widetilde{W}, \widetilde{W}) - \frac{1}{2}\pounds_v\left(\widehat{g}(\widetilde{W}, \widetilde{W})\right) = \frac{1}{2}\left(\pounds_v \widehat{g}\right)(\widetilde{W}, \widetilde{W}), \tag{3.46}$$

ввиду $\widehat{g}(\widetilde{W}(x), \widetilde{W}(x)) = \widehat{g}(g\widetilde{\Lambda}(x_0), g\widetilde{\Lambda}(x_0)) = \widehat{g}(\widetilde{\Lambda}(x_0), \widetilde{\Lambda}(x_0)) = R^2$ и $\pounds_X Y = [X, Y]$. Элемент $\widetilde{W} \in T_x Q$ произволен, поэтому из (3.46) видно, что условие $D_0 f_v = 0$ эквивалентно равенству $\pounds_v \widehat{g} = 0$. Это означает, что v — киллингово векторное поле и имеет вид $v = \widetilde{X}$ для некоторого элемента $X \in \mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $D_0 f_v \equiv 0$. ■

Глава 4

Гамильтоновы системы с симметрией и их редукция

В этой главе мы дадим краткий обзор классической гамильтоновой механики с симметриями, с акцентом на механику на кокасательных расслоениях, гамильтонову редукцию, коммутативную и некоммутативную интегрируемость и переход от квантовой механики к классической. Другой целью данной главы является фиксация некоторых обозначений. Данный материал в основном является стандартным, и его различные части могут быть найдены в [6; 21; 76; 108; 125] и многих других источниках. Он будет использован ниже в главах 6 и 7 для изучения классической одно- и двухчастичной задачи в двухточечно-однородных римановых пространствах.

§ 4.1. Основные факты гамильтоновой механики

Векторное поле X на гладком многообразии M называется *полным* [46], если соответствующая ему однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов многообразия M является глобальной. Гладкое многообразие M, наделенное замкнутой невырожденной 2-формой ω, называется *симплектическим*, а форма ω называется *симплектической структурой*. Симплектическое многообразие всегда четномерно. Любая гладкая функция h на M определяет *гамильтоново векторное поле* X_h на M такое, что

$$dh = \omega(\cdot, X_h) \equiv -i_{X_h}\omega, \tag{4.1}$$

где $i_X\omega$ — внутреннее произведение векторного поля X и формы ω. Функция h сохраняется потоком, порожденным полем X_h, и называется *гамильтоновой функцией* для данного *гамильтонова потока* и соответствующей *гамильтоновой системы дифференциальных уравнений* первого порядка. Таким образом, *гамильтонова система* — это тройка (M, ω, h). В механике многообразие M называется *фазовым пространством*.

Форма ω сохраняется любым гамильтоновым потоком. Действительно,

$$\pounds_{X_h}\omega = d \circ i_{X_h}\omega + i_{X_h} \circ d\omega = -d \circ dh + i_{X_h}0 = 0, \tag{4.2}$$

где мы воспользовались формулой Картана [64; 108]:

$$\pounds_X\omega' = (d \circ i_X + i_X \circ d)\omega', \tag{4.3}$$

справедливой для любого векторного поля X и любой дифференциальной формы ω'.

Для двух гладких функций f и g на M их *скобка Пуассона* — это

$$[f,h]_P := -\omega(X_f, X_h) = -dh(X_f) = df(X_h). \tag{4.4}$$

Очевидно, что $[f,g]_P = -[g,f]_P$ и $[f,f]_P = 0$. Функции f и h находятся *в инволюции*, если $[f,g]_P = 0$. Другими словами, если f является интегралом гамильтонова векторного поля X_h, т.е. функция f постоянна вдоль траекторий потока, порожденного полем X_h. В этом случае функция h также является интегралом для гамильтонова векторного поля X_f.

Предложение 4.1. Векторное поле $[X_f, X_h]$ является гамильтоновым с гамильтоновой функцией, равной $-[f,h]_P$. Скобки Пуассона удовлетворяют *тождеству Якоби*

$$[f,[g,h]_P]_P + [h,[f,g]_P]_P + [g,[h,f]_P]_P = 0 \tag{4.5}$$

и *правилу Лейбница*

$$[f,gh]_P = [f,g]_P h + g[f,h]_P, \tag{4.6}$$

где $f, g, h \in C^\infty(M)$.

Доказательство. Тождество

$$i_{[X,Y]} = [\pounds_X, i_Y]$$

для произвольных гладких векторных полей X и Y хорошо известно в анализе на многообразиях [64; 108]. Поэтому, используя формулу Картана (4.3) еще раз, получаем:

$$\begin{aligned} i_{[X_f,X_h]}\omega = \pounds_{X_f} \circ i_{X_h}\omega - i_{X_h} \circ \pounds_{X_f}\omega = d \circ i_{X_f} \circ i_{X_h}\omega + i_{X_f} \circ d \circ i_{X_h}\omega - \\ - i_{X_h} \circ d \circ i_{X_f}\omega - i_{X_h} \circ i_{X_f} \circ d\omega = d\left(\omega(X_h, X_f)\right) - i_{X_f} \circ d \circ dh + \\ + i_{X_h} \circ d \circ df - i_{X_h} \circ i_{X_f}0 = d[f,h]_P, \end{aligned}$$

что доказывает первое утверждение предложения. Далее, из (4.4) и первого утверждения следует цепочка равенств

$$[f,[g,h]_P]_P + [g,[h,f]_P]_P = X_f \circ X_g h - X_g \circ X_f h = \\ = [X_f, X_g]h = -X_{[f,g]_P} h = -[h,[f,g]_P]_P,$$

что доказывает второе утверждение. Наконец:

$$[f,gh]_P = -X_f(gh) = -X_f(g)h - gX_f(h) = [f,g]_P h + g[f,h]_P. \qquad \blacksquare$$

Определение 4.1. *Алгебра Пуассона* $\mathcal{A}$ — это коммутативная ассоциативная алгебра, наделенная билинейной кососимметричной операцией, удовлетворяющей тождеству Якоби и правилу Лейбница.

Таким образом, алгебра $C^\infty(M)$ является пуассоновой по отношению к скобке $[\cdot,\cdot]_P$. Забывая про поточечное умножение в алгебре $C^\infty(M)$, получаем бесконечномерную алгебру Ли, а отображение $h \to X_h$, $h \in C^\infty(M)$ является антигомоморфизмом алгебры $C^\infty(M)$ на алгебру Ли гамильтоновых векторных полей на пространстве M.

Определение 4.2. Гамильтонова система (M,ω,h) называется вполне интегрируемой (в коммутативном смысле), если существуют $n = \frac{1}{2}\dim M$ гладких функций $f_1 = h, f_2, \ldots, f_n$ на M таких, что:

1) они находятся в инволюции: $[f_i, f_j]_P = 0$;

2) 1-формы df_i, $i = 1,\ldots,n$, линейно независимы в каждой точке некоторого открытого плотного подмножества $M' \subset M$.

Теорема 4.1 (Арнольд–Лиувилль, [6; 108]**).** *Пусть* (M,ω,h) — *вполне интегрируемая гамильтонова система с интегралами* $f_1 = h, f_2, \ldots, f_n$. *Пусть также* $c \in \mathbb{R}^n$ — *регулярное значение отображения* $\mathbf{f} := (f_1,\ldots,f_n)\colon M \to \mathbb{R}^n$.[1] *Тогда:*

1) *множество уровня* $M_c := f^{-1}(c)$ *является гладким лагранжевым подмногообразием пространства* M, *т. е. оно* n-*мерно и справедливо равенство* $\omega|_{M_c} = 0$;

[1] В отличие от соглашения в теореме Сарда [64], мы называем $c \in \mathbb{R}^n$ *регулярным значением* отображения $\mathbf{f}$, если множество $\mathbf{f}^{-1}(c)$ *непусто* и $\operatorname{im} d_x\mathbf{f} = \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbf{f}^{-1}(c)$, поскольку пустое множество не представляет интереса как фазовое пространство.

2) *любая компактная связная компонента подмногообразия M_c диффеоморфна тору $\mathbb{T}^n$, а векторные поля $X_{f_1}, \ldots, X_{f_l}$ полны на нем;*

3) *если гамильтоновы потоки векторных полей $X_{f_1}, \ldots, X_{f_l}$, начинающиеся в точке $x \in M_c$, полны, то связная компонента подмногообразия M_c, содержащая точку x, является однородным пространством аддитивной группы $\mathbb{R}^n$, а в соответствующих угловых координатах $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ потоки векторных полей $X_{f_1}, \ldots, X_{f_l}$ являются линейными.*

Концепция *некоммутативной интегрируемости* первоначально была введена в работе [55] для случая, когда интегралы образуют алгебру Ли. На нелинейные интегралы она была позднее обобщена в [16]. Эта концепция более обща, чем определение 4.2. Вначале мы сформулируем аналитическую версию этой концепции, которая является подготовительной для геометрической версии. Здесь мы следуем [13] и [103].

Пусть $\mathcal{F}$ — подалгебра алгебры Пуассона $C^\infty(M)$, функционально порожденная функциями $f_1, \ldots, f_l$. Предположим, что 1-формы $df_1, \ldots, df_l$ линейно независимы в каждой точке открытого плотного подмножества $M' \subset M$ и всюду в M' имеет место равенство $\operatorname{rank} \|[f_i, f_j]_P\| =: l - r = \text{const}$.

Теорема 4.2 ([13; 103]). *Пусть $l + r = \dim M = 2n$ и $c \in \mathbb{R}^l$ — регулярное значение отображения $\mathbf{f}\colon M \to (f_1, \ldots, f_l) \in \mathbb{R}^l$, существующее в силу независимости 1-форм $df_1, \ldots, df_l$ на M'. Пусть гамильтонова функция $h \in C^\infty(M)$ коммутирует с алгеброй $\mathcal{F}$. Тогда:*

1) *подмногообразие $M_c = \mathbf{f}^{-1}(c)$ — изотропное (т. е. $\omega|_{M_c} = 0$) r-мерное подмногообразие пространства M,*

2) *гамильтонова система с гамильтоновой функцией h интегрируема в смысле определения 4.2,*

3) *компактная связная компонента T_c^r подмногообразия M_c диффеоморфна r-мерному тору. В некоторой окрестности U компоненты T_c^r существуют обобщенные переменные действие-угол y_i, x_i, I_i и $\varphi_i \mod 2\pi$, такие что*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^{r} dI_i \wedge d\varphi_i + \sum_{i=1}^{n/2-r} dy_i \wedge dx_i,$$

а функция h зависит только от переменных I_i, $i = 1, \ldots, r$. Инвариантные торы в U, соответствующие другим регулярным значениям отображения f, *являются множествами уровня интегралов I_i, y_j, x_k. Гамильтоновы уравнения для функции h на T_c^r имеют вид*

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial h}{\partial I_i},\ i = 1, \ldots, r.$$

В предположениях данной теоремы, гамильтонова система, соответствующая функции h, называется *вполне интегрируемой в некоммутативном смысле*. В случае $r = l = n$ эта теорема эквивалентна теореме 4.1.

Ниже нам понадобится теорема об отображении постоянного ранга. Эта теорема встречается в различных формах. Первая форма приведена в [34] (10.3.1) для линейных пространств, но в силу ее локального характера, она также справедлива для гладких многообразий.

Теорема 4.3. *Пусть N_1 и N_2 — гладкие многообразия, а $f\colon N_1 \to N_2$ — гладкое отображение такое, что в некоторой окрестности U точки $x \in N_1$ ранг отображения f постоянен:*

$$\operatorname{rk} f|_U := \operatorname{rk} d_x f|_{x \in U} = k = \text{const}.$$

Тогда существуют локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности $U' \subset U$ и координаты $y_1, \ldots, y_m$ в некоторой окрестности $V' \subset N_2$ точки $f(x)$ такие, что $f(U') \subset V'$ и отображение $f|_{U'}$ действует по формулам:

$$f\colon (x_1, \ldots, x_n) \to (y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

Другая версия этого утверждения такова.

Теорема 4.4. *Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — гладкие функции на гладком многообразии N такие, что*

$$\dim \operatorname{span}(df_i,\ i = 1, \ldots, m) = \dim \operatorname{span}(df_i,\ i = 1, \ldots, k) = k,\ k < m,$$

в окрестности $U \subset N$ точки $x \in N$. Тогда для некоторых непрерывно дифференцируемых функций F_i на пространстве $\mathbb{R}^k$ справедливы равенства

$$f_i = F_i(f_1, \ldots, f_k),\ i = k+1, \ldots, m,$$

в некоторой окрестности $U' \subset U$.

Для многообразия N, являющегося линейным пространством, эта теорема содержится в [83] (III,9;33) и [84] (п. 1.7.4), но опять, в силу ее локального характера, она справедлива и в общем случае.

Определение 4.3. Пусть $\mathcal{F}$ — подалгебра пуассоновой алгебры $C^\infty(M)$, а $\operatorname{reg}\mathcal{F}$ — открытое плотное подмножество в M такое, что

1) $\operatorname{ddim}\mathcal{F} := \dim\operatorname{span}(d_x f,\ f \in \mathcal{F}) = \text{const},\ x \in \operatorname{reg}\mathcal{F}$;

2) ядро пуассоновой структуры $[\cdot,\cdot]_P$, ограниченное на $\operatorname{span}(d_x f,\ f\in\mathcal{F})$, имеет постоянную размерность $\operatorname{dind}\mathcal{F}$ на множестве $\operatorname{reg}\mathcal{F}$.

Числа $\operatorname{ddim}\mathcal{F}$ и $\operatorname{dind}\mathcal{F}$ называются соответственно дифференциальной размерностью и дифференциальным индексом алгебры $\mathcal{F}$. Алгебра $\mathcal{F}$ называется полной, если

$$\operatorname{ddim}\mathcal{F} + \operatorname{dind}\mathcal{F} = \dim M.$$

Замечание 4.1. Для алгебры $\mathcal{F}$ из определения 4.3 обозначим через $W_{\mathcal{F}}(x)$ линейное подпространство пространства T_xM, состоящее из элементов $X_f|_x$, $f \in \mathcal{F}$. Очевидно, что

$$\operatorname{ddim}\mathcal{F} = \dim W_{\mathcal{F}}(x),\ \operatorname{dind}\mathcal{F} = \dim\left(W_{\mathcal{F}}(x) \cap W_{\mathcal{F}}(x)^\omega\right),\ x \in \operatorname{reg}\mathcal{F},$$

где $W_{\mathcal{F}}(x)^\omega$ — подпространство в T_xM, косоортогональное к $W_{\mathcal{F}}(x)$ относительно симплектической формы ω. Поскольку

$$\operatorname{dind}\mathcal{F} \leqslant \dim W_{\mathcal{F}}(x)^\omega = \dim M - \dim W_{\mathcal{F}}(x),$$

то

$$\operatorname{ddim}\mathcal{F} + \operatorname{dind}\mathcal{F} \leqslant \dim M$$

и алгебра $\mathcal{F}$ полна тогда и только тогда, когда $W_{\mathcal{F}}(x)^\omega \subset W_{\mathcal{F}}(x)$, $x \in \operatorname{reg}\mathcal{F}$, другими словами, тогда и только тогда, когда пространства $W_{\mathcal{F}}(x)$, $x \in \operatorname{reg}\mathcal{F}$ коизотропны.

Существование полной алгебры интегралов связано с некоммутативной интегрируемостью. Действительно, пусть $h \in C^\infty(M)$ и $[h,\mathcal{F}]_P = 0$ для полной алгебры $\mathcal{F} \subset C^\infty(M)$. Пусть $x_0 \in \operatorname{reg}\mathcal{F}$. Существует окрестность U точки x_0 и функции $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{F}$, $k = \operatorname{ddim}\mathcal{F}$ такие, что $\operatorname{span}(df_i,\ i = 1,\dots,k) = k$ на U. В соответствии с теоремой 4.4, существует некоторая окрестность $U' \subset U$ точки x_0 такая, что на U' справедливо равенство

$$[f_i, f_j]_P = a_{ij}(f_1,\dots,f_k) \tag{4.7}$$

для гладких функций a_{ij} на пространстве $\mathbb{R}^k$. Предположим, что гамильтонов поток ϕ_t^h, соответствующий функции h, является глобальным по крайней мере для точек из U'. Положим

$$V := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \phi_t^h(U').$$

Поскольку дифференциальная форма $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k$ и соотношения (4.7) являются инвариантными относительно потока ϕ_t^h, то функции $f_1, \ldots, f_k$ независимы и удовлетворяют условию (4.7) на области V. Поэтому ограничение гамильтоновой функции h на V удовлетворяет условиям теоремы 4.2. Это мотивирует окончательное определение полной интегрируемости в некоммутативном смысле.

Определение 4.4. Гамильтонова система вполне интегрируема в некоммутативном смысле, если она допускает полную алгебру интегралов.

В § 6.1 мы докажем некоммутативную интегрируемость одночастичного движения в центральном потенциале на двухточечно-однородных пространствах.

§ 4.2. Гамильтонова механика с симметриями

4.2.1. Пуассонова структура на алгебре $S(\mathfrak{g})$

Наличие непрерывных симметрий в гамильтоновой системе ведет к существованию некоторых интегралов движения, достаточных иногда для коммутативной или некоммутативной интегрируемости.

Очевидно, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ коммутатор $[\cdot,\cdot]$ в универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ удовлетворяет тождеству Якоби и правилу Лейбница. Пусть $U_1(\mathfrak{g}) \subset U_2(\mathfrak{g}) \subset \ldots \subset U(\mathfrak{g})$ — стандартная фильтрация алгебры $U(\mathfrak{g})$, как в п. 2.1.2. Пусть также $u \in U_k(\mathfrak{g}), v \in U_l(\mathfrak{g})$. Для элементов $u + U_{k-1}(\mathfrak{g}), v + U_{l-1}(\mathfrak{g}) \in \operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ положим

$$[u + U_{k-1}(\mathfrak{g}), v + U_{l-1}(\mathfrak{g})]_P := [u, v] + U_{k+l-2}(\mathfrak{g}).$$

Это определение корректно, так как

$$[u, U_{l-1}(\mathfrak{g})] \subset U_{k+l-2}(\mathfrak{g}),\ [U_{k-1}(\mathfrak{g}), v] \subset U_{k+l-2}(\mathfrak{g}).$$

Таким образом, мы получаем скобку Пуассона $[\cdot,\cdot]_P$ на алгебре $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$. В силу теоремы 2.1 алгебры $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ и $S(\mathfrak{g})$ изоморфны, и мы получаем

скобку Пуассона также и на алгебре $S(\mathfrak{g})$. Очевидно, что на подпространстве $S_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ эта скобка совпадает с операцией Ли $[\cdot,\cdot]$ и может быть однозначно продолжена на $S(\mathfrak{g})$ в соответствии с линейностью и правилом Лейбница. Заметим, что для элементов $u \in S_k(\mathfrak{g}), v \in S_l(\mathfrak{g})$ имеет место включение $[u,v]_P \in S_{k+l-1}(\mathfrak{g})$.

Для того чтобы различать коммутативную алгебру $S(\mathfrak{g})$ и ту же алгебру, снабженную пуассоновой структурой, построенной выше, обозначим ее в последнем случае через $S_p(\mathfrak{g})$.

Алгебра $S(\mathfrak{g})$ естественно отождествляется с алгеброй $\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ полиномиальных функций на пространстве $\mathfrak{g}^*$, которая поэтому также становится пуассоновой. Пуассонова структура продолжается с $\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ на алгебру $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ по формуле

$$[f,h]_P = \sum_{l,k=1}^{\dim \mathfrak{g}} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial h}{\partial x_l}[x_k,x_l]_P = \sum_{l,k,i=1}^{\dim \mathfrak{g}} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial h}{\partial x_l} c_{kl}^i x_i, \tag{4.8}$$

где $f,h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$; x_k — координаты на пространстве $\mathfrak{g}^*$, соответствующие базису e_k в алгебре $\mathfrak{g}$ и $[e_k,e_l] = c_{kl}^i e_i$.

Фактически пуассонова алгебра $S_p(\mathfrak{g})$ является классическим аналогом для алгебры $U(\mathfrak{g})$, а скобка $[\cdot,\cdot]_P$ наследует свойства старших членов скобки $[\cdot,\cdot]$ в $U(\mathfrak{g})$. Те же аргументы, что и в доказательстве предложения 2.2, дают:

Предложение 4.2. Предположим, что G — связная группа Ли. Центр $\mathrm{Z}S_p(\mathfrak{g})$ пуассоновой алгебры $S_p(\mathfrak{g})$ (относительно скобки Пуассона) состоит из Ad_G-инвариантных элементов. Очевидно, что центр $\mathrm{Z}\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ пуассоновой алгебры $\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ состоит из Ad_G^*-инвариантов.

Определим *коприсоединенное действие* группы G на пространстве $\mathfrak{g}^*$ формулой

$$\left(\mathrm{Ad}_g^* f\right)(x) = f\left(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} x\right),\ g \in G, x \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^*. \tag{4.9}$$

Заметим, что, для того чтобы получить левое действие Ad_G^*, мы обозначили через Ad_g^* оператор, сопряженный к оператору $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$. Обозначим через Y_c векторное поле на пространстве $\mathfrak{g}^*$, соответствующее элементу $Y \in \mathfrak{g}$ относительно действия Ad_G^*:

$$\begin{aligned} &Y_c|_f = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp(tY)} f\right)\Big|_{t=0},\ f \in \mathfrak{g}^*, \\ &\text{т. е.}\quad Y_c|_f(X) = -f([Y,X]),\ X \in \mathfrak{g}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Очевидно, что значения векторных полей $Y_c|_f$, $Y \in \mathfrak{g}$ образуют касательное пространство $T_f\mathcal{O}$ к орбите $\mathcal{O}$ действия Ad^*_G, проходящей через точку $f \in \mathfrak{g}^*$.[2]

С другой стороны, элемент $Y \in \mathfrak{g}$ определяет линейную функцию $Y^\#$ на $\mathfrak{g}^*$: $Y^\#(f) := f(Y)$, $f \in \mathfrak{g}^*$. По аналогии с (4.4) определим *форму Кириллова* ω^* на $\mathcal{O}$:

$$\omega^*(Y_c, Z_c) := -[Y^\#, Z^\#]_P := -[Y, Z]^\#, \ Y, Z \in \mathfrak{g}. \tag{4.11}$$

Форма ω^* корректно определена, т. к. $Y_c|_f = 0$ тогда и только тогда, когда $[Y, \mathfrak{g}] \subset \ker f$. Аналогично, если $\omega^*(Y_c, Z_c)|_f = 0$, $\forall Z \in \mathfrak{g}$, то $[Y, \mathfrak{g}] \subset \subset \ker f$ и $Y_c|_f = 0$, что доказывает невырожденность формы ω^*.

Известная формула для внешней производной дифференциальной формы (см., например, [46; 64]) с учетом (2.1) дает

$$\begin{aligned} d\omega^*(T_c, Y_c, Z_c) &= T_c\left(\omega^*(Y_c, Z_c)\right) - Y_c\left(\omega^*(T_c, Z_c)\right) + Z_c\left(\omega^*(T_c, Y_c)\right) - \\ &- \omega^*([T_c, Y_c], Z_c) + \omega^*([T_c, Z_c], Y_c) - \omega^*([Y_c, Z_c], T_c) = -T_c\left([Y, Z]^\#\right) - \\ &- Y_c\left([Z, T]^\#\right) - Z_c\left([T, Y]^\#\right) - \left([[T, Y], Z] + [[Z, T], Y] + [[Y, Z], T]\right)^\#, \\ &\forall T, Y, Z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Сумма в последних скобках равна нулю в силу тождества Якоби в алгебре $\mathfrak{g}$. Отсюда из (4.9) и (4.10) получаем

$$\begin{aligned} d\omega^*(T_c, Y_c, Z_c)|_f &= -T_c\left(f([Y, Z])\right) - Y_c\left(f([Z, T])\right) - Z_c\left(f([T, Y])\right) = \\ &= f\left([T, [Y, Z]] + [Y, [Z, T]] + [Z, [T, Y]]\right) = f(0) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, форма ω^* замкнута и определяет симплектическую структуру на орбите $\mathcal{O}$. Легко видеть, что пуассонова структура на $\mathcal{O}$, построенная в соответствии с (4.4), является ограничением пуассоновой структуры на алгебре $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, определенной в (4.8). Это означает, что Ad^*_G-орбиты в $\mathfrak{g}^*$ являются симплектическими листами пуассоновой структуры (4.8) (см., например, [6; 76]).

Поскольку центр пуассоновой алгебры $\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ состоит из Ad^*_G-инвариантов, то центр пуассоновой алгебры $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ состоит из функций, постоянных на Ad^*_G-орбитах в $\mathfrak{g}^*$.

---

[2]Ввиду предложения 1.6, Ad^*_G-орбиты не зависят от выбора связной группы Ли G, соответствующей фиксированной алгебре $\mathfrak{g}$.

4.2.2. Пуассоново действие и отображение момента

Определение 4.5. Действие группы Ли G на симплектическом многообразии M называется симплектическим, если оно сохраняет симплектическую структуру на M. Пусть

$$\widetilde{Y}\Big|_x = \frac{d}{dt}\exp(tY)x\Big|_{t=0}, \; Y \in \mathfrak{g}, x \in M$$

— векторное поле на пространстве M, соответствующее элементу $Y \in \mathfrak{g}$. Симплектическое действие связной группы Ли G называется пуассоновым, если существует гомоморфизм $\mu^*\colon \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ алгебр Ли такой, что $\mu^*(Y)$ является гамильтоновой функцией векторного поля $\widetilde{Y}$ на M для любого элемента $Y \in \mathfrak{g}$. Этот гомоморфизм называется отображением комомента, а отображение $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$, определенное равенством $\mu(x)(Y) = \mu^*(Y)(x)$, называется отображением момента.

Пример. Коприсоединенное действие Ad^*_G на любой орбите $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ является пуассоновым, поскольку отображение $\mu^*\colon \mathfrak{g} \to C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$, определенное формулой $\mu^*(Y) = Y^\#|_{\mathcal{O}}$, $Y \in \mathfrak{g}$, удовлетворяет определению 4.5 в силу (4.10) и (4.11).

Предложение 4.3 ([21; 125]). Если связная вещественная группа Ли G полупроста или по крайней мере группы когомологий $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ тривиальны, то любое симплектическое действие группы G является пуассоновым.

Поскольку пуассонова алгебра $S_p(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ свободно порождена элементами алгебры $\mathfrak{g}$, то отображение μ^* однозначно продолжается до гомоморфизма пуассоновых алгебр $\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(M)$.

В алгебре $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ существует естественная топология, порожденная полунормами вида

$$\rho_{\alpha,U}(f) = \sup_U \left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_\alpha}\right|,$$

где U — компактные подмножества линейного пространства $\mathfrak{g}^*$, α — мультииндекс, а x_i, $i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}$ — аффинные координаты на пространстве $\mathfrak{g}^*$. База окрестностей нуля из пространства $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ в этой топологии состоит из множеств

$$W_{\alpha,U,\varepsilon} := (f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*) \,|\, \rho_{\alpha,U}(f) < \varepsilon).$$

Алгебра $\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ плотна в алгебре $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ относительно данной топологии, а гомоморфизм μ^* однозначно продолжается до непрерывного

гомоморфизма $C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(M)$, для которого мы сохраняем обозначение μ^*.

Пусть M — симплектическое многообразие с пуассоновым действием связной группы Ли G.

Предложение 4.4. Для любого элемента $g \in G$ следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi_g} & M \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_g^*} & \mathfrak{g}^*, \end{array} \tag{4.12}$$

где ψ_g — действие элемента g на M. Иными словами, отображение μ эквивариантно.

Если $\widetilde{Y}h = 0$ на M для некоторого элемента $Y \in \mathfrak{g}$ и некоторой функции $h \in C^\infty(M)$, то $\mu^*(Y)$ — интеграл гамильтоновой системы с гамильтоновой функцией h.

Доказательство. Поскольку связная группа Ли порождается любой окрестностью единичного элемента [22; 63], то достаточно доказать коммутативность диаграммы (4.12) для любой однопараметрической подгруппы $q(t) = \exp(tY)$, $Y \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}$. Другими словами, достаточно доказать равенство

$$\mu(q(t)x)(Z) = \mu(x)\left(\mathrm{Ad}_{q(-t)} Z\right), \forall x \in M, \forall Z \in \mathfrak{g}.$$

Легко видеть, что последнее равенство эквивалентно равенству

$$\mu(q(t)x)\left(\mathrm{Ad}_{q(t)} Z\right) = \mu(x)(Z), \forall x \in M, \forall Z \in \mathfrak{g}. \tag{4.13}$$

Из определений отображений μ, μ^* и формулы (4.4) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\mu(q(t)x)\left(\mathrm{Ad}_{q(t)} Z\right)\right) &= \left(\widetilde{Y}\left(\mu^*\left(\mathrm{Ad}_{q(t)} Z\right)\right)\right)(q(t)x) + \\ &+ \mu(q(t)x)\left(\left[Y, \mathrm{Ad}_{q(t)} Z\right]\right) = \\ &= \left[\mu^*\left(\mathrm{Ad}_{q(t)} Z\right), \mu^*(Y)\right]_P (q(t)x) + \left[\mu^*(Y), \mu^*\left(\mathrm{Ad}_{q(t)} Z\right)\right]_P (q(t)x) = 0. \end{aligned}$$

В силу равенства $\mu(q(0)x)\left(\mathrm{Ad}_{q(0)} Z\right) = \mu(x)(Z)$ получаем (4.13), что завершает доказательство коммутативности диаграммы (4.12). Второе

утверждение предложения очевидно из (4.4) и определения отображения μ^*:

$$[h, \mu^*(Y)]_P = X_{\mu^*(Y)}h = \widetilde{Y}h = 0.$$

■

Пусть G_x — стационарная подгруппа группы G, соответствующая точке $x \in M$, а G_f, $f \in \mathfrak{g}^*$ – стационарная подгруппа группы G, соответствующая действию Ad^*_G и элементу $f \in \mathfrak{g}^*$. Обозначим через $\mathfrak{g}_x$ и $\mathfrak{g}_f$ соответствующие подалгебры. В силу (4.12) справедливы включения $G_x \subset G_{\mu(x)}$ и $\mathfrak{g}_x \subset \mathfrak{g}_{\mu(x)}$.

Дифференциал отображения μ можно выразить через симплектическую структуру. Действительно, из (4.1) для $\xi \in \mathcal{X}(M)$ и $\xi' = \xi|_x$, $x \in M$, получаем:

$$d_x\mu(\xi')(Y) = \xi\left(\mu^*(Y)\right)|_x = \omega(\xi, X_{\mu^*(Y)})\big|_x = \omega(\xi', \widetilde{Y})\Big|_x, \; Y \in \mathfrak{g}, \quad (4.14)$$

где d_x — дифференциал в точке x. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{g}}(x)$ линейное подпространство в пространстве T_xM, состоящее из значений векторных полей вида $\widetilde{Y}$ в точке x для всех элементов $Y \in \mathfrak{g}$. Из формулы (4.14) получаем

$$\ker d_x\mu = \widetilde{\mathfrak{g}}(x)^\omega, \quad (4.15)$$

где $\widetilde{\mathfrak{g}}(x)^\omega$ — косоортогональное дополнение подпространства $\widetilde{\mathfrak{g}}(x) \subset T_xM$ относительно формы ω. Поскольку форма ω не вырождена, то

$$\dim\ker d_x\mu = \dim M - \dim\widetilde{\mathfrak{g}}(x).$$

Из (4.14) следует, что $\operatorname{im} d_x\mu \subset \operatorname{ann}\mathfrak{g}_x \subset \mathfrak{g}^*$. В силу $\dim\operatorname{im} d_x\mu = \dim M - \dim\ker d_x\mu = \dim\widetilde{\mathfrak{g}}(x) = \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{g}_x = \dim\operatorname{ann}\mathfrak{g}_x$ получаем

$$\operatorname{im} d_x\mu = \operatorname{ann}\mathfrak{g}_x. \quad (4.16)$$

4.2.3. Некоммутативная интегрируемость и отображение момента

Отображение момента дает возможность построения полной пуассоновой алгебры.

Пусть $\mathcal{F}_1 := \mu^*\left(C^\infty(\mathfrak{g}^*)\right)$, а $\mathcal{F}_2$ — подалгебра пуассоновой алгебры $C^\infty(M)$, состоящая из G-инвариантных функций. В соответствии с определением 4.5 в каждой точке $x \in M$ векторные поля вида X_f, $f \in \mathcal{F}_1$ порождают пространство $\widetilde{\mathfrak{g}}(x)$. Поэтому справедливо

равенство $X_f(\mathcal{F}_2) = 0, \forall f \in \mathcal{F}_1$ и тем самым $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]_P = 0$. Другими словами, $\omega(W_{\mathcal{F}_1}(x), W_{\mathcal{F}_2}(x)) = 0$. Аналогично, если $[f, \mathcal{F}_1]_P = 0$ для $f \in C^\infty(M)$, то функция f постоянна вдоль G-орбит в M и $f \in \mathcal{F}_2$.

Резюмируем данные рассуждения в следующем предложении:

Предложение 4.5. Имеют место формулы $\mathrm{Z}\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subset \mathrm{Z}\mathcal{F}_2$ и $W_{\mathcal{F}_1}(x) = \widetilde{\mathfrak{g}}(x) \subset W_{\mathcal{F}_2}(x)^\omega$, $W_{\mathcal{F}_2}(x) \subset W_{\mathcal{F}_1}(x)^\omega = \widetilde{\mathfrak{g}}(x)^\omega$ для любой точки $x \in M$.

С этого момента до конца текущего пункта мы будем предполагать справедливость следующего предположения о G-орбитах в M.

Предположение 4.1. Существует открытое плотное подмножество $M' \subset M$, такое что

1) оно состоит из G-орбит в M максимальной размерности;

2) $\operatorname{span}(d_x f,\ f \in \mathcal{F}_2) = \operatorname{ann}(\widetilde{\mathfrak{g}}(x)), \forall x \in M'$ или эквивалентно $W_{\mathcal{F}_2}(x) = \widetilde{\mathfrak{g}}(x)^\omega$, $\forall x \in M'$.

При этом предположении $\dim \mathfrak{g}_x = \mathrm{const}$ для всех точек $x \in M'$ и, ввиду равенства (4.16), ограничение отображения μ на M' является отображением постоянного ранга. По теореме 4.3 множество $\mu^{-1}(c) \cap M'$ является гладким многообразием для любого значения $c \in \mathfrak{g}^*$.

Очевидно, что $W_{\mathcal{F}_1}(x) = \widetilde{\mathfrak{g}}(x)$ для $x \in M'$ и, в силу предположения 4.1, имеем $W_{\mathcal{F}_2}(x) = \widetilde{\mathfrak{g}}(x)^\omega = W_{\mathcal{F}_1}(x)^\omega$. Ввиду равенства $(W_{\mathcal{F}_1}(x)^\omega)^\omega = W_{\mathcal{F}_1}(x)$, также получаем $W_{\mathcal{F}_2}(x)^\omega = W_{\mathcal{F}_1}(x)$, $x \in M'$. Итак:

$$(W_{\mathcal{F}_1}(x) + W_{\mathcal{F}_2}(x))^\omega = W_{\mathcal{F}_1}(x)^\omega \cap W_{\mathcal{F}_2}(x)^\omega = W_{\mathcal{F}_2}(x) \cap W_{\mathcal{F}_1}(x),\ x \in M', \tag{4.17}$$

и

$$W_{\mathcal{F}_1}(x)^\omega \cap W_{\mathcal{F}_1}(x) = W_{\mathcal{F}_1}(x) \cap W_{\mathcal{F}_2}(x) = W_{\mathcal{F}_2}(x)^\omega \cap W_{\mathcal{F}_2}(x),\ x \in M'. \tag{4.18}$$

С другой стороны, в силу (4.15) имеем

$$W_{\mathcal{F}_1}(x) \cap W_{\mathcal{F}_2}(x) = W_{\mathcal{F}_1}(x) \cap W_{\mathcal{F}_1}(x)^\omega = \widetilde{\mathfrak{g}}(x) \cap \widetilde{\mathfrak{g}}(x)^\omega = \widetilde{\mathfrak{g}}(x) \cap \ker d_x\mu.$$

Это означает, что элементы пространства $W_{\mathcal{F}_1}(x) \cap W_{\mathcal{F}_2}(x)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами из подалгебры $\mathfrak{g}_{\mu(x)}$ по модулю $\mathfrak{g}_x$, $x \in M'$. Таким образом,

$$\dim(W_{\mathcal{F}_1}(x) \cap W_{\mathcal{F}_2}(x)) = \dim\left(\mathfrak{g}_{\mu(x)}/\mathfrak{g}_x\right),\ x \in M'.$$

Подмножество M' из предположения 4.1 может играть роль множеств $\operatorname{reg}\mathcal{F}_1$ и $\operatorname{reg}\mathcal{F}_2$. Действительно, для любой точки $x \in M'$ справедливо равенство

$$\operatorname{ddim}\mathcal{F}_1 = \dim \operatorname{im} d_x\mu = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x, \tag{4.19}$$

в силу (4.16) — и равенство

$$\operatorname{ddim}\mathcal{F}_2 = \operatorname{codim} G\cdot x = \dim M - \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x. \tag{4.20}$$

Также ввиду (4.18) и замечания 4.1 имеем:

$$\operatorname{dind}\mathcal{F}_1 = \operatorname{dind}\mathcal{F}_2 = \dim\left(W_{\mathcal{F}_1}(x)\cap W_{\mathcal{F}_2}(x)\right) = \dim\left(\mathfrak{g}_{\mu(x)}/\mathfrak{g}_x\right),\ x\in M'. \tag{4.21}$$

Предложение 4.6. Пусть $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ — алгебра Пуассона, порожденная подалгебрами $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Ввиду $W_{\mathcal{F}} = W_{\mathcal{F}_1} + W_{\mathcal{F}_2}$ эта алгебра полна с $\operatorname{reg}\mathcal{F} = M'$, с учетом замечания 4.1 и формулы (4.17).

Полнота алгебры $\mathcal{F}$ может быть также проверена прямыми вычислениями:

$$\begin{aligned}\operatorname{ddim}\mathcal{F} + \operatorname{dind}\mathcal{F} &= \dim W_{\mathcal{F}_1}(x) + \dim W_{\mathcal{F}_2}(x) - \dim\left(W_{\mathcal{F}_1}(x)\cap W_{\mathcal{F}_2}(x)\right) + \\ &+ \dim\left(\left(W_{\mathcal{F}_1}(x)+W_{\mathcal{F}_2}(x)\right)^{\omega}\cap\left(W_{\mathcal{F}_1}(x)+W_{\mathcal{F}_2}(x)\right)\right) = \\ &= \operatorname{ddim}\mathcal{F}_1 + \operatorname{ddim}\mathcal{F}_2 - \dim\left(W_{\mathcal{F}_1}(x)\cap W_{\mathcal{F}_2}(x)\right) + \\ &+ \dim\left(W_{\mathcal{F}_1}(x)\cap W_{\mathcal{F}_2}(x)\right) = \dim M,\ x\in M',\end{aligned}$$

ввиду (4.17), (4.19) и (4.20).

Замечание 4.2. Таким образом, G-инвариантные гамильтоновы функции на M, коммутирующие с алгеброй $\mathcal{F}$, соответствуют гамильтоновым системам, интегрируемым в некоммутативном смысле. Вычисления выше дают

$$\operatorname{dind}\mathcal{F} = \dim\left(W_{\mathcal{F}_1}\cap W_{\mathcal{F}_2}\right),\ x\in M',$$

и совместное множество уровня функций из алгебры $\mathcal{F}$ в общем положении является $\operatorname{dind}\mathcal{F}$-мерным подмногообразием.

4.2.4. Метод гамильтоновой редукции

Метод гамильтоновой редукции приводит G-инвариантную гамильтонову систему на симплектическом пространстве M с пуассоновым действием группы G к гамильтоновой системе меньшей размерности. Его применение может быть осложнено наличием сингулярностей.

В данном пункте мы опишем наиболее регулярный случай, рассмотренный в полной общности впервые в [166].

Предположим, что пространство M и группа G удовлетворяют определению 4.5, μ — соответствующее отображение момента и множество уровня $M_c := \mu^{-1}(c)$ для некоторого элемента $c \in \mathfrak{g}^*$ является гладким подмногообразием. В частности, последнее предположение справедливо, если c является регулярным значением отображения момента μ, но в некоторых интересных случаях отображение момента вообще не имеет регулярных значений. Отметим, что ввиду (4.16) отображение μ не имеет регулярных значений, если стационарные подалгебры $\mathfrak{g}_x$ нетривиальны для всех $x \in M$.[3]

Группа G_c действует на многообразии M_c. Предположим, что это действие является *собственным* (т. е. для отображения $G \times M \to M \times M$, $(g, x) \to (gx, x)$ прообразы всех компактных множеств являются компактными) и свободным.[4] Тогда пространство орбит $\widetilde{M_c} := G_c \backslash M_c$ наделяется структурой гладкого многообразия, так что каноническая проекция $\pi_1 \colon M_c \to \widetilde{M_c}$ является гладким отображением [125]. Это пространство орбит называется *приведенным пространством* для симплектического пространства M и данного пуассонового действия группы G.

Многообразие $\widetilde{M_c}$ наделяется также симплектической структурой следующим образом. Пусть $\widetilde{x} \in \widetilde{M_c}$, $x \in M_c, \pi_1(x) = \widetilde{x}$ и $\xi, \zeta \in T_x M_c, \widetilde{\xi} = d\pi_1(\xi), \widetilde{\zeta} = d\pi_1(\zeta)$. Определим 2-форму $\widetilde{\omega}$ на $\widetilde{M_c}$ по формуле:

$$\widetilde{\omega}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\zeta}) = \omega(\xi, \zeta).$$

Это определение корректно. Действительно, пространство $\ker d_x \pi_1$ касается G_c-орбит, проходящих через точку x и совпадает с пространством $\widetilde{\mathfrak{g}}(x) \cap \ker d_x \mu$, которое косоортогонально пространству $T_x M_c = \ker d_x \mu = \widetilde{\mathfrak{g}}(x)^\omega$. Поэтому значение $\widetilde{\omega}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\zeta})$ не зависит от выбора элементов $\xi \in d\pi_1^{-1}(\widetilde{\xi})$ и $\zeta \in d\pi_1^{-1}(\widetilde{\zeta})$. Поскольку подгруппа G_c действует на M_c симплектоморфизмами, форма $\widetilde{\omega}$ не зависит также от выбора точки $x \in \pi_1^{-1}(\widetilde{x})$.

Форма $\widetilde{\omega}$ не вырождена. В самом деле, если $\widetilde{\omega}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\zeta}) = 0$, $\forall \widetilde{\zeta} \in T_{\widetilde{x}} \widetilde{M_c}$,

[3]Говоря неформально, чем больше группа симметрий, тем более сингулярна гамильтонова редукция.

[4]Если предположения двух последних абзацев не выполняются, то редукция называется сингулярной. Обзор различных подходов в сингулярной ситуации можно найти в [178]. Заметим, что действие компактной группы Ли всегда является собственным.

то пространство $d\pi_1^{-1}(\widetilde{\xi})$ косоортогонально к пространству $T_xM_c = \widetilde{\mathfrak{g}}(x)^\omega$ и поэтому $d\pi_1^{-1}(\widetilde{\xi}) \subset \widetilde{\mathfrak{g}}(x) \cap T_xM_c$. Это означает, что пространство $d\pi_1^{-1}(\widetilde{\xi})$ касательно G_c-орбите и $\widetilde{\xi} = 0$.

Форма $\widetilde{\omega}$ замкнута, ввиду $0 = (d\omega)|_{M_c} = d\left(\omega|_{M_c}\right) = d\left(d\pi_1^*\widetilde{\omega}\right) = d\pi_1^* d\widetilde{\omega}$ и сюръективности отображения $d\pi_1$. Таким образом, $\widetilde{M_c}$ — симплектическое пространство.

Пусть h есть G-инвариантная гамильтонова функция на пространстве M. Векторное поле X_h касается подмногообразия M_c в силу предложения 4.4, а его ограничение $X_h|_{M_c}$ является G_c-инвариантным. Поэтому его проекция $\widetilde{X}_h$ на фактор-пространство $\widetilde{M_c}$ корректно определена.

Пусть $\widetilde{h}$ — проекция функции h на пространство $\widetilde{M_c}$. Гамильтонова система на пространстве $\widetilde{M_c}$ с гамильтоновой функцией $\widetilde{h}$ называется *приведенной гамильтоновой системой.*

Предложение 4.7. Векторное поле $\widetilde{X}_h$ является гамильтоновым относительно симплектической формы $\widetilde{\omega}$ с гамильтоновой функцией $\widetilde{h}$; другими словами, $\widetilde{X}_h = X_{\widetilde{h}}$. Отображение

$$\eta_c \colon h \to \widetilde{h} \tag{4.22}$$

является гомоморфизмом пуассоновой алгебры $C^\infty(M)^G$, состоящей из G-инвариантных функций на пространстве M, в пуассонову алгебру $C^\infty(\widetilde{M_c})$.

Доказательство. Из соотношения $dh = \omega(\cdot, X_h)$ и определений величин $\widetilde{h}, \widetilde{\omega}, \widetilde{X}_h$ получаем соотношение $d\widetilde{h} = \widetilde{\omega}(\cdot, \widetilde{X}_h)$, что доказывает первое утверждение. Пусть $h_1, h_2 \in C^\infty(M)^G$, тогда

$$[\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2]_P = -\widetilde{\omega}\left(\widetilde{X}_{h_1}, \widetilde{X}_{h_2}\right) = -\omega\left(X_{h_1}, X_{h_2}\right) = [h_1, h_2]_P,$$

что доказывает второе утверждение. ■

§ 4.3. Гамильтоновы системы на кокасательных расслоениях

Здесь мы специфицируем теорию двух предшествующих параграфов для важного в приложениях типа симплектических пространств.

4.3.1. Каноническая симплектическая структура на кокасательных расслоениях

Пусть N — гладкое многообразие, а $M = T^*N$ — соответствующее кокасательное расслоение. Пусть $x = (q,p)$, $q \in N, p \in T_q^*N$, — произвольная точка пространства M, $\pi_4 : T^*N \to N$ — каноническая проекция. Определим *каноническую* 1-*форму* α формулой

$$\alpha(\xi) = p(d\pi_4(\xi)),\ \xi \in T_x(T^*N).$$

Если $q^1, \ldots, q^m$ — локальные координаты на пространстве N, а $p_1, \ldots$ $\ldots, p_m$ — соответствующие им координаты в слое T_q^*N, то

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} p_i dq^i.$$

Очевидно, что 2-форма

$$\omega := d\alpha = \sum_{i=1}^{m} dp_i \wedge dq^i$$

на пространстве M не вырождена и замкнута и тем самым определяет *каноническую симплектическую структуру на кокасательном расслоении* M. Координаты p_i, $i = 1, \ldots, m$, на линейных слоях называются *обобщенными импульсами*, соответствующими координатам q^i, $i =$ $= 1, \ldots, m$, на пространстве N. В этих координатах получаем формулу для гамильтонова векторного поля

$$X_h = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial h}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

и для скобки Пуассона

$$[f,h]_P = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q^i} \right),\ f,h \in C^\infty(M). \tag{4.23}$$

Далее, пусть G — группа Ли, действующая на пространстве N слева диффеоморфизмами $q \to \psi_g(q)$, $g \in G, q \in N$. *Поднятие* этого действия на кокасательное расслоение определяется по формуле:

$$x = (q,p) \to \left(\psi_g(q), d\psi^*_{g^{-1}}(p)\right), \tag{4.24}$$

где $d\psi^*_{g^{-1}} : T^*_q N \to T^*_{\psi_g(q)} N$ — кодифференциал отображения $\psi_{g^{-1}}$. Очевидно, что это поднятие сохраняет форму α, поэтому, в силу (4.3), имеем

$$d\left(\alpha(\widetilde{Y})\right) + (d\alpha)(\widetilde{Y}, \cdot) = \pounds_{\widetilde{Y}}\alpha = 0,\ Y \in \mathfrak{g}, \tag{4.25}$$

где векторное поле $\widetilde{Y}$ такое же, как в определении 4.5 по отношению к действию (4.24). В частности, действие (4.24) является симплектическим: $\pounds_{\widetilde{Y}}\omega = \pounds_{\widetilde{Y}}(d\alpha) = d\left(\pounds_{\widetilde{Y}}\alpha\right) = 0$.

Предложение 4.8. Действие (4.24) является пуассоновым. Соответствующее отображение момента определяется формулой

$$\mu(x)(Y) = \alpha(\widetilde{Y})\Big|_x,\ x \in M, Y \in \mathfrak{g}.$$

Доказательство. Для элемента $Y \in \mathfrak{g}$ определим функцию h_Y на пространстве M формулой $h_Y = \alpha(\widetilde{Y})$. В силу (4.25), получаем $dh_Y = \omega(\cdot, \widetilde{Y})$, что означает гамильтоновость векторного поля $\widetilde{Y}$ с гамильтоновой функцией h_Y.

Остается показать, что соответствие $Y \to \alpha(\widetilde{Y})$ является гомоморфизмом алгебр Ли. В силу предложения 4.1, функция

$$\left[\alpha(\widetilde{Y}), \alpha(\widetilde{Z})\right]_P,\ Y, Z \in \mathfrak{g}$$

является гамильтоновой для векторного поля

$$-\left[\widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right] = \widetilde{[Y, Z]}.$$

Знак здесь соответствует формуле (2.1). Поскольку функция $\alpha\left(\widetilde{[Y, Z]}\right)$ также является гамильтоновой для того же векторного поля, функция

$$\left[\alpha(\widetilde{Y}), \alpha(\widetilde{Z})\right]_P - \alpha\left(\widetilde{[Y, Z]}\right) \tag{4.26}$$

является постоянной. С другой стороны, в силу (4.23), выражение (4.26) является линейной формой импульсов. Значит, оно равно нулю, что и требуется. ■

4.3.2. Инвариантные функции на кокасательных расслоениях

Обозначим через $\mathcal{P}(T^*N) \subset C^\infty(M)$ пуассонову алгебру, состоящую из гладких вещественнозначных функций, полиномиальных на слоях кокасательного расслоения T^*N.

Предположим теперь, что пространство N является однородным относительно левого действия группы G, и обозначим через $\mathcal{P}(T^*N)^G \subset \subset \mathcal{P}(T^*N)$ подалгебру, состоящую из G-инвариантов относительно действия (4.24). Теория из § 2.1 для алгебры $\mathrm{Diff}_G(N)$ переносится *mutatis mutandis* на пуассонову алгебру $\mathcal{P}(T^*N)^G$.

Вначале рассмотрим случай $N = G$. Поскольку группа G действует свободно левыми сдвигами на себе, алгебра $\mathcal{P}(T^*G)^G$ естественно отождествляется с алгеброй $\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ полиномиальных функций на пространстве $\mathfrak{g}^*$, т. е. с симметрической алгеброй $S(\mathfrak{g})$. Кроме того, гомоморфное расширение $\imath_c$ линейного отображения

$$Y^* \to Y^\# \in \mathcal{P}(T^*G)^G,\ Y^\#(q,p) = -p(d\pi_4(\widetilde{Y}^l)),\ q \in G, p \in T_q^*G, \quad (4.27)$$

является изоморфизмом коммутативных алгебр $S(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{P}(T^*G)^G$, где $Y^* \in \in S(\mathfrak{g})$ — элемент, соответствующий элементу $Y \in \mathfrak{g}$, а $\widetilde{Y}^l$ — соответствующее левоинвариантное векторное поле на пространстве T^*G. Другими словами, векторное поле $\widetilde{Y}^l$ порождается элементом Y относительно поднятия действия группы G на себе правыми сдвигами на кокасательное расслоение T^*G:

$$(q,p) \to (qq_1, R^*_{q_1^{-1}}p),\ q, q_1 \in G, p \in T_q^*G. \quad (4.28)$$

Изоморфизм $\imath_c$ является композицией автоморфизма алгебры $S(\mathfrak{g})$, индуцированного умножением элементов из $S_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ на -1, и указанного выше отождествления алгебры $S(\mathfrak{g})$ с алгеброй $\mathcal{P}(T^*G)^G$.

Предложение 4.9 (ср. с теоремой 13.1.1 из [165]**).** Отображение $\imath_c$ является изоморфизмом пуассоновых алгебр $\mathcal{P}(T^*G)^G$ и $S_p(\mathfrak{g})$, где пуассонова структура на последней определена в начале § 4.2.

Доказательство. Рассуждая, как в доказательстве предложения 4.8, для действия группы G на пространстве T^*G правыми сдвигами, получаем, что функция $-Y^\#$ является гамильтоновой для векторного поля $\widetilde{Y}^l$. В силу предложения 4.1 функция

$$[Y^\#, Z^\#]_P,\ Y, Z \in \mathfrak{g},$$

является гамильтоновой для векторного поля

$$-[\widetilde{Y}^l, \widetilde{Z}^l] = -\widetilde{[Y,Z]}^l.$$

Другой гамильтоновой функцией для того же векторного поля является функция $[Y,Z]^\#$, и аргументы из доказательства предложения 4.8 дают

$$[Y,Z]^\# = [Y^\#, Z^\#]_P.$$

Это означает, что отображение $\imath_c$ является изоморфизмом пуассоновых алгебр $S_p(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{P}(T^*G)^G$. ■

Используя теорему 2.2, получаем следующий изоморфизм пуассоновых алгебр

$$\mathcal{P}(T^*G)^G \cong S_p(\mathfrak{g}) \cong \operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) \cong \operatorname{gr} \operatorname{LDiff}(G). \tag{4.29}$$

Пусть теперь $N \cong G/K$ — редуктивное однородное пространство, где K — стационарная подгруппа точки $x_0 \in M$. Как и в п. 2.1.3, пусть $\mathfrak{p}$ — подпространство алгебры $\mathfrak{g}$, такое что $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}$ и $\operatorname{Ad}_K \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$.

В силу тождества Лейбница множество $S(\mathfrak{g})^K$ является пуассоновой подалгеброй алгебры $S_p(\mathfrak{g})$. Обозначим его через $S_p(\mathfrak{g})^K$.

Определение 4.6. Назовем линейное подпространство $\mathcal{A}'$ пуассоновой алгебры $\mathcal{A}$ пуассоновым идеалом алгебры $\mathcal{A}$, если оно является идеалом относительно (коммутативного) умножения и $[\mathcal{A}', \mathcal{A}]_P \subset \mathcal{A}'$.

Пусть $S(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$ — идеал коммутативной алгебры $S(\mathfrak{g})$, порожденный элементами из подалгебры $\mathfrak{k}$. Очевидно (см. (2.9)), что

$$S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})\mathfrak{k} \oplus S(\mathfrak{p}). \tag{4.30}$$

Пусть $(S(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ — подалгебра в алгебре $S(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$, состоящая из Ad_K-инвариантных элементов. Она является пуассоновым идеалом в пуассоновой алгебре $S_p(\mathfrak{g})^K$, поскольку для $f \in \mathfrak{k}$ и $g \in S_p(\mathfrak{g})^K$ справедливо равенство $[f,g]_P = 0$ и, таким образом,

$$\left[(S_p(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K, g\right]_P \subset (S_p(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K.$$

Поскольку оба прямых слагаемых в (4.30) являются Ad_K-инвариантными, то справедливо разложение

$$S(\mathfrak{g})^K = (S(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K \oplus S(\mathfrak{p})^K. \tag{4.31}$$

Поэтому корректно определена пуассонова фактор-алгебра $S_p(\mathfrak{g})^K/$ $/(S_p(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$, изоморфная, как коммутативная алгебра, алгебре $S(\mathfrak{p})^K$ (ср. с теоремой 2.3).

Касательное пространство $T^*_{x_0}N$ естественно отождествляется с подпространством $\operatorname{ann}\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}^*$. Элементы из подпространства $\operatorname{ann}\mathfrak{k}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами из пространства $\mathfrak{p}^*$. Это соответствие задается ограничением элемента $\phi \in \operatorname{ann}\mathfrak{k}$ на $\mathfrak{p}$.

Ввиду транзитивности действия группы G на пространстве N, функция $f \in \mathcal{P}(T^*N)^G$ однозначно определяется своим ограничением на пространство $T^*_{x_0}N \cong \mathfrak{p}^*$, которое является Ad^*_K-инвариантным. С другой стороны, если многочлен ϕ на $\mathfrak{p}^* \cong T^*_{x_0}N$ является Ad^*_K-инвариантным, то он однозначно продолжается до некоторой функции из $\mathcal{P}(T^*N)^G$.

Таким образом, установлен изоморфизм между элементами из алгебры $\mathcal{P}(T^*N)^G$ и инвариантами действия Ad^*_K на пространстве $\mathfrak{p}^*$. Очевидно, что эти инварианты находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами множества $S(\mathfrak{p})^K$, состоящего из Ad_K-инвариантных элементов из $S(\mathfrak{p})$.

Теперь мы можем описать пуассонову структуру на алгебре $\mathcal{P}(T^*N)^G$ через пуассонову структуру на алгебре $S_p(\mathfrak{g})$.

Рассмотрим левое действие подгруппы K на группе G:

$$g \to \chi_q(g) := gq^{-1},\ g \in G, q \in K \tag{4.32}$$

и его поднятие на T^*G

$$x = (g,p) \to \left(\chi_q(g), d\chi^*_{q^{-1}}(p)\right),\ g \in G, p \in T^*_gG. \tag{4.33}$$

В силу предложения 4.8 это действие является пуассоновым. Нулевой уровень соответствующего отображения момента задается формулой

$$(T^*G)_0 = \left((g,p) \in T^*G |\, g \in G, p \in \operatorname{ann}\mathfrak{k}_g \subset T^*_gG\right),$$

где $\mathfrak{k}_g$ — образ вложения подалгебры $\mathfrak{k}$ в T_gG посредством дифференциала действия (4.32). Очевидно, что этот уровень $(T^*G)_0$ является гладким подрасслоением кокасательного расслоения T^*G. Стационарной подгруппой элемента $0 \in \mathfrak{k}^*$ является вся группа K и ее действие на $(T^*G)_0$ собственно и свободно. Приведенное фазовое пространство отождествляется с пространством $T^*(G/K)$. Легко видеть, что приведенная симплектическая структура на $T^*(G/K)$ совпадает с канонической симплектической структурой на кокасательном расслоении.

Пусть $\mathcal{P}_K(T^*G)$ — подалгебра коммутативной алгебры $\mathcal{P}(T^*G)$, состоящая из K-инвариантов действия (4.33). Более того, поскольку действие (4.33) сохраняет симплектическую структуру, подалгебра $\mathcal{P}_K(T^*G)$ является пуассоновой. Из предложения 4.7 следует, что отображение проектирования

$$\eta_c\colon \mathcal{P}_K(T^*G) \to \mathcal{P}\left(T^*(G/K)\right),$$

построенное в п. 4.2.4, является гомоморфизмом пуассоновых алгебр. Рассматривая ограничение функций из $\mathcal{P}_K(T^*G)^G$ на пространство T_e^*G, мы видим, что ограничение $\overline{\eta}_c$ гомоморфизма η_c на пуассонову подалгебру G-инвариантов является эпиморфизмом:

$$\overline{\eta}_c\colon \mathcal{P}_K(T^*G)^G \to \mathcal{P}(T^*(G/K))^G,$$

где индекс G обозначает соответствующую подалгебру G-инвариантов действия группы G левыми сдвигами на пространствах T^*G и $T^*(G/K)$. Аналогично ограничение $\overline{\imath}_c$ (см. (4.27)) отображения $\imath_c$ на алгебру $S_p(\mathfrak{g})^K$ является ее изоморфизмом на алгебру $\mathcal{P}_K(T^*G)^G$.

Это приводит к последовательности

$$S_p(\mathfrak{g})^K \xrightarrow{\overline{\imath}_c} \mathcal{P}_K(T^*G)^G \xrightarrow{\overline{\eta}_c} \mathcal{P}(T^*(G/K))^G$$

гомоморфизмов пуассоновых алгебр.

Теорема 4.5 (ср. с теоремой 2.3). *Пуассонова алгебра $\mathcal{P}(T^*(G/K))^G$ изоморфна фактор-алгебре $S_p(\mathfrak{g})^K/\left(S_p(\mathfrak{g})\mathfrak{k}\right)^K$ и также градуированной алгебре для фильтрованной алгебры $\mathrm{Diff}_G(G/K)$. Отображение*

$$\flat := \overline{\eta}_c \circ \overline{\imath}_c|_{S(\mathfrak{p})^K} : S(\mathfrak{p})^K \to \mathcal{P}(T^*(G/K))^G$$

является изоморфизмом коммутативных алгебр.

Доказательство. Поскольку отображение $\overline{\imath}_c$ — изоморфизм, а отображение $\overline{\eta}_c$ — эпиморфизм, мы получаем

$$\mathcal{P}(T^*(G/K))^G \cong S_p(\mathfrak{g})^K/\overline{\imath}_c^{-1}\left(\ker\overline{\eta}_c\right).$$

По определению отображения $\overline{\eta}_c$, множество $\ker\overline{\eta}_c$ состоит из функций, равных нулю на подпространстве $\operatorname{ann}\mathfrak{k}_e = \operatorname{ann}\mathfrak{k}$. Поэтому $\overline{\imath}_c^{-1}\left(\ker\overline{\eta}_c\right) = \left(S_p(\mathfrak{g})\mathfrak{k}\right)^K$, что доказывает первое утверждение.

Так как действие Ad_K сохраняет фильтрацию алгебры $U(\mathfrak{g})$, то изоморфизм

$$\mathrm{gr}\left(\mathrm{Diff}_G(G/K) \cong \mathcal{P}(T^*(G/K))^G\right) \tag{4.34}$$

следует из теорем 2.1 и 2.3. Последнее утверждение предложения является прямым следствием первого и разложения (4.31).

Замечание 4.3. Если образующие и соответствующие им соотношения для алгебры $\mathrm{Diff}_G(G/K)$ построены из однородных образующих и соотношений для алгебры $S(\widetilde{\mathfrak{p}})^K$, как описано в п. 2.1.4, то образующие и соотношения для пуассоновой алгебры $\mathcal{P}(T^*(G/K))^G$ можно получить следующим образом.

Заменим образующие D_k алгебры $\mathrm{Diff}_G(G/K)$ образующими p_k алгебры $\mathcal{P}(T^*(G/K))^G$ и получим соответствующие им соотношения, отбросив члены низших степеней из соотношений для D_k в алгебре $\mathrm{Diff}_G(G/K)$. А именно в коммутационных соотношениях вида $[D_i, D_j] = P(D_k)$ нужно отбросить в правой части члены степени менее чем $\deg D_i + \deg D_j - 1$ и получить соответствующее соотношение в алгебре $\mathcal{P}(T^*(G/K))^G$ вида $[p_i, p_j]_P = \widetilde{P}(p_k)$, где $\widetilde{P}(D_k)$ — сумма мономов из $P(D_k)$ с полной степенью, равной $\deg D_i + \deg D_j - 1$.

Пространство G/K называется *слабо коммутативным*, если коммутативна пуассонова алгебра $\mathcal{P}(T^*(G/K))^G$. Из предложения 4.5 мы видим, что если пространство G/K коммутативно, то оно и слабо коммутативно. Обратное утверждение доказано в работе [69].

Замечание 4.4. Из замечания 4.2 следует, что для слабо коммутативного пространства G/K любая функция из алгебры $\mathcal{P}(T^*(G/K))^G$ соответствует гамильтоновой системе, интегрируемой в некоммутативном смысле по модулю предположения 4.1. В работе [54] было показано также, что если любая функция из $\mathcal{P}(T^*(G/K))^G$ соответствует гамильтоновой системе на $T^*(G/K)$, интегрируемой в коммутативном смысле в силу интегралов, соответствующих отображению момента, то однородное пространство G/K является слабо коммутативным.

4.3.3. Натуральные механические системы и деквантование

Переход от коммутативной алгебры наблюдаемых к некоммутативной называется *квантованием*. Обычно в этой процедуре имеется тот или иной произвол. Геометрический подход к квантованию описан в работах [28; 205; 222]. В рассматриваемой симметричной ситуации наиболее естественным квантовым аналогом коммутативной алгебры $\mathcal{P}(T^*(G/K))^G \cong S(\mathfrak{p})^K$ является алгебра $\mathrm{Diff}_G(G/K)$. С точки зрения теории групп Ли отображение, обратное к отображению (2.6): $\varkappa^{-1}\colon S(\mathfrak{p})^K \to \mathrm{Diff}_G(G/K)$, представляется наиболее естественным

отображением квантования, преобразующим гамильтоновы функции в квантово-механические гамильтонианы.

Однако это отображение не является удовлетворительным с физической точки зрения, поскольку оно может дать гамильтонианы, не являющиеся (даже формально) самосопряженными и (или) имеющие неправильный спектр. В дальнейшем мы ограничимся так называемыми *натуральными механическими системами* на римановых пространствах и опишем для них обратную процедуру *деквантования*, которая позволит получать выражения классической механики из квантово-механических без громоздких вычислений.

Пусть N — гладкое многообразие с локальными координатами x^i в области $U \subset N$, а p_i — координаты на слоях в T^*U, соответствующие координатам x^i. Пусть D — дифференциальный оператор на пространстве N. Определим функцию $\operatorname{symb} D \in \mathcal{P}(T^*U)$ как результат подстановки координат p_i вместо операторов $\partial/\partial x^i$ в сумму старших членов выражения оператора D через локальные координаты. Ввиду тензорного характера замены координат в старших членах дифференциального оператора, функция $\operatorname{symb} D$ не зависит от выбора локальных координат и поэтому корректно определена на всем пространстве T^*N. Назовем функцию $\operatorname{symb} D$ *символом дифференциального оператора* D. Очевидно, что $\operatorname{symb} D$ — однородный полином на каждом слое расслоения T^*N, возможно нулевой. Если он ненулевой на каком-то слое, то его степень равна $\deg D$.

Ввиду тензорного характера замены координат в старших членах дифференциального оператора, та же функция $\operatorname{symb} D$ получится аналогичным образом из выражения оператора D в подвижном репере.

Предположим теперь, что многообразие N, не обязательно однородное, наделено римановой метрикой g, заданной в локальных координатах выражением $g_{ij}dx^i dx^j$. Оператор Лапласа–Бельтрами Δ_g, соответствующий этой метрике, задается формулой (2.16). *Натуральный одночастичный квантово-механический гамильтониан* — это оператор

$$H = -\frac{1}{2m}\,\Delta_g + V, \tag{4.35}$$

где функция V на многообразии N — потенциал. Гамильтонианом многочастичной квантово-механической системы является дифференциальный оператор

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\sum_i \frac{\Delta_i}{m_i} + \widetilde{V} \tag{4.36}$$

на римановом пространстве $\widetilde{N} = N \times \ldots \times N$, где $\triangle_i$ — оператор Лапласа–Бельтрами на i-ом сомножителе в $\widetilde{N}$, m_i — масса i-ой частицы, а функция $\widetilde{V}$ — потенциал взаимодействия.

Замечание 4.5. Оператор (4.36) можно рассматривать как оператор (4.35) относительно метрики

$$\widetilde{g} = \prod_i m_i g_i$$

на пространстве $\widetilde{N}$, где g_i — метрика на i-ом сомножителе в $\widetilde{N}$ и $m = 1$.

Натуральная гамильтонова функция, соответствующая (4.35), задается выражением

$$h = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} g^{ij} p_i p_j + V \circ \pi_4 \tag{4.37}$$

на T^*N, где $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$. Очевидно, что

$$h = \frac{1}{2m} \operatorname{symb} \triangle_g + V \circ \pi_4. \tag{4.38}$$

Переход от многочастичной квантово-механической системы к классической является аналогичным в силу замечания 4.5.

Пусть G — связная группа Ли изометрий пространства N, а $\mathcal{O} \subset \subset N$ — некоторая ее орбита. Предположим, что некоторая окрестность орбиты $\mathcal{O}$ в пространстве N изометрична прямому произведению $W \times \mathcal{O}$ для некоторого подмногоообразия $W \subset N$, трансверсального к орбите $\mathcal{O}$ (см. § 2.4), так что действие группы G на N соответствует ее действию только на втором сомножителе данного произведения. Тогда оператор $\triangle_g|_{W \times \mathcal{O}}$ можно представить в виде

$$\triangle_g|_{W \times \mathcal{O}} = \sum_k d_{k,0} \square_{k,2} + \sum_k D_{k,1} \square_{k,1} + D_2 + \sum_k \widetilde{d}_k \widetilde{\square}_k.$$

Здесь $d_{k,0}, \widetilde{d}_k$ — гладкие функции на подмногообразии W; $D_{k,1}$ — дифференциальные операторы первого порядка на W; D_2 — дифференциальный оператор второго порядка на W; $\square_{k,1}, \widetilde{\square}_k$ — G-инвариантные дифференциальные операторы первого порядка на орбите $\mathcal{O}$; $\square_{k,2}$ — G-инвариантные дифференциальные операторы второго порядка на $\mathcal{O}$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ — то же разложение, что и в пунктах п. 2.1.3 и п. 4.3.2 относительно однородного многообразия $\mathcal{O}$ и точки $x_0 = W \cap \mathcal{O}$. Определим функцию из $\mathcal{P}(T^*(W \times \mathcal{O}))$ формулой

$$\widetilde{\operatorname{symb}\triangle_g} = \sum_k d_{k,0} \cdot \flat \circ \varkappa_2(\square_{k,2}) - \sum_k \operatorname{symb}(D_{k,1}) \cdot \flat \circ \varkappa_1(\square_{k,1}) + \operatorname{symb} D_2,$$

где отображение $\flat$ определено в предложении 4.5, а $\varkappa_k$, $k = 1, 2$, — композиция отображения $\varkappa$ с проекцией алгебры

$$S(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} S_k(\mathfrak{p})$$

на ее прямое слагаемое $S_k(\mathfrak{p})$, состоящее из однородных многочленов степени k (см. п. 2.1.2).

Предложение 4.10. На пространстве $T^*(W \times \mathcal{O})$ справедливо равенство $\operatorname{symb}\triangle_g = \widetilde{\operatorname{symb}\triangle_g}$.

Доказательство. Поскольку для любых дифференциальных операторов D_1 и D_2 справедливо равенство $\operatorname{symb}(D_1 \circ D_2) = \operatorname{symb} D_1 \operatorname{symb} D_2$, то достаточно доказать, что на пространстве $T^*\mathcal{O}$ справедливы равенства $\operatorname{symb}(\square_{k,2}) = \flat \circ \varkappa_2(\square_{k,2})$ и $\operatorname{symb}(\square_{k,1}) = -\flat \circ \varkappa_1(\square_{k,1})$.

Пусть e_i — некоторый базис в пространстве $\mathfrak{p}$, а $\widetilde{e}_i$ — соответствующие векторные поля на орбите $\mathcal{O}$, образующие подвижный репер в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathcal{O}$. Пусть в этой окрестности

$$\square_{k,2} = \sum_{i,j} \widetilde{g}_k^{ij} \widetilde{e}_i \circ \widetilde{e}_j + \sum_i \widetilde{g}^i \widetilde{e}_i, \quad \square_{k,1} = \sum_i \widetilde{g}^i \widetilde{e}_i.$$

Тогда, по определению отображения $\varkappa$, имеем

$$\varkappa_2(\square_{k,2}) = \sum_{i,j} \widetilde{g}_k^{ij}\Big|_{x_0} e_i^* e_j^*, \quad \varkappa_1(\square_{k,1}) = \sum_i \widetilde{g}^i\Big|_{x_0} \widetilde{e}_i^*.$$

Из определения отображения $\flat$ в теореме 4.5 получаем

$$\flat \circ \varkappa_2(\square_{k,2})\big|_{x_0} = \sum_{i,j} \widetilde{g}^{ij} \widetilde{p}_i \widetilde{p}_j\Big|_{x_0}, \quad \flat \circ \varkappa_1(\square_{k,1})\big|_{x_0} = -\sum_i \widetilde{g}^i \widetilde{p}_i\Big|_{x_0},$$

где $\widetilde{p}_i$ — координаты в базисе $\widetilde{e}^i$, дуальном к базису $\widetilde{e}_i$. В силу определения отображения взятия символа это завершает доказательство. ■

4.3.4. Редукция кокасательного расслоения над однородным пространством

Предположим, как и выше, что $N = G/K$ есть G-однородное пространство с редуктивным разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$, $\pi_1 : G \to N$ — каноническая проекция, а $M = T^*N$ – кокасательное расслоение над пространством N. Пространство M наделяется пуассоновым действием $\widehat{\psi}_G$ группы G (см. (4.24)) и отображением момента μ: $M \to \mathfrak{g}^*$, определенным в предложении 4.8. Пусть также, как в п. 4.3.1, $\pi_4 : T^*N \to N$ – каноническая проекция. Отождествим касательное пространство $T_{x_0}N$ с пространством $\mathfrak{p}$, а пространство $T^*_{x_0}N$ с пространством $\mathfrak{p}^* \cong \operatorname{ann}\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}^*$. При таком отождествлении дифференциал действия группы G на пространстве $T_{x_0}N$ отождествляется с действием Ad_K на пространстве $\mathfrak{p}$, а дифференциал действия $d\widehat{\psi}_K$ на пространстве $T^*_{x_0}N$ с действием Ad^*_K на пространстве $\mathfrak{p}^*$. Приведенное фазовое пространство для пространства T^*N, при выполнении некоторых предположений регулярности, допускает описание в терминах орбит коприсоединенного действия группы G [88; 192].

Рассмотрим множество уровня $M_\beta := \mu^{-1}(\beta) \subset M$ для $\beta \in \operatorname{im}\mu$. Без потери общности можно предполагать, что $T^*_{x_0}N \cap M_\beta \neq \varnothing$, поскольку пространство N является G-однородным. Это означает, что $T^*_{x_0}N \cap M_\beta = (x_0, \beta)$, $\beta \in \operatorname{ann}\mathfrak{k} \cong \mathfrak{p}^*$. Стационарной подгруппой группы G, соответствующей точке (x_0, β), является стационарная подгруппа $K_0 \subset K$ элемента $\beta \in \mathfrak{p}^* \cong \operatorname{ann}\mathfrak{k}$ относительно действия $\mathrm{Ad}_K|_{\mathfrak{p}^*}$. Очевидно, что элементы $y \in M_\beta$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами вида $\pi_4(y)$. Пусть $M'_\beta = \pi_4(M_\beta)$.

Отождествим алгебру $\mathfrak{g}$ с касательным пространством T_eG, а пространство $\mathfrak{g}^*$ с пространством T^*_eG. Пусть X^r — правоинвариантное векторное поле на группе G, соответствующее элементу $X \in \mathfrak{g}$. Пусть $x = (\pi_1 g, p') \in M_\beta$, $g \in G, p' \in T^*_{\pi_1 g}N$. Рассмотрим точку $(g, p) \in T^*G$, где $p = d\pi_1^*(p')$. В соответствии с определением отображения момента, справедливо равенство $p(X^r|_g) = \beta(X)$, т.е. $p = dR^*_{g^{-1}}\beta$. Очевидно, что $X^r|_g \in \mathcal{N} := \ker d\pi_1|_{T_gG}$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathrm{Ad}_g\,\mathfrak{k}$. Ввиду $p|_{\mathcal{N}} = 0$, имеем $\beta \in \operatorname{ann}\mathrm{Ad}_g\,\mathfrak{k}$ или эквивалентно $\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\beta \in \operatorname{ann}\mathfrak{k}$.

Наоборот, если $\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\beta \in \operatorname{ann}\mathfrak{k}$, то $dR^*_{g^{-1}}\beta\Big|_{\mathcal{N}} = 0$ и существует единственный элемент $p' \in T^*_{\pi_1 g}N$, такой что $p := d\pi_1^*(p') = dR^*_{g^{-1}}\beta$ и $(\pi_1 g, p') \in M_\beta$. Обозначим

$$\mathcal{G}_\beta = \left(g \in G \mid \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\beta \in \operatorname{ann}\mathfrak{k}\right).$$

Предположение 4.2. Предположим, что $\mathcal{G}_\beta$ — непустое гладкое подмногообразие группы G.

Очевидно, что это предположение является следствием следующего предположения.

Предположение 4.3. Орбита $\mathcal{O}_\beta$ коприсоединенного действия Ad^*_G группы G в $\mathfrak{g}^*$, содержащая точку $\beta \in \operatorname{ann}\mathfrak{k}$, трансверсальна к подпространству $\operatorname{ann}\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}^*$.

Очевидно, что группа K действует на подмногообразии $\mathcal{G}_\beta$ правыми сдвигами свободно и собственно. Орбиты данного действия отождествляются с элементами пространства M'_β. Поэтому при выполнении предположения 4.2 множество M'_β является гладким многообразием, диффеоморфным пространству M_β. Обозначим через

$$\varpi\colon \mathcal{G}_\beta \to M'_\beta \cong \mathcal{G}_\beta/R_K$$

соответствующее правое главное расслоение. Фактически $\varpi = \pi_1|_{\mathcal{G}_\beta}$.

Пусть G_β — стационарная подгруппа группы G для точки $\beta \in \mathfrak{g}^*$ по отношению к действию Ad^*_G. Очевидно, что она действует левыми сдвигами на подмногообразии $\mathcal{G}_\beta$ свободно и собственно. Орбиты этого действия находятся во взаимно-однозначном соответствии с множествами уровня отображения

$$\tau\colon \mathcal{G}_\beta \to \operatorname{ann}\mathfrak{k},\ \tau(g) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\beta. \tag{4.39}$$

Пусть

$$\mathcal{O}'_\beta := \mathcal{O}_\beta \cap \operatorname{ann}\mathfrak{k}.$$

Таким образом, мы получаем левое главное расслоение

$$\tau\colon \mathcal{G}_\beta \to \mathcal{O}'_\beta \cong \mathcal{G}_\beta/L_{G_\beta},$$

причем множество $\mathcal{O}'_\beta$ при предположении 4.2 является гладким многообразием.

Правые K-сдвиги и левые G_β-сдвиги на подмногообразии $\mathcal{G}_\beta$ коммутируют и, кроме того,

$$\tau(gq) = \mathrm{Ad}^*_{q^{-1}} \circ \tau(g),\ g \in \mathcal{G}_\beta, q \in K. \tag{4.40}$$

Таким образом, группа K действует на многообразии $\mathcal{O}'_\beta$ по правилу $q \to \mathrm{Ad}^*_{q^{-1}}$, $q \in K$.

Аналогично группа G_β действует на пространстве M'_β по формуле

$$\varpi(g) \to q\varpi(g) = \varpi(qg),\ g \in \mathcal{G}_\beta, q \in G_\beta.$$

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{O}}_\beta := \mathcal{O}'_\beta / \operatorname{Ad}^*_K = M'_\beta / G_\beta$ соответствующее фактор-пространство, а через

$$\tau' \colon M'_\beta \to \widetilde{\mathcal{O}}_\beta,\ \varpi' \colon \mathcal{O}'_\beta \to \widetilde{\mathcal{O}}_\beta$$

— соответствующие канонические проекции. Это приводит к коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\beta & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{O}'_\beta \\ {\scriptstyle\varpi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varpi'} \\ M'_\beta & \xrightarrow{\tau'} & \widetilde{\mathcal{O}}_\beta. \end{array} \tag{4.41}$$

Предположение 4.4. Предположим, что действие Ad^*_K на многообразии $\mathcal{O}'_\beta$ свободно и собственно. Первое условие эквивалентно тому, что пересечение любой R_K-орбиты в пространстве $\mathcal{G}_\beta$ и любой L_{G_β}-орбиты в пространстве $\mathcal{G}_\beta$ состоит не более чем из одной точки. Оно также эквивалентно тому, что действие L_{G_β} на пространстве M'_β свободно.

При выполнении предположений 4.2 и 4.4 фактор-пространство $\widetilde{\mathcal{O}}_\beta$ является гладким многообразием и, очевидно, диффеоморфно приведенному пространству $\widetilde{M}_\beta$ из п. 4.2.4, которое наделено симплектической структурой $\widetilde{\omega}$. Эта симплектическая структура может быть также получена из канонической симплектической структуры на Ad^*_G-орбитах.

Действительно, пусть ω^* — ограничение формы Кириллова на многообразие $\mathcal{O}'_\beta$, а β' — его произвольная точка. Пусть также X^* и Y^* — векторные поля на многообразии $\mathcal{O}_\beta$, соответствующие элементам $X, Y \in \mathfrak{g}$ так же, как в (4.10), так что $X^*|_{\beta'}, Y^*|_{\beta'} \in T_{\beta'}\mathcal{O}'_\beta, \beta' \in \mathcal{O}'_\beta$. По определению формы Кириллова (4.11) это означает, что $\omega^*(X^*, Y^*)|_{\beta'} = -\beta'([X, Y])$. Поскольку вектор $X^*|_{\beta'}$ касается подмногообразия $\mathcal{O}'_\beta$, то справедливо равенство

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\operatorname{Ad}^*_{\exp(tX)} \beta'\right) \in \operatorname{ann} \mathfrak{k},$$

и, таким образом:

$$\beta'([X,Y_0]) = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp(tX)}\beta'\right)(Y_0) = 0$$

для любого элемента $Y_0 \in \mathfrak{k}$. Это значит, что следующая 2-форма $\widehat{\omega}$ корректно определена на многообразии $\widetilde{O}_\beta$ формулой:

$$\widehat{\omega}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \omega^*(d\varpi'^{-1}\widetilde{X}, d\varpi'^{-1}\widetilde{Y})$$

для $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in T_{\varpi'\beta'}\widetilde{O}_\beta$.

Теорема 4.6. *При выполнении предположений* 4.2 *и* 4.4 *приведенное пространство $\widetilde{M}_\beta$, соответствующее значению β отображения момента, диффеоморфно пространству $\widetilde{O}_\beta$. Более того, их отождествление посредством отображения τ' дает $\widehat{\omega} = -\widetilde{\omega}$.*

Доказательство. Первое утверждение предложения уже доказано. Пусть $\mathcal{G}'_\beta$ — образ вложения многообразия $\mathcal{G}_\beta$ в пространство T^*G посредством отображения

$$\jmath\colon g \to \left(g, R^*_{g^{-1}}\beta\right).$$

Пусть $\omega' = d\jmath^*(\omega|_{\mathcal{G}'_\beta})$ – 2-форма на $\mathcal{G}_\beta$, где $\omega = d\alpha$ для канонической 1-формы α на пространстве T^*G. Также пусть α_N — каноническая 1-форма на пространстве T^*N, $\omega_N = d\alpha_N$ — каноническая симплектическая структура на T^*N, а ω'_N — 2-форма на многообразии M'_β, индуцированная формой ω_N и изоморфизмом $\kappa := \pi_4|_{M_\beta} : M_\beta \to M'_\beta$.

Для доказательства второго утверждения предложения достаточно показать, что

$$d\tau^*(\omega^*) = -\omega',\ d\varpi^*(\omega'_N) = \omega'.$$

Пусть g — произвольная точка пространства $\mathcal{G}_\beta$. Произвольный вектор из пространства $T_g\mathcal{G}_\beta$ можно представить в виде $X^l\big|_g$ для некоторого элемента $X \in \mathfrak{g}$, где X^l — левоинвариантное векторное поле на группе G. Отображение $d\tau$ переводит векторное поле $X^l\big|_{\mathcal{G}_\beta}$ в векторное поле $-X_c$ на пространстве $\mathcal{O}'_\beta$, см. (4.10). Пусть $Y^l\big|_g$ — другой вектор из пространства $T_g\mathcal{G}_\beta$ для некоторого $Y \in \mathfrak{g}$. Пусть $\widetilde{X}^l$ и $\widetilde{Y}^l$ — векторные поля на пространстве T^*G, индуцированные элементами X и Y по отношению к действию группы G (4.28) на T^*G.

Ясно, что $\widetilde{X}^l\Big|_{\jmath(g)} = d\jmath(X^l\big|_g) \in T_{\jmath(g)}\mathcal{G}'_\beta$, $\widetilde{Y}^l\Big|_{\jmath(g)} = d\jmath(Y^l\big|_g) \in T_{\jmath(g)}\mathcal{G}'_\beta$ и, в силу (4.11) и (4.39), получаем

$$\omega^*\left(d\tau(X^l\big|_g), d\tau(Y^l\big|_g)\right) = \omega^*(X,Y)|_{\tau(g)} = -\left(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\beta\right)([X,Y]). \quad (4.42)$$

С другой стороны, по определению формы ω имеем

$$\omega\left(\widetilde{X}^l, \widetilde{Y}^l\right) = d\alpha\left(\widetilde{X}^l, \widetilde{Y}^l\right) = \widetilde{X}^l\left(\alpha\left(\widetilde{Y}^l\right)\right) - \widetilde{Y}^l\left(\alpha\left(\widetilde{X}^l\right)\right) - \alpha\left(\left[\widetilde{X}^l, \widetilde{Y}^l\right]\right).$$

Поскольку векторные поля $\widetilde{X}^l$ и $\widetilde{Y}^l$ генерируют потоки, сохраняющие форму α, то получаем

$$\widetilde{X}^l\left(\alpha\left(\widetilde{Y}^l\right)\right) = \alpha\left(\pounds_{\widetilde{X}^l}\widetilde{Y}^l\right) = \alpha\left(\left[\widetilde{X}^l, \widetilde{Y}^l\right]\right) = \alpha\left(\widetilde{[X,Y]}^l\right),$$

в силу (2.3), и аналогично

$$\widetilde{Y}^l\left(\alpha\left(\widetilde{X}^l\right)\right) = \alpha\left(\widetilde{[Y,X]}^l\right).$$

Таким образом, по определению форм ω' и α справедливы равенства

$$\omega'\left(X^l\big|_g, Y^l\big|_g\right) = \omega\left(\widetilde{X}^l, \widetilde{Y}^l\right)\Big|_{(g, R^*_{g^{-1}}\beta)} = \alpha\left(\widetilde{[X,Y]}^l\right)\Big|_{(g, R^*_{g^{-1}}\beta)} = \quad (4.43)$$

$$= \left(R^*_{g^{-1}}\beta\right)(L_g([X,Y])) = \left(dL^*_g \circ dR^*_{g^{-1}}\beta\right)([X,Y]) = \left(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\beta\right)([X,Y]).$$

Поэтому из (4.42) получаем

$$\omega'\left(X^l\big|_g, Y^l\big|_g\right) = -\omega^*\left(d\tau(X^l\big|_g), d\tau(Y^l\big|_g)\right)$$

или, эквивалентно, $d\tau^*(\omega^*) = -\omega'$.

В то же время любой вектор из пространства $T_g\mathcal{G}_\beta$ имеет вид $X^r|_g$ для некоторого элемента $X \in \mathfrak{g}$, где X^r — правоинвариантное векторное поле на группе G. Пусть $Y^r|_g$ — другой такой вектор. Очевидно, что $X^r|_g = \left(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X\right)^l\Big|_g$, $Y^r|_g = \left(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}Y\right)^l\Big|_g$ и из (4.43) вытекает равенство

$$\begin{aligned}\omega'\left(X^r|_g, Y^r|_g\right) &= \left(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\beta\right)\left(\left[\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}Y\right]\right) = \\ &= \beta\left(\mathrm{Ad}_g \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}}[X,Y]\right) = \beta([X,Y]).\end{aligned} \quad (4.44)$$

Пусть $X_N = d\pi_1(X^r), Y_N = d\pi_1(Y^r) \in \mathcal{X}(N)$ и

$$\widetilde{X}_N = (d\kappa)^{-1}\left(X_N|_{M'_\beta}\right) \in \mathcal{X}(M_\beta),\ \widetilde{Y}_N = (d\kappa)^{-1}\left(Y_N|_{M'_\beta}\right) \in \mathcal{X}(M_\beta),$$

где $\mathcal{X}(M)|_{M_\beta}$ обозначает ограничение модуля $\mathcal{X}(M)$ на пространство $M_\beta \subset M$. Заметим, что векторные поля X_N, Y_N соответствуют левому действию группы G на пространстве N (см. п. 2.1.1) и векторное поле Z_N можно определить для произвольного элемента $Z \in \mathfrak{g}$. Аналогично (2.2) получаем

$$[X_N, Y_N] = -[X, Y]_N. \tag{4.45}$$

Пусть $\mathbf{x} := (\varpi(g), p') := \kappa^{-1} \circ \varpi(g)$, $p' \in T^*_{\varpi(g)}N$. Из $X^r|_g, Y^r|_g \in$ $\in T_g\mathcal{G}_\beta$ получаем $X_N|_g, Y_N|_g \in T_{\varpi(g)}M'_\beta$, откуда

$$\widetilde{X}_N\Big|_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}(M_\beta),\ \widetilde{Y}_N\Big|_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}(M_\beta). \tag{4.46}$$

Для других точек $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ пространства M_β возможно, что $\widetilde{X}_N\Big|_y, \widetilde{Y}_N\Big|_y \notin$ $\notin T_{\mathbf{y}}(T^*N)$. Во всяком случае по определению формы ω'_N получаем

$$\begin{aligned}\omega'_N(X_N, Y_N)|_{\varpi(g)} = \omega_N\left(\widetilde{X}_N, \widetilde{Y}_N\right)\Big|_{\mathbf{x}} = \widetilde{X}_N\left(\alpha_N\left(\widetilde{Y}_N\right)\right)\Big|_{\mathbf{x}} - \\ - \widetilde{Y}_N\left(\alpha_N\left(\widetilde{X}_N\right)\right)\Big|_{\mathbf{x}} - \alpha_N\left(\left[\widetilde{X}_N, \widetilde{Y}_N\right]\right)\Big|_{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

Поскольку функции

$$\alpha_N\left(\widetilde{Y}_N\right)\Big|_{M_\beta} = p'(Y_N)|_{M'_\beta} = \beta(Y),\ \alpha_N\left(\widetilde{X}_N\right)\Big|_{M_\beta} = \beta(X)$$

постоянны на пространстве M_β, то, учитывая (4.46), получаем

$$\widetilde{X}_N\left(\alpha_N\left(\widetilde{Y}_N\right)\right)\Big|_{\mathbf{x}} = \widetilde{Y}_N\left(\alpha_N\left(\widetilde{X}_N\right)\right)\Big|_{\mathbf{x}} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\omega'_N(X_N, Y_N)|_{\varpi(g)} &= -p'\left(d\kappa\left(\left[\widetilde{X}_N, \widetilde{Y}_N\right]\right)\right)\Big|_{\varpi(g)} = \\ &= -p'\left(\left[d\kappa\left(\widetilde{X}_N\right), d\kappa\left(\widetilde{Y}_N\right)\right]\Big|_{\varpi(g)}\right) = \\ &= -p'\left([X_N, Y_N]|_{\varpi(g)}\right) = p'\left([X, Y]_N|_{\varpi(g)}\right) = \beta([X, Y])\end{aligned}$$

в силу (4.45).

Сравнивая последнюю формулу с (4.44), получаем $\omega' = d\varpi^*(\omega'_N)$, что завершает доказательство. ■

В силу симплектичности формы $\widetilde{\omega}$ справедливо:

Следствие 4.1. *Форма $\widetilde{\omega}$ на пространстве $\widetilde{\mathcal{O}}_\beta$ является симплектической, т. е. она не вырождена и замкнута.*

Замечание 4.6. Данная теорема обобщает тот хорошо известный факт, что для пространства T^*G приведенное пространство симплектоморфно орбите коприсоединенного действия Ad^*_G [6; 166]. В этом случае $K = \{e\}$, $\mathcal{G}_\beta = G \cong M'_\beta$, $\widetilde{\mathcal{O}}_\beta = \mathcal{O}'_\beta = \mathcal{O}_\beta$ и предположения 4.2, 4.4 тривиальным образом выполняются.

В § 7.5 мы воспользуемся симплектоморфизмом из теоремы 4.6 для редукции пространства T^*N, где N — гладкое многообразие, на котором (не транзитивно) действует группа Ли G. Ниже приводятся некоторые исторические сведения.

Гамильтонова редукция кокасательного расслоения T^*N в предположении, что группа G свободно действует на пространстве N, изучалась в работах [150; 163; 164] (см. также ссылки в этих работах). Последнее предположение является слишком ограничительным для задачи двух тел на двухточечно-однородных пространствах размерности больше чем два. Подход работы [150] к редукции кокасательных расслоений был обобщен на несвободные действия группы G в препринте [173]. Этот препринт дает описание приведенного пространства, соответствующего значению $\beta \in \mathrm{Im}\,\mu \subset \mathfrak{g}^*$, как подрасслоения P_β касательного расслоения $T^*(N_\beta/G_\beta)$, где N_β — образ канонической проекции

$$T^*N \supset \mu^{-1}(\beta) \to N,$$

а G_β — стационарная подгруппа группы G относительно действия Ad^*_G. Симплектическая структура на пространстве P_β индуцируется 2-формой $T^*(N_\beta/G_\beta)$, которая отличается от канонической симплектической структуры на пространстве $T^*(N_\beta/G_\beta)$ дополнительным «магнитным» членом.

Подход теоремы 4.6 и его обобщение для нетранзитивных действий группы G на пространстве N представляются более прямыми, поскольку они дают описание приведенного фазового пространства только в терминах орбит коприсоединенного действия, канонической симплектической структуры на них и фактор-пространства N/G.

Глава 5

Двухточечный гамильтониан на двухточечно-однородных пространствах

Главной характеристикой системы двух классических частиц на римановом пространстве M является расстояние между ними. Если пространство M однородно и изотропно, то это расстояние является единственным геометрическим инвариантом положения частиц на M. Это мотивирует разделение степеней свободы на два типа. К первому типу относится единственная радиальная степень свободы. Второй тип содержит остальные степени свободы, соответствующие группе изометрий. Это разделение должно проявиться в двухчастичном квантовомеханическом гамильтониане при разложении соответствующего гильбертова пространства и в классической функции Гамильтона.

В этой главе мы получим выражение для двухчастичного гамильтониана через радиальный дифференциальный оператор и образующие алгебры $\mathrm{Diff}_I(Q_{\mathbf{S}})$ из главы 3.

Соответствующее выражение для двухчастичной классической функции Гамильтона может быть получено сходным образом, однако его проще получить из уже вычисленного квантового аналога, используя предложение 4.10, что будет сделано в главе 7.

Параграфы 5.1–5.3 основаны на работе [195], но содержат исправления некоторых опечаток.

§ 5.1. Однородные подмногообразия в конфигурационном пространстве задачи двух тел

Пусть $\widetilde{M} = Q$ — произвольное двухточечно-однородное риманово пространство, $\dim_{\mathbb{R}} Q = n$ и $M := Q \times Q$. Обозначим через $\widetilde{\pi}_i$, $i = 1, 2$, проекцию произведения $M = Q \times Q$ на i-ый сомножитель, через

G — компоненту единицы группы изометрий Q, а через $\rho(x_1, x_2)$ — расстояние между точками $x_1, x_2 \in Q$. Функция $\rho_2(x) := \rho(\widetilde{\pi}_1(x)), \widetilde{\pi}_2(x))$, $x \in M$, является расстоянием между частицами.

Наконец, пусть $H = H_0 + V$ — двухчастичный гамильтониан (2.40). Свободный гамильтониан H_0 системы двух частиц на пространстве M является оператором Лапласа–Бельтрами для метрики

$$g_2 := m_1 \widetilde{\pi}_1^* g + m_2 \widetilde{\pi}_2^* g \tag{5.1}$$

на этом пространстве, умноженным на $-1/2$, где $\widetilde{\pi}_i^* g$ — прообраз метрики g относительно проекции $\widetilde{\pi}_i$. Для получения явно инвариантного выражения оператора H_0 рассмотрим слоение пространства M подмногообразиями F_p, являющимися множествами уровня функции ρ_2. Слой $F_p \subset M$ является G-однородным римановым пространством относительно ограничения на него метрики g_2; поэтому для описания инвариантных дифференциальных операторов на нем можно использовать конструкцию из § 2.1. Для «склеивания» этих конструкций при различных значениях p мы поступим следующим образом.

Пусть Q — произвольное компактное двухточечно-однородное пространство. Пусть $\widetilde{\gamma}(s)\colon \mathbf{S}^1 \equiv \mathbb{R} \bmod (2\operatorname{diam} Q) \to Q$ — некоторая (очевидно, замкнутая) геодезическая на пространстве Q, где s — натуральный параметр. Пусть также $s_1, s_2\colon [0, \operatorname{diam} Q) \to \mathbf{S}^1 \equiv \mathbb{R} \bmod (2\operatorname{diam} Q)$ — гладкие функции, такие что s_1 убывающая, s_2 — возрастающая, $s_1(0) = s_2(0) = 0$ и $\rho(\widetilde{\gamma}(s_1(p)), \widetilde{\gamma}(s_2(p))) \equiv p$, $p \in [0, \operatorname{diam} Q)$, $s_1'(p)^2 + s_2'(p)^2 \neq 0$. Определим кривую $\gamma\colon I := (0, \operatorname{diam} Q) \to M$ формулой $\gamma(p) = (\widetilde{\gamma}(s_1(p)), \widetilde{\gamma}(s_2(p))) \in M$. Стационарная подгруппа группы G, соответствующая произвольной точке $\gamma(p)$, $0 < p < \operatorname{diam} Q$, является стационарной подгруппой $K_0 \subset G$, соответствующей паре $\widetilde{\gamma}(s_1(p)), \widetilde{\gamma}(s_2(p))$ точек геодезической $\widetilde{\gamma}$. В силу предложения 1.1, группа K_0 не зависит от выбора p при $0 < p < \operatorname{diam} Q$, а фактор-пространство G/K_0 изоморфно, как однородное G-пространство, расслоению единичных сфер над пространством Q. Эта же конструкция пригодна и для некомпактного двухточечно-однородного пространства, если мы положим $\operatorname{diam} Q = \infty$.

Подытожим данное рассуждение в следующей лемме.

Лемма 5.1. *Отображение $p \to \gamma(p)$ из I в M является регулярной кривой γ в M, т. е. $|\gamma'(p)| \neq 0$ для всех $p \in I$. Эта кривая пересекает каждый слой F_p, $p > 0$ точно в одной точке, а множество $M' := \bigcup_{p \in I} F_p$ является связным плотным открытым подмногообрази-*

ем в M. Стационарные подгруппы группы G совпадают друг с другом для всех точек $\gamma(p)$, $p \in I$.

Таким образом, можно отождествить многообразие M' с пространством $I \times (G/K_0)$ с помощью следующей формулы:

$$I \times (G/K_0) \ni (p, bK_0) \longleftrightarrow b\gamma(p) \in M',\ b \in G.$$

Очевидно, что множество $M \backslash M'$ является дизъюнктным объединением диагонали $\operatorname{diag}(Q \times Q)$ и множества $Q_{op} := F_{\operatorname{diam} Q}$, являющегося расслоением с базой Q, и слоями, изоморфными антиподальному многообразию A_x, $x \in Q$. Для некомпактного пространства Q множество $M \backslash M'$ совпадает с $\operatorname{diag}(Q \times Q)$.

Пусть μ_2 — мера на пространстве M, порожденная метрикой g_2. Используя отождествление выше, перенесем эту меру на пространство $I \times (G/K_0)$, сохранив для нее обозначение μ_2. Поскольку разность $M \backslash M'$ имеет нулевую меру, то имеется следующий изоморфизм пространств измеримых функций:

$$\mathcal{L}^2(M, \mu_2) \cong \mathcal{L}^2(I \times (G/K_0), \mu_2). \tag{5.2}$$

Ниже будет удобно для упрощения формул изменить параметризацию интервала I при помощи некоторой функции $p(r)$, $p'(r) \neq 0$, $r \in I' \subset \mathbb{R}_+$. В этом случае будем писать просто $F_r := F_{p(r)}$. Поскольку группа G действует только на втором сомножителе разложения $M' = I \times (G/K_0)$, конструкцию для поднятия дифференциальных операторов из § 2.1 можно обобщить и найти для G-инвариантного дифференциального оператора на пространстве $I \times (G/K_0)$ его поднятие на пространство $I \times G$.

Пусть $\mathfrak{p}$ — подпространство пространства $\mathfrak{g}$, дополнительное к подалгебре $\mathfrak{k} \equiv \mathfrak{k}_p$ так, что $[\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}$. Пусть $e_1, \ldots e_{2n-1}$ — базис в пространстве $\mathfrak{p}$; $X_1, \ldots, X_{2n-1}$ — соответствующие ему киллинговы поля на пространстве M', а X_i^l, X_i^r — соответствующие лево- и правоинвариантные векторные поля на группе G. Определим векторное поле, касательное к кривой γ, формулой $X_0 = \frac{d}{dr}\gamma(p(r))$. Поскольку

$$dL_q X_0 = \frac{d}{dr} L_q \gamma(p(r)) = \frac{d}{dr}\gamma(p(r)) = X_0,\ \forall q \in K_0,$$

то вектор X_0 можно разнести левыми сдвигами на все пространство M' и получить гладкое векторное поле на пространстве M', для которого

мы сохраним обозначение X_0. Поля X_i, $i = 0, \ldots, 2n-1$, образуют подвижный репер в некоторой окрестности кривой $\gamma(p)$, $p \in (0, \operatorname{diam} Q)$, если матрица $\mathcal{B}$, состоящая из попарных скалярных произведений полей X_i, является не вырожденной на этой кривой. Справедливость следующего условия мы проверим ниже в § 5.2.

Условие 5.1. Матрица $\mathcal{B}$ не вырождена на кривой $\gamma(p)$, $p \in (0, \operatorname{diam} Q)$.

Выразим оператор $\triangle_{g_2}$ через подвижный базис X_i, $i = 0, \ldots, 2n-1$, по формуле (2.18), положив $\xi_i = X_i$, $i = 0, \ldots, 2n-1$, и преобразуем результат к виду $a^{ij} X_i \circ X_j + b^i X_i$. Поскольку поле X_0, в отличие от других полей X_i, не является киллинговым, то вычисления, аналогичные (2.20), дают следующий дополнительный член:

$$-\left(\pounds_{X_0} g_2\right)(X_i, X_j)\widehat{g}_2^{0i} + \frac{1}{2}\widehat{g}_2^{ki}\left(\pounds_{X_0} g_2\right)(X_k, X_i)\delta_j^0,$$

где $\widehat{g}_{2,ij} := g_2(X_i, X_j)$, $0 \leqslant i, j \leqslant 2n-1$, — компоненты метрики g_2 в подвижном репере X_i. Учитывая уравнения $[X_0, X_i] = 0$, $\forall i = 0, \ldots, 2n-1$, получаем

$$\left(\pounds_{X_0} g_2\right)(X_i, X_j) = X_0 g_2(X_i, X_j) = X_0\left(\widehat{g}_{2,ij}\right).$$

Таким образом, используя формулу (2.17), получаем следующее дополнительное слагаемое в формуле для оператора Лапласа–Бельтрами:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} X_0\left(\widehat{g}_{2,kj}\right)\widehat{g}_2^{kj}\widehat{g}_2^{0i} X_i - X_0\left(\widehat{g}_{2,kj}\right)\widehat{g}_2^{0k}\widehat{g}_2^{ji} X_i = \\
&= \frac{1}{2\widehat{\gamma}} X_0(\widehat{\gamma})\widehat{g}_2^{0i} X_i + X_0(\widehat{g}^{0i}) X_i = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\widehat{\gamma}}} X_0\left(\sqrt{\widehat{\gamma}}\widehat{g}_2^{0i}\right) X_i,
\end{aligned}$$

где $\widehat{\gamma} = \det \widehat{g}_{2,ij}$. Окончательно имеем:

$$\triangle_{g_2} = \widehat{g}_2^{ij} X_i \circ X_j + c_{jq}^q \widehat{g}_2^{ji} X_i + \frac{1}{\sqrt{\widehat{\gamma}}} X_0\left(\sqrt{\widehat{\gamma}}\widehat{g}_2^{0i}\right) X_i.$$

Векторное поле X_0 на пространстве $I' \times (G/K_0)$ имеет вид $\partial/\partial r$, и его поднятие на пространство $I' \times G$ тавтологично. Согласно замечанию 2.4

и лемме 2.5 выражение для поднятия оператора $\triangle_{g_2}$ имеет вид:

$$\widetilde{\triangle}_{g_2} = \widehat{g}_2^{ij}\Big|_{x_0} X_i^l \circ X_j^l + \left(c_{jq}^q \widehat{g}_2^{ji}\right)\Big|_{x_0} X_i^l + \left[\frac{1}{\sqrt{\widehat{\gamma}}} X_0^l \left(\sqrt{\widehat{\gamma}}\widehat{g}_2^{0i}\right)\right]\Bigg|_{x_0} X_i^l, \quad (5.3)$$

где $X_0^l := \partial/\partial r$.

G-инвариантная мера μ_2 на пространстве $I' \times (G/K_0)$ принимает вид $\nu \otimes \mu$, где $\nu = \phi(r)dr$ — мера на интервале I', а μ есть G-инвариантная мера на пространстве G/K_0. Мера на пространстве $I' \times G$, соответствующая мере μ_2, имеет вид $\widetilde{\mu}_2 = \nu \otimes \mu_G$ для соответствующим образом нормированной левоинвариантной меры μ_G на группе G.

Аналогично § 2.1 можно определить биекцию ζ между множеством функций на пространстве $I' \times (G/K_0)$ и множеством функций на пространстве $I' \times G$, инвариантных относительно правых K_0-сдвигов. Обозначим через $\mathcal{L}^2\left(I' \times G, K_0, \widetilde{\mu}_2\right)$ гильбертово пространство квадратично интегрируемых по мере $\widetilde{\mu}_2$ функций на пространстве $I' \times G$, инвариантных относительно правых сдвигов на элементы подгруппы K_0. Это приводит к следующей изометрии гильбертовых пространств:

$$\zeta : \mathcal{L}^2\left(M, \mu_2\right) \to \mathcal{L}^2\left(I' \times G, K_0, \widetilde{\mu}_2\right),$$

а также к равенству $\widetilde{\triangle}_{g_2} \circ \zeta = \zeta \circ \triangle_{g_2}$.

§ 5.2. Двухточечный гамильтониан на компактном двухточечно-однородном пространстве

В этом параграфе мы получим конкретное выражение двухточечного гамильтониана вида (5.3) на произвольном компактном двухточечно-однородном пространстве. Пусть

$$L, X_{\lambda,i}, Y_{\lambda,i}, X_{2\lambda,j}, Y_{2\lambda,j}, \ i = 1, \ldots, q_1, j = 1, \ldots, q_2, \quad (5.4)$$

— киллинговы векторные поля на пространстве Q, соответствующие элементам алгебры $\mathfrak{g}$ из предложения 1.4:

$$\Lambda, e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}, e_{2\lambda,j}, f_{2\lambda,j}, \ i = 1, \ldots, q_1, j = 1, \ldots, q_2, \quad (5.5)$$

относительно левого действия группы G на пространстве Q. В силу (2.1) это соответствие меняет знаки коммутаторов. Например, $[L, X_{\lambda,i}] =$

$= \frac{1}{2}Y_{\lambda,i}$, $[L, Y_{\lambda,i}] = -\frac{1}{2}X_{\lambda,i}$ и т.д. Определим кривую $\widehat{\gamma}$ на пространстве Q формулой $\widehat{\gamma}(s) = \exp\left(\frac{s}{R}\Lambda\right)x_0$. Эта кривая совпадает с геодезической $\widetilde{\gamma}$ из предыдущего параграфа в силу следующего предложения.

Предложение 5.1.

1) Среди всех возможных попарных скалярных произведений полей (5.4) на кривой $\widehat{\gamma}$ ненулевыми являются только следующие:

$$g(L, L)|_{\widehat{\gamma}} = R^2, \tag{5.6}$$

$$g(X_{\lambda,i}, X_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}} = \frac{R^2}{2}\left(1 + \cos\frac{s}{R}\right), \ i = 1, \ldots, q_1, \tag{5.7}$$

$$g(X_{\lambda,i}, Y_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}} = -\frac{R^2}{2}\sin\frac{s}{R}, \ i = 1, \ldots, q_1, \tag{5.8}$$

$$g(Y_{\lambda,i}, Y_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}} = \frac{R^2}{2}\left(1 - \cos\frac{s}{R}\right), \ i = 1, \ldots, q_1, \tag{5.9}$$

$$g(X_{2\lambda,i}, X_{2\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}} = \frac{R^2}{2}\left(1 + \cos\frac{2s}{R}\right), \ i = 1, \ldots, q_2, \tag{5.10}$$

$$g(X_{2\lambda,i}, Y_{2\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}} = -\frac{R^2}{2}\sin\frac{2s}{R}, \ i = 1, \ldots, q_2, \tag{5.11}$$

$$g(Y_{2\lambda,i}, Y_{2\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}} = \frac{R^2}{2}\left(1 - \cos\frac{2s}{R}\right), \ i = 1, \ldots, q_2; \tag{5.12}$$

2) $\widehat{\gamma}(s) = \widetilde{\gamma}(s)$, $s \in [0, \operatorname{diam} Q)$.

Доказательство. По построению, L/R — касательное векторное поле к кривой $\widehat{\gamma}(s)$. В силу

$$\frac{d}{ds}g(L, L)\Big|_{\widehat{\gamma}(s)} = \frac{2}{R}g([L, L], L) = 0,$$

получаем

$$g(\frac{1}{R}L, \frac{1}{R}L)\Big|_{\widehat{\gamma}(s)} \equiv g(\frac{1}{R}L, \frac{1}{R}L)\Big|_{\widehat{\gamma}(0)} = \langle\frac{1}{R}\Lambda, \frac{1}{R}\Lambda\rangle = 1,$$

что эквивалентно (5.6). Поэтому параметр s является натуральным для кривой $\widehat{\gamma}$. Используя равенство

$$\frac{d}{ds}g(X,Y)\Big|_{\widehat{\gamma}(s)} = \frac{L}{R}\left(g(X,Y)\right)\Big|_{\widehat{\gamma}(s)} =$$
$$= \frac{1}{R}(g([L,X],Y)\Big|_{\widehat{\gamma}(s)} + \frac{1}{R}(g(X,[L,Y])\Big|_{\widehat{\gamma}(s)}$$

для произвольных гладких векторных полей X, Y на кривой $\widehat{\gamma}$, соотношения (1.6) и связь метрики $g(\cdot,\cdot)|_{T_{x_0}Q}$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на алгебре $\mathfrak{g}$, получаем систему линейных дифференциальных уравнений и начальные условия для всех возможных попарных скалярных произведений полей (5.4) на кривой $\widehat{\gamma}$. Эта система распадается на множество легко решаемых подсистем. Например,

$$\frac{d}{ds}g(X_{\lambda,i},X_{\lambda,i})\Big|_{\widehat{\gamma}(s)} = \frac{2}{R}\,g\left([L,X_{\lambda,i}],X_{\lambda,i}\right)|_{\widehat{\gamma}(s)} = \frac{1}{R}\,g(Y_{\lambda,i},X_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}(s)}\,,$$

$$\frac{d}{ds}g(Y_{\lambda,i},X_{\lambda,i})\Big|_{\widehat{\gamma}(s)} = \frac{1}{R}\,g\left([L,Y_{\lambda,i}],X_{\lambda,i}\right)|_{\widehat{\gamma}(s)} + \frac{1}{R}\,g\left(Y_{\lambda,i},[L,X_{\lambda,i}]\right)|_{\widehat{\gamma}(s)} =$$
$$= -\frac{1}{2R}\,g(X_{\lambda,i},X_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}(s)} + \frac{1}{2R}\,g(Y_{\lambda,i},Y_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}(s)}\,,$$

$$\frac{d}{ds}g(Y_{\lambda,i},Y_{\lambda,i})\Big|_{\widehat{\gamma}(s)} = \frac{2}{R}\,g\left([L,Y_{\lambda,i}],Y_{\lambda,i}\right)|_{\widehat{\gamma}(s)} = -\frac{1}{R}\,g(X_{\lambda,i},Y_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}(s)}\,.$$

Учитывая начальные условия, заданные равенствами

$$g(X_{\lambda,i},X_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}(0)} = \langle e_{\lambda,i},e_{\lambda,i}\rangle = R^2,\ g(X_{\lambda,i},Y_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}(0)} =$$
$$= g(Y_{\lambda,i},Y_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}(0)} = 0, \quad i = 1,\ldots,q_1$$

(справедливые благодаря формуле $Y_{\lambda,i}|_{\widehat{\gamma}(0)} = 0$), получаем (5.7)–(5.9). Остальные формулы первого утверждения предложения можно проверить сходным образом.

Докажем равенство $\widehat{\gamma}(s)=\widetilde{\gamma}(s)$. Достаточно доказать, что $\nabla_L L|_{\widehat{\gamma}(s)} = 0$, поскольку параметризация кривых $\widehat{\gamma}(s), \widetilde{\gamma}(s)$ натуральна. Формулы (2.21), (1.6) и первое утверждение предложения 5.1 дают

$$g(\nabla_L L,X_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}(s)} = g(L,[L,X_{\lambda,i}])|_{\widehat{\gamma}(s)} = \frac{1}{2}\,g(L,Y_{\lambda,i})|_{\widehat{\gamma}(s)} = 0,$$

$$
\begin{gathered}
i = 1, \ldots, q_1, \\
g(\nabla_L L, X_{2\lambda,j})|_{\widetilde{\gamma}(s)} = g(L, [L, X_{2\lambda,j}])|_{\widetilde{\gamma}(s)} = g(L, Y_{2\lambda,j})|_{\widetilde{\gamma}(s)} = 0, \\
j = 1, \ldots, q_2, \\
g(\nabla_L L, L)|_{\widetilde{\gamma}(s)} = g(L, [L, L])|_{\widetilde{\gamma}(s)} = 0.
\end{gathered} \tag{5.13}
$$

В силу первого утверждения данного предложения, векторные поля

$$L, X_{\lambda,i}, X_{2\lambda,j},\ i = 1, \ldots, q_1, j = 1, \ldots, q_2,$$

образуют подвижный репер в касательных пространствах $T_{\widetilde{\gamma}(s)}Q$ при $s \in \in [0, \operatorname{diam} Q)$, поскольку матрица их попарных скалярных произведений не вырождена. Таким образом, в силу (5.13), получаем: $\nabla_L L|_{\widetilde{\gamma}(s)} \equiv 0$, $s \in [0, \operatorname{diam} Q]$. ■

Пусть $K \supset K_0$ — подгруппа группы G, сохраняющая точку $\mathbf{x}_0 = = \widetilde{\gamma}(0)$, а $\mathfrak{k}$ — ее алгебра Ли. Из двухточечной однородности пространства Q следует транзитивность действия группы K на следующем подмножестве:

$$Q_p := (\mathbf{x} \in Q |\ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = p = \mathrm{const}),\ 0 \leqslant p \leqslant \operatorname{diam} Q$$

пространства Q. В силу предложения 1.1 стационарная подгруппа данного действия, соответствующая точке $\widetilde{\gamma} \cap Q_p$ для $0 < p < \operatorname{diam} Q$, совпадает с группой K_0. Это доказывает следующую лемму, которая будет использована в дальнейшем.

Лемма 5.2. *Подпространство*

$$Q' := (\mathbf{x} \in Q |\ 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \operatorname{diam} Q)$$

совпадает со следующим прямым произведением:

$$Q' = \bigcup_{s \in (0, \operatorname{diam} Q)} K\widetilde{\gamma}(s) = I \times (K/K_0),$$

где $I = (0, \operatorname{diam} Q)$.

Замечание 5.1. В § 1.2 было отмечено, что разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ однозначно определяется точкой x_0. Поэтому, в силу предложения 5.1 и изотропности пространства Q, траектории однопараметрических подгрупп, соответствующие всем ненулевым элементам пространства $\mathfrak{p}$ и проходящие через точку x_0, являются геодезическими. В частности, это верно для элементов $e_{\lambda,i}, e_{2\lambda,j}$, $i = = 1, \ldots, q_1, j = 1, \ldots, q_2$.

Для упрощения рассмотрения пространства $M = Q \times Q$ мы произведем некоторые переобозначения. Пусть теперь

$$L = L^{(1)} + L^{(2)},\ X_{\lambda,i} = X^{(1)}_{\lambda,i} + X^{(2)}_{\lambda,i},\ Y_{\lambda,i} = Y^{(1)}_{\lambda,i} + Y^{(2)}_{\lambda,i},\ i = 1, \ldots, q_1,$$
$$X_{2\lambda,j} = X^{(1)}_{2\lambda,j} + X^{(2)}_{2\lambda,j},\ Y_{2\lambda,j} = Y^{(1)}_{2\lambda,j} + Y^{(2)}_{2\lambda,j},\ j = 1, \ldots, q_2,$$

— разложения киллинговых векторных полей на пространстве M, соответствующих элементам $\Lambda, e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}, e_{2\lambda,j}, f_{2\lambda,j}$ и разложению $T_{(x_1,x_2)}M = T_{x_1}Q \oplus T_{x_2}Q$. Пусть $\gamma(p)$ — кривая на пространстве M, построенная согласно § 5.1 для геодезической $\widetilde{\gamma}$, а X_0 — векторное поле на пространстве M, построенное там же. Пусть $s_1(p) = \alpha p$, $s_2(p) = -\beta p$, $\alpha, \beta \in (0,1)$, $\alpha + \beta = 1$, $p =: 2R \operatorname{arctg} r$, $r \in I'$, где $I' = (0, \infty)$ при $Q \neq \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ и $I' = (0,1)$ при $Q = \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$. Тогда

$$X_0 = \frac{d}{dr}\gamma(p(r)) = \frac{2}{1+r^2}\left(\alpha L^{(1)} - \beta L^{(2)}\right) \tag{5.14}$$

и $\widetilde{\gamma}(s)$ является нормальной параметризацией геодезической $\widetilde{\gamma}$. Покажем, что векторные поля

$$X_0,\ L,\ X_{\lambda,i},\ Y_{\lambda,i},\ X_{2\lambda,j},\ Y_{2\lambda,j},\ i = 1, \ldots, q_1, j = 1, \ldots, q_2, \tag{5.15}$$

образуют подвижный репер в окрестности кривой $\gamma(p)$, $p \in (0, \operatorname{diam} Q)$. Для доказательства этого мы вычислим матрицу $\mathcal{B}$ попарных скалярных произведений этих полей на кривой γ. В силу $(\widetilde{\pi}^*_k g)(L,L) = R^2$, $k = 1,2$, получаем

$$g_2(X_0, X_0)|_\gamma = g_2\left(\frac{2}{1+r^2}\left(\alpha L^{(1)} - \beta L^{(2)}\right), \frac{2}{1+r^2}\left(\alpha L^{(1)} - \beta L^{(2)}\right)\right)\Big|_\gamma =$$
$$= \frac{4R^2}{(1+r^2)^2}(\alpha^2 m_1 + \beta^2 m_2) =: a,$$
$$g_2(L, X_0)|_\gamma = g_2\left(L^{(1)} + L^{(2)}, \frac{2}{1+r^2}\left(\alpha L^{(1)} - \beta L^{(2)}\right)\right)\Big|_\gamma =$$
$$= \frac{2R^2}{1+r^2}(\alpha m_1 - \beta m_2) =: b,$$
$$g_2(L, L)|_\gamma = (m_1 + m_2)R^2 =: c.$$

Благодаря (5.14) и ортогональности полей $L^{(k)}$, $k = 1,2$, ко всем полям

$$X^{(k)}_{\lambda,i},\ Y^{(k)}_{\lambda,i},\ X^{(k)}_{2\lambda,j},\ Y^{(k)}_{2\lambda,j},\ i = 1, \ldots, q_1, j = 1, \ldots, q_2, k = 1,2,$$

векторные поля X_0, L ортогональны полям

$$X_{\lambda,i},\ Y_{\lambda,i},\ X_{2\lambda,j},\ Y_{2\lambda,j},\ i=1,\ldots,q_1, j=1,\ldots,q_2. \tag{5.16}$$

Из предложения 5.1 следует, что все возможные попарные скалярные произведения векторных полей (5.16), кроме скалярных квадратов и произведений

$$(X_{\lambda,i}, Y_{\lambda,i}), (X_{2\lambda,j}, Y_{2\lambda,j}),\ i=1,\ldots,q_1,\ j=1,\ldots,q_2,$$

равны нулю. Простые вычисления, учитывающие формулы (5.7)–(5.12), дают

$$\begin{aligned}
g_2(X_{\lambda,i}, X_{\lambda,i})|_\gamma &= R^2\left(m_1\cos^2(\alpha\operatorname{arctg} r) + m_2\cos^2(\beta\operatorname{arctg} r)\right) =: d,\\
g_2(X_{\lambda,i}, Y_{\lambda,i})|_\gamma &= R^2\left(-m_1\sin(\alpha\operatorname{arctg} r)\cos(\alpha\operatorname{arctg} r) + \right.\\
&\left. +m_2\sin(\beta\operatorname{arctg} r)\cos(\beta\operatorname{arctg} r)\right) =: h,\\
g_2(Y_{\lambda,i}, Y_{\lambda,i})|_\gamma &= R^2\left(m_1\sin^2(\alpha\operatorname{arctg} r) + m_2\sin^2(\beta\operatorname{arctg} r)\right) =: f,\\
&\qquad i=1,\ldots,q_1,\\
g_2(X_{2\lambda,j}, X_{2\lambda,j})|_\gamma &= R^2\left(m_1\cos^2(2\alpha\operatorname{arctg} r) + m_2\cos^2(2\beta\operatorname{arctg} r)\right) =: u,\\
g_2(X_{2\lambda,j}, Y_{2\lambda,j})|_\gamma &= R^2\left(-m_1\sin(2\alpha\operatorname{arctg} r)\cos(2\alpha\operatorname{arctg} r) + \right.\\
&\left. +m_2\sin(2\beta\operatorname{arctg} r)\cos(2\beta\operatorname{arctg} r)\right) =: w,\\
g_2(Y_{2\lambda,j}, Y_{2\lambda,j})|_\gamma &= R^2\left(m_1\sin^2(2\alpha\operatorname{arctg} r) + m_2\sin^2(2\beta\operatorname{arctg} r)\right) =: v,\\
&\qquad j=1,\ldots,q_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, матрица $\mathcal{B} = g_2|_\gamma$ имеет блочную структуру со следующими блоками:

$$\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix} \text{ один раз, } \begin{pmatrix} d & h\\ h & f\end{pmatrix} - q_1 \text{ раз и } \begin{pmatrix} u & w\\ w & v\end{pmatrix} - q_2 \text{ раз.}$$

Отсюда $\det\mathcal{B} = (ac-b^2)(df-h^2)^{q_1}(uv-w^2)^{q_2}$. Легко проверить, что

$$ac-b^2 = \frac{4R^4m_1m_2}{(1+r^2)^2},\ df-h^2 = \frac{R^4m_1m_2r^2}{1+r^2},\ uv-w^2 = \frac{4R^4m_1m_2r^2}{(1+r^2)^2}.$$

Таким образом:

$$\det\mathcal{B} = \frac{4^{1+q_2}\left(R^4m_1m_2\right)^{1+q_1+q_2}r^{2(q_1+q_2)}}{(1+r^2)^{2+q_1+2q_2}}, \tag{5.17}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4R^2 m_1 m_2} \begin{pmatrix} (1+r^2)^2(m_1+m_2) & -2(1+r^2)(m_1\alpha - m_2\beta) \\ -2(1+r^2)(m_1\alpha - m_2\beta) & 4(m_1\alpha^2 + m_2\beta^2) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} d & h \\ h & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D_s & E_s \\ E_s & F_s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & w \\ w & v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_s & B_s \\ B_s & A_s \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$D_s = \frac{1+r^2}{m_1 m_2 R^2 r^2} \left(m_1 \sin^2(\alpha \operatorname{arctg} r) + m_2 \sin^2(\beta \operatorname{arctg} r)\right),$$

$$F_s = \frac{1+r^2}{m_1 m_2 R^2 r^2} \left(m_1 \cos^2(\alpha \operatorname{arctg} r) + m_2 \cos^2(\beta \operatorname{arctg} r)\right),$$

$$E_s = \frac{1+r^2}{2m_1 m_2 R^2 r^2} \left(m_1 \sin(2\alpha \operatorname{arctg} r) - m_2 \sin(2\beta \operatorname{arctg} r)\right),$$

$$C_s = \frac{(1+r^2)^2}{4m_1 m_2 R^2 r^2} \left(m_1 \sin^2(2\alpha \operatorname{arctg} r) + m_2 \sin^2(2\beta \operatorname{arctg} r)\right),$$

$$A_s = \frac{(1+r^2)^2}{4m_1 m_2 R^2 r^2} \left(m_1 \cos^2(2\alpha \operatorname{arctg} r) + m_2 \cos^2(2\beta \operatorname{arctg} r)\right),$$

$$B_s = \frac{(1+r^2)^2}{8m_1 m_2 R^2 r^2} \left(m_1 \sin(4\alpha \operatorname{arctg} r) - m_2 \sin(4\beta \operatorname{arctg} r)\right).$$

Ввиду формулы (5.17), векторные поля (5.15) образуют подвижный репер на кривой $\gamma(p)$, $p \in (0, \operatorname{diam} Q)$ и условие 5.1 выполнено. Пусть

$$L^l, X^l_{\lambda,i}, Y^l_{\lambda,i}, X^l_{2\lambda,j}, Y^l_{2\lambda,j},\ i = 1, \ldots, q_1, j = 1, \ldots, q_2, \tag{5.18}$$

— левоинвариантные векторные поля на группе G, соответствующие элементам (5.5) алгебры $\mathfrak{g}$, а $X^l_0 = \partial/\partial r$ — векторное поле на интервале I'. Рассмотрим соответствующие им векторные поля на пространстве $I' \times G$, сохранив для них те же обозначения. Поле X_0 коммутирует со всеми полями (5.15). Поэтому, в силу предложения 1.4, разложение коммутатора $[X, Y]$ для элементов X, Y репера (5.15), по тому же реперу, не включает элементов X, Y. Отсюда второй член в поднятии $\widetilde{H}_0$ двухточечного гамильтониана H_0 на пространство $I' \times G$ в соответствии с формулой (5.3) равен нулю, в силу $c^q_{jq} = 0$ (даже без суммирования по

индексу q). Следовательно, это выражение принимает вид:

$$\widetilde{H}_0 = -\frac{(1+r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{8mR^2r^{q_1+q_2}}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(\frac{r^{q_1+q_2}}{(1+r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2-1}}\frac{\partial}{\partial r}\right)+$$

$$+\frac{(m_1\alpha-m_2\beta)(1+r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{4m_1m_2R^2r^{q_1+q_2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{r^{q_1+q_2}}{(1+r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2}}L^l\right\}-$$

$$-\frac{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}\left(L^l\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q_1}\left(D_s\left(X^l_{\lambda,i}\right)^2+F_s\left(Y^l_{\lambda,i}\right)^2+E_s\left\{X^l_{\lambda,i},Y^l_{\lambda,i}\right\}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q_2}\left(C_s\left(X^l_{2\lambda,j}\right)^2+A_s\left(Y^l_{2\lambda,j}\right)^2+B_s\left\{X^l_{2\lambda,j},Y^l_{2\lambda,j}\right\}\right), \qquad (5.19)$$

где $\{X,Y\}=X\circ Y+Y\circ X$ — антикоммутатор элементов X и Y, а $m:=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$.

В соответствии с § 5.1, подъем меры, порожденной метрикой g_2, на пространство $I'\times G$ имеет вид $\widetilde{\mu}_2=\nu\otimes\mu_G$, где $\nu=\sqrt{\det\mathcal{B}}dr$ — мера на интервале I', а μ_G — биинвариантная мера на группе G. Изменяя при необходимости нормировку, можно считать $\nu=r^{q_1+q_2}dr/(1+r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}$. Вычисления выше можно резюмировать в следующей теореме.

Теорема 5.1. *Квантово-механический двухточечный гамильтониан на компактном двухточечно-однородном пространстве Q со связной группой изометрий G можно рассматривать как дифференциальный оператор $\widetilde{H}_0+V(r)$, где оператор $\widetilde{H}_0$ на пространстве $I'\times G$ задан формулой* (5.19), *причем $I'=(0,1)$ в случае $Q=\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ и $I'=(0,\infty)$ в остальных случаях, $\alpha,\beta\in(0,1)$, $\alpha+\beta=1$. Его область определения плотна в пространстве $\mathcal{L}^2(I'\times G,K_0,\widetilde{\mu}_2)$, состоящем из всех квадратично интегрируемых K_0-инвариантных функций на пространстве $I'\times G$, относительно меры $\widetilde{\mu}_2$ и правых K_0-сдвигов.*

§ 5.3. Двухточечный гамильтониан на некомпактном двухточечно-однородном пространстве

Некомпактные двухточечно-однородные пространства типов 7,8,9,10 аналогичны компактным двухточечно-однородным пространствам типов 2,4,5,6 соответственно. Согласно предложению 1.5 алгебры Ли групп изометрий аналогичных пространств являются различными вещественными формами простых комплексных алгебр Ли. Переход между этими вещественными формами можно осуществить умножением подпространства $\mathfrak{p}$ из разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ на мнимую единицу $\mathbf{i}$. В пространстве $M = Q \times Q$ этот переход соответствует замене $r \to -\mathbf{i}r$, $R \to \mathbf{i}R$, см. п. 1.3.3.

Таким образом, заменяя переменные и векторные поля из (5.19) по правилу

$$r \to -\mathbf{i}r,\ R \to \mathbf{i}R,\ X^l_{\lambda,i} \to \mathbf{i}X^l_{\lambda,i},\ X^l_{2\lambda,j} \to \mathbf{i}X^l_{2\lambda,j},$$
$$L^l \to \mathbf{i}L^l,\ Y^l_{\lambda,i} \to \mathbf{i}Y^l_{\lambda,i},\ Y^l_{2\lambda,j} \to \mathbf{i}Y^l_{2\lambda,j}$$

и используя (1.30), получаем следующую теорему.

Теорема 5.2. *Квантово-механический двухточечный гамильтониан на некомпактном двухточечно-однородном пространстве Q со связной группой изометрий G можно рассматривать как дифференциальный оператор*

$$\begin{aligned}
\widetilde{H} = &-\frac{(1-r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{8mR^2r^{q_1+q_2}}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(\frac{r^{q_1+q_2}}{(1-r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2-1}}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\\
&+\frac{(m_1\alpha-m_2\beta)(1-r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{4m_1m_2R^2r^{q_1+q_2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{r^{q_1+q_2}}{(1-r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2}}L^l\right\}-\\
&-\frac{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}\left(L^l\right)^2-\\
&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q_1}\left(D_h\left(X^l_{\lambda,i}\right)^2+F_h\left(Y^l_{\lambda,i}\right)^2+E_h\left\{X^l_{\lambda,i},Y^l_{\lambda,i}\right\}\right)-
\end{aligned}\tag{5.20}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q_2}\left(C_h\left(X^l_{2\lambda,j}\right)^2+A_h\left(Y^l_{2\lambda,j}\right)^2+B_h\left\{X^l_{2\lambda,j},Y^l_{2\lambda,j}\right\}\right)+V(r)$$

на пространстве $I'\times G$, где $I'=(0,1)$,

$$\begin{aligned}
D_h &= \frac{1-r^2}{m_1m_2R^2r^2}\left(m_1\operatorname{sh}^2(\alpha\operatorname{arcth}r)+m_2\operatorname{sh}^2(\beta\operatorname{arcth}r)\right),\\
F_h &= \frac{1-r^2}{m_1m_2R^2r^2}\left(m_1\operatorname{ch}^2(\alpha\operatorname{arcth}r)+m_2\operatorname{ch}^2(\beta\operatorname{arcth}r)\right),\\
E_h &= \frac{1-r^2}{2m_1m_2R^2r^2}\left(m_1\operatorname{sh}(2\alpha\operatorname{arcth}r)-m_2\operatorname{sh}(2\beta\operatorname{arcth}r)\right),\\
C_h &= \frac{(1-r^2)^2}{4m_1m_2R^2r^2}\left(m_1\operatorname{sh}^2(2\alpha\operatorname{arcth}r)+m_2\operatorname{sh}^2(2\beta\operatorname{arcth}r)\right),\\
A_h &= \frac{(1-r^2)^2}{4m_1m_2R^2r^2}\left(m_1\operatorname{ch}^2(2\alpha\operatorname{arcth}r)+m_2\operatorname{ch}^2(2\beta\operatorname{arcth}r)\right),\\
B_h &= \frac{(1-r^2)^2}{8m_1m_2R^2r^2}\left(m_1\operatorname{sh}(4\alpha\operatorname{arcth}r)-m_2\operatorname{sh}(4\beta\operatorname{arcth}r)\right).
\end{aligned}\tag{5.21}$$

Его область определения плотна в пространстве $\mathcal{L}^2\left(I'\times G,K_0,\widetilde{\mu}_2\right)$, состоящем из всех квадратично-интегрируемых K_0-инвариантных функций на пространстве $I'\times G$ относительно меры $\widetilde{\mu}_2=\nu\otimes\mu_G$ и правых K_0-сдвигов. Здесь

$$\nu=\frac{r^{q_1+q_2}dr}{\left(1-r^2\right)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}$$

— мера на интервале I', а μ_G — биинвариантная мера на группе G, т. к. группа G унимодулярна.

Следующее замечание аналогично замечаниям 5.1 и 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Пространство $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{p}_{2\lambda}$ порождает в пространстве Q вполне геодезическое подмногообразие постоянной секционной кривизны $-R^{-2}$, изометричное пространству $\mathbf{H}^{q_2+1}(\mathbb{R})$.

При $q_1\neq 0$ элемент Λ и произвольный ненулевой элемент из пространства $\mathfrak{p}_\lambda$ порождают в пространстве Q вполне геодезическое двумерное подмногообразие постоянной кривизны $-(2R)^{-2}$.

Траектории всех однопараметрических подгрупп, соответствующих элементам пространства $\mathfrak{p}$ и проходящих через точку x_0, являются геодезическими. В частности, это верно для элементов $e_{\lambda,i},e_{2\lambda,j}$, $i=1,\ldots,q_1,j=1,\ldots,q_2$.

§ 5.4. Связь двухточечного гамильтониана и алгебры $\mathrm{Diff}_G(M_S)$

Теперь мы можем выразить квантово-механический двухчастичный гамильтониан с центральным потенциалом $V(\rho)$ на произвольном двухточечно-однородном пространстве Q через радиальный дифференциальный оператор и образующие алгебры инвариантных дифференциальных операторов на расслоении единичных сфер над пространством Q. Эти образующие были вычислены в главе 3, поскольку $Q_S \cong G/K_0$. Сравнивая выражение (5.19) с образующими этих алгебр, получаем

$$H = -\frac{(1+r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{8mR^2r^{q_1+q_2}}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(\frac{r^{q_1+q_2}}{(1+r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2-1}}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}D_0^2 +$$
$$+\frac{(m_1\alpha-m_2\beta)(1+r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{4m_1m_2R^2r^{q_1+q_2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{r^{q_1+q_2}D_0}{(1+r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2}}\right\} - \tag{5.22}$$
$$-\frac{1}{2}\left(D_sD_1+F_sD_2+2E_sD_3+C_sD_4+A_sD_5+2B_sD_6\right)+V(r)$$

для $Q=\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$, $q_1=4n-4, q_2=3$ и $Q=\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$, $q_1=8, q_2=7$;

$$H = -\frac{(1+r^2)^{n+1}}{8mR^2r^{2n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(\frac{r^{2n-1}}{(1+r^2)^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}(D_0)^2 +$$
$$+\frac{(m_1\alpha-m_2\beta)(1+r^2)^{n+1}}{4m_1m_2R^2r^{2n-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{r^{2n-1}}{(1+r^2)^n}D_0\right\} - \tag{5.23}$$
$$-\frac{1}{2}\left(D_sD_1+F_sD_2+2E_sD_3+C_sD_4^2+A_sD_5^2+B_s\{D_4,D_5\}\right)+V(r)$$

для $Q=\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$;

$$H = -\frac{(1+r^2)^n}{8mR^2r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{n-2}}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}D_0^2 +$$
$$+\frac{(m_1\alpha-m_2\beta)(1+r^2)^n}{4m_1m_2R^2r^{n-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{r^{n-1}D_0}{(1+r^2)^{n-1}}\right\} - \tag{5.24}$$

$$-\frac{1}{2}\left(C_sD_1+A_sD_2+2B_sD_3\right)+V(r)$$

для $Q=\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$, $\mathbf{S}^n, n\geqslant 3$ и

$$H=-\frac{(1+r^2)^2}{8mR^2r}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{(m_1\alpha-m_2\beta)(1+r^2)^2}{4m_1m_2R^2r}\left\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{rD_0}{1+r^2}\right\}-$$
$$-\frac{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}D_0^2-\frac{1}{2}\left(C_sD_1^2+A_sD_2^2+B_s\{D_1,D_2\}\right)+V(r) \tag{5.25}$$

для $Q=\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$, $\mathbf{S}^2$.

Аналогичные выражения для некомпактных пространств можно получить при помощи замены $r\to -\mathbf{i}r$, $R\to -\mathbf{i}R$, $D_i\to c_i\bar{D}_i$, где $c_i=\pm 1,\pm\mathbf{i}$ (см. (1.29) и гл. 3), с учетом

$$D_s\to -D_h,\quad F_s\to F_h,\quad E_s\to -\mathbf{i}E_h,$$
$$C_s\to -C_h,\quad A_s\to A_h,\ B_s\to -\mathbf{i}B_h.$$

Эти выражения имеют вид

$$H=-\frac{(1-r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{8mR^2r^{q_1+q_2}}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(\frac{r^{q_1+q_2}}{(1-r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2-1}}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}\bar{D}_0^2+$$
$$+\frac{(m_1\alpha-m_2\beta)(1-r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{4m_1m_2R^2r^{q_1+q_2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{r^{q_1+q_2}\bar{D}_0}{(1-r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2}}\right\}- \tag{5.26}$$
$$-\frac{1}{2}\left(D_h\bar{D}_1+F_h\bar{D}_2+2E_h\bar{D}_3+C_h\bar{D}_4+A_h\bar{D}_5+2B_h\bar{D}_6\right)+V(r)$$

для $Q=\mathbf{H}^n(\mathbb{H})$, $q_1=4n-4, q_2=3$ и $Q=\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)$, $q_1=8, q_2=7$;

$$H=-\frac{(1-r^2)^{n+1}}{8mR^2r^{2n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(\frac{r^{2n-1}}{(1-r^2)^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}\left(\bar{D}_0\right)^2+$$
$$+\frac{(m_1\alpha-m_2\beta)(1-r^2)^{n+1}}{4m_1m_2R^2r^{2n-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{r^{2n-1}}{(1-r^2)^n}\bar{D}_0\right\}- \tag{5.27}$$

$$-\frac{1}{2}\left(D_h\bar{D}_1 + F_h\bar{D}_2 + 2E_h\bar{D}_3 + C_h\bar{D}_4^2 + A_h\bar{D}_5^2 + B_h\{\bar{D}_4, \bar{D}_5\}\right) + V(r)$$

для $Q = \mathbf{H}^n(\mathbb{C})$;

$$\begin{aligned} H = &-\frac{(1-r^2)^n}{8mR^2r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(\frac{r^{n-1}}{(1-r^2)^{n-2}}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}\bar{D}_0^2 + \\ &+\frac{(m_1\alpha - m_2\beta)(1-r^2)^n}{4m_1m_2R^2r^{n-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{r^{n-1}\bar{D}_0}{(1-r^2)^{n-1}}\right\} - \\ &-\frac{1}{2}\left(C_h\bar{D}_1 + A_h\bar{D}_2 + 2B_h\bar{D}_3\right) + V(r) \end{aligned} \tag{5.28}$$

для $Q = \mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 3$ и

$$\begin{aligned} H = &-\frac{(1-r^2)^2}{8mR^2r}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{(m_1\alpha - m_2\beta)(1-r^2)^2}{4m_1m_2R^2r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{r\bar{D}_0}{1-r^2}\right\} - \\ &-\frac{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}\bar{D}_0^2 - \frac{1}{2}\left(C_h\bar{D}_1^2 + A_h\bar{D}_2^2 + B_h\{\bar{D}_1, \bar{D}_2\}\right) + V(r) \end{aligned} \tag{5.29}$$

для $Q = \mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ (всюду в (5.26)–(5.29) $0 < r < 1$).

Главным отличием этих выражений от их аналогов в евклидовом случае является присутствие некоммутирующих операторов с коэффициентами, зависящими от переменной r. Это отличие сильно усложняет задачу двух тел. Однако любая общая собственная функция образующих D_i порождает изолированное обыкновенное дифференциальное уравнение для радиальной части собственной функции оператора H. При помощи этого подхода ниже будет найдено несколько точных спектральных серий для двухчастичного гамильтониана на сфере $\mathbf{S}^n$ для некоторых потенциалов. Для остальных двухточечно-однородных пространств аналогичные вычисления представляются более трудными.

Замечание 5.3. Говоря неформально, чем большее число независимых операторов коммутирует с гамильтонианом, тем ближе находится квантовомеханическая система к интегрируемости. Выражения (5.22)–(5.29) для двухчастичных гамильтонианов выглядят достаточно сложными, однако в случае тривиального потенциала $V \equiv 0$ каждое из них, очевидно, может быть представлено в виде суммы двух коммутирующих операторов H_1 и H_2, соответствующих независимым частицам. Один из этих операторов пропорционален множителю $1/m_1$,

а другой множителю $1/m_2$. Очевидно, что гамильтониан (5.26) представляется в виде $H_1 + H_2 + V(r)$, где

$$H_1 = -\frac{(1+r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{8m_1R^2r^{q_1+q_2}}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(\frac{r^{q_1+q_2}}{(1+r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2-1}}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\beta^2}{2m_1R^2}D_0^2 -$$

$$-\frac{\beta(1+r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{4m_1R^2r^{q_1+q_2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{r^{q_1+q_2}D_0}{(1+r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2}}\right\} -$$

$$-\frac{1+r^2}{2m_1R^2r^2}\left(\sin^2(\beta\operatorname{arctg} r)D_1 + \cos^2(\beta\operatorname{arctg} r)D_2 - \sin(2\beta\operatorname{arctg} r)D_3\right) -$$

$$-\frac{(1+r^2)^2}{8m_1R^2r^2}\left(\sin^2(2\beta\operatorname{arctg} r)D_4 + \cos^2(2\beta\operatorname{arctg} r)D_5 - \sin(4\beta\operatorname{arctg} r)D_6\right),$$

$$H_2 = -\frac{(1+r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{8m_2R^2r^{q_1+q_2}}\frac{\partial}{\partial r}\circ\left(\frac{r^{q_1+q_2}}{(1+r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2-1}}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\alpha^2}{2m_2R^2}D_0^2 +$$

$$+\frac{\alpha(1+r^2)^{1+\frac{q_1}{2}+q_2}}{4m_2R^2r^{q_1+q_2}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{r^{q_1+q_2}D_0}{(1+r^2)^{\frac{q_1}{2}+q_2}}\right\} -$$

$$-\frac{1+r^2}{2m_2R^2r^2}\left(\sin^2(\alpha\operatorname{arctg} r)D_1 + \cos^2(\alpha\operatorname{arctg} r)D_2 + \sin(2\alpha\operatorname{arctg} r)D_3\right) -$$

$$-\frac{(1+r^2)^2}{8m_2R^2r^2}\left(\sin^2(2\alpha\operatorname{arctg} r)D_4 + \cos^2(2\alpha\operatorname{arctg} r)D_5 + \sin(4\alpha\operatorname{arctg} r)D_6\right).$$

Однако неясно, возможно ли включить нетривиальный потенциал в операторы H_1, H_2, не нарушая их коммутативности, так чтобы по-прежнему было $H = H_1 + H_2$.

Глава 6

Материальная точка в центральном поле на двухточечно-однородных пространствах

В этой главе мы рассмотрим одночастичную задачу в центральном потенциале на двухточечно-однородном римановом пространстве. В § 6.1 мы докажем ее некоммутативную интегрируемость для таких пространств, отличных от пространств постоянной кривизны.

Остальная часть этой главы посвящена классической и квантовой одночастичной задачам в центральном потенциале на пространствах постоянной кривизны. Между этими задачами и их евклидовыми аналогами существует много общего. Именно на пространствах постоянной кривизны существуют аналоги потенциала Ньютона–Кулона и осцилляторного потенциала, для которых движение частиц происходит вдоль коник. Решение задачи Кеплера в этих пространствах также удовлетворяет аналогам законов Кеплера. Соответствующие квантово-механические задачи являются точнорешаемыми. Эти результаты собраны вместе впервые.

В последнем параграфе данной главы описана история исследования данных задач, начиная со времени возникновения неевклидовой геометрии.

§ 6.1. Интегрируемость одночастичного движения в центральном поле на двухточечно-однородных пространствах

Здесь мы докажем некоммутативную интегрируемость в соответствии с определением 4.4 классического одночастичного движения в центральном поле на произвольном двухточечно-однородном пространстве Q. Для этого достаточно рассмотреть только пространства $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a), \mathbf{P}^2(\mathbb{H}), \mathbf{P}^2(\mathbb{C}), \mathbf{P}^2(\mathbb{R}), \mathbf{S}^2$. Действительно, из рассмотрения

групп изометрий пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{H}), \mathbf{P}^n(\mathbb{C}), \mathbf{P}^n(\mathbb{R}), \mathbf{S}^n$ следует, что существует вполне геодезическое подпространство Q', изометричное соответственно пространствам $\mathbf{P}^2(\mathbb{H}), \mathbf{P}^2(\mathbb{C}), \mathbf{P}^2(\mathbb{R}), \mathbf{S}^2$, содержащее центр потенциала и начальное положение частицы, причем начальная скорость частицы касается этого пространства. Это означает, что частица будет вечно двигаться по подпространству Q'. Стандарный переход от пространств $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a), \mathbf{P}^n(\mathbb{H}), \mathbf{P}^n(\mathbb{C}), \mathbf{S}^n$ к их некомпактным аналогам даст *mutatis mutandis* интегрируемость одночастичного движения в центральных полях на пространствах $\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a), \mathbf{H}^n(\mathbb{H}), \mathbf{H}^n(\mathbb{C}), \mathbf{H}^n(\mathbb{R})$.

6.1.1. Движение на пространствах $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a), \mathbf{P}^2(\mathbb{H}), \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$

Здесь мы воспользуемся обозначениями из § 1.2, п. 4.2.3, п. 4.3.2 и результатами главы 3. Пусть Q — одно из пространств $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$, $\mathbf{P}^2(\mathbb{H})$, $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, а $M = T^*Q$ — фазовое пространство одночастичной задачи на Q.

Группой симметрий одночастичной задачи с произвольным центральным потенциалом является подгруппа группы изометрий пространства Q, сохраняющая центр $\mathbf{x}_0$ потенциала V. Эта группа была обозначена выше через K. Стационарной подгруппой группы K, соответствующей точке общего положения $\mathbf{x} \in Q, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \notin A_{\mathbf{x}_0}$, является группа K_0, сохраняющая две точки в пространстве Q в общем положении и геодезическую $\widetilde{\gamma}$, соединяющую их (см. предложение 1.1). Пусть $\mathbf{x} = \widetilde{\gamma}(t)$, где t — натуральный параметр. В соответствии с замечанием 5.2 получаем

$$\bigcup_{t \in (0, \operatorname{diam} Q)} K\widetilde{\gamma}(t) = I \times (K/K_0) = Q',$$

где $I = (0, \operatorname{diam} Q)$, Q' — открытое плотное подпространство в Q и

$$\operatorname{mes}(Q \backslash Q') = \operatorname{mes}\left((\mathbf{x}_0) \cup A_{\mathbf{x}_0}\right) = 0$$

для меры mes на пространстве Q, индуцированной римановой метрикой.

Гамильтонова функция h_s для одночастичной задачи, определенная на пространстве $T^*Q' = T^*I \times T^*(K/K_0)$, является K_0-инвариантной и поэтому может быть выражена через координаты на пространстве T^*I и образующие пуассоновой алгебры $\mathcal{P}(T^*(K/K_0))^K$ (см. п. 4.3.2).

В обозначениях предложения 1.2 для алгебры Ли $\mathfrak{k}$ группы K справедливо разложение $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$, где $\mathfrak{k}_0$ — алгебра Ли группы K_0, $\mathfrak{k}_\lambda$ и $\mathfrak{k}_{2\lambda}$ — Ad_{K_0}-инвариантные подпространства в алгебре $\mathfrak{k}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}_\lambda = q_1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}_{2\lambda} = q_2$.

Для нахождения образующих пуассоновой алгебры $\mathcal{P}\left(T^*(K/K_0)\right)^K$ необходимо найти базисные Ad_{K_0}-инвариантные элементы в коммутативной алгебре $S(\mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda})$ (см. предложение 4.5). В главе 3 было показано, что ограничения формы Киллинга $\mathrm{Kil}_{\mathfrak{g}}$ на пространства $\mathfrak{k}_\lambda$ и $\mathfrak{k}_{2\lambda}$ являются единственными инвариантами действий $\mathrm{Ad}_{K_0}|_{\mathfrak{k}_\lambda}$ и $\mathrm{Ad}_{K_0}|_{\mathfrak{k}_{2\lambda}}$ соответственно. Кроме того, действие $\mathrm{Ad}_{K_0}|_{\mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}}$ транзитивно на прямом произведении сфер $\mathbf{S}^{q_1-1} \times \mathbf{S}^{q_2-1}$, вложенных стандартным образом в пространство $\mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda}$.

Это означает, что пуассонова алгебра $\mathcal{P}\left(T^*(K/K_0)\right)^K$ свободно порождена элементами p_2, p_5, соответствующими инвариантным операторам D_2 и D_5 из (3.2). В силу $[D_2, D_5] = 0$ изоморфизм (4.34) дает равенство $[p_2, p_5]_P = 0$ и пуассонова алгебра $\mathcal{P}\left(T^*(K/K_0)\right)^K$ коммутативна. Другими словами, пространство K/K_0 является коммутативным.

Из предложения 4.10 и формулы (4.38) легко получить выражение для одночастичной гамильтоновой функции h_s из двухчастичного квантово-механического гамильтониана в § 5.4 в предельном случае $m_2 = \infty, \beta = 0$. В этом случае $m = m_1$,

$$A_s = \frac{(1+r^2)^2}{4mR^2r^2},\ F_s = \frac{1+r^2}{mR^2r^2},\ B_s = C_s = D_s = E_s = 0,$$

откуда

$$h_s = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2}p_r^2 + \frac{1+r^2}{2mR^2r^2}\left(p_2 + \frac{1+r^2}{4}p_5\right) + V(r), \tag{6.1}$$

где $[p_2, p_5]_P = [p_2, r]_P = [p_2, r]_P = [p_5, r]_P = [p_5, p_r]_P = 0, [r, p_r]_P = 1$. Здесь и ниже мы отождествляем функции p_2, p_5 на пространстве $T^*(K/K_0)$ с функциями $p_2 \circ \widetilde{\pi}, p_5 \circ \widetilde{\pi}$ на пространстве T^*Q', а функцию V на пространстве Q' с функцией $V \circ \pi_4$, где

$$\widetilde{\pi}\colon T^*I \times T^*(K/K_0) \to T^*(K/K_0),\ \pi_4\colon T^*Q' \to Q'$$

— канонические проекции.

Предположение 4.1 справедливо для пространства $M = T^*Q'$, поскольку Q' — подмногообразие алгебраического многообразия, K — алгебраическая группа, а инварианты p_2, p_5 являются рациональными функциями алгебраических координат на пространстве Q' и соответствующих им координат на слоях.

Замечание 4.4 влечет некоммутативную интегрируемость всех гамильтоновых систем на пространстве $T^*(K/K_0)$ с гамильтоновыми функциями вида $P(p_2, p_5)$, где P — некоторый многочлен. Поэтому одночастичная система на пространстве Q с произвольным центральным

потенциалом также интегрируема в некоммутативном смысле, поскольку ее гамильтонова функция h_s является еще одним независимым интегралом движения и $\dim T^*I = 2$.

Процедура гамильтоновой редукции в этом случае проста. Приведенным фазовым пространством является пространство T^*I, а приведенной гамильтоновой функцией выражение (6.1) с $p_2, p_5 = \mathrm{const}$. Эта приведенная система описывает эволюцию расстояния между частицей и центром потенциала.

В обозначениях п. 4.2.3 и п. 4.3.2 справедливо равенство $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}\left(T^*(K/K_0)\right)^K$ и коммутативность пуассоновой алгебры $\mathcal{F}_2$ дает $\operatorname{dind}\mathcal{F} = \operatorname{ddim}\mathcal{F}_2 = 2$ в силу замечания 4.2. Поэтому общее множество уровня в пространстве $T^*(K/K_0)$ независимых функций из пуассоновой алгебры $\mathcal{F}$ является 2-мерным многообразием в силу того же замечания. Таким образом, общее множество уровня в пространстве T^*Q' независимых функций из алгебры $\mathcal{F}$ и гамильтоновой функции h_s является 3-мерным подмногообразием в пространстве T^*Q'. В этом контексте существование нетривиальных потенциалов, для которых все ограниченные траектории являются замкнутыми, представляется маловероятным. Ниже мы увидим, что для пространств $\mathbf{S}^2, \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ и $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ такие потенциалы существуют.

6.1.2. Движение на пространствах $\mathbf{S}^2, \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ и $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$

Сохраним здесь обозначения из предыдущего пункта и опишем только отличия от рассмотренных там случаев. В данном случае мы имеем $q_1 = 0, q_2 = 1, \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_\lambda = 0, \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{2\lambda}$, $K \cong \mathbf{S}^1$, а группа K_0 тривиальна в соответствии с предложением 1.2. Пуассонова алгебра $\mathcal{P}\left(T^*K\right)^K$ порождена единственным элементом p_2, соответствующим оператору D_2 из § 3.4 в случае $n = 2$.

Используя ту же предельную процедуру, что и в предыдущем пункте, получаем одночастичную гамильтонову функцию для пространств $\mathbf{S}^2, \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ в виде

$$h_s = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2}\left(p_r^2 + \frac{p_2^2}{r^2}\right) + V(r). \tag{6.2}$$

Приведенное фазовое пространство снова равно T^*I, а приведенная гамильтонова функция (6.2) при $p_2 = \mathrm{const}$ описывает эволюцию расстояния между частицей и центром потенциала.

Для гиперболической плоскости результаты совершенно аналогичны. Используя метрику (1.25), получаем для гиперболической плоскости $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ одночастичную гамильтонову функцию в виде

$$h_h = \frac{(1-r^2)^2}{8mR^2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r),\ r < 1. \tag{6.3}$$

§ 6.2. Движение частицы в бертрановских потенциалах на пространствах постоянной кривизны

Хотя содержание этого параграфа в принципе известно более ста лет, оно не получило *достаточной известности*, о чем свидетельствуют неоднократные частичные переоткрытия в работах второй половины 20 века. История и соответствующие ссылки содержатся в § 6.4.

Выражение (6.2) легко получить более прямым способом. Действительно, в силу формул (4.37) и (1.19) гамильтонова функция натуральной одночастичной системы с центральным потенциалом принимает вид (6.2), где величина p_2 равна импульсу p_φ, соответствующему угловой координате φ. Очевидно, что этот импульс является интегралом движения.

Используя метрики (1.20) и (1.26), перепишем гамильтоновы функции (6.2) и (6.3) в виде

$$h_s = \frac{(1+v^2)^2}{2mR^2}p_v^2 + \frac{1+v^2}{2mv^2R^2}p_\varphi^2 + V(v), \tag{6.4}$$

$$h_h = \frac{(1-v^2)^2}{2mR^2}p_v^2 + \frac{1-v^2}{2mv^2R^2}p_\varphi^2 + V(v),\ v < 1. \tag{6.5}$$

Для евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$ с метрикой $d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ одночастичная гамильтонова функция имеет вид

$$h_e = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right) + V(\rho). \tag{6.6}$$

Второй закон Кеплера для евклидовой плоскости справедлив для всех центральных потенциалов и означает, что *линейный сегмент, соединяющий точку $\rho = 0$ с положением частицы, заметает равные*

площади за равные промежутки времени. Если заменить слова *«линейный сегмент»* словами *«кратчайший геодезический сегмент»*, этот закон не будет справедлив в пространствах $\mathbf{S}^2, \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ и $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$. Однако следующая форма второго закона Кеплера справедлива для пространств $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{S}^2, \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ и $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$: *геодезический сегмент, исходящий из центра потенциала O в направлении положения частицы P и имеющий длину, в два раза большую чем* $\operatorname{dist}(O, P)$, *заметает равные площади за равные промежутки времени.*[1]

Действительно, в гиперболическом случае площадь тонкого геодезического сектора, заметаемого геодезическим сегментом длины ρ, соединяющим точку O с точкой, имеющей координаты v, φ, есть

$$dS_v = R^2 d\varphi \int\limits_0^v \frac{v dv}{(1-v^2)^{3/2}} = R^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right) d\varphi,$$

где $d\varphi$ — приращение угла. В силу формулы (1.27), если координата $\widetilde{v}$ соответствует аналогичному геодезическому сегменту длины 2ρ, то $\widetilde{v} = 2v/(1+v^2)$ и

$$dS_{\widetilde{v}} = \frac{2R^2 v^2}{1-v^2} d\varphi,$$

откуда

$$\frac{dS_{\widetilde{v}}}{dt} = \frac{2R^2 v^2 \dot{\varphi}}{1-v^2} = \frac{2p_\varphi}{m} = \text{const}.$$

Доказательство для сферического случая совершенно аналогично, а для евклидова случая утверждение очевидно.

Хорошо известно [4; 6], что существуют два центральных потенциала в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$: кулоновский потенциал и потенциал изотропного гармонического осциллятора, для которых все ограниченные траектории классических частиц замкнуты, при условии их существования. Задача нахождения таких потенциалов известна как *задача Бертрана*, которым и была решена [99]. Мы будем называть эти потенциалы *бертрановскими*.

Рассмотрим обобщение задачи Бертрана на пространства постоянной кривизны. Мы сведем данное обобщение к исходной задаче Бертрана в евклидовом пространстве.

[1] Для пространств $Q = \mathbf{S}^2, \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ нужно дополнительно требовать, чтобы выполнялось неравенство $\operatorname{dist}(O, P) < \frac{1}{2} \operatorname{diam} Q$, или учитывать заметаемую площадь с соответствующей кратностью.

Пусть $w = -1/(vR)$ для пространств $\mathbf{S}^2, \mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ и $w = -1/r$ для пространства $\mathbf{E}^2$. Прямые вычисления для гамильтоновых функций (6.4), (6.5) и (6.6) приводят к уравнению

$$p_\varphi \frac{dw}{d\varphi} = \sqrt{2m(E - V(w)) - p_\varphi^2(w^2 + \kappa)},\ p_\varphi = \mathrm{const},$$

где κ — кривизна пространства: $\kappa = 0$ для $\mathbf{E}^2$, $\kappa = 1/R^2$ для $\mathbf{S}^2$ и $\kappa = -1/R^2$ для $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$; E — постоянное значение гамильтоновой функции. Таким образом, уравнение траектории в координатах w, φ имеет вид

$$\varphi = \int \frac{p_\varphi dw}{\sqrt{2m(E - V(w)) - p_\varphi^2(w^2 + \kappa)}}. \tag{6.7}$$

Поскольку постоянный член $p_\varphi^2\kappa$ можно объединить с постоянной $2E$, то по отношению к переменной w вид бертрановских потенциалов во всех трех случаях одинаков.

Для евклидова пространства решениями задачи Бертрана являются потенциалы $V_c = \gamma w$ (кулоновский потенциал) и $V_o = \gamma w^{-2}, \gamma > 0$ (потенциал изотропного гармонического осциллятора) [4; 6]. Отсюда мы получаем обобщения этих потенциалов для пространств $\mathbf{S}^n$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$: $V_c = -\gamma/(vR)$ (кулоновский потенциал) и $V_o = \gamma v^2 R^2$ (осцилляторный потенциал).

Замечание 6.1. Заметим, что некоторые авторы [97; 136] нормируют потенциал V_c для пространства $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ таким образом, что $V_c \to 0$ на абсолюте, т. е. при $v \to 1$. Это дает выражение

$$V_c = \frac{\gamma}{R}(1 - \frac{1}{v}).$$

Слагаемое γ/R в этом случае должно быть включено во все соответствующие формулы ниже.

Сингулярность осцилляторного потенциала делит сферу $\mathbf{S}^2$ по экватору $\rho = \pi R/2$ на две области движения. Для фактор-пространства $\mathbf{P}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbf{S}^2/\mathrm{Z}_2$ эта сингулярность имеет место на антиподальном многообразии относительно центра потенциала.

6.2.1. Задача Кеплера

Рассмотрим вначале движение в потенциале V_c или *задачу Кеплера*. Пусть ρ обозначает расстояние от точки $v = 0$. Используя формулы

(1.21) и (1.27), нормируем потенциал V_c следующим образом:

$$V_{c,h} = -\frac{\gamma m}{R}\operatorname{cth}\frac{\rho}{R},\ V_{c,s} = -\frac{\gamma m}{R}\operatorname{ctg}\frac{\rho}{R},\ \gamma > 0,$$

где индекс «h» означает «hyperbolic», индекс «s» — «spherical» и

$$V_{c,h},\ V_{c,s} \to V_{c,e} := -\gamma m/\rho \text{ при } R \to +\infty.$$

Кулоновский потенциал $V_c(\rho)$ в пространствах $\mathbf{S}^3$ и $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$, так же как в евклидовом случае, обратно пропорционален площади сферы радиуса ρ.

Перенормируя при необходимости энергию E и импульс p_φ, будем считать ниже $m = 1$. Вычисляя интеграл в формуле (6.7), получаем траекторию частицы в виде

$$v(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},\ p := \frac{p_\varphi^2}{\gamma R},\ e := \sqrt{1 + \frac{2p_\varphi^2}{\gamma^2}\left(E - \frac{\kappa p_\varphi^2}{2}\right)}, \tag{6.8}$$

где нулевое значение переменной φ соответствует перицентру. Данный вид траектории совпадает с полярным уравнением коник (эллипсов, гипербол и парабол) на евклидовой плоскости. Ниже мы увидим, что это сходство имеет более глубокую причину.

6.2.1.1. Задача Кеплера в гиперболическом пространстве

Для траектории частицы имеем

$$2\left(E + \frac{\gamma}{vR}\right) - \frac{p_\varphi^2}{R^2}\left(\frac{1}{v^2} - 1\right) \geqslant 0 \text{ при } 0 \leqslant v < 1,$$

и поэтому

$$E \geqslant \widetilde{V}(v) := \frac{p_\varphi^2}{2R^2}\left(\frac{1}{v^2} - 1\right) - \frac{\gamma}{vR} \geqslant \widetilde{V}_{\min} = \begin{cases} -\dfrac{\gamma}{R} \text{ при } \dfrac{p_\varphi^2}{\gamma R} \geqslant 1, \\ -\dfrac{p_\varphi^2}{2R^2} - \dfrac{\gamma^2}{2p_\varphi^2} \text{ при } \dfrac{p_\varphi^2}{\gamma R} < 1. \end{cases}$$

Отметим, что $\dfrac{p}{1+e} < 1$ для всех допустимых значений E, p_φ, а траектория, определяемая формулой (6.8) (в единичном круге $v < 1$), является

связной. В случае $p_\varphi^2/(\gamma R) \geqslant 1$ функция $\widetilde{V}(v)$ не имеет локальных минимумов при $0 < v < 1$ и при $E \geqslant -\gamma/R$ движение не ограничено. В случае $p_\varphi^2/(\gamma R) < 1$ движение ограничено (т. е. его траектория компактна в единичном круге $v < 1$) при

$$-p_\varphi^2/(2R^2) - \gamma^2/(2p_\varphi^2) \leqslant E < -\gamma/R \tag{6.9}$$

и не ограничено при $E \geqslant -\gamma/R$.

Эллипс на евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$ определяется как множество точек $\mathbf{x} \in \mathbf{E}^2$, удовлетворяющих равенству

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) + \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2) = 2a = \text{const} \tag{6.10}$$

для двух фокусов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathbf{E}^2$, так что $2c := \operatorname{dist}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) < 2a$, см. рис. 6.1.

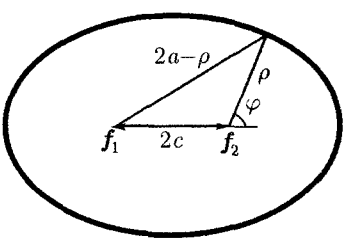

Рис. 6.1. Эллипс

Используя теорему косинусов, легко проверить, что

$$\rho(\varphi) = \frac{p_e}{1 + \varepsilon_e \cos\varphi}, \quad p_e = \frac{a^2 - c^2}{a}, \quad \varepsilon_e = \frac{c}{a}.$$

Рассмотрим то же определение для *эллипса на гиперболической плоскости* $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ (см. снова рис. 6.1). Гиперболическая теорема косинусов теперь дает

$$\operatorname{ch}\frac{2a - \rho}{R} = \operatorname{ch}\frac{2c}{R}\operatorname{ch}\frac{\rho}{R} + \operatorname{sh}\frac{2c}{R}\operatorname{sh}\frac{\rho}{R}\cos\varphi,$$

откуда

$$v(\varphi) = \operatorname{th}\frac{\rho}{R} = \frac{p_h}{1 + \varepsilon_h \cos\varphi} \tag{6.11}$$

для

$$p_h = \frac{\operatorname{ch}\frac{2a}{R} - \operatorname{ch}\frac{2c}{R}}{\operatorname{sh}\frac{2a}{R}}, \quad \varepsilon_h = \frac{\operatorname{sh}\frac{2c}{R}}{\operatorname{sh}\frac{2a}{R}}. \tag{6.12}$$

По определению, эллипс является ограниченной кривой и поэтому $\frac{p_h}{1-\varepsilon_h} < 1$ или

$$p_h + \varepsilon_h < 1. \tag{6.13}$$

С другой стороны, при выполнении (6.13) уравнение (6.11) задает эллипс для величин $a > c > 0$, определяемых из (6.12). Отметим, что для параметров p и e в (6.8) неравенство $p + e < 1$ эквивалентно неравенству $E < -\gamma/R$.

Таким образом, траектория частицы, определяемая уравнением (6.8) при $E < -\gamma/R$, является эллипсом, один из фокусов которого совпадает с центром потенциала V_c. Это утверждение является *первым законом Кеплера* для гиперболической плоскости.

Легко видеть, что для этого эллипса справедливо равенство

$$R\operatorname{th}\frac{2a}{R} = R\frac{v_{\max} + v_{\min}}{1 + v_{\max}v_{\min}} = -\frac{\gamma}{E}, \tag{6.14}$$

где $v_{\max} = v|_{\varphi=\pi} = p/(1-e)$, $v_{\min} = v|_{\varphi=0} = p/(1+e)$ и главная полуось эллипса a не зависит от значения импульса p_φ.

Для периода T движения частицы по эллиптической орбите справедливо выражение

$$T = 2\int\limits_{v_{\min}}^{v_{\max}} \frac{R^2 dv}{(1-v^2)\sqrt{2R^2(E + \frac{\gamma}{Rv}) + p_\varphi^2\frac{v^2-1}{v^2}}} =$$

$$= \frac{\pi R}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{-\frac{\gamma}{R} - E}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{R} - E}}\right).$$

Его независимость от значения p_φ имеет общую природу. Действительно, в силу теоремы Гордона [122] (см. также [125], гл. IV), если все

траектории гамильтоновой системы, лежащие на некотором уровне энергии $E = \mathrm{const}$, замкнуты, то их периоды одинаковы. С помощью формулы (6.14) можно выразить период T через величину главной полуоси a:

$$T = \frac{\pi R^{3/2}}{\sqrt{2\gamma}} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}\frac{2a}{R} - 1}} - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}\frac{2a}{R} + 1}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{R^3 \operatorname{sh}^3 \frac{a}{R} \operatorname{ch}\frac{a}{R}}. \tag{6.15}$$

Эта формула известна как *третий закон Кеплера* для гиперболической плоскости [154; 156].

Рассмотрим теперь неограниченные траектории. Модель Бельтрами–Клейна гиперболической плоскости (см. п. 1.3.3) основана на взаимнооднозначном соответствии между точками одной из пол двухполостного гиперболоида (1.22) в пространстве $\mathbb{R}^3$, наделенного метрикой Минковского (1.23) (при $n = 3$), и точками круга

$$D_R := \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \; x_3 = R,\, x_1^2 + x_2^2 < R^2\right).$$

Это соответствие устанавливается при помощи центральной проекции из точки $0 \in \mathbb{R}^3$. Это означает, что евклидовы коники в круге D_R (в частности, определенные уравнением $v = p_h/(1 + \varepsilon_h \cos\varphi)$ при $x_1 = Rv\cos\varphi, x_2 = Rv\sin\varphi$) соответствуют кривым на гиперболоиде, высекаемым конусами в пространстве $\mathbb{R}^3$ с вершинами в точке $0 \in \mathbb{R}^3$. Эти кривые на гиперболоиде (или их образы в круге D_R) можно рассматривать как *коники на гиперболической плоскости*. Более детальное описание коник на гиперболической плоскости можно найти в [40; 44; 68; 156; 209].[2]

В полной аналогии с евклидовым случаем *гиперболой* в пространстве $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ называется множество точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих равенству

$$|\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1) - \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_2)| = 2a = \mathrm{const} \tag{6.16}$$

для двух фокусов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R})$, так что $2c := \operatorname{dist}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) > 2a$, см. рис. 6.2.

[2]Представляется вероятным, что классификация коник на гиперболической плоскости была получена В. Стори в 1882 году [209]. Во всяком случае утверждение в [40], что она была получена Г. Либманом в [156], является, очевидно, ошибочным.

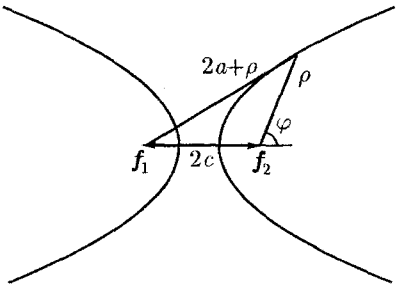

Рис. 6.2. Гипербола

Используя снова теорему косинусов (ср. с (6.11)) в случае нахождения правого фокуса $\mathbf{f}_2$ в точке $v = 0$, получаем формулу

$$v = \operatorname{th}\frac{\rho}{R} = \frac{p_h}{1 - \varepsilon_h \cos\varphi}$$

для правой ветви гиперболы и формулу

$$v = -\frac{p_h}{1 + \varepsilon_h \cos\varphi}$$

для левой ветви, где

$$p_h = \frac{\operatorname{ch}\frac{2c}{R} - \operatorname{ch}\frac{2a}{R}}{\operatorname{sh}\frac{2a}{R}}, \quad \varepsilon_h = \frac{\operatorname{sh}\frac{2c}{R}}{\operatorname{sh}\frac{2a}{R}} > 1. \tag{6.17}$$

Определение гиперболы влечет неравенство $-p_h/(1 - \varepsilon_h) < 1$, т. е.

$$\varepsilon_h - p_h > 1. \tag{6.18}$$

Наоборот, параметры p_h и ε_h, удовлетворяющие неравенству (6.18), соответствуют некоторой гиперболе с параметрами $c > a > 0$, определяемыми из (6.17).

При нарушении обоих неравенств (6.13) и (6.18), уравнение (6.11) определяет неограниченную конику с фокусом в точке $v = 0$. В граничном случае

$$\varepsilon_h + p_h = 1 \tag{6.19}$$

эта коника называется *гороэллипсом* [116] или *эллиптической параболой* [156], т. к. она является «большим эллипсом» с одной из его точек на абсолюте (см. рис. 6.3), совпадающей со вторым фокусом.

В другом граничном случае

$$\varepsilon_h - p_h = 1 \tag{6.20}$$

получаем *горогиперболу* [116] или *гиперболическую параболу* [156] со «вторым фокусом» на абсолюте. Остальные коники, определяемые уравнением (6.11) при выполнении неравенств

$$1 - p_h < \varepsilon_h < 1 + p_h, \tag{6.21}$$

были названы в [116; 156; 209] *полугиперболами*.

Используя формулы (6.18) — (6.21), прямыми вычислениями легко проверить, что траектория частицы является гороэллипсом при $E = -\gamma/R$, полугиперболой при $-\gamma/R < E < \gamma/R$, гороэллипсом при $E = \gamma/R$ и гиперболой при $E > \gamma/R$.

Дополнительный интеграл задачи Кеплера, ответственный за замкнутость всех ограниченных траекторий, может быть найден в виде многочлена второй степени относительно импульсов p_v и p_φ в одной из двух следующих эквивалентных форм:

$$I_{1,h} = \left(\frac{p_\varphi^2}{Rv} - \gamma\right)\cos\varphi + \frac{(1-v^2)p_v p_\varphi}{R}\sin\varphi,$$

$$I_{2,h} = \left(\frac{p_\varphi^2}{Rv} - \gamma\right)\sin\varphi - \frac{(1-v^2)p_v p_\varphi}{R}\cos\varphi.$$

Заметим, что $\partial I_{2,h}/\partial\varphi = I_{1,h}$. Эти выражения являются аналогами для гиперболической плоскости компонент *вектора Рунге–Ленца* в евклидовом случае. Легко проверить, что интегралы $p_\varphi, I_{1,h}, I_{2,h}$ и сама гамильтонова функция

$$h = \frac{(1-v^2)^2}{2R^2}p_v^2 + \frac{1-v^2}{2v^2R^2}p_\varphi^2 - \frac{\gamma}{R}\operatorname{cth}\frac{\rho}{R}$$

связаны тождеством

$$I_{1,h}^2 + I_{2,h}^2 = \gamma^2 + 2p_\varphi^2\left(h + \frac{p_\varphi^2}{2R^2}\right).$$

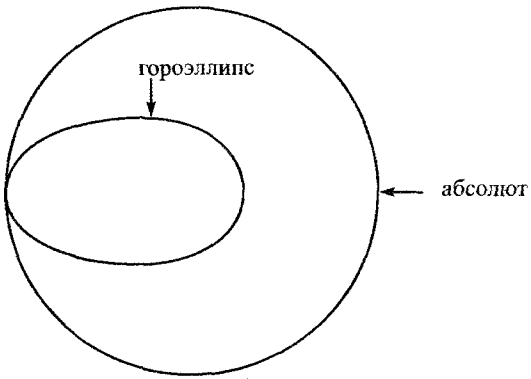

Рис. 6.3. Гороэллипс

6.2.1.2. Задача Кеплера на сфере

В сферическом случае координата ρ более удобна, чем координата v, поскольку последняя бесконечна на экваторе сферы. Гамильтонова функция при $m = 1$ принимает вид:

$$h = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{R^2 \sin^2 \rho/R}\right) - \frac{\gamma}{R} \operatorname{ctg} \frac{\rho}{R}.$$

На сфере $\mathbf{S}^2$ эллипс определяется тем же уравнением (6.10), что на евклидовой и гиперболической плоскостях. Теперь можно считать $2a \leqslant \leqslant \pi R$. В противном случае, при $\pi R < 2a < 2\pi R$, рассмотрим диаметрально противоположные (относительно фокусов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$) точки $\widetilde{\mathbf{f}}_1, \widetilde{\mathbf{f}}_2$ как новую пару фокусов. Тогда $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_i) = \pi R - \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{f}}_i)$, $i = 1, 2$, и

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{f}}_1) + \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{f}}_2) = 2\pi R - 2a < \pi R.$$

В случае $2a = 2c = \pi R$ любая точка сферы удовлетворяет уравнению (6.10). В случае $2c < 2a = \pi R$ это уравнение определяет большую окружность, проходящую через фокусы. В общем случае $0 \leqslant 2c < < 2a < \pi R$ с помощью сферической теоремы косинусов получаем (см. рис. 6.1):

$$\cos \frac{2a - \rho}{R} = \cos \frac{2c}{R} \cos \frac{\rho}{R} - \sin \frac{2c}{R} \sin \frac{\rho}{R} \cos \varphi,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{\rho}{R} = \frac{\cos\frac{2c}{R} - \cos\frac{2a}{R}}{\sin\frac{2a}{R} + \sin\frac{2c}{R}\cos\varphi} = \frac{p_s}{1+\varepsilon_s\cos\varphi}, \tag{6.22}$$

где

$$p_s = \frac{\cos\frac{2c}{R} - \cos\frac{2a}{R}}{\sin\frac{2a}{R}} > 0,\ \varepsilon_s = \frac{\sin\frac{2c}{R}}{\sin\frac{2a}{R}} > 0. \tag{6.23}$$

Если заменить один из фокусов эллипса на диаметрально противоположную точку, то получится уравнение гиперболы (6.16) и наоборот. Это означает, что сферические эллипсы и гиперболы суть одно и то же.

На траектории частицы справедливо неравенство

$$E \geqslant \widetilde{V}(\rho) := \frac{p_\varphi^2}{2R^2}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\rho}{R} + 1\right) - \frac{\gamma}{R}\operatorname{ctg}\frac{\rho}{R},\ 0 < \rho < \pi R.$$

Функция $\widetilde{V}(\rho)$ имеет один минимум

$$\widetilde{V}_{\min} = \frac{p_\varphi^2}{2R^2} - \frac{\gamma^2}{2p_\varphi^2}$$

и $\widetilde{V}(\rho) \to +\infty$ при $\rho \to 0$ или $\rho \to \pi R$. Таким образом, для $E \geqslant \widetilde{V}_{\min}$ получаем эллиптическую траекторию (при $p_\varphi \neq 0$), определенную уравнением

$$\operatorname{tg}\frac{\rho}{R} = \frac{p}{1+e\cos\varphi},\ p = \frac{p_\varphi^2}{\gamma R},\ e = \sqrt{1 + \frac{2p_\varphi^2}{\gamma^2}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2R^2}\right)},$$

что является *первым законом Кеплера* на сфере $\mathbf{S}^2$. В случае $E = \widetilde{V}_{\min}$ траектория является окружностью, определенной уравнением $\operatorname{tg}\frac{\rho}{R} = p$.

Для главной оси эллипса $2a$ имеем равенство

$$\operatorname{tg}\frac{2a}{R} = \operatorname{tg}\left(\frac{\rho_{\max} + \rho_{\min}}{R}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\rho_{\max}}{R} + \operatorname{tg}\frac{\rho_{\min}}{R}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\rho_{\max}}{R}\operatorname{tg}\frac{\rho_{\min}}{R}} = -\frac{\gamma}{RE}.$$

Это означает, что для отрицательных энергий главная ось эллипса короче четверти большой окружности ($2a < \pi R/2$), а для положительных энергий длиннее: $\pi R/2 < 2a < \pi R$. Аналогично (6.15) получаем формулу для периода обращения по орбите:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{R^3 \sin^3 \frac{a}{R} \cos \frac{a}{R}},$$

которая известна как *третий закон Кеплера* для сферы $\mathbf{S}^2$ (В. Киллинг, 1885, [147]).

Дополнительные интегралы имеют вид:

$$I_{1,s} = \left(\frac{p_\varphi^2}{R} \operatorname{ctg} \frac{\rho}{R} - \gamma\right) \cos\varphi + p_\rho p_\varphi \sin\varphi,$$

$$I_{2,s} = \left(\frac{p_\varphi^2}{R} \operatorname{ctg} \frac{\rho}{R} - \gamma\right) \sin\varphi - p_\rho p_\varphi \cos\varphi.$$

Эти выражения являются сферическими аналогами компонент вектора Рунге–Ленца в евклидовом случае. Снова $\partial I_{2,h}/\partial\varphi = I_{1,h}$. Тождество, связывающее интегралы $p_\varphi, I_{1,s}, I_{2,s}$ и h, имеет вид:

$$I_{1,s}^2 + I_{2,s}^2 = \gamma^2 + 2p_\varphi^2 \left(h - \frac{p_\varphi^2}{2R^2}\right).$$

6.2.2. Изотропный осциллятор

Нормируем потенциал изотропного осциллятора так, чтобы он сходился к евклидову выражению $\omega^2\rho^2/2$ при $R \to +\infty$:

$$V_{o,h} = \frac{1}{2}\omega^2 R^2 v^2 = \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \operatorname{th}^2 \frac{\rho}{R},\ V_{o,s} = \frac{1}{2}\omega^2 R^2 v^2 = \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\rho}{R}.$$

Вычисляя интеграл в (6.7), получаем формулу для траектории частицы в виде:

$$v^2(\varphi) = \frac{p_\varphi^2/R^2}{E - \frac{1}{2}p_\varphi^2\kappa - \sqrt{(E - \frac{1}{2}p_\varphi^2\kappa)^2 - \omega^2 p_\varphi^2 \cos 2\varphi}}. \tag{6.24}$$

Мы покажем, что это выражение определяет эллипс с центром в точке $v = 0$ или неограниченную кривую (последнее возможно только в гиперболическом случае).

6.2.2.1. Изотропный осциллятор на гиперболической плоскости

На траектории частицы выполняется неравенство

$$E \geqslant \widetilde{V}(v) := \frac{p_\varphi^2}{2R^2}\left(\frac{1}{v^2} - 1\right) + \frac{1}{2}\omega^2 v^2 R^2 \geqslant \widetilde{V}_{\min} =$$

$$= \begin{cases} \omega p_\varphi - \dfrac{p_\varphi^2}{2R^2} \text{ при } p_\varphi < \omega R^2, \\ \dfrac{\omega^2 R^2}{2} \text{ при } p_\varphi \geqslant \omega R^2. \end{cases}$$

Движение является финитным тогда и только тогда, когда

$$p_\varphi < \omega R^2,\ \omega p_\varphi - \frac{p_\varphi^2}{2R^2} \leqslant E < \frac{\omega^2 R^2}{2}, \tag{6.25}$$

и инфинитным при $E \geqslant \omega^2 R^2/2$. Для периода финитного движения справедлива формула

$$T = \frac{2\pi R}{\sqrt{\omega^2 R^2 - 2E}}.$$

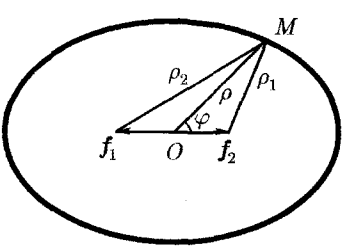

Рис. 6.4. Эллипс

Если кривая, определенная формулой (6.24) при $\kappa = -R^{-2}$, финитна, то она является эллипсом с центром в точке $v = 0$. Действительно, рассмотрим рис. 6.4, где $\rho_1 := \operatorname{dist}(\mathbf{f}_1, M), \rho_2 := \operatorname{dist}(\mathbf{f}_2, M), \rho_1 + \rho_2 = 2a = \text{const}$, $\rho := \operatorname{dist}(O, M)$, $\operatorname{dist}(O, \mathbf{f}_1) = \operatorname{dist}(O, \mathbf{f}_2) = c$.

По теореме косинусов получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\frac{\rho_1}{R} &= \operatorname{ch}\frac{\rho}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{\rho}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\varphi, \\ \operatorname{ch}\frac{\rho_2}{R} &= \operatorname{ch}\frac{\rho}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} + \operatorname{sh}\frac{\rho}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Кроме этого, справедливо тождество

$$\left(\operatorname{ch}\frac{\rho_1+\rho_2}{R}-\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{R}\operatorname{ch}\frac{\rho_2}{R}\right)^2=\operatorname{sh}^2\frac{\rho_1}{R}\operatorname{sh}^2\frac{\rho_2}{R}=\left(1-\operatorname{ch}^2\frac{\rho_1}{R}\right)\left(1-\operatorname{ch}^2\frac{\rho_2}{R}\right)=$$
$$=\left(1+\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{R}\operatorname{ch}\frac{\rho_2}{R}\right)^2-\left(\operatorname{ch}\frac{\rho_1}{R}+\operatorname{ch}\frac{\rho_2}{R}\right)^2. \qquad (6.27)$$

Подставляя выражения (6.26) для величин $\operatorname{ch}(\rho_1/R), \operatorname{ch}(\rho_2/R)$ и выражение $\rho_1+\rho_2=2a$ в формулу (6.27), получаем

$$\operatorname{ch}^2\frac{a}{R}\operatorname{sh}^2\frac{a}{R}=\operatorname{ch}^2\frac{c}{R}\operatorname{sh}^2\frac{a}{R}\operatorname{ch}^2\frac{\rho}{R}-\operatorname{sh}^2\frac{c}{R}\operatorname{ch}^2\frac{a}{R}\operatorname{sh}^2\frac{\rho}{R}\cos^2\varphi. \qquad (6.28)$$

Если $\varphi=\pi/2$, то $\rho_1=\rho_2=a, \rho=b$, где b — малая полуось данного эллипса и $\operatorname{ch}(a/R)=\operatorname{ch}(c/R)\operatorname{ch}(b/R)$. Исключая c из (6.28) с помощью последнего уравнения, можно свести уравнение эллипса к виду:

$$\frac{\operatorname{th}^2(\rho/R)}{\operatorname{th}^2(a/R)}\cos^2\varphi+\frac{\operatorname{th}^2(\rho/R)}{\operatorname{th}^2(b/R)}\sin^2\varphi=1, \qquad (6.29)$$

которое аналогично уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\rho^2}{a^2}\cos^2\varphi+\frac{\rho^2}{b^2}\sin^2\varphi=1$$

для эллипса на евклидовой плоскости. Другой вариант уравнения (6.29) имеет вид

$$\operatorname{th}^2\frac{\rho}{R}=\frac{2\operatorname{th}^2(a/R)\operatorname{th}^2(b/R)}{\operatorname{th}^2(a/R)+\operatorname{th}^2(b/R)-\left(\operatorname{th}^2(a/R)-\operatorname{th}^2(b/R)\right)\cos 2\varphi},$$

что совпадает с (6.24) при $\kappa=-R^{-2}$, если выполнены неравенства (6.25).

Отметим, что

$$\operatorname{th}\frac{a}{R}=\operatorname{th}\frac{\rho}{R}\bigg|_{\varphi=0}, \quad \operatorname{th}\frac{b}{R}=\operatorname{th}\frac{\rho}{R}\bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом, из (6.24) получаем

$$\operatorname{th}^2\frac{a}{R}=v^2(0)=\frac{p_\varphi^2/R^2}{E+\frac{1}{2}p_\varphi^2R^{-2}-\sqrt{(E+\frac{1}{2}p_\varphi^2R^{-2})^2-\omega^2p_\varphi^2}},$$

$$\operatorname{th}^2 \frac{b}{R} = v^2(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{p_\varphi^2/R^2}{E + \frac{1}{2}p_\varphi^2 R^{-2} + \sqrt{(E + \frac{1}{2}p_\varphi^2 R^{-2})^2 - \omega^2 p_\varphi^2}},$$

и поэтому

$$\operatorname{th}\frac{a}{R}\operatorname{th}\frac{b}{R} = \frac{p_\varphi}{\omega R^2},$$

что означает, что данная функция длин полуосей не зависит от энергии E.

Инфинитные траектории изотропного осциллятора на плоскости $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ состоят из двух симметричных компонент и не имеют аналогов в евклидовом пределе.

Дополнительный интеграл для изотропного осциллятора, ответственный за замкнутость всех ограниченных траекторий, может быть найден, как и для задачи Кеплера, в одной из двух следующих эквивалентных форм:

$$J_{1,h} = \left(\frac{p_\varphi^2}{R^2 v^2} - \frac{p_v^2(1-v^2)^2}{R^2} - \omega^2 R^2 v^2\right)\cos 2\varphi + 2\frac{p_v p_\varphi}{R^2 v}(1-v^2)\sin 2\varphi,$$

$$J_{2,h} = \left(\frac{p_\varphi^2}{R^2 v^2} - \frac{p_v^2(1-v^2)^2}{R^2} - \omega^2 R^2 v^2\right)\sin 2\varphi - 2\frac{p_v p_\varphi}{R^2 v}(1-v^2)\cos 2\varphi.$$

Эти выражения аналогичны компонентам *тензора Фрадкина* для евклидова случая. Интегралы $p_\varphi, J_{1,h}, J_{2,h}$ и сама гамильтонова функция

$$h = \frac{(1-v^2)^2}{2R^2}p_v^2 + \frac{1-v^2}{2v^2R^2}p_\varphi^2 + \frac{1}{2}\omega^2 v^2 R^2$$

связаны тождеством

$$J_{1,h}^2 + J_{2,h}^2 = \left(2h + \frac{p_\varphi^2}{R^2}\right)^2 - 4p_\varphi^2\omega^2.$$

6.2.2.2. Изотропный осциллятор на сфере

Гамильтонова функция при $m = 1$ имеет теперь вид

$$h = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{R^2\sin^2(\rho/R)}\right) + \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \operatorname{tg}^2\frac{\rho}{R}.$$

Для энергии справедливо неравенство

$$E \geqslant \widetilde{V}(\rho) := \frac{p_\varphi^2}{2R^2}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\rho}{R}+1\right)+\frac{1}{2}\omega^2R^2\operatorname{tg}^2\frac{\rho}{R},$$

откуда

$$E \geqslant \widetilde{V}_{\min} = p_\varphi\omega + \frac{p_\varphi^2}{2R^2}.$$

Для всех энергий движение происходит на полусфере $\rho \leqslant \pi R/2$, поскольку $\operatorname{tg}^2\dfrac{\rho}{R} \to +\infty$ при $\rho \to \pi R/2$. В силу данного факта такое движение можно рассматривать как движение по проективной плоскости $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$. Для периода справедливо выражение

$$T = \frac{2\pi R}{\sqrt{\omega^2R^2+2E}}.$$

Все траектории являются эллипсами с центрами в точке $\rho = 0$. В полной аналогии с гиперболическим случаем для этих эллипсов получаем следующие эквивалентные уравнения:

$$\frac{\operatorname{tg}^2(\rho/R)}{\operatorname{tg}^2(a/R)}\cos^2\varphi+\frac{\operatorname{tg}^2(\rho/R)}{\operatorname{tg}^2(b/R)}\sin^2\varphi = 1,$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\rho}{R} = \frac{2\operatorname{tg}^2(a/R)\operatorname{tg}^2(b/R)}{\operatorname{tg}^2(a/R)+\operatorname{tg}^2(b/R)-\left(\operatorname{tg}^2(a/R)-\operatorname{tg}^2(b/R)\right)\cos 2\varphi},$$

где a и b являются длинами полуосей. Аналогично гиперболическому случаю также справедливо равенство

$$\operatorname{tg}\frac{a}{R}\operatorname{tg}\frac{b}{R} = \frac{p_\varphi}{\omega R^2}.$$

Дополнительные интегралы (сферические аналоги тензора Фрадкина) теперь имеют вид

$$J_{1,s} = \left(\frac{p_\varphi^2}{R^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\rho}{R}-p_\rho^2-\omega^2R^2\operatorname{tg}^2\frac{\rho}{R}\right)\cos 2\varphi+2\frac{p_\rho p_\varphi}{R}\operatorname{ctg}\frac{\rho}{R}\sin 2\varphi,$$

$$J_{2,s} = \left(\frac{p_\varphi^2}{R^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\rho}{R}-p_\rho^2-\omega^2R^2\operatorname{tg}^2\frac{\rho}{R}\right)\sin 2\varphi-2\frac{p_\rho p_\varphi}{R}\operatorname{ctg}\frac{\rho}{R}\cos 2\varphi.$$

Тождество, связывающее интегралы $p_\varphi, J_{1,s}, J_{2,s}$ и гамильтонову функцию h, в данном случае есть

$$J_{1,h}^2 + J_{2,h}^2 = \left(2h - \frac{p_\varphi^2}{R^2}\right)^2 - 4p_\varphi^2\omega^2.$$

§ 6.3. Квантово-механическая одночастичная задача для бертрановских потенциалов в пространствах постоянной кривизны

Подобно евклидовому случаю, квантово-механическая одночастичная задача для бертрановских потенциалов в пространствах $\mathbf{S}^n$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ наследует многие симметрийные свойства классической.

Отметим прежде всего, что для обоих пространств при $n = 3$ справедливо равенство

$$\triangle(V_c) = 4\pi\gamma\delta, \tag{6.30}$$

где δ — дельта-функция, центрированная в центре потенциала V_c. Данное равенство получается так же, как в евклидовом случае. Уравнение (6.30) является мотивировкой введения потенциала V_c, независимой от обобщенной задачи Бертрана. Для осцилляторного потенциала в евклидовом пространстве справедливо равенство $\triangle(V_o) = \mathrm{const}$, но для пространств $\mathbf{S}^n$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ оно нарушается.

Рассмотрим спектральную квантово-механическую задачу

$$H_V\psi = -\frac{1}{2}\triangle\psi + V\psi = E\psi$$

для бертрановского потенциала V.

6.3.1. Гиперболический случай

Теорема 2.11 дает самосопряженность оператора H_{V_c} при $n \geqslant 2$ и $V_1 = 0$ с областью определения $\mathrm{Dom}(H_V)$, заданной формулой (2.28). Та же теорема дает самосопряженность оператора H_{V_o} при $n \geqslant 2$ и $V_2 = 0$ с областью определения, заданной той же формулой. Отметим, что во всех случаях, кроме H_{V_c} при $n = 2$, теорема 2.10 также применима. Из (1.26) и (2.16) получается следующее выражение для оператора

Лапласа–Бельтрами

$$\triangle = \frac{(1-v^2)^2}{R^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \left(\frac{n-1}{v} + \frac{(n-3)v}{1-v^2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{1-v^2}{R^2 v^2}\triangle_s,\ 0 < v < 1, \tag{6.31}$$

где $\triangle_s$ — оператор Лапласа–Бельтрами на сфере $\mathbf{S}^{n-1}$ со стандартной метрикой $\widetilde{g}_s$.

Аналогично (2.38) имеется следующий изоморфизм гильбертовых пространств:

$$\mathcal{L}^2(\mathbf{H}^n(\mathbb{R}), d\mu) \cong \mathcal{L}^2((0,1), d\mu_1) \otimes \mathcal{L}^2\left(\mathbf{S}^{n-1}, d\mu_{\mathbf{S}^{n-1}}\right),$$

где μ — мера на пространстве $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, определенная формулой (2.25) для метрики (1.26),

$$d\mu_1 = \frac{Rv^{n-1}}{(1-v^2)^{\frac{n+1}{2}}}dv$$

и $d\mu_{\mathbf{S}^{n-1}}$ — мера на пространстве $\mathbf{S}^{n-1}$, определенная формулой (2.25) для метрики $\widetilde{g}_s$.

При $n \geqslant 3$ оператор $\triangle_s$ имеет систему собственных функций $Y^{(n)}_{l,\mathbf{m}}$, полную в пространстве $\mathcal{L}^2\left(\mathbf{S}^{n-1}, d\mu_{\mathbf{S}^{n-1}}\right)$ [20]. Здесь $l = 0, 1, 2, \ldots$, а $\mathbf{m}$ — мультииндекс вида

$$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_{n-3}, \pm m_{n-2}),\ m_i \in \mathbb{Z},\ l \geqslant m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_{n-2} \geqslant 0.$$

При $n = 2$ полная система собственных функций для оператора $\triangle_s$ есть $Y_l = e^{\mathbf{i}l\phi}$, $l \in \mathbb{Z}$. Соответствующими собственными значениями во всех случаях являются $-l(l+n-2)$. Собственные функции, соответствующие $l = 0$, постоянны и предполагаются равными 1.

Пусть $\psi \in \mathrm{Dom}(H_V)$ — собственная функция оператора H_V. Ее можно представить в виде

$$\psi = \sum_{l,\mathbf{m}} \chi_{l,\mathbf{m}} Y^{(n)}_{l,\mathbf{m}},$$

где $\chi_{l,\mathbf{m}} \in W^{1,2}((0,1), d\mu_1)$ и тогда

$$H_V\psi = \sum_{l,\mathbf{m}}\left(-\frac{(1-v^2)^2}{2R^2}\left(\chi''_{l,\mathbf{m}}(v) + \left(\frac{n-1}{v} + \frac{(n-3)v}{1-v^2}\right)\chi'_{l,\mathbf{m}}(v)\right) + \right.$$

$$+\left(V+\frac{1-v^2}{2R^2v^2}l(l+n-2)\right)\chi_{l,\mathbf{m}}(v)\Bigg)Y_{l,\mathbf{m}}^{(n)}=\sum_{l,\mathbf{m}}E\chi_{l,\mathbf{m}}(v)Y_{l,\mathbf{m}}^{(n)}.$$

В силу линейной независимости функций $Y_{l,\mathbf{m}}^{(n)}$, отсюда получается спектральная задача для радиальной компоненты $\chi_{l,\mathbf{m}}(v)=:\chi_l(v)$ собственной функции $\chi_{l,\mathbf{m}}Y_{l,\mathbf{m}}^{(n)}$:

$$\begin{gathered}\frac{(1-v^2)^2}{2R^2}\left(\chi_l''(v)+\left(\frac{n-1}{v}+\frac{(n-3)v}{1-v^2}\right)\chi_l'(v)\right)+\\+\left(E-V-\frac{1-v^2}{2R^2v^2}l(l+n-2)\right)\chi_l(v)=0,\ 0<v<1.\end{gathered}\tag{6.32}$$

Условие $\psi\in\mathrm{Dom}(H_V)$ накладывает ограничения на асимптотики функции $\chi_l(v)$ при $v\to+0$ и $v\to1-0$.

6.3.1.1. Задача Кулона

Пусть $n\geqslant2$, $V=V_c=-\dfrac{\gamma}{Rv}$, тогда уравнение (6.32) принимает вид

$$\begin{gathered}\chi_l''(v)+\left(\frac{n-1}{v}+\frac{(n-3)v}{1-v^2}\right)\chi_l'(v)+\\+\left(\frac{2ER^2}{(1-v^2)^2}-\frac{l(l+n-2)}{v^2(1-v^2)}+\frac{2R\gamma}{v(1-v^2)^2}\right)\chi_l(v)=0,\\0<v<1.\end{gathered}\tag{6.33}$$

Сравнив это уравнение с уравнением (B.1), мы видим, что в комплексной плоскости уравнение (6.33) является фуксовым уравнением с особыми точками $\pm1,0$, т.к. точка ∞ является обыкновенной, что легко проверить, сделав подстановку $v=\zeta^{-1},\zeta\to0$.

Вычисление критических показателей в этих точках приводит к выражениям:

$$\rho_1^{(1)}=\frac{n-1+\sqrt{(n-1)^2-8R(ER+\gamma)}}{4},$$

$$\rho_2^{(1)}=\frac{n-1-\sqrt{(n-1)^2-8R(ER+\gamma)}}{4},$$

$$\rho_1^{(-1)} = \frac{n-1+\sqrt{(n-1)^2-8R(ER-\gamma)}}{4},$$

$$\rho_2^{(-1)} = \frac{n-1-\sqrt{(n-1)^2-8R(ER-\gamma)}}{4},$$

$$\rho_1^{(0)} = l,\ \rho_2^{(0)} = 2-l-n.$$

Более того, уравнение (6.33) является уравнением Римана вида (B.2) с $\rho_2^{(\pm 1)} \leqslant \rho_1^{(\pm 1)}$, $\rho_2^{(0)} \leqslant \rho_1^{(0)}$.

Условие $\chi_l Y_{l,\mathbf{m}}^{(n)} \in \mathrm{Dom}(H_{V_c})$ означает, что

$$\int\limits_0^1 \frac{\chi_l^2 v^{n-1} dv}{(1-v^2)^{\frac{n+1}{2}}} < \infty, \tag{6.34}$$

$$\triangle\left(\chi_l Y_{l,\mathbf{m}}^{(n)}\right) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{H}^n(\mathbb{R}), d\mu). \tag{6.35}$$

Из неравенства (6.34) следует $\rho^{(0)} > -n/2$ и $\rho^{(1)} > (n-1)/4$, если $\chi_l \sim v^{\rho^{(0)}}$ при $v \to 0$ и $\chi_l \sim v^{\rho^{(1)}}$ при $v \to 1$. Поскольку неравенство $\rho_2^{(0)} = 2-l-n > -n/2$ влечет $n < 2(2-l)$, то асимптотика $\chi_l \sim v^{\rho_2^{(0)}}$ противоречит условию $n \geqslant 2$ при $l \geqslant 1$. Если же $l = 0$, то $n = 3$ или $n = 2$. При $n = 3, l = 0$ асимптотика $\chi_0 \sim v^{\rho_2^{(0)}} = 1/v$ дает $\triangle\chi_l(v) \sim \delta(0)$, что противоречит условию (6.35). В случае $n = 2, l = 0$ получаем $\rho_1^{(0)} = \rho_2^{(0)} = 0$ и из теории фуксовых уравнений [29] следует, что канонические асимптотики решений уравнения (6.33) вблизи точки $v = 0$ суть 1 и $\log v$. Последняя асимптотика снова ведет к $\triangle\chi_l(v) \sim \delta(0)$, что противоречит условию (6.35). Таким образом, должно быть $\chi_l \sim v^{\rho_1^{(0)}}$ при $v \to 0$.

Из неравенства

$$\rho_{1,2}^{(1)} = \frac{n-1\pm\sqrt{(n-1)^2-8R(ER+\gamma)}}{4} > \frac{n-1}{4}$$

следует условие $\chi_l \sim (v-1)^{\rho_1^{(1)}}$ при $v \to 1$ и

$$(n-1)^2 - 8R(ER+\gamma) > 0. \tag{6.36}$$

Наоборот, если $\chi_l \sim v^{\rho_1^{(0)}}$ при $v \to 0$, $\chi_l \sim (v-1)^{\rho_1^{(1)}}$ при $v \to 1$ и выполнено неравенство (6.36), то $\chi_l Y_{l,\mathbf{m}}^{(n)} \in \mathrm{Dom}(H_{V_c})$.

Согласно общей теории (см. приложение B) уравнение (6.33) можно привести к гипергеометрическому виду подстановкой:

$$z := \frac{v-1}{2v},\ w_l(z) := \chi_l(v)\left(\frac{v}{1-v}\right)^{\rho_1^{(1)}}\left(\frac{v}{1+v}\right)^{\rho_2^{(-1)}}.$$

Выражения

$$\left(\frac{v}{1+v}\right)^{\rho_2^{(-1)}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{v}{1+v}\right)^{\rho_1^{(1)}}$$

обозначают здесь ветви многозначных функций, голоморфных на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}\cup\infty$ с разрезом вдоль $[-\infty,0]\cup[1,+\infty]$ и вещественных на сегменте $[0,1]$.

Данная подстановка переводит особые точки $0,1,-1$ соответственно в точки $\infty,0,1$, а вещественный интервал $(0,1)$ в интервал $(-\infty,0)$. Функция $w_l(z)$ удовлетворяет уравнению (B.5) и имеет следующие критические показатели: в точке $z=\infty$ показатели

$$\alpha = \rho_1^{(1)} + \rho_2^{(-1)} + \rho_1^{(0)} = \frac{n-1}{2} + l +$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER+\gamma)} - \sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER-\gamma)}\right),$$
$$\beta = \rho_1^{(1)} + \rho_2^{(-1)} + \rho_2^{(0)} = \frac{3-n}{2} - l +$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER+\gamma)} - \sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER-\gamma)}\right) < \alpha;$$

в точке $z=0$ показатели 0 и

$$1-\widetilde{\gamma} := \rho_2^{(1)} - \rho_1^{(1)} = -\frac{1}{2}\sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER+\gamma)};$$

а в точке $z=1$ показатели 0 и $\widetilde{\gamma}-\alpha-\beta$. Отметим, что $\alpha-\beta = n+2l-$ $-2 =: l_1 \geqslant 1$.

Функция $w_l(z)$ при $-\infty < z < 0$ соответствует функции $\chi_l(v)$ при $0 < v < 1$ и должна иметь асимптотики $w_l(z) \sim z^{-\alpha}$ при $z \to -\infty$ и $w_l(z) \sim \mathrm{const}$ при $z \to 0$. Согласно приложению B это означает, что

$$w_l(z) = F(\alpha,\beta;\widetilde{\gamma};z) \quad \text{и} \quad \lim_{z\to-\infty} F(\alpha,\beta;\widetilde{\gamma};z)z^{\beta} = 0.$$

В силу (B.13) для $\alpha - \beta = l_1 \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\lim_{z \to -\infty} F(\alpha, \beta; \widetilde{\gamma}; z)(-z)^{\beta} = \frac{\Gamma(\widetilde{\gamma})\Gamma(l_1)}{\Gamma(\widetilde{\gamma} - \beta)\Gamma(\alpha)}. \tag{6.37}$$

Гамма-функция не имеет нулей в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и имеет полюса в точках $0, -1, -2, \ldots$. Поскольку $\widetilde{\gamma} > 0$ и

$$\widetilde{\gamma} - \beta = \frac{n-1}{2} + l +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER+\gamma)} + \sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER-\gamma)}\right) > 0,$$

то должно быть $\alpha = -k+1$, $k \in \mathbb{N}$, *или, эквивалентно,*

$$\sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER+\gamma)} - \sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER-\gamma)} = -4(k+l) - 2n + 6.$$

Умножая последнее уравнение на выражение

$$\sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER+\gamma)} + \sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER-\gamma)},$$

получаем

$$\sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER+\gamma)} + \sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER-\gamma)} = \frac{8R\gamma}{2(k+l)+n-3}.$$

Учитывая неравенство (6.36), приходим отсюда к равенству

$$\sqrt{(n-1)^2 - 8R(ER+\gamma)} = \frac{4R\gamma}{2(k+l)+n-3} - (2(k+l)+n-3) > 0.$$

Окончательно получаем формулу

$$E_{k,l} = \frac{(n-1)^2}{8R^2} - \frac{2\gamma^2}{(2(k+l)+n-3)^2} - \frac{(2(k+l)+n-3)^2}{8R^2},$$
$$1 \leqslant k < \sqrt{R\gamma} + \frac{3-n}{2} - l. \tag{6.38}$$

Для $\alpha = -k+1$, $k \in \mathbb{N}$, функция $F(\alpha, \beta; \widetilde{\gamma}; z)$ является полиномом $(k-1)$-й степени и радиальная часть собственной функции принимает вид:

$$\chi_{k,l}(v) = \left(\frac{1-v}{v}\right)^{\rho_1^{(1)}} \left(\frac{1+v}{v}\right)^{\rho_2^{(-1)}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(1-k)_i (3-k-n-2l)_i}{i!(\widetilde{\gamma})_i} \left(\frac{v-1}{2v}\right)^i, \tag{6.39}$$

где

$$\widetilde{\gamma} = \frac{5-n}{2} - k - l + \frac{2R\gamma}{2(k+l)+n-3}, \quad \rho_1^{(1)} = \frac{1-k-l}{2} + \frac{R\gamma}{2(k+l)+n-3},$$

$$\rho_2^{(-1)} = \frac{1-k-l}{2} - \frac{R\gamma}{2(k+l)+n-3}.$$

Сделаем несколько замечаний касательно формул (6.38) и (6.39). В пределе $R \to \infty$ формула (6.38) дает уровни энергии задачи Кулона в евклидовом пространстве

$$E_{k,l} = -\frac{2\gamma^2}{(2(k+l)+n-3)^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При $n = 3$ это *формула Балмера*. Собственные функции (6.39) в пределе $R \to \infty$ также сходятся к своим евклидовым аналогам.

Если потенциал V_c нормирован в соответствии с замечанием 6.1, то в формуле (6.38) появляется дополнительное постоянное слагаемое γ/R.

Так же как и в евклидовом случае, энергетические уровни зависят только от суммы $k+l$, что означает наличие такого же их вырождения.

В отличие от евклидова случая существует только конечное число связанных состояний (при $\sqrt{R\gamma} + (3-n)/2 - l < 1$ связанных состояний нет вовсе).

Значения энергии $E_{k,l}$ растут с ростом значений k при выполнении неравенства в (6.38). Если $\sqrt{R\gamma} + (3-n)/2 - l = k_1 + \varepsilon$, $k_1 \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$, то

$$E_{k_1,l} \to \frac{(n-1)^2}{8R^2} - \frac{\gamma}{R} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0,$$

что превышает классический энергетический порог (см. (6.9)) на величину

$$\frac{(n-1)^2}{8R^2}. \tag{6.40}$$

Это слагаемое в (6.38) имеет следующую природу. Спектр оператора Лапласа–Бельтрами в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbf{H}^n(\mathbb{R}), d\mu)$ (чисто непрерывный) есть

$$\left(-\infty, -\frac{(n-1)^2R^2}{4}\right]$$

(см. [168]), и поэтому слагаемое $(n-1)^2/(8R^2)$ является просто нижней границей спектра оператора $-\frac{1}{2}\Delta$. При $n = 3$ это было уже отмечено в [136]. Заметим, что некоторые авторы предпочитают исключать это слагаемое из формулы (6.38), вычитая его из гамильтониана H_V при квантовании.

6.3.1.2. Осциллятор

Пусть $n \geqslant 2$, $V = V_o = \frac{1}{2}\omega^2 R^2 v^2$. Уравнение (6.32) принимает вид

$$\chi_l''(v) + \left(\frac{n-1}{v} + \frac{(n-3)v}{1-v^2}\right)\chi_l'(v) + \tag{6.41}$$
$$+ \left(\frac{2ER^2}{(1-v^2)^2} - \frac{l(l+n-2)}{v^2(1-v^2)} - \frac{R^4\omega^2 v^2}{(1-v^2)^2}\right)\chi_l(v) = 0, \quad 0 < v < 1.$$

Данное уравнение является фуксовым и имеет особые точки $\pm 1, 0, \infty$. Критические показатели в этих точках суть:

$$\rho_1^{(1)} = \rho_1^{(-1)} = \frac{n-1+\sqrt{(n-1)^2 - 8ER^2 + 4R^4\omega^2}}{4},$$
$$\rho_1^{(\infty)} = \frac{1+\sqrt{1+4R^4\omega^2}}{2},$$
$$\rho_2^{(1)} = \rho_2^{(-1)} = \frac{n-1-\sqrt{(n-1)^2 - 8ER^2 + 4R^4\omega^2}}{4},$$
$$\rho_2^{(\infty)} = \frac{1-\sqrt{1+4R^4\omega^2}}{2}, \quad \rho_1^{(0)} = l, \quad \rho_2^{(0)} = 2-l-n.$$

Рассуждения, аналогичные проведенным выше для задачи Кулона, позволяют заключить, что функция $\chi_l Y_{l,\mathbf{m}}^{(n)}$ принадлежит пространству $\mathrm{Dom}(H_{V_o})$ тогда и только тогда, когда $\chi_l \sim v^{\rho_1^{(0)}}$ при $v \to 0$; $\chi_l \sim (v - 1)^{\rho_1^{(1)}}$ при $v \to 1$ и, кроме того:

$$(n-1)^2 - 8ER^2 + 4R^4\omega^2 > 0. \tag{6.42}$$

Уравнение (6.41) можно привести к уравнению Римана, используя равенства $\rho_i^{(1)} = \rho_i^{(-1)}$, $i = 1, 2$. Замена переменных[3]

$$\chi_l(v) = w_l(z) z^{\frac{1}{2}\rho_1^{(0)}} (1-z)^{\rho_1^{(1)}}, \; z = v^2,$$

склеивает точки ± 1 друг с другом и приводит к гипергеометрическому уравнению (B.5) для функции $w_l(z)$ с

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2}\left(\rho_1^{(\infty)} + l\right) + \rho_1^{(1)} = \\
&= \frac{1}{4}\left(n + 2l + \sqrt{1 + 4R^4\omega^2} + \sqrt{(n-1)^2 - 8ER^2 + 4R^4\omega^2}\right), \\
\beta &= \frac{1}{2}\left(\rho_2^{(\infty)} + l\right) + \rho_1^{(1)} = \\
&= \frac{1}{4}\left(n + 2l - \sqrt{1 + 4R^4\omega^2} + \sqrt{(n-1)^2 - 8ER^2 + 4R^4\omega^2}\right), \\
\gamma &= 1 + \frac{1}{2}(l - \rho_2^{(0)}) = l + \frac{n}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Выражение $z^{\frac{1}{2}\rho_1^{(0)}} (1-z)^{\rho_1^{(1)}}$ обозначает здесь ветвь многозначной функции, голоморфную на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \infty$ с разрезом вдоль $[-\infty, 0] \cup [1, +\infty]$ и вещественную на интервале $(0, 1)$.

Функция $w_l(z)$ на интервале $(0, 1)$ должна иметь асимптотики ~ 1 при $z \to +0$ и при $z \to 1-0$. Учитывая неравенство $1 - \gamma = 1 - l - n/2 < 0$ и формулу (B.10), получаем:

$$w_l(z) = F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$

и

$$\lim_{z \to 1-0} F(\alpha, \beta; \gamma; z)(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = 0.$$

В силу $\alpha > 0$ имеется единственная возможность $\beta = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ или, эквивалентно,

$$\sqrt{1 + 4R^4\omega^2} - \sqrt{(n-1)^2 - 8ER^2 + 4R^4\omega^2} = 2(2k + l) + n.$$

[3]Эта замена соответствует первому случаю теоремы B.1.

Умножая последнее уравнение на выражение

$$\sqrt{1+4R^4\omega^2}+\sqrt{(n-1)^2-8ER^2+4R^4\omega^2},$$

получаем равенство

$$\sqrt{1+4R^4\omega^2}+\sqrt{(n-1)^2-8ER^2+4R^4\omega^2}=\frac{8ER^2+1-(n-1)^2}{2(2k+l)+n}.$$

Отсюда имеем

$$2\sqrt{1+4R^4\omega^2}=\frac{8ER^2+1-(n-1)^2}{2(2k+l)+n}+2(2k+l)+n,$$

$$2\sqrt{(n-1)^2-8ER^2+4R^4\omega^2}=\frac{8ER^2+1-(n-1)^2}{2(2k+l)+n}-2(2k+l)-n>0.$$

Окончательно получаем

$$E_{k,l}=\omega(2k+l+\frac{n}{2})\sqrt{1+\frac{1}{4R^4\omega^2}}-\frac{1}{2R^2}\left((2k+l)^2+(2k+l)n+\frac{n}{2}\right),$$

$$l\leqslant 2k+l<\omega R^2\sqrt{1+\frac{1}{4R^4\omega^2}}-\frac{n}{2}. \tag{6.43}$$

Соответствующая радиальная часть собственной функции имеет вид:

$$\chi_{k,l}(v)=v^l\left(1-v^2\right)^{\rho_1^{(1)}}\sum_{i=0}^{k}\frac{(\alpha)_i(-k)_i}{(l+n/2)_i}\frac{v^i}{i!},$$

где величины $\alpha,\rho_1^{(1)}$ определяются формулами выше при $E=E_{k,l}$.

Замечания, сделанные относительно формул (6.38) и (6.39), справедливы и в данном случае. Отметим только, что если

$$\omega R^2\sqrt{1+\frac{1}{4R^4\omega^2}}-\frac{n}{2}=2k_1+l+\varepsilon,\ \varepsilon>0, k_1=0,1,2\ldots,$$

то

$$E_{k_1,l}\to\frac{(n-1)^2}{8R^2}+\frac{\omega^2R^2}{2}\quad\text{при}\quad\varepsilon\to+0,$$

что опять превышает классический энергетический порог (см. (6.25)) финитного движения на величину (6.40).

6.3.2. Сферический случай

Вычисления здесь в целом аналогичны вычислениям в гиперболическом случае, но содержат некоторые особенности, связанные с поведением собственных функций в комплексной плоскости. Мы воспользуемся моделью (1.20), которая соответствует выражению оператора Лапласа–Бельтрами на сфере $\mathbf{S}^n$, в виде

$$\triangle = \frac{(1+v^2)^2}{R^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \left(\frac{n-1}{v} - \frac{(n-3)v}{1+v^2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{1+v^2}{R^2 v^2}\triangle_s, \ v \in \mathbb{R}, \tag{6.44}$$

где $\triangle_s$ обозначает тот же оператор, что и в (6.31). Пределы $v \to \pm 0$ соответствуют полюсам сферы $\mathbf{S}^n$, а предел $v \to \infty$ соответствует экватору, определенному уравнением $r = 1$ в модели (1.19).

6.3.2.1. Задача Кулона

Из теоремы 2.11 следует самосопряженность оператора H_{V_c} при $n \geqslant 2$, где $V = V_c = -\dfrac{\gamma}{Rv}$, с областью определения $\mathrm{Dom}(H_V)$, заданной формулой (2.28). Здесь $V_1 = V_c$ при $v < 0$ и $V = 0$ в противном случае. Ниже мы проясним вычисления из работы [208] и обобщим их на случай $n \neq 3$.

Радиальная часть $\chi_l(v)$ собственной функции $\chi_l Y^{(n)}_{l,\mathbf{m}}$ удовлетворяет уравнению:

$$\chi_l''(v) + \left(\frac{n-1}{v} - \frac{(n-3)v}{1+v^2}\right)\chi_l'(v) + \tag{6.45}$$
$$+ \left(\frac{2ER^2}{(1+v^2)^2} - \frac{l(l+n-2)}{v^2(1+v^2)} + \frac{2R\gamma}{v(1+v^2)^2}\right)\chi_l(v) = 0, \quad v \in \mathbb{R},$$

аналогичному (6.33).

Особыми точками этого уравнения в комплексной плоскости являются точки $0, \pm\mathbf{i}$ (∞ — обыкновенная точка, так же как для (6.33)) с критическими показателями:

$$\rho_1^{(\mathbf{i})} = \frac{1}{4}(n-1+s),\ \rho_2^{(\mathbf{i})} = \frac{1}{4}(n-1-s),\ \rho_1^{(-\mathbf{i})} = \frac{1}{4}(n-1+\overline{s}),$$
$$\rho_2^{(-\mathbf{i})} = \frac{1}{4}(n-1-\overline{s}),\ \rho_1^{(0)} = l,\ \rho_2^{(0)} = 2-l-n,$$

где s и $-s$ — корни уравнения $s^2 = (n-1)^2 + 8ER^2 - 8\mathbf{i}R\gamma$. Главное отличие от задачи на собственные значения, рассмотренной выше в гиперболическом случае, — это то, что здесь только одна особая точка лежит на интересующем нас интервале $v \in \mathbb{R} \cup \infty$. Эта точка получается в результате слияния двух полюсов сферы $\mathbf{S}^n$.

Так же как в гиперболическом случае выше, функция $\chi_l(v)$ должна иметь асимптотику $\sim c_+ v^{\rho_1^{(0)}} = c_+ v^l$, $c_+ = \mathrm{const}$ при $v \to +0$, $\mathbb{R} \ni v > 0$, т.к. в противном случае $\chi_l Y_{l,\mathbf{m}}^{(n)} \notin \mathrm{Dom}(H_{V_c})$. В то же время должно быть $\chi_l \sim c_- v^l$, $c_- = \mathrm{const}$ при $v \to -0$, $\mathbb{R} \ni v < 0$, поскольку предел $v = 2r/(1-r^2) = \mathrm{tg}(\rho/R) \to -0$ соответствует другому полюсу $r \to +\infty$ (или, что то же самое, $\rho = \pi R$) сферы $\mathbf{S}^n$.

Уравнение (6.45) можно свести к гипергеометрическому уравнению (B.5) с параметрами $\alpha, \beta, \widetilde{\gamma}$ подстановкой:

$$z := \frac{2v}{v+\mathbf{i}}, \quad w_l(z) := \chi_l(v) \left(\frac{v+\mathbf{i}}{v}\right)^l \left(\frac{v+\mathbf{i}}{v-\mathbf{i}}\right)^{\rho_2^{(\mathbf{i})}}, \tag{6.46}$$

которая переводит тройку особых точек $v = 0, \mathbf{i}, -\mathbf{i}$ в тройку $z = 0, 1, \infty$. Выражение

$$\left(\frac{v+\mathbf{i}}{v-\mathbf{i}}\right)^{\rho_2^{(\mathbf{i})}} \tag{6.47}$$

обозначает ветвь многозначной функции, голоморфную в области $(\mathbb{C} \cup \infty) \setminus [-\mathbf{i}, \mathbf{i}]$ и равную 1 при $v = \infty$. В силу голоморфности этой ветви в точке $v = \infty$, функция $w_l(z)$ голоморфна в точке $z = 2$.

Заметим, что вещественная прямая $\mathbb{R}$ на v-плоскости переходит в окружность $\mathbb{S}^1$ на z-плоскости, определенную уравнением $|z-1| = 1$.

Легко видеть, что

$$\alpha = \rho_2^{(-\mathbf{i})} + l + \rho_2^{(\mathbf{i})} = \frac{n-1}{2} + l - \frac{1}{4}(\overline{s} + s) \in \mathbb{R},$$

$$\beta = \rho_1^{(-\mathbf{i})} + l + \rho_2^{(\mathbf{i})} = \frac{n-1}{2} + l + \frac{1}{4}(\overline{s} - s) \notin \mathbb{R},$$

$$\widetilde{\gamma} = 1 - \rho_2^{(0)} + l = n + 2l - 1.$$

Поскольку $\chi_l \sim c_\pm v^l$ при $v \to \pm 0$, $v \in \mathbb{R}$, функция $w_l(z)$ на $\mathbb{S}^1$ ограничена вблизи точки $z = 0$ и $1 - \widetilde{\gamma} \leqslant 0$, то справедливы равенства

$$w_l(z) = w_{+,l}(z) := \widetilde{c}_+ F(\alpha, \beta; \widetilde{\gamma}; z),$$

$$z \in \mathbb{S}^1_+ := \left(z \in \mathbb{S}^1, \operatorname{Im} z > 0\right), \ \widetilde{c}_+ = \text{const},$$
$$w_l(z) = w_{-,l}(z) := \widetilde{c}_- F(\alpha, \beta; \widetilde{\gamma}; z),$$
$$z \in \mathbb{S}^1_- := \left(z \in \mathbb{S}^1, \operatorname{Im} z < 0\right), \ \widetilde{c}_- = \text{const}.$$

Отметим, что в работе [208] А.Ф. Стивенсон сделал предположение, эквивалентное равенству $\widetilde{c}_+ = \widetilde{c}_-$, без каких-либо обоснований.

Функции $w_{\pm,l}(z)$ должны быть аналитическими продолжениями друг друга через точку $z = 2$.[4] В силу формулы (B.7) (применимой ввиду $\widetilde{\gamma} - \alpha - \beta \notin \mathbb{R}$) это означает, что функции

$$\widetilde{c}_+ \frac{\Gamma(\widetilde{\gamma})\Gamma(\widetilde{\gamma} - \alpha - \beta)}{\Gamma(\widetilde{\gamma} - \alpha)\Gamma(\widetilde{\gamma} - \beta)} F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \widetilde{\gamma} + 1; 1 - z), \ z \in \mathbb{S}^1_+$$

и

$$\widetilde{c}_- \frac{\Gamma(\widetilde{\gamma})\Gamma(\widetilde{\gamma} - \alpha - \beta)}{\Gamma(\widetilde{\gamma} - \alpha)\Gamma(\widetilde{\gamma} - \beta)} F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \widetilde{\gamma} + 1; 1 - z), \ z \in \mathbb{S}^1_-$$

являются аналитическими продолжениями друг друга через точку $z = 2$, так же как функции

$$\widetilde{c}_+ \frac{\Gamma(\widetilde{\gamma})\Gamma(\alpha + \beta - \widetilde{\gamma})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{\widetilde{\gamma} - \alpha - \beta} F(\widetilde{\gamma} - \alpha, \widetilde{\gamma} - \beta; \widetilde{\gamma} - \alpha - \beta + 1; 1 - z), \ z \in \mathbb{S}^1_+$$

и

$$\widetilde{c}_- \frac{\Gamma(\widetilde{\gamma})\Gamma(\alpha + \beta - \widetilde{\gamma})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{\widetilde{\gamma} - \alpha - \beta} F(\widetilde{\gamma} - \alpha, \widetilde{\gamma} - \beta; \widetilde{\gamma} - \alpha - \beta + 1; 1 - z), \ z \in \mathbb{S}^1_-.$$

Первое требование эквивалентно равенству

$$(\widetilde{c}_+ - \widetilde{c}_-) \frac{\Gamma(\widetilde{\gamma})\Gamma(\widetilde{\gamma} - \alpha - \beta)}{\Gamma(\widetilde{\gamma} - \alpha)\Gamma(\widetilde{\gamma} - \beta)} = 0, \tag{6.48}$$

а второе равенству

$$(\widetilde{c}_+ - \widetilde{c}_- \exp\left(2\pi \mathrm{i}(\widetilde{\gamma} - \alpha - \beta)\right)) \frac{\Gamma(\widetilde{\gamma})\Gamma(\alpha + \beta - \widetilde{\gamma})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = 0. \tag{6.49}$$

[4] Напомним, что функция $F(\alpha', \beta'; \gamma'; z)$ голоморфна в области $\mathbb{C} \backslash [1, +\infty)$.

В силу $\widetilde{\gamma}-\alpha-\beta \notin \mathbb{R}$, линейная система (6.48), (6.49) имеет нетривиальное решение $\widetilde{c}_+, \widetilde{c}_-$ тогда и только тогда, когда либо

$$\frac{\Gamma(\widetilde{\gamma})\Gamma(\widetilde{\gamma}-\alpha-\beta)}{\Gamma(\widetilde{\gamma}-\alpha)\Gamma(\widetilde{\gamma}-\beta)}=0, \quad \text{либо} \quad \frac{\Gamma(\widetilde{\gamma})\Gamma(\alpha+\beta-\widetilde{\gamma})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}=0.$$

Ввиду $\widetilde{\gamma}-\beta \notin \mathbb{R}$, $\beta \notin \mathbb{R}$, это дает либо $\widetilde{\gamma}-\alpha=-k+1$, либо $\alpha = -k+1$, $k \in \mathbb{N}$ и, таким образом, получаем соответственно

$$s+\overline{s}=\mp(4(k+l)+2n-6). \tag{6.50}$$

Не теряя общности, выберем s так, что $\operatorname{Re} s>0$, откуда имеем $\alpha=-k+1$, $k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{c}_+=\widetilde{c}_-$.[5]

Вычисления, аналогичные проделанным в гиперболическом случае, ведут к выражению

$$s=2(k+l)+n-3-\frac{4\mathrm{i}R\gamma}{2(k+l)+n-3}$$

и к окончательной формуле для энергетических уровней

$$E_{k,l}=-\frac{(n-1)^2}{8R^2}-\frac{2\gamma^2}{(2(k+l)+n-3)^2}+\frac{(2(k+l)+n-3)^2}{8R^2}, \ k \in \mathbb{N}. \tag{6.51}$$

В данном случае имеется бесконечная серия энергетических уровней и последовательность $E_{k,l}$ монотонно стремится к $+\infty$ при $k \to +\infty$. Так же как в гиперболическом случае, в пределе $R \to \infty$ формула (6.51) дает энергетические уровни задачи Кулона в евклидовом пространстве. В пределе $\gamma \to 0$ она превращается в формулу для энергетических уровней свободного движения на сфере.

Собственные функции, соответствующие уровням (6.51), суть:

$$\chi_{k,l}(v)=\left(\frac{v}{v+\mathbf{i}}\right)^l\left(\frac{v-\mathbf{i}}{v+\mathbf{i}}\right)^{\rho_2^{(1)}}\sum_{p=0}^{k-1}\frac{(1-k)_p(\beta)_p}{p!(n+2l-1)_p}\left(\frac{2v}{v+\mathbf{i}}\right)^p,$$

[5]Оба выбора знака для $s+\overline{s}$ в (6.50) ведут к одинаковым энергетическим уровням и собственным функциям, но последние могут иметь разные формы записи.

где величины β и $\rho_2^{(\mathrm{i})}$ задаются формулами

$$\beta = \frac{n-1}{2} + l + \frac{2\mathrm{i}R\gamma}{2(k+l)+n-3},$$

$$\rho_2^{(\mathrm{i})} = \frac{1-k-l}{2} + \frac{\mathrm{i}R\gamma}{2(k+l)+n-3}.$$

Данные собственные функции также можно выразить через более удобную координату ρ (см. (1.21)):

$$\chi_{k,l}(\rho) = \exp\left(2\mathrm{i}\rho\rho_2^{(\mathrm{i})}/R\right) \sum_{p=0}^{k-1} \frac{2^p(1-k)_p(\beta)_p}{p!(n+2l-1)_p\mathrm{i}^p} \sin^{l+p}(\rho/R) \times$$
$$\times \exp\left(\mathrm{i}\rho(l+p)/R\right), \; 0 \leqslant \rho \leqslant \pi.$$

Отметим, что функция (6.47) превращается в функцию $-\exp\left(2\mathrm{i}\rho\rho_2^{(\mathrm{i})}/R\right)$, которая непрерывна в точке $\rho = \pi/2$ ($v = \infty$) и имеет различные значения в точках $\rho = 0, \pi$ ($v = \pm 0$), как и утверждалось выше.

6.3.2.2. Осциллятор

Потенциал осциллятора $V_o = \frac{1}{2}R^2\omega^2 \operatorname{tg}^2(\rho/R)$ на сфере $\mathbf{S}^n$, $n \geqslant 2$, не принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{S}^n, d\mu)$, т. к. $V_o \to +\infty$ при $\rho \to \pi R$. Поэтому мы используем теорему 2.12 для построения самосопряженного расширения $(H_{V_o})_F$ оператора H_{V_o} с областью M', равной полусфере, определенной неравенством $\rho < \pi R$. Область определения этого расширения задается формулой (2.32).

Данное определение оператора H_{V_o} соответствует физическому представлению о том, что бесконечный потенциальный барьер накладывает условие Дирихле на волновую функцию на границе $\mathbf{S}^{n-1}$ области M', определенной уравнением $\rho = \pi R$.

В данном случае уравнение на радиальную компоненту $\chi_l(v)$ собственной функции $\chi_l(v)Y^n_{l,\mathbf{m}}$ принимает вид

$$\chi_l''(v) + \left(\frac{n-1}{v} - \frac{(n-3)v}{1+v^2}\right)\chi_l'(v) +$$
$$+ \left(\frac{2ER^2}{(1+v^2)^2} - \frac{l(l+n-2)}{v^2(1+v^2)} - \frac{R^4\omega^2v^2}{(1+v^2)^2}\right)\chi_l(v) = 0,$$

$$0 < v < +\infty. \tag{6.52}$$

Это уравнение является фуксовым с особыми точками $\pm\mathbf{i}, 0$ и ∞. Его критические показатели суть:

$$\rho_1^{(\mathbf{i})} = \rho_1^{(-\mathbf{i})} = \frac{n-1+\sqrt{(n-1)^2+8ER^2+4R^4\omega^2}}{4},$$

$$\rho_1^{(\infty)} = \frac{1+\sqrt{1+4R^4\omega^2}}{2},$$

$$\rho_2^{(\mathbf{i})} = \rho_2^{(-\mathbf{i})} = \frac{n-1-\sqrt{(n-1)^2+8ER^2+4R^4\omega^2}}{4},$$

$$\rho_2^{(\infty)} = \frac{1-\sqrt{1+4R^4\omega^2}}{2},$$

$$\rho_1^{(0)} = l,\ \rho_2^{(0)} = 2-l-n.$$

Те же аргументы, что и для осцилляторного потенциала в гиперболическом пространстве, приводят к асимптотике $\chi_l \sim v^l$ при $v \to +0$. С другой стороны, условие $\chi_l(v)Y^n_{l,\mathbf{m}} \in \mathrm{Dom}(q_{-\triangle_F+\mathrm{id}})$ означает сходимость интеграла

$$\int\limits_{M'} g\left(\mathrm{grad}\left(\chi_l Y^n_{l,\mathbf{m}}\right), \mathrm{grad}\left(\chi_l Y^n_{l,\mathbf{m}}\right)\right) d\mu,$$

а значит, и интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\left((1+v^2)\chi_l'\right)^2 v^{n-1}dv}{(1+v^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Сходимость последнего интеграла при $v \to +\infty$ влечет неравенство $\rho^{(\infty)} > 1/2$, если $\chi_l \sim v^{-\rho^{(\infty)}}$ при $v \to +\infty$. Таким образом, должно выполняться условие $\chi_l \sim v^{-\rho_1^{(\infty)}}$ при $v \to +\infty$.

Наоборот, легко проверить, что для решения уравнения (6.52) с асимптотиками $\chi_l \sim v^l$ при $v \to +0$ и $\chi_l \sim v^{-\rho_1^{(\infty)}}$ при $v \to +\infty$ выполнено условие $\chi_l(v)Y^n_{l,\mathbf{m}} \in \mathrm{Dom}\left((H_{V_o})_F\right)$.

Замена переменных[6]

$$\chi_l(v) = w_l(z)(-z)^{l/2}(1-z)^{\rho_1^{(\mathbf{i})}},\ z = -v^2,$$

[6]Эта замена опять соответствует первому случаю теоремы B.1.

ведет к гипергеометрическому уравнению (B.5) для функции $w_l(z)$ с

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\rho_1^{(\infty)} + l\right) + \rho_1^{(\mathrm{i})} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(n + 2l + \sqrt{1 + 4R^4\omega^2} + \sqrt{(n-1)^2 + 8ER^2 + 4R^4\omega^2}\right),$$
$$\beta = \frac{1}{2}\left(\rho_2^{(\infty)} + l\right) + \rho_1^{(\mathrm{i})} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(n + 2l - \sqrt{1 + 4R^4\omega^2} + \sqrt{(n-1)^2 + 8ER^2 + 4R^4\omega^2}\right),$$
$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}(l - \rho_2^{(0)}) = l + \frac{n}{2} > 0.$$

Выражение $(-z)^{l/2}(1-z)^{\rho_1^{(1)}}$ означает здесь ветвь многозначной функции, голоморфную на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \infty$ с разрезом вдоль $[0, +\infty]$ и вещественную на сегменте $[-\infty, 0]$.

Полупрямая $v \in [0, +\infty]$ преобразуется в полупрямую $z \in [-\infty, 0]$, поэтому асимптотики функции $w_l(z)$ должны быть ~ 1 при $z \to -0$ и $\sim z^{-\alpha}$ при $z \to -\infty$. В силу $\alpha > \beta$ получаем

$$w_l(z) = F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$

и

$$\lim_{z \to -\infty} F(\alpha, \beta; \gamma; z)(-z)^{\beta} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} = 0,$$

с учетом (B.13). Поэтому $\gamma - \beta = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, что приводит к равенству

$$\sqrt{(n-1)^2 + 8ER^2 + 4R^4\omega^2} - \sqrt{1 + 4R^4\omega^2} = 2(2k + l) + n.$$

Вычисления, аналогичные проделанным в гиперболическом случае, дают формулу для энергетических уровней

$$E_{k,l} = \omega(2k + l + \frac{n}{2})\sqrt{1 + \frac{1}{4R^4\omega^2}} + \frac{1}{2R^2}\left((2k+l)^2 + (2k+l)n + \frac{n}{2}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.53}$$

В пределе $R \to \infty$ формула (6.53) превращается в хорошо известную формулу для эквидистантного спектра осциллятора в евклидовом пространстве. С другой стороны, в пределе $\omega \to 0$ формула (6.53) дает энергетические уровни свободного движения на сфере.

Радиальные части соответствующих собственных функций имеют вид:

$$\chi_{k,l}(v) = v^l \left(1+v^2\right)^{\rho_1^{(\mathrm{i})}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i (l+k+n/2)_i}{(l+n/2)_i} \frac{v^i}{i!},$$

где величины $\alpha, \rho_1^{(\mathrm{i})}$ определены формулами выше для $E = E_{k,l}$.

§ 6.4. Материальная точка в центральном поле на пространствах постоянной кривизны. История вопроса

В этом параграфе рассматривается в хронологическом порядке история изучения одночастичного движения в центральном потенциальном поле на пространствах постоянной кривизны. Также указаны работы, посвященные двухчастичному центральному взаимодействию на этих пространствах. Некоторые работы, посвященные движению твердого тела в пространствах постоянной кривизны, указаны в п. 7.4.1.

В силу огромного потока научных публикаций, говоря о приоритете какой-либо работы в некотором вопросе, следует иметь в виду, что уверенно утверждать можно лишь отсутствие такого приоритета, а наличие последнего является всего лишь более или менее достоверной гипотезой. В дальнейшем, говоря об истории механики на пространствах постоянной кривизны, мы всегда будем иметь в виду эту оговорку. Отметим, что история до начала 20-ого столетия трудна для изучения в силу отсутствия в то время современных стандартов для научных работ.

Аналог ньютоновской (кулоновской) силы $F(\rho)$ как величины, обратной площади сферы радиуса ρ, для пространства $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ предложили еще Лобачевский [52], с. 159 и Больяи (между 1848 и 1851 годами) [105], с. 156.

Согласно подстраничному примечанию в работе [159] (1872, с. 117), Дирихле рассматривал эту силу «schon früher».[7] Аналогичная информация содержится в работе Шеринга [188] (1873, с. 149): «Mit diesem Gegenstande hat auch Dirichlet, wie ich jetzt erfahren, in der letzten Zeit seines Aufenthalts in Berlin sich beschäftigt; er hat darüber mit seinen

[7] «уже раннее» (нем.). П. Г. Дирихле умер в 1859 году.

Freunden gesprochen ohne von den Resultaten seiner Untersuchungen Mittheilung zu machen».[8]

Аналитическое выражение для потенциала V_c в пространстве $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ было указано в 1870 г. Шерингом [187] (с. 318), (см. также его работу [188] 1873 года), без каких-либо мотивировок и ссылок на Лобачевского и Больяи.

В 1873 году Липшиц рассмотрел одночастичную задачу в центральном потенциале на сфере $\mathbf{S}^2$ [160]. Хотя он знал, что центральный потенциал V_c удовлетворяет уравнению Лапласа на $\mathbf{S}^3$, по некоторым причинам он предпочел рассмотреть другой центральный потенциал $V(\rho) \sim \sin^{-1}(\rho/R)$ (в обозначениях п. 6.2.1). Он нашел общее решение данной задачи через эллиптические функции.

В 1885 году Киллинг открыл законы Кеплера для сферы $\mathbf{S}^3$ [147]. Так же как и Лобачевский с Больяи, он рассматривал силу притяжения как величину, обратную площади 2-мерной сферы в $\mathbf{S}^3$. В следующем году эти результаты были также опубликованы Нейманом в [176]. Перенесение этих результатов на гиперболический случай было осуществлено в работе Либмана [154] 1902 года и позднее в 1905 году в его книге [156] по неевклидовой геометрии. Отметим, что Либман определял ньютоновский закон притяжения из требования, чтобы выполнялся первый закон Кеплера на пространствах $\mathbf{S}^3$ и $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$. Осцилляторный потенциал он определял из требования, чтобы движение частицы происходило по эллипсам с центром, совпадающим с центром центрального потенциала.

В той же работе [147] Киллинг доказал, что переменные в задаче Кеплера с двумя притягивающими центрами на сфере $\mathbf{S}^n$ разделяются, что влечет интегрируемость данной задачи.

Обобщение теоремы Бертрана для пространств $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ было доказано Либманом в 1903 году [155]. В том же году Штекель написал без каких-либо ссылок ([207], с. 476): «...von Interesse ist auch, daß der bekannte Satz von Bertrand sein Analogon im absoluten Raume hat. Freilich sind das alles, um einen Ausdruck von Felix Klein zu gebrauchen, «selbst geschaffene Schmerzen», denn weder die Beobachtung an Planeten noch, was mehr sagen will, an Fixsternen nötigen uns, die altbewährte Euklidische Geometrie durch eine «Astralgeometrie» zu ersetzen».[9] Близкие по смыслу слова содержатся также в первом изда-

[8] «Этим вопросом, как я теперь узнал, занимался также Дирихле в последнее время своего пребывания в Берлине; он его обсуждал со своими друзьями, но результаты не опубликовал» (нем.).

[9] ...интересно также, что известная теорема Бертрана имеет аналог в абсолютном про-

нии (1905 год) книги Либмана [156] (с. 240): «Erwähnt sei noch, daß das modifizierte Newtonsche und das elastische Anziehungsgesetz die einzigen Zentralkräfte sind, die im sphärischen Raum immer, im hyperbolischen, sobald die Konstante des Flächensaztes in gewissen Grenzen bleibt, auf geschlossene Bahnkurven führen. Die Methode, mit deren Hilfe Bertrand den entsprechenden Satz der euklidischen Geometrie bewiesen hat, ist auf die nichteuklidische Geometrie leicht übertragbar»[10], но соответствующее доказательство там отсутствует. Это доказательство появилось во втором издании 1912 года данной книги Либмана для гиперболического случая, а в третьем издании 1923 года появился и абзац, соответствующий сферическому случаю.

В работе [56] Мордухай-Болтовский рассмотрел одночастичное движение под действием центральной силы в пространствах постоянной кривизны, исходя из постулатов, отличных от общепринятой концепции натуральных механических систем на римановых пространствах, и принятой, в частности, в данной книге (см. п. 4.3.3). Следствием такого подхода явилось отсутствие явных формул для траектории частицы даже для потенциала V_c. Кроме того, потенциалы, для которых все ограниченные траектории замкнуты, при таком подходе вообще отсутствуют.

Классическая механика в пространствах постоянной кривизны может рассматриваться как предшественница специальной и общей теории относительности. После возникновения этих теорий указанные выше работы Шеринга, Киллинга и Либмана были почти полностью забыты. Отметим, что описание одночастичного движения в центральных потенциалах в пространствах $\mathbf{S}^3$ и $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ было сокращено во втором и третьем изданиях книги Либмана по сравнению с первым, ради включения материала, посвященного специальной теории относительности.

Аналогичные модели позднее привлекли внимание исследователей с точки зрения квантовой механики и теории интегрируемых динамических систем.

Квантово-механическая одночастичная спектральная задача для потенциала V_c на сфере $\mathbf{S}^3$ (задача Кулона) была решена Шредингером

странстве. Правда, все это, пользуясь выражением Феликса Клейна, является «напрасными хлопотами», поскольку ни наблюдения за планетами, ни, более того, за неподвижными звездами, не требуют от нас замены испытанной евклидовой геометрии «астральной» (нем.).

[10]«Отметим еще, что модифицированный закон ньютоновского притяжения и модифицированный закон упругого притяжения соответствуют замкнутым траекториям в сферическом пространстве всегда, а в гиперболическом тогда, когда его кривизна находится в известных границах. Метод, с помощью которого Бертран доказал соответствующую теорему для евклидовой геометрии, легко переносится и на неевклидову геометрию» (нем.).

в 1940 году разработанным им методом факторизации операторов (ladder method) [85] и Стивенсоном в 1941 году традиционным путем анализа решений дифференциального уравнения [208] (см. также результат Инфельда 1941 года [135]). Инфельд и Шильд в 1945 году решили ту же задачу в пространстве $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ [136] (см. также [39]). Отметим, что Шредингер, Стивенсон, Инфельд и Шильд не ссылались на работы Шеринга, Киллинга, Либмана и, видимо, не знали о них.

Нишино в 1972 году в работе [175] (см. также [133]) нашел все центральные потенциалы в пространствах постоянной кривизны, для которых классическая одночастичная задача имеет дополнительные интегралы, не зависящие от гамильтониана, квадратичные по импульсам и не сводящиеся к интегралам, линейным по импульсам. Решением этой задачи оказались те же потенциалы V_c и V_o. Он указал также, что соответствующие одночастичные системы являются аналогами изотропного гармонического осциллятора и задачи Кеплера в евклидовом пространстве, и вычислил скобки Пуассона для интегралов движения. Однако Нишино не рассматривал траектории этих систем и поэтому не обнаружил факт замкнутости всех ограниченных траекторий. Он не упомянул никого из своих предшественников, указанных выше.

Далее начинается период частичных переоткрытий. Решение обобщения задачи Бертрана на пространство $\mathbf{S}^n$ было переоткрыто в 1979 году Хигсом [132][11]. Там же был найден одночастичный спектр в поле осциллятора V_o на сфере $\mathbf{S}^2$ и связанные с замкнутостью всех классических траекторий дополнительные интегралы движения в потенциалах V_c и V_o как в классическом, так и в квантово-механическом случаях (обобщения вектора Рунге–Ленца). В том же году те же интегралы в квантовой одночастичной задаче на сфере $\mathbf{S}^3$ в поле V_c были независимо получены Курочкиным и Отчиком в работе [50], а на пространстве $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ в 1980 году Богушем, Курочкиным и Отчиком в работе [11]. Спектральная одночастичная задача с потенциалами V_c и V_o в пространствах $\mathbf{S}^n$, $n \geqslant 3$, была решена Лимоном в 1980 году в работе [152]. Разделение переменных для одночастичной квантово-механической задачи в пространствах $\mathbf{S}^3$ и $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ с потенциалом V_c обсуждалось Богушем, Отчиком и Редьковым в работе 1983 года [12] (см. также работу Отчика [61] 1999 года). Отметим, что из своих предшественников, перечисленных выше, данные авторы ссылались лишь на Шредингера, Инфельда и Шильда.

[11] См. замечание выше о работе Штекеля [207] и книге Либмана [156].

Еще раз решение обобщения задачи Бертрана на пространство $\mathbf{S}^3$ было найдено в 1980 году Славяновским [202], и в том же году в работе [203] Славяновский и Сломинский провели квазиклассическое квантование одночастичного движения на сфере $\mathbf{S}^3$ в потенциалах V_c и V_o по Бору–Зоммерфельду без использования индекса Маслова. На работы своих предшественников, перечисленных ваше, данные авторы не ссылались.

В работе [134] 1982 года Икеда и Катаяма дали единообразное решение обобщенной задачи Бертрана для пространств $\mathbf{S}^n$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, упомянув из своих вышеперечисленных предшественников лишь Нишино. В работе [145] изучалось применение этих потенциалов к некоторым космологическим моделям. В 1990 году Катаяма показал разрешимость одночастичной спектральной задачи для потенциала V_c в пространстве $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ методом факторизации Шредингера [142]. Эта работа характерна тем, что в ней впервые упомянуто значительное количество работ-предшественников: [11; 50; 85; 132; 135; 152; 175; 208]. В работе [143] 1992 года Катаяма провел аналогичное исследование для потенциала осциллятора в пространствах постоянной кривизны.

Связь аналогов оператора Рунге–Ленца для одночастичной квантово-механической задачи Кеплера в пространстве $\mathbf{S}^3$ с методом факторизации Шредингера обсуждалась Барутом и Вилсоном в работе 1985 года [98]. В работах [97] 1987 и 1990 годов Барут, Иномата и Юнкер решили спектральную одночастичную квантово-механическую задачу для потенциала V_c на пространствах $\mathbf{S}^3$ и $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ с помощью функциональных интегралов.

В 1991 году Домбровский и Зитербах опубликовали обзорную работу [116], в которой описали почти забытые результаты Шеринга, Киллинга и Либмана. С другой стороны, с работами Шредингера, Инфельда, Нишино, Хигса, Лимона и более поздними Домбровский и Зитербах, видимо, были не знакомы. В частности, Зитербах в своей диссертации переоткрыл обобщения вектора Рунге–Ленца для потенциала V_c в пространствах постоянной кривизны.

В работах [60; 179] 1991 и 1994 годов Отчик рассмотрел одночастичную квантово-механическую задачу в поле двух произвольно расположенных кулоновских центров на сфере $\mathbf{S}^3$. Он нашел систему координат, в которой переменные разделяются, а соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения сводятся к уравнениям Гойна. Однако он не указал на работу Киллинга [147], содержащую аналогичный результат для классического случая.

В работах [30] 1992 года Грановский, Жеданов и Луценко усовершенствовали алгебраический подход работ [11; 50; 132; 152] к одночастичным задачам для потенциалов V_c и V_o в пространствах $\mathbf{S}^n$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$.

В работе 1992 года [148] Козлов и Харин еще раз переоткрыли потенциалы V_c и V_o для пространства $\mathbf{S}^n$ как решение обобщенной задачи Бертрана. Здесь упоминается классическая задача двух частиц на пространствах постоянной кривизны, взаимодействующих при помощи потенциала V_c, и делается предположение о том, что не все орбиты для такой задачи замкнуты. Также Козлов и Харин переоткрыли результат Киллинга [147] об интегрируемости классической задачи Кеплера с двумя притягивающими центрами на сфере $\mathbf{S}^2$. Отметим, что эта интегрируемость также является прямым следствием результата Отчика 1991 года о разделении переменных в соответствующей квантово-механической задаче. В работе [48] 1994 года Козлов переоткрыл законы Кеплера для пространств постоянной кривизны. В качестве предшественников в ней указаны лишь Славяновский и Сломинский. В работе [49] того же года Козлов и Федоров установили интегрируемость классического движения одной частицы по сфере $\mathbf{S}^n$ в поле, создаваемом $2(n+1)$-им потенциалом V_o с центрами в точках

$$(\pm 1, 0, \ldots, 0),\ (0, \pm 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \pm 1)$$

для стандартной модели сферы $\mathbf{S}^n$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, заданной уравнением

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1.$$

Черников в 1992 году в работе [113] рассмотрел потенциал V_c в пространстве $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ как сферически симметричную гармоническую функцию и соответствующее одночастичное движение, т. е. частично переоткрыл результаты Киллинга и Либмана.

Разделение переменных для одночастичного оператора Шредингера и некоторых нецентральных потенциалов в пространствах $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ изучалось Калнинсом, Миллером, Хакобьяном и Погосяном в работах [139; 140; 141] 1996–1998 годов.

Интегрируемость одночастичного движения на сфере $\mathbf{S}^2$ в некоторых комбинациях ньютоновских и осцилляторных потенциалах была доказана Борисовым и Мамаевым в [106].

В 1996 году появилась первая работа [86] автора, посвященная механике на пространствах постоянной кривизны. В тот момент ему были известны лишь предшествующие работы [48; 148; 202] и [203] на эту

тему. Новыми результатами в [86] являлись: проведение квазиклассического квантования по Бору–Зоммерфельду одночастичного движения в потенциалах V_c и V_o на пространстве $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ с учетом индекса Маслова и доказательство самосопряженности соответствующего оператора Шредингера. Отметим, что в предшествующих работах вопрос о точной области самосопряженности оператора Шредингера с потенциалами V_c и V_o на пространствах постоянной кривизны не рассматривался, без чего вычисление соответствующих спектральных значений не является вполне удовлетворительным с математической точки зрения.

В книге [75], по-видимому, впервые упомянута (со ссылкой на Кугушева) двухчастичная классическая задача с центральным потенциалом на сфере $\mathbf{S}^2$ как пример гамильтоновой динамической системы с неинволютивным набором интегралов. В статье [1] 1990 года рассмотрены совместные уровни интегралов этой задачи для произвольного потенциала $V(\rho)$ такого, что $V'(\rho) > 0$. Однако, по мнению автора, результаты этой работы являются недостаточно обоснованными. В работе автора [189] 1998 года впервые проведена гамильтонова редукция двухчастичной классической задачи с центральным взаимодействием в пространствах постоянной кривизны к динамической системе с двумя степенями свободы и изучен вопрос о существовании ее решения на бесконечном временном интервале. Отметим, что работа автора [89], посвященная аналогичным вопросам в двумерном случае и сданная в печать в марте 1997 года, была опубликована лишь в 2000 году.[12] В работе автора 1999 года [87] впервые рассмотрена квантово-механическая задача двух тел с центральным взаимодействием на пространствах $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$, изучена самосопряженность соответствующих операторов Шредингера и найден ряд точных спектральных серий двухчастичной задачи на сфере $\mathbf{S}^2$ для некоторых центральных потенциалов.

В работе [146] 1999 года Килин рассмотрел частные решения задачи двух тел с потенциалом V_c на пространствах $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$, соответствующие движению обоих тел по окружностям с общим центром (так, что они все время остаются диаметрально противоположными относительно данного центра), и доказал устойчивость таких решений в линейном приближении (что не гарантирует настоящей устойчивости). Кроме этого, им были исследованы точки относительного равновесия третьего «легкого» тела в поле, создаваемом двумя «тяжелыми», совершающими указанное вращение. В работе [114] Чернойвана и Мамаева в том же году рассмотрена ограниченная классическая задача двух тел на простран-

[12]Укажем альтернативное описание приведенной системы для задачи двух тел на $\mathbf{S}^2$, найденное в работе 2004 г. [107] Борисовым, Мамаевым и Килиным.

ствах $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ с потенциалом V_c, т. е. задача о движении легкого тела в поле тяжелого, движущегося по геодезической с постоянной скоростью. Проведено ее численное исследование методом сечений Пуанкаре, свидетельствующее о ее неинтегрируемости. Из предшествующих работ авторы [114; 146] упоминают лишь [48] и [148]. Эти результаты вошли в книгу [14].

Возмищева в работе [219] 2000 года и [25] (2002 года, совместно с Ошемковым) продолжила исследование интегрируемого движения частицы в поле двух кулоновских центров на сфере $\mathbf{S}^2$, не зная результатов работ Киллинга [147] и Отчика [60; 179]. В качестве предшествующих работ, в которых рассматривался потенциал V_c на пространствах постоянной кривизны, указаны лишь [48; 52; 85; 113; 132; 148; 189].

Результаты Шредингера [85], Инфельда [135], Славяновского и Сломинского [202; 203], Козлова, Харина [48; 148] и Щепетилова [189] рассмотрены в обзоре Славяновского [204] в 2000 году. Основные результаты Киллинга и Либмана для классической механики материальной точки на пространствах $\mathbf{S}^3$ и $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ содержатся в работе [218].

В работе [88] 2000 года автор получил явно инвариантное выражение двухчастичного гамильтониана с центральным взаимодействием на пространствах $\mathbf{S}^n$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ через радиальный дифференциальный оператор и инвариантные операторы на пространствах $\mathbf{S}^n_S$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_S$. Там же проведена инвариантная гамильтонова редукция классической двухчастичной задачи. В работе [74] им совместно со Степановой изучена самосопряженность соответствующих операторов Шредингера и найден ряд точных спектральных серий двухчастичной задачи на сфере $\mathbf{S}^3$ для некоторых центральных потенциалов. В работах 2003 года [194] и [195] эти результаты частично обобщены на произвольное двухточечно-однородное пространство. Эти результаты (после исправления некоторых неточностей) вошли в настоящую книгу.

В 2001 и 2003 годах Зиглин доказал в работах [37] и [38] неинтегрируемость ограниченной задачи двух тел на сфере $\mathbf{S}^2$ с потенциалами V_c и V_o в классе мероморфных функций. Аналогичные результаты с меньшими ограничениями, справедливые также для ограниченной задачи двух тел на гиперболической плоскости $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$, были получены несколько позднее Мациевским и Прибыльской в [161]. В 2006 году ([197]) автор книги доказал мероморфную неинтегрируемость редуцированной задачи двух тел на пространствах $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ с потенциалами V_c и V_o.

В 2003 году Богуш, Курочкин и Отчик рассмотрели в работе [102] рассеяние на кулоновском потенциале в пространстве $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$.

Глава 7

Классическая механическая задача двух тел на двухточечно-однородных пространствах

В данной главе мы рассмотрим классическую задачу двух тел на двухточечно-однородных римановых пространствах. Вначале мы получим выражение соответствующей гамильтоновой функции через канонические переменные r, p_r, соответствующие радиальной степени свободы, и образующие пуассоновой алгебры $\mathcal{P}_I(Q_{\mathbf{S}}) \cong \operatorname{gr}\operatorname{Diff}_I(Q_{\mathbf{S}})$. Для этого мы используем процедуру деквантования из п. 4.3.3, поскольку она позволяет избежать достаточно громоздких вычислений, сходных проделанным в главе 5. Также мы получим интегралы движения, соответствующие центральным элементам из алгебры $\operatorname{Diff}_I(Q_{\mathbf{S}})$, построенным в главе 3.

Затем в § 7.3 мы выводим условия существования глобальных решений задачи двух тел и обсуждаем проблему ее интегрируемости. В § 7.4 рассматриваются существующие понятия центра масс на пространствах постоянной кривизны и их связь с найденным выражением для двухчастичной функции Гамильтона. Наконец, в § 7.5 мы проводим гамильтонову редукцию задачи двух тел на пространствах постоянной кривизны и классифицируем приведенные гамильтоновы системы.

§ 7.1. Явно инвариантный вид гамильтоновой функции задачи двух тел на компактных двухточечно-однородных пространствах

Рассмотрим классическую механическую задачу двух тел на неплоском двухточечно-однородном пространстве Q. Конфигурационным пространством для данной задачи является пространство $(Q \times Q) \setminus \operatorname{diag}$, поскольку столкновение частиц ведет к неопределенности их

движения[1]. В данном параграфе мы будем использовать обозначения из § 5.1.

Подмногообразие $Q_{op} \subset Q \times Q$ было определено там как множество пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Q \times Q$ таких, что $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{diam} Q$. В § 5.1 пространство $(Q \times Q) \setminus (\operatorname{diag} \cup Q_{op})$ было представлено как прямое произведение $I \times (G/K_0)$, где $I = (0, \operatorname{diam} Q) \subset \mathbb{R}$. Легко видеть, что для некомпактных двухточечно-однородных пространств Q справедливо равенство $(Q \times Q) \setminus \operatorname{diag} = I \times (G/K_0)$ для $I = (0, +\infty)$. Это означает, что фазовое пространство классической задачи двух тел можно представить в виде

$$T^*I \times T^*(G/K_0) \cong T^*I \times T^*Q_S \tag{7.1}$$

в некомпактном случае и в виде

$$(T^*I \times T^*Q_S) \cup \widetilde{T}^*Q_{op} =: M_{ess} \cup \widetilde{T}^*Q_{op} \tag{7.2}$$

в компактном случае, где $\widetilde{T}^*Q_{op}$ обозначает ограничение кокасательного расслоения $T^*(Q \times Q)$ на подмногообразие Q_{op}.

Поскольку $\dim Q_{op} = \dim Q + \dim A_x$, легко проверить, что $\dim T^*((Q \times Q) \setminus \operatorname{diag}) - \dim \widetilde{T}^*Q_{op} > 1$ при $\dim Q - \dim A_x > 1$. Последнее неравенство выполнено при $Q \neq \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ (см. § 1.2); в этом случае подпространство $\widetilde{T}^*Q_{op}$ не разделяет пространства $T^*((Q \times Q) \setminus \operatorname{diag})$ и большинство траекторий задачи двух тел не пересекает подпространство $\widetilde{T}^*Q_{op}$. Поэтому многие свойства задачи двух тел на компактных двухточечно-однородных пространствах Q (например, интегрируемость и проблему столкновений) можно изучать после редукции задачи на пространство $T^*I \times T^*Q_S$, по крайней мере, при $Q \neq \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$.

Прежде всего, используя процедуру деквантования, описанную выше в п. 4.3.3, и выражения для двухчастичного квантово-механического гамильтониана на двухточечно-однородных пространствах, можно получить соответствующие выражения для двухчастичной гамильтоновой функции на пространстве $T^*I \times T^*(G/K_0)$. Обозначим через p_r импульс на пространстве T^*I, соответствующий координате r на интервале I.

[1]Исключение диагонали из пространства $Q \times Q$, конечно, не решает проблему возможного столкновения, поскольку для некоторых начальных условий глобальное решение может не существовать.

7.1.1. Кватернионный случай

Из выражения (5.22) получаем для пространства $Q = \mathbf{P}^n(\mathbb{H})$ выражение для двухчастичной гамильтоновой функции в виде:

$$h = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2}p_r^2 + \frac{(m_1\alpha - m_2\beta)(1+r^2)}{2m_1m_2R^2}p_rp_0 + \frac{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}p_0^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(D_sp_1 + F_sp_2 + 2E_sp_3 + C_sp_4 + A_sp_5 + 2B_sp_6\right) + V(r), \tag{7.3}$$

где p_i — образующие пуассоновой алгебры

$$\mathcal{P}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S}\right) \cong \operatorname{gr}\operatorname{Diff}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S}\right),$$

соответствующие образующим D_i, $i = 0, \ldots, 10$, алгебры $\operatorname{Diff}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S}\right)$, а функции $A_s, B_s, C_s, D_s, F_s, E_s$ определены в § 5.2.

В силу определения пуассоновой структуры на градуированной алгебре $\operatorname{gr}U(\mathfrak{g})$ в п. 4.2.1 и коммутационных соотношений (3.15) получаем 55 коммутационных соотношений для образующих пуассоновой алгебры $\mathcal{P}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S}\right)$ (см. замечание 4.3):

$$\begin{aligned}
&[p_0,p_1]_P = -p_3,\ [p_0,p_2]_P = p_3,\ [p_0,p_3]_P = \frac{1}{2}(p_1 - p_2),\\
&[p_0,p_4]_P = -2p_6,\ [p_0,p_5]_P = 2p_6,\\
&[p_0,p_6]_P = p_4 - p_5, [p_0,p_7]_P = -p_8, [p_0,p_8]_P = p_7,\\
&[p_0,p_9]_P = 0,\ [p_0,p_{10}]_P = 0,\\
&[p_1,p_2]_P = -2p_0p_3 - 2p_7,\ [p_1,p_3]_P = -p_0p_1 + p_8,\\
&[p_1,p_4]_P = 2p_7,\ [p_1,p_5]_P = 0,\\
&[p_1,p_6]_P = p_8,\ [p_1,p_7]_P = -p_3p_6 - p_1p_4 + p_9 + p_{10},\\
&[p_1,p_8]_P = -p_3p_5 - p_1p_6,\ [p_1,p_9]_P = -2p_3p_8 - 2p_1p_7,\\
&[p_1,p_{10}]_P = p_6p_8 - p_5p_7,\ [p_2,p_3]_P = p_0p_2 + p_8,\\
&[p_2,p_4]_P = -2p_7,\ [p_2,p_5]_P = 0,\ [p_2,p_6]_P = -p_8,\\
&[p_2,p_7]_P = -p_3p_6 + p_2p_4 - p_9 - p_{10},\ [p_2,p_8]_P = -p_3p_5 + p_2p_6,\\
&[p_2,p_9]_P = -2p_3p_8 + 2p_2p_7,\ [p_2,p_{10}]_P = -p_6p_8 + p_5p_7,\\
&[p_3,p_4]_P = 0,\ [p_3,p_5]_P = 2p_8,\ [p_3,p_6]_P = p_7,\ [p_3,p_7]_P = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2)p_6,\\
&[p_3,p_8]_P = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2)p_5 + p_9 + p_{10},\ [p_3,p_9]_P = -(p_1 + p_2)p_8,
\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$
\begin{aligned}
&[p_3,p_{10}]_P = p_6p_7 - p_4p_8,\ [p_4,p_5]_P = -4p_0p_6,\ [p_4,p_6]_P = -2p_0p_4,\\
&[p_4,p_7]_P = (p_1-p_2)p_4,\ [p_4,p_8]_P = (p_1-p_2)p_6 - 2p_0p_7,\\
&[p_4,p_9]_P = 2(p_1-p_2)p_7,\ [p_4,p_{10}]_P = 0,\ [p_5,p_6]_P = 2p_0p_5,\\
&[p_5,p_7]_P = 2p_3p_6 + 2p_0p_8,\ [p_5,p_8]_P = 2p_3p_5,\ [p_5,p_9]_P = 4p_3p_8,\\
&[p_5,p_{10}]_P = 0,\ [p_6,p_7]_P = \frac{1}{2}(p_1-p_2)p_6 + p_3p_4 + p_0p_7,\\
&[p_6,p_8]_P = \frac{1}{2}(p_1-p_2)p_5 + p_3p_6 - p_0p_8,\ [p_6,p_9]_P = (p_1-p_2)p_8 + 2p_3p_7,\\
&[p_6,p_{10}]_P = 0,\ [p_7,p_8]_P = \frac{1}{2}(p_1-p_2)p_8 - p_3p_7 - p_0(p_9+p_{10}),\\
&[p_7,p_9]_P = (p_1-p_2)(p_9+p_{10}),\\
&[p_7,p_{10}]_P = \frac{1}{2}(p_2-p_1)p_6^2 - p_0p_6p_7 + p_0p_4p_8 + \frac{1}{2}(p_1-p_2)p_4p_5,\\
&[p_8,p_9]_P = 2p_3(p_9+p_{10}),\\
&[p_8,p_{10}]_P = -p_3p_6^2 + p_0p_6p_8 - p_0p_5p_7 + p_3p_4p_5,\\
&[p_9,p_{10}]_P = (p_5p_7 - p_6p_8)(p_1-p_2) + 2p_3p_4p_8 - 2p_3p_6p_7.
\end{aligned}
$$

Соотношение (3.13) переходит в соотношение

$$p_{10}^2 - p_4p_5p_9 - 2p_6p_7p_8 + p_9p_6^2 + p_4p_8^2 + p_5p_7^2 = 0.$$

Аналогично дополнительное соотношение (3.14) в случае $n = 2$ переходит в соотношение

$$p_1p_2 - p_3^2 - p_9 = 0 \tag{7.5}$$

и может быть использовано для исключения функции p_9 из списка образующих.

Легко видеть, что все пуассоновы алгебры $\mathcal{P}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}\right)$ при $n \geqslant 3$ изоморфны друг другу, поскольку зависимость от размерности n исчезает в коммутационных соотношениях при деквантовании:

$$\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}\right) \to \mathcal{P}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}\right).$$

То же справедливо для гамильтоновых функций.

Элементы C_i^{gr} из $Z\mathcal{P}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}\right)$, $i = 1,2,3$, соответствующие элементам C_i, $i = 1,2,3$, из п. 3.2.2, могут быть получены отбрасыванием членов степени менее $\deg C_i$ в выражении для C_i. Это приводит к следующим выражениям:

$$C_1^{\mathrm{gr}} = p_0^2 + p_1 + p_2 + p_4 + p_5, \quad C_2^{\mathrm{gr}} = p_1p_2 - p_3^2 - p_9,$$

$$C_3^{\mathrm{gr}} = \frac{1}{2}(p_1+p_2)(p_4+p_5) + \frac{1}{4}(p_1-p_2)^2 + p_3^2 +$$
$$+ \frac{1}{4}(p_4-p_5)^2 + p_6^2 + p_9 - 2p_{10} + \frac{1}{2}p_0^2(p_1+p_2+p_4+p_5) + \frac{1}{4}p_0^4.$$

Отметим, что ввиду (7.5) имеем $C_2^{\mathrm{gr}} = 0$ при $n = 2$.

7.1.2. Октавный случай

Выражение для двухчастичной гамильтоновой функции для пространства $Q = \mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)$ дано в (7.3), где p_i, $i = 0, \ldots, 9$, — образующие пуассоновой алгебры

$$\mathcal{P}_I\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right) \cong \mathrm{gr}\,\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right),$$

соответствующие образующим D_i, $i = 0, \ldots, 9$, алгебры $\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right)$.

Коммутационные соотношения теперь имеют вид:

$$\begin{aligned}
&[p_0,p_1]_P = -p_3,\ [p_0,p_2]_P = p_3,\ [p_0,p_3]_P = \frac{1}{2}(p_1-p_2),\ [p_0,p_4]_P = -2p_6,\\
&[p_0,p_5]_P = 2p_6,\ [p_0,p_6]_P = p_4-p_5,\ [p_0,p_7]_P = -p_8,\ [p_0,p_8]_P = p_7,\\
&[p_0,p_9]_P = 0,\ [p_1,p_2]_P = -2p_0p_3 - 2p_7,\ [p_1,p_3]_P = -p_0p_1 + p_8,\\
&[p_1,p_4]_P = 2p_7,\ [p_1,p_5]_P = 0,\ [p_1,p_6]_P = p_8,\\
&[p_1,p_7]_P = p_1(p_2-p_4) - p_9 - p_3p_6 - p_3^2,\ [p_1,p_8]_P = -p_3p_5 - p_1p_6,\\
&[p_1,p_9]_P = p_5p_7 - p_6p_8,\ [p_2,p_3]_P = p_0p_2 + p_8,\ [p_2,p_4]_P = -2p_7,\\
&[p_2,p_5]_P = 0,\ [p_2,p_6]_P = -p_8,\ [p_2,p_7]_P = (p_4-p_1)p_2 + p_9 - p_3p_6 + p_3^2,\\
&[p_2,p_8]_P = p_2p_6 - p_3p_5,\ [p_2,p_9]_P = p_6p_8 - p_5p_7,\ [p_3,p_4]_P = 0,\\
&[p_3,p_5]_P = 2p_8,\ [p_3,p_6]_P = p_7,\ [p_3,p_7]_P = -\frac{1}{2}(p_1+p_2)p_6,\\
&[p_3,p_8]_P = p_1p_2 - \frac{1}{2}(p_1+p_2)p_5 - p_9 - p_3^2, \qquad (7.6)\\
&[p_3,p_9]_P = p_4p_8 - p_6p_7,\ [p_4,p_5]_P = -4p_0p_6,\ [p_4,p_6]_P = -2p_0p_4,\\
&[p_4,p_7]_P = (p_1-p_2)p_4,\ [p_4,p_8]_P = (p_1-p_2)p_6 - 2p_0p_7,\\
&[p_4,p_9]_P = 0,\ [p_5,p_6]_P = 2p_0p_5,\ [p_5,p_7]_P = 2p_3p_6 + 2p_0p_8,\\
&[p_5,p_8]_P = 2p_3p_5,\ [p_5,p_9]_P = 0,\ [p_6,p_7]_P = \frac{1}{2}(p_1-p_2)p_6 + p_3p_4 + p_0p_7,\\
&[p_6,p_8]_P = \frac{1}{2}(p_1-p_2)p_5 + p_3p_6 - p_0p_8,\ [p_6,p_9]_P = 0,
\end{aligned}$$

$$[p_7, p_8]_P = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)p_8 - p_3p_7 + p_0p_9 + p_0p_3^2 - p_0p_1p_2,$$

$$[p_7, p_9]_P = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)p_4p_5 + p_0p_6p_7 - p_0p_4p_8 + \frac{1}{2}(p_1 - p_2)p_6^2,$$

$$[p_8, p_9]_P = p_3p_6^2 - p_0p_6p_8 - p_3p_4p_5 + p_0p_5p_7.$$

Элементы C_i^{gr}, $i = 1, 2$, из $\mathrm{Z}\mathcal{P}_I\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right)$, соответствующие элементам C_1, C_2 из п. 3.5.2, суть

$$C_1^{\mathrm{gr}} = p_0^2 + p_1 + p_2 + p_4 + p_5,\ C_2^{\mathrm{gr}} = p_4p_5 - p_6^2 - 2p_9.$$

7.1.3. Комплексный случай

Из выражения (5.23) получаем для пространства $Q = \mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ двухчастичную гамильтонову функцию в виде

$$\begin{aligned} h = {} & \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2}p_r^2 + \frac{(m_1\alpha - m_2\beta)(1+r^2)}{2m_1m_2R^2}p_rp_0 + \frac{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}p_0^2 + \\ & + \frac{1}{2}\left(D_sp_1 + F_sp_2 + 2E_sp_3 + C_sp_4^2 + A_sp_5^2 + 2B_sp_4p_5\right) + V(r), \end{aligned} \tag{7.7}$$

где p_i, $i = 0, \ldots, 5$, — образующие пуассоновой алгебры $\mathcal{P}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}}\right) \cong \cong \mathrm{gr}\,\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}}\right)$, соответствующие образующим D_i, $i = 0, \ldots, 5$, алгебры $\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}}\right)$. Последнюю образующую пуассоновой алгебры $\mathcal{P}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$, соответствующую образующей $\square$ алгебры $\mathrm{Diff}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$, обозначим $p_\square$.

Коммутационные соотношения для этих образующих пуассоновой алгебры $\mathcal{P}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}}\right)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} & [p_0, p_1]_P = -p_3,\ [p_0, p_2]_P = p_3,\ [p_0, p_3]_P = \frac{1}{2}(p_1 - p_2), \\ & [p_0, p_4]_P = -p_5,\ [p_0, p_5]_P = p_4, \\ & [p_0, p_\square]_P = 0,\ [p_1, p_2]_P = -2p_0p_3 - 2p_\square p_4, \\ & [p_1, p_3]_P = -p_0p_1 + p_\square p_5,\ [p_1, p_4]_P = p_\square, \\ & [p_1, p_5]_P = 0,\ [p_1, p_\square]_P = -p_1p_4 - p_3p_5, \\ & [p_2, p_3]_P = p_0p_2 + p_\square p_5,\ [p_2, p_4]_P = -p_\square, \\ & [p_2, p_5]_P = 0,\ [p_2, p_\square]_P = p_2p_4 - p_3p_5, \\ & [p_3, p_4]_P = 0,\ [p_3, p_5]_P = p_\square, \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$[p_3, p_\square]_P = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2)p_5,\ [p_4, p_5]_P = -p_0,$$

$$[p_4, p_\square]_P = \frac{1}{2}(p_1 - p_2),\ [p_5, p_\square]_P = p_3.$$

Дополнительное соотношение (3.28) в случае $n = 2$ имеет вид

$$p_1 p_2 - p_3^2 - p_\square^2 = 0. \tag{7.9}$$

Элементы $C_i^{\mathrm{gr}} \in \mathrm{Z}\mathcal{P}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$, $i = 1, 2, 3$, соответствующие элементам C_i, $i = 1, 2, 3$, из п. 3.3.2, суть

$$C_1^{\mathrm{gr}} = p_0^2 + p_1 + p_2 + p_4^2 + p_5^2,\ C_2^{\mathrm{gr}} = 2((p_1 - p_2)p_5 - 2p_3 p_4 + 2p_0 p_\square),$$
$$C_3^{\mathrm{gr}} = p_1 p_2 - p_3^2 - p_\square^2.$$

Отметим, что ввиду (7.9) имеем $C_3^{\mathrm{gr}} = 0$ при $n = 2$.

7.1.4. Вещественный случай

Из выражения (5.24) получаем для пространств $Q = \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$, $\mathbf{S}^n, n \geqslant 3$, двухчастичную гамильтонову функцию в виде:

$$h = \frac{(1 + r^2)^2}{8mR^2} p_r^2 + \frac{(m_1\alpha - m_2\beta)(1 + r^2)}{2m_1 m_2 R^2} p_r p_0 + \frac{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}{2m_1 m_2 R^2} p_0^2 + \\ + \frac{1}{2}(C_s p_1 + A_s p_2 + 2B_s p_3) + V(r). \tag{7.10}$$

Пуассонова алгебра $\mathcal{P}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}}) \cong \mathcal{P}_I(\mathbf{S}^n_{\mathbf{S}})$ порождается элементами p_i, $i = 0, \ldots, 3$, при $n \geqslant 4$ и элементами $p_\square, p_i$, $i = 0, \ldots, 3$, при $n = 3$. Коммутационные соотношения для этих образующих суть:

$$[p_0, p_1]_P = -2p_3,\ [p_0, p_2]_P = 2p_3,\ [p_0, p_3]_P = p_1 - p_2, \\ [p_1, p_2]_P = -4p_0 p_3,\ [p_1, p_3]_P = -2p_0 p_1,\ [p_2, p_3]_P = 2p_0 p_2. \tag{7.11}$$

Образующая $p_\square$ (если она существует) коммутирует со всеми остальными образующими.

Дополнительное соотношение (3.36) в случае $n = 3$ теперь имеет вид

$$p_1 p_2 - p_3^2 - p_\square^2 = 0. \tag{7.12}$$

Элементы $C_i^{\mathrm{gr}} \in Z\mathcal{P}_I(\mathbf{P}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}})$, $i = 1, 2$, соответствующие элементам C_i, $i = 1, 2$, из п. 3.4.2, суть

$$C_1^{\mathrm{gr}} = p_0^2 + p_1 + p_2,\ C_2^{\mathrm{gr}} = p_1 p_2 - p_3^2.$$

Отметим, что ввиду (7.12) для $n = 3$ справедливо равенство $C_2^{\mathrm{gr}} = p_{\square}^2$.

Из выражения (5.25) для пространств $Q = \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$, $\mathbf{S}^2$ получаем двухчастичную гамильтонову функцию в виде:

$$h = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2} p_r^2 + \frac{(m_1\alpha - m_2\beta)(1+r^2)}{2m_1 m_2 R^2} p_r p_0 + \frac{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}{2m_1 m_2 R^2} p_0^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(C_s p_1^2 + A_s p_2^2 + 2B_s p_1 p_2\right) + V(r), \tag{7.13}$$

где

$$[p_0, p_1]_P = -p_2,\ [p_0, p_2]_P = p_1,\ [p_1, p_2]_P = -p_0. \tag{7.14}$$

Пуассонова алгебра $\mathcal{P}_I\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{R})_{\mathbf{S}}\right) \cong \mathcal{P}_I\left(\mathbf{S}_{\mathbf{S}}^2\right)$ изоморфна алгебре $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{so}(3))$. В данном простейшем случае в алгебре $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{so}(3))$ существует только один независимый центральный элемент: $C_1^{\mathrm{gr}} = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2$.

§ 7.2. Явно инвариантный вид гамильтоновой функции задачи двух тел на некомпактных двухточечно-однородных пространствах

Здесь мы получим выражения гамильтоновой функции системы двух частиц на некомпактных двухточечно-однородных пространствах Q через образующие пуассоновой алгебры $\mathcal{P}_I(Q_S)$. Кроме того, будут найдены коммутационные соотношения для данных образующих. Используемые рассуждения совершенно аналогичны рассуждениям предыдущего параграфа.

7.2.1. Кватернионный случай

Из выражения (5.26) получаем для пространства $Q = \mathbf{H}^n(\mathbb{H})$ выражение для двухчастичной гамильтоновой функции в виде:

$$\begin{aligned} h = &\frac{(1-r^2)^2}{8mR^2}p_r^2 + \\ &+ \frac{(m_1\alpha - m_2\beta)(1-r^2)}{2m_1m_2R^2}p_r\bar{p}_0 + \frac{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}\bar{p}_0^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\left(D_h\bar{p}_1 + F_h\bar{p}_2 + 2E_h\bar{p}_3 + C_h\bar{p}_4 + A_h\bar{p}_5 + 2B_h\bar{p}_6\right) + V(r), \end{aligned} \tag{7.15}$$

где $\bar{p}_i$ — образующие пуассоновой алгебры

$$\mathcal{P}_I\left(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}\right) \cong \operatorname{gr}\operatorname{Diff}_I\left(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}\right),$$

соответствующие образующим $\bar{D}_i$, $i = 0, \ldots, 10$, алгебры $\operatorname{Diff}_I\left(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}\right)$, а функции $A_h, B_h, C_h, D_h, F_h, E_h$ определены в § 5.3.

Из коммутационных соотношений (3.17) получаем 55 коммутационных соотношений для образующих пуассоновой алгебры $\mathcal{P}_I\left(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}\right)$ (см. замечание 4.3):

$$\begin{aligned}
&[\bar{p}_0, \bar{p}_1]_P = \bar{p}_3,\ [\bar{p}_0, \bar{p}_2]_P = \bar{p}_3, \\
&[\bar{p}_0, \bar{p}_3]_P = \frac{1}{2}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2),\ [\bar{p}_0, \bar{p}_4]_P = 2\bar{p}_6,\ [\bar{p}_0, \bar{p}_5]_P = 2\bar{p}_6, \\
&[\bar{p}_0, \bar{p}_6]_P = \bar{p}_4 + \bar{p}_5, [\bar{p}_0, \bar{p}_7]_P = \bar{p}_8, [\bar{p}_0, \bar{p}_8]_P = \bar{p}_7, \\
&[\bar{p}_0, \bar{p}_9]_P = 0,\ [\bar{p}_0, \bar{p}_{10}]_P = 0, \\
&[\bar{p}_1, \bar{p}_2]_P = -2\bar{p}_0\bar{p}_3 - 2\bar{p}_7,\ [\bar{p}_1, \bar{p}_3]_P = -\bar{p}_0\bar{p}_1 - \bar{p}_8, \\
&[\bar{p}_1, \bar{p}_4]_P = -2\bar{p}_7,\ [\bar{p}_1, \bar{p}_5]_P = 0,\ [\bar{p}_1, \bar{p}_6]_P = -\bar{p}_8, \\
&[\bar{p}_1, \bar{p}_7]_P = \bar{p}_3\bar{p}_6 - \bar{p}_1\bar{p}_4 - \bar{p}_9 - \bar{p}_{10},\ [\bar{p}_1, \bar{p}_8]_P = \bar{p}_3\bar{p}_5 - \bar{p}_1\bar{p}_6, \\
&[\bar{p}_1, \bar{p}_9]_P = 2\bar{p}_3\bar{p}_8 - 2\bar{p}_1\bar{p}_7,\ [\bar{p}_1, \bar{p}_{10}]_P = \bar{p}_5\bar{p}_7 - \bar{p}_6\bar{p}_8,\ [\bar{p}_2, \bar{p}_3]_P = \bar{p}_0\bar{p}_2 + \bar{p}_8, \\
&[\bar{p}_2, \bar{p}_4]_P = -2\bar{p}_7,\ [\bar{p}_2, \bar{p}_5]_P = 0,\ [\bar{p}_2, \bar{p}_6]_P = -\bar{p}_8, \\
&[\bar{p}_2, \bar{p}_7]_P = \bar{p}_2\bar{p}_4 - \bar{p}_3\bar{p}_6 - \bar{p}_9 - \bar{p}_{10}, \\
&[\bar{p}_2, \bar{p}_8]_P = \bar{p}_2\bar{p}_6 - \bar{p}_3\bar{p}_5,\ [\bar{p}_2, \bar{p}_9]_P = 2\bar{p}_2\bar{p}_7 - 2\bar{p}_3\bar{p}_8,\ [\bar{p}_2, \bar{p}_{10}]_P = \bar{p}_5\bar{p}_7 - \bar{p}_6\bar{p}_8, \\
&[\bar{p}_3, \bar{p}_4]_P = 0,\ [\bar{p}_3, \bar{p}_5]_P = 2\bar{p}_8,\ [\bar{p}_3, \bar{p}_6]_P = \bar{p}_7,\ [\bar{p}_3, \bar{p}_7]_P = \frac{1}{2}(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)\bar{p}_6,
\end{aligned} \tag{7.16}$$

$$[\bar p_3,\bar p_8]_P=\frac{1}{2}(\bar p_2-\bar p_1)\bar p_5+\bar p_9+\bar p_{10},\ [\bar p_3,\bar p_9]_P=(\bar p_2-\bar p_1)\bar p_8,$$
$$[\bar p_3,\bar p_{10}]_P=\bar p_6\bar p_7-\bar p_4\bar p_8,$$
$$[\bar p_4,\bar p_5]_P=-4\bar p_0\bar p_6,\ [\bar p_4,\bar p_6]_P=-2\bar p_0\bar p_4,\ [\bar p_4,\bar p_7]_P=(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_4,$$
$$[\bar p_4,\bar p_8]_P=(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_6-2\bar p_0\bar p_7,$$
$$[\bar p_4,\bar p_9]_P=2(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_7,\ [\bar p_4,\bar p_{10}]_P=0,\ [\bar p_5,\bar p_6]_P=2\bar p_0\bar p_5,$$
$$[\bar p_5,\bar p_7]_P=2\bar p_3\bar p_6+2\bar p_0\bar p_8,\ [\bar p_5,\bar p_8]_P=2\bar p_3\bar p_5,$$
$$[\bar p_5,\bar p_9]_P=4\bar p_3\bar p_8,\ [\bar p_5,\bar p_{10}]_P=0,$$
$$[\bar p_6,\bar p_7]_P=\frac{1}{2}(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_6+\bar p_3\bar p_4+\bar p_0\bar p_7,$$
$$[\bar p_6,\bar p_8]_P=\frac{1}{2}(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_5+\bar p_3\bar p_6-\bar p_0\bar p_8,$$
$$[\bar p_6,\bar p_9]_P=(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_8+2\bar p_3\bar p_7,\ [\bar p_6,\bar p_{10}]_P=0,$$
$$[\bar p_7,\bar p_8]_P=\frac{1}{2}(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_8-\bar p_3\bar p_7-\bar p_0(\bar p_9+\bar p_{10}),$$
$$[\bar p_7,\bar p_9]_P=(\bar p_1+\bar p_2)(\bar p_9+\bar p_{10}),$$
$$[\bar p_7,\bar p_{10}]_P=-\frac{1}{2}(\bar p_2+\bar p_1)\bar p_6^2-\bar p_0\bar p_6\bar p_7+\bar p_0\bar p_4\bar p_8+\frac{1}{2}(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_4\bar p_5,$$
$$[\bar p_8,\bar p_9]_P=2\bar p_3(\bar p_9+\bar p_{10}),$$
$$[\bar p_8,\bar p_{10}]_P=\bar p_0\bar p_6\bar p_8-\bar p_3\bar p_6^2-\bar p_0\bar p_5\bar p_7+\bar p_3\bar p_4\bar p_5,$$
$$[\bar p_9,\bar p_{10}]_P=(\bar p_5\bar p_7-\bar p_6\bar p_8)(\bar p_1+\bar p_2)+2\bar p_3\bar p_4\bar p_8-2\bar p_3\bar p_6\bar p_7.$$

Соотношение (3.18) переходит в соотношение

$$\bar p_{10}^2-\bar p_4\bar p_5\bar p_9-2\bar p_6\bar p_7\bar p_8+\bar p_9\bar p_6^2+\bar p_4\bar p_8^2+\bar p_5\bar p_7^2=0.$$

Дополнительное соотношение (3.19) для случая $n=2$, как и для пространства $Q=\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$, имеет вид

$$\bar p_1\bar p_2-\bar p_3^2-\bar p_9=0 \tag{7.17}$$

и может быть использовано для исключения функции $\bar p_9$ из списка образующих.

Все пуассоновы алгебры $\mathcal{P}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}})$ при $n\geqslant 3$ изоморфны друг другу. То же самое верно и для гамильтоновых функций.

Центральные элементы $\overline{C}_i^{\mathrm{gr}}$ из алгебры $\mathcal{P}_I\left(\mathbf{H}^n(\mathbb{H})_{\mathbf{S}}\right)$, $i=1,2,3$, соответствующие элементам $\overline{C}_i$, $i=1,2,3$, из п. 3.2.2, суть:

$$\overline{C}_1^{\mathrm{gr}}=\bar{p}_0^2+\bar{p}_1-\bar{p}_2+\bar{p}_4-\bar{p}_5,\ \overline{C}_2^{\mathrm{gr}}=\bar{p}_1\bar{p}_2-\bar{p}_3^2-\bar{p}_9,$$

$$\begin{aligned}\overline{C}_3^{\mathrm{gr}}=&\ \frac{1}{2}(\bar{p}_1-\bar{p}_2)(\bar{p}_4-\bar{p}_5)+\\&+\frac{1}{4}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)^2-\bar{p}_3^2+\frac{1}{4}(\bar{p}_4+\bar{p}_5)^2-\bar{p}_6^2-\bar{p}_9+2\bar{p}_{10}+\\&+\frac{1}{2}\bar{p}_0^2(\bar{p}_1-\bar{p}_2+\bar{p}_4-\bar{p}_5)+\frac{1}{4}\bar{p}_0^4.\end{aligned}$$

Отметим, что ввиду (7.17) при $n=2$ справедливо равенство $\overline{C}_2^{\mathrm{gr}}=0$.

7.2.2. Октавный случай

Выражение для гамильтоновой функции двухчастичной системы на пространстве $Q=\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)$ дается формулой (7.15), где теперь $\bar{p}_i$, $i=0,\ldots,9$, — образующие пуассоновой алгебры

$$\mathcal{P}_I\left(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right)\cong\operatorname{gr}\operatorname{Diff}_I\left(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right),$$

соответствующие образующим $\bar{D}_i$, $i=0,\ldots,9$, алгебры $\operatorname{Diff}_I\left(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right)$.

В силу (3.45) коммутационные соотношения для этих образующих имеют вид:

$$[\bar{p}_0,\bar{p}_1]_P=\bar{p}_3,\ [\bar{p}_0,\bar{p}_2]_P=\bar{p}_3,\ [\bar{p}_0,\bar{p}_3]_P=\frac{1}{2}(\bar{p}_1+\bar{p}_2),\ [\bar{p}_0,\bar{p}_4]_P=2\bar{p}_6,$$

$$[\bar{p}_0,\bar{p}_5]_P=2\bar{p}_6,\ [\bar{p}_0,\bar{p}_6]_P=\bar{p}_4+\bar{p}_5,\ [\bar{p}_0,\bar{p}_7]_P=\bar{p}_8,$$

$$[\bar{p}_0,\bar{p}_8]_P=\bar{p}_7,\ [\bar{p}_0,\bar{p}_9]_P=0,\ [\bar{p}_1,\bar{p}_2]_P=-2\bar{p}_0\bar{p}_3-2\bar{p}_7,$$

$$[\bar{p}_1,\bar{p}_3]_P=-\bar{p}_0\bar{p}_1-\bar{p}_8,\ [\bar{p}_1,\bar{p}_4]_P=-2\bar{p}_7,\ [\bar{p}_1,\bar{p}_5]_P=0,$$

$$[\bar{p}_1,\bar{p}_6]_P=-\bar{p}_8,\ [\bar{p}_1,\bar{p}_7]_P=-\bar{p}_1(\bar{p}_2+\bar{p}_4)+\bar{p}_9+\bar{p}_3\bar{p}_6+\bar{p}_3^2,$$

$$[\bar{p}_1,\bar{p}_8]_P=\bar{p}_3\bar{p}_5-\bar{p}_1\bar{p}_6,\ [\bar{p}_1,\bar{p}_9]_P=\bar{p}_6\bar{p}_8-\bar{p}_5\bar{p}_7,$$

$$[\bar{p}_2,\bar{p}_3]_P=\bar{p}_0\bar{p}_2+\bar{p}_8,\ [\bar{p}_2,\bar{p}_4]_P=-2\bar{p}_7,\ [\bar{p}_2,\bar{p}_5]_P=0,$$

$$[\bar{p}_2,\bar{p}_6]_P=-\bar{p}_8,\ [\bar{p}_2,\bar{p}_7]_P=(\bar{p}_4-\bar{p}_1)\bar{p}_2+\bar{p}_9-\bar{p}_3\bar{p}_6+\bar{p}_3^2,$$

$$[\bar{p}_2,\bar{p}_8]_P=\bar{p}_2\bar{p}_6-\bar{p}_3\bar{p}_5,\ [\bar{p}_2,\bar{p}_9]_P=\bar{p}_6\bar{p}_8-\bar{p}_5\bar{p}_7,$$

$$[\bar{p}_3,\bar{p}_4]_P=0,\ [\bar{p}_3,\bar{p}_5]_P=2\bar{p}_8,\ [\bar{p}_3,\bar{p}_6]_P=\bar{p}_7,$$

$$[\bar{p}_3,\bar{p}_7]_P=\frac{1}{2}(\bar{p}_2-\bar{p}_1)\bar{p}_6,\ [\bar{p}_3,\bar{p}_8]_P=\bar{p}_1\bar{p}_2+\frac{1}{2}(\bar{p}_2-\bar{p}_1)\bar{p}_5-\bar{p}_9-\bar{p}_3^2,$$

$$
\begin{aligned}
&[\bar p_3,\bar p_9]_P=\bar p_4\bar p_8-\bar p_6\bar p_7,\ [\bar p_4,\bar p_5]_P=-4\bar p_0\bar p_6,\\
&[\bar p_4,\bar p_6]_P=-2\bar p_0\bar p_4,\ [\bar p_4,\bar p_7]_P=(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_4,\\
&[\bar p_4,\bar p_8]_P=(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_6-2\bar p_0\bar p_7,\ [\bar p_4,\bar p_9]_P=0,\ [\bar p_5,\bar p_6]_P=2\bar p_0\bar p_5,\\
&[\bar p_5,\bar p_7]_P=2\bar p_3\bar p_6+2\bar p_0\bar p_8,\ [\bar p_5,\bar p_8]_P=2\bar p_3\bar p_5,\ [\bar p_5,\bar p_9]_P=0,\\
&[\bar p_6,\bar p_7]_P=\frac{1}{2}(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_6+\bar p_3\bar p_4+\bar p_0\bar p_7,\\
&[\bar p_6,\bar p_8]_P=\frac{1}{2}(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_5+\bar p_3\bar p_6-\bar p_0\bar p_8,\ [\bar p_6,\bar p_9]_P=0,\\
&[\bar p_7,\bar p_8]_P=\frac{1}{2}(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_8-\bar p_3\bar p_7+\bar p_0\bar p_9+\bar p_0\bar p_3^2-\bar p_0\bar p_1\bar p_2,\\
&[\bar p_7,\bar p_9]_P=-\frac{1}{2}(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_4\bar p_5+\bar p_0\bar p_6\bar p_7-\bar p_0\bar p_4\bar p_8+\frac{1}{2}(\bar p_1+\bar p_2)\bar p_6^2,\\
&[\bar p_8,\bar p_9]_P=\bar p_3\bar p_6^2-\bar p_0\bar p_6\bar p_8-\bar p_3\bar p_4\bar p_5+\bar p_0\bar p_5\bar p_7.
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

Центральные элементы $\overline{C}_i^{\mathrm{gr}}$, $i=1,2$, пуассоновой алгебры $\mathcal{P}_I(\mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}})$, соответствующие элементам $\overline{C}_1,\overline{C}_2$ из п. 3.5.2, имеют вид

$$
\overline{C}_1^{\mathrm{gr}}=\bar p_0^2+\bar p_1-\bar p_2+\bar p_4-\bar p_5,\ \overline{C}_2^{\mathrm{gr}}=\bar p_4\bar p_5-\bar p_6^2-2\bar p_9.
$$

7.2.3. Комплексный случай

Из выражения (5.27) получаем для пространства $Q=\mathbf{H}^n(\mathbb{C})$ выражение для двухчастичной гамильтоновой функции в виде

$$
\begin{aligned}
h=&\frac{(1-r^2)^2}{8mR^2}p_r^2+\frac{(m_1\alpha-m_2\beta)(1-r^2)}{2m_1m_2R^2}p_r\bar p_0+\frac{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}\bar p_0^2+\\
&+\frac{1}{2}\left(D_h\bar p_1+F_h\bar p_2+2E_h\bar p_3+C_h\bar p_4^2+A_h\bar p_5^2+2B_h\bar p_4\bar p_5\right)+V(r),
\end{aligned}
\tag{7.19}
$$

где $\bar p_i$, $i=0,\dots,5$,— образующие пуассоновой алгебры $\mathcal{P}_I\left(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}}\right)\cong$ $\cong\operatorname{gr}\operatorname{Diff}_I\left(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}}\right)$, соответствующие образующим $\bar D_i$, $i=0,\dots,5$, алгебры $\operatorname{Diff}_I\left(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}}\right)$. Образующую пуассоновой алгебры $\mathcal{P}_I\left(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}}\right)$, соответствующую образующей $\overline{\Box}$ алгебры $\operatorname{Diff}_I\left(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}}\right)$ обозначим через $\bar p_\Box$.

Коммутационные соотношения для этих образующих имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&[\bar p_0,\bar p_1]_P=\bar p_3,\ [\bar p_0,\bar p_2]_P=\bar p_3,\ [\bar p_0,\bar p_3]_P=\frac{1}{2}(\bar p_1+\bar p_2),\ [\bar p_0,\bar p_4]_P=\bar p_5,\\
&[\bar p_0,\bar p_5]_P=\bar p_4,\ [\bar p_0,\bar p_\Box]_P=0,\ [\bar p_1,\bar p_2]_P=-2\bar p_0\bar p_3-2\bar p_\Box\bar p_4,
\end{aligned}
$$

$$[\bar{p}_1,\bar{p}_3]_P = -\bar{p}_0\bar{p}_1 - \bar{p}_\square\bar{p}_5,\ [\bar{p}_1,\bar{p}_4]_P = -\bar{p}_\square,\ [\bar{p}_1,\bar{p}_5]_P = 0,$$
$$[\bar{p}_1,\bar{p}_\square]_P = \bar{p}_3\bar{p}_5 - \bar{p}_1\bar{p}_4,\ [\bar{p}_2,\bar{p}_3]_P = \bar{p}_0\bar{p}_2 + \bar{p}_\square\bar{p}_5,\ [\bar{p}_2,\bar{p}_4]_P = -\bar{p}_\square,$$
$$[\bar{p}_2,\bar{p}_5]_P = 0,\ [\bar{p}_2,\bar{p}_\square]_P = \bar{p}_2\bar{p}_4 - \bar{p}_3\bar{p}_5,\ [\bar{p}_3,\bar{p}_4]_P = 0,\ [\bar{p}_3,\bar{p}_5]_P = \bar{p}_\square,$$
$$[\bar{p}_3,\bar{p}_\square]_P = \frac{1}{2}(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)\bar{p}_5,\ [\bar{p}_4,\bar{p}_5]_P = -\bar{p}_0, \tag{7.20}$$
$$[\bar{p}_4,\bar{p}_\square]_P = \frac{1}{2}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2),\ [\bar{p}_5,\bar{p}_\square]_P = \bar{p}_3.$$

Дополнительное соотношение (3.29) при $n = 2$ переходит в соотношение

$$\bar{p}_1\bar{p}_2 - \bar{p}_3^2 - \bar{p}_\square^2 = 0. \tag{7.21}$$

Элементы $\overline{C}_i^{\mathrm{gr}} \in Z\mathcal{P}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{C})_{\mathbf{S}})$, $i = 1,2,3$, соответствующие элементам $\overline{C}_i$, $i = 1,2,3$, из п. 3.3.2, суть

$$\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = \bar{p}_0^2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 + \bar{p}_4^2 - \bar{p}_5^2,\ \overline{C}_2^{\mathrm{gr}} = 2((\bar{p}_1 + \bar{p}_2)\bar{p}_5 - 2\bar{p}_3\bar{p}_4 + 2\bar{p}_0\bar{p}_\square),$$
$$\overline{C}_3^{\mathrm{gr}} = \bar{p}_1\bar{p}_2 - \bar{p}_3^2 - \bar{p}_\square^2.$$

Отметим, что в силу (7.21) при $n = 2$ справедливо равенство $\overline{C}_3^{\mathrm{gr}} = 0$.

7.2.4. Вещественный случай

Из выражения (5.28) получаем для пространства $Q = \mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 3$, выражение для двухчастичной гамильтоновой функции в виде:

$$h = \frac{(1-r^2)^2}{8mR^2}p_r^2 + \frac{(m_1\alpha - m_2\beta)(1-r^2)}{2m_1m_2R^2}p_r\bar{p}_0 + \frac{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}\bar{p}_0^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}(C_h\bar{p}_1 + A_h\bar{p}_2 + 2B_h\bar{p}_3) + V(r). \tag{7.22}$$

Пуассонова алгебра $\mathcal{P}_I(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}})$ порождается элементами $\bar{p}_i$, $i = 0,\ldots,3$, при $n \geqslant 4$ и элементами $\bar{p}_\square, \bar{p}_i$, $i = 0,\ldots,3$, при $n = 3$. Коммутационные соотношения для этих образующих суть

$$[\bar{p}_0,\bar{p}_1]_P = 2\bar{p}_3,\ [\bar{p}_0,\bar{p}_2]_P = 2\bar{p}_3,\ [\bar{p}_0,\bar{p}_3]_P = \bar{p}_1 + \bar{p}_2,$$
$$[\bar{p}_1,\bar{p}_2]_P = -4\bar{p}_0\bar{p}_3,\ [\bar{p}_1,\bar{p}_3]_P = -2\bar{p}_0\bar{p}_1,\ [\bar{p}_2,\bar{p}_3]_P = 2\bar{p}_0\bar{p}_2. \tag{7.23}$$

Образующая $\bar{p}_\square$ (если она существует) коммутирует со всеми остальными.

Дополнительное соотношение (3.37) в случае $n = 3$ теперь имеет вид

$$\bar{p}_1\bar{p}_2 - \bar{p}_3^2 - \bar{p}_\square^2 = 0. \tag{7.24}$$

Элементы $\overline{C}_i^{\mathrm{gr}} \in Z\mathcal{P}_I\left(\mathbf{H}^n(\mathbb{R})_{\mathbf{S}}\right)$, $i = 1, 2$, соответствующие элементам $\overline{C}_i$, $i = 1, 2$, из п. 3.4.2, суть

$$\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = \bar{p}_0^2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2,\ \overline{C}_2^{\mathrm{gr}} = \bar{p}_1\bar{p}_2 - \bar{p}_3^2.$$

Отметим, что в силу (7.12) при $n = 3$ справедливо равенство $\overline{C}_2^{\mathrm{gr}} = \bar{p}_\square^2$.

Для пространства $Q = \mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ выражение (5.29) дает:

$$h = \frac{(1-r^2)^2}{8mR^2}p_r^2 + \frac{(m_1\alpha - m_2\beta)(1-r^2)}{2m_1m_2R^2}p_r\bar{p}_0 + \frac{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}{2m_1m_2R^2}\bar{p}_0^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(C_h\bar{p}_1^2 + A_h\bar{p}_2^2 + 2B_h\bar{p}_1\bar{p}_2\right) + V(r),$$

где

$$[\bar{p}_0, \bar{p}_1]_P = \bar{p}_2,\ [\bar{p}_0, \bar{p}_2]_P = \bar{p}_1,\ [\bar{p}_1, \bar{p}_2]_P = -\bar{p}_0. \tag{7.25}$$

Пуассонова алгебра $\mathcal{P}_I\left(\mathbf{H}^2(\mathbb{R})_{\mathbf{S}}\right)$ изоморфна градуированной алгебре $\mathrm{gr}\,U(\mathfrak{so}(1,2))$. В этой алгебре существует только один независимый центральный элемент $\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = \bar{p}_0^2 + \bar{p}_1^2 - \bar{p}_2^2$, и это простейший некомпактный случай.

§ 7.3. Динамика двухчастичной системы и проблема столкновения частиц

Заметим прежде всего, что классическая задача двух тел на пространствах $\mathbf{P}^n(\mathbb{H})$, $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$, $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$, $\mathbf{S}^n$ и их гиперболических аналогах $\mathbf{H}^n(\mathbb{H})$, $\mathbf{H}^n(\mathbb{C})$, $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ достигает наибольшей общности при $n = 3$, поскольку при $n > 3$ существует некоторое вполне геодезическое подпространство $\widetilde{Q}$, изометричное соответственно пространствам $\mathbf{P}^3(\mathbb{H})$, $\mathbf{P}^3(\mathbb{C})$, $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$, $\mathbf{S}^3$, $\mathbf{H}^3(\mathbb{H})$, $\mathbf{H}^3(\mathbb{C})$, $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$, содержащее начальные положения частиц и такое, что начальные скорости частиц касаются его. Этот факт согласуется с тем, что гамильтоновы функции (7.3), (7.7), (7.10), (7.15), (7.19), (7.22) и соответствующие пуассоновы алгебры стабильны при $n \geqslant 3$.

Известно, что гамильтонова механика допускает следующий подход, тесно связанный с квантовой механикой. При этом подходе гладкие функции на симплектическом фазовом пространстве M называются

наблюдаемыми. Интерес представляет их эволюция под действием фазового потока φ_t^h, соответствующего гамильтоновой функции h:

$$f_t(x) := f(\varphi_t^h(x)),\ \frac{d\varphi_t^h}{dt} = X_h,\ x \in M,\ f \in C^\infty(M).$$

В силу (4.4), эволюция наблюдаемой f_t описывается уравнением

$$\frac{df_t}{dt} = [f_t, h]_P. \tag{7.26}$$

Интеграл потока φ_t^h является постоянной наблюдаемой.

Пусть теперь группа Ли G пуассоново действует на пространстве M. Будем рассматривать только G-инвариантные наблюдаемые и, в частности, только G-инвариантные гамильтоновы функции. Фактически эта программа для задачи двух тел на двухточечно-однородных пространствах была реализована в § 7.1 и § 7.2. Действительно, там была найдена полная система независимых G-инвариантных наблюдаемых $r, p_r, p_0, p_1, \ldots$ на соответствующем кокасательном расслоении, выражение двухчастичной гамильтоновой функции через эти образующие и коммутационные соотношения (7.4), (7.6), (7.8), (7.11), (7.14), (7.16), (7.18), (7.20), (7.23), (7.25). Вместе с очевидными коммутационными соотношениями

$$[r, p_r]_P = 1,\ [r, p_i]_P = 0,\ [p_r, p_i]_P = 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots,$$

это позволяет написать уравнение (7.26) в явном виде для системы независимых G-инвариантных наблюдаемых.

Очевидно, что функции C_i^{gr} и $\overline{C}_i^{\mathrm{gr}}$ выше являются интегралами двухчастичного движения для любого центрального потенциала $V(r)$.

Замечание 7.1. Из конструкции Ad_{K_0}-инвариантных элементов в алгебре $S(\widetilde{\mathfrak{p}})$ (глава 3), замечания 4.3 и неравенства Коши–Буняковского для вещественных, комплексных или кватернионных векторных пространств следуют следующие неравенства для функций p_i и $\bar{p}_i$ на фазовом пространстве.

1) Для пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{H}), \mathbf{H}^n(\mathbb{H})$:

$$p_1, p_2, p_4, p_5, p_9, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_4, \bar{p}_5, \bar{p}_9 \geqslant 0,$$
$$p_1p_2 - p_3^2 - p_9 \geqslant 0,\ p_4p_5 - p_6^2 \geqslant 0,\ \bar{p}_1\bar{p}_2 - \bar{p}_3^2 - \bar{p}_9 \geqslant 0,\ \bar{p}_4\bar{p}_5 - \bar{p}_6^2 \geqslant 0,$$
$$p_7^2 \leqslant p_4p_9,\ p_8^2 \leqslant p_5p_9,\ \bar{p}_7^2 \leqslant \bar{p}_4\bar{p}_9,\ \bar{p}_8^2 \leqslant \bar{p}_5\bar{p}_9.$$

2) Для пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{C}), \mathbf{H}^n(\mathbb{C})$:

$$p_1, p_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2 \geqslant 0, p_1p_2 - p_3^2 - p_\square^2 \geqslant 0,\ \bar{p}_1\bar{p}_2 - \bar{p}_3^2 - \bar{p}_\square^2 \geqslant 0.$$

3) Для пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{R}), \mathbf{S}^n$, $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$:

$$p_1, p_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2 \geqslant 0, p_1p_2 - p_3^2 \geqslant 0,\ \bar{p}_1\bar{p}_2 - \bar{p}_3^2 \geqslant 0.$$

4) Для пространств $\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a), \mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)$:

$$p_1, p_2, p_4, p_5, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_4, \bar{p}_5 \geqslant 0, p_1p_2 - p_3^2 \geqslant 0,\ \bar{p}_1\bar{p}_2 - \bar{p}_3^2 \geqslant 0,\ p_4p_5 - p_6^2 \geqslant 0,$$
$$\bar{p}_4\bar{p}_5 - \bar{p}_6^2 \geqslant 0,\ |p_7| \leqslant 14\sqrt{p_1p_2p_4},\ |\bar{p}_7| \leqslant 14\sqrt{\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_4},\ |p_8| \leqslant 14\sqrt{p_1p_2p_5},$$
$$|\bar{p}_8| \leqslant 14\sqrt{\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_5},\ |p_9| \leqslant 16 \cdot 49\sqrt{p_1p_2p_4p_5},\ |\bar{p}_9| \leqslant 16 \cdot 49\sqrt{\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_4\bar{p}_5}.$$

7.3.1. Проблема столкновения частиц

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для величин $r, p_r, p_0, p_1, \ldots$ определяет, в частности, эволюцию расстояния между частицами. Если потенциал V является гладкой функцией на пространстве $(Q \times Q) \setminus \operatorname{diag}$, ограниченной при бесконечном удалении частиц друг от друга (для некомпактного пространства Q), то единственным препятствием для существования глобального решения этой динамической системы может быть столкновение частиц. Для потенциала отталкивания $V(r)$ такого, что $V(r) \to +\infty$ при $r \to 0$, столкновения могут иметь место только в случае фронтального движения частиц по общей геодезической с достаточно большими скоростями. Рассмотрим потенциал притяжения $V(r)$.

Априори существуют два возможных сценария столкновения частиц в момент времени t_0. Первый, наиболее естественный, соответствует наличию предела $\lim_{t \to t_0 - 0} r(t) = 0$. Второй сценарий более патологический: $\liminf_{t \to t_0 - 0} r(t) = 0$, но предел $\lim_{t \to t_0 - 0} r(t)$ не существует.

Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняются следующие условия:

$$V(r) \geqslant C_1(\varepsilon) = \text{const},\ \|\operatorname{grad} V(r)\| \leqslant C_2(\varepsilon) = \text{const},\ \forall r \geqslant \varepsilon. \qquad (7.27)$$

Используя подход из [180] (см. также [185]), можно доказать, что второй сценарий для таких потенциалов невозможен.[2] Действительно, обо-

[2]Рассуждения Пенлеве относятся к задаче n тел ($n \geqslant 3$) с гравитационным взаимодействием в евклидовом пространстве. Обозначим в данном случае $r(t) := \min_{i \neq j} r_{ij}(t)$, где r_{ij} — расстояние между i-ой и j-ой частицами. Пенлеве доказал, что если $\liminf_{t \to t_0 - 0} r(t) = 0$, то и $\lim_{t \to t_0 - 0} r(t) = 0$.

значим через

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{7.28}$$

систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую задаче двух тел на двухточечно-однородном пространстве Q в локальных координатах. Стандартная теорема существования решения задачи Коши ([47], гл. 2) гарантирует существование решения системы (7.28) на временном интервале, длина которого определяется верхней оценкой для $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ в некоторой области, содержащей точку $\mathbf{x}(0)$. Закон сохранения энергии и неравенства (7.27) влекут ограниченность скоростей частиц, а потому и ограниченность $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ при $r \geqslant \varepsilon > 0$. Поэтому условие $r(t') \geqslant \varepsilon > 0$ обеспечивает существование решения задачи двух тел на пространстве Q (а значит, и неравенство $r(t) > 0$) при $t' < t < t' + T_\varepsilon$, где величина $T_\varepsilon > 0$ зависит только от ε. Теперь предположения $\liminf_{t \to t_0 - 0} r(t) = 0$ и $r(t_k) > \varepsilon > 0$ для бесконечной последовательности $t_k \to t_0 - 0$ ведут к противоречию при $t_0 - t_k < T_\varepsilon$. ■

В евклидовом случае критическую асимптотику при $r \to 0$ имеет центробежный потенциал

$$V \sim \frac{c}{r^2},\ c < 0.$$

Поэтому для потенциалов $V = o(r^{-2})$ отсутствуют столкновения для начальных условий, которые не соответствуют фронтальному движению частиц. Для неплоских двухточечно-однородных пространств ситуация более тонкая.

Начальные условия системы двух тел можно различать по значениям соответствующих интегралов движения C_i^{gr} или $\overline{C}_i^{\mathrm{gr}}$. Некоторые значения этих интегралов могут соответствовать фронтальному движению частиц вдоль общей геодезической, что ведет к их столкновению. Однако те же значения данных интегралов могут соответствовать и другому движению тел. В силу вероятной неинтегрируемости задачи, отсутствие столкновений во втором случае трудно гарантировать.

Другие значения интегралов не могут соответствовать фронтальному движению частиц по общей геодезической. Для этих значений интегралов теорема ниже гарантирует отсутствие столкновений частиц. Она обобщает результат, полученный для пространств постоянной кривизны в [189], на все двухточечно-однородные пространства.

Положим для простоты $\alpha = m_2/(m_1 + m_2), \beta = m_1/(m_1 + m_2)$. В этом случае функции $A_{s,h}, B_{s,h}, C_{s,h}, D_{s,h}, E_{s,h}, F_{s,h}$ имеют следую-

щие асимптотики при $r \to 0$:

$$
\begin{aligned}
A_{s,h}(r) &= \frac{1}{4mR^2r^2} + O(1), \ B_{s,h}(r) = O(r), \\
C_{s,h}(r) &= \frac{1}{(m_1+m_2)R^2} + O(r^2), \\
D_{s,h}(r) &= \frac{1}{(m_1+m_2)R^2} + O(r^2), \ E_{s,h}(r) = O(r), \\
F_{s,h}(r) &= \frac{1}{mR^2r^2} + O(1).
\end{aligned}
\tag{7.29}
$$

Теорема 7.1. *Пусть потенциал $V(r)$ является гладким при $r > 0$, справедливы неравенства* (7.27) *и $V = o(r^{-2})$ при $r \to 0$. Тогда столкновения частиц отсутствуют в следующих случаях (везде $c_i = \mathrm{const}$):*

1) $Q = \mathbf{P}^n(\mathbb{H})$, $n \geqslant 3$, $C_2^{\mathrm{gr}} = c_2 > 0$;

2) $Q = \mathbf{P}^n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 3$, $C_3^{\mathrm{gr}} = c_3 > 0$;

3) $Q = \mathbf{P}^n(\mathbb{R}), \mathbf{S}^n$, $n \geqslant 3$, $C_2^{\mathrm{gr}} = c_2 > 0$;

4) $Q = \mathbf{H}^n(\mathbb{H})$:

   а) $n \geqslant 3$, $\overline{C}_2^{\mathrm{gr}} = c_2 > 0$;

   б) $n \geqslant 2$, $\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = c_1 < 0$;

   в) $n \geqslant 2$, $\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = 0$ *и* $\left(\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_4 + \bar{p}_5\right)_{t=0} > 0$;

5) $Q = \mathbf{H}^n(\mathbb{C})$:

   а) $n \geqslant 3$, $\overline{C}_3^{\mathrm{gr}} = c_3 > 0$;

   б) $n \geqslant 2$, $\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = c_1 < 0$;

   в) $n \geqslant 2$, $\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = 0$ *и* $\left(\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_4 + \bar{p}_5\right)_{t=0} > 0$;

6) $Q = \mathbf{H}^n(\mathbb{R})$:

   а) $n \geqslant 3$, $\overline{C}_2^{\mathrm{gr}} = c_2 > 0$;

   б) $n \geqslant 2$, $\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = c_1 < 0$;

в) $n \geqslant 2$, $\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = 0$ *и* $\left(\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2\right)_{t=0} > 0$;

7) $Q = \mathbf{H}^2(\mathbb{C}a)$:

а) $\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = c_1 < 0$;

б) $\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = 0$ *и* $\left(\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_2 + \bar{p}_4 + \bar{p}_5\right)_{t=0} > 0$.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Из рассуждений выше следует, что можно предположить существование траектории двухчастичной задачи, начавшейся при $t = 0$, регулярной при $0 < t < t_0$ и такой, что $\lim_{t \to t_0 - 0} r(t) = 0$ для некоторого $t_0 > 0$. Заметим прежде всего, что неравенства из замечания 7.1, асимптотики (7.29) и закон сохранения энергии влекут $p_2(t), p_5(t) \to 0$ или $\bar{p}_2(t), \bar{p}_5(t) \to 0$ при $t \to t_0 - 0$. Поэтому из равенств $C_1^{\mathrm{gr}} = \mathrm{const}$, $\overline{C}_1^{\mathrm{gr}} = \mathrm{const}$ и неравенств замечания 7.1 следует, что все функции $p_i, \bar{p}_i$ ограничены при $0 \leqslant t < t_0$ на данной траектории.

Рассмотрим случай 4(a). Здесь $\bar{p}_1\bar{p}_2 = c_2 + \bar{p}_3^2 + \bar{p}_9 \geqslant c_2$ и поэтому $\bar{p}_1 \geqslant c_2/\bar{p}_2 \to +\infty$, $t \to t_0 - 0$, что противоречит неравенству $\bar{p}_1 \leqslant c_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_5 \to c_1$, $t \to t_0 - 0$. Доказательство в случаях 1, 2, 3, 5(a) и 6(a) совершенно аналогично.

В случае 4(b) имеем $\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1 + \bar{p}_4 = c_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_5 \to c_1 < 0$, $t \to t_0 - 0$, что противоречит неравенствам из замечания 7.1. Случаи 5(b), 6(b) и 7(a) совершенно аналогичны.

В случае 7(b) имеем

$$\bar{p}_0^2 = \bar{p}_2 + \bar{p}_5 - \bar{p}_1 - \bar{p}_4 \leqslant \bar{p}_2 + \bar{p}_5. \tag{7.30}$$

С учетом неравенств из замечания 7.1, условия $\bar{p}_2 = \bar{p}_5 = 0$ дают, тем самым, равенства $\bar{p}_i = 0$, $i = 0, \ldots, 9$. Поэтому $(\bar{p}_2 + \bar{p}_5)_{t=0} > 0$. Будем, не теряя общности, дополнительно предполагать, что t_0 — минимальное положительное значение t, такое что

$$\lim_{t \to t_0 - 0} (\bar{p}_2 + \bar{p}_5) = 0.$$

Уравнения (7.15), (7.18), (7.26) дают:

$$\frac{d}{dt}(\bar{p}_2 + \bar{p}_5) = -\frac{\bar{p}_0(\bar{p}_3 + 2\bar{p}_6)}{(m_1 + m_2)R^2} + D_h(\bar{p}_0\bar{p}_3 + \bar{p}_7) + E_h(\bar{p}_0\bar{p}_2 - \bar{p}_8) + \\ + C_h(-\bar{p}_7 + 2\bar{p}_0\bar{p}_6) + B_h(-\bar{p}_8 + 2\bar{p}_0\bar{p}_5).$$

Поэтому формула (7.30) и неравенства из замечания 7.1 влекут следующую оценку:

$$\left|\frac{d}{dt}\left(\bar{p}_2+\bar{p}_5\right)\right| \leqslant C\left(\bar{p}_2+\bar{p}_5\right)$$

в ε-окрестности величины t_0 для некоторых $\varepsilon > 0$ и $C = \mathrm{const} > 0$. С учетом неравенства Гронуола, получаем

$$\begin{gathered}|\bar{p}_2(t)+\bar{p}_5(t)-\bar{p}_2(t_0-0)-\bar{p}_5(t_0-0)| \leqslant \\ \leqslant \left(\bar{p}_2(t_0-0)+\bar{p}_5(t_0-0)\right)\exp\left(C(t_0-t)\right)=0\end{gathered}$$

при $t_0-\varepsilon < t < t_0$. Отсюда $\bar{p}_2(t)+\bar{p}_5(t)=0$ для некоторого положительного $t < t_0$, что противоречит минимальности t_0. Доказательство в случаях 4(c), 5(c) и 6(c) аналогично. ■

Замечание 7.2. Неформально условия теоремы 7.1 означают, что на малых расстояниях вращательное движение частиц превалирует над их поступательным движением. Во всех случаях этой теоремы, кроме 4(c), 5(c), 6(c) и 7(b), для конкретных потенциалов V, таких что $V = o(r^2)$ при $r \to 0$, нетрудно найти положительные нижние оценки расстояния между частицами.

7.3.2. О поиске нетривиальных интегралов движения

Нетрудно видеть, что центр пуассоновой алгебры $\mathcal{P}_I(Q_{\mathbf{S}})$, коммутирующей с двухчастичной гамильтоновой функцией, сам по себе не достаточно широк для обеспечения интегрируемости задачи двух тел с нетривиальным взаимодействием. В настоящий момент неизвестен ни один нетривиальный центральный потенциал, допускающий нетривиальный интеграл движения, т. е. интеграл, зависящий как от переменных r, p_r, так и от «групповых переменных» $p_0, p_1, \ldots$ (и при этом, конечно, независимый от самой гамильтоновой функции). В § 7.5 мы увидим, что наличие одного такого интеграла в вещественном случае привело бы к интегрируемости задачи двух тел. Здесь мы опишем возможный подход к поиску такого интеграла.

Очевидно, что задача двух тел с тривиальным потенциалом $V \equiv 0$ является интегрируемой, поскольку в этом случае частицы движутся независимо. Аналогично квантовому случаю (см. замечание 5.3) двухчастичную гамильтонову функцию можно представить в виде $h_1 + h_2 + V(r)$, где функция h_k, $k = 1, 2$, пропорциональна $1/m_k$ и справедливо равенство $[h_1, h_2]_P = 0$. Например, для функции (7.3) имеем:

$$h_1 = \frac{(1+r^2)^2}{8m_1R^2}p_r^2 - \frac{\beta(1+r^2)}{2m_1R^2}p_rp_0 + \frac{\beta^2}{2m_1R^2}p_0^2 +$$

$$+\frac{1+r^2}{2m_1R^2r^2}\left(\sin^2(\beta\operatorname{arctg}r)p_1+\cos^2(\beta\operatorname{arctg}r)p_2-\sin(2\beta\operatorname{arctg}r)p_3\right)+$$

$$+\frac{(1+r^2)^2}{8m_1R^2r^2}\left(\sin^2(2\beta\operatorname{arctg}r)p_4+\cos^2(2\beta\operatorname{arctg}r)p_5-\sin(4\beta\operatorname{arctg}r)p_6\right),$$

$$h_2=\frac{(1+r^2)^2}{8m_2R^2}p_r^2+\frac{\alpha(1+r^2)}{2m_2R^2}p_rp_0+\frac{\alpha^2}{2m_2R^2}p_0^2+$$

$$+\frac{1+r^2}{2m_2R^2r^2}\left(\sin^2(\alpha\operatorname{arctg}r)p_1+\cos^2(\alpha\operatorname{arctg}r)p_2+\sin(2\alpha\operatorname{arctg}r)p_3\right)+$$

$$+\frac{(1+r^2)^2}{8m_2R^2r^2}\left(\sin^2(2\alpha\operatorname{arctg}r)p_4+\cos^2(2\alpha\operatorname{arctg}r)p_5+\sin(4\alpha\operatorname{arctg}r)p_6\right).$$

При выборе $\alpha=1,\beta=0$ функции h_1 и h_2 рациональны относительно переменной r:

$$h_1=\frac{(1+r^2)^2}{8m_1R^2}p_r^2+\frac{1+r^2}{2m_1R^2r^2}p_2+\frac{(1+r^2)^2}{8m_1R^2r^2}p_5,$$

$$h_2=\frac{(1+r^2)^2}{8m_2R^2}p_r^2+\frac{1+r^2}{2m_2R^2}p_rp_0+\frac{p_0^2}{2m_2R^2}+\frac{r^2p_1+p_2+2rp_3}{2m_2R^2r^2}+$$

$$+\frac{1}{8m_2R^2r^2}\left(4r^2p_4+(1-r^2)^2p_5+4r(1-r^2)p_6\right).$$

Однако неясно, можно ли ввести нетривиальный потенциал в функции h_1,h_2, не нарушая их коммутативности, так, чтобы сохранялось равенство $h=h_1+h_2$.

Численные вычисления сечений Пуанкаре, проведенные автором совместно со Степановой для приведенной задачи двух тел в пространствах $\mathbf{S}^n$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ (см. § 7.5) с кулоновским и осцилляторным потенциалами, свидетельствуют о слабом хаосе в данных динамических системах [190]. В работах [197] и [198] доказана ее мероморфная неинтегрируемость с четырьмя потенциалами, включая кулоновский и осцилляторный.

§ 7.4. Проблема центра масс на двухточечно-однородных пространствах

Важность центра масс для системы изолированных частиц или твердого тела в евклидовом пространстве вытекает из следующих его свойств:

1) центр масс классической механической системы движется с постоянной скоростью по прямой (геодезической) линии;

2) переменные, соответствующие центру масс, отделяются от остальных как в классическом, так и в квантово-механическом случаях.

Из этих свойств следует, в частности, что движение классической системы (вообще говоря, сложное) можно представить как простое движение центра масс и движение системы относительно центра масс, что часто упрощает задачу. Под действием внешних сил центр масс движется так, как если бы все силы были приложены к телу, расположенному в центре масс и имеющему массу, равную сумме масс частиц системы. Попытка обобщения понятия центра масс на неплоские двухточечно-однородные римановы пространства наталкивается на трудности, связанные с отсутствием динамических свойств, подобных свойствам 1 и 2 выше. Естественно определить центр масс для системы двух частиц на двухточечно-однородном римановом пространстве как точку на кратчайшем геодезическом интервале, соединяющем эти частицы, которая делит этот интервал в фиксированном отношении. Если это отношение совпадает с отношением масс частиц (как в евклидовом случае), то мы обозначим соответствующий центр масс через R_1.

Однако даже для пространств постоянной кривизны такое определение центра масс не обладает свойством 1 [189]. Например, рассмотрим две свободные частицы на сфере $\mathbf{S}^2$. Выберем на сфере две противоположные точки (полюса) и экватор, соответствующий эти полюсам. Пусть одна из частиц покоится в одном из полюсов, а вторая равномерно движется вдоль экватора. Тогда любая точка кратчайшего геодезического интервала, соединяющего эти частицы, не движется по геодезической, за исключением случаев ее совпадения с одной из частиц. Последнее, очевидно, бессодержательно. Поэтому для определения центра масс на двухточечно-однородных римановых пространствах нужно опираться на свойства, отличные от свойства 1.

7.4.1. Существующие понятия центра масс на пространствах постоянной кривизны

Аксиоматический подход к понятию центра масс на пространствах постоянной кривизны был развит в работах [27; 120]. Пусть $\mathfrak{A} = ((A_i, m_i))_{i=1}^N$ — система материальных точек A_i (возможно, пустая) с массами m_i в пространстве Q постоянной секционной кривизны, соответствующем типам 2 или 9 по классификации, данной в § 1.1. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех таких систем, а через $\mathcal{A}_0$ подмножество одночастичных систем. Для любого положительного вещественного числа χ определим операцию $\chi \cdot \mathfrak{A} = ((A_i, \chi m_i))_{i=1}^N$.

Теорема 7.2 ([120]). *Пусть Q — пространство постоянной кривизны $\mathbf{S}^n$ или $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$. Существует единственное отображение $\mathbb{U}$ множества $\mathcal{A}$ в множество $\mathcal{A}_0$, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1) $\mathbb{U}((A_1, m_1)) = (A_1, m_1)$;

2) $\mathbb{U}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) = \mathbb{U}(\mathbb{U}(\mathfrak{A}) \cup \mathbb{U}(\mathfrak{B}))$;

3) $\mathbb{U}(\chi \cdot \mathfrak{A}) = \chi \cdot \mathbb{U}(\mathfrak{A})$;

4) $\mathbb{U} \circ q = q \circ \mathbb{U}$ *для произвольной изометрии q пространства Q;*

5) *отображение $\mathbb{U}$ является непрерывным относительно естественной топологии на множестве $\mathcal{A}$. Две системы материальных точек близки в этой топологии, если их точки попарно близки и имеют близкие массы. Точки с малыми массами близки пустому множеству.*

Для сферы $\mathbf{S}^n$ отображение $\mathbb{U}$ переводит систему $((A_1, m_1), (A_2, m_2))$ в материальную точку (центр масс), расположенную на кратчайшем геодезическом интервале, соединяющем точки A_1, A_2. Положение этой точки, удаленной от i-ой частицы на расстояние ρ_i, $i = 1, 2$, определяется уравнением:

$$m_1 \sin\left(\frac{\rho_1}{R}\right) = m_2 \sin\left(\frac{\rho_2}{R}\right), \ \rho_1 + \rho_2 = \rho,$$

где ρ — расстояние между частицами. Масса центра масс полагается равной

$$m_1 \cos\left(\frac{\rho_1}{R}\right) + m_2 \cos\left(\frac{\rho_2}{R}\right).$$

Для пространства Лобачевского $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ *отображение* $\mathbb{U}$ *получается заменой тригонометрических функций* sin, cos *из предшествующего случая на соответствующие им гиперболические функции* sh, ch. *Например, для двух материальных точек получаем систему уравнений*

$$m_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\rho_1}{R}\right) = m_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\rho_2}{R}\right), \ \rho_1 + \rho_2 = \rho, \tag{7.31}$$

а масса центра масс равна величине

$$m_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\rho_1}{R}\right) + m_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\rho_2}{R}\right).$$

Обозначим центр масс, определенный таким образом, посредством R_2. Заметим, что данный центр масс системы двух частиц, находящихся в диаметрально противоположных точках сферы, произвольно расположен на соответствующем экваторе и имеет нулевую массу, т. е. эквивалентен пустому множеству.

Данный подход к определению центра масс соответствует понятию центра масс в плоском пространстве-времени специальной теории относительности (SR) [120]. Действительно, для фиксированной инерциальной системы отсчета существует взаимно-однозначное соответствие между возможными скоростями частиц в SR и материальными точками в пространстве $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ с массами, равными массам покоя в SR. Поэтому система $\mathfrak{A} = ((A_i, m_i))_{i=1}^N \in \mathcal{A}$ соответствует системе $\varsigma(\mathfrak{A})$ движущихся частиц в SR с массами покоя m_i и скоростями $\mathbf{v}_i$. Суммарная масса m и суммарный импульс $\mathbf{p}$ последней системы определяются следующими равенствами:

$$m := \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\sqrt{1-\mathbf{v}_i^2}}, \ \mathbf{p} := \sum_{i=1}^N \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1-\mathbf{v}_i^2}}.$$

Пусть Ξ — эффективная частица в SR с массой покоя m и скоростью $\mathbf{v}$, так что

$$\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = \mathbf{p}.$$

Эта частица определяет центр масс $\varsigma^{-1}(\Xi)$ системы $\mathfrak{A}$ в пространстве $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$, геометрически совпадающий с R_2.

Ясно, что данное определение центра масс легко обобщить на систему непрерывно распределенных масс.

Определение центра масс R_2 представляется достаточно естественным. К сожалению, для него не известны «хорошие» динамические свойства. Для нахождения центра масс с таким свойствами можно пытаться искать чисто геометрическое определение, не наделяя центр масс какой-либо массой. В этом случае не нужно беспокоиться о выполнении аксиом 2 и 3 теоремы 7.2, получая больше свободы. Этот подход к понятию центра масс применительно к свободному движению на пространствах $\mathbf{S}^n$, $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, $n = 2, 3$, был развит в различной степени общности в работах [174; 184; 224]. Рассмотрим следующее определение центра масс, использовавшееся в этих работах. Пусть $Q = \mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, $n = 2, 3$. Определим твердое тело в пространстве Q, задав неотрицательную функцию плотности $\varrho(x)$, $x \in Q$, с компактным связным носителем, и рассмотрим функцию

$$\Upsilon(x) = \int_Q \operatorname{sh}^2\left(\frac{\rho(x,y)}{R}\right)\varrho(y)d\mu(y), \tag{7.32}$$

где μ — мера на пространстве Q, порожденная римановой метрикой. Эта функция имеет единственный минимум, который и выбирается в качестве центра масс R_3 твердого тела. Ясно, что аналогичное определение можно дать и для системы частиц, заменяя интеграл в (7.32) соответствующей суммой.

В отличие от центра масс R_2, центр масс R_3 для системы двух частиц определяется из следующих уравнений (ср. с (7.31)):

$$m_1 \operatorname{sh}(\frac{2\rho_1}{R}) = m_2 \operatorname{sh}(\frac{2\rho_2}{R}),\ \rho_1 + \rho_2 = \rho. \tag{7.33}$$

Здесь, как и прежде, ρ — расстояние между частицами, а ρ_i, $i = 1, 2$, — расстояние между i-ой частицей и центром масс, расположенным на кратчайшем геодезическом интервале, соединяющем частицы.

Назовем свободное движение твердого тела *свободным вращением*, если все точки этого тела движутся вдоль траекторий некоторого эллиптического преобразования (см. п. 1.3.3). Свободное движение твердого тела назовем *свободной трансляцией*, если все точки тела движутся вдоль траекторий некоторой трансляции. Центр масс R_3 обладает следующими динамическими свойствами:

1) В пространстве $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ возможно свободное вращение произвольного твердого тела. При $n = 2$ возможно единственное такое вращение [174] вокруг центра масс, а при $n = 3$ возможно три независимых

вращения [184] вокруг трех попарно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс R_3.

2) Все возможные свободные трансляции твердого тела имеют геодезические оси, проходящие через центр масс R_3. При $n = 2$ имеются две такие геодезические. При $n = 3$ существуют три такие геодезические и они совпадают с осями свободных вращений.

3) Центр масс R_3 однозначно определяется свойствами 1 или 2.

4) Скорости всех возможных свободных вращений и трансляций постоянны.

Отметим, что свободное движение твердого тела вдоль гороциклов отсутствует [174].

Ситуация в пространствах $Q = \mathbf{S}^n$, $n = 2, 3$, аналогична, если ограничиваться твердыми телами «умеренных размеров», а именно если диаметр твердого тела не превосходит $\pi R/4$ [224]. Последнее условие требуется для того, чтобы различать трансляции и вращения твердых тел по расположению неподвижных точек соответствующих однопараметрических подгрупп изометрий относительно самого твердого тела, поскольку все такие подгруппы сопряжены в группе $\mathrm{SO}(n+1)$ и их траектории в пространстве Q эквивалентны.

Отметим, что при большинстве свободных движений твердого тела в пространстве постоянной кривизны его центр масс R_3 не движется вдоль геодезической, даже если тело является однородным шаром [224]. Ввиду данного факта и свойства 1 выше, в твердом теле отсутствуют точки, которые двигались бы вдоль геодезических при произвольных начальных скоростях. Поскольку твердое тело является предельным случаем системы взаимодействующих частиц, то это же верно для такой системы.

Для системы двух взаимодействующих частиц попробуем найти точку на кратчайшем геодезическом интервале, соединяющем частицы и делящем его в фиксированном отношении, так чтобы эта точка двигалась с постоянной скоростью вдоль геодезической *для некоторых начальных скоростей частиц при произвольном потенциале взаимодействия.*

Определение 7.1. Пусть $Q_2 = (Q \times Q) \backslash Q_{op}$ — множество положений двух частиц на пространстве Q, соответствующих единственной кратчайшей геодезической, соединяющей частицы. Отображение из множества Q_2 в пространство Q назовем динамическим центром масс, если

1) оно переводит положение двух частиц из Q_2 в точку $\mathbf{x}_0$ на геодезическом интервале, соединяющем частицы, которая делит его в фиксированном отношении, зависящем только от масс частиц;

2) для произвольной геодезической в пространстве Q существуют начальные положения и скорости частиц, при которых для любого потенциала взаимодействия точка $\mathbf{x}_0$ движется вдоль данной геодезической с постоянной скоростью.

Для краткости будем также называть значения данного отображения «динамическим центром масс».

Отметим, что данное определение годится для произвольного полного риманова пространства, если частицы расположены достаточно близко друг от друга.

7.4.2. Связь существующих понятий центра масс с двухчастичной гамильтоновой функцией

Рассмотрим теперь связь формул для двухчастичной гамильтоновой функции из § 7.1 и § 7.2 с различными понятиями центра масс.

Предположим, что геодезический интервал $\widetilde{\gamma}(s)$ из § 5.1, соединяющий частицы, движется одновременно с их движением. Точка $\widetilde{\gamma}(0)$ делит геодезический интервал в отношении $\alpha/(1-\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. С другой стороны, разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в предложении 1.2 адаптировано к точке $\widetilde{\gamma}(0)$. Обозначим через $w(t)$ эволюцию точки $\widetilde{\gamma}(0)$. Эта функция может терпеть разрыв при проходе частицами множества $Q_{op} \subset Q \times Q$, но для пространства $Q \neq \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ траектория общего положения на пространстве $Q \times Q$ не пересечет множества Q_{op}.

Рассмотрим простейший компактный случай $Q = \mathbf{S}^2$ или $Q = \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ с гамильтоновой функцией, заданной формулой (7.13). Соответствующая группа K_0 тривиальна и $(Q \times Q) \backslash (\mathrm{diag} \cup Q_{op}) = I \times \mathrm{SO}(3)$. Поэтому функция $-p_0$ является гамильтоновой для векторного поля $\widetilde{\Lambda}^l$ на $T^*\mathrm{SO}(3)$ (см. (4.27), (4.28) и доказательство предложения 4.9). Отождествим начальное положение системы на пространстве $(Q \times Q) \backslash (\mathrm{diag} \cup Q_{op}) = I \times \mathrm{SO}(3)$ с точкой $(r(0), e) \in I \times \mathrm{SO}(3)$.

Ясно, что проекция движения частицы на второй сомножитель произведения $I \times \mathrm{SO}(3)$ описывается отображением

$$t \to \exp(tc\Lambda),$$

если проекция $\widetilde{dh}$ дифференциала dh на второй сомножитель произведения $T^*I \times T^*\mathrm{SO}(3)$ совпадает с $-cdp_0$, $c = \mathrm{const}$ вдоль траектории системы. Этот случай соответствует движению обеих частиц вдоль общей геодезической таким образом, что движение точки w по пространству Q описывается формулой

$$w(t) = \exp(tc\Lambda)w(0)$$

и, в силу второго утверждения предложения 5.1, точка w движется вдоль геодезической $\widetilde{\gamma}|_{t=0}$ с постоянной скоростью.

Остается проверить условие $\widetilde{dh} = -cdp_0$ на траектории системы. Очевидно, что

$$\widetilde{dh} = \left(\frac{(m_1\alpha - m_2\beta)(1+r^2)}{2m_1m_2R^2}p_r + \frac{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}{m_1m_2R^2}p_0\right)dp_0 + \\ + (C_sp_1 + B_sp_2)\,dp_1 + (A_sp_2 + B_sp_1)\,dp_2. \tag{7.34}$$

Для произвольного потенциала V значения r и p_r могут быть произвольными, поэтому $\widetilde{dh} = -cdp_0$, если и только если $m_1\alpha = m_2\beta$, $p_0 = \mathrm{const}$, $p_1 \equiv p_2 \equiv 0$. В силу (7.14) данные значения функций p_i действительно сохраняются вдоль траектории системы. Отсюда получаем:

Предложение 7.1. Для системы двух частиц на двухточечно-однородном римановом пространстве центр масс R_1 является единственным динамическим центром масс, соответствующим движению частиц вдоль общей геодезической.

Доказательство. Для пространств $Q = \mathbf{S}^2$ и $Q = \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ утверждение следует из рассуждений выше, поскольку при условии $m_1\alpha = m_2\beta$ точка $\widetilde{\gamma}(0)$ совпадает с центром масс R_1. Для других компактных двухточечно-однородных пространств любая геодезическая лежит на двумерном вполне геодезическом подмногообразии (см. замечание 1.1), что сводит рассмотрение к случаю $Q = \mathbf{S}^2, \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$. Для некомпактных двухточечно-однородных пространств рассуждения аналогичны в силу замечания 5.2. ■

Рассмотрим теперь возможность движения той же системы, соответствующей гамильтоновой функции (7.13), под действием однопараметрической группы, порожденной элементом $f_{2\lambda,1} \in \mathfrak{so}(3)$. Это движение порождается дифференциалом cdp_2, $c \neq 0$ и соответствует вращению геодезической $\widetilde{\gamma}$ вокруг фиксированной точки $\widetilde{\gamma}(0)$. Рассуждая как

и выше, получаем, что в данном случае выражение $\widetilde{dh}$ должно равняться cdp_2. Из (7.34) получаем

$$C_s p_1 + B_s p_2 = 0, B_s p_1 + A_s p_2 = c,$$
$$\frac{(m_1\alpha - m_2\beta)(1+r^2)}{2m_1m_2R^2}p_r + \frac{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}{m_1m_2R^2}p_0 = 0. \tag{7.35}$$

Как и выше, для произвольного потенциала $V(r)$ значения r и p_r произвольны и последнее уравнение из (7.35) дает снова $\alpha = m_2/(m_1+m_2)$, откуда $p_0 \equiv 0$. Аналогично первое уравнение дает $p_1 \equiv 0$, $p_2 \equiv 0$ и поэтому $c = 0$. Таким образом, свойство 1 центра масс R_3 твердого тела не выполняется для двух частиц с произвольным потенциалом взаимодействия.

Пусть теперь частицы скреплены вдоль геодезической $\widetilde{\gamma}$ невесомым недеформируемым стержнем. Такая система (гантель) является частным случаем твердого тела. Рассмотрим возможность такого же вращения этой системы. Фазовым пространством для нее является пространство $T^*\,\mathrm{SO}(3)$, а гамильтонова функция может быть получена из (7.13) подстановкой $r = \mathrm{const}, p_r \equiv 0$, $V(r) = \mathrm{const}$ (для простоты считаем $V(r) \equiv 0$). Последнее уравнение из (7.35) теперь дает $p_0 \equiv 0$ и поэтому

$$\frac{dp_0}{dt} = (A_s - C_s)p_1p_2 + B_s(p_1^2 - p_2^2) = 0,$$

в силу (7.14) и (7.26).

Если $B_s(r) \neq 0$, то из первого уравнения в (7.35) получаем $p_2 = -C_s p_1/B_s$ и

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{B_s^2 - A_sC_s}{B_s}p_1^2 = 0.$$

В силу определения функций A_s, B_s и C_s в § 5.2 имеет место неравенство $A_sC_s - B_s^2 \neq 0$, поэтому $p_1 \equiv 0$, $p_2 \equiv 0$ и вращения не происходит.

Равенство $B_s = 0$ влечет $p_1 \equiv 0$, $p_2 \equiv c/A_s \neq 0$. Опять, в силу (7.14) и (7.26), эти значения сохраняются вдоль траектории системы.

Это значит, что чистое вращение гантели возможно вокруг фиксированной точки $\widetilde{\gamma}(0)$, определяемой уравнением

$$m_1 \sin(4\alpha \operatorname{arctg} r) = m_2 \sin(4(1-\alpha)\operatorname{arctg} r). \tag{7.36}$$

Поскольку расстояния ρ_i, $i = 1, 2$, между i-ой частицей и точкой $\widetilde{\gamma}(0)$ суть $\rho_1 = 2R\alpha \operatorname{arctg} r$ и $\rho_2 = 2R(1-\alpha)\operatorname{arctg} r$, то уравнение (7.36) явля-

ется аналогом уравнения (7.33), что согласуется со свойством 1 центра масс R_3 твердого тела.

Рассуждая аналогичным образом, получаем следующее. Трансляция точки w вдоль траектории однопараметрической группы $\exp(te_{\lambda,1})$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо равенство $\widetilde{dh} = cdp_1$, $c = \mathrm{const}$ вдоль траектории системы. В системе двух частиц для фиксированных начальных условий и произвольного потенциала это невозможно. Таким образом, свойство 2 центра масс R_3 твердого тела не выполняется для системы двух частиц и произвольного центрального потенциала. Для гантели условие $\widetilde{dh} = cdp_1$ вдоль траектории выполняется тогда и только тогда, когда $p_0 \equiv 0$, $p_2 \equiv 0$, $p_1 = c/C_s \neq 0$, $B_s = 0$, что, в частности, влечет (7.36). Это соответствует свойству 2 центра масс R_3 для гантели.

Аналогичные вращения и трансляции возможны также для произвольных двухточечно-однородных пространств на вполне геодезических подмногообразиях постоянной кривизны.

§ 7.5. Гамильтонова редукция задачи двух тел на пространствах постоянной кривизны

В этом параграфе мы рассмотрим гамильтонову редукцию задачи двух тел на пространствах $\mathbf{S}^n$ и $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, используя результаты п. 7.1.4, п. 7.2.4 и теорему 4.6. Эта редукция была проведена на основе координатных вычислений в [89; 189] и в инвариантной форме в [88; 192].

7.5.1. Гамильтонова редукция задачи двух тел на сферах

Как уже было отмечено выше в § 7.3, классическая механическая задача на сферах $\mathbf{S}^n$ достигает своей максимальной общности при $n = 3$.

При $n = 1$ система обладает двумя степенями свободы и одним интегралом, соответствующим действию группы симметрий $\mathrm{SO}(2) \cong \mathbf{S}^1$. Поэтому она интегрируема для произвольного потенциала $V(r)$. Аналогично формулам (7.10) и (7.13) выражение для гамильтоновой функции в этом случае при $\alpha = m_2/(m_1 + m_2)$ имеет вид

$$h = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2}p_r^2 + \frac{p_0^2}{2(m_1+m_2)R^2} + V(r),$$

где $p_0 = \mathrm{const}$. Очевидно, что приведенное фазовое пространство

есть $T^*(\mathbf{S}^1 \setminus \mathrm{pt}) \cong T^*\mathbb{R}$ с каноническими координатами r, $0 < r < \infty$ и p_r.

Пусть теперь $n = 2$. В этом случае имеем разложение (7.2) фазового пространства

$$\left(T^*I \times T^*\mathbf{S}^2_S\right) \cup \widetilde{T}^*Q_{op} =: M_{ess} \cup \widetilde{T}^*Q_{op},$$

где $Q_{op} = \mathbf{S}^2$. Здесь $\dim M_{ess} = 8$, $\dim \widetilde{T}^*Q_{op} = 6$ и типичная траектория системы не пересекает подпространства $\widetilde{T}^*Q_{op}$. Пространство $T^*\mathbf{S}^2_S$ можно редуцировать относительно действия группы $\mathrm{SO}(3)$, используя теорему 4.6. Поскольку в данном случае группа K_0 тривиальна, то пространство $T^*\mathbf{S}^2_S$ редуцируется к $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{SO}(3)}$-орбите (см. замечание 4.6), определенной уравнением

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 = c = \mathrm{const} \geqslant 0,$$

где p_0, p_1, p_2 — линейные координаты на пространстве $\mathfrak{so}^*(3)$. Таким образом, редуцированное пространство для пространства M_{ess} и постоянной $c > 0$ есть

$$\widetilde{M}_{ess,c} = T^*I \times \mathbf{S}^2,$$

где симплектическая структура на сфере $\mathbf{S}^2 \subset \mathfrak{so}^*(3) \cong \mathbb{E}^3$ является формой площади с точностью до мультипликативной постоянной, а приведенная гамильтонова функция для $\alpha = m_2/(m_1 + m_2)$ есть

$$\widetilde{h} = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2} p_r^2 + \frac{p_0^2}{2(m_1+m_2)R^2} + \\ + \frac{1}{2}\left(C_s(r)p_1^2 + A_s(r)p_2^2 + 2B_s(r)p_1p_2\right) + V(r).$$

Подходящая пара функций из тройки p_0, p_1, p_3 является локальными координатами на сфере $\mathbf{S}^2$, а их скобки Пуассона заданы в (7.14).

Очевидно, что двумерное подмногообразие в пространстве $\widetilde{M}_{ess,c}$, определяемое уравнением $p_1 \equiv p_2 \equiv 0$, — инвариантно. Оно соответствует движению обоих тел по общей геодезической.

Более того, для $m_1 = m_2 = 2m$ имеем

$$\widetilde{h} = \frac{1}{8mR^2}\left((1+r^2)^2 p_r^2 + p_0^2 + (1+r^2)\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2}\right)\right) + V(r),$$

откуда в силу (7.14) и (7.26) получаем существование в этом случае двух других инвариантных подмногообразий. Первое из них определяется уравнениями $p_0 \equiv p_2 \equiv 0$, а второе — уравнениями $p_0 \equiv p_1 \equiv 0$. Эти подмногообразия соответствуют свободной трансляции и свободному вращению системы (ср. с п. 7.4.2), но, как правило, с непостоянной скоростью.

Значение $c = 0$ соответствует интегрируемой системе с одной степенью свободы. Здесь $\widetilde{M}_{ess,0} = T^*I$, $p_0 \equiv p_1 \equiv p_2 \equiv 0$ и

$$\widetilde{h} = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2} p_r^2 + V(r). \tag{7.37}$$

В случае $n = 3$ ситуация является более тонкой. Теперь

$$M_{ess} := T^*I \times T^*(\mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(2))$$

и необходимо редуцировать пространство $T^*(\mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(2))$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(4)$ имеет базис (см. п. 3.4.1) Ψ_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Пусть ψ_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ — координаты на пространстве $\mathfrak{so}^*(4)$, соответствующие базису Ψ^{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, дуальному к базису Ψ_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Пусть

$$\begin{aligned} &\widetilde{e}_1 = -\Psi_{23} - \Psi_{14},\ \widetilde{e}_2 = -\Psi_{24} + \Psi_{13},\ \widetilde{e}_3 = -\Psi_{12} - \Psi_{34}, \\ &\widetilde{e}_4 = \Psi_{23} - \Psi_{14},\ \widetilde{e}_5 = \Psi_{24} + \Psi_{13},\ \widetilde{e}_6 = \Psi_{12} - \Psi_{34} \end{aligned} \tag{7.38}$$

— другой базис в алгебре $\mathfrak{so}(4)$. Коммутационные соотношения для элементов $\widetilde{e}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, суть (см. (1.12)):

$$\begin{aligned} &[\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2] = \widetilde{e}_3,\ [\widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3] = \widetilde{e}_1,\ [\widetilde{e}_3, \widetilde{e}_1] = \widetilde{e}_2,\ [\widetilde{e}_4, \widetilde{e}_5] = \widetilde{e}_6,\ [\widetilde{e}_5, \widetilde{e}_6] = \widetilde{e}_4, \\ &[\widetilde{e}_6, \widetilde{e}_4] = \widetilde{e}_5,\ [\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j] = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant 3,\ 4 \leqslant j \leqslant 6. \end{aligned}$$

Это означает, что тройки $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3$ и $\widetilde{e}_4, \widetilde{e}_5, \widetilde{e}_6$ соответствуют разложению $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$, а базис $\widetilde{e}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, является ортонормированным относительно формы Киллинга на алгебре $\mathfrak{so}(4)$.

Пусть $\widetilde{p}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, — координаты в пространстве $\mathfrak{so}^*(4)$, соответствующие базису $\widetilde{e}^i$, $i = 1, \ldots, 6$, дуальному к базису $\widetilde{e}_i$, $i = 1, \ldots, 6$. Произвольная $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{SO}(4)}$-орбита $\mathcal{O}_\beta$ определяется уравнениями

$$I_1 := \widetilde{p}_1^2 + \widetilde{p}_2^2 + \widetilde{p}_3^2 = \beta_1^2,\ I_2 := \widetilde{p}_4^2 + \widetilde{p}_5^2 + \widetilde{p}_6^2 = \beta_2^2;\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R};\ \beta_1, \beta_2 \geqslant 0$$

или, эквивалентно, уравнениями

$$\begin{aligned} I_1 &= (\psi_{23} + \psi_{14})^2 + (\psi_{13} - \psi_{24})^2 + (\psi_{12} + \psi_{34})^2 = \beta_1^2, \\ I_2 &= (\psi_{23} - \psi_{14})^2 + (\psi_{13} + \psi_{24})^2 + (\psi_{12} - \psi_{34})^2 = \beta_2^2. \end{aligned} \tag{7.39}$$

В общем случае $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$ эти орбиты диффеоморфны пространству $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2$.

Другая эквивалентная форма $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{SO}(4)}$-инвариантов есть

$$\begin{aligned} J_1 &:= \frac{1}{2}(I_1 + I_2) = \psi_{12}^2 + \psi_{13}^2 + \psi_{14}^2 + \psi_{23}^2 + \psi_{24}^2 + \psi_{34}^2, \\ J_2 &:= \frac{1}{4}(I_1 - I_2) = \psi_{23}\psi_{14} - \psi_{13}\psi_{24} + \psi_{12}\psi_{34}. \end{aligned} \tag{7.40}$$

В обозначениях п. 3.4.1 стационарная подалгебра Ли $\mathfrak{k}_0 \cong \mathfrak{so}(2)$, соответствующая общему расположению двух частиц на сфере $\mathbf{S}^3$, порождается элементом Ψ_{34}, поэтому подпространство $\operatorname{ann}\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{so}^*(4)$ определяется уравнением $\psi_{34} = 0$ или эквивалентным уравнением $\widetilde{p}_3 + \widetilde{p}_6 = 0$.

В силу определения операторов $D_1, D_2, \Box$ в п. 3.4.1 и их связи с функциями $p_1, p_2, p_\Box$ из п. 7.1.4, на подпространстве $\operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} &p_0 = -2\psi_{12},\ p_1 = 4(\psi_{13}^2 + \psi_{14}^2),\ p_2 = 4(\psi_{23}^2 + \psi_{24}^2), \\ &p_3 = -4\left(\psi_{13}\psi_{23} + \psi_{14}\psi_{24}\right),\ p_\Box = 4\left(\psi_{13}\psi_{24} - \psi_{14}\psi_{23}\right) \end{aligned} \tag{7.41}$$

и поэтому

$$p_0^2 + p_1 + p_2 = 2(\beta_1^2 + \beta_2^2),\ p_\Box = \beta_2^2 - \beta_1^2.$$

Проверим теперь предположение 4.3, их которого следует предположение 4.2. Рассмотрим точку $z \in \mathcal{O}'_\beta := \mathcal{O}_\beta \cap \operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$ с координатами $(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3, \widetilde{p}_4, \widetilde{p}_5, \widetilde{p}_6 = -\widetilde{p}_3)$. Предположим вначале, что $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$. В этом случае вектор $Y = \sum_{i=1}^6 y_i \widetilde{e}^i \in T_z\mathfrak{so}^*(4)$ лежит в пространстве $T_z\mathcal{O}_\beta$ тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{p}_1 y_1 + \widetilde{p}_2 y_2 + \widetilde{p}_3 y_3 = 0,\ \widetilde{p}_4 y_4 + \widetilde{p}_5 y_5 - \widetilde{p}_3 y_6 = 0. \tag{7.42}$$

В силу $\dim \operatorname{ann}\mathfrak{k}_0 = 5$, орбита $\mathcal{O}_\beta$ не является трансверсальной к подпространству $\operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$ в точке z тогда и только тогда, когда $T_z\mathcal{O}_\beta \subset \subset \operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$. На координатном языке последнее включение означает, что система (7.42) влечет равенство $y_3 + y_6 = 0$. Поскольку уравнения в (7.42) независимы друг от друга, то это возможно только при $\widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2 = \widetilde{p}_4 = = \widetilde{p}_5 = 0$, $\widetilde{p}_3 \neq 0$ и тогда $\beta_1 = \beta_2$.

Пусть теперь $\beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0$ и поэтому $\widetilde{p}_3 = \widetilde{p}_4 = \widetilde{p}_5 = \widetilde{p}_6 = 0$. Теперь вектор $Y = y_1\widetilde{e}^1 + y_2\widetilde{e}^2 + y_3\widetilde{e}^3$ лежит в пространстве $T_z\mathcal{O}_\beta$, если и только если

$$\widetilde{p}_1 y_1 + \widetilde{p}_2 y_2 = 0. \tag{7.43}$$

Поскольку координата y_3 не входит в (7.43), то условие $y_3 = 0$ не следует из (7.43) и орбита $\mathcal{O}_\beta$ не трансверсальна к подпространству $\operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$ в точке z. Аналогично то же самое верно при $\beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0$.

Таким образом, для орбит $\mathcal{O}_\beta$ с $\beta_1 \neq \beta_2$, $\beta_1 \geqslant 0, \beta_2 \geqslant 0$ предположения 4.3 и 4.2 справедливы. Пусть $\mathcal{O}_\beta$ — такая орбита. Тогда $\mathcal{O}'_\beta = \mathcal{O}_\beta \cap \operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$ – гладкое подмногообразие в $\mathfrak{so}^*(4)$. В силу

$$[\Psi_{34}, \widetilde{e}_1] = -\frac{1}{2}\widetilde{e}_2,\ [\Psi_{34}, \widetilde{e}_2] = \frac{1}{2}\widetilde{e}_1,\ [\Psi_{34}, \widetilde{e}_4] = -\frac{1}{2}\widetilde{e}_5,\ [\Psi_{34}, \widetilde{e}_5] = \frac{1}{2}\widetilde{e}_4,$$

действие $\operatorname{Ad}^*_{K_0}$ соответствует синхронным ортогональным поворотам в 2-мерных плоскостях в пространстве $\mathfrak{so}^*(4)$, порожденных парами элементов $\widetilde{e}^1, \widetilde{e}^2$ и $\widetilde{e}^4, \widetilde{e}^5$ соответственно. Ввиду $\beta_1 \neq \beta_2$, подмногообразие $\mathcal{O}'_\beta$ не содержит точек с координатами $\widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2 = \widetilde{p}_4 = \widetilde{p}_5 = 0$ и действие $\operatorname{Ad}^*_{K_0}$ на $\mathcal{O}'_\beta$ свободно, откуда следует справедливость предположения 4.4. Таким образом, фактор-пространство $\widetilde{\mathcal{O}}_\beta := \mathcal{O}'_\beta / \operatorname{Ad}^*_{K_0}$ является гладким многообразием.

1) Предположим, что $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_1 \neq \beta_2$. В этом случае многообразие $\widetilde{\mathcal{O}}_\beta$ диффеоморфно сфере $\mathbf{S}^2$. Действительно, если $\beta_1 > \beta_2$, то любая $\operatorname{Ad}^*_{K_0}$-орбита в $\mathcal{O}'_\beta$ содержит единственную точку с координатами $\widetilde{p}_1 = \sqrt{\beta_1^2 - \widetilde{p}_3^2} > 0, \widetilde{p}_2 = 0, \widetilde{p}_3, \widetilde{p}_4, \widetilde{p}_5, \widetilde{p}_6 = -\widetilde{p}_3$, удовлетворяющими условию
$$\widetilde{p}_3^2 + \widetilde{p}_4^2 + \widetilde{p}_5^2 = \beta_2^2. \tag{7.44}$$
Это означает, что $\operatorname{Ad}^*_{K_0}$-орбиты в $\mathcal{O}'_\beta$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками сферы $\mathbf{S}^2 \subset \mathfrak{so}^*(3) \cong \mathbb{E}^3$, определенной уравнением (7.44), и любые локальные координаты на этой сфере соответствуют локальным координатам на $\widetilde{\mathcal{O}}_\beta$. В случае $\beta_2 > \beta_1 > 0$ рассуждения совершенно аналогичны.

Таким образом, в силу теоремы 4.6, в случае $\beta_1, \beta_2 > 0$, $\beta_1 \neq \beta_2$ приведенное фазовое пространство для пространства M_{ess} есть $\widetilde{M}_{ess,\beta} = T^*I \times \mathbf{S}^2$, а приведенная гамильтонова функция задана формулой (7.10), где

$$p_0^2 + p_1 + p_2 = 2(\beta_1^2 + \beta_2^2),\ p_1 p_2 - p_3^2 = p_\square^2 = (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2.$$

Любые две функции из четверки p_0, p_1, p_2, p_3 независимы на пространстве $\widetilde{M}_{ess,\beta}$. Коммутационные соотношения для этих функций

содержатся в (7.11). Приведенная гамильтонова система имеет две степени свободы и для ее интегрируемости требуется один интеграл, независимый от гамильтоновой функции, который неизвестен ни для одного нетривиального потенциала.

2) Рассмотрим теперь случай $\beta_1 = 0, \beta_2 > 0$. Здесь подмногообразие $\mathcal{O}'_\beta$ является окружностью, определенной уравнениями

$$\widetilde{p}_1 = \widetilde{p}_2 = \widetilde{p}_3 = \widetilde{p}_6 = 0,\ \widetilde{p}_4^2 + \widetilde{p}_5^2 = \beta_2^2,$$

а группа K_0 действует на ней свободно и транзитивно. Поэтому приведенное фазовое пространство для пространства M_{ess} есть $\widetilde{M}_{ess,\beta} = T^*I$. Более того, на подмногообразии $\mathcal{O}'_\beta$ справедливы равенства $\psi_{12} = 0, \psi_{23} = -\psi_{14}, \psi_{24} = \psi_{13}$ и поэтому, в силу (7.41), имеем $p_0 = p_3 = 0$, $p_1 = p_2 = \beta_2^2$. Отсюда

$$C_s p_1 + A_s p_2 = \frac{(1+r^2)^2\beta_2^2}{4mR^2r^2}$$

и поэтому

$$\widetilde{h} = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2}\left(p_r^2 + \frac{\beta_2^2}{r^2}\right) + V(r),$$

что соответствует интегрируемой системе с одной степенью свободы.

3) Случай $\beta_1 > 0, \beta_2 = 0$ является совершенно аналогичным с $\widetilde{M}_{ess,\beta} = T^*I$ и

$$\widetilde{h} = \frac{(1+r^2)^2}{8mR^2}\left(p_r^2 + \frac{\beta_1^2}{r^2}\right) + V(r).$$

4) В случае $\beta_1 = \beta_2 = 0$ имеем $\mathcal{O}_\beta = \mathcal{O}'_\beta = \widetilde{\mathcal{O}_\beta} = \mathrm{pt}$, $\widetilde{M}_{ess,\beta} = T^*I$ и приведенная гамильтонова функция определяется формулой (7.37).

5) Рассмотрим последний случай $\beta_1 = \beta_2 > 0$ и покажем, что частицы движутся по двумерной сфере $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{S}^3$, что сводит данный случай к случаю $n = 2$, рассмотренному выше. Действительно, вычитая уравнения (7.39) друг из друга, получаем равенство на множестве $\mathcal{O}'_\beta$:

$$\psi_{14}\psi_{23} = \psi_{24}\psi_{13}.$$

Напомним, что в начальный момент времени частицы находятся на геодезической $x_3 = x_4 = 0$ сферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$, а их «коллективные» импульсы (т. е. все импульсы кроме p_r) отождествляются с элементами подпространства $\widetilde{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{so}^*(4)$, порожденного элементами Ψ^{ij}, $1 \leqslant i \leqslant 2, 2 \leqslant j \leqslant 4, i < j$. Осуществляя поворот вокруг этой геодезической (действием подгруппы K_0), можно предполагать, что $\psi_{14}|_{t=0} = 0$, откуда получаем либо $\psi_{24}|_{t=0} = 0$, либо $\psi_{13}|_{t=0} = 0$.

В последнем случае имеем $\psi_{14}|_{t=0} = \psi_{13}|_{t=0} = 0$ вдоль всей K_0-траектории и опять можно считать, что $\psi_{24}|_{t=0} = 0$.

В случае $\psi_{14}|_{t=0} = \psi_{24}|_{t=0} = 0$ скорости частиц при $t = 0$ касаются 2-мерной сферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$, $x_4 = 0$, поэтому обе частицы останутся на этой 2-мерной сфере при всех $t > 0$.

Это завершает классификацию всех случаев гамильтоновой редукции задачи двух тел на сферах $\mathbf{S}^n$.

7.5.2. Гамильтонова редукция задачи двух тел на пространствах $\mathbf{H}^2$ и $\mathbf{H}^3$

Классическая задача двух тел на гиперболических пространствах $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$, как и на сферах, достигает наибольшей общности при $n = 3$.

Вначале рассмотрим случай $n = 2$. В соответствии с разложением 7.1, теперь фазовое пространство имеет вид

$$T^*I \times T^*\left(\mathbf{H}^2(\mathbb{R})_S\right),$$

где $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})_S$ — расслоение единичных сфер над гиперболической плоскостью $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$. Оно диффеоморфно псевдоортогональной группе $\mathrm{O}_0(1,2)$. Здесь группа K_0 тривиальна и пространство $T^*\left(\mathbf{H}^2(\mathbb{R})_S\right)$ редуцируется к $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{O}_0(1,2)}$-орбите (см. замечание 4.6).

Действие $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{SO}(1,2)}$ сохраняет выражение $\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1^2 - \bar{p}_2^2$, где $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ — линейные координаты на пространстве $\mathfrak{so}^*(1,2)$ (см. п. 7.2.4). Однополостный гиперболоид, определенный уравнением $\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1^2 - \bar{p}_2^2 = c > 0$, представляет один тип $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{O}_0(1,2)}$-орбит, диффеоморфных многообразию $\mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}$. Другой тип представлен одной полой двухполостного гиперболоида, определенной уравнением $\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1^2 - \bar{p}_2^2 = c < 0$. Эти орбиты

диффеоморфны многообразию $\mathbb{R}^2$. Следующий тип состоит из двух орбит: $\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1^2 = \bar{p}_2^2$, $\bar{p}_2 > 0$ и $\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1^2 = \bar{p}_2^2$, $\bar{p}_2 < 0$, диффеоморфных многообразию $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{pt}$. Последний тип представлен единственной наиболее вырожденной орбитой: $\bar{p}_0 = 0$, $\bar{p}_1 = 0$, $\bar{p}_2 = 0$.

Приведенная гамильтонова функция при $\alpha = m_2/(m_1 + m_2)$ есть

$$\widetilde{h} = \frac{(1-r^2)^2}{8mR^2} p_r^2 + \frac{\bar{p}_0^2}{2(m_1+m_2)R^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(C_h(r)\bar{p}_1^2 + A_h(r)\bar{p}_2^2 + 2B_h(r)\bar{p}_1\bar{p}_2\right) + V(r).$$

Подходящая пара функций из тройки $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \bar{p}_3$ является локальными координатами на произвольной двумерной $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{O}_0(1,2)}$-орбите, а их скобки Пуассона определены в (7.25).

Как и в сферическом случае, двумерное инвариантное подмногообразие приведенного пространства, определенное уравнениями $p_1 \equiv p_2 \equiv 0$, соответствует движению тел по общей геодезической. Поскольку для $m_1 = m_2 = 2m$, $\alpha = 1/2$ имеем $B_h \equiv 0$, то в этом случае имеются еще два инвариантных подмногообразия. Первое соответствует свободной трансляции и определяется уравнениями $p_0 \equiv p_2 \equiv 0$, а второе, определенное уравнениями $p_0 \equiv p_1 \equiv 0$, соответствует свободному вращению системы, вообще говоря, с непостоянной скоростью.

Для наиболее вырожденной орбиты получаем интегрируемую приведенную гамильтонову систему с одной степенью свободы. Здесь $\widetilde{M}_{ess,0} = T^*I$ и

$$\widetilde{h} = \frac{(1-r^2)^2}{8mR^2} p_r^2 + V(r). \tag{7.45}$$

Рассмотрим задачу двух тел на пространстве $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$. Соответствующим фазовым пространством является пространство

$$T^*I \times T^*\left(\mathbf{H}^3(\mathbb{R})_S\right) \tag{7.46}$$

и, кроме того, имеем равенства $G = \mathrm{O}_0(1,3)$, $K_0 = \mathrm{SO}(2)$. Выберем базис $\overline{\Psi}_{ij}$, $i \leqslant i < j \leqslant 4$, алгебры Ли $\mathfrak{so}(1,3)$ в виде (ср. с (1.15))

$$\overline{\Psi}_{ij} := \Psi_{ij} = \frac{1}{2}\left(E_{ij} - E_{ji}\right),\ 2 \leqslant i < j \leqslant 4;\ \overline{\Psi}_i := \frac{1}{2}\left(E_{i1} + E_{1i}\right),\ 2 \leqslant i \leqslant 4.$$

Коммутационные соотношения для этого базиса суть

$$[\overline{\Psi}_{kj}, \overline{\Psi}_{ml}] = \frac{1}{2}\left(\delta_{jm}\overline{\Psi}_{kl} - \delta_{km}\overline{\Psi}_{jl} + \delta_{kl}\overline{\Psi}_{jm} - \delta_{jl}\overline{\Psi}_{km}\right),\ 2 \leqslant k, j, m, l \leqslant 4,$$

$$[\overline{\Psi}_{ij}, \overline{\Psi}_k] = \frac{1}{2}\left(\delta_{jk}\,\overline{\Psi}_i - \delta_{ik}\,\overline{\Psi}_j\right),\ 2 \leqslant i < j \leqslant 4,\ 2 \leqslant k \leqslant 4, \tag{7.47}$$

$$[\overline{\Psi}_i, \overline{\Psi}_k] = \frac{1}{2}\,\overline{\Psi}_{ik},\ 2 \leqslant i, k \leqslant 4,\ i \neq k.$$

Здесь мы предполагаем, как и выше, что $\overline{\Psi}_{kj} = -\,\overline{\Psi}_{jk}$, $2 \leqslant k, j \leqslant 4$.

В обозначениях § 1.2 элементы $\overline{\Psi}_{ij}$, $2 \leqslant i < j \leqslant 4$, порождают подалгебру Ли $\mathfrak{k} \cong \mathfrak{so}(3)$ алгебры $\mathfrak{so}(1,3)$, а элементы $\overline{\Psi}_i$, $2 \leqslant i \leqslant 4$, порождают подпространство $\mathfrak{p}$. Переход от алгебры $\mathfrak{so}(4)$ к алгебре $\mathfrak{so}(1,3)$ производится при помощи подстановки

$$\Psi_{ij} \to \overline{\Psi}_{ij},\ 2 \leqslant i < j \leqslant 4,\ \Psi_{1i} \to \mathbf{i}\,\overline{\Psi}_i,\ 2 \leqslant i \leqslant 4. \tag{7.48}$$

Подалгебра $\mathfrak{k}_0$ из разложения (1.2) порождается теперь элементом $\overline{\Psi}_{34}$, подалгебра $\mathfrak{a}$ элементом $\overline{\Psi}_2$, подпространство $\mathfrak{p}_{2\lambda}$ элементами $\overline{\Psi}_3, \overline{\Psi}_4$, а подпространство $\mathfrak{k}_{2\lambda}$ элементами $\overline{\Psi}_{23}, \overline{\Psi}_{24}$, ср. с (3.31).

Пусть $\overline{\psi}_{ij}$, $2 \leqslant i < j \leqslant 4$, $\overline{\psi}_i$, $2 \leqslant i \leqslant 4$, — координаты в пространстве $\mathfrak{so}^*(1,3)$, соответствующие базису $\overline{\Psi}^{ij}$, $2 \leqslant i < j \leqslant 4$, $\overline{\Psi}^i$, $2 \leqslant i \leqslant 4$, дуальному к базису $\overline{\Psi}_{ij}$, $2 \leqslant i < j \leqslant 4$, $\overline{\Psi}_i$, $2 \leqslant i \leqslant 4$. При помощи подстановки (7.48) получаем из (7.40) следующие $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{O}_0(1,3)}$-инварианты:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{J}}_1 &= \overline{\psi}_{23}^2 + \overline{\psi}_{24}^2 + \overline{\psi}_{34}^2 - \overline{\psi}_2^2 - \overline{\psi}_3^2 - \overline{\psi}_4^2, \\ \overline{\mathrm{J}}_2 &= \overline{\psi}_{23}\,\overline{\psi}_4 - \overline{\psi}_3\,\overline{\psi}_{24} + \overline{\psi}_2\,\overline{\psi}_{34}\,. \end{aligned} \tag{7.49}$$

Прямым вычислением легко проверить, что ранг действия $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{O}_0(1,3)}$ равен четырем во всех точках пространства $\mathfrak{so}^*(1,3)$ кроме 0. Поэтому любая связная компонента множества уровня в пространстве $\mathfrak{so}^*(1,3)$, определенная равенствами $\overline{\mathrm{J}}_1 = \beta_1$, $\overline{\mathrm{J}}_2 = \beta_2$, является 4-мерной $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{O}_0(1,3)}$-орбитой при $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. То же верно для множества уровня $\overline{\mathrm{J}}_1 = \overline{\mathrm{J}}_2 = 0$, после исключения точки $0 \in \mathfrak{so}^*(1,3)$.

Подпространство $\operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$ определяется условием $\overline{\psi}_{34} = 0$. Аналогично сферическому случаю получаем на подпространстве $\operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$ равенства

$$\begin{aligned} &\bar{p}_0 = -2\,\overline{\psi}_2,\ \bar{p}_1 = 4(\overline{\psi}_3^2 + \overline{\psi}_4^2),\ \bar{p}_2 = 4(\overline{\psi}_{23}^2 + \overline{\psi}_{24}^2), \\ &\bar{p}_3 = -4\left(\overline{\psi}_3\,\overline{\psi}_{23} + \overline{\psi}_4\,\overline{\psi}_{24}\right),\ \bar{p}_\square = 4\left(\overline{\psi}_3\,\overline{\psi}_{24} - \overline{\psi}_4\,\overline{\psi}_{23}\right) \end{aligned}$$

и поэтому

$$\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = -4\,\overline{\mathrm{J}}_1,\ \bar{p}_\square = -4\,\overline{\mathrm{J}}_2\,. \tag{7.50}$$

Пусть $\mathcal{O}_\beta$ — некоторая $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{O}_0(1,3)}$-орбита, для которой $\overline{\mathrm{J}}_1 = \beta_1$, $\overline{\mathrm{J}}_2 = \beta_2$. Рассмотрим точку $z \in \mathcal{O}'_\beta := \mathcal{O}_\beta \cap \operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$, отличную от нуля, с координатами $(\overline{\psi}_2, \overline{\psi}_3, \overline{\psi}_4, \overline{\psi}_{23}, \overline{\psi}_{24}, \overline{\psi}_{34} = 0)$. Она является регулярной для отображения $\mathfrak{so}^*(1,3) \to \mathbb{R}^2$, определенного парой функций $(\overline{\mathrm{J}}_1, \overline{\mathrm{J}}_2)$, и вектор

$$Y = y_2\,\overline{\Psi}^2 + y_3\,\overline{\Psi}^3 + y_4\,\overline{\Psi}^4 + y_{23}\,\overline{\Psi}^{23} + y_{24}\,\overline{\Psi}^{24} + y_{34}\,\overline{\Psi}^{34} \in T_z\mathfrak{so}^*(1,3)$$

лежит в пространстве $T_z\mathcal{O}_\beta$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\begin{aligned} &\overline{\psi}_{23}\,y_{23} + \overline{\psi}_{24}\,y_{24} - \overline{\psi}_3\,y_3 - \overline{\psi}_4\,y_4 = \overline{\psi}_2\,y_2, \\ &\overline{\psi}_4\,y_{23} - \overline{\psi}_3\,y_{24} - \overline{\psi}_{24}\,y_3 + \overline{\psi}_{23}\,y_4 = -\overline{\psi}_2\,y_{34}. \end{aligned} \tag{7.51}$$

В силу равенства $\dim\operatorname{ann}\mathfrak{k}_0 = 5$, орбиты $\mathcal{O}_\beta$ не являются трансверсальными к пространству $\operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$ в точке z тогда и только тогда, когда $T_z\mathcal{O}_\beta \subset \operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$. На координатном языке последнее включение означает, что из системы (7.51) следует равенство $y_{34} = 0$. При $\overline{\psi}_2 = 0$ переменная y_{34} имеет произвольное значение и орбита $\mathcal{O}_\beta$ трансверсальна к пространству $\operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$ в точке z. При $\overline{\psi}_2 \neq 0$ независимые переменные y_{23}, y_{24}, y_3, y_4 однозначно определяют значения y_2 и y_{34}. Поэтому из системы (7.51) следует равенство $y_{34} = 0$, только если $\overline{\psi}_4 = \overline{\psi}_3 = \overline{\psi}_{24} = \overline{\psi}_{23} = 0$. Это означает, что $\beta_1 = -\overline{\psi}_2^2 < 0$, $\beta_2 = 0$. Таким образом, при $\beta_1 \geqslant 0$ или $\beta_2 \neq 0$ орбита $\mathcal{O}_\beta$, отличная от начала координат, удовлетворяет предположениям 4.2 и 4.3.

В силу равенств

$$[\overline{\Psi}_{34}, \overline{\Psi}_{23}] = -\frac{1}{2}\,\overline{\Psi}_{24},\ [\overline{\Psi}_{34}, \overline{\Psi}_{24}] = \frac{1}{2}\,\overline{\Psi}_{23},$$

$$[\overline{\Psi}_{34}, \overline{\Psi}_4] = \frac{1}{2}\,\overline{\Psi}_3,\ [\overline{\Psi}_{34}, \overline{\Psi}_3] = -\frac{1}{2}\,\overline{\Psi}_4,$$

действие $\mathrm{Ad}^*_{K_0}$ соответствует синхронным ортогональным поворотам в 2-мерных плоскостях в пространстве $\mathfrak{so}^*(1,3)$, порожденных соответственно парами элементов $\overline{\Psi}_{23}, \overline{\Psi}_{24}$ и $\overline{\Psi}_3, \overline{\Psi}_4$.

1) Покажем, что в случае $\beta_2 = 0$ частицы движутся по двумерному гиперболическому пространству $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}) \subset \mathbf{H}^3(\mathbb{R})$, что сводит данный случай к случаю $n = 2$, рассмотренному выше.

Действительно, в данном случае $\overline{\psi}_{23}\overline{\psi}_4 = \overline{\psi}_{24}\overline{\psi}_3$. Рассмотрим пространство $\mathbf{H}^3(\mathbb{R})$ как одну из пол двухполостного гиперболоида

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = R^2$$

в пространстве Минковского, соответствующую неравенству $x_1 \geqslant 1$, см. п. 1.3.3. Предположим, что в начальный момент времени частицы находятся на геодезической $x_3 = x_4 = 0$. Их начальные «коллективные» импульсы отождествляются с элементами подпространства $\widetilde{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{so}^*(1,3)$, порожденного элементами $\overline{\Psi}^{23}, \overline{\Psi}^{24}, \overline{\Psi}^i$, $2 \leqslant i \leqslant 4$. Используя поворот вокруг этой геодезической (действие подгруппы K_0), можно предположить, что $\overline{\psi}_4|_{t=0} = 0$, откуда получаем либо $\overline{\psi}_{24}|_{t=0} = 0$, либо $\overline{\psi}_3|_{t=0} = 0$.

В последнем случае вдоль всей K_0-траектории справедливы равенства $\psi_4|_{t=0} = \psi_3|_{t=0} = 0$ и опять можно предполагать, что $\psi_{24}|_{t=0} = 0$.

В случае $\psi_4|_{t=0} = \psi_{24}|_{t=0} = 0$ скорости частиц при $t = 0$ касаются гиперболического подпространства $\mathbf{H}^2(\mathbb{R})$, определенного уравнением $x_4 = 0$, поэтому обе частицы останутся на этом подпространстве для всех $t > 0$.

2) Пусть теперь $\mathcal{O}_\beta$ есть $\mathrm{Ad}^*_{K_0}$-орбита при $\beta_2 \neq 0$. Тогда множество $\mathcal{O}'_\beta = \mathcal{O}_\beta \cap \operatorname{ann}\mathfrak{k}_0$ является гладким подмногообразием пространства $\mathfrak{so}^*(1,3)$. В силу $\beta_2 \neq 0$, подмногообразие $\mathcal{O}'_\beta$ не содержит точек с координатами $\overline{\psi}_3 = \overline{\psi}_4 = \overline{\psi}_{23} = \overline{\psi}_{24} = 0$ и действие $\mathrm{Ad}^*_{K_0}$ на многообразии $\mathcal{O}'_\beta$ является свободным, откуда следует справедливость предположения 4.4. Таким образом, фактор-пространство $\widetilde{\mathcal{O}}_\beta := \mathcal{O}'_\beta / \mathrm{Ad}^*_{K_0}$ является гладким многообразием.

Любая $\mathrm{Ad}^*_{K_0}$-орбита в $\mathcal{O}'_\beta$ содержит единственную точку с координатами $\overline{\psi}_{24} = 0, \overline{\psi}_{23} > 0$. Для этой точке имеют место равенства $\overline{\psi}_4 = \beta_2 / \overline{\psi}_{23}$ и

$$\overline{\psi}_2^2 + \overline{\psi}_3^2 = \overline{\psi}_{23}^2 - \frac{\beta_2^2}{\overline{\psi}_{23}^2} - \beta_1. \tag{7.52}$$

Правая часть в (7.52) является неотрицательной и неограниченно монотонно возрастает с ростом $\overline{\psi}_{23}$ при

$$\overline{\psi}_{23} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + 4\beta_2^2}} > 0.$$

Поэтому уравнение (7.52) и неравенство $\overline{\psi}_{23} > 0$ определяют поверхность в подпространстве

$$\mathrm{span}(\overline{\Psi}^2, \overline{\Psi}^3, \overline{\Psi}^{23}) \subset \mathfrak{so}^*(1,3),$$

диффеоморфную пространству $\mathbb{R}^2$, с глобальными координатами $\overline{\psi}_2, \overline{\psi}_3$.

Таким образом, $\mathrm{Ad}^*_{K_0}$-орбиты в многообразии $\mathcal{O}'_\beta$ при $\beta_2 \neq 0$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками этой поверхности и, в силу теоремы 4.6, приведенное фазовое пространство для (7.46) диффеоморфно многообразию $T^*I \times \mathbb{R}^2$. Приведенная гамильтонова функция задается формулой (7.22), где, в силу (7.50), имеем

$$\bar{p}_0^2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = -4\beta_1, \; \bar{p}_1\bar{p}_2 - \bar{p}_3^2 = \bar{p}_\square^2 = 16\beta_2^2.$$

Это завершает классификацию всех случаев гамильтоновой редукции задачи двух тел на гиперболическом пространстве $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$.

Любые две функции из четверки p_0, p_1, p_2, p_3 независимы на приведенном фазовом пространстве. Коммутационные соотношения для этих функций содержатся в (7.23). Приведенная гамильтонова система имеет две степени свободы, и проблема ее интегрируемости для произвольных нетривиальных потенциалов является открытой.

Глава 8

Квазиточнорешаемость задачи двух тел на сферах

Квантово-механическая система считается точно решаемой, если ее энергетические уровни и соотвествующие стационарные состояния известны в явном виде. Обычно точнорешаемость является следствием существования для данной системы достаточно большого количества симметрий.

Иногда только часть энергетических уровней и соотвествующих стационарных состояний известна в явном виде. Такие системы называются *квазиточнорешаемыми* [77; 78; 217]. В этой главе мы покажем, что квантово-механическая задача двух тел на сферах является квазиточнорешаемой с осцилляторным и кулоновским потенциалами. Для других компактных двухточечно-однородных пространств развитый подход для стационарной квантово-механической задачи двух тел с теми же потенциалами приводит к уравнению Гойна.

Вначале мы опишем общую схему нахождения бесконечной последовательности собственных значений двухчастичного гамильтониана на компактном двухточечно-однородном пространстве Q, не давая детального описания самосопряженного расширения формального гамильтониана, что будет сделано позднее.

В обозначениях главы 5 мы будем предполагать, что $m_1\alpha = m_2\beta$. Операторы $D_0^2, D_1, D_2, \ldots$ из выражения для двухчастичного гамильтониана H (одного из (5.22)–(5.25)) действуют на пространстве $Q_S \cong \cong G/K_0$. Пусть $\psi_D \in \mathcal{L}^2(G/K_0)$ — их общая собственная функция. Тогда можно попробовать найти собственную функцию гамильтониана H в виде $f(r)\psi_D$, где r — радиальная координата на соответствующем интервале I из разложения (5.2). Например, для гамильтониана (5.24) нужен общий собственный вектор операторов D_0^2, D_1, D_2, D_3, а для гамильтониана (5.25) — общий собственный вектор операторов $D_0^2, D_1^2, D_2^2, \{D_1, D_2\}$. Заметим, что для частиц равной массы эти условия можно ослабить: ψ_D не обязательно должен быть собственным век-

тором операторов D_3, D_6 для гамильтонианов (5.22), (5.24), операторов $D_3, \{D_4, D_5\}$ для гамильтониана (5.23) или оператора $\{D_1, D_2\}$ для гамильтониана (5.25), поскольку в данном случае $B_s \equiv F_s \equiv 0$.

Очевидно, что для такого выбора функции ψ_D стационарное уравнение Шредингера

$$H\left(f(r)\psi_D\right) = Ef(r)\psi_D \tag{8.1}$$

эквивалентно спектральной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $f(r)$ и энергетического уровня E (другими словами, одномерному уравнению Шредингера).

Поиск всех общих собственных функций операторов $D_0^2, D_1, D_2, \ldots$ является непростой задачей. Отметим, однако, что, ввиду компактности пространства Q_S, существует тривиальная общая собственная функция операторов $D_0^2, D_1, D_2, \ldots$, универсальная для всех пространств Q. Это постоянная функция $\psi_D = \mathrm{const} \neq 0$ с общим собственным значением, равным нулю.

В § 8.2 мы найдем все общие собственные функции операторов $D_0^2, D_1, D_2, \ldots$ для сфер $\mathbf{S}^n$ и проективных пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$. Затем мы вернемся к соответствующему одномерному уравнению Шредингера. Напомним прежде всего основные факты, касающиеся линейных представлений компактных групп Ли.

§ 8.1. Представления компактных групп Ли

Пусть G — компактная связная группа Ли, а μ — биинвариантная положительная мера на группе G, единственная с точностью до произвольной мультипликативной постоянной [42]. Пусть $\mathcal{L}^2(G, d\mu)$ — гильбертово пространство измеримых комплекснозначных функций на G, квадратично интегрируемых по мере μ. Определим два унитарных левых представления группы G в пространстве $\mathcal{L}^2(G, d\mu)$. *Левое регулярное представление* T^l действует левыми сдвигами

$$\left(T_q^l f\right)(g) = f(q^{-1}g),\ q, g \in G, f \in \mathcal{L}^2(G, d\mu),$$

а *правое регулярное представление* T^r – правыми сдвигами

$$\left(T_q^r f\right)(g) = f(gq),\ q, g \in G, f \in \mathcal{L}^2(G, d\mu).$$

Очевидно, что эти представления эквивалентны, а соответствующий сплетающий оператор имеет вид $f(g) \to f(g^{-1})$. Хорошо известно, что оба этих представления разлагаются в прямые суммы конечномерных

унитарных неприводимых представлений. Каждое из этих унитарных неприводимых представлений содержится в пространстве T^l или пространстве T^r с кратностью, равной его размерности, и любое линейное неприводимое представление группы G эквивалентно унитарному неприводимому представлению из этой суммы [7; 20].

Пусть T_ℓ — полная система унитарных неприводимых представлений группы G в пространствах U_ℓ. Выберем в каждом пространстве U_ℓ ортонормированный базис $(e_{\ell,k})_{k=1}^{d_\ell}$, $d_\ell := \dim_{\mathbb{C}} U_\ell$. Определим матричные элементы $t^i_{\ell,k}$ операторов T^r_q уравнением $T^r_q e_{\ell,k} =: t^i_{\ell,k}(q) e_{\ell,i}$ или эквивалентным уравнением $t^i_{\ell,k}(q) := \langle e_{\ell,i}, T^r_q e_{\ell,k}\rangle_{U_\ell}$, $g \in G$. В силу равенств

$$t^i_{\ell,k}(gq) e_{\ell,i} = T^r_g T^r_q e_{\ell,k} = t^j_{\ell,i}(g) t^i_{\ell,k}(q) e_{\ell,j},$$

получаем

$$t^i_{\ell,k}(gq) = t^i_{\ell,j}(g) t^j_{\ell,k}(q). \tag{8.2}$$

Поэтому подпространство $\mathcal{R}_{\ell,i} \subset \mathcal{L}^2(G, d\mu)$, порожденное функциями $(t^i_{\ell,j}(g))_{j=1}^{d_\ell}$, инвариантно относительно операторов T^r_q и представление $T^r|_{\mathcal{R}_{\ell,i}}$ эквивалентно представлению T_ℓ. С другой стороны, из формулы (8.2) следует, что подпространство $\mathcal{L}_{\ell,j} \subset \mathcal{L}^2(G, d\mu)$, порожденное функциями $(t^i_{\ell,j}(g))_{i=1}^{d_\ell}$, является инвариантным для операторов T^l_q и представление $T^l\big|_{\mathcal{L}_{\ell,j}}$ тоже эквивалентно представлению T_ℓ. Функции $(t^i_{\ell,j}(g))_{i,j=1}^{d_\ell}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{L}^2(G, d\mu)$ [7; 20; 42] и

$$\|t^i_{\ell,j}\|^2_{\mathcal{L}^2(G,d\mu)} = \frac{\mu(G)}{d_\ell}.$$

Таким образом, пространство

$$\mathcal{T}_\ell := \bigoplus_{i=1}^{d_\ell} \mathcal{R}_{\ell,i} = \bigoplus_{j=1}^{d_\ell} \mathcal{L}_{\ell,j}$$

инвариантно относительно представлений T^r и T^l. Представление T^r перемешивает пространства $\mathcal{L}_{\ell,j}$ представлений T^l, и, наоборот, представление T^l перемешивает пространства $\mathcal{R}_{\ell,i}$ представлений T^r. Пространство $\mathcal{L}^2(G, d\mu)$ представлений T^r и T^l разлагается в пространство

неприводимых представлений следующим образом:

$$\mathcal{L}^2(G, d\mu) = \bigoplus_{\ell} \mathcal{T}_\ell = \bigoplus_{\ell} \bigoplus_{i=1}^{d_\ell} \mathcal{R}_{\ell,i} = \bigoplus_{\ell} \bigoplus_{j=1}^{d_\ell} \mathcal{L}_{\ell,j}.$$

Для подгруппы Ли K_0 — группы G подпространство $\mathcal{L}^2(G, K_0, \mu) \subset \subset \mathcal{L}^2(G, d\mu)$, состоящее из функций, инвариантных относительно всех K_0-сдвигов на группе G, является инвариантным относительно левых G-сдвигов. Поэтому есть только две возможности:

$$\mathcal{L}_{\ell,j} \cap \mathcal{L}^2(G, K_0, d\mu) = \mathcal{L}_{\ell,j} \text{ и } \mathcal{L}_{\ell,j} \cap \mathcal{L}^2(G, K_0, d\mu) = 0.$$

Из рассуждений выше вытекает следующее предложение.

Предложение 8.1. Пусть

$$\widetilde{\mathcal{T}}_\ell := \mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{L}^2(G, K_0, d\mu),$$
$$\widetilde{\mathcal{R}}_{\ell,i} := \mathcal{R}_{\ell,i} \cap \mathcal{L}^2(G, K_0, d\mu),$$
$$\widetilde{d}_\ell := \dim_{\mathbb{C}} \widetilde{\mathcal{R}}_{\ell,i}.$$

Очевидно, что значение $\widetilde{d}_\ell$ не зависит от $i = 1, \ldots, d_\ell$. Представление $T^l|_{\widetilde{\mathcal{T}}_\ell}$ разлагается в прямую сумму эквивалентных унитарных неприводимых представлений в пространствах $\mathcal{L}_{\ell,k}^{K_0}$, $k = 1, \ldots, \widetilde{d}_\ell$, которые содержатся среди пространств $\mathcal{L}_{\ell,j}$. С другой стороны, имеем разложение

$$\widetilde{\mathcal{T}}_\ell = \bigoplus_{i=1}^{d_\ell} \widetilde{\mathcal{R}}_{\ell,i},$$

где пространства $\widetilde{\mathcal{R}}_{\ell,i}$, $i = 1, \ldots, d_\ell$, изоморфны друг другу.

Пусть теперь G — связная компонента единицы группы изометрий двухточечно-однородного пространства Q и, как и выше, K_0 — ее стационарная подгруппа, соответствующая некоторому элементу пространства Q_S. Операторы D_i, построенные в главе 3, полиномиальны относительно инфинитезимальных генераторов правых G-сдвигов. Поэтому они сохраняют пространства $\widetilde{\mathcal{T}}_\ell$ и, вообще говоря, перемешивают прямые слагаемые $\mathcal{L}_{\ell,k}^{K_0}$, $k = 1, \ldots, \widetilde{d}_\ell$, с постоянным значением ℓ и различными k. С другой стороны, они действуют в пространствах $\widetilde{R}_{\ell,i}$, и эти их действия изоморфны друг другу для постоянных ℓ и различных $i = = 1, \ldots, d_\ell$.

§ 8.2. Общие собственные значения операторов D_i для сфер $\mathbf{S}^n$ и проективных пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$

В данном параграфе мы следуем результатам работы [196], которые обобщают результаты для случаев $Q = \mathbf{S}^2$ и $Q = \mathbf{S}^3$, найденные в [87] и [74] соответственно.

Прежде всего мы получим некоторую априорную информацию о собственных значениях общих собственных функций операторов D_0^2, D_1, D_2, D_3 для $Q = \mathbf{S}^n$, $n \geqslant 3$, и операторов $D_0^2, D_1^2, D_2^2, \{D_1, D_2\}$ для $Q = \mathbf{S}^2$.

Предложение 8.2. Пусть ψ_D — общая собственная функция для операторов D_0^2, D_1', D_2', D_3' с собственными значениями $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ и δ_3 соответственно, где $D_i' = D_i$, $i = 1, 2, 3$, для пространства $Q = \mathbf{S}^n$, $n \geqslant 3$, и $D_1' = D_1^2$, $D_2' = D_2^2$, $D_3' = \frac{1}{2}\{D_1, D_2\}$ для пространства $Q = \mathbf{S}^2$. Тогда

1) $\delta_1 = \delta_2$ и $\delta_3 = 0$;

2) $D_0\psi_D$ — общая собственная функция операторов D_0^2, D_1', D_2', D_3' с теми же собственными значениями $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ и δ_3 соответственно;

3) если $D_0\psi_D \not\sim \psi_D$, то $D_0\psi_D \pm \sqrt{\delta_0}\psi_D$ — общая собственная функция операторов D_0, D_1', D_2', D_3';

4) если $D_0\psi_D \sim \psi_D$, то либо $D_0\psi_D = 0$, либо $\delta_1 = \delta_2 = (n-1)(n-3)/4$.

Доказательство. Рассмотрим случай $Q = \mathbf{S}^n$, $n \geqslant 3$. Коммутационные соотношения $[D_0, D_3] = D_1 - D_2$ и $[D_1, D_2] = -2\{D_0, D_3\}$ (см. (3.35)) дают

$$[D_0, D_3]\psi_D = \delta_3 D_0\psi_D - D_3 D_0\psi_D = (D_1 - D_2)\psi_D = (\delta_1 - \delta_2)\psi_D,$$

$$\delta_3 D_0\psi_D + D_3 D_0\psi_D = \{D_0, D_3\}\psi_D = -\frac{1}{2}[D_1, D_2]\psi_D = 0, \tag{8.3}$$

откуда получаем

$$2\delta_3 D_0\psi_D = (\delta_1 - \delta_2)\psi_D. \tag{8.4}$$

Если $\delta_3 \neq 0$, то из последнего уравнения следует $D_0\psi_D \sim \psi_D$ и соотношение $[D_0, D_1] = -2D_3$ дает $\delta_3\psi_D = D_3\psi_D = -\frac{1}{2}[D_0, D_1]\psi_D = 0$. Поэтому $\delta_3 = 0$ и уравнение (8.4) влечет $\delta_1 = \delta_2$, что доказывает первое утверждение предложения.

Теперь из уравнения (8.3) получаем $D_3 D_0 \psi_D = 0$ и первые два соотношения (3.35) дают $D_1 D_0 \psi_D = D_2 D_0 \psi_D = \delta_1 D_0 \psi_D$. Соотношение $D_0^2 D_0 \psi_D = \delta_0 D_0 \psi_D$ очевидно, что завершает доказательство второго утверждения предложения.

Соотношение $D_0^2 \psi_D = \delta_0 \psi_D$ эквивалентно равенству $\left(D_0 + \sqrt{\delta_0}\,\mathrm{id}\right) \times \times \left(D_0 - \sqrt{\delta_0}\,\mathrm{id}\right) \psi_D = 0$. Теперь, если $D_0 \psi_D \neq \sqrt{\delta_0} \psi_D$, то $\psi_D^- := = \left(D_0 - \sqrt{\delta_0}\,\mathrm{id}\right) \psi_D$ — собственная функция оператора D_0. Функция ψ_D^- также является собственной функцией оператора D_1, D_2, D_3 в силу второго утверждения предложения. Доказательство для функции $\psi_D^+ := = \left(D_0 + \sqrt{\delta_0}\,\mathrm{id}\right) \psi_D$ совершенно аналогично. Таким образом, третье утверждение предложения доказано.

Предположим теперь, что $D_0 \psi_D = \delta_0' \psi_D$. Тогда последнее соотношение из (3.35) дает

$$2\delta_0' \delta_2 \psi_D = \frac{1}{2}(n-1)(n-3)\delta_0' \psi_D.$$

Это означает, что или $\delta_0' = 0$, или $\delta_1 = \delta_2 = (n-1)(n-3)/4$, что доказывает последнее утверждение предложения.

Случай $Q = \mathbf{S}^2$ совершенно аналогичен. ■

В данном параграфе мы используем обозначения из § 8.1 для $G = = \mathrm{SO}(n+1)$ и $K_0 = \mathrm{SO}(n-1)$. Под комплексификацией $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ниже мы будем понимать следующее множество:

$$\mathfrak{so}(n+1, \mathbb{C}) = \left(A \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C}) \middle| \; A + A^T = E\right). \tag{8.5}$$

С данного момента мы будем рассматривать комплексные пространства $R_{\ell,i}$ как простые левые модули над $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Их подпространства $\widetilde{R}_{\ell,i}$ состоят из элементов, аннулируемых подалгеброй $\mathfrak{k}_0^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{so}(n-1, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Хорошо известна классификация таких модулей, основанная на понятии доминантного веса [80; 124] (см. также краткое описание в приложении C). Для удобства применения этой теории мы используем форму алгебры $\mathfrak{so}(n+1, \mathbb{C})$, описанную в приложении C и отличную от (8.5). Кроме того, поскольку $\mathfrak{B}_k := \mathfrak{so}(2k+1, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{D}_k := \mathfrak{so}(2k, \mathbb{C})$ — различные серии простых комплексных алгебр Ли, то мы рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного n.

8.2.1. Случай $n = 2k$

В данном пункте мы воспользуемся обозначениями приложения C.1. В частности, под $\mathfrak{B}_k$ мы будем понимать множество (C.1). Во-первых, мы построим изоморфизм $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{B}_k$ в явном виде.

Пусть

$$J_{2k+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}E_k & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}S_k \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}S_k & 0 & \frac{-\mathbf{i}}{\sqrt{2}}E_k \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2k+1, \mathbb{C}),$$

где E_k — единичная матрица размера $k \times k$.

Легко проверить, что

$$J_{2k+1} S_{2k+1} J_{2k+1}^T = E_{2k+1}.$$

Поэтому уравнение $A^T S_{2k+1} + S_{2k+1} A = 0$ для $A \in \mathfrak{gl}(2k+1, \mathbb{C})$ эквивалентно уравнению $B^T + B = 0$, где $B := \left(J_{2k+1}^T\right)^{-1} A J_{2k+1}^T$. Таким образом, отображение

$$B \to J_{2k+1}^T B \left(J_{2k+1}^T\right)^{-1} \tag{8.6}$$

является изоморфизмом между алгебрами Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ и $\mathfrak{B}_k$.

Пусть

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & A_- & a & A_+ \\ -\alpha & 0 & B_- & b & B_+ \\ -A_-^T & -B_-^T & & & \\ -a & -b & & C' & \\ -A_+^T & -B_+^T & & & \end{pmatrix} \in \mathfrak{g},$$

где

$$A_- = \left(a_{-(k-1)}, \ldots, a_{-1}\right), \; A_+ = \left(a_1, \ldots, a_{k-1}\right), \; B_- = \left(b_{-(k-1)}, \ldots, b_{-1}\right),$$
$$B_+ = \left(b_1, \ldots, b_{k-1}\right), \; a_i, b_i, a, b \in \mathbb{R}, \; C' \in \mathfrak{so}(2k-1).$$

Переместим вторую строку и второй столбец матрицы C на последние места. Это даст матрицу

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & A & a & A_+ & \alpha \\ -A_-^T & & & & -B_-^T \\ -a & & \widetilde{C}' & & -b \\ -A_+^T & & & & -B_+^T \\ -\alpha & B_- & b & B_+ & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2k+1), \; \widetilde{C}' \in \mathfrak{so}(2k-1).$$

Преобразование (8.6) дает теперь для матрицы $\widehat{C} := J_{2k+1}^T \widetilde{C} \left(J_{2k+1}^T\right)^{-1}$ выражение

$$\widehat{C}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\mathbf{i}\alpha & Z_- - \mathbf{i}Z_+S_{k-1} & \sqrt{2}z & Z_-S_{k-1}+\mathbf{i}Z_+ & 0 \\ -\overline{Z}_-^T - \mathbf{i}S_{k-1}\overline{Z}_+^T & & & & -Z_-^T - \mathbf{i}S_{k-1}Z_+^T \\ -\sqrt{2}\overline{z} & & \widehat{C}' & & -\sqrt{2}z \\ -S_{k-1}\overline{Z}_-^T + \mathbf{i}\overline{Z}_+^T & & & & -S_{k-1}Z_-^T + \mathbf{i}Z_+^T \\ 0 & \overline{Z}_- - \mathbf{i}\overline{Z}_+S_{k-1} & \sqrt{2}\overline{z} & \overline{Z}_-S_{k-1}+\mathbf{i}\overline{Z}_+ & 2\mathbf{i}\alpha \end{pmatrix},$$

где $Z_- := A_- + \mathbf{i}B_-$, $Z_+ := A_+ + \mathbf{i}B_+$, $z := a + \mathbf{i}b$, $\widehat{C}' \in \mathfrak{B}_{k-1}$. Отождествим алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ и $\mathfrak{B}_k$ посредством отображения $C \to \widehat{C}$. В силу определения матриц Ψ_{ij} в п. 1.3.3 мы получим следующие формулы:

$$\Psi_{12} = \frac{\mathbf{i}}{2}F_{kk},\ \Psi_{1,k+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(F_{k0} - F_{0k}\right),\ \Psi_{2,k+2} = -\frac{\mathbf{i}}{2\sqrt{2}}\left(F_{k0} + F_{0k}\right),$$

$$\Psi_{1i} = \frac{1}{4}\left(F_{kj} + F_{k,-j} + F_{-kj} + F_{-k,-j}\right),\ j = i-k-2,\ 3 \leqslant i \leqslant k+1,$$

$$\Psi_{1i} = \frac{\mathbf{i}}{4}\left(F_{kj} - F_{k,-j} + F_{-kj} - F_{-k,-j}\right),\ j = i-k-2,\ k+3 \leqslant i \leqslant 2k+1,$$

$$\Psi_{2i} = \frac{\mathbf{i}}{4}\left(F_{-kj} + F_{-k,-j} - F_{kj} - F_{k,-j}\right),\ j = i-k-2,\ 3 \leqslant i \leqslant k+1,$$

$$\Psi_{2i} = \frac{1}{4}\left(F_{kj} - F_{k,-j} + F_{-k,-j} - F_{-kj}\right),\ j = i-k-2,\ k+3 \leqslant i \leqslant 2k+1,$$

которые дают

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2}\left(F_{k0} - F_{0k}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}\left\{F_{-kj} + F_{kj}, F_{k,-j} + F_{-k,-j}\right\}, \\ D_2 &= -\frac{1}{2}\left(F_{k0} + F_{0k}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}\left\{F_{-kj} - F_{kj}, F_{k,-j} - F_{-k,-j}\right\}, \\ D_3 &= \frac{\mathbf{i}}{2}\left(F_{k0}^2 - F_{0k}^2\right) + \mathbf{i}\sum_{j=1}^{k-1}\left(F_{kj}F_{k,-j} - F_{-kj}F_{-k,-j}\right),\ D_0 = -\mathbf{i}F_{kk} \end{aligned} \tag{8.7}$$

для $k \geqslant 2$ и

$$D_0 = -\mathbf{i}F_{11},\ D_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(F_{10} - F_{01}\right),\ D_2 = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\left(F_{10} + F_{01}\right)$$

для $k = 1$.

Поскольку случай $k = 1$ не укладывается в общую схему из-за тривиальности группы K_0, мы предположим с данного момента, что $k \geqslant 2$. Случай $k = 1$ будет рассмотрен ниже.

Пространство $\mathcal{R}_{\ell,i}$ совпадает с некоторым модулем $V_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$ со старшим весом (C.4), где $m_i \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$ подпространство пространства $V_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$, аннулируемое подалгеброй $\mathfrak{k}_0^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{B}_{k-1}$. Пусть вектор $v \in \widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$, $v \neq 0$ является старшим вектором тривиального одномерного $\mathfrak{B}_{k-1}$-модуля. Тогда из предложений C.1 и C.2 следует существование таких чисел $m'_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, k$, что

$$m_k \geqslant m'_k \geqslant m_{k-1} \geqslant \ldots \geqslant m'_2 \geqslant m_1 \geqslant m'_1 \geqslant -m_1,$$
$$m'_k \geqslant 0 \geqslant m'_{k-1} \geqslant 0 \geqslant \ldots \geqslant m'_2 \geqslant 0 \geqslant |m'_1|.$$

Отсюда $m'_j = 0$, $j = 1, \ldots, k-1$, и поэтому $m_j = 0$, $j = 1, \ldots, k-2$.

С данного момента до конца настоящего пункта положим

$$\lambda = m_{k-1}\varepsilon_{k-1} + m_k\varepsilon_k,\ m_k \geqslant m_{k-1} \geqslant 0,\ m_k, m_{k-1} \in \mathbb{Z}_+.$$

В этом случае предложение C.1 означает, что любой модуль $V_{\mathfrak{D}_k}(m'_k\varepsilon_k) \subset \subset V_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$ содержит единственный одномерный модуль $V_{\mathfrak{B}_{k-1}}(0)$, откуда

$$\dim \widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda) = m_k - m_{k-1} + 1. \tag{8.8}$$

Таким образом, из предложения 8.1 получаем следующее разложение [153]:

$$\mathcal{L}^2\left(\mathrm{SO}(2k+1), \mathrm{SO}(2k-1), d\mu\right) =$$
$$= \bigoplus_{\substack{m_k \geqslant m_{k-1} \\ m_k, m_{k-1} \in \mathbb{Z}_+}} (m_k - m_{k-1} + 1) V_{\mathfrak{B}_k}\left(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1}\right),$$

где левая часть рассматривается как ограничение левого регулярного представления группы $\mathrm{SO}(2k+1)$.

С другой стороны, пространство

$$\mathcal{L}^2\left(\mathrm{SO}(2k+1), \mathrm{SO}(2k-1), d\mu\right)$$

как $\mathrm{Diff}_{\mathrm{SO}(2k+1)}(\mathrm{SO}(2k+1)/\mathrm{SO}(2k-1))$-модуль разлагается в виде

$$\mathcal{L}^2\left(\mathrm{SO}(2k+1), \mathrm{SO}(2k-1), d\mu\right) = \tag{8.9}$$

$$= \bigoplus_{\substack{m_k \geqslant m_{k-1} \\ m_k, m_{k-1} \in \mathbb{Z}_+}} (\dim V_{\mathfrak{B}_k}(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1}))\, \widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1}),$$

где размерность $\dim V_{\mathfrak{B}_k}(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1})$ дается формулой (C.8). Будем рассматривать

$$D^+ := \sum_{j=1}^{k-1} F_{kj}F_{k,-j} + \frac{1}{2}F_{k0}^2,\ D^- := \sum_{j=1}^{k-1} F_{-kj}F_{-k,-j} + \frac{1}{2}F_{0k}^2,$$

$$\widetilde{C} := C|_{\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(2k+1),\mathrm{SO}(2k-1),d\mu)} =$$

$$= F_{kk}^2 + \{F_{k0}, F_{0k}\} + \sum_{j=1}^{k-1}(\{F_{kj}, F_{jk}\} + \{F_{k,-j}, F_{-jk}\})$$

как операторы в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(2k+1), \mathrm{SO}(2k-1), d\mu)$, где C — универсальный оператор Казимира (C.6). В соответствии с общим соглашением, сделанным в главе 3, мы рассматриваем элементы F_{kk}, D^+, D^- из комплексификации алгебры $U(\mathfrak{so}(2k+1,\mathbb{C}))^{\mathrm{SO}(2k-1)}$ по модулю идеала

$$(U(\mathfrak{so}(2k+1,\mathbb{C}))\mathfrak{so}(2k-1,\mathbb{C}))^{\mathrm{SO}(2k-1)} \subset U(\mathfrak{so}(2k+1,\mathbb{C}))^{\mathrm{SO}(2k-1)},$$

т. е. как элементы алгебры $\mathrm{Diff}_{\mathrm{SO}(2k+1)}(\mathrm{SO}(2k+1)/\mathrm{SO}(2k-1))^{\mathbb{C}}$.

В силу (C.3) и (C.9), оператор D^+ «повышает» весовые подпространства модуля $\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$, а оператор D^- «понижает» их.

Поскольку $[F_{kj}, F_{k,-j}] = [F_{-kj}, F_{-k,-j}] = 0$, мы получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered} D_1 = D^+ + D^- + \frac{1}{2}\left(F_{kk}^2 - \widetilde{C}\right),\ D_2 = -D^+ - D^- + \frac{1}{2}\left(F_{kk}^2 - \widetilde{C}\right), \\ D_3 = \mathbf{i}\left(D^+ - D^-\right), \\ D^+ = \frac{1}{4}(D_1 - D_2) - \frac{\mathbf{i}}{2}D_3,\ D^- = \frac{1}{4}(D_1 - D_2) + \frac{\mathbf{i}}{2}D_3, \\ \widetilde{C} = -D_0^2 - D_1 - D_2. \end{gathered} \tag{8.10}$$

Коммутационные соотношения (3.35) теперь дают

$$[F_{kk}, D^+] = 2D^+,\ [F_{kk}, D^-] = -2D^-, \tag{8.11}$$

$$[D^+, D^-] = -\frac{1}{2}F_{kk}^3 + \frac{1}{2}\widetilde{C}F_{kk} + \frac{1}{4}(2k-1)(2k-3)F_{kk}, \tag{8.12}$$

а из формул (C.5) и (C.7) следует, что

$$\begin{aligned}\widetilde{C}\Big|_{\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)} = \Bigg(\left(k + m_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(k + m_{k-1} - \frac{3}{2}\right)^2 - \\ - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{3}{2}\right)^2\Bigg)\,\mathrm{id}\,.\end{aligned} \tag{8.13}$$

Воспользуемся следующим разложением:

$$\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda) = V_{-\nu\varepsilon_k} \oplus V_{-(\nu-2)\varepsilon_k} \oplus \dots \oplus V_{(\nu-2)\varepsilon_k} \oplus V_{\nu\varepsilon_k} \tag{8.14}$$

из статьи [172], где $\nu = m_k - m_{k-1}$, а все слагаемые являются одномерными весовыми пространствами относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h}_k$.[1]

Формулы (C.3) и (C.9) дают

$$D^+ : V_{j\varepsilon_k} \to V_{(j+2)\varepsilon_k}, \quad D^- : V_{j\varepsilon_k} \to V_{(j-2)\varepsilon_k}.$$

Действия операторов F_{kk}, D^+, D^- в пространстве $\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$ относительно некоторого базиса были вычислены в [172]. В частности, оказалось, что в пространстве $\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$ нет нетривиальных инвариантных подпространств для этого действия.

Мы получим более простые формулы для действий операторов D^+ и D^- относительно базиса пространства $\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$ с нормировкой, отличной от использованной в [172].

Лемма 8.1. *Пусть $L_\nu := (-\nu, -\nu+2, \dots, \nu-2, \nu)$. В пространстве $\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$ существует базис $(\chi_j)_{j\in L_\nu}$ такой, что*

$$F_{kk}\chi_j = j\chi_j,\ D^+\chi_j = \frac{1}{4}(j - m_k - m_{k-1} - 2k + 3)(j - \nu)\chi_{j+2}, \tag{8.15}$$

$$D^-\chi_j = \frac{1}{4}(j + m_k + m_{k-1} + 2k - 3)(j + \nu)\chi_{j-2}, \tag{8.16}$$

где $\chi_j = 0$ для $j \notin L_\nu$.

[1] В приложении C.4 мы даем доказательство разложения (8.14), независимое от теории янгианов, использованной в [172].

Доказательство. Поскольку действие алгебры, порожденной операторами F_{kk}, D^+, D^-, неприводимо в пространстве $\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$, то по индукции можно определить ненулевые элементы $\chi_j \in V_{j\varepsilon_k}$, $j \in L_\nu$, такие, что формулы (8.15) будут выполнены.

Докажем по индукции формулу (8.16). Для $j = -\nu$ она очевидна. Предположим, что (8.16) справедлива при $j = -\nu, -\nu+2, \ldots, i$, где $i < \nu$. Тогда, используя формулу (8.13), получим

$$\frac{1}{4}(i - m_k - m_{k-1} - 2k + 3)(i - \nu)D^-\chi_{i+2} = D^-D^+\chi_i =$$
$$= \left([D^-, D^+] + D^+D^-\right)\chi_i =$$
$$= \left(\frac{1}{2}F_{kk}^3 - \frac{1}{2}\widetilde{C}F_{kk} - \frac{1}{4}(2k-1)(2k-3)F_{kk}\right)\chi_i +$$
$$+ \frac{1}{4}(i + m_k + m_{k-1} + 2k - 3)(i + \nu)D^+\chi_{i-2} =$$
$$= \frac{1}{2}\Bigg(i^3 - i\Bigg(m_k^2 + m_{k-1}^2 + (2k-1)m_k + (2k-3)m_{k-1} +$$
$$+ \frac{1}{2}(2k-1)(2k-3)\Bigg)\Bigg)\chi_i +$$
$$+ \frac{1}{16}(i + m_k + m_{k-1} + 2k - 3)(i + \nu)(i - m_k - m_{k-1} - 2k + 1)(i - 2 - \nu)\chi_i =$$
$$= \frac{1}{16}(i - m_k - m_{k-1} - 2k + 3)(i - \nu)(i + m_k + m_{k-1} + 2k - 1)(i + 2 + \nu)\chi_i,$$

в силу тождества

$$(i - m_k - m_{k-1} - 2k + 3)(i - \nu)(i + m_k + m_{k-1} + 2k - 1)(i + 2 + \nu) -$$
$$- (i + m_k + m_{k-1} + 2k - 3)(i + \nu)(i - m_k - m_{k-1} - 2k + 1)(i - 2 - \nu) =$$
$$= 8i^3 - 8i\Bigg(m_k^2 + m_{k-1}^2 + (2k-1)m_k +$$
$$+ (2k-3)m_{k-1} + \frac{1}{2}(2k-1)(2k-3)\Bigg).$$

Из очевидного условия $(i - m_k - m_{k-1} - 2k + 3)(i - \nu) \neq 0$ следует равенство

$$D^-\chi_{i+2} = \frac{1}{4}(i + m_k + m_{k-1} + 2k - 1)(i + 2 + \nu)\chi_i,$$

которое и завершает индукцию. ■

Лемма 8.1, разложение (8.9) и соотношения (8.10) эффективно описывают действие операторов D_0, D_1, D_2, D_3 в пространстве $\mathcal{L}^2\left(\mathrm{SO}(2k+1), \mathrm{SO}(2k-1), d\mu\right)$. Рассмотрим задачу нахождения всех общих собственных векторов ψ_D операторов D_0^2, D_1, D_2 и выделим среди них собственные векторы оператора D_3. Она эквивалентна задаче нахождения всех общих собственных векторов операторов $D_0^2, D^+ + D^-$ и выделения среди них собственных векторов оператора $D^+ - D^-$ в пространстве $\widehat{V}_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$.

Собственные значения оператора D_0^2 суть

$$c_+\chi_j + c_-\chi_{-j},\ c_\pm \in \mathbb{C},\ j \in L_\nu,\ j \geqslant 0$$

с собственными значениями $-j^2$. В силу

$$\begin{aligned}\left(D^+ + D^-\right)\left(c_+\chi_j + c_-\chi_{-j}\right) = \frac{1}{4}(j - m_k - m_{k-1} - 2k + 3)(j - \nu)\times \\ \times\left(c_+\chi_{j+2} + c_-\chi_{-j-2}\right) + \\ + \frac{1}{4}(j + m_k + m_{k-1} + 2k - 3)(j + \nu)\times \\ \times\left(c_+\chi_{j-2} + c_-\chi_{-j+2}\right)\end{aligned}$$

требование

$$\left(D^+ + D^-\right)\left(c_+\chi_j + c_-\chi_{-j}\right) \sim c_+\chi_j + c_-\chi_{-j}$$

дает $(j - m_k - m_{k-1} - 2k + 3)(j - \nu) = 0$, что ведет к двум случаям: $j = m_k - m_{k-1}$ и $j = m_k + m_{k-1} + 2k - 3$.

В первом случае мы получаем

$$\begin{aligned}\left(D^+ + D^-\right)\left(c_+\chi_{m_k - m_{k-1}} + c_-\chi_{-m_k + m_{k-1}}\right) = \\ = (m_k - m_{k-1})\left(m_k + k - \frac{3}{2}\right)\times \\ \times\left(c_+\chi_{m_k - m_{k-1} - 2} + c_-\chi_{-m_k + m_{k-1} + 2}\right),\end{aligned}$$

что приводит к одной из трех возможностей:

1) $m_k - m_{k-1} = 0$;

2) $m_k - m_{k-1} - 2 = -m_k + m_{k-1}$;

3) $m_k - m_{k-1} - 2 = 0,\ c_+ + c_- = 0$.

Это дает следующие собственные векторы:

1) $(D^+ + D^-)\,\chi_0 = 0$ для $m_k - m_{k-1} = 0$;

2) $(D^+ + D^-)\,(\chi_1 + \chi_{-1}) = \left(m_k + k - \frac{3}{2}\right)(\chi_1 + \chi_{-1})$
для $m_k \in \mathbb{N}$, $m_{k-1} = m_k - 1$;

3) $(D^+ + D^-)\,(\chi_1 - \chi_{-1}) = -\left(m_k + k - \frac{3}{2}\right)(\chi_1 - \chi_{-1})$
для $m_k \in \mathbb{N}$, $m_{k-1} = m_k - 1$;

4) $(D^+ + D^-)\,(\chi_2 - \chi_{-2}) = 0$, для $m_{k-1} = m_k - 2$, $m_k = 2, 3, \ldots$

Во втором случае мы получаем $m_k + m_{k-1} + 2k - 3 = j \leqslant m_k - m_{k-1}$, что дает $0 \leqslant m_{k-1} \leqslant \frac{3}{2} - k$ и значит $k = 1$, что противоречит предположению $k \geqslant 2$.

С учетом соотношений (8.10) подытожим эти рассуждения в следующем предложении.

Предложение 8.3. Для $n = 2k$, $k \geqslant 2$ существует четыре серии общих собственных векторов операторов D_0^2, D_1, D_2 в пространстве $\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1}), m_k, m_{k-1} \in \mathbb{Z}_+$:

1) $D_0^2\chi_0 = D_3\chi_0 = 0$, $D_1\chi_0 = D_2\chi_0 = -m_k(m_k + 2k - 2)\chi_0$, $m_k = m_{k-1}$;

2) $D_0^2(\chi_1+\chi_{-1}) = -(\chi_1+\chi_{-1})$, $D_2(\chi_1+\chi_{-1}) = -m_k(m_k+2k-2)(\chi_1+\chi_{-1})$,
$D_1(\chi_1 + \chi_{-1}) = \left(-m_k^2 - 2(k-2)m_k + 2k - 3\right)(\chi_1 + \chi_{-1})$,
$D_3(\chi_1 + \chi_{-1}) = \mathbf{i}\left(m_k + k - \frac{3}{2}\right)(\chi_1 - \chi_{-1})$, $m_{k-1} = m_k - 1, m_k \in \mathbb{N}$

3) $D_0^2(\chi_1-\chi_{-1}) = -(\chi_1-\chi_{-1})$, $D_1(\chi_1-\chi_{-1}) = -m_k(m_k+2k-2)(\chi_1-\chi_{-1})$,
$D_2(\chi_1 - \chi_{-1}) = \left(-m_k^2 - 2(k-2)m_k + 2k - 3\right)(\chi_1 - \chi_{-1})$,
$D_3(\chi_1-\chi_{-1}) = -\mathbf{i}\left(m_k + k - \frac{3}{2}\right)(\chi_1+\chi_{-1})$, $m_{k-1} = m_k-1, m_k \in \mathbb{N}$;

4) $D_0^2(\chi_2-\chi_{-2}) = -4(\chi_2-\chi_{-2})$, $D_3(\chi_2-\chi_{-2}) = -4\mathbf{i}\left(m_k + k - \frac{3}{2}\right)\chi_0$,
$D_1(\chi_2 - \chi_{-2}) = D_2(\chi_2 - \chi_{-2}) = \left(-m_k^2 - 2(k-2)m_k + 2k - 3\right)(\chi_2 - \chi_{-2})$, $m_{k-1} = m_k - 2, m_k = 2, 3, 4, \ldots$

Только первый из этих векторов является собственным для оператора D_3.

Кратности соответствующих собственных значений в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n-1), d\mu)$ равны $\dim V_{\mathfrak{B}_k}(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1})$ и могут быть вычислены в явном виде при помощи формулы (C.8).

Рассмотрим случай $k = 1, n = 2$. Здесь группа K_0 тривиальна и поэтому $\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_1}(\lambda) = V_{\mathfrak{B}_1}(\lambda)$. Алгебра $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{A}_1$ имеет базис F_{11}, F_{01}, F_{10} с коммутационными соотношениями

$$[F_{11}, F_{01}] = -F_{01},\ [F_{11}, F_{10}] = F_{10},\ [F_{10}, F_{01}] = F_{11}.$$

Ее теория представлений хорошо известна: все ее конечномерные неприводимые модули имеют вид

$$V_{\mathfrak{B}_1}(m\varepsilon_1) = V_{-m\varepsilon_1} \oplus V_{-(m-1)\varepsilon_1} \oplus \dots \oplus V_{(m-1)\varepsilon_1} \oplus V_{m\varepsilon_1},$$

где $m \in \mathbb{Z}_+ \cup \left(\mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2}\right)$, все $V_{j\varepsilon_1}$ — одномерные весовые подпространства относительно подалгебры $\mathfrak{h}_1 = \mathrm{span}(F_{11})$, а операторы

$$F_{10}\colon V_{j\varepsilon_1} \to V_{(j+1)\varepsilon_1},\ j = -m, \dots, m-1,$$
$$F_{01}\colon V_{j\varepsilon_1} \to V_{(j-1)\varepsilon_1},\ j = -m+1, \dots, m$$

биективны.

Мы рассмотрим только случай $m \in \mathbb{Z}_+$, поскольку

$$\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(3), d\mu) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_+} (2m+1) V_{\mathfrak{B}_1}(m\varepsilon_1).$$

Таким образом, по сравнению с разложением (8.14), в модуле $V_{\mathfrak{B}_1}(m\varepsilon_1)$ есть дополнительные весовые подпространства и действие алгебры, порожденной операторами $D^+ = \frac{1}{2}F_{10}^2, D^- = \frac{1}{2}F_{01}^2$, в пространстве $V_{\mathfrak{B}_1}(m\varepsilon_1)$ приводимо.

В пространстве $V_{\mathfrak{B}_1}(m\varepsilon_1)$ можно выбрать базис $(\chi_j)_{j=-m}^m$, такой что

$$\chi_j \in V_{j\varepsilon_1},\ F_{11}\chi_j = j\chi_j,\ F_{10}\chi_j = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(m-j)(m+j+1)}\chi_{j+1},$$

$$F_{01}\chi_j = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(m+j)(m-j+1)}\chi_{j-1},$$

где, как и выше, $\chi_j = 0$ при $|j| > m$.

Собственные векторы оператора $D_0^2 = -F_{11}^2$ суть

$$c_+\chi_j + c_-\chi_{-j},\ c_\pm \in \mathbb{C},\ j = 0, 1, \ldots, m,$$

с собственными значениями $-j^2$. В силу

$$\begin{aligned}
&\left(D^+ + D^-\right)\left(c_+\chi_j + c_-\chi_{-j}\right) = \\
&\qquad = \frac{1}{4}\sqrt{(m-j)(m+j+1)(m-j-1)(m+j+2)}\times \\
&\qquad \times \left(c_+\chi_{j+2} + c_-\chi_{-j-2}\right) + \\
&\qquad + \frac{1}{4}\sqrt{(m+j)(m-j+1)(m+j-1)(m-j+2)}\times \\
&\qquad \times \left(c_+\chi_{j-2} + c_-\chi_{-j+2}\right),
\end{aligned}$$

требование

$$\left(D^+ + D^-\right)\left(c_+\chi_j + c_-\chi_{-j}\right) \sim c_+\chi_j + c_-\chi_{-j}$$

дает $(m-j)(m+j+1)(m-j-1)(m+j+2) = 0$, что приводит к двум случаям: $j = m$ и $j = m-1$.

В первом случае получаем

$$\left(D^+ + D^-\right)\left(c_+\chi_m + c_-\chi_{-m}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{m(2m-1)}\left(c_+\chi_{m-2} + c_-\chi_{m+2}\right),$$

что ведет к одной из трех возможностей:

1) $m = j = 0$;

2) $m - 2 = -m$;

3) $m - 2 = 0,\ c_+ + c_- = 0$,

откуда получаем следующие собственные векторы:

1) $\left(D^+ + D^-\right)\chi_0 = 0,\ m = 0$;

2) $\left(D^+ + D^-\right)\left(\chi_1 + \chi_{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\chi_1 + \chi_{-1}\right),\ m = 1$;

3) $\left(D^+ + D^-\right)\left(\chi_1 - \chi_{-1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\chi_1 - \chi_{-1}\right),\ m = 1$;

4) $\left(D^+ + D^-\right)\left(\chi_2 - \chi_{-2}\right) = 0,\ m = 2$.

Легко видеть, что данные собственные векторы соответствуют собственным векторам из предложения 8.3 для $m_k = m, m_{k-1} = 0$.

Во втором случае получаем

$$\left(D^+ + D^-\right)\left(c_+\chi_{m-1} + c_-\chi_{-m+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3(2m-1)(m-1)}\left(c_+\chi_{m-3} + c_-\chi_{m+3}\right),$$

что ведет к одной из трех возможностей:

1) $m = 1,\ j = 0$;

2) $m - 3 = -m + 1$;

3) $m - 3 = 0,\ c_+ + c_- = 0$.

Это дает следующие собственные векторы:

1) $(D^+ + D^-)\chi_0 = 0,\ m = 1$;

2) $(D^+ + D^-)(\chi_1 + \chi_{-1}) = \frac{3}{2}(\chi_1 + \chi_{-1}),\ m = 2$;

3) $(D^+ + D^-)(\chi_1 - \chi_{-1}) = -\frac{3}{2}(\chi_1 - \chi_{-1}),\ m = 2$;

4) $(D^+ + D^-)(\chi_2 - \chi_{-2}) = 0,\ m = 3$.

Для $k = 1$ мы имеем равенства

$$D_1^2 = D^+ + D^- + \frac{1}{2}\left(F_{11}^2 - \widetilde{C}\right),\ D_2^2 = -D^+ - D^- + \frac{1}{2}\left(F_{11}^2 - \widetilde{C}\right),$$
$$\{D_1, D_2\} = 2\mathrm{i}\left(D^+ - D^-\right),\ \widetilde{C}\Big|_{\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_1}(m\varepsilon_1)} = m(m+1)\,\mathrm{id},$$

и соотношения (8.10) по-прежнему справедливы.

Предложение 8.4. Для операторов D_0^2, D_1^2, D_2^2 в пространстве $V_{\mathfrak{B}_1}(m\varepsilon_1)$ существует восемь собственных векторов:

1) $D_0^2\chi_0 = D_1^2\chi_0 = D_2^2\chi_0 = \frac{1}{2}\{D_1, D_2\}\chi_0 = 0,\ m = 0$;

2) $D_0^2\chi_0 = \frac{1}{2}\{D_1, D_2\}\chi_0 = 0,\ D_1^2\chi_0 = D_2^2\chi_0 = -\chi_0,\ m = 1$;

3) $D_0^2(\chi_1+\chi_{-1}) = D_2^2(\chi_1+\chi_{-1}) = -(\chi_1+\chi_{-1})$, $D_1^2(\chi_1+\chi_{-1})=0$, $\frac{1}{2}\{D_1,D_2\}(\chi_1+\chi_{-1}) = \frac{\mathbf{i}}{2}(\chi_1-\chi_{-1})$, $m=1$;

4) $D_0^2(\chi_1-\chi_{-1}) = D_1^2(\chi_1-\chi_{-1}) = -(\chi_1-\chi_{-1})$, $D_2^2(\chi_1-\chi_{-1})=0$, $\frac{1}{2}\{D_1,D_2\}(\chi_1-\chi_{-1}) = -\frac{\mathbf{i}}{2}(\chi_1+\chi_{-1})$, $m=1$;

5) $D_0^2(\chi_2-\chi_{-2}) = -4(\chi_2-\chi_{-2})$, $D_1^2(\chi_2-\chi_{-2}) = D_2^2(\chi_2-\chi_{-2}) = -(\chi_2-\chi_{-2})$, $\frac{1}{2}\{D_1,D_2\}(\chi_2-\chi_{-2}) = -\sqrt{6}\mathbf{i}\chi_0$, $m=2$;

6) $D_0^2(\chi_1+\chi_{-1}) = D_1^2(\chi_1+\chi_{-1}) = -(\chi_1+\chi_{-1})$, $D_2^2(\chi_1+\chi_{-1}) = -4(\chi_1+\chi_{-1})$, $\frac{1}{2}\{D_1,D_2\}(\chi_1+\chi_{-1}) = \frac{3}{2}\mathbf{i}(\chi_1-\chi_{-1})$, $m=2$;

7) $D_0^2(\chi_1-\chi_{-1}) = D_2^2(\chi_1-\chi_{-1}) = -(\chi_1-\chi_{-1})$, $D_1^2(\chi_1-\chi_{-1}) = -4(\chi_1-\chi_{-1})$, $\frac{1}{2}\{D_1,D_2\}(\chi_1-\chi_{-1}) = -\frac{3}{2}\mathbf{i}(\chi_1+\chi_{-1})$, $m=2$;

8) $D_0^2(\chi_2-\chi_{-2}) = D_1^2(\chi_2-\chi_{-2}) = D_2^2(\chi_2-\chi_{-2}) = -4(\chi_2-\chi_{-2})$, $\frac{1}{2}\{D_1,D_2\}(\chi_2-\chi_{-2}) = -\sqrt{30}\mathbf{i}\chi_0$, $m=3$.

Только первые два вектора являются собственными для оператора $\frac{1}{2}\{D_1,D_2\}$.

Кратности соответствующих собственных значений в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(3),d\mu)$ равны $2m+1$.

8.2.2. Случай $n = 2k-1$

Здесь мы используем обозначения из приложения С.2. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{D}_k$ как подалгебру алгебры $\mathfrak{B}_k$. Это позволяет получить аналог формул (8.7), просто отбрасывая слагаемые F_{k0} и F_{0k}:

$$D_0 = -\mathbf{i}F_{kk},\ D_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}\{F_{-kj}+F_{kj}, F_{k,-j}+F_{-k,-j}\},$$

$$D_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}\{F_{-kj}-F_{kj}, F_{k,-j}-F_{-k,-j}\},$$

$$D_3 = \mathbf{i}\sum_{j=1}^{k-1}(F_{kj}F_{k,-j}-F_{-kj}F_{-k,-j}).$$

Пространство $\mathcal{R}_{\ell,i}$ совпадает с некоторым модулем $V_{\mathfrak{D}_k}(\lambda)$ со старшим весом (C.10), где $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 2, m_1 \in \mathbb{Z}$. Пусть $\widetilde{V}_{\mathfrak{D}_k}(\lambda)$ будет подпространством пространства $V_{\mathfrak{D}_k}(\lambda)$, аннулируемым подалгеброй $\mathfrak{k}_0^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{D}_{k-1}$. Рассуждая как для случая $n = 2k$ выше, получим, что пространство $\widetilde{V}_{\mathfrak{D}_k}(\lambda)$ нетривиально тогда и только тогда, когда

$$\lambda = m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1},\ m_k \geqslant |m_{k-1}|,\ m_k \in \mathbb{Z}_+,\ m_{k-1} \in \mathbb{Z}'_k, \tag{8.17}$$

где $\mathbb{Z}'_k = \mathbb{Z}_+$ для $k \geqslant 3$ и $\mathbb{Z}'_2 = \mathbb{Z}$. В данном случае очевидно, что

$$\dim \widetilde{V}_{\mathfrak{D}_k}(\lambda) = m_k - |m_{k-1}| + 1. \tag{8.18}$$

Будем считать в данном пункте, что условие (8.17) выполнено. Это ведет к следующему разложению

$$\mathcal{L}^2\left(\mathrm{SO}(2k), \mathrm{SO}(2k-2), d\mu\right) = \\ = \bigoplus_{\substack{m_k \geqslant |m_{k-1}|,\\ m_k \in \mathbb{Z}_+,\, m_{k-1} \in \mathbb{Z}'_k}} (m_k - |m_{k-1}| + 1) V_{\mathfrak{D}_k}\left(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1}\right)$$

левого $\mathrm{SO}(2k)$-пространства $\mathcal{L}^2\left(\mathrm{SO}(2k), \mathrm{SO}(2k-2), d\mu\right)$ и к разложению

$$\mathcal{L}^2\left(\mathrm{SO}(2k), \mathrm{SO}(2k-2), d\mu\right) = \\ = \bigoplus_{\substack{m_k \geqslant |m_{k-1}|\\ m_k \in \mathbb{Z}_+,\, m_{k-1} \in \mathbb{Z}'_k}} \left(\dim V_{\mathfrak{D}_k}\left(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1}\right)\right) \times \\ \times \widetilde{V}_{\mathfrak{D}_k}\left(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1}\right), \tag{8.19}$$

того же пространства как $\mathrm{Diff}_{\mathrm{SO}(2k)}(\mathrm{SO}(2k)/\mathrm{SO}(2k-2))$-модуля, где размерность $\dim V_{\mathfrak{D}_k}\left(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1}\right)$ задана формулой (C.8). Пусть теперь

$$D^+ := \sum_{j=1}^{k-1} F_{kj}F_{k,-j},\ D^- := \sum_{j=1}^{k-1} F_{-kj}F_{-k,-j},$$

$$\widetilde{C} := C|_{\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(2k),\mathrm{SO}(2k-2),d\mu)} = F_{kk}^2 + \sum_{j=1}^{k-1}\left(\{F_{kj}, F_{jk}\} + \{F_{k,-j}, F_{-jk}\}\right)$$

— операторы из алгебры $\mathrm{Diff}_{\mathrm{SO}(2k)}\left(\mathrm{SO}(2k), \mathrm{SO}(2k-2), d\mu\right)$, где C — универсальный оператор Казимира (C.11).

Формулы (8.10) и (8.11) переносятся на рассматриваемый случай без изменений, а формула (8.12) принимает вид

$$[D^+, D^-] = -\frac{1}{2}F_{kk}^3 + \frac{1}{2}\widetilde{C}F_{kk} + (k-1)(k-2)F_{kk}$$

и, кроме того,

$$\widetilde{C}\Big|_{\widetilde{V}_{\mathfrak{D}_k}(\lambda)} = \Big((m_k + k - 1)^2 + (m_{k-1} + k - 2)^2 - (k-1)^2 - (k-2)^2\Big)\,\mathrm{id}\,.$$

Из [171] следует[2], что

$$\widetilde{V}_{\mathfrak{D}_k}(\lambda) = V_{-\nu\varepsilon_k} \oplus V_{-(\nu-2)\varepsilon_k} \oplus \ldots \oplus V_{(\nu-2)\varepsilon_k} \oplus V_{\nu\varepsilon_k}, \tag{8.20}$$

где $\nu = m_k - |m_{k-1}|$, все слагаемые являются одномерными весовыми подпространствами относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h}_k \subset \mathfrak{D}_k$ и действие алгебры, порожденной операторами D^+, D^-, в пространстве $\widetilde{V}_{\mathfrak{D}_k}(\lambda)$ неприводимо.

Мы упростим формулы для данного действия в сравнении с работой [171], выбрав иной базис. Следующая лемма доказывается совершенно аналогично лемме 8.1.

Лемма 8.2. *Пусть* $\nu := m_k - |m_{k-1}|$, $L_\nu := (-\nu, -\nu+2, \ldots, \nu-2, \nu)$. *В пространстве* $\widetilde{V}_{\mathfrak{D}_k}(\lambda)$ *существует базис* $(\chi_j)_{j\in L_\nu}$ *такой, что*

$$F_{kk}\chi_j = j\chi_j,\ D^+\chi_j = \frac{1}{4}(j - m_k - |m_{k-1}| - 2k + 4)(j-\nu)\chi_{j+2},$$

$$D^-\chi_j = \frac{1}{4}(j + m_k + |m_{k-1}| + 2k - 4)(j+\nu)\chi_{j-2},$$

где $\chi_j = 0$ *для* $j \notin L_\nu$.

Рассуждая так же, как и в $\mathfrak{B}_k$-случае, получаем следующее предложение.

Предложение 8.5. Для $n = 2k-1$, $k \geqslant 2$ существует четыре серии общих собственных значений операторов D_0^2, D_1, D_2 в пространстве $\widetilde{V}_{\mathfrak{D}_k}(m_k\varepsilon_k + |m_{k-1}|\varepsilon_{k-1})$, $m_k \in \mathbb{Z}_+$, $m_{k-1} \in \mathbb{Z}'_k$:

1) $D_0^2\chi_0 = D_3\chi_0 = 0$, $D_1\chi_0 = D_2\chi_0 = -m_k(m_k + 2k - 3)\chi_0$, $m_k = |m_{k-1}|$;

[2]См. независимое от [171] доказательство в приложении С.4.

2) $D_0^2(\chi_1+\chi_{-1}) = -(\chi_1+\chi_{-1})$, $D_2(\chi_1+\chi_{-1}) = -m_k(m_k+2k-3)(\chi_1+$
$+\chi_{-1})$,
$D_1(\chi_1+\chi_{-1}) = \left(-m_k^2+(5-2k)m_k+2k-4\right)(\chi_1+\chi_{-1})$,
$D_3(\chi_1+\chi_{-1}) = \mathbf{i}\,(m_k+k-2)\,(\chi_1-\chi_{-1})$, $|m_{k-1}| = m_k-1, m_k \in \mathbb{N}$

3) $D_0^2(\chi_1-\chi_{-1}) = -(\chi_1-\chi_{-1})$, $D_1(\chi_1-\chi_{-1}) = -m_k(m_k+2k-3)(\chi_1-$
$-\chi_{-1})$,
$D_2(\chi_1-\chi_{-1}) = \left(-m_k^2+(5-2k)m_k+2k-4\right)(\chi_1-\chi_{-1})$,
$D_3(\chi_1-\chi_{-1}) = -\mathbf{i}\,(m_k+k-2)\,(\chi_1+\chi_{-1})$, $|m_{k-1}| = m_k-1, m_k \in \mathbb{N}$;

4) $D_0^2(\chi_2-\chi_{-2}) = -4(\chi_2-\chi_{-2})$, $D_3(\chi_2-\chi_{-2}) = -4\mathbf{i}\,(m_k+k-2)\,\chi_0$,
$D_1(\chi_2-\chi_{-2}) = D_2(\chi_2-\chi_{-2}) = \left(-m_k^2+(5-2k)m_k+2k-4\right)(\chi_2-$
$-\chi_{-2})$,
$|m_{k-1}| = m_k-2, m_k = 2,3,4,\ldots$

Только первый вектор является собственным для оператора D_3.

Кратности соответствующих собственных значений в пространстве $\mathcal{L}^2\left(\mathrm{SO}(n+1),\mathrm{SO}(n-1),d\mu\right)$ равны $\dim V_{\mathfrak{D}_k}\left(m_k\varepsilon_k+m_{k-1}\varepsilon_{k-1}\right)$ и могут быть явно вычислены по формуле (C.8).

Замечание 8.1. Для $k=2$ значение $m_{k-1}=m_1$ может быть произвольного знака и мы получаем восемь общих собственных векторов, найденных в [74].

Замечание 8.2. Результаты предложений 8.3, 8.4, 8.5 соответствуют предложению 8.2, но более ограничительны. Действительно, если

$$\psi_D \in \mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1),\mathrm{SO}(n-1),d\mu)$$

— общая собственная функция операторов D_0^2, D_1, D_2 и D_3 для $n \geqslant 3$, то $D_0\psi_D = D_3\psi_D = 0$, $D_1\psi_D = D_2\psi_D$. Аналогично, если $\psi_D \in \mathcal{L}^2\left(\mathrm{SO}(3),d\mu\right)$ — общая собственная функция операторов D_0^2, D_1^2, D_2^2 и $\{D_1,D_2\}$, то $D_0\psi_D = \{D_1,D_2\}\psi_D = 0$, $D_1^2\psi_D = D_2^2\psi_D$.

Замечание 8.3. Общие собственные функции из предложений 8.3, 8.4 и 8.5 соответствуют пространству $Q=\mathbf{S}^n$. Для проективных пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ необходимо рассмотреть подпространство пространства $\mathcal{L}^2(\mathrm{SO}(n+1),\mathrm{SO}(n-1),d\mu)$, состоящее из функций, инвариантных относительно оператора $\exp(\pi D_0)$, поскольку он соответствует антиподальному отображению сферы $\mathbf{S}^n$ в себя. Очевидно, что собственные функции оператора D_0 инвариантны относительно $\exp(\pi D_0)$ тогда и только тогда, когда они соответствуют собственным значениям вида $2\mathbf{i}\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Поэтому для пространства $Q=\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ остаются случаи 1,4 предложений 8.3, 8.5 и случаи 1,2,5,8 предложения 8.4.

§ 8.3. Скалярные спектральные уравнения и некоторые энергетические уровни задачи двух тел

Для произвольного двухточечно-однородного компактного пространства из уравнений (5.22)–(5.25) и (8.1) мы получим уравнение для собственной функции $\psi = f(r)$:

$$-\frac{(1+r^2)^2}{8mR^2}f'' - \frac{1+r^2}{8mR^2r}\left(q_1+q_2+(2-q_2)r^2\right)f' + (V(r)-E)f = 0,$$
$$0 < r < \infty, \tag{8.21}$$

где кратности q_1 и q_2 определены в предложении 1.2. В данном параграфе m обозначает приведенную массу (5.19), а целые числа m_k соответствуют старшему весу в неприводимом $\mathfrak{so}(n+1)$-модуле.

Рассмотрим случай $Q = \mathbf{S}^n$. Пусть операторы D'_i, $i = 1,2,3$, такие, как в предложении 8.2, и $D_0^2\psi_D = \delta_0\psi_D$, $D'_i\psi_D = \delta_i\psi_D$, $i = 1,2$.

В соответствии с замечанием 8.2 есть два основных случая:

1) $D'_3\psi_D = 0$, $\delta_0 = 0, \delta_1 = \delta_2$, массы частиц произвольны;

2) $D'_3\psi_D \not\sim \psi_D$, массы частиц одинаковы.

В первом случае

$$(CD'_1 + AD'_2 + 2BD'_3)\,\psi_D = \delta_1(C+A)\psi_D = \frac{(1+r^2)^2}{4mR^2r^2}\delta_1\psi_D,$$

а во втором случае

$$A = \frac{1+r^2}{4mR^2r^2},\ B \equiv 0,\ C = \frac{1+r^2}{4mR^2}.$$

Во всех случаях спектральное уравнение (8.1) принимает вид

$$f'' + \frac{n-1+(3-n)r^2}{(1+r^2)r}f' +$$
$$+\frac{8}{(1+r^2)^2}\left(mR^2(E-V(r)) - \frac{a}{r^2} - b - cr^2\right)f = 0, \tag{8.22}$$
$$a,b,c \geqslant 0,\ 0 < r < \infty.$$

где коэффициенты a, b, c описаны ниже.

Для собственных функций ψ_D из предложения 8.3 ($n = 2k, k = 2,3,\ldots$) имеем

1) $a = c = m_k(m_k + 2k - 2)/8$, $b = 2a$, $m_k \in \mathbb{Z}_+$, массы частиц произвольны;

2) $a = m_k(m_k + 2k - 2)/8$, $b = (m_k^2 + (2k-3)m_k - k + 2)/4$, $c = (m_k^2 + 2(k-2)m_k - 2k + 3)/8$, $m_k \in \mathbb{N}$, массы частиц одинаковы;

3) $a = (m_k^2 + 2(k-2)m_k - 2k + 3)/8$, $b = (m_k^2 + (2k-3)m_k - k + 2)/4$, $c = m_k(m_k + 2k - 2)/8$, $m_k \in \mathbb{N}$, массы частиц одинаковы;

4) $a = c = (m_k^2 + 2(k-2)m_k - 2k + 3)/8$, $b = (m_k^2 + 2(k-2)m_k - 2k + 5)/4$, $m_k = 2, 3, \ldots$, массы частиц одинаковы.

Для собственных функций ψ_D из предложения 8.4 ($n = 2$) получаем следующие значения a, b, c:

1) $a = c = b = 0$, массы частиц произвольны;

2) $a = c = 1/8, b = 1/4$, массы частиц произвольны;

3) $a = 1/8, b = 1/4, c = 0$, массы частиц одинаковы;

4) $a = 0, b = 1/4, c = 1/8$, массы частиц одинаковы;

5) $a = c = 1/8, b = 3/4$, массы частиц одинаковы;

6) $a = 1/2, b = 3/4, c = 1/8$, массы частиц одинаковы;

7) $a = 1/8, b = 3/4, c = 1/2$, массы частиц одинаковы;

8) $a = c = 1/2, b = 3/2$, массы частиц одинаковы.

Наконец, предложение 8.5 соответствует следующим случаям ($n = 2k - 1, k = 2, 3, \ldots$):

1) $a = c = m_k(m_k + 2k - 3)/8$, $b = 2a$, $m_k \in \mathbb{Z}_+$, массы частиц произвольны;

2) $a = m_k(m_k + 2k - 3)/8$, $b = (m_k^2 + (2k-4)m_k - k + \frac{5}{2})/4$, $c = (m_k^2 + (2k-5)m_k - 2k + 4)/8$, $m_k \in \mathbb{N}$, массы частиц одинаковы;

3) $a = (m_k^2 + (2k-5)m_k - 2k + 4)/8$, $b = (m_k^2 + (2k-4)m_k - k + \frac{5}{2})/4$, $c = m_k(m_k + 2k - 3)/8$, $m_k \in \mathbb{N}$, массы частиц одинаковы;

4) $a = c = (m_k^2 + (2k-5)m_k - 2k + 4)/8$, $b = (m_k^2 + (2k-5)m_k - 2k + 6)/4$, $m_k = 2, 3, \ldots$, массы частиц одинаковы.

Уравнения (8.21) и (8.22) можно записать в общем виде:

$$f'' + \frac{q_1 + q_2 + (2 - q_2)r^2}{(1+r^2)r} f' + \\ + \frac{8}{(1+r^2)^2}\left(mR^2(E - V(r)) - \frac{a}{r^2} - b - cr^2\right) f = 0, \qquad (8.23)$$

$$a, b, c \geqslant 0, \ 0 < r < \infty.$$

Мы рассмотрим уравнение (8.23) для кулоновского и осцилляторного потенциалов.

8.3.1. Кулоновский потенциал

Для кулоновского потенциала

$$V_c = \frac{\gamma}{2R}\left(r - \frac{1}{r}\right), \ \gamma > 0, \qquad (8.24)$$

теоремы 2.11 и 5.1 дают самосопряженность *двухчастичного гамильтониана*[3] с областью определения (2.28), где $V_1 = 0$ при $0 < r < 1$ и $V_1 = V_c$ при $1 \leqslant r < \infty$.

Уравнение (8.23) для $V = V_c$ является фуксовым с четырьмя особыми точками $r = 0, \pm\mathbf{i}, \infty$ и соответствующими им критическими показателями:

$$\rho_\pm^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1 - q_1 - q_2 \pm \sqrt{(q_1 + q_2 - 1)^2 + 32a}\right),$$

$$\rho_\pm^{(\infty)} = \frac{1}{2}\left(1 - q_2 \pm \sqrt{(q_2 - 1)^2 + 32c}\right), \qquad (8.25)$$

$$\rho_\pm^{(\mathrm{i})} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q_1 + q_2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}q_1 + q_2\right)^2 + 8\left(mER^2 - \mathbf{i}mR\gamma + a - b + c\right)}\right),$$

$$\rho_\pm^{(-\mathrm{i})} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q_1 + q_2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}q_1 + q_2\right)^2 + 8\left(mER^2 + \mathbf{i}mR\gamma + a - b + c\right)}\right).$$

[3]Этот гамильтониан является оператором Шредингера на пространстве $M = Q \times Q$ с метрикой (5.1).

Те же рассуждения, что и для одночастичной задачи Кулона в § 6.3, приводят к асимптотике $f(r) \sim r^{\rho_+^{(0)}}$ при $r \to +0$. Найдем асимптотику функции $f(r)$ при $r \to +\infty$. Пусть функция ψ_D такая, как в уравнении (8.1). В силу теоремы 5.1 мера $d\nu$ на полупрямой $(0, +\infty) \ni r$ имеет вид

$$\frac{r^{q_1+q_2}dr}{(1+r^2)^{1+\frac{1}{2}q_1+q_2}} \sim \frac{dr}{r^{q_2+2}}, \; r \to +\infty.$$

Пусть $\zeta = 1/r$ — локальная координата вблизи точки $r = +\infty$, тогда $d\nu \sim \zeta^{q_2} d\zeta$ при $\zeta \to 0$ и асимптотика $\sim \zeta^{1-q_2}$ соответствует решению уравнения

$$\triangle\varphi = \mathrm{const} \cdot \delta(\zeta), \; \mathrm{const} \neq 0.$$

Из неравенства $\rho_-^{(\infty)} \leqslant 1 - q_2$ следует, что если $f(r) \sim r^{-\rho_-^{(\infty)}}$ при $r \to +\infty$, то $H(f(r)\psi_D) \notin \mathcal{L}^2(Q \times Q, d\mu_2)$, где μ_2 — мера на $Q \times Q$, соответствующая метрике (5.1). Отсюда $f(r) \sim r^{-\rho_+^{(\infty)}}$ при $r \to +\infty$ (отметим, что $\rho_+^{(\infty)} \geqslant 0$).

Рассмотрим задачу сведения уравнения (8.23) с потенциалом (8.24) к гипергеометрическому уравнению посредством редукции (8.23) к уравнению Гойна преобразованиями (B.3), (B.4), а затем применяя теорему B.1.

Особые точки уравнения (8.23) образуют гармоническую четверку (см. приложение B). Поэтому мы можем использовать только первый случай теоремы B.1. Переместим особые точки $(0, \pm\mathbf{i}, \infty)$ уравнения (8.23) в четверку $(0, 1, 2, \infty)$ дробно-линейным преобразованием $t = \mu(r)$ независимой переменной.

Поскольку такое преобразование сохраняет порядок особых точек на окружности или прямой, то имеются только две возможности. Первая из них соответствует отображению неупорядоченной пары точек $(\pm\mathbf{i})$ в неупорядоченную пару $(0, 2)$. Вторая возможность соответствует отображению неупорядоченной пары $(0, \infty)$ в неупорядоченную пару $(0, 2)$.

После такой замены независимой переменной можно свести преобразованное уравнение к уравнению Гойна подстановкой вида (B.4). Одним из условий в первом случае теоремы B.1 является равенство критических показателей в точках 0 и 2. В терминах критических показателей (8.25) это означает, что либо $|\rho_+^{(\mathbf{i})} - \rho_-^{(\mathbf{i})}| = |\rho_+^{(-\mathbf{i})} - \rho_-^{(-\mathbf{i})}|$, либо $|\rho_+^{(0)} - \rho_-^{(0)}| = |\rho_+^{(\infty)} - \rho_-^{(\infty)}|$. Первая из этих возможностей не может реализоваться для ненулевых значений γ. Поэтому, не уменьшая

общности, можно положить

$$t = \mu(r) := \frac{2r}{r+\mathbf{i}}, \quad \mu\colon (-\mathbf{i}, 0, \mathbf{i}, \infty) \to (\infty, 0, 1, 2).$$

Это отображение переводит уравнение (8.23) с потенциалом (8.24) в уравнение

$$f_{tt}(t) + \mathcal{A}(t) f_t(t) - \mathcal{B}(t) f(t) = 0, \ |t-1| = 1, \operatorname{Im} t < 0, \tag{8.26}$$

где

$$\mathcal{A}(t) = \frac{(q_1 + 2q_2 + 2)t^2 - 4(q_1 + q_2 + 1)t + 4(q_1 + q_2)}{2t(t-1)(t-2)},$$

$$\mathcal{B}(t) = 2\frac{m\,)ER^2t^2(t-2)^2 + R\gamma\mathbf{i}t(t-2)(t^2-2t+2)(\,+a(t-2)^4 - bt^2(t-2)^2 + ct^4}{t^2(t-1)^2(t-2)^2}.$$

Подстановка

$$f(t) = t^{\rho_+^{(0)}}(t-1)^{\rho_+^{(\mathbf{i})}}(t-2)^{\rho_+^{(\infty)}} w(t)$$

сводит (8.26) к уравнению Гойна (B.14) с параметром γ' вместо γ, где

$$\alpha = \rho_+^{(0)} + \rho_+^{(\mathbf{i})} + \rho_+^{(\infty)} + \rho_+^{(-\mathbf{i})}, \ \beta = \rho_+^{(0)} + \rho_+^{(\mathbf{i})} + \rho_+^{(\infty)} + \rho_-^{(-\mathbf{i})}, \ d = 2,$$
$$\gamma' = 1 - \rho_-^{(0)} + \rho_+^{(0)}, \ \delta = 1 - \rho_-^{(\mathbf{i})} + \rho_+^{(\mathbf{i})}, \ \varepsilon = 1 - \rho_-^{(\infty)} + \rho_+^{(\infty)}.$$

Выражение $t^{\rho_+^{(0)}}(t-1)^{\rho_+^{(\mathbf{i})}}(t-2)^{\rho_+^{(\infty)}}$ означает здесь функцию, голоморфную на $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 2]$ и вещественную при вещественных $t > 2$. Ограничения на асимптотики функции f вблизи точек $r = 0, \infty$ эквивалентны ограниченности функции $w(t)$ вблизи точек $t = 0, 2$.

Акцессорный параметр q можно вычислить по очевидной формуле

$$q = -2\lim_{t\to 0} t\left(-\mathcal{B}(t) + \left(\frac{\rho_+^{(0)}}{t} + \frac{\rho_+^{(\mathbf{i})}}{t-1} + \frac{\rho_+^{(\infty)}}{t-2}\right)\mathcal{A}(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{\rho_+^{(0)}(\rho_+^{(0)}-1)}{t^2} + \frac{2\rho_+^{(0)}\rho_+^{(\mathbf{i})}}{t(t-1)} + \frac{2\rho_+^{(0)}\rho_+^{(\infty)}}{t(t-2)}\right) =$$
$$= 4\rho_+^{(0)}\rho_+^{(\mathbf{i})} + 2\rho_+^{(0)}\rho_+^{(\infty)} - (q_1 + q_2 - 2)\rho_+^{(0)} + (q_1 + q_2)(2\rho_+^{(\mathbf{i})} + \rho_+^{(\infty)}) -$$
$$- 4mR\gamma\mathbf{i} + 16a. \tag{8.27}$$

Из теоремы В.1 следует, что данное уравнение Гойна можно преобразовать в гипергеометрическое рациональной заменой независимой переменной $t \to z$: $z = P(t)$, где P — рациональная функция тогда и только тогда, когда справедливы условия

$$\gamma' = \varepsilon, \tag{8.28}$$

$$\alpha\beta - q = 0. \tag{8.29}$$

Условие (8.28) можно переписать в виде

$$(q_1 + q_2 - 1)^2 + 32a = (q_2 - 1)^2 + 32c$$

или в виде

$$16(c - a) = q_1(\tfrac{1}{2}q_1 + q_2 - 1). \tag{8.30}$$

Используя равенства

$$\alpha = \rho_+^{(0)} + \rho_+^{(\mathrm{i})} + \rho_+^{(\infty)} +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q_1 + q_2 + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q_1 + q_2\right)^2 + 8\left(mER^2 + \mathrm{i}mR\gamma + a - b + c\right)}\right),$$

$$\beta = \rho_+^{(0)} + \rho_+^{(\mathrm{i})} + \rho_+^{(\infty)} +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q_1 + q_2 - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q_1 + q_2\right)^2 + 8\left(mER^2 + \mathrm{i}mR\gamma + a - b + c\right)}\right),$$

уравнение (8.29) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\left(\rho_+^{(0)} + \rho_+^{(\mathrm{i})} + \rho_+^{(\infty)} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}q_1 + q_2)\right)^2 - \\
&- \frac{1}{4}\left((\frac{1}{2}q_1 + q_2)^2 + 8\left(mER^2 + \mathrm{i}mR\gamma + a - b + c\right)\right) - \\
&- 4\rho_+^{(0)}\rho_+^{(\mathrm{i})} - 2\rho_+^{(0)}\rho_+^{(\infty)} + (q_1 + q_2 - 2)\rho_+^{(0)} - \\
&- (q_1 + q_2)(2\rho_+^{(\mathrm{i})} + \rho_+^{(\infty)}) + 4mR\gamma\mathrm{i} - 16a = \\
&= \left(\rho_+^{(0)}\right)^2 + \left(\rho_+^{(\mathrm{i})}\right)^2 + \left(\rho_+^{(\infty)}\right)^2 + 2\rho_+^{(\mathrm{i})}\left(\rho_+^{(\infty)} - \rho_+^{(0)}\right) + \\
&+ \left(\frac{3}{2}q_1 + 2q_2 - 2\right)\rho_+^{(0)} - \left(\frac{3}{2}q_1 + q_2\right)\rho_+^{(\mathrm{i})} - \\
&- \frac{1}{2}q_1\rho_+^{(\infty)} + 2mR\gamma\mathrm{i} - 2mER^2 - 18a + 2b - 2c = 0.
\end{aligned} \tag{8.31}$$

Исключая квадраты величин $\rho_+^{(0)}$, $\rho_+^{(\mathbf{i})}$, $\rho_+^{(\infty)}$ из (8.31) с помощью очевидных уравнений

$$\left(\rho_+^{(0)}\right)^2 + (q_1 + q_2 - 1)\rho_+^{(0)} - 8a = 0,$$

$$\left(\rho_+^{(\mathbf{i})}\right)^2 - (\tfrac{1}{2}q_1 + q_2)\rho_+^{(\mathbf{i})} - 2mR\,(RE - \gamma\mathbf{i}) - 2(a - b + c) = 0,$$

$$\left(\rho_+^{(\infty)}\right)^2 + (q_2 - 1)\rho_+^{(\infty)} - 8c = 0$$

для критических показателей, приходим к условию

$$\left(2\rho_+^{(\mathbf{i})} - \frac{1}{2}q_1 - q_2 + 1\right)\left(\rho_+^{(\infty)} - \rho_+^{(0)}\right) - q_1\rho_+^{(\mathbf{i})} + 8(c - a) = 0. \qquad (8.32)$$

Из условия (8.28) следует, что $\rho_+^{(\infty)} - \rho_+^{(0)} = \frac{1}{2}q_1$, и поэтому равенство (8.32) ведет, в предположении справедливости условия (8.28), к равенству

$$\frac{1}{2}q_1\left(1 - q_2 - \frac{1}{2}q_1\right) + 8(c - a) = 0,$$

которое эквивалентно (8.30) и, таким образом, самому условию (8.28).

Итак, мы пришли к выводу, что условие (8.29) *является следствием условия* (8.28). Условие (8.28) справедливо, в частности, в случае $q_1 = 0$, $a = c$, когда $\rho_\pm^{(0)} = \rho_\pm^{(\infty)}$. Этот случай соответствует вещественным сферам $\mathbf{S}^n$ и проективным пространствам $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ с $q_2 = n - 1$, т.е. случаям 1, 4 предложений 8.3, 8.5 и случаям 1,2,5,8 предложения 8.4.[4]

С этого момента до конца данного пункта будем предполагать, что условие (8.28) выполнено.

Из первого случая теоремы B.1 следует, что функция w новой независимой переменной[5]

$$z := 1 - (t - 1)^2 = t(2 - t) \qquad (8.33)$$

удовлетворяет гипергеометрическому уравнению:

$$z(1 - z)w''(z) + (\widetilde{\gamma} - (\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} + 1)z)w'(z) - \widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}w(z) = 0 \qquad (8.34)$$

[4]Проективные пространства $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ лежат за рамками данной задачи, поскольку потенциал (8.24) не проектируется с пространства $\mathbf{S}^n$ на пространство $\mathbf{P}^n(\mathbb{R}) \cong \mathbf{S}^n/\mathbb{Z}_2$.

[5]Переменная z соответствует переменной z в (6.46).

с P-символом

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \widetilde{\alpha} & ;z \\ 1-\widetilde{\gamma} & \widetilde{\gamma}-\widetilde{\alpha}-\widetilde{\beta} & \widetilde{\beta} & \end{matrix}\right\}.$$

Соответствие между критическими показателями гипергеометрического уравнения и уравнения Гойна, связанных заменой (8.33), ведет к равенствам

$$\widetilde{\alpha}=\frac{1}{2}\alpha,\ \widetilde{\beta}=\frac{1}{2}\beta,\ \widetilde{\gamma}=\gamma'.$$

В силу

$$z-1=-\left(\frac{r-i}{r+i}\right)^2,$$

полупрямая $[0,\infty]$ на r-плоскости отображается в окружность на z-плоскости, определенную уравнением $|z-1|=1$, причем точки $r=0,\infty$ соответствуют точке $z=0$. Таким образом, мы получили, с точностью до обозначений,[6] условия на функцию $w(z)$, как в п. 6.3.2.

Действительно, имеем

$$\widetilde{\gamma}=1+\sqrt{(q_2-1)^2+32a}\in\mathbb{R},\ 1-\widetilde{\gamma}\leqslant 0,$$

$$\widetilde{\alpha}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(q_2-1)^2+32a}+\frac{1}{4}(s+\overline{s})\in\mathbb{R},$$

$$\widetilde{\beta}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(q_2-1)^2+32a}+\frac{1}{4}(-s+\overline{s})\notin\mathbb{R},$$

где $s:=\sqrt{\left(\frac{1}{2}q_1+q_2\right)^2+8\left(mER^2+\mathrm{i}mR\gamma+2a-b\right)}$.

Следовательно, аналогично рассуждению для задачи Кулона из п. 6.3.2 мы приходим к одному из двух следующих равенств: $\widetilde{\alpha}=-k+1$, $k\in\mathbb{N}$ или $\widetilde{\gamma}-\widetilde{\alpha}=-k+1$, $k\in\mathbb{N}$. Не теряя общности, положим $\operatorname{Re}s<0$. В этом случае второе равенство невозможно, а первое дает

$$s=1-2k-\sqrt{(q_2-1)^2+32a}+\frac{4\mathrm{i}mR\gamma}{1-2k-\sqrt{(q_2-1)^2+32a}}.$$

Окончательно, с учетом определения s, получаем энергетические уровни в виде

$$E_k=\frac{1}{8mR^2}\Bigg(2(2k-1)\sqrt{(q_2-1)^2+32a}+4k^2-4k+2-\frac{1}{2}q_1q_2-$$

[6] В частности, $\widetilde{\alpha}$ вместо α и $\widetilde{\beta}$ вместо β.

$$-\frac{1}{2}q_1 - 2q_2 + 16a + 8b\Big) - \frac{2m\gamma^2}{\left(\sqrt{(q_2-1)^2+32a}+2k-1\right)^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В частности, для вещественных сфер $\mathbf{S}^n$ в случае $q_1 = 0$, $q_2 = n-1$, $a = c$, который соответствует случаям 1,4 предложений 8.3, 8.5 и случаям 1,2,5,8 предложения 8.4, получаем

$$E_k = \frac{1}{mR^2}\left(\frac{1}{2}(k^2-k+1) - \frac{n}{4} + 2a + b + \frac{2k-1}{4}\sqrt{(n-2)^2+32a}\right) -$$
$$- \frac{2m\gamma^2}{\left(\sqrt{(n-2)^2+32a}+2k-1\right)^2}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Учитывая все преобразования, проведенные при сведении уравнения (8.23) к гипергеометрическому уравнению, получим следующее выражение для соответствующей радиальной части собственной функции (с точностью до произвольного ненулевого множителя):

$$f_k(r) = \frac{r^{\rho_+^{(0)}}(r-\mathbf{i})^{\rho_+^{(\mathbf{i})}}}{(r+\mathbf{i})^{\rho_+^{(0)}+\rho_+^{(\mathbf{i})}+\rho_+^{(\infty)}}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!(k-j-1)!} \frac{(\widetilde{\beta})_j}{(\widetilde{\gamma})_j} \frac{(4r\mathbf{i})^j}{(r+\mathbf{i})^{2j}},$$

где $\rho_+^{(0)}$, $\rho_+^{(\mathbf{i})}$, $\rho_+^{(\infty)}$, $\widetilde{\beta}$, и $\widetilde{\gamma}$ заданы формулами выше при $E = E_k$.

8.3.2. Осцилляторный потенциал

Для осцилляторного потенциала

$$V_o = \frac{2R^2\omega^2 r^2}{(1-r^2)^2}$$

определим самосопряженный двухчастичный гамильтониан в соответствии с теоремой 2.12, где пространство $M' \subset M = Q \times Q$ определяется неравенством $\rho_2 < \frac{1}{2}\pi R$ (или эквивалентным неравенством $r = \operatorname{tg}\frac{\rho}{2R} < 1$), а ρ_2 — расстояние между частицами. Область определения этого оператора задана в (2.32).

Уравнение (8.23) для данного потенциала является фуксовым уравнением с шестью особыми точками $0, \pm 1, \pm \mathbf{i}, \infty$ и соответствующими критическими показателями:

$$\rho_{\pm}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1 - q_1 - q_2 \pm \sqrt{(q_1 + q_2 - 1)^2 + 32a}\right),$$

$$\rho_{\pm}^{(\infty)} = \frac{1}{2}\left(1 - q_2 \pm \sqrt{(q_2 - 1)^2 + 32c}\right),$$

$$\rho_{\pm}^{(\mathbf{i})} = \rho_{\pm}^{(-\mathbf{i})} = \frac{1}{4}q_1 + \frac{1}{2}q_2 \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}q_1 + q_2\right)^2 + 8mER^2 + 4mR^4\omega^2 + 8(a - b + c)},$$

$$\rho_{\pm}^{(1)} = \rho_{\pm}^{(-1)} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4R^4 m\omega^2}\right).$$

Аналогично предыдущему пункту функция $f(r)$, $r \in (0, 1)$ должна быть $\sim r^{\rho_+^{(0)}}$ при $r \to +0$, и рассуждения для одночастичной задачи с осцилляторным потенциалом из п. 6.3.2 дают $f \sim r^{\rho_+^{(1)}}$ при $r \to 1 - 0$.

К счастью, точки $r = \pm 1$, так же как и точки $r = \pm \mathbf{i}$, можно отождествить заменой независимой переменной $r \to \zeta$, $\zeta = r^2$, которая сохраняет фуксов тип рассматриваемого уравнения, приводя его к уравнению с четырьмя особыми точками:

$$f_{\zeta\zeta} + \frac{1 + q_1 + q_2 + (3 - q_2)\zeta}{2\zeta(\zeta + 1)} f_{\zeta} + \\ + \frac{2}{\zeta(\zeta + 1)^2}\left(mR^2\left(E - \frac{2R^2\omega^2\zeta}{(\zeta - 1)^2}\right) - \frac{a}{\zeta} - b - c\zeta\right) f = 0. \tag{8.35}$$

Особые точки $-1, 0, 1, \infty$ данного уравнения образуют гармоническую четверку и соответствуют критическим показателям:

$$\rho_{\pm}^{(\mathbf{i})},\ \frac{1}{2}\rho_{\pm}^{(0)},\ \rho_{\pm}^{(1)},\ \frac{1}{2}\rho_{\pm}^{(\infty)}.$$

Те же рассуждения, что и для кулоновского потенциала, позволяют заключить, что единственная возможность преобразования уравнения (8.35) к гипергеометрическому уравнению посредством преобразований (B.3), (B.4) с последующим применением теоремы B.1 соответствует преобразованию неупорядоченной пары точек $(0, \infty)$ некоторым преобразованием Мёбиуса в неупорядоченную пару $(0, 2)$.

Не теряя общности, рассмотрим подстановку

$$t = \mu(\zeta) = \frac{2\zeta}{\zeta + 1}, \qquad (8.36)$$
$$\mu\colon (-1, 0, 1, \infty) \to (\infty, 0, 1, 2).$$

Рассматриваемый интервал для независимой переменной t есть опять $(0, 1)$. Подстановка (8.36) переводит уравнение (8.35) в уравнение (8.26) с коэффициентами

$$\mathcal{A}(t) = \frac{(q_1 + 2q_2 + 2)t - 2(q_1 + q_2 + 1)}{2t(t-2)},$$

$$\mathcal{B}(t) = \frac{2}{t(t-2)}\left(mR^2\left(E + \frac{R^2\omega^2 t(t-2)}{2(t-1)^2}\right) - \frac{2a}{t} + a - b + \frac{ct}{t-2}\right).$$

Определим функцию $w(t)$ равенством

$$w(t) = t^{-\frac{1}{2}\rho_+^{(0)}}(t-1)^{-\rho_+^{(1)}}(t-2)^{-\frac{1}{2}\rho_+^{(\infty)}} f(t).$$

Она удовлетворяет уравнению Гойна (B.14), где

$$\alpha = \frac{1}{2}\rho_+^{(0)} + \rho_+^{(1)} + \frac{1}{2}\rho_+^{(\infty)} + \rho_+^{(\mathrm{i})},\ \beta = \frac{1}{2}\rho_+^{(0)} + \rho_+^{(1)} + \frac{1}{2}\rho_+^{(\infty)} + \rho_-^{(\mathrm{i})},\ d = 2,$$
$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\left(\rho_+^{(0)} - \rho_-^{(0)}\right),\ \delta = 1 + \rho_+^{(1)} - \rho_-^{(1)},\ \varepsilon = 1 + \frac{1}{2}\left(\rho_+^{(\infty)} - \rho_-^{(\infty)}\right).$$

Здесь выражение $t^{-\frac{1}{2}\rho_+^{(0)}}(t-1)^{-\rho_+^{(1)}}(t-2)^{-\frac{1}{2}\rho_+^{(\infty)}}$ обозначает функцию, голоморфную в области $\mathbb{C}\setminus((-\infty, 0] \cup [1, +\infty))$ и вещественную при вещественных $t \in (0, 1)$. Ограничения на асимптотики функции $f(r)$ вблизи точек $r = 0, 1$ эквивалентны ограниченности функции $w(t)$ вблизи точек $t = 0, 1$.

Вычисления, аналогичные (8.27), приводят к следующему значению акцессорного параметра q для уравнения (B.14):

$$q = -2mR^2E + 2b + (q_1 + q_2 + 1)\left(\rho_+^{(1)} + \frac{1}{4}\rho_+^{(\infty)}\right) +$$
$$+ 2\rho_+^{(0)}\rho_+^{(1)} + \frac{1}{2}\rho_+^{(0)}\rho_+^{(\infty)} + \frac{1}{4}(q_2 + 1)\rho_+^{(0)}.$$

Условие (8.28) теоремы B.1 снова эквивалентно соотношению (8.30). Условие (8.29) той же теоремы можно записать в виде

$$\alpha\beta - q = \rho_+^{(1)}\left(\rho_+^{(\infty)} - \rho_+^{(0)} - \frac{1}{2}q_1\right) = 0,$$

что опять является следствием (8.28).

Предположим до конца данного пункта справедливость соотношения (8.28). Тогда выполнены условия первого случая теоремы B.1, и заменой независимой переменной t по формуле (8.33) мы получаем гипергеометрическое уравнение (8.34) с

$$\widetilde{\alpha} = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{(q_2-1)^2 + 32a} + \sqrt{1 + 4R^4 m\omega^2} + s\right),$$

$$\widetilde{\beta} = \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{(q_2-1)^2 + 32a} + \sqrt{1 + 4R^4 m\omega^2} - s\right),$$

$$\widetilde{\gamma} = \gamma = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{(q_2-1)^2 + 32a},$$

где $s = \sqrt{(\frac{1}{2}q_1 + q_2)^2 + 8mER^2 + 4mR^4\omega^2 + 16a - 8b}$. При этом интервал $(0,1) \ni t$ переходит в интервал $(0,1) \ni z$, поэтому ограничение на асимптотику функции $f(t)$ вблизи точки $t = 0$ приводит к равенству

$$w(z) = F(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}; \widetilde{\gamma}; z).$$

Кроме того, в силу неравенства

$$\widetilde{\gamma} - \widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta} = -\frac{1}{2}\sqrt{1 + 4R^4 m\omega^2} < 0, \ \operatorname{Re}\widetilde{\alpha} > 0$$

и формулы (B.10), ограничение на асимптотику функции $f(t)$ вблизи точки $t = 1$ дает

$$\widetilde{\beta} = -k, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Отсюда получаем формулу для энергетических уровней

$$E_k = \frac{1}{8mR^2}\left(\left(4k + 2 + \sqrt{(q_2-1)^2 + 32a}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}q_1 q_2 - q_2^2 - \frac{1}{2}q_1 - 16a + 8b + 1\right) +$$

$$+ \frac{\omega}{2\sqrt{m}}\left(4k + 2 + \sqrt{(q_2-1)^2 + 32a}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{4R^4 m^2}}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

В частности, для вещественных сфер $\mathbf{S}^n$ и проективных пространств $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ в случае $q_1 = 0$, $q_2 = n-1$, $a = c$, который соответствует случаям 1, 4 предложений 8.3, 8.5 и случаям 1, 2, 5, 8 предложения 8.4, получаем

$$E_k = \frac{1}{8mR^2}\left(\left(4k+2+\sqrt{(n-2)^2+32a}\right)^2 - (n-1)^2 - 16a + 8b + 1\right) +$$
$$+ \frac{\omega}{2\sqrt{m}}\left(4k+2+\sqrt{(n-2)^2+32a}\right)\sqrt{1+\frac{1}{4R^4m^2}},\ k = 0,1,2,\ldots$$

Выражение для соответствующей радиальной части собственной функции (с точностью до произвольного ненулевого множителя) есть

$$f_k(r) = \frac{r^{\rho_+^{(0)}}(r^2-1)^{\rho_+^{(1)}}}{(r^2+1)^{\frac{1}{2}\rho_+^{(0)}+\rho_+^{(1)}+\frac{1}{2}\rho_+^{(\infty)}}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!(k-j)!}\frac{(\widetilde{\alpha})_j}{(\widetilde{\gamma})_j}\frac{4^j r^{2j}}{(r^2+1)^{2j}},$$

где $\rho_+^{(0)}$, $\rho_+^{(1)}$, $\rho_+^{(\infty)}$, $\widetilde{\alpha}$, а $\widetilde{\gamma}$ задано формулами выше при $E = E_k$.

§ 8.4. Проблема дискретного спектра на некомпактных пространствах

Подход данной главы к вычислению некоторых серий энергетических уровней для задачи двух тел на компактных двухточечно-однородных пространствах не распространяется на некомпактные двухточечно-однородные пространства, поскольку у некомпактных простых некоммутативных групп Ли отсутствуют конечномерные унитарные представления.

Гипотеза 8.1. *Для задачи двух тел с центральным потенциалом на некомпактных двухточечно-однородных пространствах дискретный спектр отсутствует.*

В качестве косвенного подтверждения мы покажем, что в евклидовом пространстве двухчастичный гамильтониан с центральным потенциалом не имеет дискретного спектра до отделения центра масс. Этот факт обычно не отмечается в учебниках по квантовой механике. Действительно, двухчастичный гамильтониан в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ можно

представить в виде [51]:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_r + \widehat{H}_c, \quad \widehat{H}_r = -\frac{1}{2m}\triangle_r + U, \quad \widehat{H}_c = -\frac{1}{2m}\triangle_c,$$

где $\triangle_r$ — лапласиан, отвечающий относительному движению частиц, а $\triangle_c$ — лапласиан, отвечающий движению центра масс. Разлагая пространство состояний в соответствующее тензорное произведение: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_c$ и применяя спектральную теорему [66] к коммутирующим операторам: $\widehat{H}_r$ на пространстве $\mathcal{H}_r$ и $\widehat{H}_c$ на пространстве $\mathcal{H}_c$, мы получаем унитарно-эквивалентные данным операторы умножения на измеримые функции: f_r на пространстве $\mathcal{L}^2(M_r, d\mu_r)$ и f_c на пространстве $\mathcal{L}^2(M_c, d\mu_c)$, где $\mu_r(M_r) < \infty$, $\mu_c(M_c) < \infty$. Поэтому оператор $\widehat{H}$ унитарно-эквивалентен оператору умножения на функцию $f_r + f_c$, действующему в пространстве $\mathcal{L}^2(M_r \times M_c, d\mu_r \times d\mu_c)$.

Собственные значения операторов умножения можно описать следующим образом. Пусть M — измеримое множество с мерой μ такое, что $\mu(M) < \infty$, f — измеримая комплекснозначная функция на M, а H_f — оператор умножения

$$H_f\psi = f\psi, \text{ где } \psi \in \mathrm{Dom}(H_f) := \left(\varphi \in \mathcal{L}^2(M, d\mu) \middle| \int_M |f\varphi|^2 d\mu < \infty\right).$$

Комплексное число λ является собственным значением для H_f, если и только если $\mu\left(f^{-1}(\lambda)\right) > 0$. Соответствующая ему собственная функция есть характеристическая функция множества $f^{-1}(\lambda)$, с точностью до ненулевого множителя.

Поскольку спектр оператора $\widehat{H}_c$, соответствующего свободному движению, является чисто непрерывным, то $\mu_c\left(f_c^{-1}(\lambda)\right) = 0$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}$. Необходимо доказать, что

$$(\mu_r \times \mu_c)(\Sigma_\lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

где

$$\Sigma_\lambda := ((x, y) \in M_r \times M_c \,|\, f_r(x) + f_c(y) = \lambda).$$

Пусть χ_λ — характеристическая функция множества Σ_λ. Поскольку меры множеств M_r и M_c конечны, то теорема Фубини [66], примененная к функции χ_λ, дает

$$(\mu_r \times \mu_c)(\Sigma_\lambda) = \int\limits_{M_r \times M_c} \chi_\lambda \, d\mu_r(x) \times d\mu_c(y) = \int\limits_{M_r}\int\limits_{M_c} \chi_\lambda d\mu_c(y)\, d\mu_r(x) =$$

$$= \int\limits_{M_r} \mu_c(f_c^{-1}(\lambda - f_r(x)))d\mu_r(x) = \int\limits_{M_r} 0 \cdot d\mu_r(x) = 0.$$

Тем самым оператор $\widehat{H}$ не имеет собственных значений. Поэтому на некомпактном двухточечно-однородном пространстве у двухчастичного гамильтониана с неразделяющимися переменными так же естественно ожидать отсутствия собственных значений.

Приложение А

Вычисление коммутационных соотношений для алгебр инвариантных дифференциальных операторов

В этом приложении мы проиллюстрируем основные приемы вычисления коммутационных соотношений из главы 3. Мы получим некоторые соотношения, требующие минимальных вычислений.

Для элементов A, B, C произвольной ассоциативной алгебры нетрудно получить следующие тождества:

$$[A, \{B, C\}] = \{[A, B], C\} + \{B, [A, C]\}, \tag{A.1}$$

$$\{\{A, B\}, C\} - \{A, \{B, C\}\} = [B, [A, C]], \tag{A.2}$$

$$\{\{A, B\}, C\} = 2\{B, C\}A + \{[A, B], C\} + \{[A, C], B\} + [B, [A, C]]. \tag{A.3}$$

Начнем с коммутационных соотношений (3.15) из п. 3.2.2. Пусть операторы $D_0, \ldots, D_{10}$ определены как в п. 3.2.1. Рассмотрим вначале коммутатор $[D_1, D_4]$. Если $C = B$, то из (A.1) следует $[A, B^2] = \{[A, B], B\}$. Это дает:

$$[D_1, D_4] = \{[D_1, \Upsilon_{12}], \Upsilon_{12}\} + \{[D_1, \Omega_{12}], \Omega_{12}\} + \{[D_1, \Theta_{12}], \Theta_{12}\}.$$

Снова используя (1.12) и (A.1), получаем

$$[D_1, \Upsilon_{12}] = \Box_1,\ [D_1, \Omega_{12}] = \Box_2,\ [D_1, \Theta_{12}] = \Box_3.$$

Таким образом:

$$[D_1, D_4] = \{\Box_1, \Upsilon_{12}\} + \{\Box_2, \Omega_{12}\} + \{\Box_3, \Theta_{12}\} = 2D_7. \tag{A.4}$$

Переставляя координаты z_1 и z_2 (или эквивалентно применяя автоморфизм $\sigma \circ \zeta_\pi$, см. п. 3.2.1), получаем с учетом (А.4):

$$[D_2, D_4] = -2D_7.$$

Предположим теперь, что нам уже известны выражения для коммутаторов

$[D_0, D_1]$, $[D_0, D_3]$, $[D_0, D_7]$, $[D_1, D_2]$, $[D_1, D_4]$, $[D_1, D_5]$, $[D_1, D_6]$, $[D_1, D_7]$, $[D_1, D_8]$, $[D_2, D_6]$, $[D_3, D_4]$, $[D_3, D_6]$, $[D_4, D_5]$, $[D_4, D_6]$, $[D_4, D_8]$

из (3.15).

Тогда из тождества Якоби и (А.1) получаем:

$$\begin{aligned}
0 &= [D_1, [D_8, D_4]] + [D_4, [D_1, D_8]] + [D_8, [D_4, D_1]] = \\
&= [D_1, \tfrac{1}{2}\{D_2 - D_1, D_6\} + \{D_0, D_7\}] + \\
&+ [D_4, n(n-1)D_6 - \tfrac{1}{2}\{D_3, D_5\} + \tfrac{3}{4}D_3 - \\
&- \tfrac{1}{2}\{D_1, D_6\}] - 2[D_8, D_7] = \tfrac{1}{2}\{[D_1, D_2], D_6\} - \\
&- \tfrac{1}{2}\{D_1 - D_2, [D_1, D_6]\} + \\
&+ \{[D_1, D_0], D_7\} + \{D_0, [D_1, D_7]\} + n(n-1)[D_4, D_6] - \\
&- \tfrac{1}{2}\{[D_4, D_3], D_5\} - \tfrac{1}{2}\{D_3, [D_4, D_5]\} + \tfrac{3}{4}[D_4, D_3] - \\
&- \tfrac{1}{2}\{D_1, [D_4, D_6]\} - 2[D_8, D_7] - \\
&- \tfrac{1}{2}\{[D_4, D_1], D_6\} = -\tfrac{1}{2}\{\{D_3, D_0\}, D_6\} - \{D_4, D_6\} + \\
&+ \tfrac{1}{2}\{D_2 - D_1, D_8\} + \{D_3, D_7\} + \\
&+ \{D_0, n(n-1)D_4 - \tfrac{1}{2}\{D_3, D_6\} - \tfrac{1}{2}\{D_1, D_4\} + \\
&+ \tfrac{3}{8}(D_1 - D_2) + D_9 + D_{10}\} - \\
&- n(n-1)\{D_0, D_4\} + \tfrac{3}{2}n(n-1)D_0 + \{D_3, \{D_6, D_0\}\} + \\
&+ \tfrac{1}{2}\{D_1, \{D_0, D_4\}\} - \tfrac{3}{4}\{D_1, D_0\} +
\end{aligned}$$

$$+\{D_7, D_6\} - 2[D_8, D_7] = \frac{1}{2}\{D_2 - D_1, D_8\} + \{D_3, D_7\} +$$
$$+\frac{3}{8}\{D_0, D_1 - D_2\} + \{D_0, D_9 + D_{10}\} + \frac{3}{2}n(n-1)D_0 -$$
$$-\frac{3}{4}\{D_0, D_1\} - 2[D_8, D_7].$$

В последнем равенстве мы учли формулу

$$\{\{D_6, D_0\}, D_3\} - \{D_6, \{D_0, D_3\}\} + \{\{D_0, D_6\}, D_3\} -$$
$$-\{D_0, \{D_6, D_3\}\} = [D_0, [D_6, D_3]] +$$
$$+[D_6, [D_0, D_3]] = -[D_0, D_7] - \frac{1}{2}[D_6, D_2 - D_1] = D_8 + \frac{1}{2}(-D_8 - D_8) = 0,$$
$$\{\{D_0, D_4\}, D_1\} - \{D_0, \{D_4, D_1\}\} = [D_4, [D_0, D_1]] = [D_4, D_3] = 0,$$

являющуюся следствием (A.2).

В результате получаем:

$$[D_7, D_8] = \frac{1}{4}\{D_1 - D_2, D_8\} - \frac{1}{2}\{D_3, D_7\} +$$
$$+\frac{3}{16}\{D_0, D_1 + D_2\} - \frac{1}{2}\{D_0, D_9 + D_{10}\} -$$
$$-\frac{3}{4}n(n-1)D_0.$$

Рассмотрим теперь вычисления по модулю $(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}_0)^{K_0}$. Пусть $D_0, \ldots, D_3$ — образующие алгебры $\mathrm{Diff}(\mathbf{S}^n_{\mathbf{S}})$, $n \geqslant 3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1)$, $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}(n-1)$, $K_0 = \mathrm{SO}(n-1)$. Из (A.1) мы получаем:

$$[D_1, D_3] = -8\sum_{k,l=3}^{n+1}(\{\{\Psi_{1k}, [\Psi_{1k}, \Psi_{1l}]\}, \Psi_{2l}\} + \{\Psi_{1l}, \{\Psi_{1k}, [\Psi_{1k}, \Psi_{2l}]\}\}) =$$
$$= 4\sum_{k,l=3}^{n+1}(\{\{\Psi_{1k}, \Psi_{kl}\}, \Psi_{2l}\} + \delta_{kl}\{\Psi_{1l}, \{\Psi_{1k}, \Psi_{12}\}\}) = \qquad \text{(A.5)}$$
$$= 4\sum_{\substack{k,l=3\\k\neq l}}^{n+1}\{\{\Psi_{kl}, \Psi_{1k}\}, \Psi_{2l}\} + 4\sum_{k=3}^{n+1}\{\Psi_{1k}, \{\Psi_{1k}, \Psi_{12}\}\}.$$

Формула (А.3) и коммутационные соотношения (1.12) дают:

$$\sum_{\substack{k,l=3\\k\neq l}}^{n+1}\{\{\Psi_{kl},\Psi_{1k}\},\Psi_{2l}\} = \sum_{\substack{k,l=3\\k\neq l}}^{n+1}(2\{\Psi_{1k},\Psi_{2l}\}\Psi_{kl}+$$
$$+\{[\Psi_{kl},\Psi_{1k}],\Psi_{2l}\}+\{[\Psi_{kl},\Psi_{2l}],\Psi_{1k}\}+$$
$$+[\Psi_{1k},[\Psi_{kl},\Psi_{2l}]]) \equiv$$
$$\equiv \sum_{\substack{k,l=3\\k\neq l}}^{n+1}\Bigg(-\frac{1}{2}\{\Psi_{1l},\Psi_{2l}\}+$$
$$+\frac{1}{2}\{\Psi_{2k},\Psi_{1k}\}+\frac{1}{2}[\Psi_{1k},\Psi_{2k}]\Bigg) \mod (U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}_0)^{K_0} =$$
$$= -\frac{1}{4}\sum_{\substack{k,l=3\\k\neq l}}^{n+1}\Psi_{12} = -\frac{(n-1)(n-2)}{4}\Psi_{12} = \frac{(n-1)(n-2)}{8}D_0.$$

Из (А.2) следует:

$$\sum_{k=3}^{n+1}\{\Psi_{1k},\{\Psi_{1k},\Psi_{12}\}\} = \sum_{k=3}^{n+1}(\{\{\Psi_{1k},\Psi_{1k}\},\Psi_{12}\}-[\Psi_{1k},[\Psi_{1k},\Psi_{12}]]) =$$
$$= 2\left\{\sum_{k=3}^{n+1}\Psi_{1k}^2,\Psi_{12}\right\}-\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1}[\Psi_{1k},\Psi_{2k}] = -\frac{1}{4}\{D_0,D_1\}+\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n+1}\Psi_{12} =$$
$$= -\frac{1}{4}\{D_0,D_1\}-\frac{n-1}{8}D_0.$$

Окончательно из (А.5) получаем:

$$[D_1,D_3] = -\{D_0,D_1\}-\frac{n-1}{2}D_0+\frac{(n-1)(n-2)}{2}D_0 =$$
$$= -\{D_0,D_1\}+\frac{(n-1)(n-3)}{2}D_0.$$

Вычисление $[D_1,D_3]$ для алгебр $\mathrm{Diff}(\mathbf{P}^n(\mathbb{H})_\mathbf{S})$ и $\mathrm{Diff}(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})_\mathbf{S})$ аналогичны, но много длиннее.

Проиллюстрируем вычисления в октавном случае одним примером. Ниже индексы i,j пробегают значения от 0 до 7. Пусть $D_0,\ldots,D_9$ —

образующие алгебры $\mathrm{Diff}\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{spin}(7)$, $K_0 = \mathrm{Spin}(7)$ (см. § 3.5). Тогда из (A.1) и предложения 3.4 получаем:

$$[D_1, D_3] = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\{\{[e_{\lambda,i}, e_{\lambda,j}], e_{\lambda,i}\}, f_{\lambda,j}\} + \{e_{\lambda,j}, \{e_{\lambda,i}, [e_{\lambda,i},, f_{\lambda,j}]\}\}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{i\neq j}\left\{\{\varkappa C_{2,\overline{e}_i,\overline{e}_j}, e_{\lambda,i}\}, f_{\lambda,j}\right\} - \frac{1}{4}\sum_{i}\{e_{\lambda,i}, \{e_{\lambda,i}, \Lambda\}\} -$$

$$- \frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\left\{e_{\lambda,j}, \{e_{\lambda,i}, e_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}\}\right\}.$$

Формулы (A.3), (1.44), (1.32) и предложение 3.4 дают:

$$\frac{1}{8}\sum_{i\neq j}\left\{\{\varkappa C_{2,\overline{e}_i,\overline{e}_j}, e_{\lambda,i}\}, f_{\lambda,j}\right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{i,j}\left(2\{e_{\lambda,i}, f_{\lambda,j}\}\varkappa C_{2,\overline{e}_i,\overline{e}_j} + \left\{[\varkappa C_{2,\overline{e}_i,\overline{e}_j}, e_{\lambda,i}], f_{\lambda,j}\right\} +\right.$$

$$\left. + \left(\left\{[\varkappa C_{2,\overline{e}_i,\overline{e}_j}, f_{\lambda,j}], e_{\lambda,i}\right\} + \left[e_{\lambda,i}, \left[\varkappa C_{2,\overline{e}_i,\overline{e}_j}, f_{\lambda,j}\right]\right]\right)\right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i\neq j}\left(-\frac{1}{16}\left\{\mathrm{ad}\,Y_2\left(\varkappa C_{2,\overline{e}_i,\overline{e}_j}\big|_{\mathbb{C}a_2}\overline{e}_i\right), f_{\lambda,j}\right\} +\right.$$

$$+ \frac{1}{16}\left\{\mathrm{ad}\,Y_1\left(\varkappa C_{2,\overline{e}_i,\overline{e}_j}\big|_{\mathbb{C}a_1} e_j\right), e_{\lambda,i}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{16}\left[e_{\lambda,i}, \mathrm{ad}\,Y_1\left(\varkappa C_{2,\overline{e}_i,\overline{e}_j}\big|_{\mathbb{C}a_1} e_j\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\{e_{\lambda,i}, f_{\lambda,j}\}f_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}\right) \mod (U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}_0)^{K_0} =$$

$$= \sum_{i\neq j}\left(-\frac{1}{4}\left\{\mathrm{ad}\,Y_2\left(\overline{e}_j\right), f_{\lambda,j}\right\} - \frac{1}{8}\left\{\mathrm{ad}\,Y_1\left(e_i\right), e_{\lambda,i}\right\} - \frac{1}{8}\left[e_{\lambda,i}, \mathrm{ad}\,Y_1\left(e_i\right)\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(\{f_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}, \{e_{\lambda,i}, f_{\lambda,j}\}\} - [f_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}, \{e_{\lambda,i}, f_{\lambda,j}\}]\right)\right) =$$

$$= \sum_{i\neq j}\left(\frac{1}{2}\{e_{\lambda,j}, f_{\lambda,j}\} - \frac{1}{4}\{f_{\lambda,i}, e_{\lambda,i}\} - \frac{1}{4}[e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}]\right) + D_8 -$$

$$- \frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\left(\left\{[f_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}, e_{\lambda,i}], f_{\lambda,j}\right\} + \{e_{\lambda,i}, [f_{2\lambda,e_i\overline{e}_j}, f_{\lambda,j}]\}\right) =$$

$$= D_8 + \sum_{i\neq j}\left(\frac{1}{4}\{e_{\lambda,j}, f_{\lambda,j}\} + \frac{1}{8}\Lambda + \frac{1}{8}\{e_{\lambda,e_i\bar{e}_j\cdot e_i}, f_{\lambda,j}\} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}\{e_{\lambda,i}, f_{\lambda,e_i\bar{e}_j\cdot e_j}\}\right) =$$

$$= D_8 + \sum_{i\neq j}\left(\frac{1}{4}\{e_{\lambda,j}, f_{\lambda,j}\} - \frac{1}{8}\{e_{\lambda,e_j\bar{e}_i e_i}, f_{\lambda,j}\} - \frac{1}{8}\{e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}\}\right) +$$

$$+ 7\Lambda = D_8 + 7D_0.$$

Аналогично из (А.2) и предложения 3.4 следует:

$$-\frac{1}{4}\sum_i\{\{\Lambda, e_{\lambda,i}\}, e_{\lambda,i}\} = -\frac{1}{4}\sum_i\left(\{\Lambda, \{e_{\lambda,i}, e_{\lambda,i}\}\} + [e_{\lambda,i}, [\Lambda, e_{\lambda,i}]]\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\Lambda, \sum_i e_{\lambda,i}^2\right\} + \frac{1}{8}\sum_i[e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}] = -\frac{1}{2}\{D_0, D_1\} - \frac{1}{2}D_0.$$

Также имеем

$$-\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\left\{\{e_{2\lambda,e_i\bar{e}_j}, e_{\lambda,i}\}, e_{\lambda,j}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\left(\{e_{2\lambda,e_i\bar{e}_j}, \{e_{\lambda,i}, e_{\lambda,j}\}\} + [e_{\lambda,i}, [e_{2\lambda,e_i\bar{e}_j}, e_{\lambda,j}]]\right) =$$

$$= -\frac{1}{8}\sum_{i\neq j}[e_{\lambda,i}, f_{\lambda,e_i\bar{e}_j\cdot e_j}] = -\frac{1}{8}\sum_{i\neq j}[e_{\lambda,i}, f_{\lambda,i}] = \frac{7\cdot 8}{2\cdot 8}\Lambda = \frac{7}{2}D_0,$$

поскольку $e_{2\lambda,e_i\bar{e}_j}$ антисимметрично, а $\{e_{\lambda,i}, e_{\lambda,j}\}$ симметрично относительно перестановки индексов i и j.

Таким образом:

$$[D_1, D_3] = D_8 + (7 - \frac{1}{2} + \frac{7}{2})D_0 - \frac{1}{2}\{D_0, D_1\} = D_8 - \frac{1}{2}\{D_0, D_1\} + 10D_0.$$

Приложение В

Некоторые фуксовы дифференциальные уравнения

Для удобства ссылок в данном приложении собраны сведения о некоторых фуксовых дифференциальных уравнениях: Римана и Гойна, а также сводимости первого ко второму в частных случаях.

Линейное дифференциальное уравнение

$$w^{(n)}(z) + p_1(z)w^{(n-1)}(z) + \ldots + p_n(z)w(z) = 0 \qquad \text{(B.1)}$$

на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}} = \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ с мероморфными коэффициентами $p_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$, является *фуксовым уравнением* [119], если для любой точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ его решения имеют не более чем степенной рост при $z \to z_0$ в некотором конусе[1], не содержащем целиком окрестность своей вершины z_0. Точка z_0 называется *обыкновенной* для этого уравнения, если все решения (B.1) голоморфны в некоторой ее окрестности; в противном случае z_0 называется *особой точкой*.

Хорошо известно (см., например, [29; 47]), что уравнение (B.1) является фуксовым, если

$$p_i(z) = \frac{q_i(z)}{\prod\limits_{k=1}^{m} (z - z_k)^i}$$

для некоторых потенциально особых точек $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ и многочленов $q_i(z)$ степеней $\leqslant i(m-1)$. *Критические показатели* $\rho^{(z_k)}$ для уравнения (B.1) в точке z_k определяются путем подстановки выражения $w(z) = (z - z_k)^{\rho^{(z_k)}}$ в уравнение (B.1) с удержанием только главных

[1] В окрестности бесконечности нужно использовать локальную координату $\zeta = 1/z$ вместо $z - z_0$.

членов при $z \to z_k$. Эта процедура дает алгебраическое уравнение степени n относительно $\rho^{(z_k)}$. Обозначим $\rho_i^{(z_k)}$, $i = 1, \ldots, n$, его решения для всех точек z_k, $k = 1, \ldots, m$. Подстановка $w(z) = z^{-\rho^{(\infty)}}$ аналогично дает критические показатели $\rho_1^{(\infty)}, \ldots, \rho_n^{(\infty)}$ в бесконечно удаленной точке. Критические показатели удовлетворяют *тождеству Фукса*:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m+1} \rho_i^{(z_k)} = \frac{1}{2}(m-1)n(n-1),$$

где $\rho_i^{(z_{m+1})} := \rho_i^{(\infty)}$.

Критические показатели можно найти и в обыкновенных точках. Если точка $\widetilde{z}$ обыкновенная, то критические показатели для нее — это $0, 1, \ldots, n-1$. Достаточным условием того, что точка $\widetilde{z}$ является обыкновенной, служит голоморфность коэффициентов $p_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$ в $\widetilde{z}$.

Информация об особых точках и соответствующих критических показателях уравнения (В.1) содержится в *P-символе Римана* $P\{\mathcal{A}; z\}$, в котором первая строка матрицы $\mathcal{A}$ состоит из особых точек, а другие ее строки состоят из соответствующих критических показателей.

Уравнение (В.1) второго порядка с тремя особыми точками называется *уравнением Римана*. Коэффициенты уравнения Римана полностью определяются его критическими показателями, а значит, и P-символом. В этом случае соотношение Фукса имеет вид

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} \rho_i^{(z_k)} = 1,$$

и только пять критических показателей независимы.

Если все три особые точки z_1, z_2, z_3 конечны, то уравнение Римана имеет вид [29]:

$$\begin{aligned} w'' &+ \left(\frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \frac{A_3}{z - z_3} \right) w' + \\ &+ \left(\frac{B_1}{z - z_1} + \frac{B_2}{z - z_2} + \frac{B_3}{z - z_3} \right) \frac{w}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} = 0, \end{aligned} \tag{В.2}$$

где $A_k = 1 - \rho_1^{(z_k)} - \rho_2^{(z_k)}$, $B_k = \rho_1^{(z_k)} \rho_2^{(z_k)} (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1})$. В последнем уравнении индексы рассматриваются по модулю 3.

Существует два типа замены переменных, переводящих любое фуксово уравнение в фуксово уравнение. Первым преобразованием является *дробно-линейное преобразование (преобразование Мёбиуса)* независимой переменной:

$$z \to t,\ z = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{B.3}$$

Этим преобразованием можно добиться произвольного расположения на $\overline{\mathbb{C}}$ трех особых точек, сохранив критические показатели.

Второй тип преобразований

$$w(z) \to w_1(z) = \left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right)^q w(z) \tag{B.4}$$

сохраняет особые точки, но изменяет критические показатели точек z_1 и z_2:

$$\rho_i^{(z_1)} \to \rho_i^{(z_1)} + q,\ \rho_i^{(z_2)} \to \rho_i^{(z_2)} - q,\ i = 1, 2.$$

Используя эти преобразования для уравнения Римана, можно считать, что особые точки это $(0, 1, \infty)$, причем $\rho_1^{(0)} = \rho_1^{(1)} = 0$. Если обозначить $\rho_1^{(\infty)} = \alpha, \rho_2^{(\infty)} = \beta$ и $\rho_2^{(0)} = 1 - \gamma$, то тождество Фукса для уравнения Римана даст $\rho_2^{(1)} = \gamma - \alpha - \beta$, что соответствует *гипергеометрическому уравнению* или *уравнению Гаусса*:

$$z(1 - z)w'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)w' - \alpha\beta w = 0. \tag{B.5}$$

P-символ уравнения (B.5) есть

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & ; z \\ 1 - \gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta & \end{matrix}\right\}.$$

Многие квантово-механические задачи для пространств постоянной кривизны сводятся к этому уравнению, в то время как их евклидовы аналоги сводятся к вырожденным случаям гипергеометрического уравнения, полученным из (B.5) слиянием особых точек (эти уравнения не являются фуксовыми).

Мы рассмотрим решения уравнения (B.5) только в случае $\gamma \neq -m$, $m \in \mathbb{N}$. Решения (B.1), соответствующие различным критическим показателям вблизи некоторой особой точки, называются *каноническими*

решениями вблизи данной точки. Ряд

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!},\ |z|<1, \tag{B.6}$$

где $(a)_n := a(a+1)\dots(a+n-1)$, $(a)_0 := 1$ является каноническим решением для уравнения (B.5), соответствующим критическому показателю $\rho_1^{(0)} = 0$. Функция $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$, определяемая сходящимся рядом (B.6) для $|z|<1$, может быть аналитически продолжена на область $z \in \mathbb{C}\backslash[1,+\infty)$. Это продолжение можно осуществить, используя формулы (B.7)–(B.12) ниже или интегральные представления [29; 72].

Очевидно, что $F(\alpha,\beta;\gamma;z) = F(\beta,\alpha;\gamma;z)$. Если $\alpha = -m$ или $\beta = -m$, $m = 0,1,2,\dots$, то функция $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ является многочленом степени m. Кроме того, функция $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ относительно переменной γ имеет полюса в точках $\gamma = -m$, $m \in \mathbb{N}$ и справедливо равенство

$$\lim_{\gamma\to -m}\frac{F(\alpha,\beta;\gamma;z)}{\Gamma(\gamma)} = \frac{(\alpha)_{m+1}(\beta)_{m+1}}{(m+1)!}z^{m+1}F(\alpha+m+1,\beta+m+1;m+2;z)$$

(см. [72]), где Γ является *гамма-функцией*, определяемой как аналитическое продолжение интеграла

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt,\ \operatorname{Re} z > 0.$$

У функции Γ нет нулей и имеются полюса первого порядка в точках $z = -m$, $m = 0,1,2,\dots$. Ее логарифмическая производная $\psi_\Gamma(z) := \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ также имеет полюса первого порядка в этих точках.

Другим каноническим решением уравнения (B.5), соответствующим критическому показателю $\rho_2^{(0)} = 1-\gamma$ при $\gamma \notin \mathbb{N}$, является функция

$$z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;z).$$

Каноническим решением вблизи особой точки $z = 1$ является функция

$$F(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\gamma+1;1-z),$$

а при $\gamma-\alpha-\beta \notin \mathbb{Z}$ также и функция

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-z).$$

Вблизи особой точки $z = \infty$ канонические решения при $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$ суть

$$z^{-\alpha}F(\alpha, \alpha - \gamma + 1; \alpha - \beta + 1; \tfrac{1}{z}),\ z^{-\beta}F(\beta, \beta - \gamma + 1; \beta - \alpha + 1; \tfrac{1}{z}).$$

При $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ только одна из этих функций является каноническим решением: первая при $\alpha - \beta > 0$ и вторая при $\alpha - \beta < 0$.

Следующие разложения функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ по каноническим решениям вблизи особых точек $z = 1$ и $z = \infty$ [8; 72] важны для решения спектральных задач. Первое разложение — это

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z) + \tag{B.7}$$
$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z),$$
$$|\arg(1 - z)| < \pi$$

при $\gamma - \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$. Для $\gamma - \alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ все слагаемые в правой части (B.7) сингулярны и для $m = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются равенства

$$F(\alpha,\beta; \alpha + \beta + m; z) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(\alpha + \beta + m)}{\Gamma(\alpha + m)\Gamma(\beta + m)} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(1 - m)_n} (1 - z)^n -$$
$$- \frac{\Gamma(\alpha + \beta + m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (z - 1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + m)_n(\beta + m)_n}{n!(n + m)!} (1 - z)^n \times \tag{B.8}$$
$$\times (\ln(1 - z) - \psi_\Gamma(n + 1) - \psi_\Gamma(n + m + 1) +$$
$$+ \psi_\Gamma(\alpha + n + m) + \psi_\Gamma(\beta + n + m)),$$

$$F(\alpha,\beta; \alpha + \beta - m; z) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(\alpha + \beta - m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - z)^{-m} \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha - m)_n(\beta - m)_n}{n!(1 - m)_n} (1 - z)^n - \tag{B.9}$$
$$- \frac{(-1)^m\Gamma(\alpha + \beta - m)}{\Gamma(\alpha - m)\Gamma(\beta - m)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(n + m)!} (1 - z)^n \times$$
$$\times (\ln(1 - z) - \psi_\Gamma(n + 1) - \psi_\Gamma(n + m + 1) + \psi_\Gamma(\alpha + n) + \psi_\Gamma(\beta + n)),$$
$$|\arg(1 - z)| < \pi,\ |1 - z| < 1.$$

В случае $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)<0$ из (В.7) — (В.9) следует, что

$$\lim_{z\to 1} F(\alpha,\beta;\gamma;z)(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}. \tag{В.10}$$

Разложение функции $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ по каноническим решениям вблизи точки $z=\infty$ имеет вид

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}(-z)^{-\alpha}F(\alpha,\alpha-\gamma+1;\alpha-\beta+1;\tfrac{1}{z})+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)}(-z)^{-\beta}F(\beta,\beta-\gamma+1;\beta-\alpha+1;\tfrac{1}{z}),\ |\arg(-z)|<\pi \tag{В.11}$$

при $\alpha-\beta\notin\mathbb{Z}$. При $\alpha-\beta\in\mathbb{Z}$ все слагаемые в правой части (В.11) сингулярны. В этом случае справедливо равенство

$$\begin{aligned}
&F(\alpha,\alpha+m;\gamma;z)=F(\alpha+m,\alpha;\gamma;z)=\\
&=\frac{\Gamma(\gamma)(-z)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+m)}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(m-n)(\alpha)_n}{n!\Gamma(\gamma-\alpha-n)}z^{-n}+\\
&+\frac{\Gamma(\gamma)(-z)^{-\alpha-m}}{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\gamma-m)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(1-\gamma+\alpha)_{n+m}}{n!(n+m)!}z^{-n}\times\\
&\times(\ln(-z)+\psi_\Gamma(n+m+1)+\psi_\Gamma(n+1)-\\
&-\psi_\Gamma(\alpha+n+m)-\psi_\Gamma(\gamma-\alpha-n-m)),\\
&|\arg(-z)|<\pi,\ |z|>1,\ \gamma-\alpha\notin\mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{В.12}$$

Соответствующая формула для $\gamma-\alpha\in\mathbb{Z}$ может быть получена переходом к пределу $\gamma-\alpha\to k\in\mathbb{Z}$ в (В.12).

Из формул (В.11) и (В.12) следует, что при $\mathrm{Re}\,\alpha>\mathrm{Re}\,\beta$ справедливо равенство

$$\lim_{z\to-\infty} F(\alpha,\beta;\gamma;z)(-z)^{\beta}=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}. \tag{В.13}$$

Фуксово уравнение с четырьмя особыми точками преобразованиями (В.3) и (В.4) можно свести к *уравнению Гойна*

$$w''(t)+\left(\frac{\gamma}{t}+\frac{\delta}{t-1}+\frac{\varepsilon}{t-d}\right)w'(t)+\frac{\alpha\beta t-q}{t(t-1)(t-d)}w(t)=0, \tag{В.14}$$

где $d \neq 0, 1, \infty$ — четыре его особые точки и $\alpha + \beta - \gamma - \delta - \varepsilon + 1 = 0$. Соответствующий P-символ есть

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & d & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\varepsilon & \beta \end{array} ; t\right\}.$$

Отметим, что *акцессорный параметр* q не входит в этот P-символ.

Теория уравнения Гойна значительно менее полна, чем теория уравнения Римана. В частности, отсутствуют явные выражения канонических решений вблизи особых точек друг через друга. Поэтому существуют лишь приближенные методы для решения спектральных задач, сводящихся к уравнению Гойна, использующие непрерывные дроби (см., например, [71] и ссылки там).

Подстановка $z = P(t)$ для рациональной функции P переводит уравнение (B.1) в другое фуксово уравнение с (вообще говоря) бóльшим числом особых точек. Поэтому иногда обратное преобразование может уменьшить число особых точек фуксова уравнения.[2]

В настоящее время общая теория такой редукции отсутствует. Однако в работе [162] были классифицированы все уравнения Гойна (B.14), которые получаются подстановкой $z = P(t)$ из гипергеометрического уравнения (B.5). Обратным преобразованием такие уравнения Гойна сводятся к гипергеометрическим.

Первым условием существования такой редукции является положение точки d. Пусть

$$(z_1, z_2, z_3, z_4)_{c.r.} := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

— *двойное отношение* четырех различных точек из $\overline{\mathbb{C}}$. Хорошо известно, что оно является инвариантом преобразований Мёбиуса. Группа $\mathfrak{S}_4$, переставляющая точки z_1, z_2, z_3 и z_4, действует на их двойном отношении. Орбита двойного отношения $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}_4}(s)$ числа $s := (z_1, z_2, z_3, z_4)_{c.r.}$ состоит из чисел $s, 1-s, 1/s, 1/(1-s), s/(s-1), (s-1)/s \in \overline{\mathbb{C}}$.

В общем положении эта орбита содержит шесть элементов, но существуют два исключения: орбита $-1, \frac{1}{2}, 2$ и орбита $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$. Ес-

[2]В общем случае обратное преобразование выводит за рамки фуксова класса дифференциальных уравнений.

ли $(z_1, z_2, z_3, z_4)_{c.r.} \in (-1, \frac{1}{2}, 2)$, то четверка (z_1, z_2, z_3, z_4) называется *гармонической*. Если $(z_1, z_2, z_3, z_4)_{c.r.} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$, то четверка (z_1, z_2, z_3, z_4) называется *эквиангармонической*.

Точки гармонической четверки лежат на окружности или прямой. Преобразованием Мёбиуса их можно перевести в вершины квадрата на плоскости $\mathbb{C}$. Если четверка (z_1, z_2, z_3, ∞) является гармонической, то точки (z_1, z_2, z_3) являются концами и серединой некоторого отрезка. Если (z_1, z_2, z_3, ∞) — эквиангармоническая четверка, то точки (z_1, z_2, z_3) являются вершинами равностороннего треугольника.

Теорема В.1 ([162]). *Нетривиальное уравнение Гойна* (В.14) *(т. е. такое, что $\alpha\beta \neq 0$ или $q \neq 0$) можно получить из гипергеометрического уравнения* (В.5) *рациональной заменой $z = P(t)$ лишь в следующих случаях.*

1) *Гармонический случай: $d \in \mathcal{O}_{\mathfrak{S}_4}(2)$. Пусть $d = 2$,*[3] *тогда должно выполняться равенство $q/(\alpha\beta) = 1$, а критические показатели точек $t = 0$ и $t = d = 2$ должны совпадать, т. е. $\gamma = \varepsilon$. Функция $P(t)$ в этом случае является многочленом второй степени и может быть выбрана в виде $P(t) = t(2-t) = 1-(t-1)^2$. Она переводит точки $t = 0, 2$ в точку $z = 0$, а точку $t = 1$ в $z = 1$.*[4]

   Если дополнительно выполнено равенство $1 - \delta = 2(1-\gamma)$, то функцию $P(t)$ можно выбрать также в виде многочлена четвертой степени $4(t(2-t) - \frac{1}{2})^2$, который переводит точки $t = 0, 1, 2$ в точку $z = 1$.

2) *$d \in \mathcal{O}_{\mathfrak{S}_4}(4)$. Пусть $d = 4$, тогда $q/(\alpha\beta) = 1$, критические показатели точки $t = 1$ вдвое больше критических показателей точки $t = d = 4$, т. е. $1 - \delta = 2(1-\varepsilon)$, а точка $t = 0$ имеет критические показатели $0, 1/2$, т. е. $\gamma = \frac{1}{2}$. Функция $P(t)$ является многочленом третьей степени и может быть выбрана в виде $(t-1)^2(1-\frac{t}{4})$. Она переводит точку $t = 0$ в $z = 1$ и точки $t = 1, 4$ в $z = 0$.*

[3]При $d \in \mathcal{O}_{\mathfrak{S}_4}(s)$ четверку $(0, 1, d, \infty)$ можно преобразовать в четверку $(0, 1, s, \infty)$ преобразованием Мёбиуса, преобразующим также коэффициенты уравнения (В.14).

[4]Это преобразование было найдено уже в работе [149].

3) *Эквиангармонический случай:* $d \in \mathcal{O}_{\mathfrak{S}_4}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i})$. *Критические показатели точек* $t = 0, 1, d$ *одинаковы, т. е.* $\gamma = \delta = \varepsilon$. *Пусть* $d = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$, *тогда* $q/(\alpha\beta) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i}$. *Функция* $P(t)$ *является многочленом третьей степени и может быть выбрана в виде* $\left(1 - t/(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i})\right)^3$. *Она переводит точки* $t = 0, 1, d$ *в точку* $z = 1$ *и точку* $t = q/(\alpha\beta)$ *в* $z = 0$, *создавая новую особую точку.*

Если дополнительно выполнены равенства $\gamma = \delta = \varepsilon = \frac{2}{3}$, *то функцию* $P(t)$ *можно выбрать также в виде многочлена шестой степени*

$$4\left(\left(1 - \frac{t}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i}}\right)^3 - \frac{1}{2}\right)^2,$$

который переводит точки $t = 0, 1, d, q/(\alpha\beta)$ *в точку* $z = 1$.

4) $d \in \mathcal{O}_{\mathfrak{S}_4}(\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{4}\mathbf{i})$. *Пусть* $d = \frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{4}\mathbf{i}$, *тогда* $q/(\alpha\beta) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{i}$, *критические показатели точки* $t = d$ *равны* $0, 1/3$, *т. е.* $\varepsilon = 2/3$, *а точки* $t = 0, 1$ *имеют равные критические показатели* $0, 1/2$, *т. е.* $\gamma = \delta = 1/2$. *Функция* $P(t)$ *является многочленом четвертой степени и может быть выбрана в виде*

$$\left(1 - \frac{t}{\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{4}\mathbf{i}}\right)\left(1 - \frac{t}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{i}}\right)^3.$$

Она переводит точки $t = 0, 1$ *в точку* $z = 1$, *а точки* $t = d, q/(\alpha\beta)$ *в точку* $z = 0$.

5) $d \in \mathcal{O}_{\mathfrak{S}_4}(\frac{1}{2}+\frac{11\sqrt{15}}{90}\mathbf{i})$. *Пусть* $d = \frac{1}{2}+\frac{11\sqrt{15}}{90}\mathbf{i}$, *тогда* $q/(\alpha\beta) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{18}\mathbf{i}$, *критические показатели точки* $t = d$ *суть* $0, 1/2$,

т. е. $\varepsilon = 1/2$, *а точки* $t = 0, 1$ *имеют критические показатели* $0, 1/3$, *т. е.* $\gamma = \delta = 2/3$. *Функция* $P(t)$ *является многочленом пятой степени и может быть выбрана в виде*

$$-\mathbf{i}\frac{2025\sqrt{15}}{64}t(t-1)\left(t-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{18}\mathbf{i}\right)^3.$$

Она переводит точки $t = 0, 1, q/(\alpha\beta)$ *в точку* $z = 0$, *а точку* $t = d$ *в точку* $z = 1$.

Отметим, что в первом случае теоремы В.1 имеется три независимых параметра (например: α, β, γ), а во всех остальных случаях число свободных параметров один или два. Это означает, что первый случай должен чаще встречаться в приложениях. Фактически только этот случай и встречается в данной книге.

Приложение C

Ортогональные комплексные алгебры Ли и их представления

C.1. Алгебра Ли $\mathfrak{B}_k$

Здесь мы приводим краткое описание простых комплексных алгебр Ли $\mathfrak{B}_k \cong \mathfrak{so}(2k+1, \mathbb{C})$ (см. подробности в [124; 80] и [23]).

Пусть

$$S_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(i),\ i \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{B}_k \cong \mathfrak{so}(2k+1, \mathbb{C})$ как множество

$$\mathfrak{B}_k = \left(A \in \mathfrak{gl}(2k+1, \mathbb{C}) \middle| \ A^T S_{2k+1} + S_{2k+1} A = 0 \right). \qquad \text{(C.1)}$$

Следуя [172], мы будем нумеровать столбцы и строки матрицы $A \in \mathfrak{B}_k$ индексами $-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k$. Это удобно, т. к. подалгебры $\mathfrak{B}_i \subset \mathfrak{B}_k$, $i < k$, соответствуют индексам столбцам и строк от $-i$ до i.

Легко видеть, что матрица

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} \in \mathfrak{gl}(2k+1, \mathbb{C})$$

содержится в $\mathfrak{B}_k$, если и только если $a_{ij} + a_{-j,-i} = 0$. Данное условие означает, что матрица A кососимметрична относительно побочной диагонали.

Пусть $F_{ij} := E_{ij} - E_{-j,-i}$; тогда легко видеть, что

$$[F_{ij}, F_{pq}] = \delta_{jp} F_{iq} - \delta_{iq} F_{pj} + \delta_{-pi} F_{-qj} + \delta_{-jq} F_{p,-i}.$$

Алгебра $\mathfrak{B}_k$ порождается как линейное пространство элементами F_{ij} с $i > -j$. Очевидно, что $F_{i,-i} = 0$ и $F_{-j,-i} = -F_{ij}$.

Элементы F_{ii}, $i = 1, \ldots, k$, образуют базис картановской подалгебры $\mathfrak{h}_k \subset \mathfrak{B}_k$, которая состоит из элементов вида

$$X = \operatorname{diag}(-x_k, -x_{k-1}, \ldots, -x_1, 0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k).$$

Пусть $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}_k^*$, так что $\varepsilon_i(X) = x_i$, т.е. элементы ε_i образуют базис в пространстве $\mathfrak{h}_k^*$, дуальный к базису F_{ii}, $i = 1, \ldots, k$. Определим симметричную невырожденную билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{B}_k$ формулой

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{tr} AB. \tag{C.2}$$

Она пропорциональна форме Киллинга. Очевидно, что

$$\langle F_{ij}, F_{qp} \rangle = \delta_{ip}\delta_{jq}, \; i > -j, q > -p.$$

В частности, элементы F_{ii}, $i = 1, \ldots, k$, образуют ортогональный базис в подалгебре $\mathfrak{h}_k$.

Форма $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{h}_k}$ порождает изоморфизм $\varkappa\colon \mathfrak{h}_k \to \mathfrak{h}_k^*$, определенный посредством тождества $\varkappa(X) = \langle X, \cdot \rangle$, $\forall X \in \mathfrak{h}_k$. В частности, $\varkappa(F_{i,i}) = \varepsilon_i$ и элементы ε_i, $i = 1, \ldots, k$, образуют ортогональный базис в пространстве $\mathfrak{h}_k^*$ относительно формы

$$\langle f_1, f_2 \rangle^* := \langle \varkappa^{-1}(f_1), \varkappa^{-1}(f_2) \rangle, \; f_1, f_2 \in \mathfrak{h}_k^*.$$

Множество

$$\Phi_{\mathfrak{B}_k} := (\pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j |\; i \neq j, \; i, j = 1, \ldots, k)$$

является системой корней алгебры $\mathfrak{B}_k$. Относительно обратного лексикографического упорядочивания множество

$$\Phi^+_{\mathfrak{B}_k} := (\varepsilon_i, \varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_i - \varepsilon_j |\; i > j, \; i, j = 1, \ldots, k)$$

является подсистемой положительных корней, а множество простых корней есть

$$\Delta_{\mathfrak{B}_k} := (\alpha_1 = \varepsilon_1, \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1} |\; i = 2, \ldots, k).$$

Подалгебра $\mathfrak{B}_i \subset \mathfrak{B}_k$, $i < k$, соответствует системам корней $\Phi_{\mathfrak{B}_i}$, $\Phi^+_{\mathfrak{B}_i}$ и $\Delta_{\mathfrak{B}_i}$.

Пусть L_α — корневое подпространство в $\mathfrak{B}_k$, соответствующее корню $\alpha \in \Phi_{\mathfrak{B}_k}$. Тогда

$$\begin{gathered} L_{-\varepsilon_i} = \operatorname{span}(F_{0i}),\ L_{\varepsilon_i} = \operatorname{span}(F_{i0}),\ L_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = \operatorname{span}(F_{ij}), \\ L_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = \operatorname{span}(F_{i,-j}),\ L_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j} = \operatorname{span}(F_{-ij}),\ i,j = 1,\ldots,k. \end{gathered} \tag{C.3}$$

Фундаментальные веса алгебра $\mathfrak{B}_k$ суть

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j,\ \lambda_i = \sum_{j=i}^{k} \varepsilon_j,\ i = 2,\ldots,k.$$

Доминантные веса имеют вид

$$\lambda = \sum_{j=1}^{k} \lambda^j \lambda_j,\ \lambda^j \in \mathbb{Z}_+ := (0) \cup \mathbb{N}.$$

Пусть $V(\lambda)$ — неприводимые конечномерные $\mathfrak{B}_k$-модули со старшим весом λ. Модулями $V(\lambda)$ исчерпываются все конечномерные неприводимые представления алгебры $\mathfrak{B}_k$, причем при разных λ модули $V(\lambda)$ не изоморфны друг другу. Модуль $V(\lambda)$ соответствует (однозначному) представлению группы $\mathrm{SO}(2k+1)$ тогда и только тогда, когда число λ^1 четно. Доминантный вес λ можно записать в виде

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} m_i \varepsilon_i,\ m_k \geqslant m_{k-1} \geqslant \ldots \geqslant m_1 \geqslant 0, \tag{C.4}$$

где либо $m_i \in \mathbb{Z}_+$, либо $m_i \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2}$. Четные значения λ^1 соответствуют $m_i \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через δ сумму фундаментальных весов. Тогда

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+_{\mathfrak{B}_k}}^{k} \alpha = \sum_{i=1}^{k} \left(i - \frac{1}{2}\right) \varepsilon_i. \tag{C.5}$$

Универсальный оператор Казимира $C \in U(\mathfrak{B}_k)$ задается формулой

$$C = \sum_{i=1}^{k} \left(F_{ii}^2 + \{F_{i0}, F_{0i}\}\right) + \sum_{i>j>0} \left(\{F_{ij}, F_{ji}\} + \{F_{i,-j}, F_{-ji}\}\right). \tag{C.6}$$

Для любой полупростой алгебры Ли справедливы следующие формулы:

$$C|_{V(\lambda)} = (\langle \delta + \lambda, \delta + \lambda \rangle - \langle \delta, \delta \rangle)\,\mathrm{id}, \tag{C.7}$$

$$\dim V(\lambda) = \prod_{\alpha \succ 0} \langle \lambda + \delta, \alpha \rangle \Big/ \prod_{\alpha \succ 0} \langle \delta, \alpha \rangle, \tag{C.8}$$

где $\alpha \succ 0$ обозначает положительные корни.

Для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и произвольной ее подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ модуль $V(\lambda)$ разлагается в прямую конечную сумму весовых подпространств

$$V(\lambda) = \bigoplus_{\mu} V_\mu(\lambda),\ \mu \in \mathfrak{h}^*,$$

где $\forall v \in V_\mu(\lambda), \forall h \in \mathfrak{h}$, справедливо $h(v) = \mu(h)v$, а суммирование производится по всем весам вида

$$\lambda - \sum_{\alpha \succ 0} i_\alpha \alpha,\ i_\alpha \in \mathbb{Z}_+.$$

Кроме того, для любого корня α алгебры $\mathfrak{g}$ имеем

$$\xi_\alpha \colon V_\mu(\lambda) \to V_{\mu+\alpha}(\lambda)),\ \xi_\alpha \in L_\alpha. \tag{C.9}$$

C.2. Алгебра Ли $\mathfrak{D}_k$

Алгебра Ли $\mathfrak{D}_k$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}_k$, состоящей из матриц, у которых столбец и строка с индексом 0 — нулевые. Отбросим эти нулевые столбец и строку и занумеруем остальные строки и столбцы матрицы $A \in \mathfrak{D}_k$ индексами $-k, \ldots, -1, 1, \ldots, k$, как и выше. Подалгебра Картана $\mathfrak{h}_k \subset \mathfrak{D}_k$ состоит из тех же матриц (за исключением выброшенных столбца и строки с индексом 0), что и в случае алгебры $\mathfrak{B}_k$. Опишем кратко случай алгебры $\mathfrak{D}_k$, подчеркивая отличия от случая алгебры $\mathfrak{B}_k$.

В данном случае имеем

$$\Phi_{\mathfrak{D}_k} := (\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j |\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, k),$$
$$\Phi^+_{\mathfrak{D}_k} := (\varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_i - \varepsilon_j |\ i > j,\ i, j = 1, \ldots, k),$$
$$\Delta_{\mathfrak{D}_k} := (\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1} |\ i = 2, \ldots, k),$$

а корневые подпространства $L_{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j}$ такие же, как для алгебры $\mathfrak{B}_k$.

Фундаментальные веса суть

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\varepsilon_j,\ \lambda_i = \sum_{j=i}^{k}\varepsilon_j,\ i = 3,\ldots,k,$$

а сумма фундаментальных весов есть

$$\delta = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+_{\mathfrak{D}_k}}^{k}\alpha = \sum_{i=2}^{k}(i-1)\varepsilon_i.$$

Фундаментальный вес

$$\lambda = \sum_{j=1}^{k}\lambda^j\lambda_j,\ \lambda^j \in \mathbb{Z}_+ := (0)\cup\mathbb{N}$$

теперь имеет вид

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} m_i\varepsilon_i,\ m_k \geqslant m_{k-1} \geqslant \ldots \geqslant m_2 \geqslant |m_1|, \tag{C.10}$$

где либо $m_1 \in \mathbb{Z}, m_i \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 2$, либо $m_1 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, m_i \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2}$, $i \geqslant 2$. Как и выше, $\mathfrak{D}_k$-модули с целыми m_j, $j = 1,\ldots,k$, соответствуют (однозначным) представлениям группы $\mathrm{SO}(2k)$.

Универсальный оператор Казимира $C \in U(\mathfrak{D}_k)$ есть

$$C = \sum_{i=1}^{k} F_{ii}^2 + \sum_{i>j>0}\left(\{F_{ij}, F_{ji}\} + \{F_{i,-j}, F_{-ji}\}\right). \tag{C.11}$$

С.3. Ограничения представлений алгебр $\mathfrak{B}_k$ и $\mathfrak{D}_k$

Следующие результаты были получены в [35], см. также [36].

Пусть $V_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)$ — простой $\mathfrak{B}_k$-модуль со старшим весом (С.4), а $V_{\mathfrak{D}_k}(\lambda)$ — простой $\mathfrak{D}_k$-модуль со старшим весом

$$\lambda' = \sum_{i=1}^{k} m'_i\varepsilon_i,\ m'_k \geqslant m'_{k-1} \geqslant \ldots \geqslant m'_2 \geqslant |m'_1|.$$

Предложение С.1. Ограничение $V_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)|_{\mathfrak{D}_k}$ неприводимого $\mathfrak{B}_k$-представления на любую подалгебру $\mathfrak{D}_k \subset \mathfrak{B}_k$ разлагается в прямую сумму

$$V_{\mathfrak{B}_k}(\lambda)|_{\mathfrak{D}_k} = \bigoplus_{\lambda'} V_{\mathfrak{D}_k}(\lambda'),$$

где суммирование проводится по всем весам λ' таким, что

$$m_k \geqslant m'_k \geqslant m_{k-1} \geqslant \ldots \geqslant m'_2 \geqslant m_1 \geqslant m'_1 \geqslant -m_1$$

и все m'_j являются целыми или полуцелыми одновременно с m_j.

Пусть $V_{\mathfrak{B}_{k-1}}(\lambda')$ — простой $\mathfrak{B}_{k-1}$-модуль со старшим весом

$$\lambda' = \sum_{i=1}^{k-1} m'_i \varepsilon_i,\ m'_{k-1} \geqslant m'_{k-2} \geqslant \ldots \geqslant m'_2 \geqslant m'_1 \geqslant 0.$$

Предложение С.2. Ограничение $V_{\mathfrak{D}_k}(\lambda)|_{\mathfrak{B}_{k-1}}$ неприводимого $\mathfrak{D}_k$-представления со старшим весом (С.10) на любую подалгебру $\mathfrak{B}_{k-1} \subset \mathfrak{D}_k$ разлагается в прямую сумму

$$V_{\mathfrak{D}_k}(\lambda)|_{\mathfrak{B}_{k-1}} = \bigoplus_{\lambda'} V_{\mathfrak{B}_{k-1}}(\lambda'),$$

где суммирование проводится по всем весам λ' таким, что

$$m_k \geqslant m'_{k-1} \geqslant m_{k-1} \geqslant \ldots \geqslant m_2 \geqslant m'_1 \geqslant |m_1|,$$

и все m'_j являются целыми или полуцелыми одновременно с m_j.

С.4. Доказательство двух разложений

Разложения (8.14) и (8.20) были получены в [172] и [171] с помощью теории янгианов, относящейся к квантовой алгебре. Здесь мы даем независимое от этой теории доказательство этих разложений с классической точки зрения, используя один результат из [33]. Первоначальная идея такого доказательства была сообщена автору А.И. Молевым.

Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра над $\mathbb{C}$, порожденная элементами Z_+, Z_-, F и соотношениями

$$[F, Z_+] = 2Z_+,\ [F, Z_-] = -2Z_-,\ [Z_+, Z_-] = -\frac{1}{2}F^3 + qF,\ q \in \mathbb{C}. \quad \text{(С.12)}$$

Пусть также $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V)$ — ее неприводимое линейное представление в конечномерном комплексном линейном пространстве V. Произвольный линейный оператор в пространстве V имеет по крайней мере одно собственное значение. Пусть $F\chi = \eta\chi$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\chi \in V, \chi \neq \neq 0$, тогда из соотношений (С.12) следуют равенства $FZ_+\chi = (\eta + + 2)Z_+\chi$, $FZ_-\chi = (\eta - 2)Z_-\chi$. Поскольку $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, то существует вектор $v_\nu \in V$, $v_\nu \neq 0$, такой, что $Fv_\nu = \nu v_\nu$, $Z_+v_\nu = 0$, $\nu \in \mathbb{C}$. Пусть $v_{\nu-2j} := Z_-^j v_\nu$, $j \in \mathbb{Z}_+$, тогда

$$Fv_\eta = \eta v_\eta,\ Z_-v_\eta = v_{\eta-2},\ \forall \eta \in L_\nu := \nu - 2\mathbb{Z}_+. \tag{С.13}$$

Пусть μ — корень уравнения

$$\mu^2 + 2\mu + \nu^2 + 2\nu - 4q = 0. \tag{С.14}$$

Лемма С.1. *Справедливо равенство*

$$Z_+v_\eta = \frac{1}{16}(\eta - \mu)(\eta - \nu)(\eta + \mu + 2)(\eta + \nu + 2)v_{\eta+2},\ \eta \in L_\nu. \tag{С.15}$$

Доказательство. Для $\eta{=}\nu$ равенство (С.15) очевидно. Пусть $\alpha \in L_\nu$, $\alpha \leqslant \nu$, и предположим, что равенство (С.15) справедливо для всех $\eta \in L_\nu$ таких, что $\eta > \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}
Z_+v_\alpha{=}Z_+Z_-v_{\alpha+2}{=}[Z_+, Z_-]v_{\alpha+2} + Z_-Z_+v_{\alpha+2}{=}\left(-\frac{1}{2}F^3 + qF\right)v_{\alpha+2}+\\
+\frac{1}{16}(\alpha+2-\mu)(\alpha+2-\nu)(\alpha+\mu+4)(\alpha+\nu+4)Z_-v_{\alpha+4} =\\
=\Bigg(-\frac{1}{2}(\alpha+2)^3 + q(\alpha+2)+\\
+\frac{1}{16}(\alpha+2-\mu)(\alpha+2-\nu)(\alpha+\mu+4)(\alpha+\nu+4)\Bigg)v_{\alpha+2} =\\
=\frac{1}{16}(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)(\alpha+\mu+2)(\alpha+\nu+2)v_{\alpha+2},
\end{aligned}$$

в силу (С.12), (С.13), (С.15) и следующего тождества:

$$\begin{aligned}
(\alpha+2-\mu)(\alpha+2-\nu)(\alpha+\mu+4)(\alpha+\nu+4)-\\
-(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)(\alpha+\mu+2)(\alpha+\nu+2) = 8(\alpha+2)^3 - 16q(\alpha+2).
\end{aligned}$$

Это завершает индукцию. ■

В силу равенства (С.13) ненулевые векторы v_η, $\eta \in L_\nu$ — линейно независимы, поэтому неравенство $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ дает $v_{\nu_1} \neq 0$, $v_{\nu_1-2} = 0$ для некоторого $\nu_1 \in L_\nu$. Из неприводимости представления τ мы получаем

$$V = \operatorname{span}(v_{\nu_1}, v_{\nu_1+2}, \ldots, v_\nu), \ \dim_{\mathbb{C}} V = \frac{1}{2}(\nu - \nu_1) + 1 \tag{C.16}$$

в силу (С.13) и (С.15). Уравнение (С.15) для $\eta = \nu_1 - 2$ влечет равенство

$$(\nu_1 - 2 - \mu)(\nu_1 + \mu)(\nu_1 + \nu) = 0. \tag{C.17}$$

Положим теперь $Z_+ = D^+, Z_- = D^-, F = F_{kk}$, $k \geqslant 2$, для операторов D^+, D^-, F_{kk} из п. 8.2.1 и $V := \widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1})$; тогда

$$q = \frac{1}{2}\left(m_k^2 + m_{k-1}^2 + (2k-1)m_k + (2k-3)m_{k-1}\right) + \frac{1}{4}(2k-1)(2k-3). \tag{C.18}$$

Пусть $\mathcal{A}' := (U(\mathfrak{so}(2k+1,\mathbb{C})))^{\mathfrak{so}(2k-1,\mathbb{C})}$ — централизатор подалгебры Ли $\mathfrak{so}(2k-1,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(2k+1,\mathbb{C})$ в $U(\mathfrak{so}(2k+1,\mathbb{C}))$. Очевидно, что алгебра $\mathcal{A}'$ действует в V. Из теоремы 9.1.12 в [33] следует неприводимость этого действия. В силу определения операторов D^+, D^-, F_{kk}, $k \geqslant 2$, в п. 8.2.1 и теоремы 2.3, алгебры $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}$ совпадают по модулю элементов, действующих в пространстве V как скалярные операторы. Поэтому $\mathcal{A}$-модуль V неприводим и применима лемма С.1.

Покажем, что

$$(\nu_1 - 2 - \mu)(\nu_1 + \mu) \neq 0. \tag{C.19}$$

Действительно, $\mathcal{A}$-модуль $\widetilde{V}_{\mathfrak{B}_k}(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1})$ не содержит весовых подпространств, соответствующих весам $j\varepsilon_k$ для $|j| > m_k$ [80], откуда

$$(\nu_1 - 1)^2 + (\nu + 1)^2 \leqslant 2(m_k + 1)^2. \tag{C.20}$$

Если $(\nu_1 - 2 - \mu)(\nu_1 + \mu) = 0$, то $|\nu_1 - 1| = |\mu + 1|$ и уравнение (С.14) ведет к неравенству

$$2 + 4q = (\mu + 1)^2 + (\nu + 1)^2 \leqslant 2(m_k + 1)^2,$$

которое в силу (С.18) эквивалентно неравенству

$$m_{k-1}^2 + (2k-3)(m_k + m_{k-1}) + \frac{1}{2}(2k-1)(2k-3) \leqslant 0. \tag{C.21}$$

Очевидно, что неравенство (С.21) невозможно.

Таким образом, из (C.16), (C.17), (C.19) и (8.8) мы получаем $\nu = -\nu_1 = m_k - m_{k-1}$. Теперь разложение (8.14) следует из (C.13) и (C.16).

Рассмотрение для пространства $V := \widetilde{V}_{\mathfrak{D}_k}(m_k\varepsilon_k + m_{k-1}\varepsilon_{k-1})$, $k \geqslant 2$, и операторов $Z_+ = D^+, Z_- = D^-, F = F_{kk}$, $k \geqslant 2$, из п. 8.2.2 аналогично.

Действительно, $\mathcal{A}$-модуль V неприводим по тем же причинам, что и выше. Теперь мы имеем

$$q = \frac{1}{2}\left(m_k^2 + m_{k-1}^2 + 2(k-1)m_k + 2(k-2)m_{k-1}\right) + (k-1)(k-2)$$

и предположение $(\nu_1 - 2 - \mu)(\nu_1 + \mu) = 0$ дает в силу (C.20) неравенство

$$2(k-2)m_k + (m_{k-1} + k - 2)^2 + k(k-2) \leqslant 0,$$

которое ведет к $k = 2$, $m_{k-1} = 0$ и равенству в (C.20). Это дает

$$\nu = -\nu_1 = m_k - |m_{k-1}|. \tag{C.22}$$

Последняя возможность $\nu_1 = -\nu$ в (C.17) также ведет к (C.22) в силу (8.18) и (C.16). Теперь разложение (8.20) является следствием (C.13), (C.16) и (C.22).

Приложение D

Нерешенные задачи

1) Найти непостоянные центральные потенциалы (или доказать их отсутствие), для которых квантово-механическая или классическая задача двух тел на двухточечно-однородных пространствах интегрируема в каком-либо смысле.

2) Доказать полноту системы образующих $D_0, \cdots, D_9$ для алгебры

$$\mathrm{Diff}_I\left(\mathbf{P}^2(\mathbb{C}a)_{\mathbf{S}}\right).$$

3) Классифицировать приведенные фазовые пространства для задачи двух тел на пространствах

$$\mathbf{P}^n(\mathbb{C}), \mathbf{P}^n(\mathbb{H}), \mathbf{P}^2(\mathbb{C}a), \mathbf{H}^n(\mathbb{C}), \mathbf{H}^n(\mathbb{H}), \mathbf{H}^2(\mathbb{C}a),\ n = 2, 3.$$

4) Дискретный спектр задачи двух тел в евклидовом пространстве получается после отделения центра масс. Интересно найти альтернативную процедуру его получения, пригодную также и для некомпактных двухточечно-однородных пространств (см. § 8.4). Это не противоречит гипотезе 8.1, поскольку процедура отделения центра масс изменяет гамильтониан.

Предметный указатель

А
абсолют 19
алгебра
— градуированная 33
— фильтрованная 33
антиподальное многообразие 4

Б
Балмера формула 193
Бельтрами–Клейна модель гиперболического пространства 20
Бертрана задача 172
бертрановские потенциалы 172

В
вращение 20
— ось 20
— свободное 236
— центр 20

Г
Гамильтона функция 116
гамильтонов поток 116
гамильтонова система 116
— приведенная 131
гамильтоново векторное поле 116
гамма-функция 298
Гаусса уравнение 297
гороцикл 21

Д
двухточечно-однородное пространство 1
— кратности 7
деквантование 139
$\mathbb{R}$-диагонализуемая подалгебра алгебры Ли 10
дробно-линейное преобразование 297

И
инвариант xviii

Й
Йордана алгебра $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C}a)$ 25

К
Казимира оператор 39, 42
каноническая 1-форма на кокасательном расслоении 132
каноническая симплектическая структура на кокасательном расслоении 132
Като неравенство 62
квазиточнорешаемые квантовомеханические системы 253
квантование 138
Кеплера задача 173
Кеплера закон
— второй 171
— первый 176, 181
— третий 177, 182
Киллинга форма 6
Кириллова форма 124
коммутативное пространство 31
коммутатор векторных полей 34

коммутационные соотношения 45
коники на гиперболическом пространстве 177
— гипербола 177
— горогипербола (гиперболическая парабола) 179
— гороэллипс (эллиптическая парабола) 179
— эллипс 175
критические показатели 295

Л
Лагранжа теорема 74
линейный оператор
— замыкаемый 52
— самосопряженный 51
— самосопряженный в существенном 52
— симметричный 51
— сопряженный 51
ли-символ оператора 37, 40

М
метод гамильтоновой редукции 129
Муфанг центральное тождество 23

Н
наблюдаемые в классической механике 226
натуральная механическая система 139
некоммутативная интегрируемость 119, 122
нормальные координаты 36

О
особая вещественная группа Ли F_4 25
особая вещественная группа Ли G_2 22
отображение
— комомента 125
— момента 125
— — регулярное значение 1
— симметризации 35

П
поднятие действия на кока
ное расслоение 132
полная интегрируемость
— в коммутативном смысле
— в некоммутативном смыс
122
полное векторное поле 116
полуторалинейная форма
бертовом пространстве 5
— замкнутая 53
— замыкаемая 53
— замыкание 53
— положительная 52
— полуограниченная 52
— порожденная оператором
представление
— группы Spin(7)
— — векторное 28
— — спинорное 28
— группы Spin(8)
— — векторное 24
— — спинорное 23
— левое регулярное 254
— правое регулярное 254
преобразование гиперболи
пространства
— гиперболическое 21
— параболическое 21
— эллиптическое 20
преобразование Мёбиуса 2
приведенное пространство
проективное пространство
— вещественное 16

— кватернионное 11
— комплексное 14
— октавное 26
пространство ограниченной геометрии 60
Пуанкаре модель гиперболического пространства
— в верхнем полупространстве 20
— в единичном шаре 19
Пуассона алгебра 118
Пуассона скобки 117
пуассонов идеал 135
пуассоново действие 125
пфаффиан 98

Р
ранг
— вещественный полупростой алгебры Ли 10
— полупростой алгебры Ли 3
— симметрического пространства **2**
редуктивное пространство 39
Рунге-Ленца вектор
— для гиперболической плоскости 179
— для сферы 182

С
символ дифференциального оператора 139
Р-символ Римана 296
симметрическая алгебра 35
симплектическое действие 125
симплектическое многообразие 116
симплектическая структура 116
слабо коммутативное пространство 138
собственное действие 130
соотношение второго типа 46
соотношение первого типа 45
сопряжение
— кватернионное 11
— октавное 22
эрмитово 24
степень элемента градуированной алгебры 34
существенная область определения
— линейного оператора 52
— полуторалинейной формы 53

Т
трансверсальная часть дифференциального оператора 64
трансляция 21
— ось 21
— свободная 236
тройственности принцип 24
— инфинитезимальный аналог 28

У
уравнение
— гипергеометрическое 297
каноническое решение 298
— Гойна 300
— Римана 296

Ф
фазовое пространство 116
Фрадкина тензор
— для гиперболической плоскости 185
— для сферы 186
Фридрихса расширение полуограниченного оператора 57
Фробениуса теорема 22
Фукса тождество 296
фуксово дифференциальное уравнение 295
— обыкновенная точка 295

— особая точка 295
функции в инволюции 117

Ч

четверка
— гармоническая 302
— эквиангармоническая 302

Э

Эйлера тождество 74
экспоненциальное геодезическое отображение 59
элемент алгебры Ли so(l, n)
— гиперболический 21
— параболический 21
— эллиптический 21

Литература

1. Александров И. В. Топологический анализ гамильтоновой системы с некоммутативным полным набором интегралов, Вест. Моск. Ун-та, сер. 1. Матем. Механика. — 1990. — № 3. — С. 13-18.
2. АльфорсЛ, Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. — М.: Мир, 1986.
3. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Труды МИАН. Т. 90 (1967), № 5, с. 1-210.
4. Аппель П.Э. Теоретическая механика. — М.: ИЛ, 1960.
5. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи матем. наук. Т. 18 (1963), вып. 5, с. 13-40.
6. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
7. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 3-х томах. — М.: Наука, 1967.
9. Бессе А.Л. Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1981.
10. Бессе А.Л. Многообразия Эйнштейна. В 2-х томах. — М.: Мир, 1990.
11. Богуш А.А., Курочкин Ю.А., Отчик В.С. О квантово-механической задаче Кеплера в трехмерном пространстве Лобачевского. Доклады АН БССР. Т. 24 (1980), с. 19-22.
12. Богуш А.А., Отчик В.С., Редьков В.М. Разделение переменных в уравнении Шредингера и нормированные функции состояний для задачи Кеплера в трехмерных пространствах постоянной кривизны. Известия АН БССР, № 3 (1983), с. 56-62.

13. Болсинов А. В., Йованович Б. Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах. Математ. сборник. Т. 192 (2001), вып. 7, с. 21-40.

14. Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. — Ижевск: РХД, 1999.

15. Браверман М., Милатович О., Шубин М. Существенная самосопряженность операторов типа Шредингера на многообразиях. Успехи матем. наук. Т. 57 (2002), вып. 4, с. 3-58.

16. Браилов А. В. Полная интегрируемость некоторых геодезических потоков и интегрируемые системы с некоммутирующими интегралами. Докл. АН СССР. Т. 271 (1983), № 2, с. 273-276.

17. Бредон Г. Э. Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.

18. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. — М.: Мир, 1972.

19. Вейль Г. Классические группы. Их инварианты и представления. — М.: Госуд. издательство иностранной литературы, 1947.

20. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений груп— М.: Наука, 1991.

21. Винберг Е. Б. Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия. Успехи матем. наук. Т. 56 (2001), вып. 1, с. 3-62.

22. Винберг Е. Б. Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс, 2002.

23. Винберг Е. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: Наука, 1988.

24. Винберг Е. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов. Итоги науки. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 55. С. 137-309. - М.: ВИНИТИ, 1989.

25. Возмищева Т. Г., Ошемков А. А. Топологический анализ задачи двух центров на двумерной сфере. Матем. сборник. Т. 193 (2002), № 8, с. 3-38.

26. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. — М.: Наука, 1982.

27. Гальперин Г. А. О понятии центра масс системы материальных точек в пространствах постоянной кривизны. ДАН СССР. Т. 302 (1988), р. 1039-1044.

28. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. — М.: Мир, 1981.

29. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1950.

30. Грановский Я. И., Жеданов А. С., Луценко И. М. Квадратичные алгебры и динамика в искривленном пространстве I. Осциллятор. Теор. и мат. физика. Т. 91 (1992), с. 207 -216. II. Проблема Кеплера, с. 396-410.

31. Грей А. Трубки. Формула Вейля и ее обобщения. — М.: Мир, 1993.

32. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.

33. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. — М.: Мир, 1978.

34. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.

35. Желобенко Д. П. Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений. Успехи мат. наук. Т. 17 (1962), вып. 1, с. 27 -120.

36. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. — М.: Наука, 1970.

37. Зиглин С. Л. О неинтегрируемости ограниченной задачи двух тел на сфере. Доклады РАН. Т. 379 (2001), с. 477-478.

38. Зиглин С. Л. О неинтегрируемости ограниченной задачи двух тел с потенциалом упругого взаимодействия на сфере. Доклады РАН. Т. 391 (2003), с. 51-52.

39. Инфельд Л., Халл Т. Е. Метод факторизации. Математика (сборник переводов). Т. 10 (1966), № 3, с. 39-125.

40. Каган В.Ф. Основания геометрии. Т. 2. — М.: ГИТТЛ, 1956.

41. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

42. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1978.

43. Кириллов А. А. Инвариантные операторы над геометрическими величинами. В книге: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Т. 16, 1980, с. 3-29.

44. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.—Л.: Гостехиздат, 1936.

45. Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. — М.: Мир, 1982.

46. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1,2. - М.: Наука, 1981.

47. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. литературы, 1958.

48. Козлов В. В. О динамике в пространствах постоянной кривизны. Вест. МГУ. Сер. 1, матем., механ., 1994, *№* 2, *с.* 28 -35.

49. Козлов В. В., Федоров Ю. Н. Интегрируемые системы на сфере с потенциалами упругого взаимодействия. Мат. заметки. Т. 56 (1994), № 3, с. 74-79.

50. Курочкин Ю. А., Отчик В. С. Аналог вектора Рунге-Ленца и спектр энергий в задаче Кеплера на трехмерной сфере. Доклады АН БССР. Т. 23 (1979), с. 987-990.

51. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Наука, 1989.

52. Лобачевский Н. И. Новые начала геометрии с новой теорией параллельных, 1835-1838, в кн. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. Т. 2, М.: ГИТТЛ, 1949, с. 159.

53. Лоос О. О. Симметрические пространства. — М.: Наука, 1985.

54. Микитюк И. В. Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами. Матем. сборник. Т. 129 (1986), вып. 4, стр. 514-534.

55. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем. Функцион. анализ и его приложения. Т. 12 (1978), вып. 2, с. 46-56.

56. Мордухай-Болтовский Д. Про деят задач1 небесно! механши в неЕвклщовому простор!. Журнал математичного циклу АН УССР. Т. 2 (1932), № 1, с. 47-70.

57. Олейник И. М. О существенной самосопряженности оператора Шредингера на полных римановых многообразиях. Матем. заметки. Т. 54 (1993), *вып.* 3, с. 89-97.

58. Олейник И. М. О связи классической и квантово-механической полноты потенциала на бесконечности на полном римановом многообразии. Матем. заметки. Т. 55 (1994), вып. 4, с. 65-73.

59. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп преобразований. — М.: Наука, 1995.

60. Отчик В.С. Симметрия и разделение переменных в задаче двух кулоновских центров в трехмерных пространствах постоянной кривизны. Докл. АН БССР. Т. 35 (1991), с. 420-424.

61. Отчик В.С. О связи сферического и параболического базисов в квантово-механической задаче Кеплера в пространстве Лобачевского. Весцi АН Беларуси сер. ф!з. -мат. навук, 1999, №. 4, с. 67-72.

62. Переломов А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. — М.: Наука, 1990.

63. Постников М. М. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982.

64. Постников М.М. Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987.

65. Рибенбойм П. Последняя теорема Ферма для любителей. — М.: Мир, 2003.

66. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.

67. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. — М.; Мир, 1978.

68. Розенфельд Б. А., Замаховский М. П. Геометрия групп Ли. -—М.: МЦНМО, 2003.

69. Рыбников Л. Г. О коммутативности слабо коммутативных римановых однородных пространств. Функциональный анализ и его приложения. Т. 37 (2003), вып. 2, с. 41-51.

70. Серр Ж. -П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.

71. Славянов С.Ю., Лай В. Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. — СПб.: Невский Диалект, 2002.

72. Справочник по специальным функциям. Ред. Абрамовиц М., Стиган И. — М.: Наука, 1979.

73. Старков А. Н. Динамические системы на однородных пространствах. — М.: Фазис, 1999.

74. Степанова И.Э., Щепетилов А. В. Задача двух тел на пространствах постоянной кривизны. II. Спектральные свойства гамильтониана. Теор. и мат. физика, т. 124 (2000), с. 481-489. Исправленный вариант: math-ph/0501015.

75. Татаринов Я. В. Лекции по классической динамике. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

76. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. — М.: Факториал, 1995.

77. Ушверидзе А. Г. Квазиточнорешаемые модели квантовой механики. Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ), 1989, т. 20, с. 1185-1245.

78. Ушверидзе А. Г. Квазиточнорешаемость. Новое явление в квантовой механике. Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ), 1992, т.23, с. 58-121.

79. Фрейденталь Г. Октавы, особые группы и октавная геометрия. Математика. Сб. переводов. Т. 1, № 1, 1957, с. 117-153.

80. Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. — М: МЦНМО, 2003.

81. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.

82. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. — М.: Мир, 1987.

83. Шварц Л. Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972.

84. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Части 1-2. — М.: Наука, 1972.

85. Шредингер Э. Метод определения квантово-механических собственных значений и собственных функций. Избранные труды по квантовой механике. — М.: Наука, 1982, с. 239-247.

86. Щепетилов А. В. Некоторые квантово-механические задачи в пространстве Лобачевского. Теор. и мат. физика. Т. 109 (1996), № 3, с. 395-405.

87. Щепетилов А. В. Квантово-механическая задача двух тел с центральным взаимодействием на односвязных поверхностях постоянной кривизны. Теор. и мат. физика. Т. 118 (1999), с. 248-263.

88. Щепетилов А. В. Задача двух тел на пространствах постоянной кривизны. I. Связь гамильтониана с группой симметрий и редукция классической задачи. Теор. и мат. физика. Т. 124 (2000), с. 249-264. Исправленный вариант: math-ph/0501015.

89. Щепетилов А. В. Редукция задачи двух тел с центральным взаимодействием на односвязных поверхностях постоянной кривизны. Фундаментальная и прикладная математика. Т. 6 (2000), № 1, с. 249-263.

90. Adams J. F. Lectures on exceptional Lie groups, Chicago Univ. Press, Chicago, 1996.

91. Allcock D. Identifying models of the octave projective plane, Geometriae Dedicata, V. 65 (1997), pp. 215-217.

92. Arnold V. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a 1'hydrodynamique des fluides parfaits, Annales de l'lnstitut Fourier, V. 16 (1966), no. 1, pp. 319-361.

93. ArnoldV. I., Khesin B.A. Topological methods in hydrodynamics, Springer, New-York, 1998.

94. AslaksenH. Restricted homogeneous coordinates for the Cayley projective plane, Geometriae Dedicata, V. 40 (1991), pp. 245-250

95. Baez J.C. The octonions, Bull. Amer. Math. Soc., V. 39 (2001), pp. 145-205. Исправленный вариант: math. RA/O 105155.

96. Balazs N.L., Voros A. Chaos on the pseudosphere, Physics Reports, V. 143 (1986), pp. 109-240.

97. Barut A. O., Inomata A., Junker G. Path integral treatment of the hydrogen atom in a curved space of constant curvature I, II, J. Phys. A. Math. Gen. V. 20 (1987), pp. 6271-6280; V. 23 (1990), pp. 1179-1190.

98. Barut A. O., Wilson R. On the dynamical group of the Kepler problem in a curved space of constant curvature, Physics Lett., V. 110A (1985), pp. 351-354.

99. Bertrand J. Theorem relatif au mouvement d'un point attire vers un centre fixe, C. R. Acad. Sci. Paris V. 77 (1873), pp. 849-853.

100. Blaschke W. Nichteuklidische Geometrie und Mechanik, 1942, Leipzig und Berlin, Teubner.

101. Blaschke W. Nichteuklidische Mechanik, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. der Wiss., Math.-Nat. Kl., 1943, Abh. 2, S. 1-10.

102. Bogush A. A., Kurochkin Yu. A., Otchik V. S. Coulomb scattering in the Lobachevsky space, Nonlinear Phenomena in Complex Systems, V. 6 (2003), pp. 894-897.

103. Bolsinov A. V., Jovanovic B. Noncommutative integrability, moment rnap and geodesic flows, Annals of global analysis and geometry, V. 23 (2003), pp. 305-322.

104. Bolsinov A. V., Jovanovic B. Integrable geodesic flows on Riemannian manifolds: Consruction and Obstructions, in Bokan N., Djoric M.,

Rakic Z., Fomenko A. T., Wess J. (Eds.), Contemporary Geometry and Related Topics, World Scientific, 2004, pp. 57-103. also avalable at arXiv: math-ph/0307015.

105. Bolyai W., Bolyai J. Geometrische Untersuchungen. Hrsg. P. Stackel, Teubner, Leipzig/Berlin, 1913.

106. Borisov A.V., Mamaev I. S. Generalized problem of two and four Newtonian centers. Celest. Mech. Dynam. Astron., V. 92 (2005), pp. 371-380.

107. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Two-body problem on a sphere. Reduction, stochasticity, periodic orbits. Reg. Chaot. Dyn., V. 9 (2004), pp. 265-279.

108. Cannas da Silva A. Lectures on symplectic geometry. Lecture notes in mathematics V. 1764. Springer-Verlag. Berlin. 2001.

109. Casimir H. Ueber die Konstruktion einer zu den irreduzibelen Darstelung halbeinfacher kontinuierlicher Gruppen gehorigen Differetialgleichung, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings of the section of science. V. 34 (1931), pp. 844-846.

110. Chavel I. Riemannian symmetric spaces of rank one. Marcel Dekker, N.Y., 1972.

111. Cheeger J., Gromov M., Taylor M. Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifold, J. Diff. Geometry, V. 17 (1982), no. 1, pp. 15-53.

112. Chern S. S., Tenenblat K. Pseudospherical surfaces and evolution equations, Stud. Appl. Math., V. 74 (1986), pp. 55-83.

113. Chernikov N. A. The Kepler problem in the Lobachevsky space and its solution, Acta Phys. Polonica, Ser. B, V. 23 (1992), pp. 115-122.

114. Chernoivan V. A., Mamaev I. S. Restricted problems of two bodies in curvated spaces, Regular and chaotic dynamics, V. 4 (1999), N.2, pp. 112-124.

115. Conway J.H., Smith D.A. On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry. A K Peters, Natick, MA.

116. Dombrowski P., Zitterbarth J. On the planetary motion in the three dimensional standart spaces of constant curvature κ e M, Demonstratio Mathematica, V. 24 (1991), pp. 375-458.

117. Donnelly H., Garofalo N. Schrodinger operators on manifolds, essential self-adjointness, and absence of eigenvalues, Journal of Geom. Anal., V. 7 (1997), pp. 241-257.

118. Faris W. Self-adjoint operators, Lecture Notes in Math., V. 433, Springer, New York, 1975.

119. Fuchs L. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veranderlichen Coefficienten, J. Reine Angew. Math., Bd. 66 (1866), S. 121-160; Bd. 68 (1868), S. 354-385.

120. Galperin G.A. A concept of the mass center of a system of material points in the constant curvature spaces, Comm. Math. Phys., V. 154 (1993), pp. 63-84.

121. Gelbart S. S. A theory of Stiefel harmonics, Trans, of AMS, V. 192 (1974), pp. 29-50.

122. Gordon W. B. On the relation between period and energy in periodic dynamical systems, J. Math, and Mech., V. 19 (1969), pp. 111-114.

123. Gotay M.J. Constraints, reduction, and quantization, J. Math. Phys., V. 27 (1986), no. 8, pp. 2051-2066.

124. Goto M., Grosshans F. D. Semisimple Lie algebras, Marcel Dekker, New York, 1978.

125. Guillemin V., Sternberg S. Symplectic techniques in physics. Cambridge. Cambridge Univ. Press. 1984.

126. Gutzwiller M.C. Chaos in classical and quantum mechanics. Springer, New York, 1992.

127. Heath R.S. On the dynamics of a rigid body in elliptic space, Phil. Transactions of the Royal Soc. of London, V. 175 (1884), pp. 281-324.

128. Helgason S. Differential operators on homogeneous spaces, Acta Math., V. 109 (1959), pp. 239-299.

129. Helgason S. The surjectivity of invariant differential operators on symmmetric. spaces, Ann. of Math. V. 98 (1973), pp. 451-480.

130. Helgason S. Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Acad. Press, N.Y., 1978.

131. Helgason S. Geometric analysis on symmetric spaces, AMS, Providence, 1994.

132. Higgs P. W. Dynamical symmetries in a spherical geometry 1, J. Phys. A. Math. Gen., V. 12 (1979), pp. 309-323.

133. Ikeda M., Nishino Y. On classical dynamical systems admitting the maximum number of linearly independent first integrals, Math. Japon., V. 17 (1972), pp. 69-78.

134. Ikeda M., Katayama N. On generalization of Bertrand's theorem to spaces of constant curvature, Tensor, V. 38 (1982), pp. 37-40.

135. Infeld L. On the new treatment of some eigenvalue problems, Phys. Rev. V. 59 (1941), pp. 737-747.

136. Infeld L., Schild A. A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature, Phys. Rev. V. 67 (1945), pp. 121-122.

137. Iwai T., Hirose T. The reduction of quantum systems of three identical particles on a plane, J. Math. Phys., V. 43 (2002), pp. 2907-2926.

138. Iwai T., Hirose T. Reduction of quantum systems with symmetry, continuous and discrete, J. Math. Phys., V. 43 (2002), pp. 2927-2947.

139. Kalnins E.G., Miller W., Pogosyan G. S. Superintegrability and associated polynimial solutions. Euclidean space and the sphere in two dimensions, J. Math. Phys., V. 37 (1996), pp. 6439-6467.

140. Kalnins E.G., Miller W., Pogosyan G.S. Superintegrability in the two-dimensional hyperboloid, J. Math. Phys., V. 38 (1997), pp. 5416—5433.

141. Kalnins E.G., Miller W., Hakobyan Ye.M., Pogosyan G.S. Superintegrability in the two-dimensional hyperboloid II, J. Math. Phys., V. 40 (1999), pp. 2291-2306.

142. Katayama N. A note on the Kepler problem in a space of constant curvature, Nuovo Cimento, V. 105 B (1990), pp. 113-119; Corrigendum: p. 707.

143. Katayama N. A note on a quantum-mechanical harmonic oscillator in a space of constant curvature, Nuovo Cimento, V. 107 B (1992), pp. 763-768.

144. Katayama N. On generalized Runge-Lenz vector and conserved symmetric tensor for central-potential systems with a monopole field on spaces of constant curvature, Nuovo Cimento, V. 108 B (1993), pp. 657-667.

145. Katayama N., Matsushita Y. A problem on closed orbits in a cosmological model, Tensor, V. 42 (1985), pp. 173-178.

146. Kilin A. A. Libration points in spaces S^2 and L^2, Regular and chaotic dynamics, V. 4 (1990), pp. 91-104.

147. Killing W. Die mechanik in den nicht-Euklidischen raumformen, J. Reine Angew. Math., Bd. 98 (1885), S. 1-48.

148. Kozlov V. V., Harin A. O. Keplers problem in constant curvature spaces, Celest. Mech. and Dynam. Astron. V. 54 (1992), pp. 393-399.

149. Kuiken K. Heun's equation and the hyperbolic equation, SIAM J. Math. Anal., V. 10 (1979), pp. 655-657.

150. Kummer M. On the construction of the reduced phase space of a Hamiltonian system with symmetry, Indiana Univ. Math. J., V. 30 (1973), pp. 281-291.

151. Landsman N.P. Rieffel induction as generalized quantum Marsden-Weiristein reduction, J. Georri. Phys., V. 15 (1995), pp. 285-319.

152. Leemon H.I. Dynamical symmetries in a spherical geometry II, J. Phys. A. Math. Gen., V. 12 (1979), pp. 489-501.

153. Levin D.A. Systems of singular integral operators on spheres, Traris. of AMS, V. 144 (1969), pp. 493-522.

154. Liebmann H. Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum, Berichte der Konigl. Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaft, Math. Phys. Klasse, Bd. 54 (1902), S. 393-423.

155. Liebmann H. Uber die Zentralbewegung in der nichteuklidische Geometrie, Berichte der Konigl. Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaft, Math. Phys. Klasse, Bd. 55 (1903), S. 146-153.

156. Liebmann H. Nichteuklidische geometrie. G.J. Goschen, Leipzig, 1905; 2-nd ed. 1912; 3-rd ed. Walter de Gruyter, Berlin, Leipzig, 1923.

157. Lim C.C. Relative equilibria of symmetric n-body problems on a sphere: inverse and direct results, Comm. Pure Appl. Math., V. 51 (1998), pp. 341-442.

158. Lipschitz R. Forgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n-Differentialen, J. Reine Angew. Math., Bd. 72 (1870), S. 1-56.

159. Lipschitz R. Untersuchungen eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, J. Reine Angew. Math., Bd. 74 (1872), S. 116-149.

160. Lipschitz R. Extension of the planet-problem to a space of n dimensions and constant integral curvature, The Quaterly Journal of pure and applied mathematics, V. 12 (1873), pp. 349-370.

161. Maciejewski A. J., Przybylska M. Non-integrability of restricted two body problem in constant curvature spaces, Reg. Chaot. Dyn., V. 8 (2003), pp. 413-430.

162. Maier R. S. On reducing the Heun equation to the hypergeometric equation, J. Diff. Equations, V. 213 (2005), pp. 171-203; also available at math. CA/0203264.

163. Marsden J.E. Lectures on Mechanics. London Mathematical Society Lecture Note Series, V. 174, Cambridge Univ. Press. 1992.

164. Marsden J., Perlmutter M. The orbit bundle picture of cotangent bundle reduction, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, V. 22 (2000), pp. 33-54.

165. Marsden J., Ratiu T.S. Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems. Springer-Verlag. Berlin. 1994.

166. Marsden J., Weinstein A. Reduction of manifolds with symmetry, Rep. Math. Phys. V. 5 (1974), pp. 121-130.

167. Matsumoto H. Quelques remarques sur les espaces Riemanniens isotropes, C. R. Acad. Sci. Paris, V. 272 (1971), pp. 316-319.

168. McKean H.P. An upper bound to the spectrum of A on a manifold of negative curvature, J. Diff. Geom., V. 4 (1970), pp. 359-366.

169. Milatovic O. Self-adjointness of Schrodinger-type operators with singular potentials on manifolds of bounded geometry, Electronic Journal of Differential Equations, V. 2003 (2003), N. 64, pp. 1-8. URL: http://www.ma.hw.ac.uk/EJDE/index.html

170. Milatovic O. The form sum and the Friedrichs extension of Schrodinger-type operators on Riemannian manifolds, Proceedings of the AMS, V. 132 (2004), pp. 147-156.

171. Molev A. I. A weight basis for representations of even orthogonal Lie algebras, Adv. Studies in Pure Math., V. 28 (2000), pp. 223-242, math. RT/9902060.

172. Molev A. I. Weight bases of Gelfand-Tsetlin type for representations of classical Lie algebras, J. Phys. A: Math. Gen., V. 33 (2000), pp. 4143-4158, math. QA/9909034.

173. Montgomery R. The structure of reduced cotangent phase spaces for nonfree group action, Preprint PAM-143, Center for pure and applied mathematics, Univ. of California, Berkeley, 1983, available from http://count. ucsc. edu/~rmont/papers/covPBs85. PDF.

174. Nagy P. Dynamical invariants of rigid motions on the hyperbolic plane, Geometriae Dedicata, V. 37 (1991), pp. 125-139.

175. Nishino Y. On quadratic first integrals in the central potential problem for the configuration space of constant curvature, Math. Japon., V. 17 (1972), pp. 59-67.

176. Neumann C. Ausdehnung der Keppler'shchen Gesetze auf der Fall, dass die Bewegung auf einer Kugelflache stattfindet, Berichte der Konigl. Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaft, Math. Phys. Klasse, Bd.38 (1886), S. 1-2.

177. Oleinik I.M. On the essential self-adjointness of the general second order elliptic operators, Proceedings of AMS, V. 127 (1999), pp. 889-900.

178. Ortega J.-P., Ratiu T.S. Momentum map and Hamiltonian reduction, Progress in mathematics, V. 222, Birkhauser, 2004.

179. Otchik V. S. On the two Coulomb centres problem in a spherical geometry, Proceedings of the international workshop on symmetry methods in physics, Dubna, Russia, 1994, pp. 384-388.

180. Painleve P. Lemons sur la theorie analytic des equations differentielles, Hermann, Paris, 1897.

181.Porteous I.R. Topological geometry, VanNostrand Reinhold, New York, 1969 (second edition, Cambridge Univ. press, Cambridge, 1981).

182. Reimann H. M. Invariant differential operators in hyperbolic space, Comment. Math. Helvetici, V. 57 (1982), pp. 412-444.

183. Robinson R. C. Fixing the center of mass in the n-body problem by means of a group action, Coll. Internat. C. N.R.S., V. 237 (1975), pp. 147-153.

184. Salvai S. On the dynamic of a rigid body in the hyperbolic space, J. Geom. Phys., V. 36 (2000), pp. 126-139.

185.Saari D. G., Xia Z. Off to infinity in finite time, Notices of AMS, V. 42 (1995), pp. 538-546.

186. Sasaki R. Soliton equations and pseudospherical surfaces, Nuclear Phys., V. 154 B (1979), pp. 343-357.

187. Schering E. Die Schwerkraft im Gaussischen Raume, Nachr. Konigl. Ges. Wiss. Gottingen (1870), S. 311-321.

188. Schering E. Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Raiimen, Nachr. Konigl. Ges. Wiss. Gottingen (1873), S. 149-159.

189. Shchepetilov A.V. Reduction of the two-body problem with central interaction on simply connected spaces of constant sectional curvature, J. Phys. A: Math. Gen. V. 31 (1998), pp. 6279-6291; Corrigendum: V. 32 (1999), p. 1531.

190. Shchepetilov A.V. Classical and quantum mechanical two-body problem with central interaction on simply connected spaces of constant sectional curvature, Reports on mathematical physics, V. 44 (1999), N. 1/2, pp. 191-198.

191. Shchepetilov A.V. Invariant treatment of the two-body problem with central interaction on simply connected spaces of constant sectional curvature, Reports on mathematical physics, V. 46 (2000), N. 1/2, pp. 245-252.

192. Shchepetilov A. Invariant reduction of the two-body problem with central interaction on simply connected spaces of constant sectional curvature, In «Geometry, Integrability, and Quantization», pp. 229-240, Eds. I. Mladenov and G. Naber, Coral Press, Sofia, Bulgaria, **2000**.

193. Shchepetilov A.V. The geometric sense of the Sasaki connection, J. Phys. A: Math. Gen., V. 36 (2003), pp. 3893-3898.

194. Shchepetilov A.V. Algebras of invariant differential operators on unit sphere bundles over two-point homogeneous Riemannian spaces, J. Phys. A: Math. Gen., V. 36 (2003), pp. 7361-7396.

195. Shchepetilov A.V. Two-body problem on two-point homogeneous spaces, invariant differential operators and the mass centre concept, J. Geom. Phys., V. 48 (2003), pp. 245-274.

196. Shchepetilov A.V. Two-body quantum mechanical problem on spheres, J. Phys. A: Math. Gen., V. 39 (2006), pp. 4011-4046; math-ph/0507059.

197. Shchepetilov A.V. Nonintegrability of the two-body problem in constant curvature spaces, J. Phys. A: Math. Gen. V. 39 (2006), pp. 5787-5806; math. DS/0601382.

198. Shchepetilov A.V. Nonintegrability of the two-body problem in constant curvature spaces II, in Proceedings of the 5-th International Conference Bolyai-Gauss-Lobachevsky (Minsk, October 10-13, 2006). Editors: Yu. Kurochkin, V. Red'kov. B.I. Stepanov Institute of Physics, Minsk, 2006, pp. 290-297. Available also at math.DS/0611373.

199. Shubin M. Spectral theory of elliptic operators on non-compact manifolds, Asterisque, V. 207 (1992), pp. 35-108.

200. Simon B. Quantum mechanics for Hamiltonians defined as quadric forms. Princeton Univ. Press, N.J., 1971.

201. Simon B. Schrodinger operators in the twentieth century, J. of Math. Phys., V. 41 (2000), pp. 3523-3555.

202. Slawianowski J .J. Bertrand systems on SO(3,M) and SU(2), Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. phys. et astron. 1980. V. 28. pp. 83-94.

203. Slawianowski J.J., Slominski J. Quantiezed Bertrand systems on SO(3,R) and SU(2), Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. phys. et astron. V. 28 (1980), pp. 99-108.

204. Slawianowski J.J. Bertrand systems on spaces of constant sectional curvature. The action-angle analysis, Reports Math. Phys., V. 46 (2000), pp. 429-460.

205. Sniatycki J. Geometric quantization and quantum mechanics. Springer, N.Y., 1980.

206. Souriau J. -M. Structure des systemes dynamiques. Paris. Dunod. 1970.

207. Stackel P. Berichte iiber die Mechanik mehrfacher Mannigaltigkeiten, Jahrbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd. 12 (1903), S. 476.

208. Stevenson A. F. Note on the «Kepler problem» in a spherical space, and the factorization method of solving eigenvalue problem, Phys. Rev. V. 59 (1941), pp. 842-843.

209. Story W. E. On non-Euclidean properties of conics, American J. for Mathematics, V. 5 (1883), pp. 358-381.

210. Strichartz R. S. The explicit Fourier decomposition of $L^2(SO(n)/SO(n-m))$, Canad. J. Math., V. 27 (1975), pp. 294-310.

211. Strichartz R.S. Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold, J. of Funct. Anal., V. 52 (1983), pp. 48-79.

212. Sym A. Soliton surfaces and their applications, in Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems: Proc. Conf. (Scheveningen, The Nederlands, 26-31 Aug. 1984) (Lecture notes in physics, V. 239), ed. R. Martini, Berlin: Springer 1985, pp. 154-231.

213. Tanimura S., Iwai T. Reduction of quantum systems on Riemannian manifolds with symmetry and application to molecular mechanics, J. Math. Phys., V. 41 (2000), pp. 1814-1842.

214. The Painlevd property, one century later, ed. R. Conte. Springer N. Y. 1999.

215. Tits J. Sur certains classes d'espaces homogenes de groupes de Lie, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mem. Coll., V. 29 (1955), no. 3, pp. 1-268.

216. Tuynmann G.M. Reduction, quantization, and nonunimodular groups, J. Math. Phys., V. 31 (1989), pp. 83-90.

217. Ushveridze A. G. Quasi-exactly solvable models in quantum mechanics. Bristol, IOP, 1993.

218. Velpry C. Kepler's laws and gravitation in non-euclidean (classical) mechanics. Heavy Ion Physics, V. 11 (2000), pp. 131-145.

219. Vozmischeva T.G. Classification of motions for generalization of the two-center problem on a sphere, Cel. Mech. and Dyn. Astr., V. 77 (2000), pp. 37-48.

220. Vozmischeva T.G. Integrable problems of celestial mechanics in spaces of constant curvature, Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.

221. Wang H. C. Two-point homogeneous spaces, Ann. Math., V. 55 (1952), pp. 177-191.

222. Woodhouse N. Geometric quantization. Clarenton Press, Oxford, 1980.

223. Wren K. K. Quantization of constrained systems with singularities using Rieffel induction, J. Geom. Phys., V. 24 (1998), pp. 173-202.

224. Zitterbarth J. Some remarks on the motion of a rigid body in a space of constant curvature without external forces, Demonstratio Mathematica, V. 24 (1991), pp. 465-494.

Щепетилов Алексей Валериевич

АНАЛИЗ И МЕХАНИКА

НА ДВУХТОЧЕЧНО-ОДНОРОДНЫХ РИМАНОВЫХ

ПРОСТРАНСТВАХ

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка Д. В. Панкратов
Корректор Г. Г. Тетерина

Подписано в печать 18.02.2008. Формат 60 x 84У$_{16}$.
Печать офсетная. Уел. леч.л. 20,93. Уч. изд. л. 19,51.
Гарнитура Антиква. Бумага офсетная №1. Заказ №12.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500-295

Уважаемые читатели!

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать через наш Интернет-магазин Mathesis: **http://shop.rcd.ru**

а также заказать по электронной почте **subscribe@rcd.ru**

Книги также можно приобрести в наших представительствах:

МОСКВА
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел.: 135-54-37

ИЖЕВСК
Удмуртский государственный университет
ул. Университетская, д. 1, корп. 4, 2 эт., к. 211, тел./факс: (3412) 500-295

Также книги можно приобрести:

МОСКВА
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова ГЗ (1 эт.), Физический ф-т (1 эт.), Гуманитарный ф-т (0 и 1 эт.), Биологический ф-т (1 эт.).

Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина ГЗ (3-4 эт.), книжные киоски фирмы «Аргумент».

Магазины:

МОСКВА: «Дом научно-технической книги»
Ленинский пр., 40. тел.: 137-06-33

«Московский дом книги»
ул. Новый Арбат, 8. тел.: 290-45-07

«Библиоглобус»
м. «Лубянка», ул. Мясницкая, 6. тел.: 928-87-44

ДОЛГОПРУДНЫЙ: Книжный магазин «Физматкнига»
новый корп. МФТИ, 1 эт. тел.: 409-93-28

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ: «Санкт-Петербургский дом книги»
Невский проспект, 28

Издательство СПбГУ, Магазин №1
Университетская набережная, 7/9

интеркот-магазин
azoN.ru
33223825

ISBN 978-5-93972-649-8